

А. А. АНДРОНОВ, А. А. ВИТТ и С. Э. ХАЙКИН

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Переработка и дополнения
Н. А. ЖЕЛЕЗЦОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

АННОТАЦИЯ

Книга написана известными советскими учеными, давшими основополагающие работы в новой области теории нелинейных колебаний, имеющей широкое применение в современной технике (авторегулирование, радиотехника и т. п.). В книге систематически изложен обширный материал по теории нелинейных колебаний автономных систем с одной степенью свободы, охватывающий большое число колебательных систем, встречающихся в инженерной практике.

Первое издание книги вышло в 1937 г. и в настоящее время стало библиографической редкостью. Во второе издание книги внесены существенные изменения и дополнения, вытекающие главным образом из работ академика А. А. Андропова и его школы и отражающие развитие теории автономных нелинейных систем с одной степенью свободы за 20 лет, прошедшие со времени выхода первого издания. Книга рассчитана на научных и инженерно-технических работников, встречающихся в своей работе с различными колебательными процессами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	8
Предисловие к первому изданию	9
Введение	15

ГЛАВА I

Линейные системы

§ 1. Линейная система без трения (гармонический осциллятор)	35
§ 2. Понятие о фазовой плоскости. Представление совокупности движений гармонического осциллятора на фазовой плоскости	38
1. Фазовая плоскость (38). — 2. Уравнение, не содержащее времени (40). — 3. Особые точки, Центр (41). — 4. Изоклины (42). — 5. Состояние равновесия и периодические движения (43).	
§ 3. Устойчивость состояния равновесия	45
§ 4. Линейный осциллятор при наличии трения	48
1. Затухающий осцилляторный процесс (49). — 2. Изображение затухающего осцилляторного процесса на фазовой плоскости (52). — 3. Непосредственное исследование дифференциального уравнения (56). — 4. Затухающий аperiodический процесс (59). — 5. Изображение аperiodического процесса на фазовой плоскости (62).	
§ 5. Осциллятор с малой массой	68
1. Линейные системы с $1/2$ степени свободы (68). — 2. Начальные условия и идеализация (72). — 3. Условия скачка (74). — 4. Другие примеры (77).	
§ 6. Линейные системы с «отрицательным трением»	82
1. Механический пример (82). — 2. Электрический пример (85). — 3. Картина на фазовой плоскости (87). — 4. Поведение системы при изменении обратной связи (90).	
§ 7. Линейная система с отталкивающей силой	94
1. Картина на фазовой плоскости (95). — 2. Электрическая система (98). — 3. Особая точка типа седла (99).	

ГЛАВА II

Консервативные нелинейные системы

§ 1. Введение	103
§ 2. Простейшая консервативная система	104
§ 3. Исследование фазовой плоскости вблизи состояний равновесия	108
§ 4. Исследование характера движений на всей фазовой плоскости	116
§ 5. Зависимость поведения простейшей консервативной системы от параметра	125
1. Движение тяжелой точки по окружности, вращающейся вокруг вертикальной оси (129). — 2. Движение тяжелой точки по параболу, вращающейся вокруг вертикальной оси (133). — 3. Движение проводника, обтекаемого током (136).	

§ 6.	Уравнения движения	141
	1. Колебательный контур с железом (143). — 2. Колебательный контур с сегнетовой солью в конденсаторе (145).	
§ 7.	Общие свойства консервативных систем	148
	1. Периодические движения и их устойчивость (149). — 2. Однозначный аналитический интеграл и консервативность (151). — 3. Консервативные системы и вариационный принцип (155). — 4. Интегральный инвариант (156). — 5. Основные свойства консервативных систем (162). — 6. Пример. Совместное существование двух видов (164).	

ГЛАВА III

Неконсервативные системы

§ 1.	Диссипативные системы	168
§ 2.	Осциллятор с «кулоновским» трением	175
§ 3.	Ламповый генератор в случае Γ -характеристики	182
§ 4.	Теория часов. Модели с ударами	196
	1. Часы в случае линейного трения (198). — 2. Ламповый генератор с контуром в цепи сетки в случае Γ -характеристики (201). — 3. Модель часов с кулоновским трением (204).	
§ 5.	Теория часов. Безударная модель «спуска с отходом назад»	213
	1. Модель часов с балансиром «без собственного периода» (217). — 2. Модель часов с балансиром, обладающим «собственным периодом» (223).	
§ 6.	Свойства простейших автоколебательных систем	229
§ 7.	Предварительное рассмотрение автоколебаний, близких к синусоидальным	231

ГЛАВА IV

Динамические системы первого порядка

§ 1.	Теорема существования и единственности	241
§ 2.	Качественный характер кривых на плоскости t, x в зависимости от вида функции $f(x)$	243
§ 3.	Представление движения на фазовой прямой	244
§ 4.	Устойчивость состояний равновесия	247
§ 5.	Зависимость характера движений от параметра	251
	1. Вольтова дуга в цепи с сопротивлением и самоиндукцией (252). — 2. Динатрон в цепи с сопротивлением и емкостью (255). — 3. Ламповое реле (257). — 4. Движение глассирующего судна (260). — 5. Однофазный асинхронный мотор (261). — 6. Фрикционный регулятор (263).	
§ 6.	Периодические движения	266
	1. Двухпозиционный регулятор температуры (263). — 2. Колебания в схеме с неоновой лампой (271).	
§ 7.	Мультивибратор с одной RC -цепью	279

ГЛАВА V

Динамические системы второго порядка

§ 1.	Фазовые траектории и интегральные кривые на фазовой плоскости	288
§ 2.	Линейные системы общего типа	292
§ 3.	Примеры линейных систем	302
	1. Малые колебания динатронного генератора (302). — 2. «Универсальная» схема (303).	
§ 4.	Состояния равновесия. Устойчивость состояний равновесия	308
	1. Случай действительных корней характеристического уравнения (309). — 2. Случай комплексных корней характеристического уравнения (314).	

§ 5.	Пример: состояния равновесия в цепи вольтовой дуги	317
§ 6.	Предельные циклы и автоколебания	324
§ 7.	Точечные преобразования и предельные циклы	328
	1. Функция последования и точечное преобразование (328). — 2. Устойчивость неподвижной точки. Теорема Кенигса (331). — 3. Условие устойчивости предельного цикла (335).	
§ 8.	Индексы Пуанкаре	338
§ 9.	Системы без замкнутых траекторий	345
	1. Симметричное ламповое реле (триггер) (346). — 2. Работа динамомашины на общую нагрузку (355). — 3. Осциллятор с квадратичными членами (363). — 4. Еще один пример неавтоколебательной системы (363).	
§ 10.	Исследование поведения фазовых траекторий в удаленных частях плоскости	365
§ 11.	Оценка месторасположения предельных циклов	373
§ 12.	Приближенные методы интегрирования	383

ГЛАВА VI

Основы качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка

§ 1.	Введение	395
§ 2.	Общая теория поведения траекторий на фазовой плоскости. Предельные траектории и их классификация	397
	1. Предельные точки полутраектории и траектории (397). — 2. Первая основная теорема о множестве предельных точек полутраектории (399). — 3. Вспомогательные предложения (402). — 4. Вторая основная теорема о множестве предельных точек полутраектории (405). — 5. Возможные типы полутраекторий и их предельных множеств (409).	
§ 3.	Качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории. Особые траектории	410
	1. Топологически инвариантные свойства и топологическая структура разбиения на траектории (410). — 2. Орбитно-устойчивые и орбитно-неустойчивые (особые) траектории (412). — 3. Возможные типы особых и неособых траекторий (415). — 4. Элементарные ячейки — области, заполненные неособыми траекториями одинакового поведения (420). — 5. Односвязные и двусвязные ячейки (424).	
§ 4.	Грубые системы	427
	1. Грубые динамические системы (427). — 2. Грубые состояния равновесия (431). — 3. Простые и сложные предельные циклы. Грубые предельные циклы (441). — 4. Поведение сепаратрисы седла в грубых системах (451). — 5. Необходимые и достаточные условия грубости (453). — 6. Классификация траекторий, возможных в грубых системах (454). — 7. Типы ячеек, возможных в грубых системах (457).	
§ 5.	Зависимость качественной картины траекторий от параметра	464
	1. Бифуркационное значение параметра (465). — 2. Простейшие бифуркации состояний равновесия (467). — 3. Появление предельных циклов из сложных предельных циклов (468). — 4. Появление предельных циклов из сложного фокуса (470). — 5. Физический пример (476). — 6. Появление предельных циклов из сепаратрисы, идущей из седла в седло, и из сепаратрисы состояния равновесия седло-узел при его исчезновении (477).	

ГЛАВА VII

Системы с цилиндрической фазовой поверхностью

§ 1.	Цилиндрическая фазовая поверхность	480
§ 2.	Маятник с постоянным моментом	483
§ 3.	Маятник с постоянным моментом. Неконсервативный случай	489
§ 4.	Задача Жуковского о планирующем полете	497

Метод точечных преобразований и кусочно-линейные системы

§ 1.	Введение	504
§ 2.	Ламповый генератор	507
	1. Уравнение колебаний (507). — 2. Точечное преобразование (510). — 3. неподвижная точка и ее устойчивость (515). — 4. Предельный цикл (518).	
§ 3.	Ламповый генератор (симметричный случай)	521
	1. Уравнения колебаний и фазовая плоскость (521). — 2. Точечное преобразование (522). — 3. неподвижная точка и предельный цикл (526).	
§ 4.	Ламповый генератор со смещенной Γ -характеристикой	529
	1. Уравнение колебаний. Фазовая плоскость (529). — 2. Точечное преобразование (531). — 3. неподвижные точки и предельные циклы (534). — 4. Случай малых α и γ (539).	
§ 5.	Ламповый генератор с двухзвенной RC -цепочкой	539
	1. Фазовая плоскость. Точечное преобразование (541). — 2. Исследование функций соответствия (546). — 3. Диаграмма Ламерея (549). — 4. Разрывные колебания (551). — 5. Период автоколебаний при малых μ (556).	
§ 6.	Двухпозиционный авторулевой	562
	1. Постановка задачи (562). — 2. Фазовая плоскость. «Скользкий режим» (566). — 3. Точечное преобразование (570). — 4. Авторулевой с жесткой обратной связью (574). — 5. Другие системы автоматического регулирования (578).	
§ 7.	Двухпозиционный авторулевой с запаздыванием	580
	1. Авторулевой с пространственным запаздыванием (581). — 2. Авторулевой с временным запаздыванием (591).	
§ 8.	Релейная система автоматического регулирования (с мертвой зоной и пространственным запаздыванием)	599
	1. Уравнения движения некоторых релейных систем (601). — 2. Фазовая поверхность (604). — 3. Точечное преобразование при $\beta < 1$ (606). — 4. Диаграмма Ламерея (609). — 5. Структура разбиения фазовой поверхности на траектории (614). — 6. Динамика системы при сильной коррекции по скорости (619).	
§ 9.	Осциллятор с квадратичным трением	621
§ 10.	Паровая машина	626
	1. Машина, работающая на «постоянную» нагрузку (629). — 2. Паровая машина, работающая на «постоянную» нагрузку и снабженная регулятором (635). — 3. Машина, работающая на нагрузку, зависящую от скорости (641).	

ГЛАВА IX

Нелинейные системы, близкие к гармоническому осциллятору

§ 1.	Введение	650
§ 2.	Метод Ван-дер-Поля	653
§ 3.	Обоснование метода Ван-дер-Поля	663
	1. Обоснование метода Ван-дер-Поля для процессов установления (663). — 2. Обоснование метода Ван-дер-Поля для установившихся колебаний (670).	
§ 4.	Применение метода Ван-дер-Поля	675
	1. Ламповый генератор при мягком режиме (676). — 2. Ламповый генератор при аппроксимации характеристики лампы полиномом пятой степени (680). — 3. Автоколебания лампового генератора с двухзвенной RC -цепочкой (686).	
§ 5.	Метод Пуанкаре	689
	1. Идея метода Пуанкаре (691). — 2. Метод Пуанкаре для систем, близких к линейным (693).	
§ 6.	Применение метода Пуанкаре	703
	1. Ламповый генератор с мягким режимом (703). — 2. Значение малого параметра μ (706).	
§ 7.	Ламповый генератор в случае ломаных характеристик	707
	1. Ламповый генератор в случае Γ -характеристики (708). — 2. Ламповый генератор в случае ломаных характеристик без насыщения (709).	
§ 8.	Влияние сеточного тока на работу лампового генератора	714

- § 9. Теория бифуркаций в случае автоколебательной системы, близкой к линейной консервативной системе 717
- § 10. Применение теории бифуркаций к исследованию режимов лампового генератора 719
1. Мягкое возникновение колебаний (721). — 2. Жесткое возникновение колебаний (723).

Г Л А В А X

Разрывные колебания

- § 1. Введение 727
- § 2. Малые параметры и устойчивость состояний равновесия 733
1. Схема с вольтовой дугой (736). — 2. Самовозбуждение мультивибратора (741).
- § 3. Малые паразитные параметры и разрывные колебания 745
1. Разбиение «полного» фазового пространства на траектории (747). — 2. Условие несущественности малых (паразитных) параметров (748). — 3. Разрывные колебания (753).
- § 4. Разрывные колебания в системах второго порядка 759
- § 5. Мультивибратор с одним RC -звеном 771
1. Уравнения колебаний (772). — 2. Фазовая плоскость x, y при $\mu \rightarrow +0$. Скачки напряжения u (774).
- § 6. Механические разрывные колебания 780
- § 7. Два генератора электрических разрывных колебаний 786
1. Схема с неоновой лампой (787). — 2. Динатронный генератор разрывных колебаний (789).
- § 8. Схема Фрюгауфа 792
1. «Выврожденная» модель (793). — 2. Постулат скачка (796). — 3. Разрывные колебания схемы (797). — 4. Учет паразитных емкостей (800).
- § 9. Мультивибратор с индуктивностью в анодной цепи 804
1. Уравнения «медленных» движений (804). — 2. Уравнения мультивибратора при учете паразитной емкости C_a (807). — 3. Разрывные колебания схемы (809).
- § 10. «Универсальная» схема 818
- § 11. Блокинг-генератор 824
1. Уравнения колебаний (825). — 2. Скачки напряжений и токов (828). — 3. Разрывные колебания (832). — 4. Разрывные автоколебания блокинг-генератора (841).
- § 12. Симметричный мультивибратор 846
1. Уравнения колебаний (846). — 2. Скачки напряжений u_1, u_2 (849). — 3. Разрывные колебания мультивибратора (852).
- § 13. Симметричный мультивибратор (с сеточными токами) 855
1. Уравнения колебаний. Скачки напряжений u_1 и u_2 (856). — 2. Разрывные колебания (860). — 3. Точечное преобразование Π (867). — 4. Диаграммы Ламерея. Мягкий и жесткий режимы установления разрывных автоколебаний (883). — 5. Автоколебания мультивибратора при $E_g \geq 0$ (886).

Д О П О Л Н Е Н И Е I

- Основные теоремы теории дифференциальных уравнений 892

Д О П О Л Н Е Н И Е II

- Экспериментальное изучение разбиения фазового пространства на траектории при помощи электронного осциллографа 898

Д О П О Л Н Е Н И Е III

- Некоторые тригонометрические формулы 903
- Литература 905
- Предметный указатель 913

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Из трех авторов настоящей книги в живых остался только пишущий эти строки. Александр Адольфович Витт, участвовавший в написании первого издания книги наравне с двумя другими авторами, но не указанный в числе авторов вследствие печальной ошибки, умер в 1937 году.

Александр Александрович Андронов умер в 1952 году, т. е. через 15 лет после выхода первого издания книги. Все эти годы А. А. Андронов и его ученики продолжали плодотворно работать в области нелинейной теории колебаний, и в частности того ее раздела, который излагался в первом издании книги (автономные системы с одной степенью свободы). Однако пишущий эти строки после выхода первого издания уже не принимал участия в дальнейшей разработке вопросов, излагавшихся в первом издании книги. Один из учеников А. А. Андронина, Н. А. Железцов, взял на себя труд изложить для второго издания книги новые результаты, достигнутые (главным образом школой А. А. Андронина) в области теории автономных систем с одной степенью свободы. Это потребовало от Н. А. Железцова переработки и значительного дополнения текста первого издания. В работе принимала участие Е. А. Леонтович-Андронина. Переработанный и заново написанный текст указан подстрочными сносками в соответствующих местах книги.

С. Э. Хайкин

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Вряд ли есть в настоящее время необходимость специально обосновывать важное значение колебательных процессов в современной физике и технике. Можно без преувеличения сказать, что нет почти области в этих науках, в которой колебания не играли бы той или иной роли, не говоря уже о том, что ряд областей физики и техники всецело базируется на колебательных явлениях. Достаточно, например, указать на область электромагнитных колебаний, включающую в себя и оптику, на учение о звуке, на радиотехнику и прикладную акустику.

Общность колебательных процессов, их разнообразие и в то же время их специфическое своеобразие играют существенную роль в установлении внутренних связей между весьма разнородными, на первый взгляд, явлениями. Этим обстоятельством, как мне кажется, и обусловливается главным образом принципиальное значение и важность интересующей нас области.

Весьма существенно следующее: в области колебаний особенно отчетливо выступает взаимодействие между физикой и математикой, влияние потребностей физики на развитие математических методов и обратное влияние математики на наши физические знания. Несомненно, что в развитии таких математических проблем, как дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, в частности краевые задачи, разложение произвольных функций по ортогональным функциям и т. п., физические запросы сыграли не последнюю роль. Но и обратно, также несомненно, что только благодаря развитию этих математических дисциплин сделалось возможным углубленное понимание основных физических колебательных явлений.

До сравнительно недавнего времени интерес физиков, а также и техников, главным образом, хотя и не исключительно, был сосредоточен на «линейных» колебательных задачах, т. е. на таких, математическая формулировка которых приводила к линейным дифференциальным уравнениям, обыкновенным или в частных производных.

Относящийся сюда математический аппарат прекрасно разработан. Ряд результатов теории выкристаллизовался в определенную систему понятий и весьма общих положений. Благодаря тому, что физики

этимися понятиями и положениями постоянно оперируют, применяя их к конкретным задачам, они приобрели уже, если так можно выразиться, физическую наглядность. Для физика такое понятие, как логарифмический декремент, значение его в явлениях резонанса, такие принципы, как принцип суперпозиции и связанное с ним разложение в ряд Фурье, и вообще спектральный подход, наличие n гармонических колебаний в системе с n степенями свободы, несомненно являются не только отвлеченными математическими понятиями и положениями; они связаны для него неразрывно с комплексом физических явлений. И это обстоятельство имеет существенное значение: оно дает возможность физика как бы инстинктивно, почти без вычислений разбираться в сравнительно сложных вопросах, легко обнаруживать связь между разнородными явлениями и, наконец, имеет, и это может быть самое важное, большую эвристическую силу.

Но в последнее время в ряде вопросов физики и техники выдвинулся новый класс колебательных проблем, для которых аппарат линейной теории колебаний оказался или недостаточным или даже совершенно неприменимым.

Существенную роль в привлечении интереса к проблемам нового рода сыграло введение электронных ламп, открывшее новые, весьма целесообразные пути в вопросах как генерации, так и приема электромагнитных колебаний. Чрезвычайно важное применение получили эти новые явления в радиотехнике. Все те громадные успехи, которые были ею достигнуты в наше время, стали возможными только благодаря электронным лампам. Но и физика приобрела исключительно ценное, часто незаменимое орудие исследования. Для всестороннего охвата всех относящихся сюда разнообразнейших явлений, а также большого числа важных интересных явлений в акустике и механике, математический аппарат линейных дифференциальных уравнений абсолютно недостаточен. В его рамки заведомо не укладываются как раз те явления, которые здесь наиболее характерны и интересны. Дело в том, что дифференциальные уравнения, которые адекватным образом описывают эти явления, заведомо нелинейны. Сообразно с этим мы говорим о «нелинейных» системах.

Довольно естественно, что, особенно вначале, было известное стремление, трактуя эти новые, хотя и явно нелинейные, проблемы, по возможности не слишком удаляться от столь привычной линейной терминологии и столь же привычных линейных математических методов, приспособляя их так или иначе к новым обстоятельствам. При этом приходилось добавлять придуманные дополнения, без чего нельзя было, конечно, получить нужных ответов.

Такое «линеаризирование» всегда искусственно, редко бывает полезным, большей частью вообще ничему не научает, а иногда и прямо вредно. И действительно, в литературе известны ошибочные утверждения, вошедшие даже в учебники, обусловленные таким незаконным линеаризированием.

Другой путь для овладения нелинейными проблемами, о которых идет речь, состоит в том, что каждая конкретная проблема трактуется уже как нелинейная, но индивидуально, с применением того или иного, наиболее к ней подходящего метода и с учетом ее специфических особенностей. Этот путь, конечно, сам по себе правилен. Идя по нему, ряд исследователей получил весьма ценные результаты, сохранившие все свое значение и в настоящее время. Сюда в первую очередь нужно отнести работы Ван-дер-Поля, сыгравшие существенную роль в развитии интересующей нас области. И в настоящее время иногда удобно в том или ином случае идти по этому пути.

Но не говоря уже о том, что фактически такие решения отдельных задач не имели достаточного математического обоснования, весь этот путь в качестве, так сказать, большой дороги вряд ли целесообразен, так как он не ведет к установлению тех общих точек зрения, той базы, как математической, так и физической, которая необходима для достаточно полного и всестороннего охвата области нелинейных колебаний; в уже известной нам ее части, и, что еще важнее, для успешного дальнейшего планомерного развития.

А между тем основы математического аппарата, адекватного не только отдельным задачам, но и всему циклу проблем нелинейных колебаний, которые нас интересуют, существуют давно. Они заложены в знаменитых работах Пуанкаре и Ляпунова, работах, преследовавших, правда, совершенно другие цели. На связь этих работ с нашими проблемами колебаний впервые обратил внимание один из авторов настоящей книги. Исследования авторов, несомненно, сыграли весьма существенную роль в приспособлении этого аппарата для изучения колебательных проблем. Ими же были применены эти методы для решения ряда новых конкретных задач. Их же работами подведена солидная математическая база и под результаты других авторов, результаты, как уже сказано, весьма ценные, но разрозненные и до этих пор такой базы не имевшие.

Таким образом, основы необходимого общего математического аппарата существуют. Аппарат этот существенно труднее и сложнее, чем линейный, и это лежит в природе вещей. Физические процессы, охватываемые им, значительно сложнее и разнообразнее линейных процессов, являющихся лишь весьма узким частным случаем. Нужно сказать, что в настоящее время нелинейный аппарат еще гораздо менее разработан, чем линейный, и, конечно, гораздо менее привычен. Но много уже сделано, общие черты теории, которые дают направление дальнейшему развитию, существуют, существует и рабочий аппарат, дающий возможность планомерно решать ряд конкретных задач нелинейной теории колебаний.

Дальнейшее естественное развитие общей теории на этой базе будет способствовать, по моему мнению, тому, что и в сложной области нелинейных колебаний еще в большей мере, чем это уже имеет место

сейчас, выкристаллизуются свои специфические общие понятия, положения и методы, которые войдут в обиход физика, сделаются привычными и наглядными, позволят ему разбираться в сложной совокупности явлений и дадут мощное эвристическое оружие для новых исследований.

Физик, интересующийся современными проблемами колебаний, должен, по моему мнению, уже теперь участвовать в продвижении по этому пути. Он должен овладеть уже существующими математическими методами и приемами, лежащими в основе этих проблем, и научиться их применять.

Известным препятствием служило до сих пор почти полное отсутствие в нашей и, насколько я знаю, в заграничной литературе соответственного систематического изложения общих основ теории нелинейных колебаний и их физических применений, рассчитанного на физиков. Настоящая книга стремится заполнить этот пробел. Основная цель ее — ввести читателя в круг идей, лежащих в основе теории нелинейных колебаний и ее применений. Центр тяжести изложения лежит сообразно с этим не в решении возможно большего количества отдельных задач, а в выяснении основных положений и основных методов, адекватных для области нелинейных колебаний в целом. Это, конечно, не значит, что в книге не уделено достаточного внимания конкретным проблемам. Наоборот, разбору таких проблем, и в первую очередь проблем, с которыми физику и технику постоянно приходится иметь дело, уделяется довольно много места. Но эти проблемы рассматриваются под углом зрения общих положений, они являются примерами и иллюстрациями применения общих методов. Иногда для выяснения той или другой стороны теоретических рассуждений авторы пользуются несколько искусственными примерами, но зато выпукло оттеняющими эти рассуждения.

Изложение авторов, базирующееся, как было упомянуто, на работах Пуанкаре и Ляпунова, обладает одной весьма положительной чертой: в математической трактовке физических проблем часто бывает так, что цепь математических рассуждений, связывающая исходные уравнения с окончательными результатами, допускающими физическую интерпретацию, весьма длинна, причем отдельные ее звенья такой интерпретации не поддаются. Авторы удачно сумели воспользоваться тем обстоятельством, что излагаемые ими методы позволяют придать физический смысл и отдельным звеньям этой цепи. Это значительно оживляет теорию и облегчает ее усвоение.

В вопросах принципиальных авторы там, где это целесообразно, выходят из рамок собственной темы. Сюда относятся, например, довольно подробный интересный разбор вопросов идеализации физических проблем, вопросы, связанные с ролью начальных условий; сюда же может быть отнесен ряд рассуждений, относящихся к так называемым релаксационным колебаниям.

Достаточно обстоятельно излагаются методы так называемого качественного интегрирования, дающие ряд ценных указаний относительно протекания колебательных процессов. По моему мнению, авторы поступают правильно, иллюстрируя эти методы на хорошо известных и привычных случаях линейных систем, где, конечно, применимы более простые, прямые методы. Важно вопросу о существовании периодических решений уделено соответственное внимание. Детально изложены вопросы, относящиеся к проблемам с «малой» нелинейностью, проблемам, имеющим в расчетном смысле чрезвычайно важное значение. Подробно разобран вопрос об устойчивости.

Все эти проблемы рассмотрены применительно к наиболее простому случаю системы с одной степенью свободы без внешней силы (так называемые автономные системы). То же относится и к разобраным в книге конкретным задачам и примерам. Эти вопросы изложены с большой полнотой; но читатель не найдет в книге ни задач, связанных с воздействием внешней силы, ни задач, относящихся к системам с несколькими степенями свободы и к системам с распределенными параметрами. Между тем все эти проблемы несомненно важны и интересны. Однако если принять во внимание, как велик объем всего материала, относящегося к нелинейным колебаниям, с одной стороны, и основную цель книги — ввести читателя в круг общих идей и методов — с другой, то выбор авторов станет понятным. Автономные системы с одной степенью свободы — наиболее простые системы, и они в то же время являются теми элементами, которые лежат в известном смысле в основе всех более сложных систем.

Теоретический аппарат, необходимый для рассмотрения этих последних, базируется на тех общих положениях, которые изложены здесь и представляют собой его дальнейшее развитие. Таким образом, хотя в настоящей книге разобран сравнительно узкий цикл вопросов, по существу она является введением в общую теорию нелинейных колебаний.

Я не сомневаюсь, что свежая и оригинальная книга, предлагаемая вниманию читателя, будет ценным вкладом в нашу литературу по колебаниям.

1935 г.

Л. Мандельштам

ВВЕДЕНИЕ

При всяком теоретическом исследовании какой-либо реальной физической системы мы всегда вынуждены в большей или меньшей степени упрощать, идеализировать свойства описываемой системы. Известная идеализация задачи всегда неизбежна; для построения математической модели рассматриваемой физической системы (т. е. для составления той или иной системы уравнений, описывающих поведение этой физической системы) нужно учесть основные решающие факторы, определяющие те именно черты поведения системы, которые нас в данное время интересуют, и отнюдь не следует стремиться точно учесть все без исключения ее свойства. Это последнее вообще неосуществимо; но если бы нам даже и удалось учесть значительную часть этих свойств, то задача получилась бы столь сложной, что решение ее было бы чрезвычайно затруднено или даже вовсе невозможно.

Поскольку идеализация задачи всегда неизбежна, прежде всего возникает вопрос о том, как далеко мы можем идти в этом направлении, до какой степени можно идеализировать свойства системы и все же получить удовлетворительные результаты. Ответ на этот вопрос может дать в конечном счете только опыт. Только сопоставляя те ответы, которые дает на тот или иной вопрос наше идеализированное рассмотрение, с результатами опыта, мы можем судить, законна ли та или иная идеализация.

Это заключение, конечно, справедливо лишь в том случае, когда теоретическое рассмотрение нашей идеализированной схемы (математической модели) проведено вполне строго¹⁾. Только в этом случае можно считать расхождение теории и опыта бесспорным доказательством недостаточности исходной идеализации и необходимости учесть какие-то новые свойства системы для объяснения наблюдаемых явлений:

¹⁾ Заметим, что термин «строгая теория» отнюдь не означает, что эта теория дает точные количественные ответы на поставленные вопросы. Строгая теория может давать приближенные количественные ответы (например, может оценить амплитуду колебательного процесса при помощи неравенств) и может делать качественные высказывания (например, о существовании периодических движений).

Заметим, что указания о допустимости той или иной идеализации могут быть получены не только из сравнения результатов теоретического рассмотрения с данными опыта, но и из сопоставления результатов двух различных теорий, одна из которых развита с использованием данной идеализации, а другая — без этой идеализации. Поскольку первая теория развита после пренебрежения известными обстоятельствами, а вторая, наоборот, с учетом тех же самых обстоятельств, то, сопоставляя результаты обеих теорий, мы получаем непосредственные указания о том, какую роль играют эти обстоятельства для решения того или иного вопроса. Постепенно мы накапливаем опыт и развиваем свою интуицию в этом отношении и научаемся все лучше и лучше «угадывать», что важно и что не важно для решения рассматриваемого круга вопросов. Убедившись тем или иным путем в том, что для решения данного вопроса известное обстоятельство играет второстепенную роль, мы в дальнейшем распространяем полученный результат и на другие аналогичные задачи, сначала пренебрегая этими обстоятельствами, а затем проверяя законность этих пренебрежений на опыте.

Характер идеализаций, допустимых при рассмотрении той или иной задачи, определяется всей *задачей в целом* и зависит поэтому не только от свойств рассматриваемой системы, но и от того, на какие именно вопросы желательно получить ответ при рассмотрении задачи.

Так, например, рассмотрим систему, состоящую из стального шарика, падающего вертикально на горизонтальную стальную доску. Если нас интересует движение шарика как целого, то мы, вообще говоря, не совершим большой ошибки, если будем считать при теоретическом рассмотрении, что шарик — это движущаяся под действием силы тяжести материальная точка, скорость которой при достижении доски мгновенно меняет свой знак. Если же нас интересуют те упругие напряжения, которые возникают в шарике при ударе, то само собой разумеется, что мы уже не можем рассматривать шарик как материальную точку; шарик приходится идеализировать как упругое тело с определенными константами, характеризующими свойства стали, приходится учитывать характер деформаций, время соударения и т. д. Подобный же пример можно было бы привести и из теории электрических систем, где могут быть случаи, когда для ответа на одни вопросы можно считать емкости и самоиндукцию сосредоточенными, а для ответа на другие вопросы (относящиеся к той же системе) — распределенными.

Аналогично, если нас интересует вопрос о движении (свободных колебаниях) маятника в течение некоторого небольшого промежутка времени и если трение, испытываемое маятником, невелико, то можно отказаться от учета сил трения. Однако эта же идеализация не позволит получить правильный ответ на вопрос о движении маятника в течение большого промежутка времени, так как движе-

ние маятника затухает. Точно так же при рассмотрении вопроса о вынужденных колебаниях маятника под действием гармонической внешней силы можно не учитывать трение в системе, если нас интересует область, далекая от резонанса. Вблизи резонанса та же идеализация (пренебрежение трением) лишит нас возможности получить правильный ответ на вопрос об амплитуде вынужденных (установившихся) колебаний, так как при резонансе эта амплитуда существенно зависит от величины трения.

Таким образом, одна и та же идеализация может быть и «допустимой» и «недопустимой», вернее либо целесообразной, либо нецелесообразной, в зависимости от того, на какие вопросы мы хотим получить ответ. Одна и та же идеализация свойств данной реальной системы (одна и та же математическая модель, описываемая некоторой системой уравнений) позволяет получить правильный ответ на некоторые вопросы, касающиеся поведения системы, но не дает, вообще говоря, возможности правильно ответить на другие вопросы, касающиеся поведения той же самой системы. Это связано с тем, что при построении данной математической модели реальной физической системы пренебрегалось многими свойствами и особенностями последней, которые, не являясь существенными для тех или иных процессов в системе, могут быть существенными, определяющими для других.

Допустимость той или иной идеализации зависит и от тех количественных соотношений, которые характеризуют данную задачу. Например, в упомянутом выше случае с маятником можно пренебречь трением только при условии, что трение достаточно мало и время, в течение которого мы изучаем движение маятника, также не слишком велико. Но когда мы говорим «мало» или «велико», то это имеет смысл только тогда, когда мы указываем, по сравнению с какой другой величиной мала или велика данная величина. И в нашем примере мы должны потребовать, чтобы показатель затухания был мал по сравнению с частотой колебаний (или логарифмический декремент затухания был мал по сравнению с единицей) и чтобы время наблюдения было не слишком велико по сравнению с периодом колебаний. Только при подобных формулировках можно считать вполне исчерпывающими такие количественные характеристики, как «мал» и «велик».

Однако когда приступают к изучению задачи, часто бывает трудно сказать наперед, с какой именно величиной нужно сравнивать данную величину. Тогда применяют количественные характеристики, не указывая, по сравнению с чем именно мала или велика данная величина. В таком случае характеристики теряют свою определенность, но все же сохраняют известный смысл, который подсказывается нашими знаниями о данном круге явлений. И поэтому даже такие расплывчатые количественные характеристики все же могут дать известные указания о характере допустимой идеализации и во всяком

случае о том, в каком направлении следует делать попытки в смысле идеализации задачи. Так, например, с точки зрения «средних человеческих масштабов» наблюдение за явлением в течение одной минуты — это еще «не слишком долго». С другой стороны, тысячная доля секунды — это «очень быстро». Поэтому мы часто говорим, что колебания маятника затухают «медленно», а колебания в электрическом колебательном контуре высокой частоты затухают «быстро», даже если декремент затухания контуров очень мал и близок к декременту затухания в маятнике. И эти утверждения «мал» и «велик» хотя и не имеют, строго говоря, точного содержания, все же оказывают влияние на то, какие именно идеализации обычно применяются к той и другой задаче. В то время как задача о собственных колебаниях механических систем рассматривается обычно (по крайней мере сначала) без учета трения, при исследовании вопроса о собственных колебаниях в электрическом колебательном контуре почти всегда сразу принимают во внимание активное сопротивление контура. Таким образом, казалось бы лишённые содержания характеристики «мал» и «велик» (без указания, по сравнению с чем) все же толкают нас к выбору определенных идеализаций. При дальнейшем рассмотрении эти характеристики «мал» и «велик» приобретают вполне определенное содержание: становится ясным, по сравнению с чем именно должна быть мала или велика данная величина. Мы тоже иногда будем начинать рассмотрение с таких неопределенных предположений — «мал» или «велик», без указаний, по сравнению с чем, но из дальнейшего рассмотрения смысл этих утверждений всегда будет выясняться.

Во всяком физическом рассмотрении, и в частности в нашем дальнейшем изложении, вопрос о характере идеализации, т. е. вопрос о том, какие из свойств реальной физической системы должны быть учтены при построении математической модели и в каком приближении, играет весьма существенную роль; поэтому мы прежде всего должны выяснить, какого именно характера идеализации приходится применять при рассмотрении колебательных систем. Мы будем ограничиваться ниже (не только во Введении, но и во всей книге) исключительно *динамическими моделями* реальных колебательных систем, т. е. будем пренебрегать в них флуктуациями и всеми другими статистическими явлениями¹⁾. Соответственно, мы будем считать,

¹⁾ Косвенно наличие флуктуаций в реальных системах приходится учитывать и в теории динамических моделей реальных систем. Очевидно, что поскольку малые случайные возмущения неизбежны в любых физических системах, в них не могут существовать такие процессы, протекание которых возможно только при отсутствии каких бы то ни было случайных отклонений и возмущений. Отсюда появляются требования, широко используемые в теории динамических систем, чтобы процессы, отображаемые математической динамической моделью и соответствующие процессам, существующим и наблюдаемым в реальной системе, были устойчивыми как по отношению к малым изменениям координат и скоростей, так и по отношению к малым изменениям

что зависимые переменные, входящие в уравнения динамической модели, имеют физический смысл количественных характеристик (достоверных, не вероятностных) состояния системы и тех или иных процессов, происходящих в ней. Если говорить об идеализациях реальных физических систем в виде динамических моделей, то, во-первых, эти идеализации связаны с числом величин, определяющих состояние системы (например, координат и скоростей), и, во-вторых, с выбором законов, связывающих эти состояния или скорости изменений состояний и устанавливающих зависимости между ними. В эти зависимости, которые в большинстве рассматриваемых случаев можно выразить в виде тех или иных дифференциальных уравнений, обычно входит некоторое число постоянных параметров, характеризующих систему. Например, для обычного электрического контура в простейшем случае величинами, определяющими состояние системы, служат заряд и ток, а постоянными параметрами — индуктивность, емкость и сопротивление. Связь между величинами, характеризующими состояние системы, определяется некоторым дифференциальным уравнением, в которое постоянные параметры или их комбинации входят в качестве коэффициентов.

Идеализация, связанная с числом величин, определяющих состояние системы, приводит в конечном счете к представлению о том или ином числе степеней свободы системы. В настоящей книге будут рассматриваться главным образом такие задачи (т. е. такие системы и такие вопросы, касающиеся поведения этих систем), которые можно решить, пользуясь математической (динамической) моделью данной системы с одной степенью свободы.

Конечно, всякая реальная система с точки зрения классической физики обладает не одной, а весьма большим числом степеней свободы. Например, следуя обычным молекулярным представлениям, нужно было бы считать, что всякая механическая система имеет очень большое число степеней свободы, равное сумме степеней свободы всех отдельных молекул, из которых состоит система. Однако в ряде случаев можно отвлечься от молекулярного строения вещества и рассматривать систему как сплошную. В этом случае мы заменяем очень большое число степеней свободы бесконечно

самой математической модели. Первое приводит к понятию устойчивости состояний равновесия модели и процессов в ней, второе — к понятию грубости динамических систем.

- Статистические модели необходимы для теоретического изучения влияния флуктуаций, шумов и т. п. на процессы в колебательных системах. При учете случайных процессов движение системы будет подчиняться уже не динамическим законам, а законам статистики. В соответствии с этим могут быть поставлены вопросы о вероятности того или иного движения, о наиболее вероятных движениях и о других вероятностных характеристиках поведения системы. Математический аппарат для изучения статистических процессов в колебательных системах составляют так называемые уравнения Эйнштейна — Фоккера [106, 75, 83].

большим числом степеней свободы и приходим к уравнениям в частных производных. В других случаях оказывается, что для описания интересующих нас вопросов достаточно ввести в рассмотрение всего лишь одну или несколько степеней свободы. Мы приходим, с одной стороны, к представлениям о сплошной системе, обладающей бесконечно большим числом степеней свободы, а с другой стороны — к представлениям о дискретных системах, обладающих конечным числом степеней свободы.

Понятие числа степеней свободы пришло в теорию колебаний из механики, где, как известно, под числом степеней свободы понимают число координат, полностью определяющих пространственную конфигурацию механической системы (при тех или иных упрощающих предположениях). При этом порядок системы дифференциальных уравнений, описывающих ее движение, как правило, вдвое больше числа степеней свободы. В теории колебаний, рассматривающей не только механические системы, под числом степеней свободы понимают половину числа переменных, задание которых в данный момент времени полностью и однозначно определяет состояние системы, или, иначе говоря, половину порядка системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы (при данных упрощающих предположениях).

Рассматривая определенный класс систем и ограничиваясь определенным кругом вопросов, можно пользоваться представлением о системе с одной степенью свободы. Например, массу m на пружине (рис. 1) мы только в том случае сможем рассматривать как систему с одной степенью свободы, если откажемся от учета влияния массы пружины (что имеет смысл только в том случае, если масса пружины гораздо меньше массы m) и будем считать тело m абсолютно жестким (что имеет смысл, если тело m гораздо более жестко, чем пружина). Кроме того, конечно, мы должны ограничить рассмотрение движением этого тела только в вертикальном направлении. Это последнее ограничение имеет смысл только при условии, что колебания массы m в вертикальном направлении не вызывают раскачивания ее как маятника — раскачивания, которое неизбежно является при известных соотношениях между параметрами системы. Наши допущения в реальной

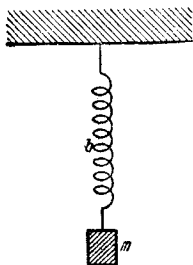


Рис. 1.

системе, конечно, не могут быть строго соблюдены. В действительности пружина обладает массой, а тело m обладает упругостью, но мы идеализируем задачу и отказываемся от рассмотрения тела и пружины как сплошных систем (систем с распределенными параметрами). Вследствие этой идеализации мы лишаемся возможности ответить на вопросы о движении отдельных частиц тела m и пружины; но если, с одной стороны, тело m достаточно жестко

и масса его достаточно велика по сравнению с массой пружины, а с другой стороны, начальные условия совместимы с нашими допущениями, а именно: в начальный момент сама масса m отклонена от положения равновесия в вертикальном направлении или ей сообщена некоторая начальная скорость тоже только в вертикальном направлении, то при допущенной идеализации задачи все же можно удовлетворительно ответить на вопрос о движении всей массы m в целом. И в том случае, когда нас интересует вопрос о движении системы при таких ее свойствах и таких начальных условиях, было бы просто нецелесообразно учитывать какие-либо другие свойства системы, кроме наличия массы m и упругости пружины. Но несколько иную задачу, отличающуюся от только что рассмотренной лишь характером начальных условий, мы уже не в состоянии будем решить, применяя прежнюю идеализацию. Пусть, например, сначала пружина растянута силой, приложенной в точке b (рис. 1), а в момент $t = 0$ эта сила устраняется. Такое начальное состояние несовместимо с принятой нами идеализацией, которая позволила рассматривать всю систему как обладающую одной степенью свободы. Мы могли бы, конечно, задать не силу в точке b , а любое начальное распределение деформаций в пружине, отличное от того, которое получается, если сила приложена к массе m . Всякое такое распределение было бы несовместимо с нашей идеализацией. Оставаясь при прежней идеализации и не делая каких-либо новых допущений, мы не в состоянии ответить на вопрос о характере движения системы при таких начальных условиях.

Этот пример иллюстрирует высказанное выше общее положение. Мы видим, что допустимая идеализация в отношении числа величин, определяющих состояние системы (в частности, числа степеней свободы системы), зависит не только от свойств самой системы, но и от характера тех начальных условий, которые заданы, и содержания тех вопросов, на которые нужно ответить, — словом, зависит от характера той задачи, которая нами поставлена.

Точно так же обычный электрический контур, обладающий емкостью, индуктивностью и сопротивлением (рис. 2), можно рассматривать как систему с одной степенью свободы только при том условии, что не учитываются, например, емкости, которыми обладают отдельные витки катушки самоиндукции один по отношению к другому, провода между собой и т. д. Но несмотря на эту идеализацию, мы сможем достаточно точно ответить на основной интересующий нас вопрос о законе изменений напряжения на обкладках конденсатора, если начальные условия таковы, что заданы напряжение на обкладках конденсатора и ток по всей катушке самоиндукции. Однако допущенная нами идеализация не дает возможности

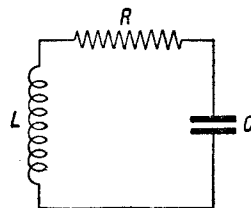


Рис. 2.

ответить, например, на вопрос о законе распределения тока внутри самой катушки самоиндукции. При допущенной идеализации и не делая специальных предположений, мы не сможем решить и вопрос об изменении силы тока в начале процесса, если в начальный момент ток существует не во всей катушке, а только в части ее, присоединенной к источнику постоянного тока (рис. 3), ибо эти начальные условия, так же как и в рассмотренном нами механическом примере, не совместимы с примененной идеализацией задачи. (Именно такого

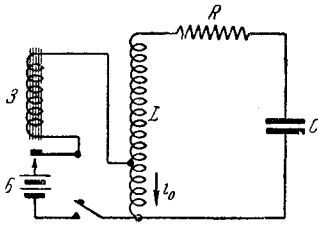


Рис. 3.

типа начальные условия имели место, например, в случае волномера, возбуждаемого зуммером, — батарея *Б* и зуммер *З* обычно присоединялись к волномеру так, как это указано на рис. 3.) И в этом случае мы могли бы, как и в предыдущем, задать начальное распределение силы тока в катушке не в виде двух условий для двух частей катушки, а в более общем виде некоторой функции распределения $i=f(x)$. Однако

никакое иное распределение, кроме некоторой определенной силы тока, одинаковой во всех витках катушки, конечно, не совместимо с нашей идеализацией системы. Такие произвольные начальные условия требуют, вообще говоря, рассмотрения системы с бесконечным числом степеней свободы, т. е. рассмотрения распределенной системы.

Мы видим, таким образом, что, отказываясь от рассмотрения реальных систем как систем распределенных и рассматривая их в виде систем с конечным числом степеней свободы, в частности в нашем случае в виде систем с одной степенью свободы, мы должны соответствующим образом ограничить себя в смысле выбора начальных условий и задавать только такие начальные состояния, которые совместимы с нашей идеализацией. В противном случае возникает конфликт между начальными условиями и уравнениями нашей идеализированной системы, для ликвидации которого, вообще говоря, нужно было бы изменить характер идеализации системы. Однако в некоторых случаях, как будет видно в дальнейшем, конфликт этот может быть ликвидирован без изменения характера идеализации системы — при помощи некоторых добавочных постулатов, определяющих то совместимое с уравнениями модели состояние, в которое придет система через некоторое время после возникновения конфликта.

Точно так же не только от свойств самой системы, но и от характера задачи, которая поставлена, зависит решение вопроса о допустимости той или иной идеализации, связанной с определением законов, управляющих движением системы. Именно эта идеализация определяет тип уравнений, которыми описывается система, и приво-

дит к разделению систем на «линейные» и «нелинейные», «консервативные» и «неконсервативные», «автоколебательные» и «диссипативные» и т. д.

Как же следует подходить к вопросу о законах, определяющих движение системы, определяющих изменение состояния системы по заданному состоянию этой системы (модели) в данный момент времени? В каких случаях, какая идеализация свойств реальной системы и связей между ее частями и элементами может быть допущена? Вообще говоря, параметры всякой электрической или механической системы — емкость или упругость, сопротивление или коэффициент трения, самоиндукция или масса — всегда в большей или меньшей степени зависят от состояния системы, т. е. от ее координат и скоростей. Действительно, если конденсатор заряжен до какого-либо напряжения, то между его обкладками существуют силы электростатического притяжения. Так как абсолютно жестких систем не существует, то эти силы вызовут какое-то изменение формы или размеров обкладок конденсатора, вследствие чего изменится и его емкость; эти изменения будут тем больше, чем больше напряжение между обкладками конденсатора. Поэтому емкость конденсатора всегда в большей или меньшей степени будет зависеть от напряжения между его обкладками.

Точно так же между витками катушки самоиндукции, по которым течет ток, будут существовать пондеромоторные силы, которые несколько изменяют конфигурацию витков катушки, а вместе с тем и ее индуктивность. Следовательно, индуктивность катушки неизбежно в большей или меньшей степени зависит от силы тока, протекающего по катушке. Наконец, сопротивление проводника всегда в большей или меньшей степени зависит от температуры; так как при протекании тока по проводнику выделяется тепло, нагревающее сопротивление, то величина этого сопротивления всегда до некоторой степени зависит от силы протекающего по нему тока.

Так же легко убедиться в том, что, например, параметры изображенной на рис. 1 механической системы всегда в известной степени зависят от состояния системы. Например, модуль упругости любого материала, или коэффициент упругости любой пружины, при достаточно больших деформациях уже не остается постоянным, т. е. зависит от координат системы. Коэффициент трения всегда (и довольно сложным образом) зависит от скорости. Момент инерции вращающегося тела также, вообще говоря, не является постоянной величиной, а зависит от угловой скорости, так как всякое физическое тело не является абсолютно твердым и испытывает деформации при вращении. Итак, величины параметров как механических, так и электрических систем всегда в большей или меньшей степени зависят от состояния системы.

Если при описании рассмотренных механической и электрической систем с помощью математических соотношений начать учитывать все эти

зависимости параметров от состояния системы, то мы пришли бы к дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых зависят от координат и скоростей, т. е. к нелинейным дифференциальным уравнениям. Чтобы упростить задачу, мы должны до известных пределов идеализировать свойства системы, сделать ряд упрощающих предположений относительно зависимости параметров от состояния системы, так как не всегда для ответа на поставленные в отношении данной системы вопросы необходимо учитывать эту нелинейность, которая часто значительно затрудняет теоретическое рассмотрение.

Наиболее простым и удобным было бы предположение, что параметры вообще не зависят от состояния системы и являются величинами постоянными. Тогда при математическом описании рассмотренных систем мы пришли бы к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, для которых существуют регулярные методы решения и исследование которых не представляет никаких трудностей.

При каких же условиях можно дать удовлетворительный ответ на интересующие нас вопросы о характере движения системы, если применить указанную идеализацию, т. е. считать, что параметры системы не зависят от ее состояния и являются постоянными? Как мы уже видели, вообще говоря, это предположение не оправдывается в реальных физических системах. Но во многих случаях можно выбрать такие области изменения координат и скоростей, в которых параметры системы практически (т. е. с заданной нами степенью точности) будут оставаться постоянными. Так, например, если конструкции конденсатора и катушки самоиндукции достаточно жестки и наибольшие значения, которых достигают напряжение на обкладках конденсатора и сила тока в катушке самоиндукции, не слишком велики, то практически емкость конденсатора и индуктивность катушки в данной области можно считать постоянными. Точно так же, если наибольшее значение плотности тока достаточно мало, то и сопротивление обычного металлического проводника можно считать постоянным.

Аналогичным образом мы можем выбрать такую узкую область изменений координат и скоростей механической системы, чтобы параметры системы в этой области можно было с достаточной степенью точности считать постоянными. Предположение о том, что параметры системы не зависят от координат и скоростей в тех случаях, которые мы главным образом будем рассматривать, сводятся к утверждению, что все силы, возникающие в системе и являющиеся, вообще говоря, какими-то функциями координат, скоростей и ускорений, суть линейные функции либо координат, либо скоростей, либо ускорений; например, упругая сила есть линейная функция координаты (или напряжение — такая же функция заряда), а сила трения или омическое падение напряжения суть линейные функции скорости

(соответственно силы тока), наконец, «сила инерции» и э. д. с. самоиндукции суть линейные функции ускорения (производной от силы тока).

Это утверждение, что в области достаточно малых изменений аргумента силы можно рассматривать как линейные функции координат, скоростей или ускорений, вытекает, в сущности, из математических соображений. Действительно, если функция вблизи данной точки может быть разложена в ряд Тейлора и если, кроме того, ее первая производная в этой точке не равна нулю, то для достаточно малых значений аргумента всегда можно ограничиться только первым членом ряда Тейлора, т. е. рассматривать функцию как линейную.

Но, конечно, эти соображения не дают никакого представления о том, как велика область, в которой функцию можно рассматривать как линейную. Кроме того, в реальных физических системах возможны такие случаи, когда представление о линейных силах не дает правильного ответа на вопрос о движении системы даже в очень узкой (однако физически интересной) области изменений координат и скоростей.

Вопрос о возможности «линеаризации» реальной физической системы мы иллюстрируем на примере механической системы с трением, например массы m , подвешенной на пружинах, но при условии, что груз либо испытывает известное сопротивление движению со стороны окружающего его газа (или жидкости), либо движется с трением вдоль поверхности какого-либо твердого тела (рис. 4). Вопрос о «линеаризации» такой системы в случае отсутствия трения не вызывает никаких трудностей, ибо при малых отклонениях упругая сила пружины, как это следует из закона Гука,

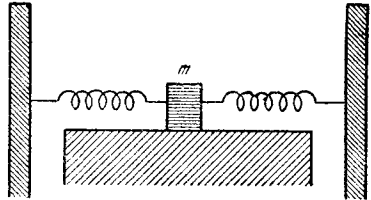


Рис. 4.

пропорциональна отклонению, массу же тела в широких пределах можно считать не зависящей от скорости. В случае же наличия трения (мы знаем, что сила трения, вообще говоря, зависит от скорости) возникает вопрос, можно ли силу трения «линеаризовать», т. е. рассматривать ее как линейную функцию скорости, хотя бы в области очень небольших скоростей. Ответ на этот вопрос может дать только опыт, в частности, например, такой простейший опыт. Двигая груз, мы определяем ту работу, которую нужно затратить на преодоление силы трения при перемещении груза на известное расстояние. Далее мы повторяем это измерение снова и снова при все меньших скоростях движения груза (путь же остается неизменным). Таким образом можно установить зависимость между работой, затраченной на преодоление сил трения, и скоростью движения. Эта зависимость, вообще говоря очень сложная, получается совершенно различной для случая

движения тела в газе или жидкости или трения тела о какую-либо твердую поверхность.

В первом случае работа существенно зависит от скорости и при уменьшении скорости уменьшается и может быть сделана как угодно малой. Во втором же случае «сухого трения», наоборот, работа мало зависит от скорости, и как бы медленно мы ни двигали груз, нужно затратить на его перемещение некоторую конечную и вполне определенную работу; значит, сила трения даже при сколь угодно малой скорости имеет конечную величину. Кроме того, необходимо иметь в виду, что сила трения всегда направлена в сторону, противоположную скорости, и значит, при переходе скорости через нуль сила трения должна менять знак на обратный. Принимая во внимание это обстоятельство, а также результат наших опытов, мы можем установить хотя бы качественно связь между силой трения и скоростью в области малых скоростей. Очевидно, что в первом случае при «жидком трении» сила трения без скачка проходит через нуль

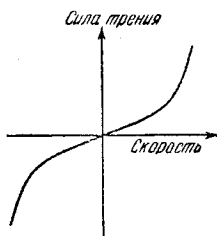


Рис. 5.

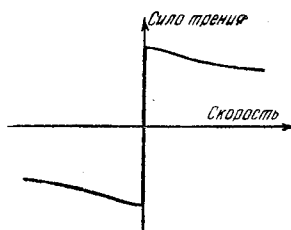


Рис. 6.

и меняет при этом знак (рис. 5). Во втором же случае при скорости, стремящейся к нулю, сила трения с двух сторон стремится, вообще говоря, к разным (в частности, например, противоположным по знаку, но одинаковым по абсолютной величине) конечным пределам и, значит, при нуле претерпевает разрыв (рис. 6)¹⁾. Очевидно, что в случае «жидкого трения» всегда можно в некотором, хотя бы небольшом, участке по обе стороны от нуля считать силу трения линейной функцией скорости, т. е. можно «линеаризовать» трение и рассматривать систему как линейную. В случае же «сухого трения» такая линеаризация даже в области очень малых скоростей не передает наиболее типичных особенностей сухого трения. Поскольку при переходе скорости через нуль сила трения изменяется скачком, мы не можем, конечно, передать эту особенность силы трения, считая ее линейной функцией скорости. И поэтому при рассмотрении тех задач, в которых сухое трение играет существенную роль, мы не

¹⁾ О зависимости силы трения от скорости в области не очень малых скоростей нам еще придется говорить в дальнейшем. Пока же мы можем ограничиться областью только очень малых скоростей.

можем рассматривать систему как линейную, даже если ограничим рассмотрение весьма малыми значениями скоростей.

Простейшая идеализация, которая может быть сделана в случае сухого трения, т. е. в случае зависимости, изображенной на рис. 6, — это предположение, сделанное Кулоном, именно, что трение по величине не зависит от скорости. Так же как линейный закон трения является простейшей идеализацией случаев жидкого трения, закон Кулона является простейшей идеализацией случаев сухого трения. Эта идеализованная характеристика трения приведена на рис. 7.

Мы видим, таким образом, что не всегда можно даже в некоторой ограниченной области рассматривать систему как линейную. Однако во многих случаях это оказывается возможным. Тогда в этой ограниченной области, несмотря на допущенную идеализацию (предположение, что все параметры системы постоянны), можно ответить на интересующие нас вопросы о характере и общих свойствах движения системы. Границы этой области определяются характером

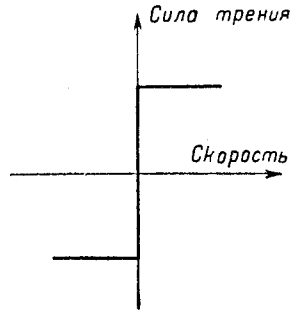


Рис. 7.

существующих в реальных физических системах зависимостей параметров от координат и скоростей и характером той задачи, которая поставлена; однако эта область, в которой применима наша идеализация, *всегда ограничена известными пределами*.

Но если эта область ограничена, то неизбежно возникает следующий весьма важный вопрос: не уйдет ли система «сама по себе» в силу своих свойств за пределы той области, в которой применима наша идеализация? Если этого не случится, если при начальных условиях, лежащих в пределах той области, в которой параметры системы можно считать постоянными, система и при всех дальнейших движениях не выйдет за пределы этой области, то наша идеализованная задача позволит дать ответ на ряд вопросов, которые могут возникнуть при изучении данной системы. Для ответа на такие вопросы мы можем считать параметры системы не зависящими от состояния системы и описывать ее линейными дифференциальными уравнениями, т. е. рассматривать систему как «линейную».

Тогда же, когда система в силу своих свойств выходит за пределы «линейной области», совершенно очевидно могут возникнуть вопросы, на которые мы не в состоянии будем дать ответа, рассматривая систему как линейную. И в вопросе о законах, связывающих свойства параметров с состояниями системы, допустимость той или иной идеализации зависит не только от свойств системы, но и от характера поставленной задачи, и в частности от характера начальных условий задачи.

Существует очень большое число весьма интересных и практически важных вопросов, для ответа на которые необходимо рассмотреть поведение системы за пределами линейной области. Ряд таких вопросов выдвигается, например, современной радиотехникой. Как мы увидим дальше, даже теория простейшего лампового генератора *принципиально* не может быть сведена к исследованию линейного дифференциального уравнения и требует изучения нелинейного уравнения; линейное уравнение, например, не в состоянии объяснить тот факт, что ламповый генератор независимо от начальных условий имеет стремление устанавливаться в определенном режиме. Аналогичные вопросы возникают в электротехнике, акустике и т. д.

Рассмотрение именно таких вопросов, *самый характер которых делает неизбежной постановку нелинейной проблемы, т. е. заставляет рассматривать систему как нелинейную, и составит нашу основную задачу.*

Провести строгое разделение реальных физических систем на «линейные» и «нелинейные», «консервативные» и «неконсервативные», их разделение по числу степеней свободы и т. д. невозможно. Реальные физические системы не являются ни линейными, ни консервативными, не могут иметь конечного числа степеней свободы, ибо они вообще не могут быть описаны совершенно точно при помощи математических соотношений. Поэтому всякое строгое разделение, всякая строгая классификация не могут быть точно проведены для реальных физических систем. Такому строгому разделению поддаются только абстрактные схемы (математические модели), которые получаются в результате известной идеализации свойств реальной физической системы.

В частности, те системы, которые рассматриваются обычно в учебных курсах, не являются какими-то особыми «линейными системами», которые могут быть строго отделены от других, «нелинейных систем», составляющих предмет нашего рассмотрения. И в том и в другом случаях мы рассматриваем часто одни и те же реальные физические системы, но применяем к ним разные способы идеализации. В результате этой идеализации, характер которой, как мы уже указывали, определяется не только свойствами самой системы, но и содержанием поставленных перед нами задач, оказывается возможным разделение систем на линейные и нелинейные, консервативные и неконсервативные, выделение из числа нелинейных неконсервативных систем класса автоколебательных систем, наконец, деление автоколебательных систем на непрерывные (в частности, «томсоновские») и «разрывные».

Проводя это разделение, мы всегда будем приходить к определенным заключениям относительно свойств того или иного класса систем; однако необходимо иметь в виду, что эти свойства, характеризующие систему, являются *идеализированными свойствами*. Это и естественно, ибо само выделение класса систем, обладающих дан-

ными свойствами, оказалось возможным в результате той или иной идеализации. Так, например, когда мы говорим о свойстве автоколебательной системы как угодно долго совершать колебания с постоянной амплитудой, то это свойство, конечно, нужно рассматривать как идеализированное. В реальной автоколебательной системе колебания не могут продолжаться «как угодно долго»; колебания часов прекратятся, когда кончится их завод, колебания в ламповом генераторе прекратятся, когда разрядится анодная батарея или батарея накала. Когда мы говорим о колебаниях, которые могут длиться «как угодно долго», то отвлекаемся от указанных обстоятельств (конечный запас энергии в заводе часов или в батарее лампового генератора). Совершенно так же только приближенный смысл имеет утверждение, что всякая автоколебательная система, например передатчик в радиотехнике, имеет стремление устанавливаться в определенном режиме, т. е. что установившаяся «амплитуда» и период колебаний в таком передатчике постоянны (при фиксированных параметрах). Нетрудно видеть, что фактически благодаря небольшим внешним воздействиям, которые всегда существуют, и благодаря флуктуациям, которые неизбежны, эти величины всегда меняются в некоторых, обычно узких пределах. Более того, очевидно, что даже понятие периодического движения по отношению к реальной системе также является идеализацией. Как уже много раз указывалось, при всяком рассмотрении мы подчеркиваем те или иные свойства реальной физической системы, которые для решения данного вопроса играют принципиальную роль, и отвлекаемся от тех свойств, которые для решения данного вопроса являются второстепенными.

На какие же вопросы мы должны будем пытаться получить ответ при рассмотрении этих нелинейных проблем?

При изучении поведения динамической системы нас обычно прежде всего интересуют так называемые *стационарные* движения в системе¹⁾, так как именно эти движения являются наиболее характерными для поведения системы в течение длительных промежутков времени.

Какие же стационарные движения возможны в тех системах, которые мы будем рассматривать? (Для определенности будем сейчас иметь в виду только динамические модели механических систем.)

¹⁾ Стационарное движение, грубо говоря, есть то предельное движение, к которому стремится система. Говоря о стационарных движениях, мы понимаем под ними также и состояния покоя, т. е. рассматриваем состояния покоя как частный случай стационарного движения. Можно дать точное математическое определение стационарных движений, отождествив их с так называемыми *рекуррентными* движениями Биркгофа [34, 139, 96]. Для систем с одной степенью свободы рекуррентными движениями могут быть только состояния равновесия и периодические движения. Для более общих систем рекуррентными движениями могут быть более сложные движения, например квазипериодические.

Это могут быть прежде всего состояния равновесия, в которых скорости и ускорения, определяемые из дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы, обращаются в нуль. Второе условие равносильно тому, что на систему не действуют никакие регулярные силы, учитываемые дифференциальными уравнениями. Но во всякой физической системе помимо таких регулярных сил действуют и малые нерегулярные силы, например флуктуационного характера. Вследствие наличия этих сил система никогда не может находиться точно в состоянии равновесия и совершает малые движения вблизи состояния равновесия (броуновское движение). Но вблизи состояний равновесия на систему действуют уже и регулярные силы (они равны нулю только точно в состоянии равновесия), которые могут либо возвращать систему к состоянию равновесия, либо удалять ее еще больше. В первом случае будем иметь устойчивые, а во втором — неустойчивые состояния равновесия. Ясно, что для изучения поведения системы нужно уметь не только находить состояния равновесия, но и определять их устойчивость по отношению к малым изменениям координат и скоростей. Устойчивость в этом смысле является необходимым условием того, чтобы система могла находиться вблизи данного состояния равновесия как угодно долго.

Далее к числу возможных стационарных движений в системе принадлежат *периодические* движения. Правда, помимо периодических в колебательных системах возможны и другие стационарные колебательные процессы, например квазипериодические. Но в *автономной*¹⁾, т. е. не находящейся под переменным воздействием, колебательной системе с одной степенью свободы, как будет выяснено при более детальном рассмотрении этих вопросов, возможно существование только простейшего типа стационарного колебательного движения — процесса периодического.

Однако не всякие возможные стационарные движения могут существовать в реальной физической системе. Для того чтобы данный стационарный процесс в реальной физической системе мог длиться как угодно долго, необходимо, чтобы при наличии неизбежных случайных толчков система совершала движения, достаточно близкие к данному стационарному движению, и не удалялась бы от него сколько-нибудь заметно. Это требование совершенно аналогично такому же требованию по отношению к состояниям равновесия: чтобы периодический процесс мог продолжаться как угодно долго, он должен быть устойчив по отношению к небольшим изменениям координат и скоростей. Поэтому нам необходимо будет не только находить возможные периодические процессы в системе, но

¹⁾ Автономными мы будем называть такие системы, которые описываются уравнениями, не содержащими явно времени. Поэтому, рассматривая автономные системы, будем считать, что внешние воздействия не зависят от времени.

и решать вопрос об их устойчивости по отношению к небольшим отклонениям. Точно так же нас будет интересовать зависимость движений системы от параметров, входящих в уравнения и могущих принимать те или другие фиксированные значения (сопротивление, емкость и т. д.). Исследование этой зависимости позволяет дать ответ на ряд основных вопросов, связанных с возникновением колебаний, срывом колебаний и т. д.

Чтобы стационарные состояния могли длительно существовать в реальной системе, они должны быть устойчивы не только по отношению к малым изменениям координат и скоростей, но и по отношению к малым изменениям самого вида дифференциальных уравнений, описывающих систему. Эти малые изменения вида дифференциальных уравнений отражают соответствующие малые изменения свойств той системы, которая этими уравнениями описывается. И так как, с одной стороны, мы никогда не можем с абсолютной точностью описать реальную систему при помощи математического аппарата, а с другой стороны, ни одна реальная система не остается абсолютно неизменной во время происходящих в ней процессов, то всегда надо допускать возможность малых изменений вида дифференциальных уравнений, описывающих реальную систему¹⁾.

Если мы при рассмотрении той или иной конкретной задачи приписываем параметрам вполне определенные фиксированные значения, то это имеет смысл только при условии, что малые изменения параметров не изменяют существенно характера движений и в поведении идеальной модели сохраняются те черты, которые нас интересуют. Те же черты поведения модели, которые не сохраняются при малом изменении вида дифференциальных уравнений и величин параметров, не имеют физического интереса, так как они не отражают свойств реальной физической системы. Такие не меняющиеся в своих существенных чертах при малом изменении вида дифференциальных уравнений системы, которые мы будем называть «*грубыми*» системами, служат теоретическими моделями реальных физических систем, и их мы главным образом и будем изучать в этой книге. Однако то ограничение, которое мы наложили на малые изменения системы, — чтобы при этих изменениях не увеличилось число степеней свободы или, иначе, порядок уравнения, — весьма существенно. Действительно, с некоторой точки зрения, которую физически можно оправдать, «малым изменением вида» уравнения можно было бы считать также повышение порядка дифференциального уравнения,

¹⁾ Эти малые изменения системы или малые изменения вида дифференциальных уравнений будем сначала предполагать такими, которые не меняют порядка исходного дифференциального уравнения (или, что то же, не меняют числа дифференциальных уравнений первого порядка, если мы рассматриваем только системы первого порядка). На языке физики это значит, что рассматриваемые малые изменения системы таковы, что они не вынуждают нас отказаться от идеализации, связанной с числом степеней свободы.

если только коэффициенты при появляющихся вновь более высоких производных достаточно малы. А «малое изменение вида» дифференциального уравнения, заключающееся в повышении порядка уравнения, есть результат учета каких-либо новых степеней свободы системы, учета каких-то «паразитных» параметров ее. Так, например,

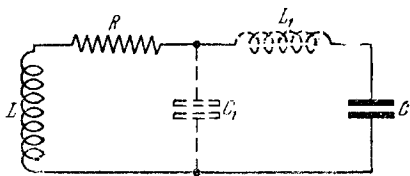


Рис. 8.

в случае электрической схемы, изображенной на рис. 8, учитывая только индуктивность L , емкость C и активное сопротивление катушки самоиндукции R , т. е. основные («не паразитные») параметры, мы получим дифференциальное уравнение второго порядка. Учитывая, кроме

того, суммарную «паразитную» емкость между витками катушки, т. е. емкость C_1 , и «паразитную» индуктивность проводов, т. е. индуктивность L_1 , вместо уравнения второго порядка получим уравнение четвертого порядка. Но поскольку C_1 и L_1 — величины малые, это уравнение четвертого порядка можно рассматривать лишь как малое изменение вида исходного дифференциального уравнения второго порядка.

Эти «малые изменения» вида дифференциального уравнения, приводящие к повышению порядка уравнения, можно было бы продолжать как угодно долго, ибо, стремясь к более полному описанию системы, мы всегда приходили бы к все большему и большему числу степеней свободы.

Решив вопрос об устойчивости того или иного стационарного движения, мы должны были бы, строго говоря, также убедиться в том, что данное движение не исчезает и не теряет своей устойчивости при повышении порядка дифференциального уравнения. Действительно, если бы оказалось, что состояние равновесия, устойчивое в том случае, когда учитываются только основные параметры, потеряло свою устойчивость вследствие влияния малого паразитного параметра, повышающего порядок уравнения, то это значило бы, что в действительности это состояние равновесия неустойчиво. Поэтому требование устойчивости состояния равновесия по отношению к таким изменениям уравнения является вполне естественным. Нетрудно показать, что невозможно построить такую идеальную модель динамической системы (выделить такой класс дифференциальных уравнений), для которой состояния равновесия всегда оставались бы устойчивыми, даже если в уравнения системы войдут члены с более высокими производными, имеющими сколь угодно малые, но отличные от нуля произвольные аналитические коэффициенты. Отсюда следует, что нельзя выставить общее требование к идеальным моделям динамических систем о неизменности характера стационарных движений при появлении новых степеней свободы (ана-

логичное требованием грубости при малых изменениях динамической системы, не связанных с появлением новых степеней свободы), а можно лишь учитывать влияние новых степеней свободы, принимая во внимание специфические особенности рассматриваемых систем. С состояниями, «устойчивость» которых обуславливается, в сущности, не свойствами реальной системы, а тем, что мы не учитываем некоторую степень свободы, нам придется встречаться в дальнейшем.

Но не быть «наивными» мы не можем, ибо в противном случае мы должны были бы проверить, не нарушают ли устойчивости данного состояния всевозможные малые паразитные параметры, повышающие порядок уравнения. Однако мы никогда не сможем довести эту проверку до конца, ибо число таких паразитных параметров во всякой системе очень велико и, кроме того, как будет показано, может случиться, что эти параметры влияют в разные стороны, и значит, чтобы проверить их влияние, надо не только предполагать наличие этих параметров, но и знать количественные соотношения между ними, а величин паразитных параметров мы обычно не знаем. Поэтому правильность ответа на вопрос об устойчивости того или иного состояния в реальной системе, как и всякого другого результата теоретического рассмотрения (связанного с неизбежной идеализацией свойств этой системы), может быть проверена только опытным путем.

Форма, в которой мы будем пытаться получить ответ на интересующие нас вопросы, в разных случаях будет различна. Можно было бы получить ответы на все возникающие вопросы, если бы были известны те функции, которые характеризуют состояния системы и изменения этих состояний. Эти функции, которые предстоит нам изучать для того, чтобы определять поведение системы, например зависимость силы тока или напряжения от времени, определены при помощи дифференциальных уравнений, описывающих данную систему, и другого определения не имеют. Только для очень небольшого класса случаев, например для линейных уравнений с постоянными коэффициентами, возможно свести задачу об отыскании таких функций к другой более простой, например к решению алгебраических уравнений или нахождению интегралов (квадратур) от функций, входящих в дифференциальные уравнения.

Поэтому необходимо непосредственно, из самих дифференциальных уравнений, уметь извлечь указания относительно характера и вида функций, этими уравнениями определяемых.

В первую очередь при этом возникает задача: определить наиболее характерные, так сказать качественные, черты этих функций при помощи геометрического построения так называемых интегральных кривых, т. е. кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Мы будем называть это качественным интегрированием уравнений. Если мы сумеем качественно проинтегрировать рассматриваемое

дифференциальное уравнение, то получим качественную картину возможных физических процессов в рассматриваемой системе. Большое число вопросов, имеющих фундаментальный практический интерес, носит именно такой качественный характер, например вопрос о наличии устойчивых состояний равновесия, вопрос о существовании устойчивых периодических процессов, вопрос о мягком и жестком режиме и т. д.

Качественное интегрирование существенно облегчит и количественное интегрирование или, точнее, облегчит решение тех количественных вопросов, которые возникают в физике колебаний. В конечном счете теория колебаний не интересуется численными значениями функций в тот или другой частный момент времени; ее в основном интересуют те количественные характеристики, которые определяют протекание этой функции на значительных отрезках времени, например в случае периодической функции — ее период, величины коэффициентов разложения в ряд Фурье, спектральный состав для функций, изображимых при помощи интеграла Фурье, и т. д.

Однако для нахождения этих величин, например спектрального состава, теория колебаний часто должна в качестве промежуточной ступени определять численные значения функций для тех или иных частных значений независимого переменного. Обычные приближенные методы количественного интегрирования (например, метод изоклин, метод Рунге — Кутты), которые могут быть использованы для получения ответов на такие вопросы, само собой разумеется, также оперируют непосредственно с дифференциальным уравнением. Знание качественной картины для данного дифференциального уравнения позволяет с большей эффективностью и надежностью применять количественные приближенные методы, разумно их комбинировать и т. д.

В дальнейшем мы должны будем познакомить читателя с тем математическим аппаратом, который необходим для исследования функций, определяемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Поскольку мы здесь ограничимся рассмотрением систем с одной степенью свободы, это будут функции, определяемые одним дифференциальным уравнением не выше второго порядка или не более чем двумя дифференциальными уравнениями первого порядка.

Чтобы облегчить усвоение этого математического аппарата, мы начнем с изложения хорошо известных обычных линейных задач на том языке и частично с помощью тех приемов, которые потом в развернутом виде будут нами использованы при решении несравненно более сложных нелинейных задач.

ГЛАВА I

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Линейная система без трения (гармонический осциллятор)

Мы начнем наше рассмотрение с простейшей автономной колебательной системы, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.1)$$

и которую в физике называют *гармоническим осциллятором*.

Примером такой системы является (при соответствующих предположениях), например, тело массы m , которое может совершать горизонтальные движения вдоль стержня под действием двух пружин (рис. 9). Чтобы рассмотрение этой системы привело к интересующему нас случаю, сделаем следующие упрощающие предположения¹⁾. Предположим, во-первых, что силы, с которыми действуют пружины на тело, пропорциональны его смещению x относительно положения равновесия. В действительности это с некоторой степенью точности выполняется только при достаточно малых смещениях (только при малых деформациях пружина подчиняется закону Гука). Во-вторых, мы будем предполагать, что система при движении не испытывает трения (нет трения ни о воздух, ни о поддерживающий стержень, пружины не обладают внутренним трением). Это второе предположение об отсутствии трения в системе, конечно, еще с меньшей степенью точности выполняется в реальных физических системах. При сделанных предположениях

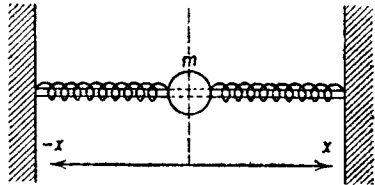


Рис. 9.

¹⁾ Мы не упоминаем и не будем упоминать более о других упрощающих предположениях, о которых шла речь во Введении.

движение такой системы отображается линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (1.2)$$

где k — положительный коэффициент, зависящий от упругости пружин. Полагая $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, получим уравнение гармонического осциллятора (1.1).

Примером электрической системы этого типа может служить колебательный контур, состоящий из емкости C и самоиндукции L (рис. 10); такие контуры мы будем для краткости называть «томсоновскими»¹⁾. Чтобы прийти к случаю линейной системы без трения, мы должны, конечно, идеализировать свойства этого контура. Прежде всего надо предположить, что в контуре не происходит потеря энергии, т. е. что соответствующие проводники не обладают сопротивлением, что в диэлектрике энергия также не рассеивается и, наконец, что отсутствует излучение электромагнитной энергии.

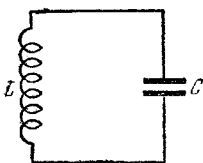


Рис. 10.

Эти предположения никогда не осуществляются с достаточной точностью в реальных системах, о чем свидетельствует хотя бы тот факт, что во всяком контуре всегда происходит более или менее сильное, но во всяком случае заметное (если подождать достаточно долго) затухание колебаний. Идеализируя колебательный контур как систему без потерь энергии, мы уже не можем передать одну из наиболее типичных черт всякой реальной системы — затухание собственных колебаний; и в этом смысле предположение об отсутствии потерь энергии является гораздо более далеко идущей идеализацией, чем предположение о линейности контура, которое в реальных системах довольно хорошо соблюдается. Однако такая идеализация позволяет все же достаточно удовлетворительно ответить на некоторые основные вопросы теории колебаний, например на вопросы о частоте и форме собственных колебаний (конечно, только в тех случаях, когда затухание колебаний достаточно мало). Кроме того, надо считать, что емкость C конденсатора не зависит от его заряда, а индуктивность L катушки — от силы тока, протекающего через нее. При сделанных предположениях электрическая система также подчиняется уравнению вида (1.1); именно, если обозначить заряд конденсатора через q , то получим:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0. \quad (1.3)$$

Обозначая $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, снова приходим к уравнению гармонического осциллятора (1.1).

¹⁾ Целесообразность этого специального термина выяснится в дальнейшем, когда нам придется рассматривать другие системы, «нетомсоновские», в которых сопротивление играет преобладающую роль.

Напомним теперь характерные свойства движений гармонического осциллятора. Общее решение дифференциального уравнения (1.1), как известно, имеет вид

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \quad (1.4)$$

где A и B — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Если для $t=0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, то

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t; \quad \dot{x} = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + \dot{x}_0 \cos \omega_0 t. \quad (1.5)$$

Это же решение может быть также записано в виде

$$x = K \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad \dot{x} = -K \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (1.6)$$

где

$$K = +\sqrt{A^2 + B^2} = +\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg } \alpha = -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} K \\ \text{и} \\ \text{tg } \alpha \end{matrix}} \right\} (1.7)$$

$$\left(\cos \alpha = \frac{x_0}{K}, \quad \sin \alpha = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 K} \right).$$

Мы видим, что зависимость смещения или заряда от времени (осциллограмму колебаний) можно изобразить в виде хорошо известной «синусоиды» (рис. 11). Для характеристики такого «синусоидального» или гармонического колебания нужно задать три величины: K — максимальное отклонение, или *амплитуду* колебаний, ω_0 — число колебаний в 2π секунд, или *угловую частоту*, и α — так называемую *начальную фазу* колебаний, которая играет очень существенную роль, когда мы имеем дело сразу с несколькими процессами. Действительно, так как выбор фазы колебания вполне определяет начальный момент отсчета времени, то ее нельзя выбирать произвольно, если начальный момент отсчета времени уже задан каким-либо другим процессом. Но фаза колебаний не играет какой-либо физической роли, когда мы имеем дело только с одним «изолированным» процессом. Итак, гармонический осциллятор совершает периодические синусоидальные (гармонические) движения (отсюда его название). Колебательное движение не возникает лишь в случае $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$, т. е. когда осциллятор в начальный момент находится в состоянии равновесия; в этом случае он продолжает и дальше в нем оставаться. Амплитуда и фаза гармонического колебательного движения определяются начальными условиями. Угловая частота, а значит, и период процесса не зависят от начальных условий и определяются параметрами колебательной системы.

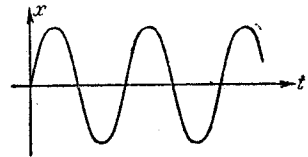


Рис. 11.

Формулы (1.5) или (1.6) и (1.7) дают точный количественный ответ на вопрос, как происходят движения в системе, определяемой уравнением (1.1). Они позволяют определять «будущее из настоящего», т. е. позволяют вычислять значения x и \dot{x} для каждого момента времени t , если они известны для момента времени $t = 0$.

§ 2. Понятие о фазовой плоскости. Представление совокупности движений гармонического осциллятора на фазовой плоскости

1. Фазовая плоскость. Положим $\dot{x} = u$ и будем изучать движение гармонического осциллятора, изображая это движение на плоскости x, u , где x и u — прямоугольные декартовы координаты. Каждому состоянию нашей системы, каждой паре значений координаты x и скорости u соответствует точка на плоскости x, u . Обратно, каждой точке на плоскости x, u соответствует одно и только одно состояние системы. Плоскость x, u носит название плоскости состояний или, иначе, *фазовой плоскости*; она изображает совокупность всех возможных состояний нашей системы. Каждому новому состоянию системы соответствуют все новые и новые точки фазовой плоскости. Таким образом, изменению состояний системы можно соподчинить движение некоторой точки на фазовой плоскости, которая носит название «изображающей» или «представляющей» точки. Траектория такой изображающей точки называется *фазовой траекторией*; ее не следует смешивать с действительной траекторией движения. Скорость такой изображающей точки называется *фазовой скоростью*; опять-таки ее не следует смешивать с действительной скоростью. *Целой фазовой траекторией* мы будем называть ту кривую, которую описывает изображающая точка за все время своего движения (от $t = -\infty$ до $t = +\infty$)¹⁾.

Зная решение дифференциального уравнения гармонического осциллятора (1.1), нетрудно найти уравнение траектории на фазовой плоскости. Именно, уравнения

$$x = K \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad u = -K\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.6)$$

¹⁾ Метод отображения состояния системы с n степенями свободы заданием одной точки в пространстве $2n$ измерений уже давно применяется в физике. Это $2n$ -мерное пространство состояний (фаз) системы получило название фазового пространства. Отсюда термины «фазовое пространство» и, в частности, «фазовая плоскость» перешли в теорию колебаний.

Для целей изучения динамики колебательных систем фазовое пространство было впервые применено Леотэ [172], который исследовал работу некоторого устройства автоматического регулирования путем построения в фазовом пространстве этого устройства интегральных кривых и предельных циклов (не давая им этого названия; он, по-видимому, не был знаком с опубликованной несколько раньше работой Пуанкаре [108], в которой предельные циклы впервые появились в математике). К сожалению, замечательные работы Леотэ были впоследствии почти полностью забыты.

являются параметрическими уравнениями фазовой траектории; исключая из этих уравнений t , найдем координатное уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2 \omega_0^2} = 1. \quad (1.8)$$

Нетрудно видеть, что это — уравнение семейства подобных (с постоянным отношением осей) эллипсов, причем через каждую точку плоскости проходит один и только один эллипс¹⁾, соответствующий определенному значению K , т. е. определенному классу начальных условий, а именно одним и тем же начальным значениям полной энергии системы. Вся плоскость x, y в этом случае заполнена вложенными друг в друга эллипсами, за исключением точки $x=0, y=0$; «проходящий» через эту точку эллипс сам вырождается в точку (рис. 12).

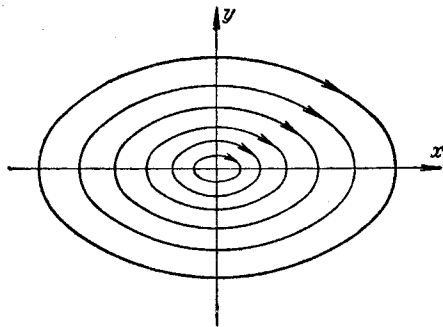


Рис. 12.

Все эти эллипсы представляют собой траектории движения представляющей точки.

Посмотрим, как будет двигаться изображающая точка по какому-нибудь из этих эллипсов. Легко видеть, что при выбранном нами направлении осей координат движение представляющей точки будет всегда, по любой траектории, происходить по часовой стрелке, так как в верхней полуплоскости $\dot{x} = y > 0$ и x увеличивается со временем, а в нижней полуплоскости $\dot{x} = y < 0$ и, следовательно, x уменьшается со временем.

Для того чтобы найти величину фазовой скорости, введем, как это обычно делается в механике, фазовый радиус-вектор

$$\mathbf{r} = ix + jy.$$

В таком случае фазовая скорость изобразится в виде:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = i\dot{x} + j\dot{y}$$

или по (1.6) в виде:

$$\mathbf{v} = i \{-K\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)\} + j \{-K\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha)\}. \quad (1.9)$$

Нетрудно видеть, что фазовая скорость, за исключением случая $K=0$, никогда не обращается в нуль, так как синус и косинус одновременно никогда не обращаются в нуль.

¹⁾ В других более сложных примерах может случиться, что исключая время t из параметрических уравнений фазовой траектории, мы получим координатное уравнение не одной траектории, а сразу нескольких.

Мы исследовали характер фазовой плоскости и обнаружили, что периодическим движениям, происходящим в системе, на фазовой плоскости соответствуют замкнутые траектории представляющей точки — в нашем случае эллипсы, по которым двигается изображающая точка с не обращающейся в нуль фазовой скоростью (рис. 12), совершая полный оборот в $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ единиц времени. Состоянию равновесия осциллятора соответствует на фазовой плоскости фазовая траектория, выродившаяся в точку.

Допустим теперь, что нам не известен характер движений в системе, но каким-либо образом стал известен характер фазовых траекторий и величины фазовых скоростей. Можем ли мы, пользуясь этим знанием, делать высказывания, касающиеся отображаемых этими кривыми движений? Как мы увидим дальше, общий характер движения, качественные его черты, выявляются уже в характере фазовых траекторий. Фазовая плоскость, разбитая на траектории, дает легко обозримый «портрет» динамической системы; она дает возможность сразу, одним взглядом охватить всю совокупность движений, могущих возникнуть при всевозможных начальных условиях.

Мы получили для рассматриваемого случая гармонического осциллятора картину на фазовой плоскости, исходя из готового решения (1.6) уравнения осциллятора. Можно, однако, не пользуясь этим решением, непосредственно из уравнения (1.1) вывести заключения о движении изображающей точки на фазовой плоскости. Именно этот второй путь и представляет особый интерес, так как он позволяет вывести известные заключения о характере движения без знания аналитических выражений интегралов исходного уравнения и, следовательно, применим и в тех случаях, когда такие аналитические выражения, подобные (1.6), не могут быть найдены.

2. Уравнение, не содержащее времени. Чтобы от исходного уравнения (1.1), не интегрируя этого уравнения, непосредственно перейти к картине на фазовой плоскости, поступим следующим образом. Заменим исходное уравнение второго порядка двумя эквивалентными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x. \quad (1.10)$$

Деля одно из этих уравнений на другое, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}. \quad (1.11)$$

Это уравнение определяет так называемые *интегральные кривые* — кривые, в каждой точке которых касательная имеет наклон (угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}$), вычисляемый по уравнению (1.11). Мы видим, что, в то время как зависимость x от t выражается дифференциальным уравнением второго порядка (1.1), зависимость y от x

выражается дифференциальным уравнением первого порядка. Проинтегрировав уравнение (1.11), мы получили бы уравнение интегральных кривых уже не в дифференциальной, а в конечной форме. В данном, простейшем случае интегральные кривые, как нетрудно видеть, совпадают с фазовыми траекториями. Однако в дальнейшем нам придется различать интегральные кривые и фазовые траектории, так как может случиться, что одна интегральная кривая состоит не из одной, а сразу из нескольких фазовых траекторий.

3. Особые точки. Центр. Уравнение (1.11) непосредственно определяет в каждой точке плоскости единственную касательную к соответствующей интегральной кривой, за исключением точки $x = 0, y = 0$, где направление касательной становится неопределенным. Как известно из обычной теории дифференциальных уравнений, через те точки, для которых соблюдаются условия теоремы Коши ¹⁾ (в числе последних имеется условие, что дифференциальное уравнение дает определенное направление касательной к интегральной кривой), проходит одна и только одна интегральная кривая; относительно точек же, в которых направление касательной становится неопределенным и в которых, следовательно, условия теоремы Коши не соблюдаются, уже нельзя утверждать (на основании этой теоремы), что через них проходит одна и только одна интегральная кривая. Такие точки, в которых направление касательной неопределенно, носят название *особых точек* данного дифференциального уравнения. Однако теорема Коши не дает права утверждать, что через особую точку проходит больше или меньше одной интегральной кривой (т. е. либо ни одной кривой, либо много). Но для тех простейших особых точек (особых точек первого порядка), с которыми нам придется главным образом сталкиваться, это обратное утверждение оказывается правильным. Именно, как мы убедимся при рассмотрении этих особых точек, через особую точку первого порядка либо не проходит ни одной, либо проходит больше чем одна интегральная кривая.

Дифференциальное уравнение может иметь, вообще говоря, много особых точек. В нашем случае имеется единственная особая точка $x = 0, y = 0$. Существуют разные типы особых точек, различаемые по характеру поведения интегральных кривых вблизи данной особой точки. В рассматриваемом нами случае через особую точку не проходит ни одна интегральная кривая. Такая изолированная особая точка, вблизи которой интегральные кривые представляют собой замкнутые кривые, не имеющие особенностей, в частности, например, эллипсы, «вложенные» друг в друга и охватывающие особую точку, называется *центром*. С другими типами простейших особых точек мы познакомимся при рассмотрении дальнейших примеров. Пока же ограничимся только указанием, что поскольку разным типам

¹⁾ К теореме Коши и ее значению для исследования поведения интегральных кривых мы еще вернемся в дальнейшем (см. также Дополнение 1).

интегральных кривых соответствуют различные типы движений системы, классификация особых точек непосредственно связана с поведением системы вблизи особой точки.

4. **Изоклины.** Итак, уравнение (1.11) определяет поле касательных на фазовой плоскости. Нетрудно отдать себе отчет в характере этого поля, если построить семейство изоклин¹⁾, которые в данном случае будут просто прямыми, проходящими через начало координат (рис. 13). Действительно, пусть мы ищем все те точки фазовой плоскости, где наклон интегральных кривых равняется κ ($\frac{dy}{dx} = \kappa$). Тогда согласно (1.11) уравнение этой изоклины будет:

$$-\omega_0^2 \frac{x}{y} = \kappa \text{ или } y = \sigma x,$$

где

$$\sigma = -\frac{\omega_0^2}{\kappa}. \quad (1.12)$$

Нетрудно видеть (давая σ различные значения при фиксированном ω_0^2), что исследуемое поле состоит из линейных элементов, симметрично расположенных относительно осей x и y , постепенно (с изменением наклона изоклины σ) меняющих свое направление от горизонтального (вдоль оси y , где $x=0$) до вертикального (вдоль оси x , где $x=\infty$).

Уравнение (1.11) не дает, однако, ответа на вопрос о том, в какую сторону и с какой скоростью будет двигаться изображающая точка на фазовой плоскости. Уравнения же (1.10) определяют фазовую скорость как по величине, так и по направлению; действительно,

$$v = i\dot{x} + j\dot{y} = i\dot{y} + j(-\omega_0^2 x). \quad (1.13)$$

Если принять во внимание и направление, то целесообразно вместо поля линейных элементов (рис. 13) рассматривать векторное поле (рис. 14), которое характеризует не только направление касательной к интегральной кривой в данной точке, но и направление движения по фазовой траектории.

¹⁾ Изоклина — это геометрическое место точек, в которых касательные ко всем интегральным кривым имеют одинаковый наклон, т. е. образуют одинаковые углы с осью абсцисс.

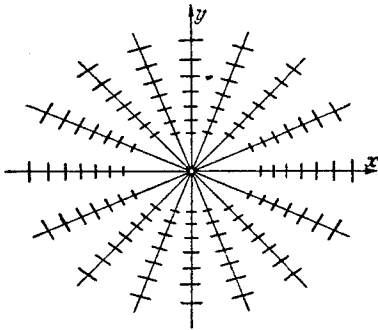


Рис. 13.

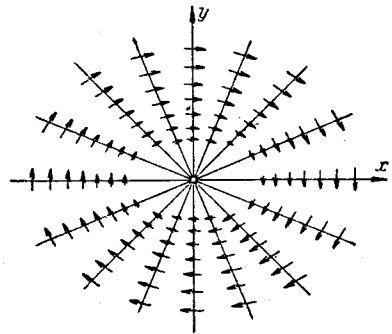


Рис. 14.

Как мы уже указывали, фазовая скорость $v = \sqrt{y^2 + \omega_0^2 x^2}$ обращается в нуль только в начале координат, т. е. только в особой точке.

Нетрудно, взглянув на рис. 13 и 14, убедиться, что метод изоклин в рассматриваемом случае позволяет сразу получить известное представление о характере траекторий на фазовой плоскости. Конечно, применение метода изоклин в рассматриваемом простейшем случае, когда исходное дифференциальное уравнение (1.11) допускает разделение переменных и, следовательно, легко интегрируется, вряд ли представляет какие-либо преимущества. В самом деле, интегрируя уравнение

$$x dx + \frac{1}{\omega_0^2} y dy = 0,$$

получим:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2\omega_0^2} = C,$$

или, полагая $2C = K^2$, находим, как и следовало ожидать, на фазовой плоскости по-прежнему уравнение семейства эллипсов:

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2 \omega_0^2} = 1.$$

Не следует забывать, что сейчас мы его получили совсем другим путем, не зная решений дифференциального уравнения (1.1). В тех же случаях, когда уравнение, подобное (1.11), не может быть проинтегрировано, метод изоклин позволяет получить достаточно точное представление о характере интегральных кривых на фазовой плоскости, несмотря на то, что аналитическое выражение для этих интегральных кривых не может быть найдено. В этих более сложных случаях применение метода изоклин, как мы увидим в дальнейшем, может принести существенную пользу.

5. Состояние равновесия и периодические движения. Сделаем теперь обратные выводы по отношению к тем, которые мы делали в начале этого параграфа, когда, зная движение, зная зависимость x от t , искали вид фазовой плоскости. Посмотрим, что можно сказать о характере движения, зная характер интегральных кривых на фазовой плоскости и зная выражение для фазовой скорости.

Во-первых, мы утверждаем, что все фазовые траектории в нашем случае (кроме траектории $x = 0$, $y = 0$, которая выродилась в точку) соответствуют периодическим движениям. Действительно, все эти траектории — эллипсы, т. е. замкнутые кривые. Если наша изображающая точка движется по замкнутой кривой и если она возвращается через некоторое время, совершив «обход», в ту же самую

точку фазовой плоскости, т. е. имеет через некоторое время то же самое положение и ту же самую скорость, то дальнейшее движение будет совершенно точно совпадать с предшествовавшим, процесс будет повторяться.

Нетрудно видеть, что «время возвращения», или, иначе, период движения, является конечным. Действительно, длина нашего эллипса конечна; с другой стороны, фазовая скорость при движении по эллипсу нигде не приближается к нулю (так как она равна нулю только в начале координат, а наши эллипсы не проходят через начало координат). Поэтому изображающая точка обходит весь эллипс в конечное время, т. е. период процесса конечен.

Во-вторых, мы утверждаем, что выродившаяся траектория $x=0$, $y=0$, или, иначе, особая точка $x=0$, $y=0$, соответствует состоянию равновесия. Действительно, фазовая скорость для точки $x=0$, $y=0$ равна нулю; изображающая точка, находящаяся в исходный момент в начале координат, там и останется, если какие-либо случайные отклонения и толчки не выведут изображающую точку из точки $x=0$, $y=0$.

Вообще состояниям равновесия соответствуют такие точки фазовой плоскости, для которых одновременно $\frac{dx}{dt}=0$ и $\frac{dy}{dt}=0$. Это нетрудно понять и из физических соображений. Например, для механического случая $\frac{dx}{dt}=0$ говорит о том, что скорость равна нулю, а $\frac{dy}{dt}=0$ указывает, что ускорение или, что все равно, сила равны нулю.

Вообще говоря, состояниям равновесия динамической системы соответствуют на фазовой плоскости особые точки уравнения интегральных кривых и, обратно, особые точки соответствуют состояниям равновесия¹⁾.

Таким образом, не зная еще возможных движений с количественной стороны, мы знаем качественную характеристику возможных движений. Результаты качественного исследования линейной системы без трения (гармонического осциллятора) могут быть сформулированы

¹⁾ Рассмотрим динамическую систему, отображаемую уравнениями $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют общий множитель, обращающийся в нуль, то могут быть состояния равновесия, не являющиеся особыми точками уравнения интегральных кривых $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют общий множитель, обращающийся в бесконечность в особых точках уравнения интегральных кривых, то эти особые точки могут не быть состояниями равновесия.

таким образом: *такая система при любых начальных условиях совершает периодические движения вокруг состояния равновесия $x=0, y=0$, за исключением того единственного случая, когда начальные условия как раз соответствуют состоянию равновесия.*

§ 3. Устойчивость состояния равновесия

Интуитивно мы себе представляем смысл слов «устойчивость состояния равновесия». Однако такого интуитивного представления, конечно, недостаточно, и нужно, чтобы оно превратилось в строгое понятие, которым мы сможем воспользоваться в дальнейшем.

Начнем наше рассмотрение с простейшего примера: представим себе математический маятник без трения (рис. 15). Очевидно, что возможны два состояния равновесия маятника: 1) когда мы его помещаем, не сообщая начальной скорости, в самую нижнюю точку a ; 2) когда мы его помещаем, опять-таки не сообщая скорости, в самую верхнюю точку b . Очевидно также, что нижнее состояние равновесия устойчивое, верхнее — неустойчивое. Действительно, если маятник находится в точке b , то достаточно сколь угодно малого толчка (если даже предположить, что маятник сначала точно находился в точке b), чтобы маятник начал двигаться с возрастающей скоростью от точки b и ушел из непосредственной близости к этой точке. Иначе будет вести себя маятник, покоящийся в точке a . Получив толчок, он начнет двигаться с уменьшающейся скоростью, причем чем меньше будет толчок, тем на меньшее расстояние он отойдет от точки a , а затем повернет обратно и будет колебаться вокруг точки a . При достаточно малом толчке маятник не выйдет из любой заданной области вокруг точки a и скорость его не превзойдет любой заданной величины.

Исходя из этого примера, мы попытаемся дать определение устойчивости состояния равновесия, используя для этой цели уже введенное нами представление о фазовой плоскости. Пусть рассматриваемая система находится в состоянии равновесия. Тогда изображающая точка на фазовой плоскости находится в неподвижности в одной из особых точек уравнения интегральных кривых. Если теперь мы выведем нашу систему из состояния равновесия, сообщив ей, например, некоторый толчок¹⁾, то изображающая точка сместится из особой точки и начнет двигаться по фазовой плоскости. «Выкрасим» для краткости речи



Рис. 15.

¹⁾ В теории устойчивости обычно рассматриваются «мгновенные» толчки, роль которых сводится к мгновенному смещению изображающей точки на фазовой плоскости, т. е., иначе говоря, к мгновенному изменению начальных условий. Конечно, это идеализация реальных толчков.

изображающую точку в черный цвет, особую же точку оставим светлой (рис. 16). Мы можем тогда охарактеризовать устойчивое состояние равновесия таким образом: если при достаточно малом начальном смещении черная точка никогда не уйдет далеко от светлой, то светлая точка является устойчивым состоянием равновесия¹⁾.

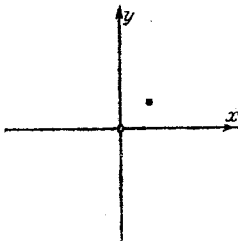


Рис. 16.

Ясно, что и эта характеристика неполна. Во-первых, назовем ли мы светлую точку устойчивой, если черная точка не уходит далеко при начальных смещениях в одних направлениях и уходит далеко, как бы мало мы ни сместили ее в других направлениях? Очевидно, что такая светлая точка не будет устойчивой; она, так сказать, лишь «условно» устойчива, при

запрещении некоторого класса смещений. Нужно требовать, чтобы черная точка не уходила далеко от светлой в результате достаточно малого смещения в любом направлении.

Во-вторых, — и это самое существенное, — не являются достаточно определенными термины: «не уйдет далеко», «остается вблизи» и т. д. Ясно, что понятие «близко», «далеко» зависит от конкретных физических условий задачи. Поэтому слова «далеко», «близко» не значат ничего другого, как уйдет или нет черная точка из некоторой заданной области, окружающей светлую точку, причем эта область может быть большей или меньшей в зависимости от условий задачи.

Поэтому окончательно мы остановимся на таком определении (рис. 17): *состояние равновесия является устойчивым, если по любой заданной области допустимых отклонений от состояния равновесия (область ϵ) мы можем указать область $\delta(\epsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри δ , никогда не достигнет границы области ϵ . Наоборот, состояние равновесия неустойчиво, если может быть указана такая область отклонений от состояния равновесия (область ϵ), для которой не существует области $\delta(\epsilon)$, окружающей состояние равновесия и обладающей тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри δ , никогда не достигнет границы области ϵ .*

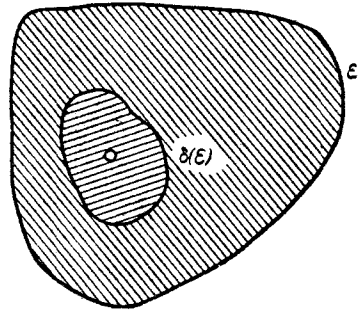


Рис. 17.

¹⁾ Часто это же условие формулируют так: состояние равновесия устойчиво, если достаточно малое возмущение всегда останется малым.

Эти определения связаны с представлением о фазовой плоскости рассматриваемой системы. Однако оно может быть сформулировано и без применения представления о фазовой плоскости.

Можно также перевести это определение устойчивости на язык математических неравенств, обозначив через $x(t)$ и $y(t)$ движение черной точки после смещения и предположив для простоты, что область допустимых отклонений ε представляет собой квадрат (рис. 18).

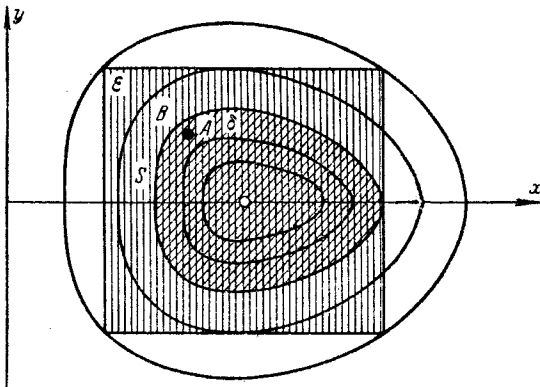


Рис. 18.

Мы получим тогда такую запись нашего определения: состояние равновесия $x = \bar{x}$, $y = 0$ называется устойчивым, если, задав наперед сколь угодно малое ε ($\varepsilon > 0$), можно найти такое $\delta(\varepsilon)$, что если для $t = 0$

$$|x(0) - \bar{x}| < \delta \text{ и } |y(0)| < \delta,$$

то тогда для $0 < t < \infty$

$$|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon \text{ и } |y(t)| < \varepsilon.$$

Определенную таким образом устойчивость мы будем называть «устойчивостью по Ляпунову» и именно ее будем иметь в виду, когда будем говорить просто об устойчивости. В последующем мы познакомимся с другими определениями устойчивости и с значением работ Ляпунова [84] в учении об устойчивости.

Сейчас мы перейдем к анализу устойчивости состояния равновесия гармонического осциллятора. Это рассмотрение кстати даст нам возможность наглядно представить, почему необходимо говорить в определении устойчивости о двух областях ε и δ .

Нетрудно убедиться, что особая точка типа центра соответствует устойчивому состоянию равновесия. Пусть задана сколь угодно малая область ε , например квадратная (вертикальная штриховка на рис. 18). Выберем из замкнутых кривых, окружающих особую точку,

ту замкнутую кривую S , которая касается заданного квадрата и вся лежит внутри него. Заметим, кстати, что это всегда можно сделать независимо от того, имеют ли замкнутые интегральные кривые в непосредственном соседстве с особой точкой форму эллипсов или какую-либо другую. Для наличия такой кривой необходимо лишь существование континуума замкнутых кривых, не имеющих особенностей, вложенных друг в друга и стягивающихся к точке, что мы всегда и имеем в случае центра. Область внутри кривой S (двойная штриховка) и будет областью $\delta(\epsilon)$, так как если начальное положение черной точки будет внутри этой области (точка A); то она никогда не уйдет из квадрата ϵ , а будет совершать периодическое движение вокруг состояния равновесия. Мы могли бы, конечно, за область δ выбрать любую другую область, лежащую внутри кривой S , например область внутри квадрата, лежащего всеми своими точками внутри кривой A , кроме вершин, которые могут лежать на кривой S ¹⁾. Мы можем, таким образом, утверждать, что *состояние равновесия типа центра является устойчивым состоянием равновесия*.

§ 4. Линейный осциллятор при наличии трения

Для ответа на те вопросы, для которых трение играет существенную роль, мы должны отказаться от одной идеальной черты нашего гармонического осциллятора — отсутствия трения, сохранив остальную идеализацию. Примем, что сила трения пропорциональна скорости. Это предположение также представляет собой идеализацию, а именно, идеализацию реальных законов трения, которая находится в удивительном согласии с опытом, когда речь идет о жидком трении или трении о воздух при достаточно малых скоростях. Всякий иной закон трения нарушил бы линейность осциллятора, между тем мы пока ограничиваем наше рассмотрение только линейными системами.

Уравнение движения при сделанном предположении о законе трения напишется так:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad (1.14)$$

где b — коэффициент трения, т. е. сила трения для скорости, равной единице. Электрическим аналогом такой механической системы с трением, пропорциональным скорости, является «томсоновский контур» с омическим сопротивлением. Такой контур подчиняется уравнению

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad (1.15)$$

¹⁾ Ясно, что нельзя за область $\delta(\epsilon)$ выбрать самую область ϵ , так как при всех начальных положениях черной точки внутри области ϵ , но вне области δ , например в точке B (рис. 18), она непременно выйдет из области ϵ .

где q — заряд на обкладках конденсатора, а L , R и C , как обычно, — индуктивность, сопротивление и емкость.

Обозначая $\frac{b}{m} = 2h$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ (или соответственно $\frac{R}{L} = 2h$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$), получим уравнения (1.14) и (1.15) в обычном виде

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.16)$$

Решение этого уравнения, как известно, имеет вид¹⁾:

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad (1.17)$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1.18)$$

Как известно, при $h^2 > \omega_0^2$ эти корни действительные, а при $h^2 < \omega_0^2$ — комплексные. В соответствии с этим в зависимости от знака $h^2 - \omega_0^2$ мы получим два типа решений и два различных процесса: при $h^2 < \omega_0^2$ — затухающий осцилляторный процесс, при $h^2 > \omega_0^2$ — затухающий аperiodический процесс.

1. Затухающий осцилляторный процесс. При достаточно малом трении, когда $h^2 < \omega_0^2$, корни характеристического уравнения (1.18) имеют значения:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm j\omega,$$

где

$$\omega = +\sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (1.19)$$

и для общего решения уравнения (1.16) получаем:

$$x = e^{-ht} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (1.20)$$

где A и B определяются начальными условиями. Именно, если для $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, то

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-ht} \left\{ x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right\}, \\ \dot{x} &= e^{-ht} \left\{ \dot{x}_0 \cos \omega t - \frac{\omega_0^2 x_0 + h\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Решение (1.20) может быть также записано в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= Ke^{-ht} \cos(\omega t + \alpha), \\ \text{где } K &= +\sqrt{A^2 + B^2} = +\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega}\right)^2}, \\ \text{tg } \alpha &= -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega x_0}, \\ \left(\cos \alpha &= \frac{x_0}{K}, \quad \sin \alpha = -\frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega K} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

¹⁾ За исключением частного случая $h^2 = \omega_0^2$.

К аналогичному виду можно привести и выражение для скорости:

$$\dot{x} = -K\omega_0 e^{-ht} \sin(\omega t + \alpha + \vartheta), \quad (1.23)$$

где ϑ определено соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} h &= \omega_0 \sin \vartheta, \\ \omega &= \omega_0 \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Формулы (1.22) и (1.23) определяют один из типов затухающего колебательного движения, именно осцилляторный затухающий процесс, в котором затухание амплитуды происходит по показательному закону.

Полученные функции $x(t)$, равно как и функция $\dot{x}(t)$, не являются периодическими функциями. Действительно, периодическими функциями называются, как известно, такие функции $f(t)$, для которых можно указать некоторую величину τ , так что

$$f(t + \tau) = f(t)$$

при *любом* значении аргумента t . Наименьшая величина τ называется периодом функции $f(t)$. Функции (1.22) и (1.23) не подходят под это определение, ибо для них приведенное условие не удовлетворяется для *любых* значений аргумента t . Поэтому периода в строгом смысле этого слова в этом случае не существует. Однако промежуток времени между двумя последовательными прохождениями системы через положение равновесия (в одном и том же направлении) или между двумя последовательными максимальными отклонениями (в одну и ту же сторону) постоянен и равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Этот промежуток времени мы будем называть «условным периодом» затухающего осцилляторного процесса. Зависимость координаты от времени имеет вид, изображенный на рис. 19¹⁾.

Скорость затухания рассматриваемого осцилляторного процесса может быть охарактеризована величиной h , так называемым показателем затухания. Численное значение h зависит от выбора единиц времени. Однако можно дать иную характеристику затухания такого процесса, не зависящую от выбора единиц измерения.

Возьмем отношение двух последовательных экстремумов, направленных в одну и ту же сторону, например двух последовательных максимумов:

$$\frac{x'_{\max}}{x''_{\max}} = e^{hT} = e^{\frac{2\pi h}{\omega}}.$$

¹⁾ Заметим, что все экстремумы (как минимумы, так и максимумы) не находятся на середине временных расстояний между соответствующими нулями, а сдвинуты влево на величину $\frac{\vartheta}{\omega}$, где ϑ определяется формулами (1.24).

Логарифм этой величины, или, иначе говоря, разность логарифмов двух последовательных максимумов, носит название логарифмического декремента затухания d , причем

$$d = hT = \frac{2\pi h}{\omega}. \quad (1.25)$$

Чтобы еще иначе пояснить физический смысл логарифмического декремента d , заметим, что обратная величина $\frac{1}{d}$ дает число условных периодов, после которого амплитуда уменьшается в e раз (e — основание натуральных логарифмов)¹⁾.

Легко видеть, что полученный закон затухания колебаний тесно связан с принятой нами идеализацией закона трения. Только предположив, что сила трения пропорциональна скорости, мы получили

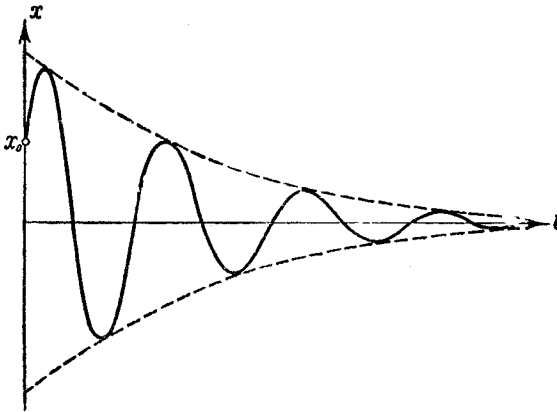


Рис. 19.

закон убывания максимумов по геометрической прогрессии с показателем прогрессии e^{-d} . Ясно, с другой стороны, что самое понятие логарифмического декремента затухания имеет определенный смысл только при этом законе затухания и теряет свой смысл, если закон затухания таков, что отношение двух последовательных максимумов не остается постоянным. Следовательно, без специальных оговорок понятие логарифмического декремента затухания применимо только к системам линейным. Определение логарифмического декремента затухания может быть сделано по кривой, изображенной на рис. 19,

¹⁾ Например, если $d = 0,02$, то это значит, что через 50 условных периодов амплитуда уменьшается в e раз, т. е. примерно до $\frac{1}{3}$ первоначальной величины.

или по полученной из этой кривой зависимости экстремумов от времени, нанесенной в полулогарифмическом масштабе (вместо отклонений по оси ординат откладываются логарифмы наибольших отклонений). В этом последнем случае зависимость принимает вид прямой линии, угол наклона которой дает непосредственно показатель затухания h , откуда умножением на условный период T получается логарифмический декремент затухания d (однако практически вместо этого прямого метода чаще применяется более удобный метод определения затухания по кривой резонанса).

Мы видим, что затухающее колебательное движение характеризуется четырьмя величинами: условным периодом T (или соответствующей условной угловой частотой ω), логарифмическим декрементом затухания d , амплитудой K и фазой α .

Свойствами системы определяются условный период и логарифмический декремент затухания колебаний; произвольными остаются амплитуда и фаза, которые определяются начальными условиями.

2. Изображение затухающего осцилляторного процесса на фазовой плоскости. Перейдем теперь к исследованию фазовой плоскости рассматриваемой системы, к построению ее «портрета», отображающего всю совокупность возможных движений.

Зная решение дифференциального уравнения (1.16), можно найти уравнение семейства фазовых траекторий. Согласно (1.22) параметрические уравнения траекторий на фазовой плоскости x, y имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= Ke^{-ht} \cos(\omega t + \alpha), \\ y &= \dot{x} = -Ke^{-ht} [h \cos(\omega t + \alpha) + \omega \sin(\omega t + \alpha)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Покажем, что это — семейство спиралей, имеющих асимптотическую точку в начале координат.

Для этой цели воспользуемся линейным преобразованием координат — приемом, к которому мы и в дальнейшем будем неоднократно прибегать. Именно, перейдем от переменных x, y к переменным

$$u = \omega x, \quad v = y + hx, \quad (1.27)$$

которые мы будем интерпретировать как декартовы координаты на *другой* плоскости (так называемая «активная» интерпретация преобразования координат¹⁾). Очевидно, если обозначить $\omega K = C_1$, то

$$u = C_1 e^{-ht} \cos(\omega t + \alpha), \quad v = -C_1 e^{-ht} \sin(\omega t + \alpha).$$

¹⁾ «Активная» интерпретация преобразования координат состоит в том, что преобразование $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ рассматривается как закон некоторого точечного преобразования плоскости x, y в другую плоскость с ортогональной (декартовой) системой координат u, v и соответствующей деформацией фигур.

Эта деформация фигур в нашем случае линейного и однородного преобразования (1.27) сводится к простому повороту и равномерным укорочениям или

Еще более простой вид уравнения фазовых траекторий на плоскости u, v получают в полярных координатах ρ, φ ($u = \rho \cos \varphi, v = \rho \sin \varphi$):

$$\rho = C_1 e^{-ht}, \quad \varphi = -(\omega t + \alpha),$$

или, исключив время,

$$\rho = C e^{\frac{h}{\omega} \varphi} \quad (1.28)$$

(здесь $C = C_1 e^{\frac{h\alpha}{\omega}}$ — новая произвольная постоянная).

Таким образом, на плоскости u, v фазовыми траекториями будет семейство *логарифмических спиралей* с асимптотической точкой в

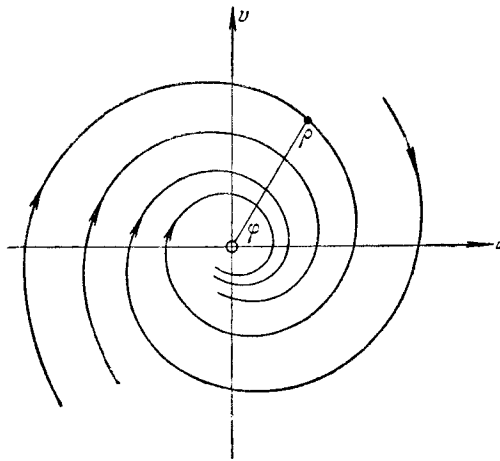


Рис. 20.

начале координат (рис. 20). При этом, поскольку φ убывает со временем, а $\rho \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, изображающая точка, двигаясь по спиральям на плоскости u, v , асимптотически приближается к началу координат.

Перейдем обратно на плоскость x, y . Из (1.28), заметив, что

$$\rho^2 = u^2 + v^2 = \omega^2 x^2 + (y + hx)^2 = y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2,$$

$$\varphi = \arctg \frac{v}{u} = \arctg \frac{y + hx}{\omega x},$$

удлинениям по двум так называемым главным осям. Нетрудно убедиться, что каждая прямая на плоскости x, y , проходящая через начало координат, преобразуется преобразованием (1.27) также в прямую, проходящую через начало координат, причем расстояния соответствующих точек на этих прямых до начала координат (соответственно плоскости x, y и плоскости u, v) пропорциональны друг другу.

получаем координатное уравнение (с исключенным временем) фазовых траекторий:

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = C^2 e^{2\frac{h}{\omega} \arctg \frac{y+hx}{\omega x}}. \quad (1.29)$$

Так как деформация фазовых траекторий при обратном преобразовании (от u, v к x, y) не может изменить их качественного характера, то мы можем утверждать, что семейство фазовых траекторий (1.29) на плоскости x, y также является семейством спиралей с асимптотической точкой в начале координат.

Относительно характера этих спиралей можно заметить следующее. При малых $\frac{h}{\omega}$, т. е. малых логарифмических декрементах затухания, логарифмическая спираль (1.28) в течение каждого оборота

близка к соответствующему кругу $u^2 + v^2 = \text{const}$. Этот круг при линейном преобразовании (1.27) превращается в эллипс $y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = \text{const}$. Отсюда мы можем заключить, что при малых

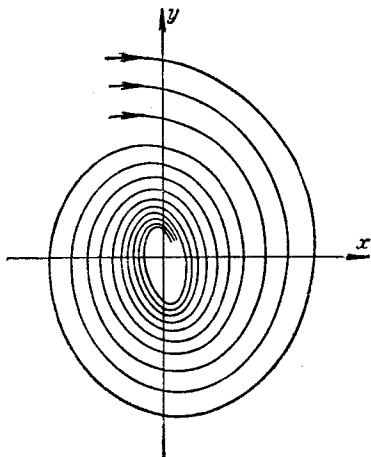


Рис. 21.

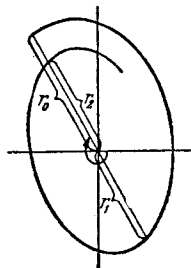


Рис. 22.

$\frac{h}{\omega}$ исследуемая нами спираль (1.29) близка на протяжении каждого оборота к эллипсу (с соответствующим образом выбранным значением константы)

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = \text{const}. \quad (1.30)$$

На рис. 21 изображено семейство исследуемых нами спиралей — фазовых траекторий на плоскости x, y . Изображающая точка, двигаясь по любой спирали, будет асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаться к началу координат, являющемуся состоянием равновесия. Радиус-вектор изображающей точки будет уменьшаться (по длине) за каждый оборот.

Подсчитаем величину этого уменьшения при полуобороте, обороте и т. д. Для этой цели проведем на плоскости x, y произволь-

ную прямую, проходящую через начало координат, и обозначим через r_0, r_1, r_2, \dots расстояния до начала координат точек пересечения некоторой спирали (1.29) с проведенной прямой (рис. 22). При преобразовании (1.27) проведенная прямая вместе с точками пересечения преобразуется также в прямую, проходящую через начало координат, причем, как мы указывали выше,

$$r_0 : r_1 : r_2 : \dots = \rho_0 : \rho_1 : \rho_2 : \dots,$$

где через $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots$ обозначены расстояния на плоскости u, v преобразованных точек пересечения до начала координат.

Отсюда следует, что каждому полуобороту радиуса-вектора r изображающей точки,двигающейся на плоскости x, y по спирали (1.29), соответствует также полуоборот радиуса-вектора ρ на плоскости u, v (с уменьшением угла φ на π за интервал времени, равный $\frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$). Согласно (1.28), очевидно имеем:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_0 e^{-\frac{h\pi}{\omega}}, \\ \rho_2 &= \rho_0 e^{-2\frac{h\pi}{\omega}}, \dots \end{aligned}$$

Так как расстояния r_0, r_1, r_2, \dots и $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots$ пропорциональны друг другу, то, очевидно, длина радиуса-вектора изображающей точки на плоскости x, y после полуоборота равна

$$r_1 = r_0 e^{-\frac{\pi h}{\omega}} = r_0 e^{-\frac{d}{2}}, \quad (1.31)$$

после полного оборота

$$r_2 = r_0 e^{-\frac{2\pi h}{\omega}} = r_0 e^{-d}$$

и после n оборотов

$$r_{2n} = r_0 e^{-nd}. \quad (1.32)$$

Мы видим, что уменьшение радиуса-вектора происходит по ранее найденному показательному закону с логарифмическим декрементом затухания $d = hT$.

Мы выяснили, таким образом, характер фазовых траекторий. Можно показать, что через каждую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна спираль, соответствующая определенному значению константы C или, иначе говоря, соответствующая определенным начальным условиям. Вся плоскость заполнена спиралями, вложенными друг в друга, по которым изображающая точка асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближается к началу координат. Исключение составляет лишь состояние равновесия — точка $x=0, y=0$, которую следует рассматривать как отдельную фазовую

траекторию. При движении изображающей точки по спирали фазовая скорость никогда не обращается в нуль, постепенно убывая с каждым оборотом, так что время каждого оборота остается неизменным и равным $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Фазовая скорость всегда равна нулю для «движения», отображаемого траекторией $x = 0, y = 0$.

3. Непосредственное исследование дифференциального уравнения. Мы исследовали характер движений на фазовой плоскости для случая линейного осциллятора при наличии трения, пропорционального скорости, и выяснили, что процессам при малом затухании ($h^2 < \omega_0^2$) соответствует движение изображающей точки по спиралеобразной фазовой траектории, имеющей асимптотическую точку в начале координат. Само начало координат в этом случае является состоянием равновесия. Однако мы получили эту картину на фазовой плоскости, исходя из заранее найденного решения (1.20). Мы могли бы получить эту же картину непосредственно из (1.16), не зная решения (1.20).

Заменяем, как мы уже это делали, исходное уравнение второго порядка (1.16) двумя эквивалентными уравнениями первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y; \\ \frac{dy}{dt} &= -2hy - \omega_0^2 x. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Деля одно уравнение на другое, получим дифференциальное уравнение интегральных кривых в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y}. \quad (1.34)$$

Нетрудно видеть, что это уравнение, подобно уравнению (1.11), определяет на фазовой плоскости некоторое поле касательных, а вместе с уравнением (1.33) — некоторое векторное поле с единственной особой точкой $x = 0, y = 0$.

Легко исследовать приближенно с помощью изоклин характер этого поля. Уравнение изоклины, для точек которой интегральные кривые имеют наклон σ , напишется так:

$$\frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y} = \sigma \quad \text{или} \quad y = \sigma x,$$

где

$$\sigma = -\frac{\omega_0^2}{x + 2h}, \quad (1.35)$$

т. е. изоклины и в этом случае представляют собой прямые, проходящие через начало координат. Задав, например, достаточно большой ряд значений x (при фиксированных h и ω_0 , которые опреде-

ляются системой), получим семейство изоклин и с помощью их с нужной степенью точности сможем построить векторное поле¹⁾.

На рис. 23 изображено такое векторное поле, построенное при помощи нескольких изоклин, и уже из этого чертежа можно предугадать характер интегральных кривых.

Полученное после исключения времени уравнение (1.34) допускает интегрирование, так как оно принадлежит к классу однородных уравнений.

Интегрируя по обычным правилам (подстановка $z = \frac{y}{x}$), получим для нашего случая ($h^2 < \omega_0^2$) уравнение интегральных кривых:

$$\begin{aligned} y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 &= \\ &= Ce^{2 \frac{h}{\omega} \arctg \frac{y}{\omega x}}, \end{aligned}$$

исследованием которого мы уже занимались²⁾. Теперь мы это уравнение получили иным путем, не зная решения уравнения (1.16). Выражение фазовой скорости v находится из уравнений (1.13) и (1.33):

$$v = i \cdot y + j(-2hy - \omega_0^2 x)$$

и

$$|v|^2 = \omega_0^4 x^2 + 4h\omega_0^2 xy + (1 + 4h^2)y^2. \quad (1.36)$$

Мы видим при этом способе рассмотрения сразу, почти без всяких вычислений, что фазовая скорость нигде не обращается в нуль, за исключением начала координат $x=0$, $y=0$, но уменьшается по мере приближения представляющей точки к началу координат.

Что можно сказать о характере движений в нашей системе, зная характер интегральных кривых на фазовой плоскости и зная выражение для фазовой скорости?

¹⁾ Заметим, что метод изоклин является не только методом приближенного численного интегрирования, но и методом, с помощью которого можно строго доказывать различные утверждения, относящиеся к интегральным кривым.

²⁾ Положительная постоянная интегрирования C^2 в выражении (1.29) здесь обозначена через C .

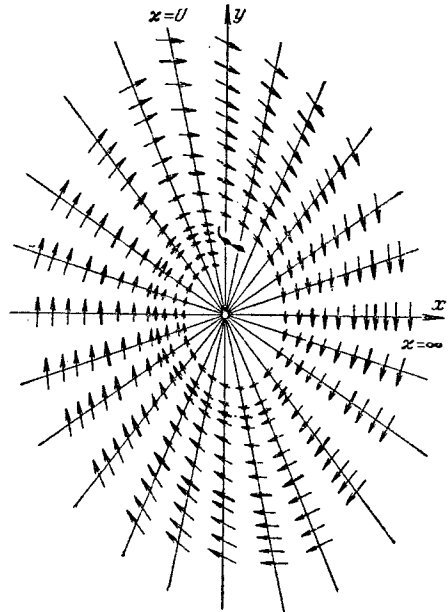


Рис. 23.

Во-первых, можно утверждать, что все фазовые траектории соответствуют осциллирующим, но затухающим, стремящимся к положению равновесия движениям (за исключением «движения» по траектории $x=0, y=0$). Действительно, все эти траектории — спирали; так как при движении представляющей точки по спирали координата и скорость системы многократно проходят через нуль, то спирали на фазовой плоскости отображают осцилляторный процесс. Далее радиус-вектор представляющей точки, двигающейся по спирали, уменьшается после каждого оборота; это значит, что мы имеем дело с затухающим процессом, максимальные значения x и \dot{x} уменьшаются от оборота к обороту. Во-вторых, очевидно, что особая точка $x=0, y=0$ соответствует состоянию равновесия.

Результаты, полученные из анализа характера движений на фазовой плоскости, можно сформулировать так: *наша система при любых начальных условиях совершает затухающие осцилляторные движения вокруг положения равновесия $x=0, y=0$, за исключением того единственного случая, когда начальные условия как раз соответствуют состоянию равновесия.*

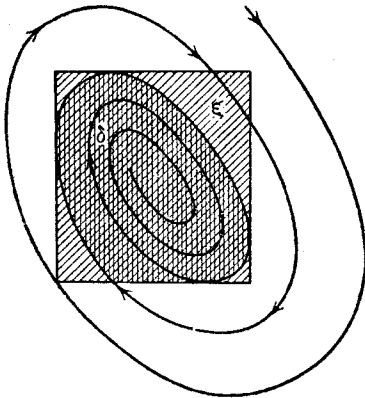


Рис. 24.

В рассматриваемом случае мы имеем только одну особую точку системы интегральных кривых, являющуюся асимптотической точкой для всех интегральных кривых. Такая особая точка, которая является асимптотической точкой всех интегральных кривых, имеющих вид спиралей, вложенных друг в друга, называется *фокусом*.

Выясним теперь вопрос, является ли в рассматриваемом случае особая точка типа фокуса устойчивой. Принимая во внимание, что представляющая точка по всякой интегральной кривой будет двигаться, приближаясь к особой точке, легко убедиться в том, что условие устойчивости состояния равновесия, сформулированное нами выше, в этом случае соблюдается. Действительно, мы всегда можем выбрать такую область δ (рис. 24, двойная штриховка), чтобы представляющая точка не вышла за пределы области ϵ (простая штриховка). Следовательно, в рассматриваемом нами случае состояние равновесия устойчиво и особая точка — устойчивый фокус. Устойчивость особой точки типа фокуса, очевидно, связана с тем, раскручиваются или скручиваются интегральные кривые, считая по направлению движения представляющей точки. Так как направление движения представляющей точки однозначно определено выбором координат (точка должна двигаться по часовой стрелке), то вместе

с тем (так как направление отсчета времени не может быть изменено) однозначно устанавливается и устойчивость особой точки в рассматриваемом случае. Наоборот, если бы спирали раскручивались (считая в том же направлении), то особая точка была бы неустойчива. Как легко убедиться, например, из уравнения (1.28), скручивание интегральных кривых обусловлено тем, что $h > 0$, так как только в этом случае радиус-вектор при движении по часовой стрелке убывает.

Таким образом, особая точка типа фокуса, вообще говоря, может быть как устойчивой, так и неустойчивой (в отличие от особой точки типа центра, которая, как мы видели, всегда устойчива). В рассматриваемом случае фокус устойчив, потому что $h > 0$. Физический смысл этого условия устойчивости ясен: трение должно быть положительно, т. е. должно препятствовать движению и потреблять энергию. Такое положительное, препятствующее движению трение, на преодоление которого затрачивается работа, не может вызвать неустойчивости, и если положение равновесия в системе было устойчиво при отсутствии трения (в гармоническом осцилляторе), то оно останется устойчивым и при наличии положительного трения. При дальнейшем рассмотрении мы встретимся с неустойчивыми особыми точками типа фокуса.

Рассмотренный нами устойчивый фокус обладает «более сильной» устойчивостью, чем рассмотренный в предыдущем параграфе центр. Действительно, в случае устойчивого фокуса будет выполнено не только условие устойчивости по Ляпунову, но и более жесткое требование. Именно, при любых начальных отклонениях система по прошествии достаточно длинного промежутка времени вернется как угодно близко к положению равновесия. Такую устойчивость, при которой начальные отклонения не только не нарастают, но, наоборот, затухают, мы будем называть *абсолютной устойчивостью*. В рассмотренном нами случае линейного осциллятора фокус абсолютно устойчив.

4. Затухающий аperiodический процесс. Рассмотрим теперь случай, когда корни характеристического уравнения действительны, т. е. когда $h^2 > \omega_0^2$. В этом случае, обозначая

$$q = +\sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \quad (1.37)$$

получим корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = -h + q = -q_1, \quad \lambda_2 = -h - q = -q_2 \quad (1.38)$$

($q_2 > q_1 > 0$). Поэтому общее решение уравнения (1.16) может быть записано в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t} \\ \dot{x} &= -q_1 A e^{-q_1 t} - q_2 B e^{-q_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

Здесь A и B определяются начальными условиями. Именно, если для $t=0$ $x=x_0$ и $\dot{x}=\dot{x}_0$, то

$$x = \frac{\dot{x}_0 + q_2 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} + \frac{\dot{x}_0 + q_1 x_0}{q_1 - q_2} e^{-q_2 t} \quad (1.40)$$

Нашей задачей является исследовать характер возможных движений в зависимости от начальных условий.

Во-первых, очевидно, что при всяких начальных условиях движение затухает, так как $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$ и, значит, при $t \rightarrow +\infty$ $x(t) \rightarrow 0$. Чтобы выяснить подробнее характер затухания, найдем t_1 и t_2 — моменты времени (т. е. промежутки времени после начального момента), для которых соответственно обращаются в нуль x и \dot{x} . Воспользовавшись (1.40), находим следующие уравнения для определения t_1 и t_2 :

$$e^{(q_2 - q_1)t_1} = \frac{\dot{x}_0 + q_1 x_0}{\dot{x}_0 + q_2 x_0} = 1 - \frac{x_0 (q_2 - q_1)}{\dot{x}_0 + q_2 x_0}, \quad (1.41)$$

$$e^{(q_2 - q_1)t_2} = \frac{q_2 (\dot{x}_0 + q_1 x_0)}{q_1 (\dot{x}_0 + q_2 x_0)} = 1 + \frac{\dot{x}_0 (q_2 - q_1)}{q_1 (\dot{x}_0 + q_2 x_0)}. \quad (1.42)$$

Из этих уравнений сразу видно, что каждое из них имеет не более одного корня; таким образом, осцилляторное затухание невозможно, мы имеем дело с так называемым аperiодическим процессом.

Выясним, когда уравнение, определяющее t_2 , не имеет ни одного положительного корня. В этом случае движение *монотонно* затухает, асимптотически стремясь к нулю. Как видно из выражения для t_2 (1.42), это будет, если

$$\frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0 + q_2 x_0} < 0. \quad (1.43)$$

На рис. 25 указана область начальных значений, которые удовлетво-

¹⁾ Часто представляется удобным записывать решение уравнения (1.16) при $h^2 > \omega_0^2$ через гиперболические функции: общее решение в виде

$$x = e^{-ht} (A \operatorname{ch} qt + B \operatorname{sh} qt)$$

и решение, удовлетворяющее начальным условиям $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$, в виде:

$$x = e^{-ht} \left\{ x_0 \operatorname{ch} qt + \frac{\dot{x}_0 + h x_0}{q} \operatorname{sh} qt \right\},$$

$$\dot{x} = e^{-ht} \left\{ \dot{x}_0 \operatorname{ch} qt - \frac{\omega_0^2 x_0 + h \dot{x}_0}{q} \operatorname{sh} qt \right\}.$$

Последние выражения получают из (1.21) заменой тригонометрических функций на соответствующие гиперболические и ω на q .

ряют этому неравенству (область II). Для остальных начальных значений $\frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0 + q_2 x_0} > 0$ — уравнение, определяющее t_2 , имеет положительный корень; это значит, что смещение не убывает монотонно, а сначала возрастает по абсолютной величине и, лишь достигнув некоторого экстремума, начинает убывать, асимптотически стремясь к нулю.

Здесь следует различать два случая, смотря по тому, имеет ли при рассматриваемых начальных условиях уравнение, определяющее t_1 , положительный корень или такого корня нет. Если такого корня нет, то смещение в течение всего времени движения ($0 < t < \infty$) сохраняет свой знак; система отдаляется от положения равновесия, достигает некоторого максимального отклонения и затем монотонно приближается к положению равновесия (но не проходит через положение равновесия). По (1.41) этот случай имеет место, если

$$\frac{x_0}{\dot{x}_0 + q_2 x_0} > 0. \quad (1.44)$$

На рис. 25 цифрой I отмечены области начальных значений, приводящих к движениям такого типа.

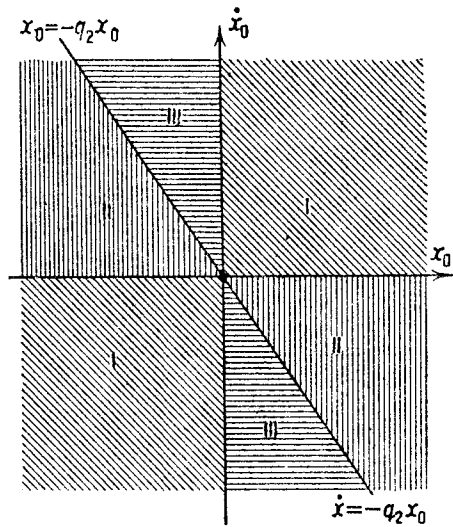


Рис. 25.

Если уравнение, определяющее t_1 , имеет положительный корень, то система сначала приближается к положению равновесия, в момент $t = t_1$ проходит через положение равновесия, далее в момент $t = t_2$ достигает некоторого максимального отклонения в направлении, противоположном начальному отклонению, и, наконец, монотонно приближается к положению равновесия, не достигая, однако, его в конечное время¹⁾.

На рис. 25 область III соответствует начальным значениям, приводящим к такого рода движениям.

Связь между характером движения и начальными условиями можно представить графически еще и в другом виде, именно изобразить зависимость смещения от времени для всех трех случаев I, II, III;

¹⁾ Нетрудно видеть из уравнений (1.41) и (1.42), что $e^{(q_2 - q_1)(t_2 - t_1)} = \frac{q_2}{q_1}$ и, следовательно, непременно $t_2 > t_1$.

это и выполнено на рис. 26, причем предполагается, что во всех случаях начальное смещение $x_0 > 0$.

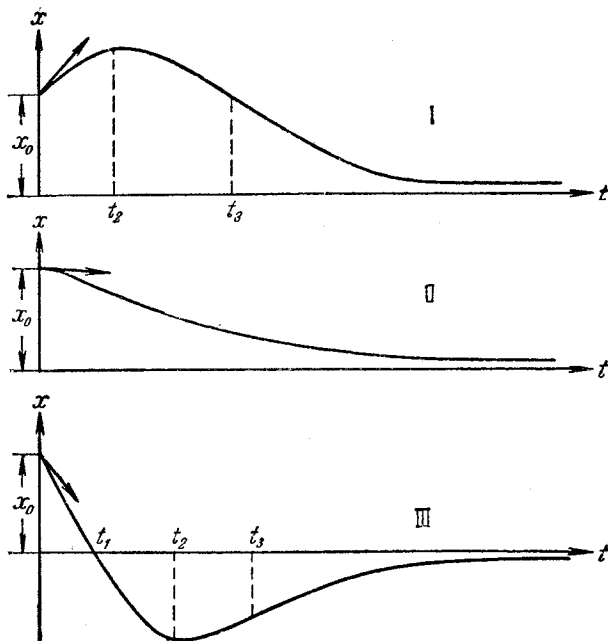


Рис. 26.

5. Изображение аperiodического процесса на фазовой плоскости. Перейдем теперь к исследованию фазовых траекторий на фазовой плоскости x, y ($y = \dot{x}$). Уравнения (1.39) являются параметрическими уравнениями фазовых траекторий в рассматриваемом случае. Исключая из них время t ¹⁾, нетрудно получить координатное уравнение интегральных кривых:

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C (y + q_2 x)^{q_2}. \quad (1.45)$$

Чтобы исследовать это семейство кривых, опять воспользуемся линейным преобразованием координат:

$$y + q_1 x = v; \quad y + q_2 x = u.$$

¹⁾ Это можно сделать, например, следующим образом. Разрешая уравнения (1.39) относительно $Ae^{-q_1 t}$ и $Be^{-q_2 t}$, получим:

$$y + q_1 x = (q_1 - q_2) B e^{-q_2 t}, \quad y + q_2 x = (q_2 - q_1) A e^{-q_1 t}.$$

После возведения первого выражения в степень q_1 и второго — в степень q_2 и деления одного из полученных соотношений на другое получим (1.45).

После этого преобразования уравнение (1.45) примет в новых переменных простой вид:

$$v = Cu^a, \text{ где } a = \frac{q_2}{q_1} > 1. \quad (1.46)$$

Толкуя u и v как прямоугольные координаты, мы можем сказать, что после преобразования получили семейство «парабол», причем, поскольку $a > 1$: 1) все интегральные кривые, за исключением кривой, соответствующей $C = \infty$, касаются в начале координат оси u , так как $\frac{dv}{du} = Cau^{a-1}$, следовательно, $\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=0} = 0$; 2) интегральные кривые при $C=0$ и $C=\infty$ вырождаются в прямые: при $C_1=0$ имеем $v=0$, т. е. ось u ; при $C_1=\infty$ имеем $u=0$, т. е. ось v ; 3) интегральные кривые обращены выпуклостью к оси u ¹⁾, ординаты их монотонно возрастают по абсолютной величине при увеличении u . Семейство таких парабол изображено на рис. 27.

Перейдем теперь обратно на плоскость x, y . Оси v на плоскости u, v соответствует прямая $y + q_2 x = 0$ на плоскости x, y ; оси u — прямая $y + q_1 x = 0$. Остальные интегральные кривые или, точнее, остальные кривые семейства (1.45) на плоскости x, y представляют собой деформированные параболы, касающиеся прямой $y = -q_1 x$ («бывшей» оси u). Для того чтобы изобразить это семейство кривых, нужно учесть еще следующие обстоятельства: 1) кривые семейства имеют горизонтальные касательные в точках

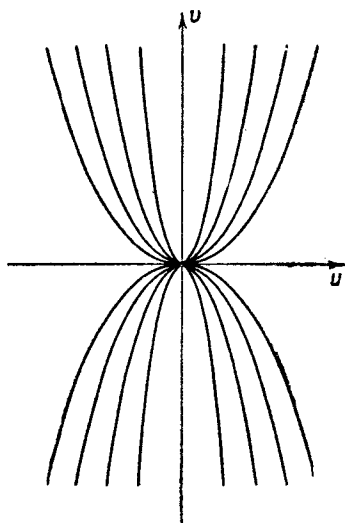


Рис. 27.

пересечения с прямой $y = -\frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} x$ ($\frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} < q_1$); 2) кривые семейства имеют вертикальные касательные в точках пересечения с осью x ; 3) наклон кривых, пересекающих ось x , монотонно увеличивается на участке от состояния равновесия до оси x и меняется от $-q_1$ до $+\infty$; 4) кривые семейства имеют параболические бесконечные ветви с осями, параллельными прямой $y = -q_2 x$ (при уходе в бесконечность наклон кривых $\frac{dy}{dx} \rightarrow -q_2$). Это семейство кривых изображено на рис. 28.

¹⁾ Так как $\frac{v''}{v} = \frac{a(a-1)}{u^2}$.

Подобно предыдущему случаю мы можем и в этом случае прийти к полученным результатам, не интегрируя дифференциального уравнения (1.16), а заменяя это уравнение второго порядка двумя эквивалентными уравнениями первого порядка и исключая из них время. Мы получим то же уравнение интегральных кривых, как и в предыдущем случае:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y}. \quad (1.34)$$

Единственная особая точка этого семейства кривых есть точка $x=0$, $y=0$, соответствующая состоянию равновесия системы. Изо-

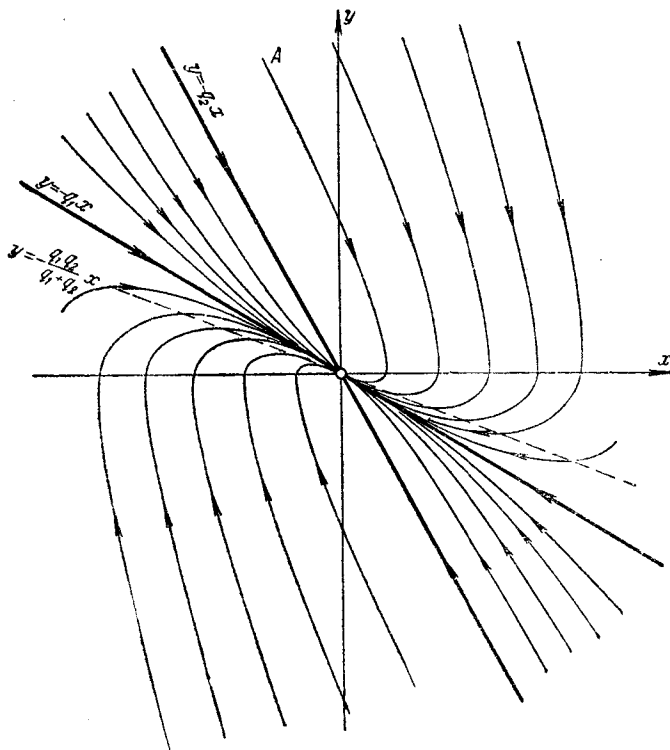


Рис. 28.

клины и в этом случае будут прямыми, определенными уравнениями (1.35). Но так как в рассматриваемом случае $h^2 > \omega_0^2$, то расположение изоклин будет несколько иным (рис. 29). В рассматриваемом случае имеются две прямолинейные интегральные кривые, проходящие через начало координат. Для их отыскания подставим уравне-

ние прямой $y = \beta x$ в уравнение интегральных кривых (1.34). Тогда для углового коэффициента β прямоугольной интегральной кривой получим уравнение $\beta^2 + 2h\beta + \omega_0^2 = 0$, совпадающее с характеристическим (1.18). В нашем случае оно имеет действительные корни: $\beta_1 = -q_1$, $\beta_2 = -q_2$, т. е. интегральными кривыми будут прямые $y = -q_1x$, $y = -q_2x$. Это сразу исключает существование спиральных фазовых траекторий, охватывающих начало координат, и, следовательно, существование осцилляторно затухающих движений в системе.

Точно так же при интегрировании уравнения (1.34) подстановкой $z = \frac{y}{x}$ мы получим (вследствие того, что $h^2 > \omega_0^2$)

результат, отличный от предыдущего случая, именно уравнение семейства интегральных кривых «параболического типа»:

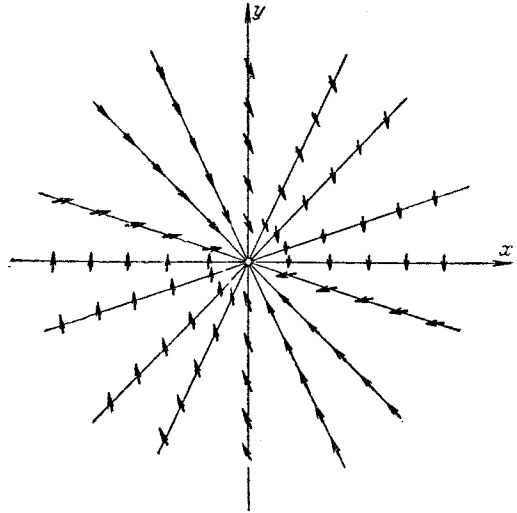


Рис. 29.

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^3 = C \left[\frac{\frac{y}{x} + h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}}{\frac{y}{x} + h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}} \right]^{\frac{h}{\sqrt{h^2 - \omega_0^2}}}$$

или

$$(y + q_1x)^{q_1} = C_1 (y + q_2x)^{q_2}, \quad (1.45)$$

где $q_1 = h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$ и $q_2 = h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$, т. е. то же уравнение, которое было нами выше получено иным путем (исключением t из решений исходного дифференциального уравнения).

Направление движения представляющей точки определяется с помощью тех же соображений, что и в предыдущих случаях, именно из условия, что при $y = \dot{x} > 0$ значение x должно возрастать. Так как тангенс угла касательной к интегральной кривой с осью x изменяет знак только один раз при пересечении с осью x , то сразу видно, что представляющая точка будет двигаться по интегральным кривым в направлениях, указанных на рис. 28 стрелками, т. е.

всегда будет приближаться к началу координат. Скорость движения представляющей точки, как и в предыдущих случаях, обращается в нуль только там, где одновременно $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$, т. е. в особой точке рассматриваемого дифференциального уравнения.

Как мы уже говорили, мы будем делать различие между *интегральными кривыми* и *фазовыми траекториями*, так как одной интегральной кривой может соответствовать несколько существенно различных движений или, иначе говоря, несколько различных фазовых траекторий. Например, в рассматриваемом случае, задавая определенное значение константы C , мы еще не фиксируем единственную траекторию, так как в нашем случае каждая интегральная кривая проходит через особую точку и, следовательно, состоит из трех фазовых траекторий (две из них соответствуют движениям, асимптотическим к состоянию равновесия, третьей является само состояние равновесия). В нашем случае все интегральные кривые проходят через особую точку. Такая особая точка, через которую проходят интегральные кривые, подобно тому, как семейство парабол $y = Cx^2$ ($\alpha > 0$) проходит через начало координат, носит название *узла*. Нетрудно видеть, что состояние равновесия, соответствующее в нашем случае особой точке — узлу, является устойчивым по Ляпунову, так как изображающая точка по всем интегральным кривым движется по направлению к началу координат. Устойчивое состояние равновесия, которое соответствует особой точке типа узла, мы в дальнейшем будем называть *устойчивым узлом*. Как мы убедимся в дальнейшем, узел может быть и неустойчивым, для чего достаточно, чтобы h было отрицательно. Как и в случае фокуса, физический смысл этого обстоятельства заключается в том, что если состояние равновесия в системе без трения с одной степенью свободы устойчиво, то прибавление положительного трения, т. е. трения, на преодоление которого должна затрачиваться работа, не может нарушить устойчивости (даже более того — положительное трение сообщает положению равновесия абсолютную устойчивость).

Рассмотрим несколько подробнее физические черты трех типов аperiодических движений, изображенных на рис. 26. Прежде всего, если начальная скорость и начальное отклонение одного знака (т. е. если представляющая точка лежит в области I на рис. 25), то система сначала будет удаляться от положения равновесия, причем скорость ее будет постепенно убывать (начальная кинетическая энергия расходуется на увеличение потенциальной энергии и на преодоление трения). Когда скорость падает до нуля (точка t_2), система начнет двигаться назад к положению равновесия, причем сначала скорость будет возрастать, так как восстанавливающая сила больше силы трения. Но при движении сила трения возрастает (так как скорость возрастает), а восстанавливающая сила убывает (так как система приближается к положению равновесия), и, следовательно, начиная с какого-то момента (точка t_3 на рис. 26, I), скорость,

достигшая к этому моменту максимума, начнет снова убывать. Система будет асимптотически приближаться к положению равновесия.

Другой случай, когда начальная скорость и начальное отклонение разных знаков, т. е. начальный толчок направлен в сторону, противоположную начальному отклонению, приводит к двум различным типам движений (*II* и *III*). Если начальный толчок мал по сравнению с начальным отклонением, то система вследствие наличия большого трения не может перейти через положение равновесия и будет асимптотически приближаться к положению равновесия (кривая *II*). Если же начальная скорость достаточно велика, то система в некоторый момент t_1 пройдет через положение равновесия (кривая *III*) и после этого еще будет обладать некоторой скоростью, направленной от положения равновесия, т. е. в ту же сторону, в которую отклонена система. При этом получается уже рассмотренное движение типа *I*; система достигает некоторого наибольшего отклонения и затем асимптотически приближается к положению равновесия. Таким образом, движение типа *III* только в первой своей части (до точки t_1) отличается от движения типа *I*. После же точки t_1 движение *III* аналогично движению типа *I*. С другой стороны, движение типа *I* после точки t_2 аналогично движению типа *II*. И действительно, движение представляющей точки по некоторым фазовым кривым, проходящим через все три области *I*, *II* и *III* (например, по кривой, отмеченной буквой *A* на рис. 28), будет принадлежать либо к *III*, либо к *I*, либо к типу *II* в зависимости от того, в какой области будет лежать представляющая точка в начальный момент.

Предельный случай (когда $h^2 = \omega_0^2$) мы не будем рассматривать подробно, а ограничимся лишь краткими указаниями, ибо этот случай (как, впрочем, и всякий случай, когда соотношение между параметрами системы точно фиксировано) не может быть точно реализован в физической системе и имеет значение только как граница между двумя различными типами затухающих процессов — осцилляторным и аperiodическим. В случае $h^2 = \omega_0^2$, как известно, решение исходного дифференциального уравнения (1.16) нужно искать в виде:

$$x = (A + Bt) e^{-\alpha t}.$$

Можно и в этом случае не искать решение дифференциального уравнения второго порядка, а перейти к уравнению первого порядка, определяющему фазовые кривые (1.34). Мы и в этом случае получим семейство интегральных кривых параболического типа и устойчивую особую точку типа узла, так что с точки зрения поведения интегральных кривых и типа особой точки этот граничный случай следует отнести к случаю $h^2 > \omega_0^2$, а не к случаю $h^2 < \omega_0^2$. Случай $h^2 = \omega_0^2$, не имея физического значения, все же представляет известный расчетный интерес, так как часто бывает выгодно так подобрать

затухание системы, чтобы h^2 было возможно ближе к ω_0^2 . Этим, с одной стороны, устраняются колебания в системе, которые неизбежны при h^2 , много меньшем, чем ω_0^2 , а с другой стороны, скорость аperiodического возвращения системы к нулю получается наибольшая (больше, чем при больших величинах h). Такие именно условия являются наивыгоднейшими для ряда измерительных приборов, например, для гальванометров. Но при сколь угодно малом изменении параметров системы этот предельный случай превратится в один из двух других, рассмотренных ранее. Поэтому он не представляет физического интереса и не отражает характерных черт реальной физической системы. Предельный случай имеет значение только как граница, формально разделяющая системы на колебательные и аperiodические. Необходимо, однако, иметь в виду, что разделение систем на колебательные и аperiodические, которое в случае линейной системы хотя и может быть математически проведено вполне строго, в сущности говоря, не имеет большого физического содержания, ибо при больших значениях h система теряет свои наиболее характерные «колебательные черты» еще до того, как h^2 достигает величины ω_0^2 . Действительно, если h^2 лишь немного меньше ω_0^2 , то затухание системы весьма велико, и уже второй максимум, следующий за начальным отклонением, может быть практически совершенно не заметен. Точно так же становится незаметным и явление резонанса — одно из наиболее характерных явлений в неавтономных колебательных системах.

Таким образом, хотя формально случай $h^2 = \omega_0^2$ и является граничным, но фактически граница между колебательным и аperiodическим процессами размыта и не может быть проведена резко. Заметим, кстати, что для некоторых нелинейных систем (например, систем с «постоянным», «кулоновским» трением, или с «квадратичным» трением), как мы увидим, разделение на колебательные и периодические теряет смысл.

§ 5. Осциллятор с малой массой¹⁾

1. Линейные системы с $1/2$ степени свободы. Рассматривая линейный осциллятор при наличии трения, мы предполагали, что все три параметра осциллятора — масса (индуктивность), коэффициент трения (сопротивление) и коэффициент упругости (величина, обратная емкости) — играют одинаково существенную роль и заметно влияют на свойства и поведение системы. В тех случаях, когда трение мало, можно, как мы уже указывали, вовсе не учитывая влияния трения на движения в системе, ответить на некоторые вопросы, для которых трение играет второстепенную роль. Если же трение ве-

¹⁾ Пункты 1 и 2 переработаны Н. А. Железцовым, пункты 3 и 4 написаны им заново.

лико¹⁾, то может встретиться другой случай, когда вследствие своей малости играет второстепенную роль один из двух других «колебательных» параметров системы — масса или коэффициент упругости (индуктивность или величина, обратная емкости).

Мы рассмотрим движение тела *малой массы* в сильно сопротивляющейся среде под действием пружины (этот случай представляет наибольший интерес для рассмотрения в дальнейшем так называемых «разрывных» колебаний). Дополнительно к тем предположениям, которые мы делали при постановке задачи о линейном осцилляторе с трением, мы пренебрежем массой движущегося тела. Тогда уравнение движения запишется в виде дифференциального уравнения первого порядка:

$$b\dot{x} + kx = 0 \quad (1.47)$$

(здесь, как и раньше, x — смещение относительно положения равновесия, k и b — положительные коэффициенты упругости и трения). Таким образом, в рассматриваемом случае мы пришли к системе с $1/2$ степени свободы. Для однозначного определения состояния такой системы достаточно задания одной величины (например, координаты x) вместо двух величин, необходимых для определения состояния систем с одной степенью свободы. Соответственно, для системы с $1/2$ степени свободы фазовое пространство является одномерным и представляет собой не плоскость, а *линию*.

Решение уравнения (1.47), как известно, имеет вид:

$$x = Ae^{-\frac{k}{b}t}$$

или, если ввести начальное условие $x = x_0$ при $t = 0$ ²⁾,

$$x = x_0 e^{-\frac{k}{b}t}. \quad (1.48)$$

Очевидно, $x = 0$ является состоянием равновесия; при всех других начальных условиях ($x_0 \neq 0$) осциллятор без массы совершает аperiодически затухающие движения, приближаясь (при $t \rightarrow +\infty$) к состоянию равновесия.

Ту же картину мы получим и при рассмотрении движения изображающей точки по фазовой линии — прямой x (рис. 30). Начало

¹⁾ Мы говорим «мало» и «велико», не указывая, по сравнению с чем. Как было отмечено во Введении, в таком виде эти утверждения не имеют большого содержания. Но из дальнейшего рассмотрения станет ясно, по сравнению с чем должно быть велико трение или сопротивление.

²⁾ Мы не можем теперь (при принятой идеализации) задавать начальное значение скорости \dot{x}_0 произвольно, независимо от задания x_0 , так как значения скорости \dot{x} и координаты x однозначно связаны между собой уравнением (1.47), которое мы считаем справедливым в любой момент времени (для момента $t = 0$ получаем: $\dot{x}_0 = -\frac{k}{b}x_0$).

координат является состоянием равновесия; изображающая точка из других состояний движется по направлению к состоянию равновесия (так как справа от него $\dot{x} < 0$ и слева $\dot{x} > 0$).

Системами с $1/2$ степени свободы являются и электрические контуры, состоящие из сопротивления и емкости (RC -контур, рис. 31) или из сопротивления и индуктивности (RL -контур, рис. 32). Это, конечно, также идеализированные системы, к которым мы прихо-

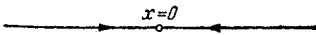


Рис. 30.

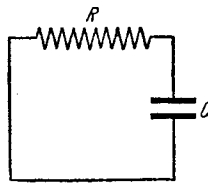


Рис. 31.

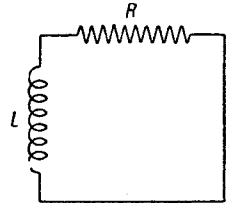


Рис. 32.

дим, отправляясь от соответствующих реальных электрических контуров, но учитывая из всего многообразия свойств и качеств этих контуров только некоторые основные, существенные для рассматриваемого круга вопросов, и пренебрегая, в частности, малыми (паразитными) индуктивностями или емкостями тех или иных элементов, составляющих контуры. Уравнения движения для таких контуров могут быть записаны в виде

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \quad (1.49)$$

для RC -контура (q — заряд конденсатора) и

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (1.50)$$

для RL -контура (i — сила тока в контуре). Их решениями, очевидно, являются:

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Встает вопрос, насколько «законно» или целесообразно принятое нами представление рассматриваемых физических систем в виде систем с $1/2$ степени свободы, т. е. насколько точно дифференциальные уравнения первого порядка (1.47), (1.49) и (1.50) и их решения отображают движения этих реальных физических систем. Само собой разумеется, что сейчас идет речь только о тех движениях физических систем, которые начинаются из состояний, *совместимых* (с известной степенью точности) с уравнениями движения соответствующих систем с $1/2$ степени свободы ¹⁾. Ответ на этот вопрос мы

¹⁾ Как указывалось во Введении, с помощью любой данной идеализированной системы мы можем рассматривать только те движения реальной физической системы, которые начинаются из состояний, допускаемых уравнениями этой идеализированной системы.

можем получить, сравнивая результаты, полученные решением уравнений (1.47), (1.49) или (1.50), с экспериментальными данными. Такое сравнение показывает целесообразность, «законность» применения систем с $1/3$ степени свободы для отображения движений соответствующих физических систем.

Мы покажем сейчас аналитически, что, например, учет малой массы осциллятора не дает ничего существенно нового, т. е. что масса, если она достаточно мала, не является существенным параметром в рассматриваемой задаче. Учтем малую массу осциллятора и сравним решение более «полного» уравнения осциллятора с малой массой

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad (1.14)$$

где m мало, но отлично от нуля, с решением уравнения первого порядка (1.47). Задавая начальными условиями $t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, имеем, согласно (1.40), решение в виде:

$$x = x_0 \left[\frac{q_2}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} - \frac{q_1}{q_2 - q_1} e^{-q_2 t} \right] + \frac{\dot{x}_0}{q_2 - q_1} [e^{-q_1 t} - e^{-q_2 t}], \quad (1.51)$$

где

$$q_1 = \frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}, \quad q_2 = \frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

Для удобства сопоставления заменим точное решение (1.51) уравнения (1.14) приближенным решением $x_1(t)$, таким, что разность между $x_1(t)$ и $x(t)$ и их производными \dot{x}_1 и \dot{x} могла быть сделана сколь угодно малой (равномерно относительно t) за счет выбора достаточно малого m .

Пользуясь разложением корня

$$\sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \frac{b}{2m} \sqrt{1 - \frac{4km}{b^2}} = \frac{b}{2m} \left(1 - \frac{2km}{b^2} + \dots \right),$$

без труда получаем:

$$x_1(t) = x_0 \left[e^{-\frac{k}{b}t} - \frac{mk}{b^2} e^{-\frac{b}{m}t} \right] + \dot{x}_0 \frac{m}{b} \left[e^{-\frac{k}{b}t} - e^{-\frac{b}{m}t} \right]. \quad (1.52)$$

Можно показать, что это приближенное решение аппроксимирует точное решение в том смысле, что, сколь бы ни было мало ϵ , всегда можно найти столь малое m , что

$$|x_1(t) - x(t)| < \epsilon, \quad |\dot{x}_1(t) - \dot{x}(t)| < \epsilon$$

для всех значений t в интервале $0 \leq t \leq +\infty^1$.

¹⁾ Заметим, что эти неравенства не могут быть заменены неравенствами вида

$$\left| \frac{x_1(t)}{x(t)} - 1 \right| < \epsilon, \quad \left| \frac{\dot{x}_1(t)}{\dot{x}(t)} - 1 \right| < \epsilon, \quad (\alpha)$$

пригодными для всех значений t , если m достаточно мало. Однако на вся-

Сравним теперь (1.48) и (1.52). Обозначая решение уравнения первого порядка через \bar{x} и принимая, что начальные значения координаты для решений полного уравнения¹⁾ и уравнения первого порядка совпадают, имеем:

$$x_1(t) - \bar{x}(t) = \frac{m}{b} \left\{ - \left(\dot{x}_0 + \frac{k}{b} x_0 \right) e^{-\frac{b}{m}t} + \dot{x}_0 e^{-\frac{k}{b}t} \right\} \quad (1.53)$$

и для скоростей

$$\dot{x}_1(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \left(\dot{x}_0 + \frac{k}{b} x_0 \right) e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mk}{b^2} \dot{x}_0 e^{-\frac{k}{b}t}. \quad (1.54)$$

Так как сейчас мы рассматриваем только те движения, которые начинаются из состояний, совместных (с некоторой степенью точности) с уравнением (1.47), т. е. для которых $\dot{x}_0 + \frac{k}{b} x_0 = 0$ или близко к нулю, то, как это сразу видно из соотношений (1.53) и (1.54), разности $x_1(t) - \bar{x}(t)$ и $\dot{x}_1(t) - \dot{\bar{x}}(t)$, а следовательно и разности $x(t) - \bar{x}(t)$ и $\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)$, могут быть сделаны сколь угодно малы за счет выбора достаточно малого m и притом равномерно относительно t (для всех $0 \leq t < +\infty$). Условием близости решений (1.48) и (1.51), очевидно, является выполнение неравенства:

$$\frac{mk}{b^2} \ll 1 \quad \text{или} \quad m \ll \frac{b^2}{k}.$$

Иными словами, если начальное состояние системы *совместно* с уравнением первого порядка (1.47) (или близко к состоянию, совместному с этим уравнением), то последнее достаточно точно (тем точнее, чем меньше масса) отображает движение осциллятора с малой массой. Учет массы в этом случае дает лишь небольшие количественные поправки, не давая ничего существенно нового; масса осциллятора, если она достаточно мала, не является существенным параметром, и представление осциллятора с малой массой ($m \ll \frac{b^2}{k}$) в виде системы с $1/2$ степени свободы, в виде системы *без массы*, является вполне целесообразным.

2. Начальные условия и идеализация. Рассмотрим теперь случай, когда начальное состояние осциллятора с малой массой (заданы x_0 и \dot{x}_0) не совместно с уравнением первого порядка (1.47), т. е. когда $\dot{x}_0 \neq -\frac{k}{b} x_0$ и, следовательно, $\dot{x}_0 + \frac{k}{b} x_0$ не мало. В этом случае мы, конечно, не можем ожидать, что уравнение первого по-

ком сколь угодно большом заданном промежутке значений t можно добиться соблюдения неравенств (а), выбрав достаточно малое m .

¹⁾ Полной системой, полным уравнением мы будем называть здесь ради сокращения осциллятор с учтенной массой и его уравнение.

рядка будет адекватно отображать *весь* процесс движения такого осциллятора, так как это уравнение заведомо не применимо в начальный момент времени. Изучение таких движений осциллятора с малой массой, несмотря на малость последней (масса может быть сколь угодно малой), мы должны вести, пользуясь уравнением второго порядка (1.14), с которым заданные начальные условия совместны.

Для исследования особенностей движений осциллятора с малой массой в рассматриваемом сейчас случае сравним решение уравнения (1.14) в его приближенной форме (1.52) с решением уравнения первого порядка. Обращаясь к (1.53), мы видим, что по-прежнему разность $x_1(t) - \bar{x}(t)$, а значит и $x(t) - \bar{x}(t)$, может быть сделана сколь угодно малой для всех $0 \leq t < +\infty$ за счет выбора достаточно малого m , несмотря на то, что теперь $\dot{x}_0 + \frac{k}{b} x_0$ не мало.

Однако нетрудно заметить, что для скоростей ситуация будет иной. Действительно, согласно (1.54) разность $\dot{x}_1(t) - \dot{\bar{x}}(t)$ при малом фиксированном m и малых t (при $t \ll \frac{m}{b}$) близка к $\dot{x}_0 + \frac{k}{b} x_0$ (это вполне понятно, так как $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ и $\dot{\bar{x}}(0) = -\frac{k}{b} x_0$). Эта величина не зависит от m , и мы не можем сделать ее малой, выбирая малое m . Но, исследуя структуру выражения (1.54) и обращая внимание на быстрое уменьшение $e^{-\frac{b}{m}t}$ при фиксированном $t > 0$ и уменьшающемся m , приходим к следующему заключению: выбором достаточно малого m всегда можно добиться для всех t , начиная с некоторого, сколь угодно малого, но определенного момента $\tau > 0$ (для всех $\tau \leq t < +\infty$), выполнения неравенства

$$|\dot{x}_1(t) - \dot{\bar{x}}(t)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)| < \varepsilon$$

(здесь, как и раньше, ε — любая наперед заданная сколь угодно малая положительная величина).

Таким образом, на начальном этапе движения (при $0 \leq t \leq \tau$) скорость осциллятора с малой массой весьма быстро меняется (тем быстрее, чем меньше масса) от начального значения \dot{x}_0 до значений, близких к получаемым из решения уравнения (1.47). Изменение координаты за этот промежуток времени τ , само собой разумеется, стремится к нулю вместе с τ (или, что то же самое, вместе с m)¹⁾.

¹⁾ Длительность этого начального этапа движения τ , в течение которого происходит быстрое изменение скорости, по порядку величины совпадает с $\frac{m}{b}$: за время $\frac{m}{b}$ первый, главный член в выражении (1.54) уменьшится в e раз ($e \approx 2,7$), а через время $5 \frac{m}{b}$ — примерно в 150 раз.

Совершенно ясно, что движение осциллятора с малой массой на этом этапе движения с быстрыми изменениями скорости и, следовательно, с большими ускорениями не может быть отображено уравнением первого порядка (1.47), ибо существенную роль играет масса, даже сколь угодно малая (член $m\ddot{x}$ не мал по сравнению с другими членами уравнения (1.14), несмотря на малость массы m). Только после того, как осциллятор придет через время τ в состояние, близкое к совместному с уравнением (1.47) (а это как раз и означает, что член $m\ddot{x}$ стал очень малым), скорость осциллятора перестанет быстро изменяться и его движение будет отображаться уравнением первого порядка (1.47) (тем точнее, чем меньше $\frac{mk}{b^2}$).

Рассмотрим для пояснения сказанного движение осциллятора с малой массой при следующих начальных условиях: при $t=0$ $x=x_0$, $\dot{x}=0$ (эти начальные условия, конечно, не совместны с уравнением (1.47)). Пока \dot{x} очень мало, член $b\dot{x}$ не играет роли, и, как следует из полного уравнения (1.14), ускорение определяется приблизительно выражением

$$\ddot{x} \approx -\frac{k}{m}x,$$

и так как m очень мало, то ускорение в системе очень велико — скорость чрезвычайно быстро возрастает. Вместе с тем возрастает и сила трения, и все большая и большая часть силы пружины расходуется на преодоление трения. Вследствие этого ускорение системы становится все меньше и меньше, и в конце концов член $m\ddot{x}$ перестает играть заметную роль. Дальнейшее движение системы уже может быть удовлетворительно описано уравнением первого порядка (1.47). К этому времени скорость приобретает такое значение, которое связано со значением координаты уравнением (1.47), так как при исчезновении члена $m\ddot{x}$ устанавливается приблизительное равенство между членами kx и $(-b\dot{x})$. Так совершается этот быстрый переход от состояния, не совместимого с уравнением (1.47), к состоянию, которое этим уравнением допускается. Мы проследили этот переход аналитически, пользуясь полным уравнением второго порядка (1.14) и его решением (1.52).

При этом мы убедились, что если m достаточно мало, то ускорения вначале очень велики и скорость изменяется очень быстро: система за очень короткий промежуток времени переходит в состояние, совместимое (конечно, с известной степенью точности) с уравнением первого порядка, причем этот промежуток времени настолько мал, что, несмотря на большие ускорения, координата системы не успевает сколько-нибудь заметно измениться.

3. Условие скачка. Как мы видели, при переходе к состоянию, совместимому с уравнением первого порядка, скорость системы изменяется очень быстро, координата же системы остается почти неизменной. Но если самый переход совершается достаточно быстро,

нас часто не интересуют его подробности. Мы можем рассматривать этот быстрый переход как мгновенный скачок и ограничиться только определением того конечного состояния, в которое «перескакивает» система и начиная с которого поведение системы определяется уравнением первого порядка (1.47). Мы можем, следовательно, рассматривать систему как не обладающую массой, но должны применить иной метод рассмотрения всего процесса: должны *дополнить* дифференциальное уравнение первого порядка *условием скачка*, которое заменило бы нам прежнее рассмотрение кратковременного начального этапа движения, определяя то состояние, в которое приходит система быстрым, «мгновенным» переходом и начиная с которого справедливо уравнение первого порядка. Это условие скачка, по существу являющееся своеобразной формой учета малых параметров (в данном случае — малой массы осциллятора), существенных на начальной стадии движения, формулируется либо на основании рассмотрения системы с учетом этих малых существенных параметров (это регулярный метод), либо на основании тех или иных *дополнительных* физических соображений или экспериментальных данных¹⁾.

Условие скачка для рассматриваемого случая можно, очевидно, сформулировать следующим образом. Если начальное состояние системы (*заданы* x_0, \dot{x}_0) не удовлетворяет уравнению первого порядка (1.47), то система скачком переходит в состояние, совместное с этим уравнением, причем *при скачке* скорость системы \dot{x} изменяется мгновенно, а *координата* x *остаётся неизменной*. После такого скачка начинается уже непрерывное движение системы, определяемое уравнением (1.47). Заметим, что здесь при формулировке условия скачка мы, в сущности, руководствовались результатами рассмотрения системы с помощью уравнения второго порядка (1.14), и наш постулат является только упрощенной формулировкой этих результатов.

Условие скачка можно получить и из рассмотрения разбиения фазовой плоскости «полной» системы на фазовые траектории в *предельном случае* $m \rightarrow 0$ (рис. 33). Обозначив, как обычно, $\dot{x} = y$, запишем уравнения движения «полной» системы в виде:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{kx + by}{m}. \quad (1.55)$$

На фазовой плоскости x, y фазовой линией системы с $1/2$ степени свободы ($m = 0$) является прямая

$$kx + by = 0. \quad (1.56)$$

¹⁾ Подобным приемом — введением постулатов, которыми заменяют более детальное рассмотрение тех или иных процессов, — пользуются часто. Например, при рассмотрении задачи об ударе в механике обычно отказываются от рассмотрения самого процесса соударения тел и заменяют это рассмотрение представлением о «мгновенном» ударе, добавляя некоторые постулаты, которые позволяют, не рассматривая процесса соударения в деталях, установить те состояния, в которых будут находиться тела непосредственно после соударения.

Очевидно, в любой точке (x, y) фазовой плоскости *вне* этой прямой (там $kx + by \neq 0$) $\dot{y} \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow 0$ (а \dot{x} остается конечной), т. е. всюду вне прямой (1.56) происходят быстрые, в пределе скачкообразные, изменения состояний системы (скачком меняется скорость y). Далее, согласно (1.55):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{kx + by}{my}.$$

Поэтому вне прямой $kx + by = 0$ при $m \rightarrow 0$ $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$ и фазовыми траекториями являются вертикальные прямые ($x = \text{const}$). По ним изображающая точка *скачком* (с фазовой скоростью, стремящейся к бесконечности при $m \rightarrow 0$; при скачке x не изменяется) идет к фазовой

линии системы с $1/2$ степени свободы — к прямой (1.56), так как над этой прямой $kx + by > 0$ и $\dot{y} \rightarrow -\infty$ при $m \rightarrow 0$ и под ней $\dot{y} \rightarrow +\infty$. Так как координаты движений приходят к прямой $kx + by = 0$, то дальнейшее движение изображающей точки происходит по этой прямой (по направлению к состоянию равновесия). Подобными приемами получения условий скачка мы часто будем пользоваться в дальнейшем при рассмотрении «разрывных» колебаний.

Поясним наглядно, при помощи чертежей, смысл введенного нами условия скачка. Так как в рассматриваемом случае скачком меняется скорость, то сопоставим диаграмму скорости по времени для случая $m \neq 0$ (уравнение второго порядка) с такой же диаграммой для $m = 0$ (уравнение первого порядка плюс условие скачка).

В начальный момент произвольно могут быть заданы x и \dot{x} . Пусть, например, при $t = 0$ $x = x_0$ ($x_0 > 0$), $\dot{x} = 0$. Зависимость

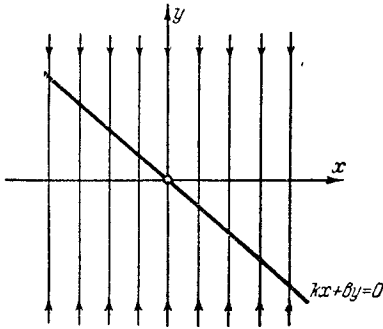


Рис. 33.

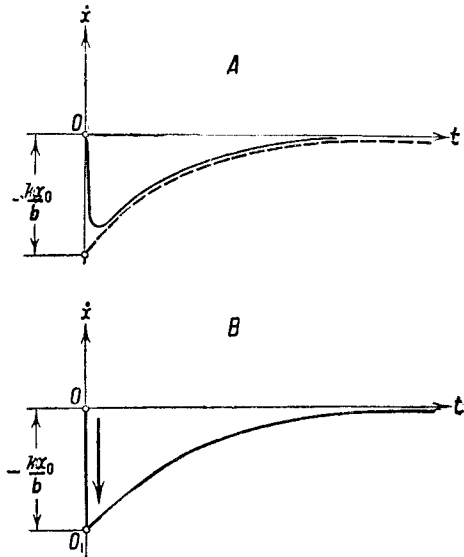


Рис. 34.

скорости от времени, как нетрудно выяснить, следуя уравнению второго порядка, имеет вид, изображенный на рис. 34, *A* (при построении принято, что $m \ll \frac{b^2}{k}$). Если же мы будем пользоваться уравнением первого порядка, то начальное значение $x = x_0$ автоматически дает начальное значение $\dot{x} = -\frac{k}{b} x_0$ и дальнейшее изменение скорости со временем согласно рис. 34, *B*. Скачок, уничтожающий конфликт между начальными условиями $x = x_0$, $\dot{x} = 0$ и дифференциальным уравнением первого порядка, изображен на рис. 34, *B* отрезком OO_1 .

Легко видеть сходство рис. 34, *A* и *B*; физический смысл этого сходства был выяснен нами в пункте 2.

4. Другие примеры. Рассмотрим теперь колебания *RC*- или *RL*-контур, которые начинаются из состояний, не удовлетворяющих соответствующему уравнению первого порядка:

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \quad (1.49)$$

или

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \quad (1.50)$$

Для рассмотрения таких колебаний мы должны или перейти к другим, более «полным» идеализациям соответствующих реальных электрических контуров, учитывая необходимые существенные малые параметры¹⁾, или дополнить уравнения (1.49) или (1.50) соответствующими условиями скачка.

Пусть в начальный момент $t = 0$ в *RC*-контуре заданы такие начальные значения заряда q_0 и тока \dot{q}_0 , а в *RL*-контуре — значения тока i_0 и $\left(\frac{di}{dt}\right)_0$, которые не удовлетворяют уравнениям первого порядка для этих контуров (например, начальные состояния $q_0 \neq 0$, $\dot{q}_0 = 0$ и $i_0 \neq 0$, $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = 0$, которые могут быть заданы замыканием ключа в схемах, изображенных на рис. 35 и 36). Чтобы получить системы, совместные с заданными начальными условиями, учтем в случае *RC*-контур малую индуктивность, которой обладают сопротивление и соединительные провода, и в случае *RL*-контур — малую емкость, которой обладают катушка самоиндукции, сопротивление

¹⁾ То, какие малые параметры являются существенными и должны быть учтены, зависит от того начального состояния, которое задано в реальной системе. Во всяком случае идеализированная модель, получаемая в результате учета этих малых параметров, должна быть совместной с заданным начальным состоянием.

и соединительные провода. Представляя эти малые паразитные индуктивности и емкости в виде сосредоточенных, мы придем к систе-

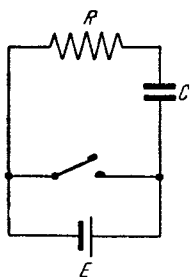


Рис. 35.

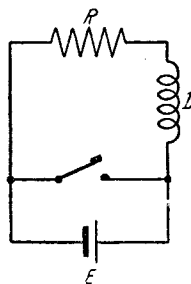


Рис. 36.

мам, схемы которых изображены на рис. 37 и 38 (там L_0 и C_0 — малые паразитные индуктивность и емкость). Уравнения колебаний теперь запишутся в виде

$$L_0 \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

для схемы на рис. 37 и

$$C_0 L R \frac{d^2 i}{dt^2} + L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

для схемы на рис. 38, т. е. в виде линейных уравнений второго порядка с малым положительным коэффициентом при старшей произ-

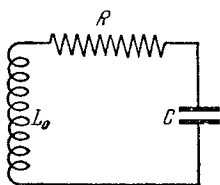


Рис. 37.

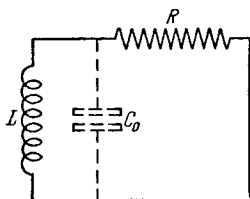


Рис. 38.

водной, полностью аналогичных уравнению (1.14) для движения осциллятора с малой массой, которое нами было подробно рассмотрено в пункте 2 настоящего параграфа.

На основании этой аналогии мы можем утверждать, что в начальной стадии движения в RC -контуре (при малой индуктивности L_0) будут происходить быстрые изменения силы тока $i = \dot{q}$ (заряд конденсатора q за это время почти не меняется), а в RL -контуре (при малой емкости C_0) — быстрые изменения $\frac{di}{dt}$, или э. д. с. самоиндук-

ции (ток i при этом почти не меняется). В результате быстрых изменений тока (в первом случае) и э. д. с. самоиндукции (во втором) системы за малый промежуток времени, длительность которого по порядку величин совпадает с $\frac{L_0}{R}$ или $C_0 R$, приходят в состояния, близкие к совместным с уравнением первого порядка (1.49) или (1.50). Дальнейшие движения удовлетворительно отображаются уравнениями первого порядка (тем точнее, чем меньше по сравнению с единицей $\frac{L_0}{CR^2}$ в первом случае и $\frac{C_0 R^2}{L}$ — во втором)¹⁾.

Если нас не интересуют подробности этих быстрых изменений, мы можем не принимать во внимание малую индуктивность L_0 в RC -контуре и малую емкость C_0 в RL -контуре и вместо детального рассмотрения начальной стадии движения ввести соответствующие условия скачка.

Для RC -контурa мы должны допустить скачки тока i при неизменном заряде конденсатора q ; для RL -контурa — скачки э. д. с. самоиндукции (или $\frac{di}{dt}$) при неизменном токе i .

Если бы мы допустили мгновенные изменения силы тока в цепи с самоиндукцией, т. е. допустили бы, что в некоторые моменты $\frac{d^2q}{dt^2} = \infty$, то на концах катушки самоиндукции мы должны были бы допустить возникновение бесконечно большой э. д. с. самоиндукции $L \frac{d^2q}{dt^2}$. С другой стороны, если бы мы допустили мгновенные изменения заряда на обкладках конденсатора, то это вынудило бы нас допустить возникновение бесконечно больших токов в контуре (так как если q изменяется скачком, то $\frac{dq}{dt} = i = \infty$). Как те, так и другие изменения запрещаются установленными нами постулатами о характере скачков²⁾.

Заметим, что во всех трех рассмотренных примерах мы имели дело с *консервативными* скачками, т. е. с такими скачками, при которых энергия системы не менялась. В самом деле, в случае осциллятора без массы вся энергия системы состояла из потенциальной энергии пружины и равнялась $\frac{kx^2}{2}$ (кинетическая энергия равнялась

¹⁾ На основании этой же аналогии мы можем утверждать, что те же малые паразитные емкости и индуктивности являются несущественными, второстепенными параметрами для колебаний в контурах при начальных условиях, совместных с соответствующими уравнениями первого порядка.

²⁾ Можно, очевидно, получить сформулированные выше условия скачка из постулата *ограниченности* токов и напряжений на отдельных элементах контуров. Этот постулат, конечно, не является следствием уравнений первого порядка, а является дополнительным физическим предположением.

нулю в силу предположения, что $m=0$). При скачке координата x оставалась неизменной, следовательно, не менялась и энергия. Точно так же в RC -контуре энергия системы состояла из энергии электрического поля в конденсаторе (энергия равнялась $\frac{q^2}{2C}$), в RL -контуре — из энергии магнитного поля катушки самоиндукции ($=\frac{Li^2}{2}$), и, поскольку при скачке не менялся в первом случае заряд конденсатора q и во втором — ток i , энергия также оставалась неизменной.

Не следует, однако, думать, что консервативность является непреходящим условием, справедливым для любых скачков. Уже в механике при рассмотрении ударов приходится часто пользоваться представлением о неконсервативных ударах (при ударе кинетическая энергия соударяющихся тел «мгновенно» уменьшается). С подобными же скачками, при которых энергия системы меняется, мы встретимся в дальнейшем (в теории часов и лампового генератора с Γ -характеристикой). Сейчас же мы приведем только один пример системы с неконсервативными скачками.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 39. Состояние схемы, получаемое непосредственно после замыкания ключа (ток в сопротивлении и напряжении на конденсаторе C_1 равны нулю, напряжение на конденсаторе C_2 равно E), очевидно, не совместимо с уравнением (1.49) для RC -контур с емкостью $C=C_1+C_2$. Пренебрегая сопротивлением и индуктивностью ключа (в замкнутом состоянии) и проводов, соединяющих конденсаторы C_1 и C_2 , мы должны допустить, что после замыкания ключа по проводам, соединяющим эти конденсаторы, потекут бесконечные токи, в результате чего напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 , а также ток через сопротивление изменятся скачком. В конце этого «мгновенного» скачка напряжения на конденсаторах должны стать одинаковыми (обозначим это напряжение через v_0), а ток через сопротивление R должен быть равным v_0/R . Для определения v_0 заметим, что во время «мгновенного» перереза конденсаторов суммарный заряд конденсаторов не должен изменяться, ибо токи через сопротивление R всегда конечны. Таким образом,

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot E = (C_1 + C_2) v_0,$$

откуда

$$v_0 = \frac{C_2 E}{C_1 + C_2}.$$

После такого скачка тока, зарядов и напряжений на конденсаторах, когда напряжения на конденсаторах уравниваются, начнется непрерыв-

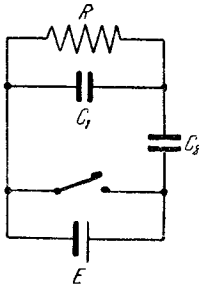


Рис. 39.

ное движение, определяемое, очевидно, уравнением (1.49) (с емкостью $C = C_1 + C_2$). Как легко подсчитать, энергия системы при таком скачке *уменьшается*. В самом деле, сравним энергию системы до скачка $\frac{C_2 E^2}{2}$ с энергией системы после скачка $\frac{1}{2} (C_1 + C_2) v_0^2$. Очевидно,

$$\frac{1}{2} (C_1 + C_2) v_0^2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{C_2 E^2}{2} < \frac{C_2 E^2}{2}.$$

Мы рассмотрели сейчас скачок в системе, опираясь на добавочное (по отношению к уравнению (1.49)) предположение о сохранении при скачке суммы зарядов конденсаторов. То же самое можно сделать и путем рассмотрения более «полной» системы, которая уже допускает заданное начальное состояние; например, это может быть система, в которой учитывается малое сопротивление проводов R_1 , соединяющих конденсаторы (рис. 40). Мы предоставляем читателю проделать это рассмотрение и доказать на его основе примененное нами условие скачка.

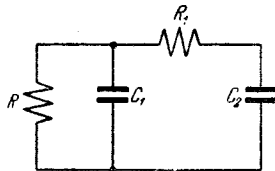


Рис. 40.

Приведенными примерами в достаточной степени поясняется все сказанное относительно систем, движения которых отображаются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с малыми положительными коэффициентами при второй производной.

Как мы видели, в таких системах на начальной стадии движения могут иметь место (при соответствующих начальных условиях) быстрые изменения состояний, после которых движение описывается достаточно удовлетворительно соответствующим уравнением первого порядка. Эти быстрые изменения состояний, во время которых играют существенную роль те или иные малые параметры, могут быть проанализированы только при учете последних, т. е. в результате решения соответствующих уравнений второго порядка, несмотря на то, что движения системы после этих быстрых изменений состояний достаточно точно отображаются уравнением первого порядка. Однако, если нас не интересуют детали этой начальной и весьма кратковременной стадии движения, мы можем заменить это рассмотрение уравнения второго порядка предположением о том, что состояние, совместное с уравнением первого порядка, устанавливается мгновенно, скачком. При этом мы должны ввести новый постулат (условие скачка), который определял бы то состояние, в которое приходит система в результате скачка и начиная с которого движение системы отображается соответствующим уравнением первого порядка.

Это представление о скачкообразных изменениях состояний системы будет нами широко использоваться в дальнейшем при изучении систем с «разрывными» колебаниями (см. гл. X).

§ 6. Линейные системы с «отрицательным трением»

В обычных системах с трением, примеры которых мы рассмотрели выше, коэффициент $h = \frac{b}{2m}$ (или в электрических системах $h = \frac{R}{2L}$) является всегда положительной величиной, ибо трение всегда препятствует движению и $b > 0$ (точно так же и $R > 0$). Положительный коэффициент трения и положительное сопротивление соответствуют тому, что на преодоление сил трения (или сопротивления в электрической цепи) расходуется энергия. Действительно, если в уравнении движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.14)$$

умножить все члены на $\frac{dx}{dt}$ и затем взять интеграл за некоторый промежуток времени от 0 до τ , то получим:

$$m \int_0^{\tau} \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} dt + \int_0^{\tau} b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt + \int_0^{\tau} kx \frac{dx}{dt} dt = 0.$$

Произведя интегрирование, имеем:

$$\left| \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right|_0^{\tau} + \left| \frac{kx^2}{2} \right|_0^{\tau} = - \int_0^{\tau} b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt. \quad (1.57)$$

Слева стоят члены, выражающие изменение кинетической и потенциальной энергии системы за время от 0 до τ ; сумма их, очевидно, определяет изменение полной энергии системы за этот промежуток времени. Если $b > 0$, то интеграл, стоящий справа, положителен и изменение энергии отрицательно, т. е. энергия системы убывает. Эта убыль энергии обусловлена потерями энергии на трение.

Если бы b , а вместе с тем и h было отрицательно, то энергия системы возрастала бы, и «трение» в этом случае явилось бы источником энергии. Ясно, что в системе, не обладающей собственным источником энергии, это невозможно, и b , а вместе с тем и h , всегда положительно. Но если система обладает собственным резервуаром энергии, то, вообще говоря, можно допустить, что $h < 0$ и что энергия системы возрастает за счет «трения» или «сопротивления». Конечно, это уже не будет трение или сопротивление в обычном смысле. Но поскольку оно характеризуется тем же членом дифференциального уравнения, что и обычное трение, именно членом, содержащим $\frac{dx}{dt}$, мы будем и в случае отрицательного h применять термин «трение» и «сопротивление» и будем говорить об «отрицательном трении» и «отрицательном сопротивлении».

1. Механический пример. Простейшим примером такой механической системы, в которой «трение» в известной области отрица-

тельно, может служить устройство, изображенное на рис. 41. На движущейся равномерно со скоростью v_0 ленте лежит масса m , укрепленная пружинами k_1 и k_2 . Сила трения ленты о груз есть некоторая, вообще говоря довольно сложная, функция относительной скорости ленты и тела. Если мы обозначим смещения груза через x , а его скорость через \dot{x} , то сила трения, действующая на массу m , как функция относительной скорости $v = v_0 - \dot{x}$ может быть записана таким образом: $F(v_0 - \dot{x})$. Если обозначить «результрующий» коэффициент упругости через k и считать пропорциональными первой степени скорости все остальные силы трения, действующие в этой системе (например, сопротивление воздуха или внутреннее трение в пружинах), то уравнение движения массы m напишется так:

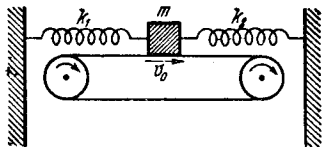


Рис. 41.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(v_0 - \dot{x}), \quad (1.58)$$

где, как уже было указано, $F(v) = F(v_0 - \dot{x})$ — функция, характеризующая зависимость силы трения от относительной скорости v , или, иначе, *характеристика* трения. Не прецизируя вида функции $F(v_0 - \dot{x})$, можно ограничить рассмотрение областью, в которой $|\dot{x}| \ll v_0$ (например, выбрав достаточно большое v_0), в этой области разложить функцию F в ряд вблизи значений v_0 и ограничиться одним первым членом ряда. Тогда $F(v_0 - \dot{x}) = F(v_0) - \dot{x}F'(v_0) + \dots$, и при этом ограничении уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} + [b + F'(v_0)]\dot{x} + kx = F(v_0). \quad (1.59)$$

Стоящий справа постоянный член обуславливает только смещение положения равновесия на величину $\frac{F(v_0)}{k}$ в направлении движения ленты. Что же касается коэффициента $b + F'(v_0)$, стоящего при \dot{x} , то его знак и величина зависят от вида характеристики трения; величина $F'(v_0)$ представляет собой угол наклона характеристики трения в точке v_0 и в случае падающей характеристики трения $F'(v_0) < 0$. Если характеристика трения в области v_0 спадает достаточно круто, то $b + F'(v_0) < 0$ и уравнение (1.59) описывает систему с «отрицательным трением». Практически этот случай довольно легко реализовать, так как характеристики трения сухих поверхностей имеют обычно вид, изображенный на рис. 42, и, значит, почти всегда имеют вначале, при малых скоростях, более или менее значительный участок достаточно крутого спадания. В этой области наше устройство и будет представлять собой линейную систему с «отрицательным трением». Нужно, однако, иметь в виду, что мы пришли к линейной системе с отрицательным трением, ограничившись областью, где $|\dot{x}| \ll v_0$. Это ограничение, как мы увидим в дальнейшем, является

весьма принципиальным и при рассмотрении интересующих нас вопросов будет играть очень существенную роль.

Другим примером механической системы, в которой «трение» в известной области отрицательно, может служить так называемый маятник Фроуда [117, 63, 116]. Устройство этого маятника таково: на равномерно вращающемся с угловой скоростью Ω вала подвешен с некоторым трением обычный маятник (рис. 43). Уравнение движения этого маятника будет отличаться от уравнения движения обычного маятника только тем, что в этом уравнении должен быть учтен момент силы трения вращающегося вала о подшипник, на котором подвешен маятник. Так как сила трения зависит от относительной скорости трущихся поверхностей, т. е. в нашем случае от относи-

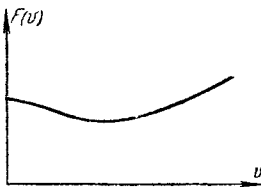


Рис. 42.

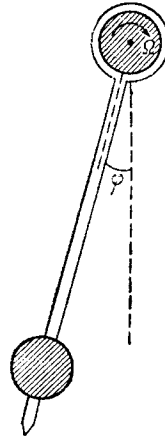


Рис. 43.

тельной угловой скорости вала и маятника ($\Omega - \dot{\varphi}$), то момент силы трения можно написать так:

$$F(\Omega - \dot{\varphi}).$$

Учитывая, помимо трения маятника о вал, сопротивление воздуха и считая, что оно пропорционально скорости $\dot{\varphi}$, мы получим уравнение движения маятника в следующем виде:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = F(\Omega - \dot{\varphi}). \quad (1.60)$$

Состояния равновесия ($\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$), очевидно, определяются уравнением

$$mgl \sin \varphi_0 = F(\Omega).$$

Рассмотрим движение маятника вблизи нижнего состояния равновесия (для него $\cos \varphi_0 > 0$). Положим

$$\varphi = \varphi_0 + \psi,$$

где ψ — малая величина (малой будем считать и скорость $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$). Разложим нелинейные функции $\sin \varphi$ и $F(\Omega - \dot{\varphi})$ в ряды по степе-

ням ψ и $\dot{\psi}$; ограничиваясь линейными членами, мы получим линейризованное уравнение *малых колебаний* маятника в виде:

$$I\ddot{\psi} + [b + F'(\Omega)]\dot{\psi} + mgl \cos \varphi_0 \cdot \psi = 0. \quad (1.61)$$

Если $F'(\Omega) < 0$ и по абсолютной величине больше b , то коэффициент при $\dot{\psi}$ будет отрицателен. В некоторой области значений Ω , где характеристика трения спадает достаточно круто, при достаточно малом b можно достигнуть того, что $b + F'(\Omega)$ станет отрицательным, и мы получим уравнение, аналогичное уравнению обычной системы с трением:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

но с той разницей, что коэффициент h будет отрицателен, т. е. мы снова получим линейную систему с «отрицательным трением». Мы видим, следовательно, что при надлежащем выборе v_0 в первой системе и Ω во второй можно осуществить механическую систему, которую в определенной ограниченной области можно рассматривать как линейную систему с отрицательным трением¹⁾.

2. Электрический пример. Вполне возможно также осуществить и электрическую систему, «сопротивление» которой в известной области отрицательно. Примером такой системы может служить ламповый генератор, т. е. схема с электронной лампой, колебательным контуром и «обратной связью». Для определенности рассмотрим простейшую схему генератора с индуктивной обратной связью и колебательным контуром в цепи сетки (рис. 44)²⁾, пренебрегая сеточными токами. При выбранных положительных направлениях токов и положительной полярности конденсатора для колебательного контура можем (на основании законов Кирхгофа) написать следующие уравнения:

$$i = -C \frac{dv}{dt}, \quad Ri = v - L \frac{di}{dt} - M \frac{di_a}{dt}$$

($-M \frac{di_a}{dt}$ представляет собой э.д.с. обратной связи, наводимую

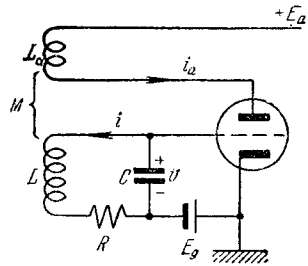


Рис. 44.

¹⁾ Примером механической системы с «отрицательным трением» может также служить колебательная система с однофазным асинхронным мотором [44].

²⁾ Заметим, что аналогичное рассмотрение можно провести для генератора с индуктивной обратной связью и колебательным контуром в цепи анода. Мы не будем рассматривать других схем лампового генератора, так как их рассмотрение либо не дает ничего принципиально нового, либо приводит к дифференциальным уравнениям третьего порядка, т. е. к системам с полутора степенями свободы, и таким образом выходит за пределы настоящей книги.

в контуре благодаря воздействию на контур анодного тока, протекающего по катушке L_a) или

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = M \frac{di_a}{dt}. \quad (1.62)$$

Пренебрегая анодной реакцией, т. е. считая анодный ток i_a зависящим только от сеточного напряжения $u_g = v$ (это достаточно хорошо выполняется для триодов с большим коэффициентом усиления или, еще лучше, для пентодов), очевидно, имеем:

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{di_a}{du_g} \cdot \frac{dv}{dt} = S(v) \frac{dv}{dt}, \quad (1.63)$$

где $S = \frac{di_a}{du_g} = S(u_g)$ — крутизна характеристики лампы, конечно, зависящая от сеточного напряжения u_g . Примерная характеристика лампы, а также зависимость крутизны характеристики S от u_g приведены на рис. 45.

Подставляя выражение (1.63) в (1.62), получим:

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + [RC - MS(v)] \frac{dv}{dt} + v = 0 \quad (1.64)$$

— *нелинейное* уравнение колебаний лампового генератора, которое будет нами подробно рассматриваться в дальнейшем. Сейчас же мы рассмотрим только *малые* колебания в контуре генератора вблизи состояния равновесия $v = 0$. Ограничиваясь некоторой достаточно малой областью изменения напряжений v , мы будем считать S постоянной: при достаточно малых v $S(v) = S_0$ — крутизне характеристики в рабочей точке. Тогда для таких малых колебаний получим *линейное* уравнение:

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + [RC - MS_0] \frac{dv}{dt} + v = 0. \quad (1.65)$$

Знак коэффициента взаимной индукции M (при выбранных положительных направлениях токов i и i_a) определяется относительным расположением витков катушек L и L_a . Предположим, что $M > 0$, т. е. катушки L и L_a включены так, что токи i и i_a , текущие в направлениях, указанных на рис. 44 стрелками ($i > 0$, $i_a > 0$), создают в катушке L магнитные потоки, усиливающие друг друга. В таком случае при достаточно большом абсолютном значении M можно достигнуть того, что величина $RC - MS_0$ станет отрицательной. Мы получаем,

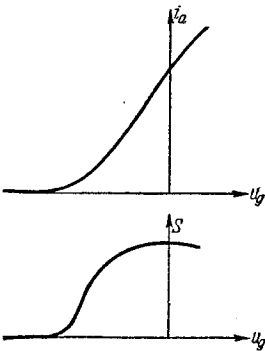


Рис. 45.

таким образом, электрическую систему, описываемую также линейным уравнением:

$$\frac{d^3 v}{dt^3} + 2h \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0 \quad \left(h = \frac{RC - MS_0}{2LC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \right),$$

причем $h < 0$. Таким образом, надлежащим выбором величины и знака M можно осуществить электрическую систему, которую в известной ограниченной области можно рассматривать как линейную систему с «отрицательным сопротивлением».

Все рассмотренные системы приводят нас к линейному дифференциальному уравнению вида $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, причем в отличие от прежних случаев h в этом уравнении отрицательно (ω_0^2 по-прежнему положительно). Для исследования поведения этих систем мы можем применить те методы, которые развиты выше. Но поскольку эти методы применимы независимо от знака h , мы не будем повторять всех выкладок, а просто используем результаты, полученные в § 4 для случая $h > 0$.

3. Картина на фазовой плоскости.

Для того чтобы выяснить характер интегральных кривых на фазовой плоскости в случае $h < 0$, достаточно в обоих рассмотренных случаях линейного осциллятора (при малом и большом трении) проследить, как изменится установленная нами раньше картина при изменении знака h .

Для случая $h^2 < \omega_0^2$, т. е. для случая не слишком большого «отрицательного трения», мы получим снова семейство спиралей, определяемых уравнением

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = C^2 e^{2 \frac{h}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{y+hx}{\omega x}}, \quad (1.29)$$

или в полярных координатах на плоскости u, v

$$\rho = C e^{\frac{h}{\omega} \varphi}, \quad (1.28)$$

где, как и раньше,

$$\omega = + \sqrt{\omega_0^2 - h^2} \quad \text{и} \quad \varphi = -(\omega t + \alpha).$$

Но, так как теперь $h < 0$, то с уменьшением φ (φ уменьшается при возрастании t) ρ будет возрастать (рис. 46), т. е. ход спиралей изменится на обратный по сравнению с тем, который мы получили для систем с положительным h . Следовательно, двигаясь по интегральной кривой, представляющая точка будет удаляться от состоя-

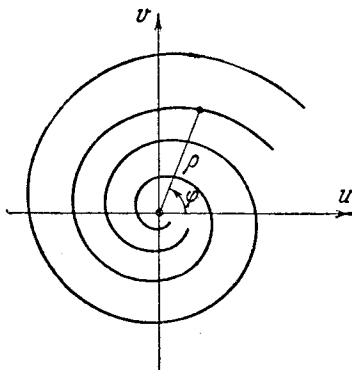


Рис. 46.

ния равновесия (особой точки $x=0, y=0$). Особая точка и в этом случае представляет собой асимптотическую точку семейства вложенных друг в друга спиралей, т. е. является особой точкой типа фокуса (рис. 47).

Скорость движения изображающей точки по фазовой плоскости по-прежнему обращается в нуль только в начале координат и возрастает по мере удаления представляющей точки от начала координат. Так как, кроме того, эта скорость везде направлена по инте-

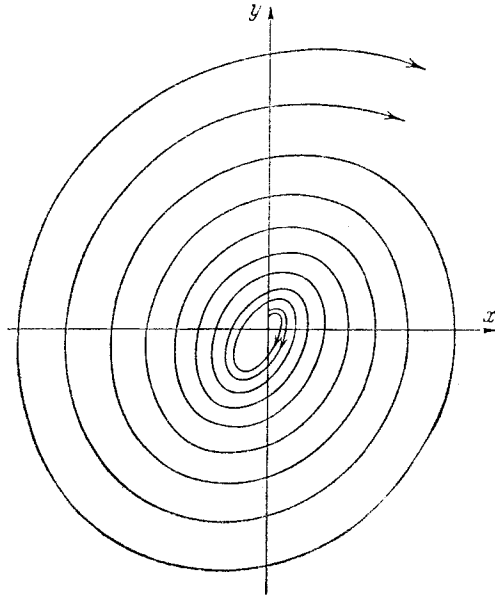


Рис. 47.

гральной кривой в направлении от начала координат, то при любом (но отличном от нуля) начальном отклонении системы от состояния равновесия система через достаточный промежуток времени уйдет как угодно далеко от этого единственного состояния равновесия; в силу этого мы не можем указать такую область $\delta(\epsilon)$, чтобы находящаяся в ней в начальный момент представляющая точка не ушла никогда за пределы заданной области ϵ . Следовательно, единственное положение равновесия в этом случае неустойчиво: особая точка представляет собой неустойчивый фокус. Совершенно ясно, что неустойчивость этого фокуса обусловлена именно тем, что $h < 0$. Мы видим, таким образом, что в случае $h < 0$ и $h^2 < \omega_0^2$ движение системы представляет собой также осцилляционный процесс, как и в случае малого положительного h , но процесс уже не затухающий,

а *нарастающий*. Максимальные отклонения системы со временем нарастают (рис. 48), и зависимость отклонений от времени определяется выражением вида $x = Ke^{-ht} \cos(\omega t + \alpha)$, где $h < 0$. Закон нарастания максимумов — геометрическая прогрессия с знаменателем $e^{-hT} = e^{-d}$, причем, так как $h < 0$, то $d < 0$ и $e^{-d} > 1$. Величина $d_1 = -d > 0$ в этом случае носит название *логарифмического инкремента* нарастания колебаний. Те оговорки, которые сделаны выше относительно декремента, целиком относятся к инкременту: понятие логарифмического инкремента применимо также только к линейным системам.

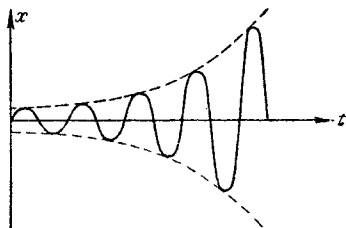


Рис. 48.

Итак, поскольку мы ограничиваемся линейной трактовкой системы, мы получаем беспредельно нарастающий осцилляторный процесс.

Таким же образом можно проследить характер поведения интегральных кривых для случая большого «отрицательного трения»:

$h < 0$, $h^2 > \omega_0^2$, когда семейство интегральных кривых определяется уравнением (1.45):

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C_1 (y + q_2 x)^{q_2},$$

где

$$q_1 = h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$$

и

$$q_2 = h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}.$$

Так как $h < -\omega_0 < 0$, то $q_1 < q_2 < 0$, что приводит к изменению положения интегральных прямых $y + q_1 x = 0$ и $y + q_2 x = 0$; обе эти прямые будут в этом случае проходить через первый и третий квадранты, так как x и y — одного знака (рис. 49).

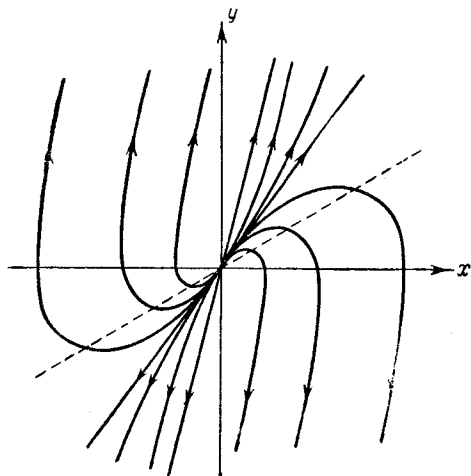


Рис. 49.

Мы снова получаем семейство интегральных кривых «параболического» типа, причем все кривые проходят через единственную особую точку, лежащую в начале координат. Это — особая точка типа узла.

Определяя направление движения представляющей точки по фазовой плоскости, мы легко убедимся в том, что движения эти происходят в направлениях, указанных на рисунках стрелками, и следовательно,

представляющая точка в своем движении по любой из интегральных кривых стремится уйти от состояния равновесия. О скорости движения представляющей точки мы можем повторить все то, что сказано выше. Следовательно, как бы мало ни было начальное отклонение системы от состояния равновесия ($x=0$, $y=0$), она по прошествии достаточно длинного промежутка времени уйдет достаточно далеко от состояния равновесия, и значит, это состояние равновесия неустойчиво. Мы снова не можем указать такой конечной области начальных значений $\delta(\epsilon)$, чтобы представляющая точка не вышла из заданной области ϵ .

Рассматриваемая особая точка есть неустойчивый узел, причем опять-таки неустойчивость обусловлена тем, что $h < 0$. Мы получили апериодический процесс, нарастающий по закону: $x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, где λ_1 и λ_2 положительны. И поскольку мы рассматриваем систему как линейную, это нарастание в ней будет продолжаться беспрерывно.

Рассматривая систему как линейную, мы не находим в ней устойчивых стационарных состояний; она не может остаться в области, близкой к состоянию равновесия, — отклонения в линейной системе должны беспрерывно возрастать. Между тем при описании механической и электрической систем, которые привели нас к этим случаям, для того чтобы прийти к линейным уравнениям, мы должны были ограничиться рассмотрением областей, достаточно близких к состоянию равновесия (малое x и малое y). Значит, с одной стороны, мы должны ограничиться рассмотрением областей, достаточно близких к состоянию равновесия, а с другой стороны, рассматривая движение системы в этих областях, мы убедились в том, что система не останется в этой области, но неизбежно выйдет за ее пределы. Другими словами, линейная трактовка позволяет правильно изобразить поведение фазовых траекторий только в некоторой ограниченной области фазовой плоскости, вблизи положения равновесия. Но, с другой стороны, все фазовые траектории уходят за пределы этой ограниченной области. Чтобы исследовать дальнейшее поведение системы, мы должны, очевидно, учесть какие-то обстоятельства, которые до сих пор нами не учитывались, и рассматривать систему уже как нелинейную.

Мы видим, таким образом, что в рассматриваемом случае *линейная трактовка принципиально не может дать ответа на ряд вопросов о поведении системы*, например на вопрос о том, какие движения будет совершать система по прошествии достаточно длинного промежутка времени.

4. Поведение системы при изменении обратной связи. Итак, мы пришли к следующим результатам (мы ограничимся только формулировкой результатов для лампового генератора; для груза на движущейся ленте и для маятника Фруда выводы, конечно, будут совершенно аналогичны).

Пока обратная связь достаточно мала⁴⁾ (считаем, что выбрано такое направление витков катушек, что $M > 0$), мы имеем в контуре либо аperiodическое затухание, либо затухающие колебания, в зависимости от того, будет ли h^2 больше или меньше, чем ω_0^2 . Если сам по себе контур обладает таким большим сопротивлением, что в нем происходит аperiodическое затухание, то, выбрав достаточно сильную обратную связь, мы можем достигнуть того, что эта обратная связь будет «компенсировать» большую часть сопротивления контура, т. е. $h = \frac{RC - MS_0}{2L}$ будет малой положительной величиной.

Тогда в случае не слишком больших начальных отклонений (таких, что система не выходит за пределы линейной области) будет происходить колебательное, а не аperiodическое затухание. Увеличивая обратную связь, мы должны пройти через положение, когда $RC - MS_0 = 0$, и затем перейти в область, где $RC - MS_0 < 0$, т. е. достигнуть такого положения, при котором состояние равновесия станет неустойчивым (так как $h < 0$) и будет происходить уже не затухание, а нарастание колебаний. Чем больше будет абсолютная величина h , тем больше будет шаг спирали на фазовой плоскости, тем быстрее будут раскручиваться эти спирали и тем больше будет возрастать величина максимального отклонения в системе за время одного колебания. Наконец, при дальнейшем увеличении обратной связи система пройдет через положение, в котором $h^2 = \omega_0^2$, и перейдет в область, где $h^2 > \omega_0^2$ (причем h у нас теперь отрицательно). В этой области мы снова получим аperiodический процесс, но уже не затухающий (как при большом *положительном* h), а нарастающий. Скорость нарастания процесса, характеризующая корнями характеристического уравнения λ_1, λ_2 , будет тем больше, чем больше $|h|$, следовательно, чем больше обратная связь.

Итак, одним только изменением величины h , характеризующей «сопротивление» системы (от больших положительных до больших отрицательных h), можно перевести систему последовательно через пять различных областей, соответствующих различным типам движений и состояний равновесия, а именно: устойчивый узел, устойчивый фокус, центр, неустойчивый фокус и неустойчивый узел. В следующем параграфе мы познакомимся еще с одним типом состояний

⁴⁾ В рассмотренных нами механических системах нет элемента, аналогичного переменной обратной связи. Поэтому для изменения режима нужно изменить какой-то другой параметр, например крутизну характеристики трения. В ламповом генераторе также можно было бы вместо изменения величины обратной связи изменять крутизну характеристики лампы в рабочей точке, т. е. изменять величину S_0 . Из-за отсутствия обратной связи в рассмотренных механических системах нет полной аналогии между этими системами и обычным ламповым генератором. Аналогом маятника Фроуда является так называемый динактронный генератор, в котором нет обратной связи и самовозбуждение наступает вследствие работы на падающем участке характеристики лампы (см. § 7 настоящей главы).

равновесия, который не может быть изменен путем изменения затухания в системе. Рассмотренные же пять типов состояний равновесия отличаются один от другого только величиной и знаком трения в системе.

Однако не все эти пять типов равновесия представляют одинаковый физический интерес. Всем состояниям равновесия, кроме центра ($h = 0$), соответствуют конечные области значений параметров системы, в частности параметра M . Другими словами, значениям M , заключенным между заданными конечными пределами, может соответствовать всякое состояние равновесия, кроме центра, а этому последнему состоянию равновесия соответствует только одно-единственное значение $M_{кр}$, получающееся из условия $MS_0 - RC = 0$. Если это условие хоть немного нарушается, т. е. если хотя бы немного изменяется какой-либо из параметров системы, то система переходит в область $h > 0$ или $h < 0$. Это значит, что состояние равновесия типа центра неустойчиво по отношению к малым изменениям параметров системы. Другие же состояния равновесия сохраняют свой тип при небольших изменениях параметров системы, т. е. обладают устойчивостью по отношению к малым изменениям параметров системы. Так как небольшие изменения параметров системы всегда неизбежны, то неустойчивые по отношению к ним состояния не отражают поведения реальной физической системы. Поэтому состояние равновесия типа центра физически имеет значение лишь как граница между двумя другими состояниями — устойчивым и неустойчивым фокусом, точно так же как случай $h^2 = \omega_0^2$ имеет смысл лишь как граница между узлом и фокусом. Однако этим границам, как уже указывалось, не следует придавать слишком большого физического смысла. В реальных системах переход от одного типа движений к другому происходит постепенно и физическая граница между колебательным и апериодическим затуханием не слишком резка, так как при увеличении затухания система теряет свои колебательные свойства не сразу, а постепенно. Другими словами, в реальных системах мы не в состоянии отличить «сильный» фокус, т. е. фокус с очень большим h (когда h^2 только немного меньше ω_0^2), от «слабого» узла, т. е. узла, для которого h^2 только немного больше ω_0^2 . Точно так же мы не можем отличить очень слабое затухание от очень слабого нарастания, ибо, чтобы обнаружить разницу между этими двумя процессами, нам бы пришлось ждать чрезвычайно долго.

Мы убедились выше, что соответствующим выбором направления и величины обратной связи можно не только добиться уменьшения затухания собственных колебаний в системе, но и достигнуть того, что эти колебания станут нарастающими. Физический смысл этого явления совершенно ясен. Уменьшение затухания системы обусловлено, очевидно, тем, что вместо части энергии, рассеиваемой в контуре, поступает некоторое количество энергии из внешнего источника (в нашем случае из анодной батареи), которое частично компенси-

рует потери энергии в контуре и тем самым замедляет затухание в системе. Чем сильнее обратная связь, тем больше энергии поступает из батареи в контур за период, тем большая часть потерь компенсируется и тем слабее затухают колебания. При дальнейшем увеличении обратной связи энергия, поступающая в контур, может оказаться больше, чем потери энергии в нем, и тогда энергия в контуре будет возрастать, в контуре будут происходить нарастающие колебания, а при дальнейшем увеличении поступающей в контур энергии — даже апериодическое нарастание. О том, как долго будет продолжаться нарастание колебаний, прекратится ли оно и когда именно, мы, как уже указывалось, ничего не можем сказать, оставаясь на линейной точке зрения.

Исследуя линейные уравнения, мы не можем также ничего сказать о том, какой процесс установится в системе по прошествии достаточно длинного промежутка времени и, в частности, возможен ли в данной системе периодический процесс. Мы можем лишь утверждать, что в рассматриваемой нами линейной системе периодический процесс невозможен. Для ответа на вопрос о дальнейшей судьбе реальной системы, после того как она выйдет за пределы области, которой мы ограничили наше рассмотрение, нужно, очевидно, рассматривать эту систему уже как нелинейную. Такое нелинейное рассмотрение и составляет нашу дальнейшую задачу. Пока мы лишь укажем, что отсутствие колебательных движений вблизи положения равновесия отнюдь не доказывает вообще невозможности колебательных движений в данной системе. В частности, если вблизи положения равновесия происходит апериодическое нарастание (неустойчивый узел), то это вовсе не значит, что в дальнейшем в системе не может установиться колебательный процесс. Как мы увидим, и в случае особой точки типа узла вполне возможно существование периодического процесса (незатухающих колебаний).

Вернемся, однако, к вопросу об энергии, компенсирующей потери в системе. Как для электрических, так и для механических систем картина с этой точки зрения получается одна и та же. В случае генератора энергия поступает в контур из анодной батареи, а электронная лампа является лишь тем механизмом, который регулирует нужным образом поступление энергии в контур. В механических же системах, к которым могут быть применены все наши выводы, источником энергии является мотор, приводящий в действие ленту или вал, а передача этой энергии в колебательную систему обусловливается соответствующим видом характеристики трения. Именно, вид характеристик трения таков, что лента или вал больше «помогают» телу при движении в ту же сторону, чем «мешают» при движении навстречу. Если бы в генераторе мы выбрали такое включение катушек, которое соответствует отрицательной обратной связи ($M < 0$), или в механических моделях установили бы рабочую точку не на падающий, а на поднимающийся

участок характеристики трения, то энергия из батареи или мотора не переходила бы в колебательную систему, а, наоборот, часть энергии колебаний рассеивалась бы во вспомогательном механизме (в лампе — на аноде или в подшипнике — на преодоление трения). Затухание колебаний в системе не только не уменьшилось бы, но, наоборот, возросло, если бы направление обратной связи было выбрано неправильно.

В заключение отметим (хотя эти вопросы и не будут рассматриваться в нашей книге), что в случае действия внешней силы на систему с обратной связью (например, на регенеративный приемник) также можно получить ответ на некоторые вопросы, оставаясь на почве линейной идеализации. Например, в случае $h < 0$, т. е. в случае недовозбужденного регенератора, и слабых сигналов, т. е. в случае воздействия, не выводящего систему из области, в которой ее можно рассматривать как линейную, можно считать, что обратная связь только уменьшает затухание системы (увеличивает ее чувствительность и избирательность), не изменяя «линейных» свойств системы. Однако для достаточно сильных сигналов это утверждение будет уже неправильно.

§ 7. Линейная система с отталкивающей силой

До сих пор мы рассматривали линейные системы, в которых действует квазиупругая сила, т. е. сила, *притягивающая* к положению равновесия и пропорциональная смещению системы. Во всех рассмотренных случаях варьировался характер трения, но сила оставалась притягивающей. Между тем часто приходится сталкиваться с системами (и с точки зрения теории колебаний эти системы представляют значительный интерес), в которых действует сила, не притягивающая к положению равновесия, а, наоборот, *отталкивающая* систему от положения равновесия, причем величина этой отталкивающей силы возрастает с возрастанием смещения системы. При рассмотрении этих систем прежде всего возникает вопрос о том, какова зависимость отталкивающей силы от смещения. Как мы увидим ниже при рассмотрении некоторых частных примеров (и как это вытекает из общих соображений о разложении произвольной функции в ряд), в области достаточно малых отклонений можно считать, что отталкивающая сила пропорциональна смещению. При таком предположении мы приходим к линейным системам, в которых действует не притягивающая, а отталкивающая сила. Поведение этих систем (характер их движений) существенно отличается от поведения линейных систем, рассмотренных выше.

В качестве первого примера, приводящего к линейной системе с отталкивающей силой, рассмотрим поведение математического маятника в непосредственной близости к верхнему (неустойчивому) положению равновесия. При этом мы сначала для простоты будем

считать, что трение в маятнике отсутствует. В этом случае, если угол φ отсчитывать от верхнего положения равновесия (рис. 50), уравнение движения маятника напишется так:

$$ml^2\ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi. \quad (1.66)$$

Ограничивая рассмотрение областью, достаточно близкой к положению равновесия, можно $\sin \varphi$ заменить через φ . Тогда уравнение принимает вид

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (1.67)$$

Мы получили опять линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Это уравнение, как и уравнение, полученное для области, близкой к нижнему положению равновесия, конечно, не описывает движения маятника при любых углах φ и пригодно только для достаточно малых значений φ .

1. Картина на фазовой плоскости. Уравнение, к которому приводит рассматриваемый нами случай, в общем виде может быть написано так:

$$\ddot{x} - nx = 0, \quad (1.68)$$

где $n > 0$ (для маятника $n = \frac{g}{l}$). Для исследования поведения системы, описываемой этим уравнением, можно было бы выбрать любой из путей, использованных в предыдущих задачах, именно либо найти решение уравнения (1.68) и затем рассматривать найденное решение $x = f(t)$ и $\dot{x} = f'(t)$ как параметрическое уравнение интегральных кривых, либо, не интегрируя уравнения (1.68), исключить из него время, затем проинтегрировать и рассматривать полученное уравнение как уравнение интегральных кривых. Используем сейчас этот второй путь. Полагая $\dot{x} = y$, мы можем заменить это уравнение второго порядка двумя уравнениями первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = nx; \quad (1.69)$$

исключая время, получим одно уравнение первого порядка, связывающее x и y :

$$\frac{dy}{dx} = n \frac{x}{y}. \quad (1.70)$$

Состояние равновесия в этой системе (определяемое из условия $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = 0$) только одно, именно точка $x = 0$, $y = 0$. Изоклиной $\kappa = 0$ ($\frac{dy}{dx} = 0$) является ось ординат ($x = 0$), а изоклиной $\kappa = \infty$ ($\frac{dy}{dx} = \infty$) служит ось абсцисс ($y = 0$). Для того чтобы точно



Рис. 50.

определить вид траекторий представляющей точки на фазовой плоскости, нужно проинтегрировать уравнение (1.70). Переменные разделяются, интегрирование дает:

$$y^2 - nx^2 = C. \quad (1.71)$$

Это — уравнение семейства равносторонних гипербол, отнесенное к главным осям. При $C=0$ мы получаем две асимптоты этого семейства: $y = -\sqrt{n}x$ и $y = +\sqrt{n}x$, которые проходят через начало координат.

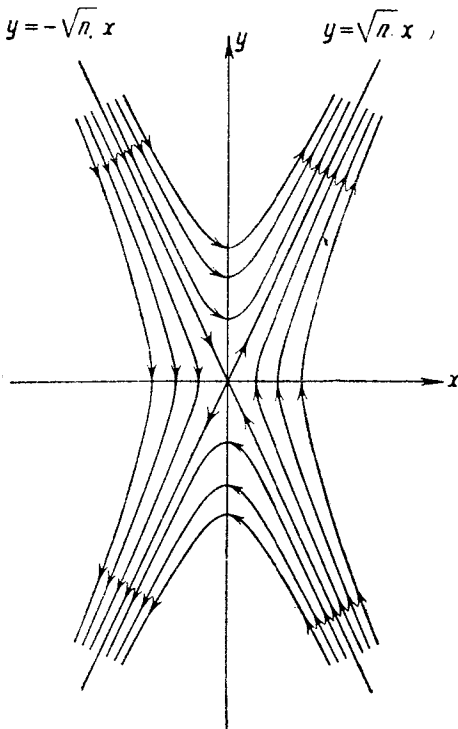


Рис. 51.

Начало координат является единственной особой точкой рассматриваемого семейства интегральных кривых. Все же остальные интегральные кривые суть гиперболы, не проходящие через начало координат (рис. 51). Такая особая точка, через которую проходят только две интегральные кривые, являющиеся асимптотами (все остальные интегральные кривые, имеющие вид гипербол, через особую точку не проходят), называется особой точкой типа *седла*.

Какие же заключения мы можем вывести из полученной картины на фазовой плоскости? Прежде всего, имея в виду, что при положительной скорости координата системы должна возрастать, а при отрицательной — убывать, мы получим во всех четырех квадрантах та-

кие направления движения представляющей точки по фазовой плоскости, которые указаны на рис. 51 стрелками. Рассматривая направления движения представляющей точки, легко убедиться, что, где бы ни находилась представляющая точка в начальный момент (за исключением особой точки и точек на асимптоте $y = -\sqrt{n}x$, проходящей через второй и четвертый квадранты), она всегда в конечном счете будет удаляться от состояния равновесия, причем движение ее всегда будет не колебательным, а аperiodическим.

Скорость движения представляющей точки в этом случае обращается в нуль также только в особой точке, в остальных же точ-

ках фазовой плоскости она отлична от нуля. Таким образом, если даже представляющая точка движется по какой-либо из интегральных кривых вначале по направлению к особой точке (движения во втором и четвертом квадрантах), все же в конце концов она уйдет как угодно далеко от состояния равновесия во всех случаях, кроме движения по асимптоте $y = -\sqrt{n}x$. Следовательно, в рассматриваемом случае состояние равновесия неустойчиво, ибо мы не можем выбрать область $\delta(\epsilon)$ так, чтобы представляющая точка, находившаяся в начальный момент в этой области, не вышла в конце концов за пределы заданной области ϵ . Очевидно, что особая точка типа седла всегда неустойчива, и эта неустойчивость связана с самим типом особой точки и характером интегральных кривых, а не с направлением движения представляющей точки по интегральной кривой (если бы направления движений изменились на обратные, то особая точка все же была бы неустойчива).

Что касается движений по асимптоте $y = -\sqrt{n}x$, то они представляют собой некоторый особый случай, когда система может только приближаться к состоянию равновесия. При этом движении представляющая точка будет приближаться к началу координат со стремящейся к нулю скоростью, но не достигнет начала координат в конечный промежуток времени. Этот случай так называемого *лимитационного* движения мы рассмотрим подробно в дальнейшем. Однако самая возможность такого движения, направленного к состоянию неустойчивого равновесия, ясна из элементарных соображений. Действительно, при любом начальном отклонении маятника от верхнего состояния равновесия всегда можно выбрать такую, и притом вполне определенную, начальную скорость, чтобы кинетическая энергия маятника в начальный момент была точно равна той работе, которую он должен совершить, чтобы как раз достигнуть состояния равновесия. Если эта начальная скорость направлена в сторону положения равновесия, то маятник будет двигаться к этому положению и должен в него прийти. Но, как мы увидим в дальнейшем, если бы удалось совершенно точно задать так подобранную начальную скорость, то маятник достиг бы состояния равновесия только через бесконечно большой промежуток времени.

Однако этот специальный случай движения к положению равновесия, конечно, не нарушает утверждения о том, что состояние равновесия в данном случае неустойчиво. Действительно, при любых начальных условиях, отличающихся от тех специально выбранных, которые точно соответствуют асимптоте $y = -\sqrt{n}x$, система будет всегда удаляться от состояния равновесия. Это движение по асимптоте не может быть никогда точно реализовано, так как оно соответствует одному начальному состоянию, а не конечной области начальных состояний. Такое начальное состояние (вернее, одна «линия начальных состояний») не образует конечной области начальных

состояний и не может быть совершенно точно задано в системе. Другими словами, если считать, что все начальные состояния равновероятны, то вероятность такого начального состояния, которое соответствует движению по направлению к особой точке, равна нулю. Поэтому всякое реальное движение в системе будет удалять систему от состояния равновесия.

Перейдем теперь к рассмотрению случаев, когда, помимо отталкивающей силы, в системе существует и трение, причем это трение может быть и положительным и отрицательным. К первому из этих случаев приводит рассмотрение маятника вблизи верхнего положения равновесия при наличии силы трения, пропорциональной ско-

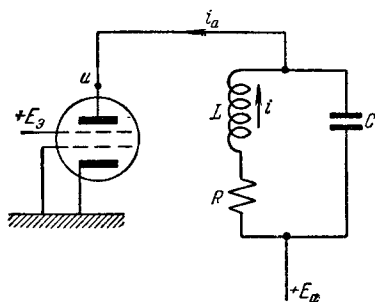


Рис. 52.

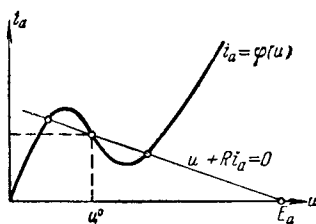


Рис. 53.

рости. В этом случае уравнение, описывающее движение системы, будет иметь вид

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} - n\varphi = 0, \quad (1.72)$$

где $n = \frac{g}{l}$ и $h > 0$. Ко второму случаю, т. е. к случаю $h < 0$ в уравнении (1.72), нас привело бы рассмотрение маятника Фруда также в области, близкой к верхнему состоянию равновесия (конечно, при линейной идеализации).

2. Электрическая система. К тому же уравнению (1.72) мы придем, рассматривая при соответствующих предположениях так называемый динактронный генератор (рис. 52) — схему, которая может совершать автоколебания из-за наличия у анодной характеристики тетрода $i_a = \varphi(u)$ (рис. 53) падающего участка (участка, на котором $\frac{di_a}{du} < 0$)¹⁾. Законы Кирхгофа для рассматриваемой схемы дают:

$$i = i_a + C \frac{du}{dt}, \quad L \frac{di}{dt} + Ri = E_a - u,$$

¹⁾ Анодной характеристикой электронной лампы, как известно, называют зависимость анодного тока i_a от анодного напряжения u при постоянных (фиксированных) напряжениях на других электродах (сетках). Анодная характеристика тетрода имеет (при достаточно больших напряжениях на экранной сетке E_g) падающий участок благодаря так называемому *динактронному эффекту*, имеющему место в тетроде в определенном интервале анодных напряжений.

или после исключения тока i :

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \left[RC + L \frac{di_a}{du} \right] \frac{du}{dt} + u + Ri_a = E_a. \quad (1.73)$$

Для состояний равновесия $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{d^2 u}{dt^2} = 0$ и, следовательно,

$$u + Ri_a = E_a. \quad (1.74)$$

Решая полученное уравнение совместно с уравнением характеристики тетрода $i_a = \varphi(u)$ (графическое решение дано на рис. 53), мы найдем состояния равновесия рассматриваемой электрической схемы; очевидно, при заданной характеристике тетрода в зависимости от R и E_a имеется или одно или три состояния равновесия.

Предположим, что R и E_a таковы, что имеется состояние равновесия ($u = u^0$, $i_a = i_a^0$), лежащее на *падающем* участке характеристики ($\varphi'(u^0) < 0$). Ограничиваясь областью малых колебаний около этого состояния равновесия:

$$u = u^0 + v,$$

где v достаточно мало, мы можем характеристику тетрода считать линейной:

$$i_a = i_a^0 - S_0 v, \quad (1.75)$$

где $S_0 = -\varphi'(u^0)$ — абсолютная величина крутизны анодной характеристики тетрода в рабочей точке, лежащей на падающем участке. Для этой области малых колебаний мы получим, очевидно, следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + \left[RC - LS_0 \right] \frac{dv}{dt} + (1 - RS_0) v = 0. \quad (1.76)$$

Как и в предыдущих случаях, наше линейное уравнение пригодно для описания колебаний только в некоторой ограниченной области, в которой анодное напряжение u достаточно близко к значению u^0 (т. е. v достаточно мало).

Если $RS_0 < 1$, то мы получаем «обычное» дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее систему с «притягивающей» силой и положительным или отрицательным «трением» в зависимости от знака выражения $RC - LS_0$. Если же $RS_0 > 1$ (сопротивление контура R достаточно велико), то мы получаем уравнение, аналогичное уравнению (1.72), описывающему систему с «отталкивающей» силой¹⁾.

3. Особая точка типа седла. Итак, обе рассмотренные нами системы — маятник (обычный маятник или маятник Фруда) вблизи верхнего состояния равновесия и динактронный генератор вблизи состояния равновесия на падающем участке характеристики

¹⁾ Заметим, что в этом случае динактронный генератор имеет кроме рассматриваемого состояния равновесия еще два, которые являются устойчивыми узлами или фокусами.

(при $RS_0 > 1$) привели нас при соответствующих упрощениях к линейным дифференциальным уравнениям вида

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} - nx = 0, \quad (1.77)$$

где $n > 0$ (для маятника $n = \frac{g}{l}$, для динаatronного генератора $n = \frac{RS_0 - 1}{LC}$), а h может иметь любой знак.

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (1.77) имеет вид

$$\lambda^2 + 2h\lambda - n = 0$$

и имеет, независимо от знака коэффициента h , корни действительные, но разных знаков:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 + n}$$

(ниже мы будем обозначать положительный корень через q_1 и отрицательный — через $-q_2$; q_1 и $q_2 > 0$). Поэтому общее решение для уравнения (1.77) может быть записано в виде

$$x = Ae^{q_1 t} + Be^{-q_2 t}. \quad (1.78)$$

Для нахождения интегральных кривых на плоскости x, y ($y = \dot{x}$, как и раньше) исключим время из уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = nx - 2hy, \quad (1.79)$$

эквивалентных уравнению (1.77), путем деления второго уравнения на первое:

$$\frac{dy}{dx} = -2h + n \frac{x}{y}. \quad (1.80)$$

По-прежнему единственной особой точкой (единственным состоянием равновесия) является начало координат ($x=0, y=0$). Для изоклины с наклоном интегральных кривых $\frac{dy}{dx} = x$ получаем уравнение $-2h + n \frac{x}{y} = x$ или

$$y = \frac{n}{x + 2h} x. \quad (1.81)$$

В частности, изоклиной $x=0$ (т. е. $\frac{dy}{dx} = 0$) является прямая

$$y = \frac{n}{2h} x,$$

а изоклиной $x = \infty$ ($\frac{dy}{dx} = \infty$) — ось абсцисс ($y=0$). В рассматриваемом случае, так же как и в случае особой точки типа узла, имеются две интегральные прямые, проходящие через особую точку, — пря-

мые $y = q_1 x$ и $y = -q_2 x$. Для определения вида других интегральных кривых мы можем, как и прежде, подстановкой проинтегрировать уравнение (1.80) и получить:

$$(y - q_1 x)^{-q_1} = C(y + q_2 x)^{q_2} \quad (1.82)$$

— уравнение, определяющее семейство кривых *гиперболического типа* с асимптотами $y = q_1 x$ и $y = -q_2 x$, которые, очевидно, проходят через разные квадранты. Семейства интегральных кривых для рассматриваемого случая изображены на рис. 54 (для $h < 0$) и рис. 55 (для $h > 0$).

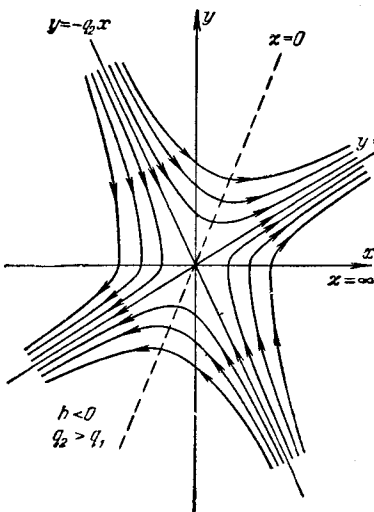


Рис. 54.

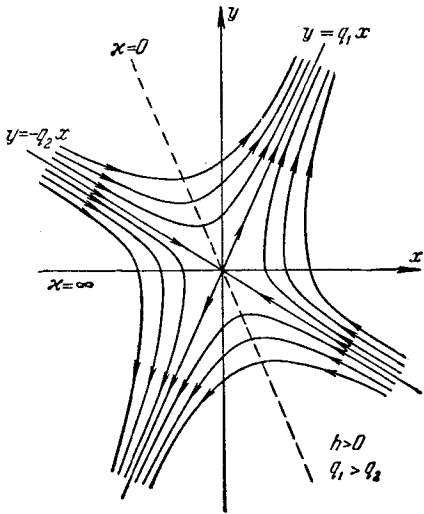


Рис. 55.

Для выяснения вида интегральных кривых можно, так же как и в ранее рассмотренном случае особой точки типа узла, ввести новые переменные

$$u = y - q_1 x, \quad v = y + q_2 x$$

и преобразовать уравнение (1.82) к виду

$$v = \frac{C}{u^\alpha},$$

где $\alpha = \frac{q_1}{q_2} > 0$. На плоскости u, v это уравнение определяет семейство кривых гиперболического типа, асимптотами которых являются оси координат (рис. 56). Поэтому на плоскости x, y уравнение (1.82) определяет также семейство кривых гиперболического типа с асимптотами $y = q_1 x$ и $y = -q_2 x$ — прямыми, в которые преобразуются при обратном преобразовании оси u и v .

Мы видим, таким образом, что наличие сопротивления, как положительного, так и отрицательного, не изменяет принципиально картины в системе с отталкивающей силой. Особая точка — по-прежнему седло, она всегда неустойчива, и все движения в системе в конечном счете удаляют систему от состояния равновесия. По прошествии достаточно длинного промежутка времени система уйдет как угодно далеко и, следовательно, наверно выйдет за пределы

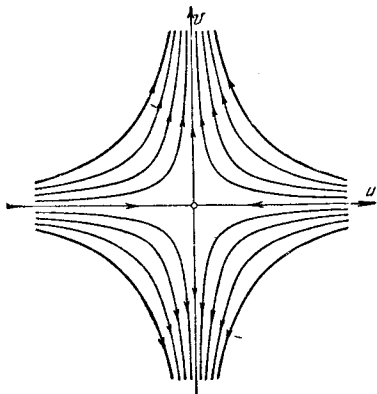


Рис. 56.

той области, которой мы ограничили наше рассмотрение и в которой систему можно было рассматривать как линейную. Значит, и в этом случае, так же как и в случае отрицательного трения, т. е. вообще во всех случаях неустойчивости состояния равновесия, мы можем при помощи линейной идеализации описать поведение системы только в течение определенного промежутка времени и то при небольших начальных отклонениях, пока система не успела уйти за пределы «линейной области».

Рассмотрение линейных систем мы закончим весьма важным для дальнейшего замечанием. Ни одна из рассмотренных нами картин на фазовой плоскости для различных линейных систем, кроме гармонического осциллятора без трения (т. е. кроме консервативной линейной системы), не дала на фазовой плоскости замкнутых интегральных кривых, и все интегральные кривые имели ветви, уходящие в бесконечность. Между тем периодическим процессам на фазовой плоскости должны соответствовать замкнутые интегральные кривые. Мы можем поэтому вывести из нашего рассмотрения линейных систем следующее важное заключение: *в линейных неконсервативных системах периодические процессы вообще невозможны.*

ГЛАВА II

КОНСЕРВАТИВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Введение

При макроскопическом рассмотрении мы встречаемся всегда с неконсервативными системами, т. е. системами, в которых полная энергия не остается постоянной, а рассеивается при движении. Однако во многих случаях этот процесс рассеяния энергии происходит настолько медленно и влияние его на характер движения системы столь незначительно, что на ряд интересующих нас вопросов мы можем ответить, не учитывая этого влияния и считая, что сумма потенциальной и кинетической энергии в системе остается постоянной. В результате такой идеализации мы приходим к представлению о консервативных системах.

В других же случаях рассеяние энергии в системе происходит столь быстро, что мы уже не можем пренебрегать этим обстоятельством и должны рассматривать систему как неконсервативную, для того чтобы (с заданной степенью точности) ответить на те же самые вопросы, на которые в первом случае мы могли ответить, считая систему консервативной. Как уже неоднократно указывалось, к разделению систем на консервативные и неконсервативные мы приходим в результате идеализации свойств реальных физических систем, а характер допустимой идеализации зависит не только от свойств системы, но и от характера тех вопросов, которые нас интересуют. Так, например, для решения вопроса о движении маятника, испытывающего очень малое трение (маятник подвешен на очень острых призмах и помещен в сосуд, из которого удален воздух), мы можем для не слишком больших промежутков времени (например, сотен периодов) с очень большой точностью рассматривать его как систему консервативную, т. е. считать, что сумма кинетической и потенциальной энергии остается постоянной. Если же нас интересует вопрос о характере движений маятника в течение очень большого промежутка времени, то, рассматривая систему как консервативную, мы уже не сможем получить правильного ответа на данный вопрос. Несмотря на то, что энергия рассеивается очень медленно, за достаточно большой промежуток времени ее рассеется столько, что энергия, оставшаяся

в системе, будет заметно меньше той, которую имела система в начальный момент. Точно так же движение планет, например Земли, мы можем рассматривать как движение консервативное, опять-таки если интересующие нас промежутки времени не слишком велики. При очень больших промежутках времени, охватывающих геологические эпохи, мы для рассмотрения движения Земли должны учитывать так называемое приливное трение, при учете которого мы уже не можем считать систему консервативной.

Допустимость консервативной идеализации, как уже указывалось, зависит как от характера вопроса, так и от свойств системы. На тот же вопрос о движении маятника в течение промежутка времени, равного сотне периодов, мы при консервативной идеализации ничего не сможем ответить, если маятник движется в среде с большим сопротивлением. В этом случае он уже в течение одного размаха расходует значительную долю сообщенной ему вначале энергии, и для промежутка времени, равного 100 периодам, сумму кинетической и потенциальной энергии маятника даже приблизительно нельзя считать постоянной.

Рассмотрение консервативных систем помимо того, что оно может дать непосредственный ответ на ряд вопросов, представляет для нас особый интерес в силу следующих причин. Во-первых, мы здесь получим возможность уже довольно глубоко подойти к выяснению тех понятий (фазовой плоскости, особых точек, периодических движений, устойчивости, зависимости динамической системы от параметра), которые понадобятся для рассмотрения нашей основной задачи — теории автоколебательных систем. Во-вторых, консервативные системы интересны еще и потому, что мы в некоторых случаях сможем изучать автоколебательные системы только постольку, поскольку они близки к консервативным системам.

Заметим, что для физики в целом теория консервативных систем имеет весьма большую самостоятельную ценность ¹⁾.

§ 2. Простейшая консервативная система

Рассмотрим простейшую автономную консервативную систему с одной степенью свободы: движение материальной точки по прямой под действием силы, зависящей только от расстояния. Положение материальной точки вполне определяется заданием одного числа — абсциссы x . Механическое *состояние* системы определяется заданием положения

¹⁾ Прежде всего для теории строения материи. Еще со времен Лапласа и в особенности после того, как был открыт закон сохранения энергии, с тех пор как стали рассматривать теплоту как вид кинетической энергии, физики принимали, что в микромире действуют консервативные силы. На этом пути были достигнуты большие успехи кинетической теорией газов, теорией кристаллической решетки и др. Так называемая старая квантовая механика для определения стационарных состояний атома пользовалась консервативной моделью,

точки x и скорости точки $\dot{x} = y$. Массу точки для простоты выкладок примем равной единице; совершенно очевидно, что это предположение не уменьшит общности нашего исследования. Уравнение движения такой системы может быть написано по второму закону Ньютона в виде одного уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} = f(x), \quad (2.1)$$

где $f(x)$ — сила, или в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y \text{ и } \frac{dy}{dt} = f(x). \quad (2.2)$$

Во всем дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, мы будем предполагать, что $f(x)$ — аналитическая функция на всей прямой x ($-\infty < x < +\infty$) или, иначе говоря, что $f(x)$ голоморфна в каждой точке прямой x ¹⁾.

Дифференциальное уравнение, определяющее интегральные кривые на фазовой плоскости, как мы уже знаем, получается в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y} \text{ или } \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \quad (2.3)$$

где $\varphi(x, y) = \frac{f(x)}{y}$. Как будет двигаться изображающая точка по интегральным кривым на фазовой плоскости? Мы уже указывали, что так как y есть скорость, то при $y > 0$, т. е. в верхней фазовой полуплоскости, изображающая точка двигается так, что x возрастает, а при $y < 0$, т. е. в нижней полуплоскости, так, что x убывает. Таким путем определить *направление* движения по фазовым траекториям. *Скорость* движения изображающей точки v можно выразить так:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{y^2 + [f(x)]^2}.$$

Напомним еще раз, что следует различать скорость изменения положения — скорость материальной точки и скорость изменения состояния — скорость движения изображающей точки на фазовой плоскости.

Первая скорость $\frac{dx}{dt} = y$ равняется ординате, вторая

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{y^2 + [f(x)]^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2.4)$$

лишь постулируя определенный рецепт для определения произвольных постоянных. Даже в квантовой механике, отказавшейся от пространственно-временного описания движения отдельных частиц, нужно знать гамильтонову функцию «идеальной модели атома», прежде чем написать уравнение Шредингера. С некоторой точки зрения можно рассматривать все развитие механики атома как развитие консервативной гамильтоновой механики.

¹⁾ Мы будем пользоваться такой терминологией: будем называть функцию $f(x)$ аналитической в данной области значений x , если она голоморфна в каждой точке этой области, т. е. если в окрестности каждой точки она может быть разложена в степенной ряд с радиусом сходимости, отличным от нуля.

равняется длине нормали к рассматриваемой интегральной кривой в выбранной точке. Из выражения (2.4) непосредственно вытекает уже отмеченное нами обстоятельство, что во всякой точке фазовой плоскости изображающая точка имеет конечную и отличную от нуля скорость, за исключением состояний равновесия (особых точек), в которых одновременно

$$y = 0 \text{ и } f(x) = 0. \quad (2.5)$$

В силу этих условий все состояния равновесия расположены на фазовой плоскости на оси x , причем их абсциссы удовлетворяют уравнению $f(x) = 0$.

Пусть нам задана на фазовой плоскости точка (x_0, y_0) . Спрашивается, можно ли всегда найти интегральную кривую, которая проходила бы через заданную точку, и будет ли такая кривая единственной? Уравнение (2.3) определяет в каждой точке фазовой плоскости единственное направление касательной, за исключением особых точек, где $y = 0$ и $f(x) = 0$.

Докажем, что в нашем случае через каждую неособую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна интегральная кривая. Мы знаем, что такая кривая существует и будет единственной, если соблюдены условия теоремы Коши¹⁾. Мы рассматривали y как функцию x и имели дело с уравнением $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y} = \varphi(x, y)$; в этом случае $\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{f(x)}{y^2}$, и следовательно, $y = 0$ есть геометрическое место точек на фазовой плоскости, где условия Коши нарушены. Будем рассматривать теперь x как функцию y . Тогда дифференциальное уравнение (2.3) следует записать в виде: $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{f(x)} = \psi(x, y)$,

в этом случае $\frac{d\psi}{dx} = -\frac{yf'(x)}{[f(x)]^2}$. Условие $f(x) = 0$ дает нарушение условий непрерывности, и следовательно, для этого уравнения условия теоремы Коши нарушены на прямых $f(x) = 0$. Мы рассматриваем одно и то же дифференциальное уравнение (2.3), только с различных точек зрения. Полученные нами при этом различные результаты отнюдь не противоречивы, так как условия Коши только достаточны, но не необходимы для единственности. Следовательно, мы можем утверждать, что через каждую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна интегральная кривая, за исключением, может быть, точек, где одновременно $y = 0$ и $f(x) = 0$, т. е. за исключением особых точек. Как мы увидим дальше, для рассматриваемого случая консервативной системы в особых точках интегральные кривые либо пересекаются и имеют, вообще говоря, различные касательные, либо

¹⁾ Формулировку теоремы Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) см. в Дополнении 1.

вырождаются в изолированные точки и совсем не имеют касательных. Скорость изображающей точки

$$v = iy + jf(x) \quad (2.6)$$

всюду определена однозначно и, как мы уже видели, обращается в нуль только в особой точке. Отсюда в силу непрерывности следует, что вблизи особой точки изображающая точка замедляет свое движение.

Пусть для системы уравнений (2.2) в некоторой области (при нашем предположении об аналитичности $f(x)$ на всей прямой x этой областью является вся плоскость) выполнены условия теоремы Коши. Отсюда вытекает, что для рассматриваемой динамической системы прошедшее и будущее однозначно определяется настоящим, так как значение начальных условий однозначно определяет движение, или, иначе говоря, решение системы (2.2).

Останется ли это справедливым при движении по интегральным кривым, *пересекающимся* в особых точках? Или — что то же самое — может ли изображающая точка, помещенная в начальный момент на интегральную кривую, проходящую через особую точку (но не в особую точку), достигнуть этой особой точки в конечное время? Мы покажем, что это невозможно: изображающая точка, находившаяся в начальный момент в точке фазовой плоскости, не являющейся особой точкой для уравнения (2.3), может лишь асимптотически приближаться к особой точке при неограниченно возрастающем t .

Сделаем прежде всего следующее замечание. Картину кривых на фазовой плоскости мы можем, как мы уже видели, описывать либо одним уравнением (2.3) и изучать с его помощью интегральные кривые, либо описывать системой уравнений (2.2) и изучать фазовые траектории. В сущности можно сказать, что во втором случае мы после решения получаем уравнения тех же интегральных кривых, но в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, иначе, получаем закон движения изображающей точки по интегральной кривой на фазовой плоскости. Различие этих двух способов изображения одного и того же семейства кривых особенно ярко проявляется в следующем. Пусть $x = x_0$, $y = y_0$ — координаты¹⁾ особой точки уравнения (2.3), т. е. координаты точки, в которой нарушаются условия теоремы Коши для одного уравнения (2.3); тогда $x = x_0$, $y = y_0$ в нашем случае будет точкой, в которой выполняются условия теоремы Коши для системы уравнений (2.2).

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что система функций $x = x_0$, $y = y_0$ есть решение системы уравнений (2.2), т. е., как об этом мы уже говорили, что точка x_0 , y_0 является для системы (2.2) состоянием равновесия. Заметим, что так как в этом случае решение системы (2.2) (соответствующее состоянию равновесия) не

¹⁾ Согласно уравнению (2.3) x_0 — корень уравнения $f(x) = 0$, а $y_0 = 0$.

зависит от t , то, задавая начальные значения $t=t_0$, $x=x_0$, $y=y_0$, мы при любом t_0 получим решение в виде $x=x_0$, $y=y_0$.

Рассмотрим изображающую точку,двигающуюся по интегральной кривой, проходящей через особую точку, по направлению к особой точке. Скорость ее движения, как мы уже говорили, уменьшается и стремится к нулю при неограниченном приближении к состоянию равновесия. Спрашивается, может ли изображающая точка в конечное время достигнуть состояния равновесия или же она, как мы указали, может лишь асимптотически к нему приближаться, никогда его не достигая? Предположим, что имеет место первый случай, т. е. что изображающая точка, двигаясь по закону $x=x(t)$, $y=y(t)$, находится вне состояния равновесия в момент времени $t=t_0$ и достигает состояния равновесия с координатами $x=x_0$, $y=y_0$ в некоторый определенный момент времени t_1 ($t_1 > t_0$), т. е. что $x_0=x(t_1)$, $y_0=y(t_1)$. Но тогда мы получили бы два решения, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям: при $t=t_1$ $x=x_0$, $y=y_0$ — одно $x=x_0$, $y=y_0$, другое $x=x(t)$, $y=y(t)$. Последнее невозможно, так как в точке x_0 , y_0 , как это только что отмечалось для системы уравнений (2.2), выполняются условия теоремы Коши.

Заметим, что в дальнейшем нам придется встретиться с системами уравнений (подобных (2.2) или более общего вида), для которых условия теоремы Коши в некоторых точках фазовой плоскости нарушаются, например с такими динамическими моделями реальных физических систем, для которых правые части уравнений движения разрывны (таковы, например, колебательные системы с сухим, кулоновским трением). Для таких моделей наше утверждение об определении прошлого настоящим, вообще говоря, несправедливо. Точно так же мы уже не можем в таких случаях, вообще говоря, утверждать, что система не достигает состояния равновесия в конечное время. Заметим еще, что в таких случаях особые точки одного уравнения (подобного (2.3)) не всегда соответствуют состояниям равновесия.

§ 3. Исследование фазовой плоскости вблизи состояний равновесия

Если мы знаем совокупность интегральных кривых на фазовой плоскости для какой-нибудь динамической системы, то мы получаем возможность сразу охватить всю картину возможных движений при различных начальных условиях. Для консервативной системы исследование этих интегральных кривых чрезвычайно облегчается тем, что уравнение (2.7) легко может быть проинтегрировано, так как переменные разделяются. Полученный интеграл имеет вид

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = h, \quad (2.7)$$

где $V(x)$ таково, что $V'(x) = -f(x)$, а h — константа интеграции. Это уравнение выражает для нашего случая закон сохранения энер-

гии. Действительно, $\frac{v^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ есть кинетическая энергия, $V(x) = - \int_0^x f(x) dx$ есть взятая с обратным знаком работа действующих

в системе сил или потенциальная энергия системы, h — так называемая константа энергии, зависящая от начальных условий. Определенным начальным условиям (при $t=0$ $x=x_0$, $y=y_0$) соответствует определенное h .

Если же мы зададим h , то одному и тому же значению h соответствует бесконечное множество состояний системы (x, y) — целая кривая $y = \Phi(x)$ на плоскости x, y (которая может иметь ряд изолированных ветвей), называемая *кривой равной энергии*. По одной из ветвей этой кривой и будет двигаться изображающая точка, если полная энергия рассматриваемого движения равняется h . Может случиться, что, задав h , мы не найдем действительных значений x и y , которые удовлетворяли бы уравнению (2.7). Это означает, что ни при каком действительном движении нашей системы энергия ее не может иметь этой величины.

В дальнейшем исследовании мы будем предполагать, что $f(x)$, а значит, и $V(x)$ — аналитические функции на всей прямой x . (Впоследствии мы рассмотрим несколько примеров, где это не будет иметь места.)

Нам будет удобнее вести исследование, предполагая, что функция $V(x)$ задана. Заметим, что те значения $x = x_1, \dots, x = \bar{x}_i$ (абсциссы особых точек), которые обращают $f(x)$ в нуль, обращают в нуль и $V'(x)$. Следовательно, эти значения соответствуют экстремальным значениям потенциальной энергии $V(x)$, т. е. либо минимуму, либо максимуму, либо точке перегиба с горизонтальной касательной. Можно провести классификацию характера особых точек уравнения (2.3), исходя из экстремальных свойств потенциальной энергии в особых точках.

Прежде чем перейти к этой задаче, сделаем несколько общих замечаний, касающихся вида интегральных кривых на фазовой плоскости:

1) Уравнение (2.7) не меняется от замены y на $-y$. Следовательно, все кривые этого семейства симметричны относительно оси x .

2) Геометрическое место точек, где касательные к интегральным кривым вертикальны, — это, как легко видеть из (2.2), ось x , за исключением, может быть, особых точек.

3) Геометрическое место точек, где касательные к интегральным кривым горизонтальны, — это прямые, параллельные оси y , уравнение которых $x = \bar{x}_i$, где \bar{x}_i — корни уравнения $f(x) = 0$, за исключением, может быть, точек пересечения этих прямых с осью x , которые являются особыми точками.

Можно указать простой способ построения интегральных кривых на фазовой плоскости, если нам задана, как мы будем предполагать

в дальнейшем, потенциальная энергия $V(x)$. С этой целью воспользуемся вспомогательной «плоскостью баланса энергии» с прямоугольными осями x, z , на которой отложим потенциальную энергию $z = V(x)$. Так как

$$\frac{y^2}{2} = h - V(x),$$

то если задана h — полная энергия, то кинетическая энергия представится в виде разности h и $V(x)$. Как мы уже говорили, если кинетическая энергия отрицательна, то соответствующее движение невозможно.

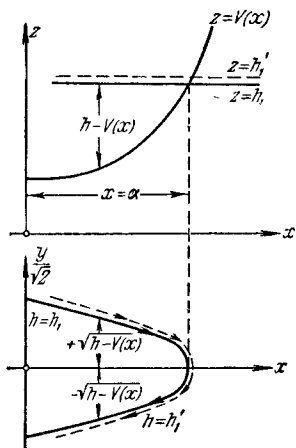


Рис. 57.

На рис. 57 изображен участок диаграммы баланса энергии для частного вида кривой $z = V(x)$. Чтобы получить интегральную кривую на фазовой плоскости¹⁾, которая для удобства изображена непосредственно под диаграммой баланса энергии, нужно последовательно извлекать из разностей $h - V(x)$ квадратные корни и откладывать их на фазовой плоскости вниз и вверх от оси x . При построении не следует забывать, как это только что было указано, что все интегральные кривые на фазовой плоскости пересекают ось x , имея вертикальную касательную, если только они ее не пересекают в особой точке²⁾.

Движение по полученному таким образом участку кривой легко найдется при помощи уже неоднократно применявшихся соображений. Изменив несколько h , получим соседнюю близкую кривую на фазовой плоскости.

Воспользуемся этим способом для решения нашей задачи — дать картину интегральных кривых на фазовой плоскости вблизи состояний равновесия. Начнем с того случая, когда состояние равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии.

Пусть минимум потенциальной энергии имеет место для $x = \bar{x}$ и пусть $V(x) = h_0$. Диаграмма баланса энергии вблизи $x = \bar{x}$ будет иметь вид, изображенный на рис. 58. Интегральная кривая для $h = h_0$ вырождается в изолированную точку с координатами $x = \bar{x}, y = 0$. Для близкого значения $h = h_1$ ($h_1 > h_0$) будем иметь замкнутую инте-

¹⁾ Для простоты построения мы примем для фазовой плоскости несколько иной масштаб вдоль оси ординат, откладывая по ординатам не y , а $\frac{y}{\sqrt{2}}$.

²⁾ Абсцисса α точки пересечения интегральных кривых с осью x , очевидно, определяется уравнением $V(x) = h$. В рассматриваемом случае точка $x = \alpha$ не является особой, так как $f(\alpha) \neq 0$.

гральную кривую. Направление движения по этой замкнутой кривой легко найдется обычным методом.

При этом движении по замкнутой интегральной кривой действительная скорость, т. е. скорость материальной точки, два раза обращается в нуль: при $x = \alpha$ и $x = \beta$ (рис. 58); скорость же изображающей точки на фазовой плоскости нигде не равняется нулю, так как наша кривая не проходит через особую точку. Представляющая точка, двигаясь по замкнутой кривой, будет возвращаться на прежнее место через конечный промежуток времени. Отсюда следует, что мы имеем дело с периодическим движением. Нетрудно видеть, что промежуточные значения h ($h_0 < h < h_1$) дают опять замкнутые интегральные кривые, которые также соответствуют периодическим движениям.

На фазовой плоскости мы получаем целый континуум замкнутых кривых, вложенных одна в другую и охватывающих выродившуюся в точку интегральную кривую $x = \bar{x}$, $y = 0$. Особую точку дифференциального уравнения с таким характером поведения окрестных интегральных кривых мы уже встречали при рассмотрении линейной консервативной системы. Такая точка, как указывалось, носит название *центра*.

Особая точка типа центра, как мы уже убедились при рассмотрении частного примера, соответствует устойчивому состоянию равновесия. Найдем теперь аналитические условия наличия такой особой точки и приближенные уравнения замкнутых кривых вблизи нее.

Вблизи особой точки с координатой \bar{x} разложения $f(x)$ и $V(x)$ в ряды имеют вид

$$f(x) = a_1(x - \bar{x}) + \frac{a_2}{1 \cdot 2}(x - \bar{x})^2 + \frac{a_3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - \bar{x})^3 + \dots, \quad (2.8)$$

$$V(x) = h_0 - \left\{ \frac{a_1}{1 \cdot 2}(x - \bar{x})^2 + \frac{a_2}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - \bar{x})^3 + \frac{a_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(x - \bar{x})^4 + \dots \right\}, \quad (2.9)$$

где $a_1 = f'(\bar{x}) = -V''(\bar{x})$, $a_2 = f''(\bar{x}) = -V'''(\bar{x})$, и т. д. Перенесем начало координат в эту особую точку, положив $x = \bar{x} + \xi$; $y = 0 + \eta$, и подставим в уравнение исследуемого семейства (2.7) выражение $V(\bar{x} + \xi)$ в виде ряда. Тогда уравнение исследуемого семейства кривых может быть записано так:

$$\frac{\eta^2}{2} + h_0 - \left\{ \frac{a_1 \xi^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \dots \right\} = h. \quad (2.10)$$

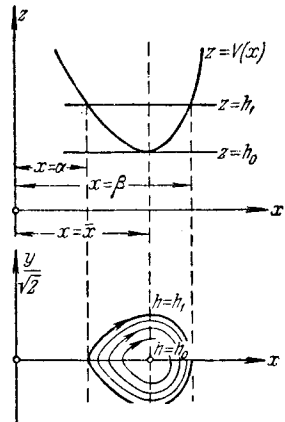


Рис. 58.

Рассмотрим сначала случай $a_1 \neq 0$. В этом случае на нашей диаграмме баланса энергии прямая $z = h_0$ имеет соприкосновение первого порядка с кривой $V(x)$ в точке $x = \bar{x}$. Так как $V(x)$ для $x = \bar{x}$ имеет минимум, то $V''(\bar{x}) > 0$ и $a_1 < 0$. Кривая (2.10) для $h = h_0$ имеет в точке $\xi = 0$, $\eta = 0$ изолированную особую точку.

Для достаточно малого $\alpha = h - h_0$ ($\alpha > 0$) получаются замкнутые кривые, близкие к эллипсам, так как приближенно они могут быть описаны уравнением

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad (2.11)$$

где $b^2 = 2\alpha$, $a^2 = \frac{2\alpha}{|a_1|}$.

Движение, изображаемое на фазовой плоскости эллипсом, является гармоническим движением. Таким образом, для достаточно малых начальных отклонений движение будет близко к гармоническому. При увеличении начальных отклонений движение, вообще говоря, будет все сильнее и сильнее отличаться от гармонического, причем период также будет меняться в зависимости от величины начальных отклонений, так как время обращения представляющей точки по разным интегральным кривым, вообще говоря, различно.

Если лишь какое-нибудь $a_k \neq 0$, тогда как $a_1 = 0$, $a_2 = 0, \dots$, $a_{k-1} = 0$, то на диаграмме баланса энергии прямая $z = h_0$ имеет соприкосновение k -го порядка с кривой потенциальной энергии в точке $x = \bar{x}$. Так как $V(x)$ для $x = \bar{x}$ имеет минимум, то k непременно нечетное и $a_k < 0$. Кривая (2.10) для $h = h_0$ опять имеет изолированную точку; для достаточно малого $\alpha = h - h_0$ ($h > h_0$) мы получим замкнутые интегральные кривые вида:

$$\frac{\eta^2}{2} + \frac{|a_k| \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots k(k+1)} = \alpha. \quad (2.12)$$

Замкнутые кривые вокруг особой точки даже в непосредственной близости к ней уже не будут походить на эллипсы, и соответствующие движения уже не будут близки к гармоническим даже при весьма малых отклонениях.

Однако общая топологическая картина движений на фазовой плоскости от этого не изменится: всякую особую точку, соответствующую минимуму потенциальной энергии, окружает континуум замкнутых кривых, вложенных друг в друга и соответствующих периодическим движениям.

Рассмотрим теперь случай, когда состояние равновесия соответствует максимуму потенциальной энергии. Диаграмма баланса энергии изображена на рис. 59 вверху, а внизу изображена фазовая плоскость. На фазовой плоскости для значения $h = h_0$ мы получим четыре ветви кривой с общей точкой. Эти ветви мы перенумеруем I, II, III, IV и будем для краткости называть «усами» рассматриваемой особой точки. Характер «усов» вблизи особой точки легко

исследовать аналитически, как это будет сделано ниже. Для значений h , близких к h_0 ($h_1 > h_0$ и $h_2 < h_0$), мы будем иметь участки интегральных кривых, похожие на ветви гипербол (рис. 60). Варьируя h между h_1 и h_2 , получим континуум промежуточных кривых.

Легко найти движение по этим интегральным кривым, пользуясь уже неоднократно применявшимся методом.

Во-первых, рассмотрим движение по усам (рис. 59). Изображающая точка, попав на усы II и IV

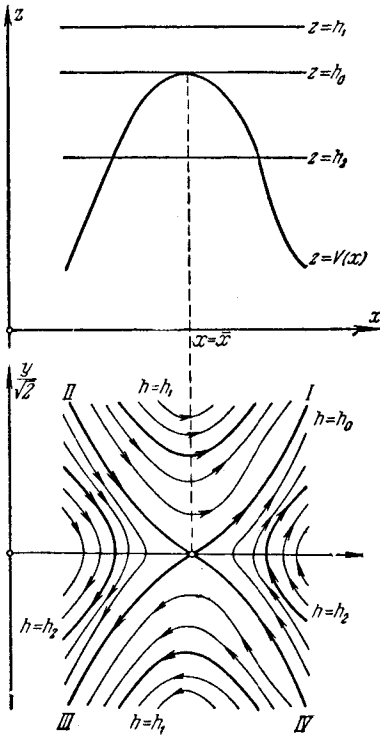


Рис. 59.

вблизи состояния равновесия, асимптотически к нему приближается, попав на усы I и III — удаляется от состояния равновесия. (Заметим, что при изменении t на $-t$ усы меняются ролями.) Движения, характеризуемые остальными интегральными кривыми, обладают тем свойством, что если изображающая точка попадет на любую из таких кривых вблизи состояния равновесия, она в конечное время уйдет достаточно далеко от этого состояния равновесия.

Особую точку дифференциального уравнения с таким

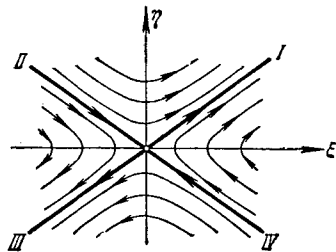


Рис. 60.

характером поведения окрестных интегральных кривых мы также уже встречали при рассмотрении систем с отталкивающей силой, это — особая точка типа *седла*.

Как мы видели при рассмотрении линейной системы с отталкивающей силой, особая точка типа седла соответствует всегда *неустойчивому* состоянию равновесия. Найдем теперь аналитические условия существования такой особой точки и приближенные уравнения интегральных кривых в непосредственной близости к состоянию равновесия. Поступая совершенно так же, как и в случае центра, мы

опять придем к уравнению (2.10):

$$\frac{\eta^2}{2} + h_0 - \left\{ \frac{a_1^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{a_k^2 k^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \dots \right\} = h.$$

Опять начнем со случая простого соприкосновения прямой $z = h_0$ и кривой $V(x)$ в точке $x = \bar{x}$, т. е. со случая, когда $a_1 \neq 0$. Так как $V(x)$ для $x = \bar{x}$ имеет максимум, то $V''(\bar{x}) < 0$ и $a_1 > 0$. Полагая $h = h_0$, мы получим уравнение усов. Нетрудно видеть, что начало координат ($\xi = 0, \eta = 0$) является узловой точкой усов, причем уравнения касательных к усам в этом узле имеют вид

$$\eta = +\sqrt{a_1} \xi \quad \text{и} \quad \eta = -\sqrt{a_1} \xi. \quad (2.13)$$

Для малых значений $h - h_0 = \alpha$ мы получим семейство кривых, которые вблизи особой точки ведут себя подобно гиперболам, определяемым уравнением

$$\frac{\eta^2}{2\alpha} - \frac{a_1^2}{2\alpha} = 1. \quad (2.14)$$

Вид усов и характер интегральных кривых в непосредственной близости к особой точке изображен на рис. 60. Мы уже исследовали в предшествующей главе характер движения представляющей точки по этому семейству гипербол. Ясно, что эти результаты приближенно справедливы для движения по интегральным кривым вблизи особой точки и в рассматриваемом случае. При удалении от особой точки эти результаты, полученные нами для линейной системы, вообще говоря, все менее и менее точно описывают исследуемые движения.

В том случае, когда прямая $z = h_0$ и кривая $V(x)$ имеют соприкосновение k -го порядка, $a_1 = 0, a_2 = 0$ и т. д. и лишь какое-нибудь $a_k \neq 0$. Так как для $x = \bar{x}$ $V(x)$ имеет максимум, то k обязательно нечетное и $a_k > 0$. Полагая $h = h_0$, мы опять получим уравнение усов. Нетрудно видеть, что начало координат ($\xi = 0, \eta = 0$) является точкой самоприкосновения усов (рис. 61), которые вблизи особой точки близки к кривой $\eta^2 = \frac{a_k}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} \xi^{k+1}$ и имеют общей касательной ось ξ . Для малых значений α ($\alpha = h - h_0$) мы получим соседние интегральные кривые, которые вблизи особой точки ведут себя подобно кривым

$$\frac{\eta^2}{2} - \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} = \alpha. \quad (2.15)$$

Интегральные кривые вокруг особой точки уже отличаются от гипербол, и исследуемые движения уже даже приближенно не могут быть описаны при помощи той картины, которая была получена для линейной системы с отталкивающей силой. Однако общая топологическая картина движений на фазовой плоскости тождественна с предыдущим случаем и, следовательно, вполне определяется тем, что мы имеем дело с максимумом потенциальной энергии.

Рассмотрим теперь третий и последний случай, когда состоянию равновесия на кривой потенциальной энергии соответствует точка перегиба с горизонтальной касательной.

Диаграмма баланса энергии и вид фазовой плоскости изображены на рис. 62. Построение интегральных кривых на фазовой плоскости не вызывает никаких затруднений для всех значений h , за исключением значения $h = h_0$, которое дает две ветви кривой с общей точкой $x = \bar{x}$, $y = 0$. Выяснение характера этих двух усов вблизи особой точки представляет некоторые затруднения, и для этого требуется аналитическое рассмотрение. Прежде чем перейти к такому исследованию, которое проводится совершен-

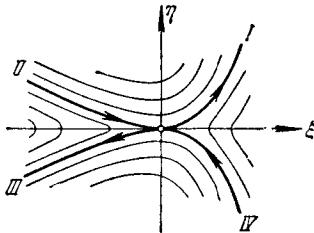
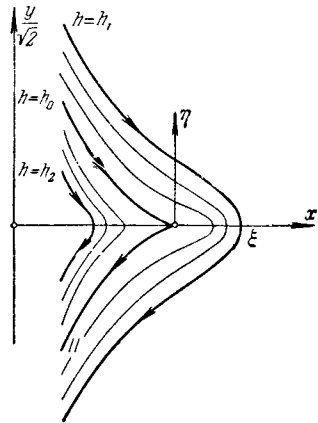
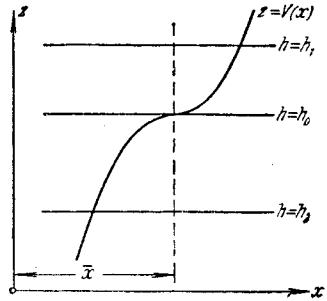


Рис. 61.

Рис. 62.

но так же, как в предыдущих двух случаях, заметим, что так как мы имеем дело с точкой перегиба, то непременно $a_1 = 0$ (так как $a_1 = -V''(x)$), то первый коэффициент a_k , не равный нулю, имеет k четным). Уравнение (2.15) в этом случае получает вид

$$\frac{\eta^2}{2} - \left[\frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \frac{a_{k+1} \xi^{k+2}}{1 \cdot 2 \dots (k+2)} + \dots \right] = h - h_0. \quad (2.16)$$

Кривую, проходящую через особую точку, мы получим, полагая $h = h_0$. Нетрудно видеть, что эта кривая имеет в точке $\xi = 0$, $\eta = 0$ точку возврата первого рода. Изображающая точка, попав на ус I, асимптотически стремится к состоянию равновесия, попав на ус II — удаляется от состояния равновесия. Состояние равновесия, как и в случае седла, очевидно, является неустойчивым, так как по прошествии достаточно большого промежутка времени представляющая точка, находившаяся в начальный момент в конечной

области $\delta(\varepsilon)$, непременно выйдет за пределы конечной области ε . Движение по усю I к состоянию равновесия не нарушает нашего утверждения о неустойчивости состояний равновесия, так же как и аналогичные движения в случае седла.

Мы рассмотрели три возможных случая экстремальных значений потенциальной энергии системы и связали их с типом особых точек и с вопросом об устойчивости состояний равновесия¹⁾. Мы убедились в том, что в случае минимальной потенциальной энергии состояние равновесия является особой точкой типа центра и устойчиво; если потенциальная энергия имеет максимум, то состояние равновесия является особой точкой типа седла и неустойчиво. Состояние равновесия неустойчиво и в случае, когда потенциальная энергия имеет точку перегиба. На этом основании для рассматриваемого случая простейшей консервативной системы можно сформулировать две основные теории устойчивости: во-первых, теорему Лагранжа²⁾, которая гласит:

Если в состоянии равновесия потенциальная энергия есть минимум, то состояние равновесия устойчиво,

и, во-вторых, обратную теорему Ляпунова:

Если в состоянии равновесия потенциальная энергия не минимум, то состояние равновесия неустойчиво.

§ 4. Исследование характера движений на всей фазовой плоскости

Перейдем теперь от локального исследования движений вблизи особых точек к исследованию кривых на всей плоскости. При этом мы опять будем пользоваться плоскостью баланса энергии и будем исходить из предположения, что $V(x)$ — функция, аналитическая на всей прямой x . Потом, когда мы перейдем к примерам, мы рассмотрим несколько случаев, когда $V(x)$ допускает разрывы.

Итак, предположим, что на плоскости x, z нам даны кривая $z = V(x)$, удовлетворяющая указанным требованиям³⁾, и некоторая

¹⁾ Очевидно, каждая особая точка дифференциального уравнения (2.3) является особой точкой в смысле, употребляемом в дифференциальной геометрии, для интегральной кривой

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = h_0.$$

Состоянию равновесия с минимальной потенциальной энергией соответствует изолированная особая точка, с максимальной потенциальной энергией — узловая точка (т. е. точка самопересечения кривой) или точка самоприкосновения, топологически эквивалентная узловой точке; наконец, состоянию равновесия, в котором потенциальная энергия имеет точку перегиба, соответствует точка возврата первого рода.

²⁾ Эта теорема иногда носит название теоремы Лежен-Дирихле, по имени математика, который ее впервые строго доказал. Эта теорема справедлива также и для консервативных систем со многими степенями свободы.

³⁾ Для краткости рассуждений мы предположим, что $V(x)$ не допускает точек перегиба, в которых касательная параллельна оси x .

прямая $z=h$. Построим на фазовой плоскости совокупность всех движений, которые характеризуются заданной константой энергии. Могут встретиться следующие основные случаи:

1) Прямая $z=h$ нигде не пересекает кривой $V(x)$. Если в этом случае точки кривой $z=V(x)$ лежат выше точек прямой $z=h$, то на всей фазовой плоскости не существует движений с такой полной энергией, так как скорости таких движений были бы мнимыми. Если же прямая $z=h$ лежит выше кривой $z=V(x)$, то на фазовой плоскости мы будем иметь две симметрично расположенные ветви фазовой траектории (рис. 63). Изображающая точка, начавшая двигаться с любого места как верхней, так и нижней ветви, будет двигаться в одном направлении, не останавливаясь, и уйдет в бесконечность. Если мы заменим t на $-t$, т. е. заставим время «течь в обратном направлении», то характер движения изображающей точки не нарушится, изменится лишь направление движения. Такие движения, такие фазовые траектории, для которых изображающая точка при всяком начальном положении уходит в бесконечность, мы будем называть убегающими движениями и убегающими траекториями. Рассматриваемые движения являются убегающими как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Легко видеть, что для соседних значений h мы получим ту же самую картину, у нас будут совершенно аналогичные фазовые траектории.

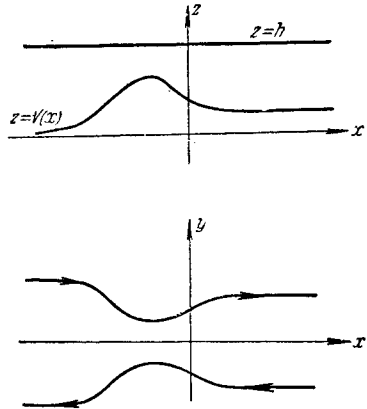


Рис. 63.

2) Прямая $z=h$ пересекает кривую $z=V(x)$, нигде ее не касаясь (рис. 64). Для тех значений x , для которых $V(x) > h$, нет фазовых траекторий, для остальных же значений x существуют фазовые траектории, причем они бывают двух родов: это либо ветви, уходящие в бесконечность (число которых не больше двух), либо это замкнутые ветви (число которых может быть любым). Ветви, уходящие в бесконечность, опять-таки соответствуют движениям, убегающим как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Замкнутые ветви соответствуют периодическим движениям.

Для близких значений h мы будем иметь ту же самую картину, причем около замкнутых кривых мы получим замкнутые же фазовые кривые, а около бесконечных ветвей — бесконечные ветви.

3) Прямая $z=h$ касается кривой $z=V(x)$. Тогда все фазовые кривые можно разбить на следующие классы:

а) *Изолированные точки*, вблизи которых (при данном h) нет ветвей фазовых кривых. Это — устойчивые состояния равновесия,

о которых мы уже говорили. Если мы будем менять h , то при увеличении h получим замкнутую кривую, охватывающую рассматриваемую изолированную точку, при уменьшении h вблизи изолированной

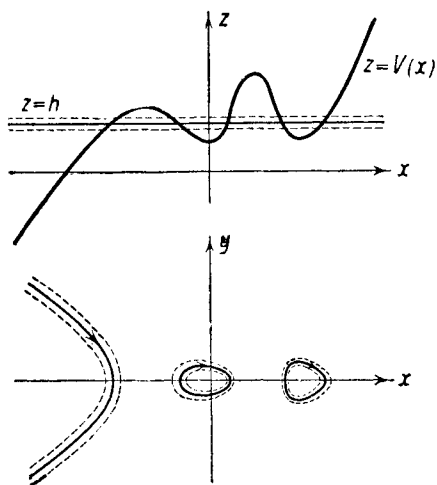


Рис. 64.

точки мы не получим действительных ветвей кривой.

б) *Изолированные конечные куски фазовых кривых.* Они могут быть двух родов: или это просто замкнутые кривые, соответствующие периодическим движениям, о которых у нас уже шла речь, или это фазовые кривые с самопересечением, принадлежащие к числу так называемых *сепаратрис*, т. е. к числу кривых, проходящих через особые точки. Эти точки самопересечения или особые точки типа седла, как мы уже знаем, соответствуют тем точкам на диаграмме x, z , где прямая $z = h$ касается максимумов кривой $z = V(x)$

(рис. 65). Те сепаратрисы, о которых сейчас идет речь, состоят из одного (в случае вырождения), а вообще говоря, из нескольких «звеньев».

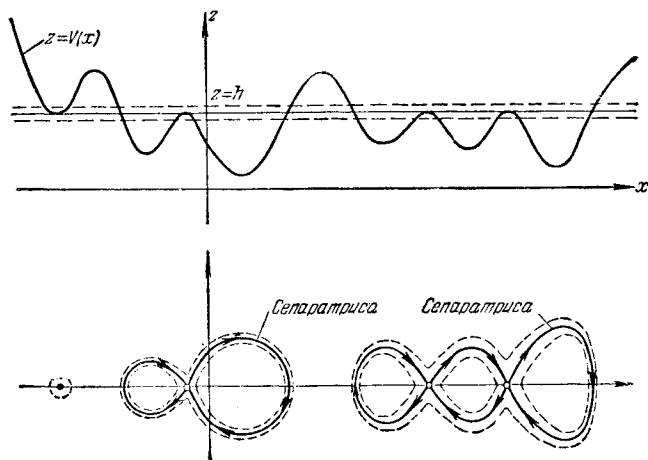


Рис. 65.

Каждое звено представляет собой отдельную фазовую траекторию (если оно граничное) или состоит из двух фазовых траекторий (если

оно не граничное)¹⁾. Движение по какой-нибудь из траекторий, о которых шла речь, является асимптотическим к состоянию равновесия. Такие движения называются *лимитационными* движениями. На один пример такого движения мы уже указывали при рассмотрении маятника, находящегося в верхнем положении равновесия. Рассматриваемые сейчас движения являются лимитационными как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Сепаратрисы — это, в известном смысле, исключительные интегральные кривые, так как им соответствуют точки

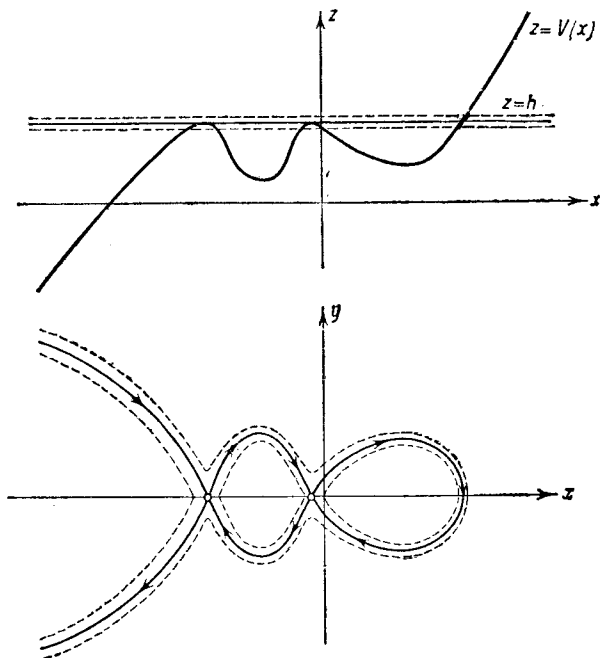


Рис. 66.

касания прямой $z = h$ с кривой $z = V(x)$ на плоскости баланса энергии. Знание их чрезвычайно важно для выяснения общей картины интегральных кривых на фазовой плоскости.

При изменении h характер соседних кривых будет существенно зависеть от того, будем ли мы увеличивать h или уменьшать. При увеличении h мы получим интегральную кривую, охватывающую всю исследуемую сепаратрису, всю «цепочку» лимитационных траекторий. При уменьшении мы получим замкнутые интегральные кривые внутри каждого звена (рис. 65). Отсюда понятна роль сепаратрис как

¹⁾ Особые точки являются также отдельными траекториями — они соответствуют состояниям равновесия.

«отделяющих» кривых, которые разделяют области, заполненные траекториями разных типов.

в) *Бесконечные куски фазовых кривых.* В этом случае возможно несколько типов кривых. Во-первых, это могут быть убегающие траектории того типа, который мы уже рассматривали в п. 2. Во-вторых, это может быть сепаратриса в виде бесконечной цепочки, простирающаяся в одну или в обе стороны. Существенно новыми здесь будут траектории, которые являются убегающими при $t \rightarrow +\infty$ и которые являются лимитационными при $t \rightarrow -\infty$, или наоборот (рис. 66). Такие траектории мы также назовем сепаратрисами, так как на них

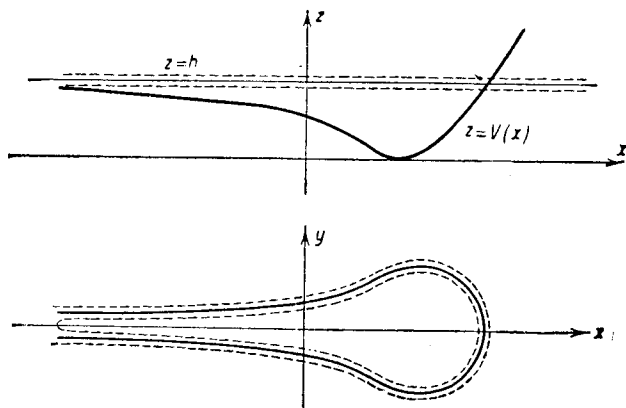


Рис. 67.

непрерывно имеются особые точки, которым соответствует касание прямой $z = h$ с кривой $z = V(x)$, и так как, что особенно существенно, характер соседних кривых существенно меняется в зависимости от того, будем ли мы увеличивать или уменьшать h .

Заметим, что к числу сепаратрис могут быть отнесены иногда и движения, которые являются убегающими как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Именно это может быть тогда, когда для рассматриваемого случая прямая $z = h$ является асимптотой кривой $z = V(x)$, так как в этом случае мы можем получить существенное изменение характера фазовой траектории при изменении h .

Подобный пример для наглядности представлен на рис. 67. При уменьшении h убегающая траектория превращается в периодическую.

Итак, резюмируя полученные результаты, дадим перечень возможных движений:

- 1) Состояния равновесия.
- 2) Периодические движения.
- 3) Дважды лимитационные движения (как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$).

4) Дважды убегающие движения (как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$).

5) Движения лимитационно-убегающие (при $t \rightarrow +\infty$ лимитационные, при $t \rightarrow -\infty$ убегающие, или наоборот). Можно показать [163] (об этом мы еще будем говорить), что для консервативных систем почти все движения либо периодические, либо дважды убегающие, т. е. если мы будем считать все начальные значения на фазовой плоскости равновероятными, то вероятность попасть на начальные условия, соответствующие движениям типа 1), 3), 5), равна нулю, — так «редко» они расположены. Однако фазовые траектории, соответствующие этим движениям, играют большую роль на фазовой плоскости: они являются сепаратрисами — кривыми, которыми отделяют друг от друга на фазовой плоскости траектории разных видов.

Прежде чем закончить этот параграф, нужно исследовать закон распределения особых точек по прямой $y=0$, на которой они в нашем случае только и могут быть расположены, и законы сосуществования особых точек и замкнутых фазовых траекторий. И первый и второй вопросы были решены Пуанкаре для общего случая неконсервативной системы, и мы дадим это решение в дальнейшем. Для рассматривае-

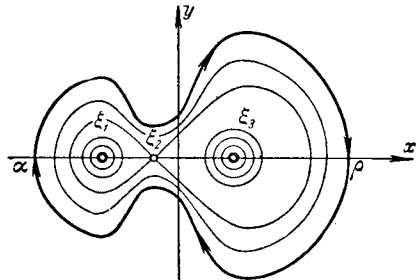
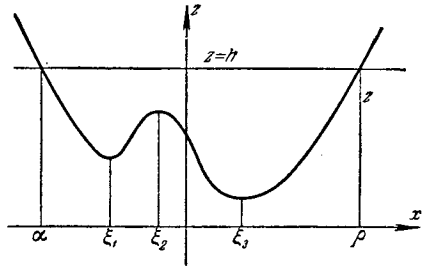


Рис. 68.

мого же частного случая ответ на эти вопросы получается из самых элементарных соображений. Ответим сперва на первый вопрос. Очевидно, что максимумы и минимумы кривой $z = V(x)$ чередуются между собой. Отсюда следует, что особые точки типа седла и типа центра также чередуются между собой на оси абсцисс фазовой плоскости.

Чтобы ответить на второй вопрос о сосуществовании замкнутых фазовых траекторий и особых точек, нужно будет также обратиться к плоскости баланса энергии (рис. 68).

Пусть у нас имеется на фазовой плоскости замкнутая кривая ap . Тогда на плоскости баланса энергии точкам a, p соответствуют точки, в которых прямая $z = h$ пересекает кривую $z = V(x)$. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = h - V(x)$. Для нашего случая $\Phi(\alpha) = 0$, $\Phi(\rho) = 0$ и $\Phi(x) > 0$ для $\alpha < x < \rho$. Поэтому на основании теоремы Ролля мы можем утверждать, что существует такое значение $x = \xi$ ($\alpha < \xi < \rho$), для которого $\Phi'(\xi) = 0$ или, что все равно, $V'(\xi) = 0$.

Таким образом, мы доказали, что внутри замкнутой фазовой траектории непременно имеется по крайней мере одна особая точка или, иначе говоря, что периодическое движение непременно совершается вокруг положения равновесия. Из геометрических соображений видно, что если эта особая точка единственная, то она соответствует минимуму потенциальной энергии и является особой точкой типа центра;

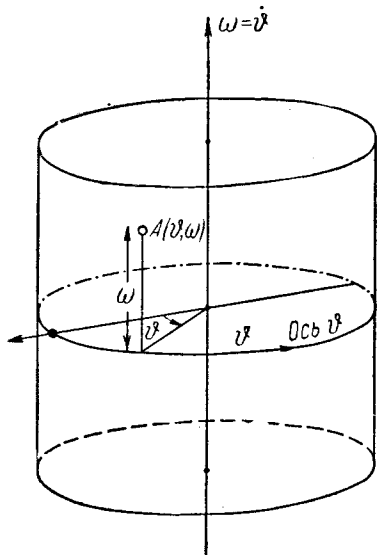


Рис. 69.

если же таких особых точек несколько, то центры и седла всегда будут чередоваться, причем число центров будет всегда на единицу больше числа седел. Мы можем сформулировать такую теорему: *внутри замкнутой фазовой кривой непременно имеется нечетное число особых точек, причем число центров на единицу больше числа седел.*

В заключение параграфа рассмотрим обычный маятник (с одной степенью свободы), пренебрегая силами трения и не ограничиваясь малыми углами отклонения от вертикали. Эта консервативная система несколько выходит за пределы только что изложенного, поскольку в качестве фазовой поверхности не может быть взята плоскость. В самом деле, положение маятника определяется *углом* (обозначим его через ϑ) и значения $\dot{\vartheta}$, отличающиеся на 2π , определяют одно и то же его положение. Поэтому, если бы мы взяли в качестве фазовой поверхности маятника обычную плоскость с декартовыми координатами ϑ , $\dot{\vartheta}$, то точки этой плоскости $(\vartheta + 2k\pi, \dot{\vartheta})$, где k — любое целое число, соответствовали бы тому же состоянию, что и точка $(\vartheta, \dot{\vartheta})$, т. е. было бы нарушено требование взаимно-однозначного и непрерывного соответствия между состояниями системы и точками ее фазовой поверхности. Это требование будет выполнено, если в качестве фазовой поверхности маятника мы возьмем не плоскость, а *цилиндр* (рис. 69).¹⁾ Цилиндричность фазовой поверхности маятника,

а именно, положение маятника определяется *углом* (обозначим его через ϑ) и значения $\dot{\vartheta}$, отличающиеся на 2π , определяют одно и то же его положение. Поэтому, если бы мы взяли в качестве фазовой поверхности маятника обычную плоскость с декартовыми координатами ϑ , $\dot{\vartheta}$, то точки этой плоскости $(\vartheta + 2k\pi, \dot{\vartheta})$, где k — любое целое число, соответствовали бы тому же состоянию, что и точка $(\vartheta, \dot{\vartheta})$, т. е. было бы нарушено требование взаимно-однозначного и непрерывного соответствия между состояниями системы и точками ее фазовой поверхности. Это требование будет выполнено, если в качестве фазовой поверхности маятника мы возьмем не плоскость, а *цилиндр* (рис. 69).¹⁾ Цилиндричность фазовой поверхности маятника,

¹⁾ Весьма удобно изображать фазовые траектории маятника и ему подобных систем не на цилиндре, а на развертке цилиндра на плоскость в виде полосы шириной 2π . В этом случае следует, однако, иметь в виду, что одна и та же линия разреза цилиндра изображается на развертке двумя (пограничными) прямыми; поэтому, пользуясь разверткой цилиндра как фазовой поверхностью, мы должны отождествлять точки этих прямых (точки с одинаковыми $\dot{\vartheta}$), т. е. считать их соответствующими одним и тем же состояниям системы.

очевидно, связана с наличием двух различных типов движений маятника: движений без проворота вокруг оси и движений с проворотами.

Уравнение маятника, как известно, может быть записано в виде

$$I \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + mgl \sin \vartheta = 0, \quad (2.17)$$

где I — момент инерции, l — расстояние от центра тяжести до точки подвеса, $P = mg$ — вес маятника (угол ϑ отсчитывается от вертикали, направленной вниз). Уравнение (2.17) можно привести к системе двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{mgl}{I} \sin \vartheta. \quad (2.18)$$

Для получения дифференциального уравнения интегральных кривых на фазовом цилиндре (или на его развертке) разделим второе из уравнений (2.18) на первое:

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = -\frac{mgl}{I} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\omega}. \quad (2.19)$$

Интегрируя это уравнение, получим интеграл энергии (или, иначе, уравнение семейства интегральных кривых уравнения (2.19)):

$$\frac{1}{2} I \omega^2 - mgl \cos \vartheta = h (= \text{const}). \quad (2.20)$$

Для построения интегральных кривых воспользуемся приемом, указанным в § 3. Построив на вспомогательной плоскости ϑ, z кривую

$$z = V(\vartheta) = -mgl \cos \vartheta \quad (2.21)$$

и расположив под ней развертку фазового цилиндра, нетрудно на последней построить семейство интегральных кривых, пользуясь тем, что согласно (2.20)

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{2}{I} V(h - V(\vartheta))}.$$

Такое построение дано на рис. 70. Особая точка $(0, 0)$ — центр (ей соответствует константа интегрирования $h = -mgl$). Она охватывается континуумом замкнутых фазовых траекторий, для которых

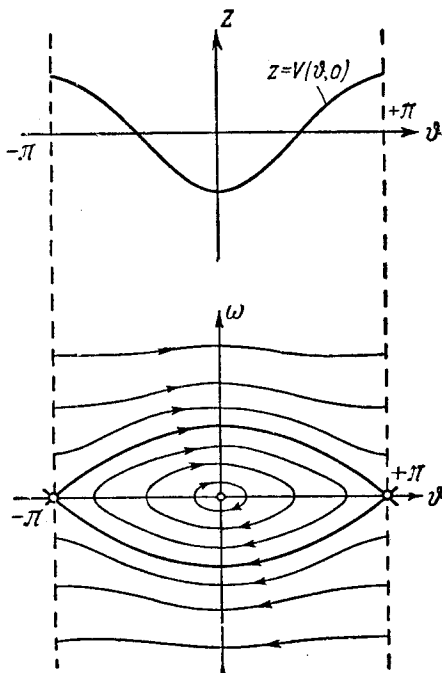


Рис. 70.

$-mgl < h < +mgl$. Эти фазовые траектории, очевидно, соответствуют периодическим колебаниям маятника около нижнего положения равновесия *без проворота* вокруг оси. При константе интегрирования $h = +mgl$ получается интегральная кривая, проходящая через седло ($\pm\pi, 0$), т. е. состоящая из седла и его сепаратрис (первому соответствует верхнее, неустойчивое положение равновесия, а последним — лимитационные движения маятника, при которых маят-

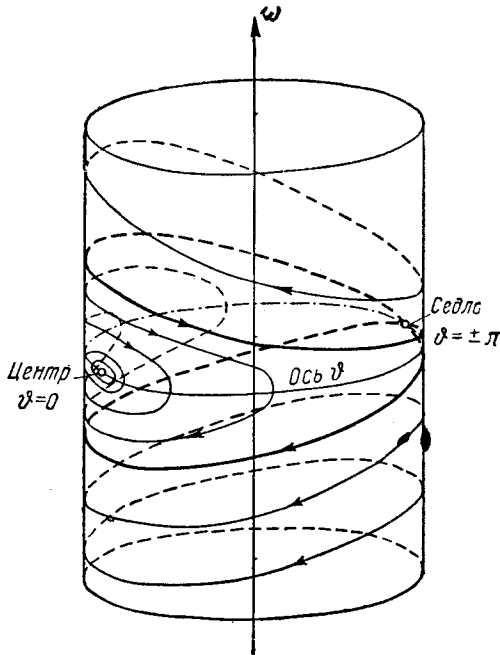


Рис. 71.

ник асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ приближается к верхнему положению равновесия). Для $h > +mgl$ получаем траектории, лежащие вне сепаратрис и охватывающие цилиндр. Так как для каждой такой траектории значения ω при $\vartheta \rightarrow +\pi$ и при $\vartheta \rightarrow -\pi$ совпадают, то мы можем утверждать, что эти траектории также замкнуты (они соответствуют периодическим вращательным движениям маятника). «Склеив» развертку цилиндра по линии разреза $\vartheta = \pm\pi$, мы получим фазовый портрет маятника — фазовый цилиндр, разбитый на фазовые траектории (рис. 71). Таким образом, все фазовые траектории консервативного маятника, кроме особых точек — центра и седла и сепаратрис седла, замкнутые, причем имеются два качественно отличных типа фазовых траекторий: охватывающих и не охватывающих фазовый цилиндр.

§ 5. Зависимость поведения простейшей консервативной системы от параметра

Мы уже говорили, что консервативная система представляет собой исключительную систему в том смысле, что для нее существует интеграл энергии. Иначе говоря, если мы произвольным образом, хотя бы и сколь угодно мало, будем менять вид уравнений движения, то эти уравнения, вообще говоря, перестанут удовлетворять условию консервативности. Мы, однако, сейчас будем рассматривать только такие изменения параметров, характеризующих нашу систему, при которых она остается консервативной. Для простоты предположим, что у нас есть только один переменный параметр и что от этого параметра зависит только потенциальная энергия системы.

Наша задача будет заключаться в исследовании того, как меняется вид фазовой плоскости при изменении параметра. Мы не будем затрагивать важный вопрос о том, как будет вести себя какое-нибудь *определенное* движение, имеющее определенные начальные условия, при *достаточно медленном изменении параметра*¹⁾.

Основными элементами, определяющими качественную картину интегральных кривых для консервативных систем, являются особые точки и сепаратрисы. Если мы знаем вид сепаратрис (особые точки типа седла суть точки самопересечения сепаратрис) и относительное расположение сепаратрис и состояний равновесия типа центра, то мы можем воспроизвести в общих чертах всю картину интегральных кривых.

При изменении параметра интегральные кривые будут меняться. Однако, если, как мы предположим, потенциальная энергия является аналитической функцией параметра, то эти изменения будут совершаться непрерывно. Общий вид интегральных кривых будет претерпевать, вообще говоря, только количественные изменения, и лишь при некоторых особых, так называемых «бифуркационных» значениях параметра мы будем иметь качественные изменения характера интегральных кривых. Как мы уже сказали, в случае консервативной системы основными элементами, определяющими качественную картину интегральных кривых на фазовой плоскости, являются особые точки и сепаратрисы. Поэтому бифуркационными значениями параметра в этом случае служат те значения параметра, при которых происходит изменение числа или характера этих основных элементов.

¹⁾ Ответ на этот последний вопрос особенно труден как раз для консервативных систем; в этом случае этим вопросом занимается так называемая теория адиабатических инвариантов.

Более точно и более общо можно дать такое определение, не связанное с консервативностью системы: значение параметра $\lambda = \lambda_0$ мы назовем обыкновенным, если существует такое конечное ε ($\varepsilon > 0$), что для всех λ , удовлетворяющих неравенству $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, мы

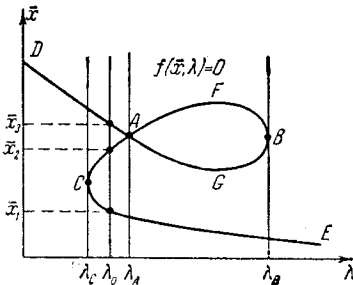


Рис. 72.

имеем одну и ту же топологическую структуру разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые. Другие значения параметров, для которых это условие не соблюдается, мы назовем *бифуркационными*.

Мы изложим сравнительно подробно развитую Пуанкаре [182, 183] теорию зависимости состояний равновесия от параметра, так как она нам понадобится при исследовании автоколебательных систем; другие бифуркационные случаи, связанные с зависимостью сепаратрис от параметра, мы лишь иллюстрируем примерами.

Предположим, что потенциальная энергия системы (2.1), а, значит, вместе с тем и сила, является функцией параметра λ , который может принимать различные значения¹⁾. Положения равновесия ($x = \bar{x}$) характеризуются тем, что для них сила равна нулю, т. е.

$$f(\bar{x}, \lambda) = 0. \quad (2.22)$$

Решая это уравнение относительно \bar{x} , можно найти положения равновесия, которые имеет рассматриваемая консервативная система при том или ином значении параметра λ , можно проследить, как меняются положения равновесия при изменении λ .

Зависимость положений равновесия от параметра может быть наглядно проиллюстрирована так называемой *бифуркационной диаграммой* — кривой $f(\bar{x}, \lambda) = 0$, построенной на плоскости λ, \bar{x} . Пусть, например, эта кривая имеет вид, изображенный на рис. 72. Прямая $\lambda = \lambda_0$, параллельная оси ординат, пересекает кривую $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ в трех точках; это, очевидно, означает, что при данном значении параметра $\lambda = \lambda_0$ система имеет три положения равновесия $\bar{x} = \bar{x}_1$, $\bar{x} = \bar{x}_2$ и $\bar{x} = \bar{x}_3$. При уменьшении λ положения равновесия $\bar{x} = \bar{x}_1$ и $\bar{x} = \bar{x}_2$ сближаются, при $\lambda = \lambda_C$ сливаются и затем пропадают (при $\lambda < \lambda_C$ существует только одно положение равновесия: $\bar{x} = \bar{x}_3$). Значение параметра $\lambda = \lambda_C$ является, таким образом, бифуркационным значением. Также бифуркационными будут значения $\lambda = \lambda_A$ и $\lambda = \lambda_B$, при которых также происходит изменение числа равновесных состояний системы.

¹⁾ Мы предполагаем, что $f(x, \lambda)$ — аналитическая функция x на всей прямой x и аналитическая функция λ для рассматриваемой области значений λ .

Дифференцируя уравнение (2.22) по λ , имеем:

$$\frac{df}{dx} \cdot \frac{d\bar{x}}{d\lambda} + \frac{df}{d\lambda} = 0$$

или

$$\frac{d\bar{x}}{d\lambda} = - \frac{f'_\lambda(\bar{x}, \lambda)}{f'_x(\bar{x}, \lambda)}. \quad (2.23)$$

Отсюда следует, что в окрестности точки кривой $f(\bar{x}, \lambda) = 0$, для которой $f'_x(\bar{x}, \lambda) \neq 0$, \bar{x} является непрерывно дифференцируемой функцией λ . Поэтому, если для некоторого значения параметра $\lambda = \lambda_0$ система уравнений

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= 0, \\ f'_x(x, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

не имеет действительных решений для x , мы можем утверждать, что в достаточно малой окрестности этого значения параметра $\lambda = \lambda_0$ абсциссы \bar{x} *всех* положений равновесия являются непрерывно дифференцируемыми функциями параметра λ и их число не может изменяться. Тем самым такое значение $\lambda = \lambda_0$ не является бифуркационным (в том смысле, что при переходе λ через $\lambda = \lambda_0$ не происходит изменения числа состояний равновесия).

Пусть теперь в некоторой точке (λ, \bar{x}) кривой $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ также и $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$. Если $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$, а $f'_\lambda(\bar{x}, \lambda) \neq 0$, то кривая в этой точке имеет вертикальную касательную, и когда λ проходит (в соответствующем направлении) через значение, соответствующее этой точке, два действительных корня для \bar{x} сливаются, а затем становятся комплексными¹⁾. Это — точка бифуркации, в которой происходит изменение числа состояний равновесия (точки B и C на рис. 72). Если же в точке (λ, \bar{x}) кривой $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$ и $f'_\lambda(\bar{x}, \lambda) = 0$, то мы имеем дело с особой точкой (в смысле дифференциальной геометрии) этой кривой. Эта точка (точка A на рис. 72) будет также точкой бифуркации, так как при значении λ , соответствующем этой точке, число равновесных состояний всегда иное, чем при соседних значениях этого параметра.

Таким образом, точки кривой $f(\bar{x}, \lambda) = 0$, для которых $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$, являются точками бифуркации, а соответствующие значения параметра λ — бифуркационными значениями. Кроме этих значений бифуркационными значениями параметра λ будут те значения, при которых кривая $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ уходит в бесконечность (это будет иметь место, если эта кривая имеет бесконечные ветви с вертикальными асимптотами).

¹⁾ Мы исключаем из рассмотрения случай, когда кривая $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ в этой точке имеет точку перегиба. Для этого достаточно, например, предположить, что в этой точке $f''_x(\bar{x}, \lambda) \neq 0$.

Каждому положению равновесия $x = \bar{x}$ соответствует определенное состояние равновесия ($x = \bar{x}$, $\dot{x} = 0$) — определенная особая точка на фазовой плоскости. Характер особых точек или, что все равно, устойчивость состояний равновесия определяется, как мы видели, знаком производной $f'_x(\bar{x}, \lambda) = -V''_{xx}(\bar{x}, \lambda)$. Именно, при

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) < 0 \quad (2.25)$$

(потенциальная энергия минимальна) состояние равновесия устойчиво (типа центра), а при

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) > 0 \quad (2.26)$$

(потенциальная энергия максимальна) состояние равновесия является седлом и неустойчиво.

Нетрудно дать, следуя Пуанкаре, простой рецепт для быстрого определения устойчивости состояний равновесия при помощи бифуркационной диаграммы. Отметим (заштрихуем) на плоскости λ , \bar{x} области $f(\bar{x}, \lambda) > 0$

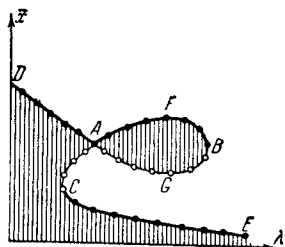


Рис. 73.

(кривая $f(\bar{x}, \lambda) = 0$, очевидно, будет их границей). Если данная точка (λ, \bar{x}) лежит *над* заштрихованной областью, то она соответствует устойчивому состоянию равновесия¹⁾. Действительно, вблизи этой точки функция $f(x, \lambda)$ убывает с увеличением \bar{x} (λ фиксировано) от положительных значений внутри заштрихованной области до нуля на кривой $f(\bar{x}, \lambda) = 0$. Следовательно, $f'_x(\bar{x}, \lambda) < 0$, что соответ-

ствует особой точке типа центра и *устойчивому* состоянию равновесия. Если же точка кривой $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ лежит *под* заштрихованной областью, то она соответствует *неустойчивому* состоянию равновесия, так как для нее в силу аналогичных соображений имеет место неравенство $f'_x(\bar{x}, \lambda) > 0$. Следуя этому рецепту, сразу находим, что, например, на рис. 73 точки участков DA , AFB , CE (начерченных жирной линией с точками) соответствуют устойчивым, а точки участков AGB и AC (начерченных тонкой линией с кружками) — неустойчивым состояниям равновесия.

Обратим теперь внимание на следующее. Если мы будем двигаться на бифуркационной диаграмме вдоль кривой $f(\bar{x}, \lambda) = 0$, то характер состояния равновесия, т. е. его устойчивость или неустойчивость, будет сохраняться до тех пор, пока мы не дойдем до точки бифуркации. Нетрудно видеть, что если мы будем продолжать двигаться дальше по кривой, следуя направлению касательной (т. е. следя за тем, чтобы касательная вращалась непрерывно), то в точке бифуркации устойчивое состояние равновесия сменится неустойчивым

¹⁾ Мы предполагаем обычное расположение осей координат: ось \bar{x} направлена вверх, а ось λ — вправо.

и наоборот. На рис. 73 такая смена устойчивости происходит в точках A , B и C .

Итак, мы видим, что при изменении параметра λ состояния равновесия в конечной части фазовой плоскости могут исчезать и появляться только парами, причем (и это *отличительная особенность консервативных систем*) состояние равновесия может изменить свою устойчивость, например из устойчивого превратиться в неустойчивое, только предварительно слившись с другим состоянием равновесия.

В смысле смены устойчивости состояния равновесия консервативных систем образуют *замкнутую* систему, поведение которой при изменении параметра можно изучать отдельно от поведения сепаратрис.

Те значения параметра, при которых состояния равновесия сливаются или уходят в бесконечность, конечно, принадлежат к бифуркационным значениям параметра, но, вообще говоря, ими не исчерпываются все бифуркационные значения, так как могут быть существенные изменения в характере сепаратрис при неизменном числе и характере состояний равновесия.

Относительно бифуркационных значений этого второго типа мы не будем высказывать никаких общих соображений, а познакомимся с ними на отдельных конкретных примерах, которые мы сейчас рассмотрим. На этих же примерах мы проиллюстрируем все сказанное выше относительно бифуркационных значений, в которых происходит изменение в характере состояний равновесия.

1. Движение тяжелой точки по окружности, вращающейся вокруг вертикальной оси. Рассмотрим движение тяжелой точки массы m по окружности радиуса a , когда эта окружность вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью Ω (рис. 74). Примером такой консервативной системы может служить маятник, колеблющийся на вращающейся платформе.

Положение точки (массы m) будем определять углом ϑ в системе координат, связанной с вращающейся окружностью. Для написания уравнения движения тяжелой точки в такой вращающейся, неинерциальной системе координат в виде второго закона Ньютона необходимо, как известно, ввести силы инерции, в дан-

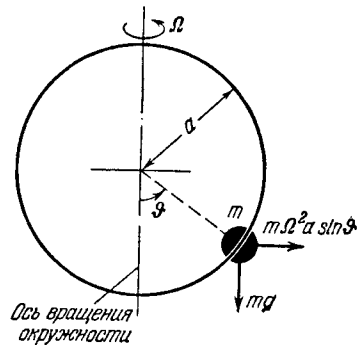


Рис. 74.

ном случае центробежную силу. Момент силы тяжести относительно центра окружности равен $-mga \sin \vartheta$; центробежная сила равна $m\Omega^2 a \sin \vartheta$, а ее момент $+m\Omega^2 a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$. Поэтому, пренебрегая

силами трения, получим следующее уравнение движения рассматриваемой системы:

$$I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = m\Omega^2 a^3 \sin \vartheta \cos \vartheta - mga \sin \vartheta, \quad (2.27)$$

где $I = ma^2$ — момент инерции тяжелой точки (относительно центра окружности). Если ввести безразмерный параметр

$$\lambda = \frac{g}{\Omega^2 a}$$

и новое, безразмерное время

$$t_{\text{нов}} = \Omega t$$

(ниже дифференцирование по новому времени обозначается точкой сверху), то уравнение (2.27) приведет к виду, содержащему один параметр:

$$\dot{\vartheta} = \omega, \quad \dot{\omega} = (\cos \vartheta - \lambda) \sin \vartheta. \quad (2.28)$$

Для того чтобы на примере консервативной системы (2.28) проиллюстрировать качественное изменение характера сепаратрис при изменении параметра и без изменения числа особых точек, мы будем считать, что параметр λ может принимать любое значение $-\infty < \lambda < +\infty$, несмотря на то, что для рассматриваемой физической системы $\lambda > 0$, а значения $\lambda \leq 0$ не имеют физического смысла¹⁾.

Поскольку положение тяжелой точки однозначно определяется углом ϑ , фазовой поверхностью рассматриваемой системы опять будет *цилиндр* (мы будем изображать фазовые траектории на развертке этого цилиндра). Уравнение интегральных кривых получим, разделив одно из уравнений (2.28) на другое:

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = \frac{(\cos \vartheta - \lambda) \sin \vartheta}{\omega}. \quad (2.29)$$

Интеграл энергии запишется так:

$$\omega^2 - (\sin^2 \vartheta + 2\lambda \cos \vartheta) = h \quad (2.30)$$

(из (2.30) сразу видно, что интегральные кривые симметричны относительно осей ϑ и ω).

Положения равновесия определяются уравнением

$$f(\vartheta, \lambda) \equiv (\cos \vartheta - \lambda) \sin \vartheta = 0. \quad (2.31)$$

Очевидно, система имеет положения равновесия $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pm \pi$,

¹⁾ Заметим, что значение $\lambda = 1$ получается при $\Omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$, т. е. при совпадении угловой скорости вращения окружности с круговой частотой малых колебаний массы m около нижнего положения равновесия (при $\Omega = 0$).

существующие при любом λ . Кроме того, при $|\lambda| < 1$ существуют еще два положения равновесия $\vartheta = +\vartheta_0$ и $\vartheta = -\vartheta_0$, где $\vartheta_0 = \arccos \cos \lambda$. На рис. 75 изображена бифуркационная диаграмма для положений равновесия (штриховка и обозначения на ней имеют тот же смысл, что и в предыдущем примере). Таким образом, при $\lambda > +1$ система имеет две особые точки: центр ($\vartheta = 0, \omega = 0$) и седло ($\vartheta = \pm\pi, \omega = 0$); при $-1 < \lambda < +1$ — четыре особые точки: центры ($\vartheta = \pm\vartheta_0, \omega = 0$) и седла ($\vartheta = 0, \omega = 0$) и ($\vartheta = \pm\pi, \omega = 0$); наконец, при $\lambda < -1$ — снова две особые точки: центр ($\vartheta = \pm\pi, \omega = 0$) и седло ($\vartheta = 0, \omega = 0$).

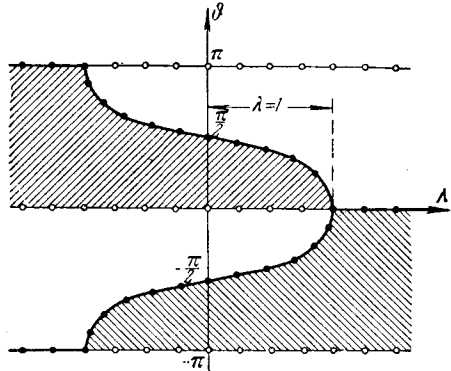


Рис. 75.

Для определения сепаратрис воспользуемся тем обстоятельством, что каждая сепаратриса проходит через соответствующую особую

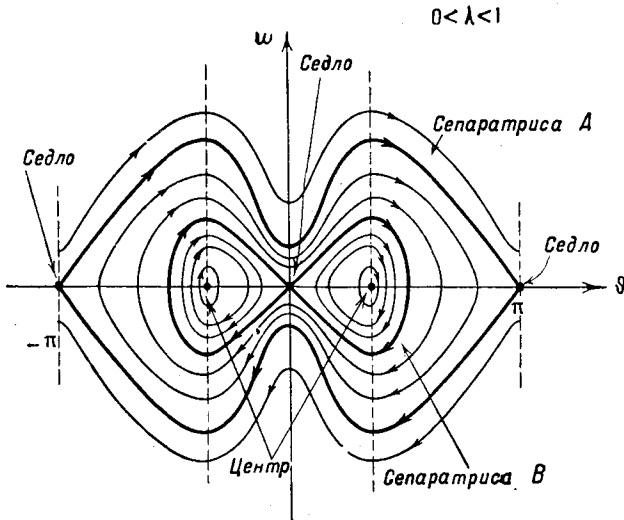


Рис. 76.

точку типа седла, в которой константа интеграла энергии h легко может быть вычислена. Уравнение одной из них, проходящей через седло

($\vartheta = \pm \pi, \omega = 0$) (эта точка является седлом при $\lambda > -1$), имеет вид

$$\omega^2 = \sin^2 \vartheta + 2\lambda (\cos \vartheta + 1). \quad (A)$$

Уравнением второй, проходящей через точку $(0, 0)$, которая является седлом при $\lambda < 1$, будет:

$$\omega^2 = \sin^2 \vartheta + 2\lambda (\cos \vartheta - 1). \quad (B)$$

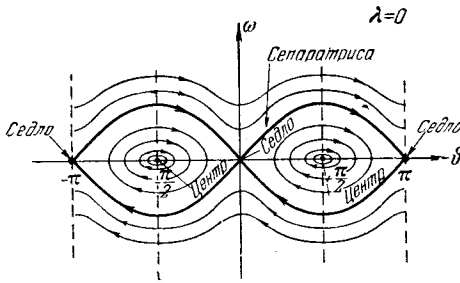


Рис. 77.

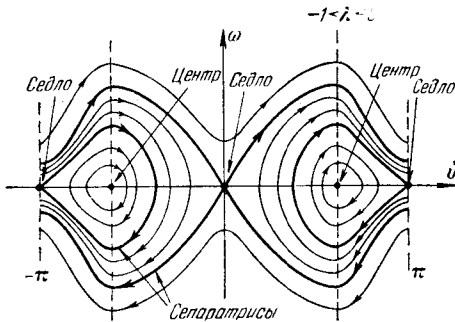


Рис. 78.

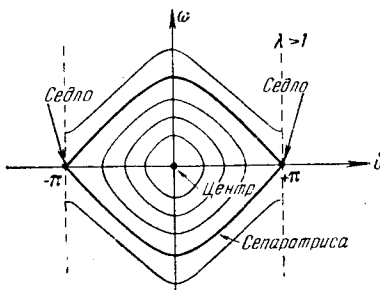


Рис. 79.

Обе эти сепаратрисы, имеющие вид «восьмерок», изображены на рис. 76 для случая $0 < \lambda < 1$. При $\lambda = 0$ обе сепаратрисы сливаются, и получается картина, изображенная на рис. 77. При $-1 < \lambda < 0$ получается та же картина, что и при $0 < \lambda < +1$, но сдвинутая на π вдоль оси ϑ (рис. 78). В случае $0 < \lambda < 1$ (рис. 76) внутри наружной сепаратрисы (сепаратрисы A) имеются три области периодических движений, две односвязные (замкнутые фазовые траектории охватывают один из центров) и одна двухсвязная (замкнутые фазовые траектории охватывают оба центра и седло $\vartheta = 0, \omega = 0$ с сепаратрисой B). Фазовые траектории, расположенные вне наружной сепаратрисы, всегда замкнутые и охватывают цилиндр (это имеет место при любых λ); они соответствуют, очевидно, периодическим движениям тяжелой точки с обеганием всей окружности. Так как при $\lambda = 0$ сепаратрисы сливаются, то при этом значении λ двухсвязной области, о которой только что шла речь, не существует.

Качественная топологическая картина интегральных кривых меняется, и следовательно, $\lambda = 0$ является бифуркационным значением. Точно

так же при $|\lambda| > 1$ получается новая картина интегральных кривых (рис. 79 и 80), следовательно, значения $\lambda = +1$ и $\lambda = -1$ являются также бифуркационными значениями параметра λ .

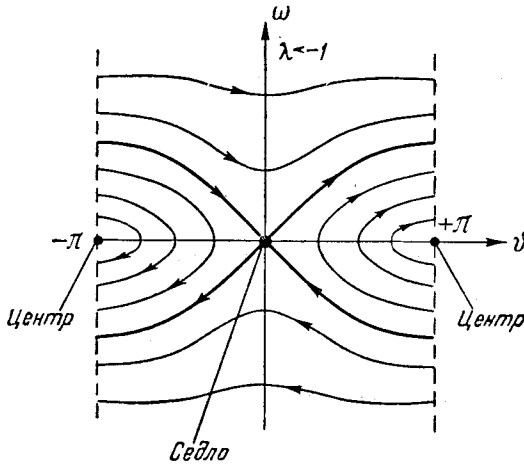


Рис. 80.

2. Движение тяжелой точки по параболе, вращающейся вокруг вертикальной оси. В качестве второго примера рассмотрим следующую задачу. Положим, что тяжелая точка массы m может свободно двигаться по параболе, определяемой уравнением $x^2 = 2pz$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси z (рис. 81). Моделью для этой задачи может служить известная демонстрационная модель — тяжелый шарик в чашке, имеющей форму параболоида вращения. Для составления уравнений движения точки мы могли бы поступить так же, как в предыдущей задаче, именно ввести силы инерции (т. е. снова центробежную силу) и написать уравнения, выражающие второй закон Ньютона для движений в плоскости x, z . Мы поступим, однако, несколько иначе, чтобы на частном примере напомнить читателям уравнения Лагранжа второго рода, которые нам понадобятся в скором времени.

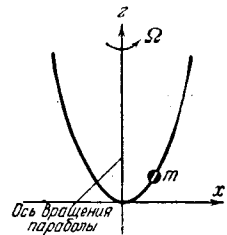


Рис. 81.

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (2.32)$$

где L — лагранжева функция, которая для обычных случаев механики представляет собой разность между кинетической и потенци-

альной энергиями, т. е.

$$L = T - V. \quad (2.33)$$

Потенциальная энергия системы — это энергия точки m в поле силы тяжести, т. е.

$$V = mgz. \quad (2.34)$$

Кинетическая энергия составляется из энергии вращения тела вокруг вертикальной оси и энергии движения в плоскости x, z (так как направления этих движений перпендикулярны друг к другу). Следовательно,

$$T = \frac{m\Omega^2 x^2}{2} + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2). \quad (2.35)$$

Заменяя \dot{z} через $\frac{x\dot{x}}{p}$ (из уравнения параболы) и составляя лагранжеву функцию (2.33), получим:

$$L = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right) \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \lambda x^2, \quad (2.36)$$

где $\lambda = \frac{g}{p} - \Omega^2$, и уравнение Лагранжа напишется так:

$$m \left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right) \ddot{x} + m \frac{\dot{x}^2}{p^2} x + m \lambda x = 0$$

или

$$\ddot{x} = - \frac{\left(\lambda + \frac{\dot{x}^2}{p^2} \right) x}{\left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right)}.$$

Полагая $\dot{x} = y$, имеем:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = - \frac{\left(\lambda + \frac{y^2}{p^2} \right) x}{\left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right)},$$

и, деля одно на другое:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\lambda + \frac{y^2}{p^2} \right) x}{\left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right) y}.$$

Первый интеграл уравнения (2.32), так называемый интеграл энергии, имеет вид: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \text{const.}$ (В справедливости этого легко убедиться непосредственной подстановкой.) Как видно из выражений для T и V , интеграл энергии имеет следующий вид:

$$\frac{m}{2} \left[\left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right) y^2 + \lambda x^2 \right] = \text{const.}$$

Уравнение $f(x, \lambda) = 0$ для рассматриваемого случая напишется так: $m \lambda x = 0$; следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x} = m \lambda$ и, значит, $\lambda = 0$ есть бифуркационное

значение параметра. Для разных значений λ получаются следующие типы движений и состояний равновесия:

1) $\lambda > 0$ ($\Omega^2 < \frac{g}{p}$) — одно устойчивое состояние равновесия типа центра $x = y = 0$. Вид интегральных кривых на фазовой плоскости (вложенные одна в другую замкнутые кривые) изображен на рис. 82. В этом случае точка будет совершать колебания вокруг состояния равновесия $x = 0, y = 0$.

2) $\lambda = 0$ ($\Omega^2 = \frac{g}{p}$) — бесконечное множество состояний равновесия, соответствующих прямой $y = 0$. Вид интегральных кривых на фазовой плоскости изображен на рис. 83. Точка либо будет по-

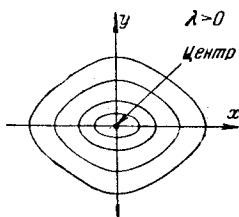


Рис. 82.

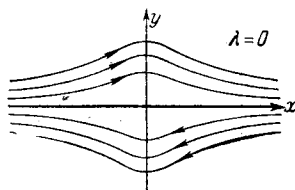


Рис. 83.

коиться в любом месте параболы, либо будет монотонно двигаться в ту сторону, в которую ей будет сообщена начальная скорость; при t , стремящемся к бесконечности, скорость стремится к нулю; скорость получается максимальная на вершине параболы.

3) $\lambda < 0$ ($\Omega^2 > \frac{g}{p}$) — одно неустойчивое состояние равновесия $x = 0, y = 0$ типа седла; из интеграла энергии сразу видно, что прямые $y = \pm \sqrt{-\lambda p}$ удовлетворяют уравнению движения и являются поэтому интегральными кривыми. Эти интегральные «кривые» соответствуют

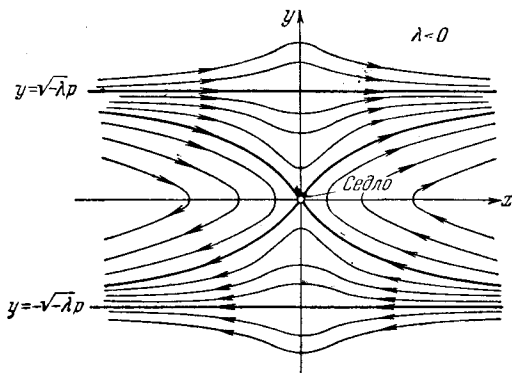


Рис. 84.

таким движениям точки по вращающейся параболе, при которых проекция скорости точки на ось x остается постоянной. Общий вид интегральных кривых для этого случая изображен на рис. 84. Если начальная скорость достаточно велика (больше чем $\sqrt{-\lambda p}$),

то характер движения такой же, как в случае $\lambda = 0$; при меньших начальных скоростях точка либо монотонно движется в одну сторону, имея минимальное значение скорости на вершине, либо, не достигая вершины, поворачивает обратно; эти два последних типа движения разделяются двумя интегральными кривыми, проходящими через особую точку, причем по одной из них представляющая точка может двигаться к состоянию равновесия, асимптотически приближаясь к нему.

3. Движение проводника, обтекаемого током. Рассмотрим, наконец, последний пример: бесконечный прямолинейный проводник, по которому течет электрический ток силой I , притягивает провод AB длины l и массы m , по которому течет ток i ; провод AB , кроме того, притягивается пружиной C (рис. 85). Возьмем за начало отсчета на оси x то положение A_0B_0 провода AB , при котором пружина не деформирована, и обозначим через a координату провода с током I . Будем предполагать, что проводники всегда параллельны друг другу и что ток с концов провода AB отводится подводными проводниками, перпендикулярными к току I . Тогда силу взаимодействия проводов можно принять равной

$$f_1 = \frac{2I \cdot il}{d},$$

где $d = a - x$ (здесь все величины выражены в единицах системы CGSM). Принимая силу действия пружины равной kx ,

где k — коэффициент упругости пружины, получим, что вся сила, действующая на провод AB , напишется так:

$$f(x, \lambda) = -kx + \frac{2Il}{a-x} = k \left(\frac{\lambda}{a-x} - x \right), \quad (2.37)$$

где $\lambda = \frac{2Il}{k}$. Уравнение, связывающее параметр λ и координату положения равновесия \bar{x} , имеет вид

$$f(x, \lambda) \equiv k \left(\frac{\lambda}{a-x} - x \right) = 0$$

или

$$x^2 - ax + \lambda = 0.$$

Бифуркационная диаграмма изображена на рис. 86. Уравнение $f(x, \lambda) = 0$

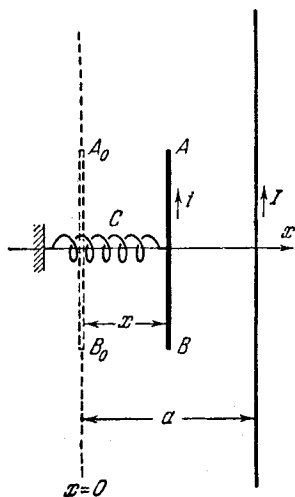


Рис. 85.

имеет кратный корень при $\lambda = \frac{a^2}{4}$. Это значит, что при $x = \frac{a}{2}$ и $\lambda = \frac{a^2}{4}$ обращается в нуль не только сама функция $f(x, \lambda)$, но и ее произ-

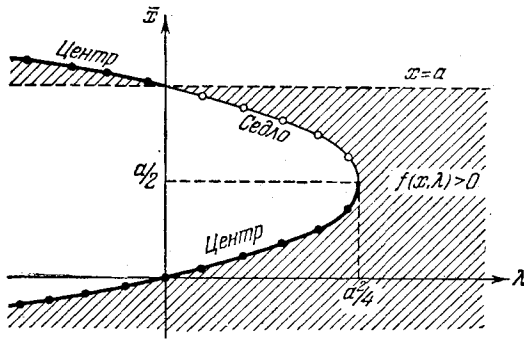


Рис. 86.

водная $f'_x(x, \lambda)$. Следовательно, $\lambda = \frac{a^2}{4}$ есть бифуркационное значение параметра. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m} \left(x - \frac{\lambda}{a-x} \right) = \frac{k}{m} \left\{ \frac{x^2 - ax + \lambda}{a-x} \right\},$$

откуда получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{m} \frac{x^2 - ax + \lambda}{(a-x)y}. \quad (2.38)$$

Для рассматриваемой системы помимо особых точек существует «особая» прямая $x = a$, на которой сила $f(x, \lambda)$ обращается в бесконечность¹⁾. Интеграл энергии имеет вид

$$\frac{my^2}{2} + \frac{1}{2}kx^2 + k\lambda \ln |a-x| = C. \quad (2.39)$$

1) Прежде всего рассмотрим случай $\lambda < \frac{a^2}{4}$ (рис. 87). Особых точек в этом случае две, причем одна из особых точек есть центр, именно та, для которой $x = \frac{a}{2} - b$, где $b = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda}$; другая особая точка — седло; для нее $x = \frac{a}{2} + b$; конечно, и для той и для другой

¹⁾ Из рассмотрения, очевидно, следует исключить как прямую $x = a$, так и небольшую ее окрестность, так как они соответствуют состояниям системы, в которых провод AB находится в месте, занимаемом проводником с током I , и которые, следовательно, не реализуемы в физической системе.

$y=0$. Касательные к интегральным кривым вертикальны на оси $y=0$ (и на прямой $x=a$, однако этот случай мы исключили из рассмотрения) и горизонтальны на вертикальных прямых, проходящих через обе особые точки. Особая прямая $x=a$ есть интегральная

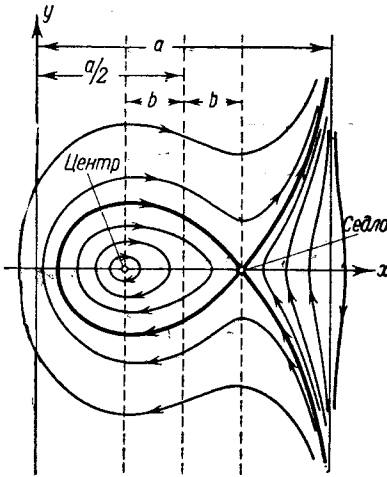


Рис. 87.

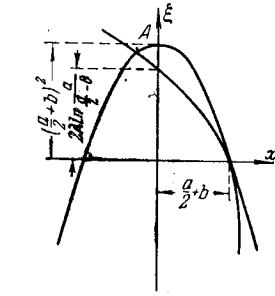


Рис. 88.

кривая и вместе с тем асимптота остальных интегральных кривых. Уравнение сепаратрисы получим, подставив в интеграл энергии $y=0$ и $x = \frac{a}{2} + b$ (т. е. условие, что сепаратриса проходит через седло) и определяя отсюда константу энергии C ; имеем:

$$C_0 = \frac{k}{2} \left(\frac{a}{2} + b \right)^2 + k\lambda \ln \left(\frac{a}{2} - b \right),$$

и следовательно, уравнение сепаратрисы имеет вид

$$\frac{my^2}{2} + \frac{k}{2} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} - b \right)^2 \right] + k\lambda \ln \frac{a-x}{\frac{a}{2}-b} = 0.$$

Второй корень x этого уравнения при $y=0$; т. е. координату точки пересечения сепаратрисы с осью x , можно найти при помощи графического построения, приведенного на рис. 88. Для этого строим две кривые:

$$\xi = \left(\frac{a}{2} + b \right)^2 - x^2 \quad \text{и} \quad \xi = 2\lambda \ln \frac{a-x}{\frac{a}{2}-b}$$

или $x = a - \left(\frac{a}{2} - b \right) e^{\frac{\xi}{2\lambda}}$, и находим вторую точку пересечения A этих кривых, кроме точки $x = \frac{a}{2} + b$; $y=0$. Глядя на фазовый

портрет рассматриваемой системы (рис. 87), сразу можно вывести следующие заключения: отрезок провода AB будет совершать колебания, если начальные условия таковы, что представляющая точка в начальный момент находится внутри петли сепаратрисы. В частности, при начальной скорости, равной нулю, отрезок провода AB будет колебаться, если его отклонение от положения равновесия будет не слишком велико.

2) Рассмотрим теперь второй случай, $\lambda > \frac{a^2}{4}$. В таком случае уравнение $f(x, \lambda) = 0$ не имеет действительных корней, и система не имеет особых точек (состояний равновесия). Ход интегральных кривых для этого случая изображен на рис. 89. При любых начальных условиях в

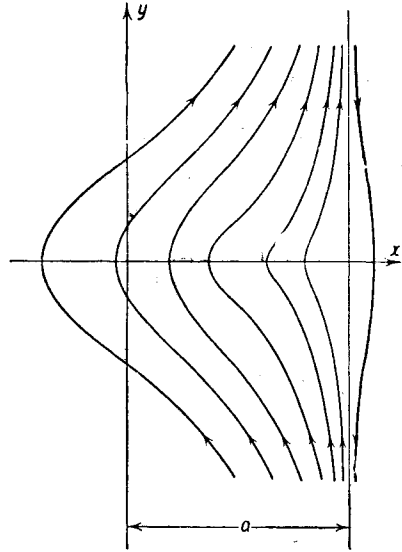


Рис. 89.

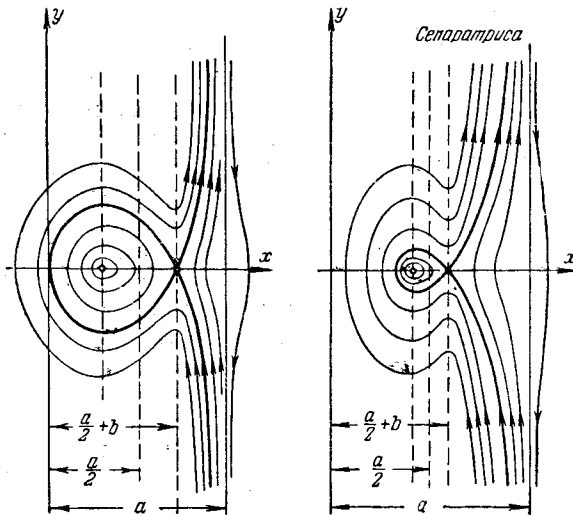


Рис. 90.

конце концов провод AB приближается с беспредельно возрастающей скоростью по направлению к прямой $x=a$, т. е. к бесконечному

проводу (при $x \geq a$ задача, как мы уже указывали, не имеет смысла). Колебательные движения в этом случае, очевидно, невозможны.

3) Третий, переходный (между первым и вторым) случай соответствует значению $\lambda = \frac{a^2}{4}$. Легко видеть, что в первом случае при возрастании λ обе особые точки сближаются и при $\lambda = \frac{a^2}{4}$ сливаются. Этот процесс сближения особых точек изображен на рис. 90. Оче-

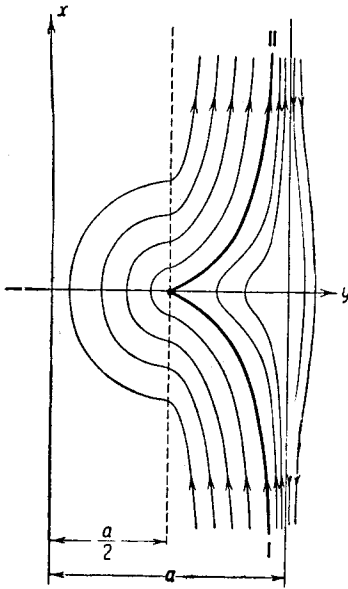


Рис. 91.

видно, что для $\lambda = \frac{a^2}{4}$ получается только одна особая точка (рис. 91) типа, соответствующего случаю, когда потенциальная энергия системы имеет точку перегиба. Таким образом, этот тип особой точки можно рассматривать как результат слияния центра с седлом. Такая особая точка соответствует неустойчивому состоянию равновесия. В этом (третьем) случае периодические движения также невозможны. При всех начальных условиях провод движется с беспредельно возрастающей скоростью по направлению к бесконечному проводнику. Усы I и II, проходящие через особую точку, разграничивают два типа движений, отличающихся друг от друга тем, что при движениях первого типа (в начальный момент система находится в области, ограниченной прямой $x = a$ и усами I и II) про-

вод AB (рис. 85) движется к прямой $x = a$, не проходя через положение равновесия; при втором типе движений (в начальный момент система находится вне области, ограниченной усами I и II и прямой $x = a$) провод AB всегда проходит через положение равновесия.

4) Рассмотрим, наконец, последний случай, $\lambda < 0$ (изменение знака может быть достигнуто переменной направления одного из токов i или J). В этом случае всегда существуют два действительных корня уравнения $f(x, \lambda) = 0$. Из этих двух корней $\bar{x}_{1,2} = \frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda}$ один всегда отрицателен, а другой больше a . Оба состояния равновесия ($\bar{x}_1 < 0$, $\bar{x}_2 > a$) являются центрами и устойчивы; остальные интегральные кривые замкнуты и охватывают или первое или второе состояние равновесия, причем линией, разделяющей эти два типа

замкнутых кривых, является «особая» линия $x = a$ (рис. 92). Таким образом, в случае $\lambda < 0$ все движения провода AB суть колебательные, периодические.

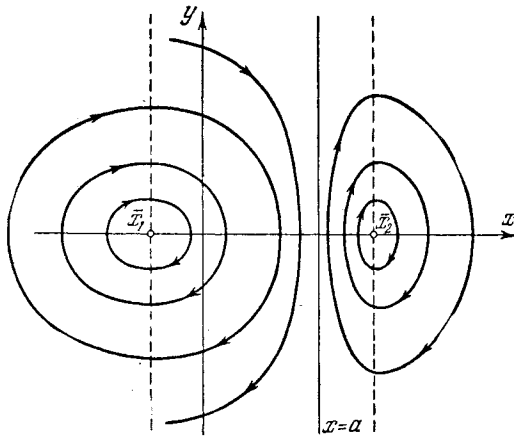


Рис. 92.

Приведенные примеры в достаточной степени поясняют вопрос о зависимости характера движений в консервативной системе от параметра, и теперь мы можем перейти к дальнейшим вопросам, возникающим при рассмотрении консервативных систем.

§ 6. Уравнения движения

До сих пор мы рассматривали только простейшие консервативные системы. Теперь мы перейдем к более сложным.

Для составления уравнений движения более сложных консервативных систем удобно воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода. Обозначая через $L(q, \dot{q})$ некоторую функцию (пусть это будет однозначная функция координаты q и скорости \dot{q}), которую назовем лагранжевой функцией, мы получим уравнение Лагранжа в таком виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (2.40)$$

Уравнение это инвариантно по отношению к любому преобразованию координаты q ; другими словами, это значит, что, полагая $q = f(\varphi)$, мы снова получим уравнения типа (2.40), т. е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Эта инвариантность уравнений Лагранжа представляет большое преимущество, так как она дает возможность сразу написать уравнения

движения для любых выбранных координат, если известна лагранжева функция системы. Для обычных консервативных механических систем (при условии, что система отсчета инерциальна) лагранжева функция представляет собой разность кинетической и потенциальной энергий; точно так же в простейших электрических системах лагранжева функция представляет собой разность магнитной и электрической энергий, если в качестве обобщенных координат выбраны интегралы от независимых контурных токов $q = \int i dt$ (в контурах, содержащих конденсаторы, q , очевидно, являются зарядами на этих конденсаторах). Особенно удобно пользоваться уравнениями Лагранжа для составления уравнений движения электромеханических систем¹⁾.

Однако следует заметить, что не всегда лагранжева функция может быть представлена как разность двух энергий; в таких случаях не всегда оказывается возможным указать наперед «физический» рецепт составления функции Лагранжа, а можно лишь чисто аналитически, путем специального подбора функции L , привести уравнения движения к требуемой форме. Известно, что для уравнения Лагранжа в случае автономной консервативной системы можно написать так называемый «интеграл энергии», который выражается так:

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = h. \quad (2.41)$$

Простым дифференцированием нетрудно убедиться, что производная по времени левой части этого равенства обращается в нуль в силу уравнения Лагранжа. Однако выражение (2.41) не всегда означает энергию системы в физическом смысле этого слова. Вводя наряду с координатой q вторую переменную $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, так называемый импульс, и составив функцию

$$H = p\dot{q} - L = H(p, q), \quad (2.42)$$

так называемую функцию Гамильтона, мы можем уравнение движения (2.40) привести к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q}, \quad (2.43)$$

которые носят название *уравнений Гамильтона*. Гамильтонова форма уравнений движения представляет существенные преимущества при рассмотрении ряда вопросов математики, астрономии и физики. Ряд методов интегрирования уравнений движения связан именно с этой формой.

¹⁾ Уравнения движения электрических и электромеханических систем, записанные в виде уравнений Лагранжа второго рода, часто называют уравнениями Лагранжа — Максвелла.

Уравнения Гамильтона инвариантны не только по отношению к преобразованиям переменных, о которых уже была речь, но и по отношению к так называемым *каноническим* преобразованиям, которые играют важную роль при изучении консервативных систем со многими степенями свободы.

Заметим, что «интеграл энергии» для уравнений Гамильтона может быть написан сразу:

$$H(p, q) = h = \text{const.} \quad (2.44)$$

Перейдем теперь к рассмотрению двух примеров, которые пояснят применение уравнений Лагранжа и Гамильтона.

1. Колебательный контур с железом. В качестве первого примера нелинейной консервативной системы мы рассмотрим электрический колебательный контур, в который входит катушка самоиндукции, содержащая железный сердечник [197] (рис. 93). Для того чтобы можно было рассматривать систему как консервативную, мы должны пренебречь сопротивлением контура и потерями на гистерезис. Если пренебречь рассеянием в катушке, т. е. считать, что весь магнитный поток Φ проходит сквозь все w витков катушки самоиндукции, то на основании закона Кирхгофа мы получим для силы тока i в контуре следующее уравнение:

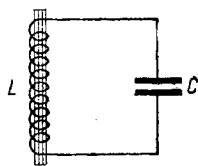


Рис. 93.

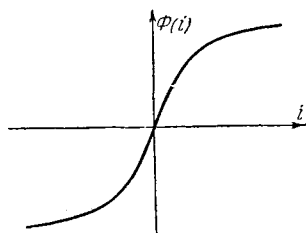


Рис. 94.

$$\frac{1}{C} \int i \, dt + w \frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad (2.45)$$

причем Φ есть некоторая функция от i , нелинейная вследствие наличия железного сердечника в катушке. Примерный вид функции $\Phi(i)$ для железного сердечника приведен на рис. 94.

Уравнение (2.45) легко может быть приведено к форме Лагранжа. Для этого заменим i через \dot{q} , где q — заряд на обкладках конденсатора, и введем обозначение

$$L = L(q, \dot{q}) = w \int \Phi(\dot{q}) \, d\dot{q} - \frac{q^2}{2C}. \quad (2.46)$$

В таком случае

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = w \Phi(\dot{q}) \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{q}{C},$$

и уравнение (2.45) принимает форму Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Как мы уже указывали, для уравнения Лагранжа можно написать «интеграл энергии»:

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = h.$$

В рассматриваемом случае этот интеграл энергии имеет вид

$$h = \omega \Phi(\dot{q}) \dot{q} - \omega \int \Phi(\dot{q}) d\dot{q} + \frac{q^2}{2C} = \text{const.} \quad (2.47)$$

Здесь h действительно выражает полную энергию системы. В самом деле, электростатическая энергия в конденсаторе есть $V = \frac{q^2}{2C}$, магнитная же энергия в катушке самоиндукции определится как работа против э.д.с. самоиндукции, т. е. выразится так:

$$T = \omega \int \frac{d\Phi(\dot{q})}{dt} \dot{q} dt = \omega \int \dot{q} d\Phi(\dot{q}) \quad (2.48)$$

или в результате интегрирования по частям:

$$T = \omega \Phi(\dot{q}) \dot{q} - \omega \int \Phi(\dot{q}) d\dot{q}. \quad (2.49)$$

Следовательно, $H = T + V$. Но зато в этом случае $L \neq T - V$, и мы имеем пример того, что лагранжева функция не всегда равняется разности между кинетической и потенциальной энергиями.

Введя новую переменную $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \omega \Phi(\dot{q})$, можем привести наше уравнение к типу Гамильтона. Функция Гамильтона напишется так:

$$H(p, q) = \int \Psi(p) dp + \frac{q^2}{2C}, \quad (2.50)$$

где $\Psi(p)$ есть функция, получающаяся разрешением относительно \dot{q} выражения $p = \omega \Phi(\dot{q})$. Характер функции $\Phi(\dot{q})$, как видно из кривой рис. 94, таков, что преобразования $p = \Phi(\dot{q})$ взаимно непрерывны и взаимно однозначны. Уравнения Гамильтона напишутся так:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{q}{C}; \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \Psi(p).$$

Характер поведения интегральных кривых на фазовой плоскости определится из интеграла энергии, который на основании (2.47) — (2.49) может быть записан в виде

$$\omega \int \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \dot{q} d\dot{q} + \frac{q^2}{2C} = \text{const.} \quad (2.51)$$

Это выражение аналогично тем, которые мы получали при рассмотрении примеров консервативных систем в § 5, с той лишь разницей,

что q и \dot{q} как бы поменялись местами. Мы можем поэтому относительно характера интегральных кривых высказать те же утверждения, какие были высказаны для простейших консервативных систем. Подынтегральное выражение всегда больше нуля, и потому $\int \frac{\partial \Phi(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \dot{q} d\dot{q}$ есть положительная функция, производная которой обращается в нуль только в точке $\dot{q} = 0$. Следовательно, $\dot{q} = 0$ соответствует минимуму энергии, и особая точка $q = 0, \dot{q} = 0$ есть центр; она соответствует устойчивому положению равновесия. Все интегральные кривые суть замкнутые кривые, вложенные одна в другую и охватывающие особую точку. Более точно мы сможем определить характер интегральных кривых, задавшись определенным аналитическим выражением функции $\Phi(i)$. Эта функция при отсутствии подмагничивания достаточно хорошо аппроксимируется выражением

$$\Phi(i) = A \operatorname{arctg} \frac{\omega i}{S} + B \frac{\omega i}{S}, \quad (2.52)$$

где A, B и S — положительные константы. Взяв это выражение, мы получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = \frac{A\omega}{S} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \dot{q}^2}{S^2}} + B \frac{\omega}{S}.$$

и далее:

$$\omega \int \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \dot{q} d\dot{q} = \frac{A\omega^2}{S} \int \frac{\dot{q} d\dot{q}}{1 + \frac{\omega^2 \dot{q}^2}{S^2}} + B \frac{\omega^2}{S} \int \dot{q} d\dot{q}.$$

Первый интеграл вычисляется при помощи подстановки $\dot{q}^2 = z$. Окончательно получим:

$$\frac{AS}{2} \ln \left(\frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{S^2}{2\omega^2} \right) + \frac{B\omega^2}{2S} \dot{q}^2 + \frac{q^2}{2C} = \text{const.} \quad (2.53)$$

Это уравнение определяет семейство кривых типа эллипса. На рис. 95 изображено семейство этих кривых, построенное для некоторого частного значения параметров.

2. Колебательный контур с сегнетовой солью в конденсаторе. В качестве второго примера нелинейной консервативной системы мы рассмотрим колебательный контур с конденсатором, в котором диэлектриком является сегнетова соль (рис. 96), обладающая электрическими свойствами, аналогичными магнитным свойствам железа. Для сегнетовой соли характерна нелинейная зависимость между электрической индукцией D и напряженностью поля E

(рис. 97), вследствие чего емкость конденсатора с сегнетодиэлектриком оказывается зависящей от заряда или от напряжения. Мы назо-

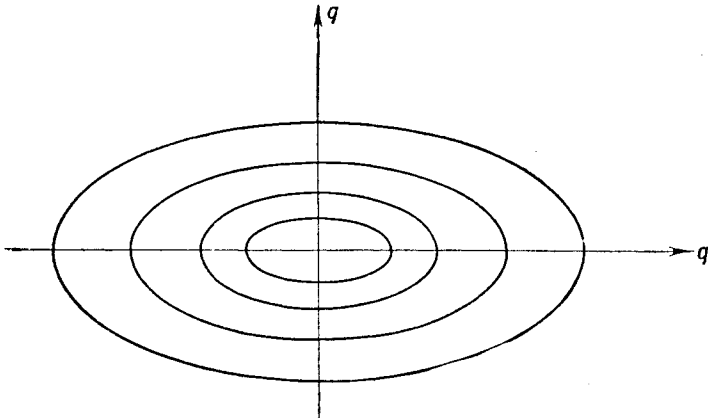


Рис. 95.

вем емкостью $C(q)$ такого конденсатора отношение заряда на обкладках конденсатора к разности потенциалов, вызванной этим зарядом. Зависимость таким образом определенной емкости конденсатора $C(q)$ от величины заряда на его обкладках примерно изображена на рис. 98.

Пренебрегая омическим сопротивлением и потерями на гистерезис, мы получим, вследствие того, что C есть функция q , нелинейную консервативную систему. Для рассматриваемого контура мы можем по закону Кирхгофа написать ¹⁾:

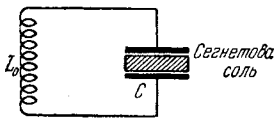


Рис. 96.

$$L_0 \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C(q)} = 0. \quad (2.54)$$

¹⁾ Заметим, что емкость можно было бы определить и иначе, например как $C_1(q) = \frac{dq}{du}$, где u — разность потенциалов. В этом случае дифференциальное уравнение контура, содержащего конденсатор с сегнетодиэлектриком, приняло бы другой вид:

$$L_0 \ddot{q} + \int \frac{dq}{C_1 q} = 0. \quad (2.54a)$$

Безразлично, каким из уравнений, (2.54) или (2.54a), пользоваться, так как оба они дают одну и ту же зависимость \dot{q} от q . По-видимому, для неавтономной системы второе определение $C_1 = \frac{dq}{du}$ является более целесообразным.

Это уравнение также легко может быть приведено к виду Лагранжа. Введем функцию состояния системы

$$L = L(q, \dot{q}) = \frac{L_0 \dot{q}^2}{2} - \int \frac{q dq}{C(q)}. \quad (2.55)$$

В таком случае

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_0 \dot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{q}{C}$$

и уравнение (2.55) может быть записано в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Интеграл энергии напишется так:

$$\frac{L_0 \dot{q}^2}{2} + \int \frac{q}{C(q)} dq = h = \text{const.} \quad (2.56)$$

Легко видеть, что и в этом случае h есть полная энергия системы,

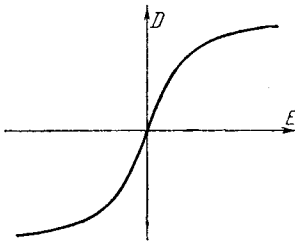


Рис. 97.

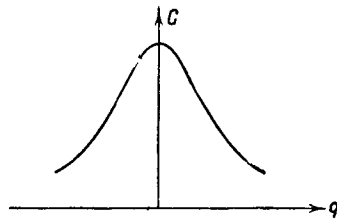


Рис. 98.

так как энергия заряда конденсатора равна работе тока, заряжающего конденсатор:

$$V = \int \frac{q}{C(q)} \dot{q} dt = \int \frac{q dq}{C(q)}. \quad (2.57)$$

Но, кроме того, в этом случае, в отличие от предыдущего, лагранжева функция $L = T - V$, т. е. равняется разности между магнитной и электростатической энергиями системы. Уравнение (2.55) подстановкой $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_0 \dot{q}$ легко может быть приведено к форме Гамильтона подобно тому, как это было сделано в предыдущем примере.

Уравнение (2.56) есть уравнение семейства интегральных кривых на фазовой плоскости q, \dot{q} . Так как функция $\int \frac{q}{C(q)} dq$ имеет минимум при $q=0$, то $q=0, \dot{q}=0$ есть особая точка типа центра, соответствующая устойчивому состоянию равновесия.

Для того чтобы точнее определить вид интегральных кривых, мы должны так или иначе прецизировать вид функции $C(q)$. В общем случае, если помимо переменного напряжения на обкладках конденсатора существует некоторое постоянное напряжение (по аналогии с подмагничиванием мы будем это постоянное напряжение называть «подэлектризацией»), то емкость конденсатора будет уже изменяться не одинаково в обе стороны от точки $q=0$. Учитывая это обстоя-

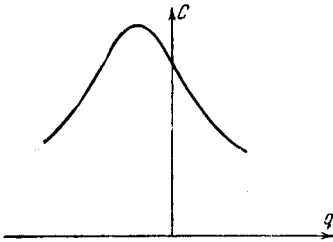


Рис. 99.

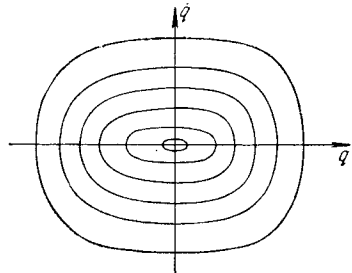


Рис. 100.

тельство, мы можем зависимость между C и q в некоторой ограниченной области значений q аппроксимировать при помощи следующего выражения:

$$C(q) = \frac{C_0}{1 + C_1 q + C_2 q^2}$$

(график этой функции $C(q)$ приведен на рис. 99). Подставляя выражение для $C(q)$ в выражение (2.56), получим:

$$\frac{L_0 \dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C_0} + \frac{C_1 q^3}{2C_0} + \frac{C_2 q^4}{2C_0} = \text{const.} \quad (2.58)$$

Это уравнение определяет семейство замкнутых кривых, вложенных одна в другую (рис. 100). Несимметричность этих кривых относительно оси \dot{q} обусловлена наличием члена $\frac{C_1 q^3}{2C_0}$ в уравнении семейства.

Но этот член появился в результате подэлектризации. При отсутствии подэлектризации $C(q) = C(-q)$ и несимметричность интегральных кривых исчезает. Мы получим семейство кривых типа эллипсов, причем только те из этих кривых будут заметно отличаться от эллипсов, для которых при больших q член q^4 играет заметную роль.

§ 7. Общие свойства консервативных систем

С точки зрения теории колебаний нас в консервативных системах с одной степенью свободы интересуют в первую очередь стационарные состояния — именно состояния равновесия и периодические движения. Все остальные движения, как мы убедились при рассмотрении про-

стейших консервативных систем, либо уходят в бесконечность, либо стремятся к состояниям равновесия типа седла (лимитационные движения). Мы уже рассмотрели подробно состояния равновесия в простейших консервативных системах. Теперь мы должны выяснить подробнее характер периодических движений, возможных в простейших консервативных системах.

1. Периодические движения и их устойчивость. Прежде всего периодические движения в консервативных системах отличаются той особенностью, что они никогда не встречаются изолированно. Если для $h = h_0$ на фазовой плоскости мы имели замкнутую траекторию, т. е. периодическое движение, то, как мы видели, эта замкнутая траектория непременно окружена соседними замкнутыми траекториями, получающимися при близких h . Периодические траектории встречаются континуумами и заполняют целые области фазовой плоскости, причем одна замкнутая траектория охватывает другую. Физически это значит, что если возможно одно периодическое движение, то возможно бесконечное множество их, причем максимальные размахи и максимальные значения скоростей могут в зависимости от начальных условий непрерывно изменяться в известных конечных или бесконечных пределах.

Помимо самого факта существования периодических движений нас всегда должен интересовать вопрос, устойчивы ли эти движения. Поэтому при рассмотрении периодических движений мы должны строго сформулировать понятие устойчивости движения, подобно тому как мы сформулировали понятие об устойчивости положений равновесия. Мы примем определение устойчивости движения, данное Ляпуновым и вполне соответствующее обычному определению устойчивости состояний равновесия, приведенному в гл. I, § 3.

Периодическому движению соответствует движение представляющей точки по определенной замкнутой фазовой траектории. Окружим эту точку некоторой малой областью ϵ , которая движется вместе с представляющей точкой. *Если при заданной сколь угодно малой области ϵ мы можем указать такую область δ (ϵ), что всякая представляющая точка, лежащая в начальный момент в этой области δ (ϵ), никогда не выйдет за пределы области ϵ , то рассматриваемое движение устойчиво по Ляпунову.* Более наглядно мы можем сформулировать это условие устойчивости следующим образом. Пусть движение подверглось некоторому возмущению — система испытала некоторый мгновенный толчок в произвольном направлении. Тогда представляющая точка сместится и будет продолжать движение уже по некоторой другой траектории. Представим себе, что при этом толчке представляющая точка «почернела» (рис. 101). Тогда исходное невозмущенное движение, устойчивость которого мы исследуем, т. е. движение, которое происходило бы, если бы не было толчка, будет изображаться движением светлой представляющей точки, а движение после толчка — возмущенное, изображается движением черной представляющей точки.

Теперь условие устойчивости движения можно сформулировать следующим образом. Если черная точка, находящаяся в начальный момент (сразу после толчка) достаточно близко к светлой (т. е. если возмущение достаточно мало), всегда остается к ней достаточно близкой, то движение, изображаемое светлой точкой, устойчиво по Ляпунову¹⁾.

Нетрудно видеть, что, вообще говоря, движение в консервативной системе неустойчиво по Ляпунову, ибо в общем случае период обращения представляющей точки по различным интегральным кривым различный. Вследствие этого светлая и черная точки, несмотря на малое начальное расстояние, будут все больше и больше расходиться,

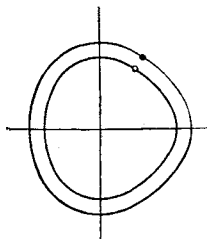


Рис. 101.

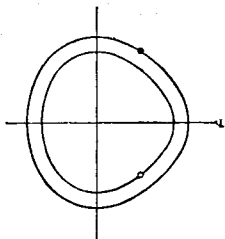


Рис. 102.

и после некоторого числа периодов получится картина, изображенная на рис. 102. Правда, потом они снова начнут сходиться, но все же при сколь угодно малом (но отличном от нуля) начальном расстоянии расстояние между ними не всегда будет меньше заданного. Расстояние между светлой и черной точками не будет возрастать по сравнению с начальным в том специальном случае, когда черная и светлая точки движутся по одной траектории, т. е. когда возмущение таково, что представляющая точка при толчке перескакивает по самой траектории (заметим кстати, что этот специальный тип возмущения может быть осуществлен только при вполне определенном соотношении между изменением координаты и изменением скорости). Но этот случай отнюдь не противоречит нашему утверждению о неустойчивости движения, ибо речь шла об области $\delta(\varepsilon)$, между тем участок траектории не представляет собой такой области.

Периодические движения в консервативной системе будут устойчивы по Ляпунову только в специальном случае, когда имеет место изохронизм, т. е. когда период обращения один и тот же для различных траекторий. Но и в этом случае мы не будем иметь абсолютно устойчивых замкнутых траекторий, т. е. таких траекторий, к которым представляющая точка после достаточно малого возмущения будет снова асимптотически приближаться. Этот тип траекторий в консервативных системах с одной степенью свободы вообще невозможен.

¹⁾ См. также определение устойчивости периодического движения по Ляпунову в гл. V, §§ 6, 7, где изложены аналитические методы исследования устойчивости, правда, пригодные лишь для неконсервативных систем.

С ним мы столкнемся только при рассмотрении неконсервативных систем. Хотя, как мы только что видели, периодические движения в консервативных системах, вообще говоря, неустойчивы по Ляпунову, однако они все же обладают некоторым видом устойчивости. Именно — достаточно близкая траектория всегда лежит целиком в непосредственном соседстве с рассматриваемой. Такой вид устойчивости носит название *орбитной* устойчивости; эта устойчивость играет существенную роль в общей теории поведения интегральных кривых.

2. Однозначный аналитический интеграл и консервативность.

До сих пор мы рассматривали такие консервативные системы, для которых справедливы уравнения Гамильтона. Между тем с точки зрения характера фазовой плоскости, или в более общем случае фазовой поверхности, а следовательно, и характера возможных движений в системе было бы естественно к числу консервативных отнести также и некоторые системы, для которых уравнения Гамильтона несправедливы. Мы дадим поэтому более общее определение консервативных систем и установим некоторые свойства консервативных систем, которые из этого определения вытекают.

Каждой динамической системе соответствует топологически вполне однозначно некоторая фазовая поверхность с расположенной на ней сеткой фазовых траекторий, так что каждой точке фазовой поверхности соответствует вполне определенное состояние системы и обратно; соответствие это взаимно непрерывно и взаимно однозначно. *Необходимым признаком консервативности системы* мы будем считать существование однозначного интеграла вида

$$F(u, v) = C, \quad (2.59)$$

где u, v — координаты, определяющие положение точки на фазовой плоскости. Во избежание излишних рассуждений мы предположим, что функция $F(u, v)$ — *однозначная аналитическая функция*; по существу задачи она не может тождественно равняться постоянной величине. Рассматривая C как третью координату, откладываемую по нормали к фазовой поверхности, мы можем интерпретировать уравнение (2.59) как уравнение некоторой новой поверхности, построенной над фазовой поверхностью. Построенная таким образом поверхность обладает тем свойством, что линии равного уровня (уровень отсчитывается по оси C) суть интегральные кривые. В том случае, когда фазовая поверхность представляет собой плоскость, линии равного уровня, т. е. интегральные кривые, представляют собой пересечение поверхности $F(u, v) = C$ с плоскостью, параллельной фазовой плоскости и определяемой уравнением $C = C_0$, где C — координата, а C_0 — константа (рис. 103).

Зная одну такую поверхность, можно построить их бесчисленное множество. Действительно, нас интересуют исключительно сами линии равного уровня, их относительная высота нас совершенно не интересует. Следовательно, мы можем по какому угодно закону изменять

«масштаб» оси C , произвольным образом сжимая или растягивая его на отдельных участках. Мы будем получать все новые и новые поверхности, причем все они будут обладать тем свойством, что линии равного уровня суть интегральные кривые. На аналитическом языке

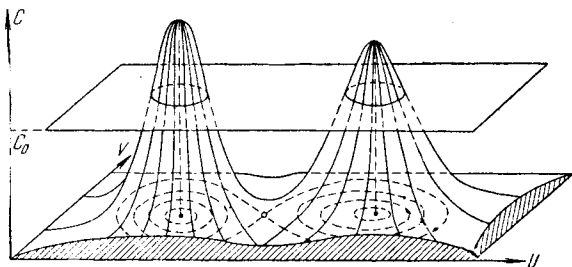


Рис. 103.

это означает тот очевидный факт, что если $F(u, v) = C$ есть интеграл некоторого уравнения, то и $\Phi[F(u, v)] = C$ также будет интегралом этого уравнения.

Особые точки кривых равного уровня соответствуют особым точкам системы интегральных кривых: так, изолированные точки кривых равного уровня соответствуют центру; узловые точки — седлу; точки заострения — особым точкам, получаемым от слияния центра и седла. Дифференциальное уравнение интегральных кривых, как это следует из уравнения (2.59), имеет вид

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}. \quad (2.60)$$

Особые точки соответствуют тем значениям u, v , для которых одновременно $\frac{\partial F}{\partial u}$ и $\frac{\partial F}{\partial v}$ обращаются в нуль. Может случиться, что $\frac{\partial F}{\partial u}$ и $\frac{\partial F}{\partial v}$ обращаются одновременно в нули не только в изолированных точках, но и вдоль некоторой аналитической кривой. Покажем, что такая кривая непременно является интегральной, т. е. что точки этой кривой удовлетворяют уравнению $F(u, v) = \text{const}$. Предположим, что кривая, о которой идет речь, дана в параметрической форме:

$$u = u(s), \quad v = v(s).$$

Тогда

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{dv}{ds}$$

или, так как $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$, то

$$\frac{dF}{ds} = 0,$$

откуда

$$F = \text{const},$$

т. е. $F(u, v)$ вдоль кривой сохраняет постоянное значение. Нетрудно видеть, что такой случай имеет место, если соответствующая кривая равного наклона состоит из точек, в которых касательная плоскость параллельна фазовой поверхности, как, например, когда поверхность $F(u, v) = C$ имеет вид кратера, края которого лежат на одном уровне (рис. 104). Ни одна из особых точек не может быть такого

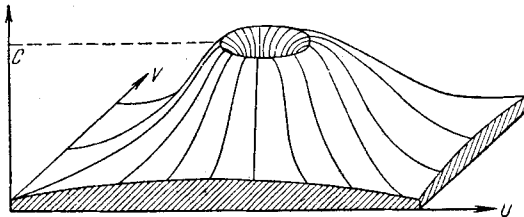


Рис. 104.

типа, чтобы через нее проходило бесконечное множество интегральных кривых, сплошь заполняющих некоторую часть плоскости, ибо в этом случае все кривые должны были бы быть одного уровня; в силу аналитичности $F(u, v)$ в этом случае вообще была бы постоянной, что противоречит поставленному условию. Отсюда мы можем заключить, что особые точки в консервативной системе не могут быть ни узлами, ни фокусами. Совершенно аналогичными рассуждениями можно показать, что в консервативной системе не может быть замкнутой интегральной кривой, на которую бы другие интегральные кривые нависались. Далее можно утверждать, что если существует одна замкнутая траектория, то их обязательно существует целый континуум, сплошь заполняющий часть плоскости; это следует непосредственно из того, что фазовые траектории представляют собой линии уровня непрерывной поверхности $F(u, v) = C$. Поэтому не может существовать одна изолированная замкнутая траектория, ибо если одна линия уровня на непрерывной поверхности замкнута, то и все близкие линии уровня также должны быть замкнуты.

Перейдем теперь к исследованию движения во времени по этим траекториям. Поскольку уравнение (2.60) представляет собой результат исключения времени из уравнений движения, то, для того чтобы вернуться к уравнениям движения в их общем виде, мы должны принять во внимание, что вместе с исключением времени могла исчезнуть некоторая функция $S(u, v) = \frac{1}{Q(u, v)}$, входящая множителем

в оба уравнения. Следовательно, уравнения движения в общем виде могут быть написаны таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial v} \frac{1}{Q(u, v)} = U(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial u} \frac{1}{Q(u, v)} = V(u, v). \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Эти более общие уравнения консервативной системы носят название уравнений Пфаффа. Относительно $S(u, v)$ мы предположим, что это — однозначная аналитическая функция на всей плоскости u, v , не обращающаяся в нуль ни для каких конечных значений u, v .

Можно было бы сделать более общие предположения о функции $S(u, v) = \frac{1}{Q(u, v)}$, например допустить, что эта функция может обращаться в нуль или терять голоморфность вдоль изолированных кривых. Соответствующие уравнения довольно часто встречаются на практике как идеальные модели реальных систем, и эти модели в ряде случаев (например, в некоторых случаях, когда вышеупомянутые изолированные кривые совпадают с фазовыми траекториями) несомненно заслуживают отнесения к классу консервативных систем. Однако мы не будем проводить здесь исследование и классификацию таких «патологических» случаев, а ограничимся лишь несколькими замечаниями, касающимися терминологии, и рассмотрением примера (пункт 6 настоящего параграфа).

Легко видеть, что в частном случае

$$Q(u, v) = 1$$

мы получаем уравнения типа Гамильтона:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}.$$

Здесь согласно общепринятым обозначениям F обозначено через H . Уравнения Гамильтона, как мы видели, имеют однозначный интеграл $H = \text{const}$, обычно представляющий интеграл энергии (однако, как уже указывалось, это бывает не всегда).

Уравнения (2.61) эквивалентны уравнению

$$V(u, v) du - U(u, v) dv = 0,$$

которое, как известно, всегда допускает интегрирующий множитель. Поэтому формально всякую динамическую систему, описываемую двумя дифференциальными уравнениями первого порядка, можно привести к виду (2.61). Однако не все системы, описываемые этими уравнениями, консервативны. Причина этого лежит в том, что в случае, когда консервативная система описывается уравнениями типа (2.61), на функции F и Q налагаются определенные условия (однозначность, аналитичность и т. д.). Когда в классической механике рассматривают

гамильтоновы уравнения, то там H есть энергия, и поэтому эти условия обычно автоматически удовлетворяются.

Заметим, что если динамическая система задана дифференциальными уравнениями общего вида

$$\frac{du}{dt} = U; \quad \frac{dv}{dt} = V,$$

то не существует общих методов, которые позволили бы установить, консервативна ли описываемая этими уравнениями система или нет. Часто неконсервативность системы можно установить сразу, например доказав существование абсолютно устойчивых или неустойчивых состояний равновесия. Вообще же установить консервативный характер интегральных кривых можно, только найдя каким-нибудь способом однозначный интеграл системы.

3. Консервативные системы и вариационный принцип. Характерной чертой консервативных уравнений является их вариационное происхождение.

Как известно, уравнения Гамильтона могут быть получены с помощью вариационного принципа Гамильтона:

$$\delta \int_0^{t_1} L dt = \delta \int_0^{t_1} (p\dot{q} - H) dt = 0. \quad (2.62)$$

Именно пользуясь тем, что δq обращается в нуль для $t=0$ и $t=t_1$, выражение (2.62) можно преобразовать к виду

$$\int_0^{t_1} \left\{ \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p + \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right\} dt = 0,$$

откуда в силу так называемой «основной леммы» вариационного исчисления получаем уравнения Гамильтона:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Рассмотрим теперь более общий вариационный принцип, а именно предположим, что подынтегральная функция в варьируемом интеграле есть линейная комбинация более общего вида:

$$\delta \int_0^{t_1} \{ X\dot{x} + Y\dot{y} + F \} dt = 0,$$

где X , Y и F — однозначные аналитические функции только x и y .

В этом более общем случае вариационные уравнения или, иначе, уравнения движения получают вид

$$Q(x, y) \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{и} \quad Q(x, y) \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y},$$

где $Q(x, y) = X'_y - Y'_x$.

Это — уже известные нам уравнения Пфаффа, являющиеся наиболее общей формой уравнений, описывающих консервативные системы.

4. Интегральный инвариант. Введем теперь понятие об интегральном инварианте. Рассмотрим сначала соответствующую задачу в общем виде, не связывая ее с консервативностью, чтобы затем использовать полученные результаты для консервативных систем.

Пусть некоторая динамическая система определяется уравнениями общего вида

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (2.63)$$

Будем интерпретировать изображающие точки на фазовой плоскости как частицы некоторой двумерной «жидкости», а фазовые траектории — как линии тока стационарного течения этой «жидкости» по фазовой плоскости, предполагая, что нигде нет ни источников, ни стоков «жидкости». Пусть $\rho(x, y)$ будет «плотность» этой воображаемой жидкости. Рассмотрим множество изображающих точек — совокупность «частиц жидкости», которые заполняли в момент времени $t=0$ некоторую область («двумерный объем») $G(0)$ на фазовой плоскости. «Масса» рассматриваемого «объема жидкости», очевидно, выразится интегралом

$$I(0) = \int\int_{G(0)} \rho(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

(x_0, y_0 — координаты изображающих точек при $t=0$). Наша «жидкость» течет по фазовой плоскости, следуя линиям тока, определяемым уравнениями движения (2.63) или их решением:

$$x = x(t; x_0, y_0), \quad y = y(t; x_0, y_0) \quad (2.64)$$

(так как x_0, y_0 — начальные значения координат изображающих точек, то, очевидно, $x(0; x_0, y_0) = x_0$ и $y(0; x_0, y_0) = y_0$). По этим траекториям будут перемещаться и рассматриваемые «частицы» жидкости, заполнявшие в момент $t=0$ «объем» $G(0)$. Обозначим через $G(t)$ область, которую будет заполнять эта совокупность «частиц» в момент времени t . «Масса жидкости» в этом новом «объеме»

$$I(t) = \int\int_{G(t)} \rho(x, y) dx dy \quad (2.65)$$

и должна быть равна $I(0)$, если наша интерпретация движения изображающих точек на фазовой плоскости как стационарного течения некоторой «жидкости» с плотностью $\rho(x, y)$ и без источников и стоков является правильной, так как для «жидкости» должен выполняться закон сохранения «массы». Точнее говоря, такая интерпретация движения изображающих точек возможна только лишь в том случае, когда можно подобрать такую функцию $\rho(x, y)$ — «плотность» жидкости, чтобы «масса жидкости», «масса» любой совокупности ее

«частиц», оставалась неизменной во время движения. Мы будем говорить, что в этом случае уравнения движения (2.63) допускают двумерный положительный *интегральный инвариант*. Таким образом, выражение (2.65) является интегральным инвариантом (функция $\rho(x, y)$ называется фазовой плотностью интегрального инварианта¹⁾), если при любой начальной области $G(0) \equiv I(0)$ или, что то же самое,

$$\frac{d}{dt} \int_{G(t)} \rho(x, y) dx dy \equiv 0 \quad (2.66)$$

при любой области интегрирования $G(t)$.

Найдем условие, которому должна удовлетворять функция $\rho(x, y)$ для того, чтобы выражение (2.65) было интегральным инвариантом уравнений (2.63). При дифференцировании интеграла (2.65) по времени основное затруднение состоит в том, что область $G(t)$, по которой совершается интегрирование, меняется с течением времени. Чтобы обойти эту трудность, перейдем под интегралом от переменных x, y к переменным x_0, y_0 с помощью якобиана²⁾

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, y_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{vmatrix} = D(t; x_0, y_0) \neq 0. \quad (2.67)$$

¹⁾ Ниже мы будем считать функцию $\rho(x, y)$ положительно определенной и ограниченной:

$$0 \leq \rho(x, y) < M,$$

где M — некоторое постоянное число; кроме того, эта функция не должна равняться тождественно нулю ни в какой конечной области.

²⁾ Докажем, что якобиан D не равняется нулю (только в этом случае примененное преобразование переменных будет взаимно однозначным). Дифференцируя $D(t; x_0, y_0)$ по времени, получим:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0} \end{vmatrix} = D \{ P'_x(x, y) + Q'_y(x, y) \},$$

так как, рассматривая \dot{x}, \dot{y} как функции x, y согласно уравнениям движения (2.63), а x, y как функции $t; x_0, y_0$ согласно решению этих уравнений (2.64), имеем:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x_0} = P'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial x_0} + P'_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial x_0}$$

и аналогичные выражения для $\frac{\partial \dot{x}}{\partial y_0}, \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0}$. Интегрируя по времени (при заданных x_0, y_0), получим:

$$D(t; x_0, y_0) = D(0; x_0, y_0) e^{\int_0^t \{ P'_x(x, y) + Q'_y(x, y) \} dt}$$

После перехода к новым переменным x_0, y_0 получим:

$$I(t) = \int\int_{G(0)} \rho(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, y_0)} dx_0 dy_0, \quad (2.68)$$

причем здесь под x и y следует понимать функции $x(t; x_0, y_0)$ и $y(t; x_0, y_0)$ — решение дифференциальных уравнений (2.63), и

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int\int_{G(0)} \frac{\partial}{\partial t} [\rho D] dx_0 dy_0,$$

так как теперь область интегрирования от времени не зависит. Поскольку эта производная должна равняться тождественно нулю при *любой* области интегрирования $G(0)$, подынтегральное выражение должно также тождественно равняться нулю (при любых x_0, y_0 , т. е. ¹⁾

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \rho(x, y) \cdot D(t; x_0, y_0) \} \equiv 0. \quad (2.69)$$

Так как

$$\frac{\partial D}{\partial t} = D \{ P'_x + Q'_y \},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\rho D] &= D \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial D}{\partial t} = D \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial x} P + \frac{\partial \rho}{\partial y} Q + \rho \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial Q}{\partial y} \right\} = \\ &= D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho P) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho Q) \right\}, \end{aligned}$$

и условие (2.69), поскольку $D \neq 0$, сводится к условию

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho P) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho Q) \equiv 0 \quad (2.70)$$

при любых x, y .

где $x = x(t; x_0, y_0)$, $y = y(t; x_0, y_0)$. Но

$$D(0; x_0, y_0) = \frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(x_0, y_0)} = 1,$$

поэтому

$$D(t; x_0, y_0) = e^{\int_0^t \{ P'_x(x, y) + Q'_y(x, y) \} dt} \neq 0.$$

¹⁾ Мы пишем производную по времени как частную, так как x, y и $D(t; x_0, y_0)$ зависят не только от времени, но и от x_0, y_0 .

Нетрудно показать, что уравнения Гамильтона всегда допускают интегральный инвариант с постоянной фазовой плотностью (которую, не нарушая общности, можно положить равной единице). Действительно, в случае уравнений Гамильтона, полагая $x = q$, $y = p$ и $\rho = 1$, условие (2.70) можно свести к условию

$$\frac{\partial}{\partial q} \left\{ \frac{\partial H}{\partial p} \right\} + \frac{\partial}{\partial p} \left\{ - \frac{\partial H}{\partial q} \right\} = 0, \quad (2.71)$$

которое выполняется тождественно в силу перестановочности дифференцирования.

Таким образом, фазовая площадь («двумерный фазовый объем») является интегральным инвариантом для уравнений Гамильтона. Это утверждение, впервые доказанное Лиувилем, носит название *теоремы Лиувилля*.

Для уяснения несколько абстрактной теоремы Лиувилля рассмотрим примеры, в которых инвариантность фазовой площади нетрудно непосредственно установить.

Пример I. Гармоническое движение:

$$\frac{dp}{dt} = -q, \quad \frac{dq}{dt} = p,$$

$$p = a \cos(t + \varphi), \quad q = a \sin(t + \varphi).$$

Нетрудно сообразить, что с течением времени каждый радиус-вектор

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} a \sin(t + \varphi) + \mathbf{j} a \cos(t + \varphi),$$

характеризующий состояние системы, повернется на один и тот же угол. Любая фигура просто повернется, не изменяя своей формы и, следовательно, площади (рис. 105).

Пример II. Движение под действием постоянной силы:

$$\frac{dp}{dt} = -q, \quad \frac{dq}{dt} = p,$$

$$p = p_0 - gt, \quad q = q_0 + p_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Если мы в момент $t=0$ выделим на фазовой плоскости квадрат между точками: 1) q_0, p_0 ; 2) $(q_0 + a), p_0$; 3) $q_0, (p_0 + a)$; 4) $(q_0 + a), (p_0 + a)$, то с течением времени квадрат будет все больше и больше перекашиваться (рис. 106), но площадь фигуры будет оставаться постоянной,

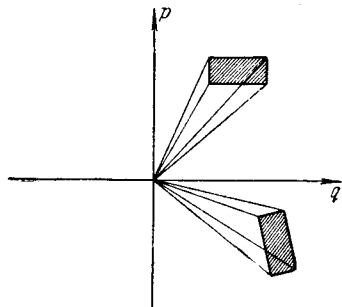


Рис. 105.

так как стороны, параллельные оси q , т. е. соединяющие точки с равной начальной скоростью p_0 , будут перемещаться параллельно

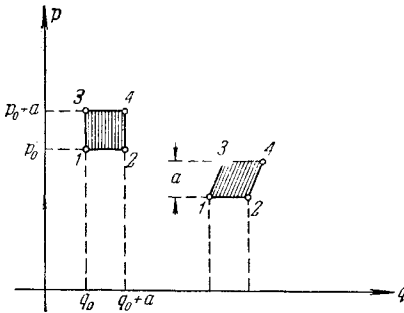


Рис. 106.

самим себе, и вместе с тем расстояние между ними и их длина будут оставаться неизменными и равными a . Вместо квадрата со стороной a мы получим параллелограмм с основанием a и высотой a , т. е. равновеликий квадрату.

Если мы будем пользоваться фазовой плоскостью не с переменными q и p , а с переменными q и \dot{q} , т. е. если мы будем исходить не из уравнений Гамильтона, а из уравнений Лагранжа, то теорема

Лиувилля уже не будет иметь места. Однако, вообще говоря, у нас будет существовать интегральный инвариант. Действительно,

$$\iint_a dp dq = \iint_{a^*} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} & \frac{\partial p}{\partial q} \\ \frac{\partial q}{\partial \dot{q}} & \frac{\partial q}{\partial q} \end{array} \right| dq d\dot{q} = \iint_{a^*} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} dq d\dot{q}.$$

Таким образом, в переменных q, \dot{q} фазовая плотность уже не постоянна, а равна $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$. Поэтому, для того чтобы уравнения Лагранжа допускали интегральный инвариант, достаточно, чтобы $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$ было конечно и постоянно по знаку, например положительно. В реальных случаях это условие обычно выполняется.

Интегральный инвариант имеют и более общие уравнения консервативных систем — уравнения Пфаффа (2.61), а именно: интегральный инвариант с фазовой плотностью $Q(u, v)$:

$$I = \iint_{a(i)} Q(u, v) du dv,$$

так как условие того, чтобы это выражение было интегральным инвариантом уравнений (2.61),

$$\frac{\partial}{\partial u} (QU) + \frac{\partial}{\partial v} (QV) = \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ -\frac{\partial F}{\partial u} \right\} \equiv 0$$

выполняется тождественно в силу перестановочности дифференцирования. Нетрудно видеть, что выражение $Q \cdot \Phi(F)$, где Φ — любая функция, а F — левая часть интеграла консервативной системы (2.59), может быть использовано для образования интегрального инварианта в качестве фазовой плотности. Действительно, $\Phi(F)$ является кон-

стантой движения; поэтому совершенно очевидно, что если $\iint Q du dv$ — интегральный инвариант, то и $\iint Q \Phi(F) du dv$ будет также интегральным инвариантом. Можно показать, что это общий вид интегрального инварианта. Другими словами, отношение двух различных выражений для фазовых плотностей интегральных инвариантов, приравненное постоянной величине, всегда является интегралом системы.

Возвратимся снова к наглядной интерпретации изображающих точек как «частиц двумерной жидкости», а их движения — как стационарного течения такой «жидкости» (без источников и стоков). Как уже указывалось в начале настоящего пункта, такая интерпретация возможна только при существовании интегрального инварианта; его фазовая плотность $\rho(x, y)$ может быть взята в качестве «плотности жидкости», а сам интегральный инвариант будет выражать закон сохранения «массы жидкости».

Рассмотрим поток «жидкости», заключенный между двумя достаточно близкими фазовыми траекториями, — «полоску» тока (рис. 107), которая аналогична трубке тока в гидродинамике. В силу закона сохранения «массы жидкости» поток «жидкости» через одно сечение этой полоски (например, через отрезок l_1) должен равняться потоку через любое другое сечение той же полоски тока (например, через отрезок l_2). Если обозначить через w_1 и w_2 фазовые скорости на этих отрезках¹⁾, т. е. скорости течения «жидкости» в этих сечениях полоски тока, то, очевидно²⁾,

$$\rho_1 w_1 l_1 = \rho_2 w_2 l_2,$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности «жидкости» в первом и втором сечениях полоски тока.

Таким образом, если мы знаем фазовые траектории и фазовую плотность, мы можем определить относительное распределение фазовых

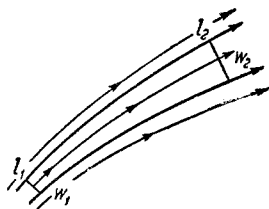


Рис. 107.

¹⁾ Сечения рассматриваемой «полоски тока» должны быть настолько малыми, чтобы в каждом сечении фазовые скорости можно было считать одинаковыми.

²⁾ Нетрудно видеть, что поток жидкости через любой замкнутый контур равен нулю. Действительно, поток жидкости внутрь замкнутого контура Γ , как известно, определяется интегралом

$$\oint_{\Gamma} \rho (y dx - x dy) = \oint_{\Gamma} \rho Q dx - \rho P dy = \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho P) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho Q) \right] dx dy$$

и равен нулю в силу условия (2.70) (последний интеграл получается из предыдущего применением формулы Грина; S обозначает двумерную область, лежащую внутри контура Γ).

скоростей вдоль траекторий, т. е., иначе говоря, можем определить фазовую скорость в любой точке данной фазовой траектории, если она известна для какой-либо одной точки этой траектории.

Из существования интегрального инварианта со знакоопределенной и ограниченной фазовой плотностью еще раз следует невозможность существования в консервативных системах состояний равновесия типа узла или фокуса и замкнутых фазовых траекторий, к которым асимптотически приближались бы соседние фазовые траектории (т. е. предельных циклов). Действительно, допустив противоположное, мы будем иметь на фазовой плоскости такие «полоски тока», сечения которых будут неограниченно уменьшаться (точнее говоря, стремиться к нулю) при приближении этих «полосок тока» к состояниям равновесия типа узла или фокуса или к предельному циклу. Но фазовые скорости там остаются конечными (а при приближении к состояниям равновесия даже стремятся к нулю), следовательно по мере приближения к состояниям равновесия или к предельным циклам фазовая плотность должна неограниченно возрастать, что невозможно.

Б. Основные свойства консервативных систем. Рассмотрим теперь несколько подробнее движения, допускаемые в консервативной системе. Начнем с положений равновесия. Положения равновесия определяются обращением в нуль правых частей уравнений (2.61):

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

Эти положения равновесия либо соответствуют особым точкам системы, либо образуют линии равновесия (в случае существования общих множителей у $\frac{\partial F}{\partial u}$ и $\frac{\partial F}{\partial v}$), которые тогда, как мы видели, непременно совпадают с интегральными кривыми.

Мы видели, что особыми точками не могут быть точки, к которым сходится бесконечное множество траекторий, сплошь заполняющих часть плоскости, т. е., другими словами, положения равновесия не могут быть абсолютно устойчивыми.

Замкнутые траектории соответствуют периодическим решениям: мы уже видели, что если есть хоть одно такое периодическое решение, то другие движения не могут на него накручиваться (а также с него скручиваться).

Иначе говоря (как мы уже упоминали), в консервативной системе не может быть также абсолютно орбитно-устойчивых траекторий. Если в консервативной системе есть одна замкнутая траектория, то их обязательно существует бесконечное множество, сплошь заполняющее некоторую область фазовой плоскости, причем эти замкнутые траектории вложены одна в другую. Физически это значит, что если возможно одно периодическое движение, то возможно бесконечное множество их, причем максимальные размахи и максимальные значения скоростей могут иметь любые значения, заключенные между

определенными пределами в зависимости от начальных условий. Нетрудно видеть, что периоды колебаний, вообще говоря, различны для различных максимальных размахов, т. е. также зависят от начальных условий. Системы, допускающие изохронные колебания, т. е. колебания, период которых не зависит от максимального размаха, представляют исключительный случай; в качестве примера можно указать на уже рассмотренный в гл. I случай гармонического осциллятора. В случае, если фазовая поверхность топологически эквивалентна плоскости, внутри замкнутых траекторий обязательно должна быть одна или несколько особых точек (если такая особая точка одна, то это обязательно центр). Колебания в системе совершаются только около одного или нескольких положений равновесия, из которых обязательно некоторые устойчивы. Если же, например, фазовая поверхность — цилиндр, то могут существовать замкнутые траектории, не охватывающие особых точек, а именно траектории, охватывающие цилиндр; в таких системах могут происходить периодические движения по замкнутым траекториям, не охватывающим положений равновесия. В качестве примера можно указать на вращение маятника без затухания при большой начальной скорости. Далее возможны замкнутые интегральные кривые с одной или несколькими особыми точками; первые соответствуют дважды лимитационным движениям, т. е. движениям, которые для t , стремящегося к $+\infty$, и t , стремящегося к $-\infty$, стремятся к одному и тому же положению равновесия. Вторые соответствуют лимитационным движениям, которые для $t \rightarrow +\infty$ стремятся к одному положению равновесия, а для $t \rightarrow -\infty$ к другому. Возможны также лимитационно-убегающие движения, которые для t , стремящегося в одну сторону в бесконечность, стремятся к положению равновесия, а для t , стремящегося в другую сторону в бесконечность, тоже уходят в бесконечность, и, наконец, дважды убегающие движения, которые в обе стороны уходят в бесконечность.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующей терминологией. Если уравнения движения системы (определяемой двумя автономными уравнениями первого порядка) допускают однозначный аналитический интеграл, то мы будем говорить, что структура интегральных кривых на фазовой плоскости для этой системы имеет *консервативный характер*. Такую систему, имеющую однозначный аналитический интеграл, мы будем называть *консервативной* системой, если она имеет интегральный инвариант, удовлетворяющий следующим требованиям: 1) область интегрирования $G(t_0)$ может быть выбрана любой, лишь бы ее не пересекали некоторые изолированные кривые; 2) при дальнейшем изменении t $G(t)$ не стремится к нулю, оставаясь в конечной части фазовой плоскости.

В заключение укажем еще на одно свойство, о котором мы уже кратко упоминали, а именно неустойчивость консервативных систем в отношении изменения вида дифференциальных уравнений. Можно

показать, что малейшее изменение вида дифференциального уравнения, вообще говоря, существенно изменяет всю картину на фазовой плоскости и нарушает консервативность системы. Для иллюстрации этого положения, которое будет точно сформулировано и разъяснено для общего случая в дальнейшем, можно привести следующий пример. Уравнение гармонического осциллятора $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ мы можем рассматривать как частный случай уравнения линейного осциллятора:

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

При $h = 0$ мы получаем консервативную систему — особую точку центр и интегральные кривые в виде семейства вложенных друг в друга эллипсов. При $h \neq 0$, но как угодно малом, т. е., по существу, при сколь угодно малом изменении вида дифференциального уравнения, система перестает быть консервативной, особая точка превращается в фокус, замкнутые траектории исчезают и появляются спирали. Можно сказать иначе, что консервативная система представляет собой весьма частный случай динамической системы, случай, который осуществляется только при вполне определенных значениях некоторых параметров системы (и поэтому практически этот случай неосуществим). Изменение этих параметров, вообще говоря, связано с изменением вида дифференциальных уравнений и нарушением консервативности системы¹⁾.

6. Пример. Совместное существование двух видов. Мы рассматривали до сих пор в виде примеров либо механические, либо электрические системы, для которых вопрос о консервативности решался непосредственно из физических соображений: поскольку трение или сопротивление в системе отсутствует, мы сразу можем сделать заключение, что система консервативна. Однако возможны случаи, когда такие простые соображения для решения вопроса о том, консервативна ли система, уже не могут быть применены. Необходимым критерием консервативности служит приведенный в предыдущем параграфе признак наличия однозначного аналитического интеграла вида $F(u, v) = C$. В качестве примера такой системы, для которой вопрос о консервативности не может быть решен заранее, мы приведем пример из области биологии, принадлежащий Вольтерра [175, 199, 45], именно мы рассмотрим совместное существование двух видов животных (например, двух видов рыб). Первый вид питается продуктами среды, которые, мы предположим, имеются всегда в достаточном количестве. Рыбы второго вида питаются только рыбами первого вида. Число особей каждого вида есть, конечно, целое число и, следовательно, может изменяться только скачками, но чтобы иметь возможность применить методы дифференциального исчисления, мы будем рассматривать их как

¹⁾ Напомним, что в § 5 мы рассматривали специально выбранные изменения параметров системы, не нарушающие консервативности системы.

непрерывные функции времени. Обозначим число особей первого вида через N_1 , второго — через N_2 . Мы предположим, что если бы первый вид жил один, то число особей его непрерывно увеличивалось бы, причем скорость увеличения мы предположим пропорциональной числу имеющихся налицо особей; тогда мы можем написать:

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1,$$

причем $\varepsilon_1 > 0$. Этот коэффициент увеличения ε_1 зависит от смертности и рождаемости. Если бы второй вид жил один, то он бы постепенно вымирал, так как ему нечем было бы питаться, поэтому для второго вида мы можем написать:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2.$$

Теперь предположим, что оба вида живут совместно, тогда коэффициент увеличения первого вида будет тем меньше, чем больше N_2 , так как рыб первого вида поедают рыбы второго вида. Мы сделаем простейшее предположение, а именно, что коэффициент увеличения ε_1 уменьшается на величину, пропорциональную N_2 : аналогичным образом предположим, что коэффициент уменьшения второго вида ε_2 в силу наличия первого вида (наличия пищи) изменяется на величину, пропорциональную N_1 . При этих предположениях мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1 (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2); \quad \frac{dN_2}{dt} = -N_2 (\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1), \quad (2.72)$$

причем ε_1 , ε_2 , γ_1 и γ_2 все больше нуля¹⁾. Умножая первое уравнение на γ_2 , второе — на γ_1 и складывая, получим:

$$\gamma_2 \frac{dN_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dN_2}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 N_1 - \varepsilon_2 \gamma_1 N_2;$$

умножая же первое на $\frac{\varepsilon_2}{N_1}$ и второе на $\frac{\varepsilon_1}{N_2}$ и складывая, имеем:

$$\varepsilon_2 \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} + \varepsilon_1 \frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 \gamma_1 N_2 + \varepsilon_1 \gamma_2 N_1.$$

Следовательно,

$$\gamma_2 \frac{dN_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dN_2}{dt} - \varepsilon_2 \frac{d \ln N_1}{dt} - \varepsilon_1 \frac{d \ln N_2}{dt} = 0.$$

Последнее уравнение непосредственно интегрируется, и мы найдем однозначный интеграл:

$$\gamma_2 N_1 + \gamma_1 N_2 - \varepsilon_2 \ln N_1 - \varepsilon_1 \ln N_2 = \text{const.}$$

¹⁾ Заметим, что к уравнениям вида (2.72) приводят (при соответствующих упрощающих предположениях) также и некоторые задачи кинетики химических процессов; см., например, [123].

Этот интеграл мы можем записать в таком виде:

$$F(N_1, N_2) = e^{-\gamma_2 N_1} e^{-\gamma_1 N_2} N_1^{\epsilon_2} N_2^{\epsilon_1} = \text{const.} \quad (2.73)$$

Нетрудно убедиться, что выражение

$$\iint \frac{dN_1 dN_2}{N_1 N_2}$$

будет интегральным инвариантом. На основании этого мы заключаем, что рассматриваемая система является консервативной. Перейдем

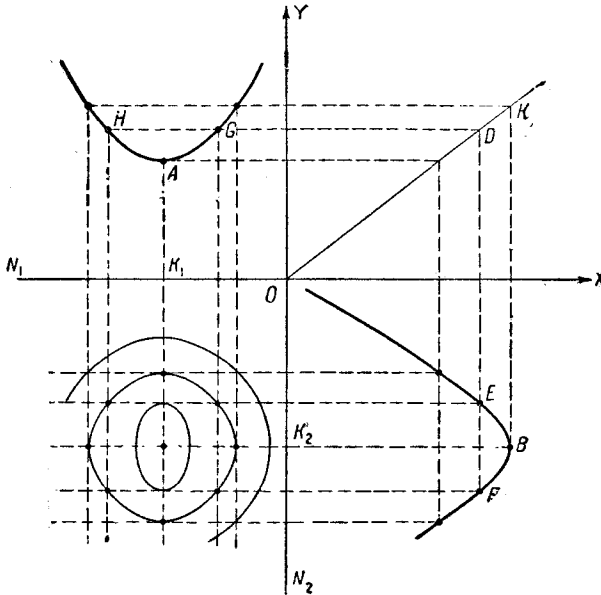


Рис. 108.

теперь к исследованию вида интегральных кривых. Для этого перепишем уравнение (2.73) в следующем виде:

$$N_1^{-\epsilon_2} e^{\gamma_2 N_1} = C N_2^{\epsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2}$$

и построим кривые

$$Y = N_1^{-\epsilon_2} e^{\gamma_2 N_1}; \quad X = N_2^{\epsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2},$$

откуда искомая траектория определяется соотношением

$$Y = CX.$$

Возьмем две взаимноперпендикулярные прямые и отложим на них оси OX , ON_1 , OY , ON_2 , как это показано на рис. 108. Во втором

и четвертом квадранте нанесем соответственно кривые X и Y . Форму этих кривых легко определить из следующей таблицы:

N_1	0	$k_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$	$+\infty$	N_2	0	$k_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$	$+\infty$
$\frac{dY}{dN_1}$	-	0	+	$\frac{dX}{dN_2}$	+	0	-
Y	$+\infty$	$\searrow \text{min}$	$+\infty$	X	0	$\nearrow \text{max}$	0

так как

$$\frac{dY}{dN_1} = Y \left(-\frac{\varepsilon_2}{N_1} + \gamma_2 \right) \quad \text{и} \quad \frac{dX}{dN_2} = X \left(\frac{\varepsilon_1}{N_2} - \gamma_1 \right).$$

В первом квадранте проведем прямую $Y = OX$. Возьмем какую-нибудь точку на прямой OK , например D . Проведем через нее две прямые — одну параллельную оси OY , другую параллельную оси OX . Пусть

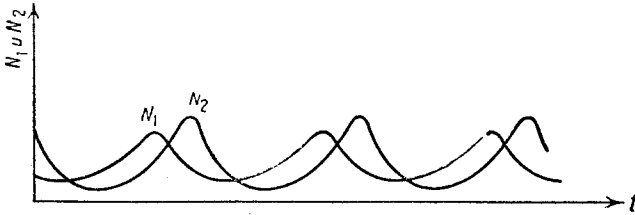


Рис. 109.

E, F, G, H будут точки пересечения этих прямых с кривыми X и Y ; из точек E и F проведем две прямые, параллельные оси OX , и через точки H и G — две прямые, параллельные оси OY . Точки пересечения этих прямых и принадлежат интегральной кривой $Y = CX$. Геометрическое место таких точек, когда точка D скользит по прямой OK , и есть искомая интегральная кривая. Нетрудно видеть, что интегральные кривые все замкнуты, кроме одной, соответствующей координатным осям. Состояние равновесия — особая точка типа центра с координатами

$$N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \quad \text{и} \quad N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}.$$

Итак, мы видим, что в исследуемом случае изменение численности обоих видов происходит по периодическому закону. На рис. 109 приведены зависимости N_1 и N_2 от времени.

ГЛАВА III

НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Мы рассмотрели два класса систем: во-первых, системы неконсервативные, но линейные, и убедились в том, что для этого класса систем периодические движения вообще невозможны; во-вторых, мы рассмотрели системы консервативные (линейные и нелинейные) и убедились, что в этих системах возможны периодические движения, но что таких движений всегда возможно бесчисленное множество и амплитуда их целиком определяется начальными условиями. Между тем, как уже неоднократно указывалось, нас интересуют главным образом такие периодические движения, амплитуда которых определяется свойствами самой системы. Затем, нас в первую очередь интересуют такие системы, характер движений в которых не изменяется существенно при малых, достаточно общих изменениях самих систем; консервативные системы, как только что было указано, не удовлетворяют и этому требованию. Мы увидим дальше, что лишь неконсервативные нелинейные системы являются адекватными математическими моделями интересующих нас реальных физических систем, т. е. такими моделями, которые позволяют получать ответы на вопросы, интересующие физику колебаний. В настоящей главе мы познакомимся на примерах с двумя основными типами таких нелинейных и неконсервативных систем — с системами *диссипативными* и с системами *автоколебательными*.

§ 1. Диссипативные системы

Поскольку рассматриваемый нами случай отличается от рассмотренного ранее случая консервативной системы наличием сил, не имеющих потенциала, мы можем, вводя «обобщенные силы», написать для этих систем уравнение Лагранжа в таком виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \Phi = 0, \quad (3.1)$$

где обобщенная сила Φ есть некоторая функция q и \dot{q} ¹⁾. В частном случае «линейного трения» или омического сопротивления Φ есть линейная функция скорости: $\Phi = -b\dot{q}$, и уравнение Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + b\dot{q} = 0.$$

К такому уравнению приводит любая из рассмотренных нами нелинейных систем при наличии силы трения, пропорциональной скорости, например контур с железом при наличии омического сопротивления. К общему же виду, т. е. к уравнению (3.1), нас приведет рассмотрение систем, в которых трение каким-либо более сложным образом зависит от скорости.

Если неконсервативные силы имеют характер сил трения, то они должны препятствовать движению, т. е. должны быть всегда направлены в сторону, противоположную скорости. Следовательно, в случае наличия сил трения всегда соблюдается условие

$$\Phi \dot{q} \leq 0, \quad (3.2)$$

причем равенство нулю никогда не может удовлетворяться тождественно за исключением случая, когда $\dot{q} \equiv 0$, т. е. когда система находится в состоянии покоя. Умножив все члены уравнения (3.1) на \dot{q} , мы получаем уравнение баланса энергии:

$$\frac{dW}{dt} - \Phi \dot{q} = 0, \quad (3.3)$$

где $W = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$ ($W = \text{const}$ является интегралом уравнения (3.1) при $\Phi = 0$). Для обычных систем W есть полная энергия, и, как это следует из уравнения (3.3) и условия (3.2), эта энергия при движении системы ($\dot{q} \neq 0$) *всегда убывает*. Предположим, что энергия не может стремиться к $-\infty$. Тогда мы можем утверждать, что с течением времени она стремится к некоторому постоянному значению W_0 , а $\Phi \dot{q}$ и, следовательно, \dot{q} — к нулю, т. е. система стремится к состоянию покоя (к состоянию равновесия)²⁾. Такие системы мы будем называть *диссипативными*. В диссипативной системе единственными стационарными состояниями являются состояния равновесия, к которым система приближается при любых начальных условиях. Периодические

¹⁾ Обобщенная сила определяется соотношением: $\delta A = \Phi \delta q$, где δA — работа непотенциальных сил над системой при малом, виртуальном (в смысле теоретической механики) изменении координаты на δq . Например, работа, совершаемая на сопротивлении R электрической системы при прохождении через него заряда δq , равна $U_R \cdot \delta q$, где $U_R = R\dot{q}$ — напряжение на сопротивлении; таким образом, в этом случае $\delta A = -R\dot{q}\delta q$ и $\Phi = -R\dot{q}$. Точно так же для сил вязкого, линейного трения $\Phi = -b\dot{q}$ ($b > 0$).

²⁾ Вообще говоря, W_0 зависит от начальных условий.

движения в диссипативных системах, очевидно, невозможны, так как энергия системы при движении всегда убывает.

В качестве примера диссипативной системы рассмотрим обычный маятник при больших отклонениях и при наличии силы трения. Для простоты будем считать, что сила трения пропорциональна скорости, т. е. положим $\Phi = -b\dot{q}$ и $b > 0$. Лагранжева функция L для маятника имеет вид

$$L = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(\cos \varphi - 1),$$

и уравнение Лагранжа напишется так:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0. \quad (3.4)$$

Картина на развертке фазового цилиндра (фазовой поверхностью, конечно, опять является цилиндр) определяется уравнением

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{b\omega + mgl \sin \varphi}{I\omega}, \quad (3.5)$$

где $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Особыми точками этого уравнения, очевидно, будут: $\varphi = 0$, $\omega = 0$ и $\varphi = \pm \pi$, $\omega = 0$. Устойчивому состоянию равновесия соответствует точка $(0, 0)$, которая является либо устойчивым фокусом (при $b^2 < 4lmg$), либо устойчивым узлом (при $b^2 > 4lmg$); неустойчивому состоянию равновесия соответствует седло $(\pm \pi, 0)$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно разложить $\sin \varphi$ в степенные ряды вблизи значений $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm \pi$, ограничиться линейными членами и исследовать полученные линеаризованные уравнения так, как это мы делали в гл. I.

Касательные к интегральным кривым вертикальны на оси φ ($\omega = 0$) и горизонтальны на кривой $\omega = -\frac{mgl}{b} \sin \varphi$, т. е. изоклина $\frac{d\omega}{d\varphi} = 0$ имеет вид синусоиды, и чем меньше b , тем больше амплитуда этой синусоиды. В общем для двух рассматриваемых случаев $b^2 < 4lmg$ и $b^2 > 4lmg$ получаются фазовые портреты, изображенные соответственно на рис. 110 и 111. Склеив развертку цилиндра по линии $\varphi = \pm \pi$, мы получим фазовый цилиндр, разбитый на фазовые траектории.

Глядя на фазовые портреты маятника (рис. 110 и 111), легко убедиться в том, что периодических движений в системе нет и что почти при всех начальных условиях (за исключением условий, соответствующих состояниям равновесия и устойчивым усам седел) система стремится к устойчивому состоянию равновесия.

Если условие (3.2) не соблюдается, то система может уже не быть диссипативной. В такой системе возможно возрастание энергии за счет «сил трения», так как при $\Phi \dot{q} > 0$ $\frac{dW}{dt} > 0$; с такими случаями

мы познакомились на примерах лампового генератора и маятника Фруда.

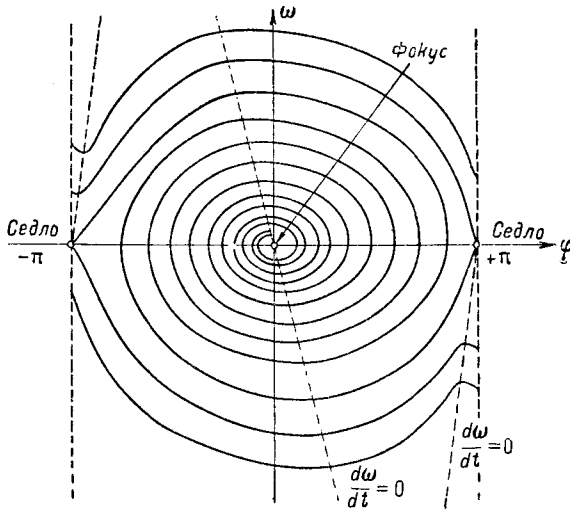


Рис. 110.

Если условие (3.2) не соблюдается, то мы уже не можем утверждать, что периодические движения невозможны. Пусть, например,

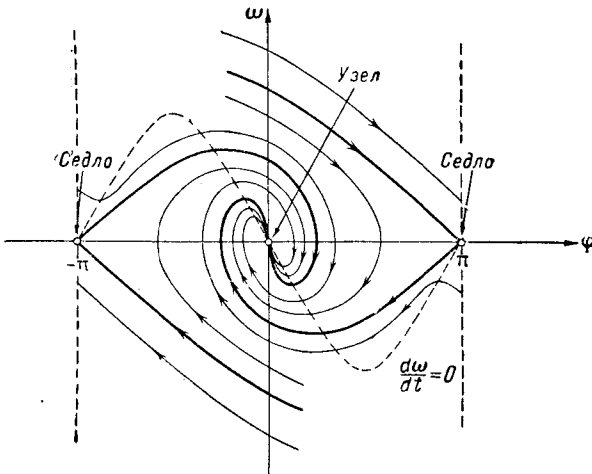


Рис. 111.

мы имеем «силу трения», пропорциональную квадрату скорости, т. е. $\Phi = -b\dot{q}^2$, где $b > 0$. Очевидно, что такая «сила трения»

препятствует движению при $\dot{q} > 0$ и помогает движению при $\dot{q} < 0$. В этом случае уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{dW}{dt} + b\dot{q}^3 = 0.$$

Легко можно показать, исследуя это уравнение, что для обычных механических и электрических задач «сила трения» вида $\Phi = -b\dot{q}^2$ не нарушает консервативности системы и что в соответствующих системах возможны континуумы периодических движений, с амплитудами, зависящими от начальных условий¹⁾.

В качестве примера рассмотрим картину на фазовой плоскости для осциллятора, описываемого уравнением²⁾

$$2\ddot{x} + \dot{x}^2 + x = 0. \quad (3.6)$$

Полагая $\dot{x} = y$ и исключая время, получим уравнение для интегральных кривых на фазовой плоскости x, y :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y^2}{2y} \quad (3.7)$$

или $2y \frac{dy}{dx} = -x - y^2$ и $\frac{d(y^2)}{dx} + y^2 = -x$. Интегрируя последнее, получим:

$$y^2 = Ce^{-x} + 1 - x$$

или

$$(y^2 + x - 1)e^x = C, \quad (3.8)$$

где C — постоянная интегрирования (мы оставили коэффициент 2 при \ddot{x} в уравнении движения только для того, чтобы это уравнение интегральных кривых имело наиболее простой вид).

¹⁾ Настоящая сила трения, пропорциональная квадрату скорости, всегда направлена против движения; поэтому она аналитически записывается в виде

$$\Phi = -b\dot{q}^2 \operatorname{sgn} \dot{q},$$

где $b > 0$ и, как обычно, под $\operatorname{sgn} \dot{q}$ понимается функция

$$\operatorname{sgn} \dot{q} = \begin{cases} +1 & \text{при } \dot{q} > 0, \\ 0 & \text{при } \dot{q} = 0, \\ -1 & \text{при } \dot{q} < 0. \end{cases}$$

При таком законе трения условие диссипативности (3.2), конечно, выполняется.

²⁾ К этому уравнению приводится уравнение

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} + b \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + kq = 0$$

путем замены переменных

$$q = \frac{m}{2b} x, \quad t = \sqrt{\frac{m}{2k}} t_{\text{нов.}}$$

Семейство интегральных кривых (3.8) изображено на рис. 112. Значению $C = -1$ соответствует изолированная точка $(0, 0)$ — особая точка уравнения (3.7); при $0 > C > -1$ получаются замкнутые кривые,

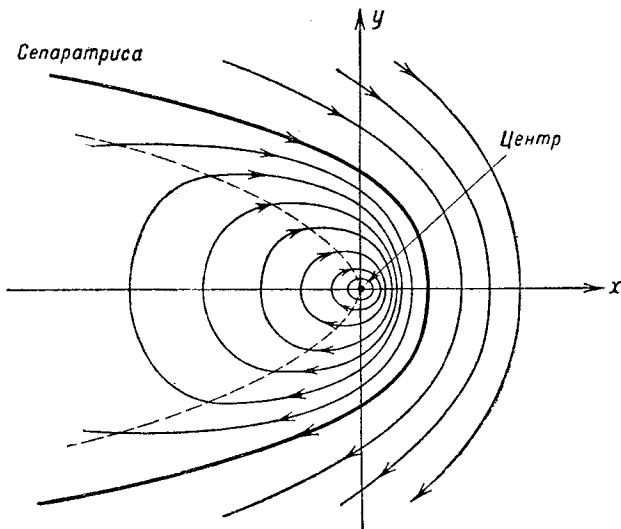


Рис. 112.

охватывающие начало координат и вложенные друг в друга; при $C \geq 0$ кривые (3.8) уходят в бесконечность (значению $C = 0$ соответствует парабола $y^2 = 1 - x$, которая является сепаратрисой, т. е. кривой, разделяющей замкнутые кривые и кривые, уходящие в бесконечность)¹⁾.

¹⁾ Для того чтобы убедиться, что кривые (3.8) действительно имеют такой вид, поступим следующим образом. Найдем, во-первых, точки пересечения кривых (3.8) с осью абсцисс, которые определяются, очевидно, уравнением

$$(x-1)e^x = C.$$

Для графического решения этого уравнения построим на вспомогательной плоскости x, z кривую

$$z = (x-1)e^x \quad (\alpha)$$

(эта кривая имеет единственный экстремум — минимум $z = -1$ при $x = 0$; $z \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, $z = 0$ при $x = 1$ и $z \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$). Тогда точки пересечения кривой (3.8), соответствующей заданному C , с осью абсцисс определяются как точки пересечения кривой (α) с прямой $z = C$. Очевидно, при $C < -1$ точек пересечения нет; при $C = -1$ имеется одна двухкратная точка $x = 0$; при $-1 < C < 0$ — две точки: $x = x_1 < 0$ и $x = x_2 > 0$, причем $x_2 < 1$, и при $C \rightarrow 0$ $x_1 \rightarrow -\infty$, а $x_2 \rightarrow 1$. Наконец, при $C \geq 0$ имеется только одна точка пересечения $x \geq 1$.

Далее интегральную кривую (3.8) с заданным C легко построить, пользуясь соотношением

$$y^2 = [C - (x-1)e^x]e^{-x}.$$

Очевидно, эта кривая существует только при тех значениях x , при которых прямая $z = C$ проходит над кривой (α) .

Если в начальный момент представляющая точка находилась внутри области, ограниченной сепаратрисой, то система будет совершать периодическое движение с амплитудой, целиком определяемой начальными условиями (из вида интегральных кривых сразу можно заключить, что колебания будут по форме существенно отличаться от синусоидальных).

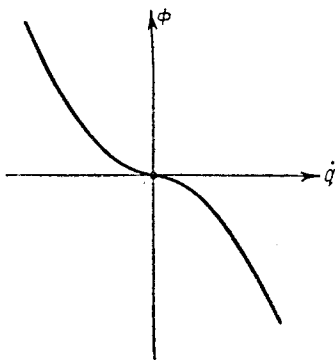


Рис. 113.

Это свойство является, как мы видели, одним из наиболее характерных свойств консервативных систем; введенное нами трение, которое в течение одной части периода препятствует движению, а в течение другой «помогает» ему, не нарушает консервативности системы.

От этого случая легко перейти к рассмотрению диссипативной системы — осциллятора с «настоящим» квадратичным трением, т. е. с силой трения, пропорциональной квадрату скорости (рис. 113) и выражаемой соотношением

$$\Phi = -b \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{dq}{dt} \right)$$

($b > 0$). Уравнение движения такого осциллятора

$$m \frac{d^2q}{dt^2} + b \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{dq}{dt} \right) + kq = 0$$

заменой переменных, указанной в примечании на стр. 172, приводится к уравнению

$$2\ddot{x} + \dot{x}^2 \operatorname{sgn} \dot{x} + x = 0, \quad (3.9)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ 2\dot{y} &= -x - y^2 \operatorname{sgn} y. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Из полученных уравнений следует, что единственным состоянием равновесия является начало координат $(0, 0)$. Далее, поскольку уравнения (3.10) не меняют своего вида при замене переменных x , y на $-x$, $-y$, фазовые траектории в верхней полуплоскости симметричны относительно начала координат с фазовыми траекториями в нижней полуплоскости (иначе говоря, если кривая $y = f(x)$ является фазовой траекторией, то фазовой траекторией будет и кривая $y = -f(-x)$).

Но фазовые траектории в верхней полуплоскости ($y \geq 0$), очевидно, совпадают с траекториями (3.8) только что рассмотренной консервативной системы. Поэтому, сохранив над осью x картину, изображенную на рис. 112, и построив в нижней полуплоскости траектории, симметричные (относительно начала координат) с траекториями в верхней полуплоскости, мы получим фазовый портрет осциллятора с квадратичным трением (рис. 114).

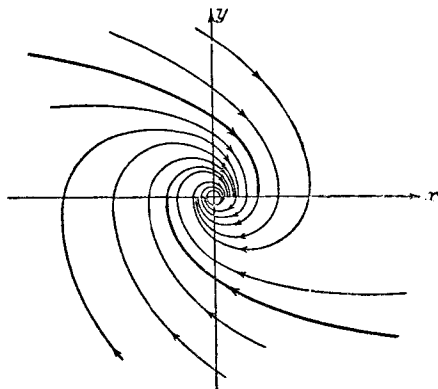


Рис. 114.

Как и следовало ожидать, состояние равновесия $(0, 0)$ является устойчивым и к нему асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются все остальные спиралевидные фазовые траектории; иначе говоря, система при любых начальных условиях совершает осцилляторно затухающие колебания¹⁾.

§ 2. Осциллятор с «кулоновским» трением

В качестве другого примера диссипативной системы мы рассмотрим осциллятор с «сухим» трением (рис. 115), причем для простоты будем считать, что при отсутствии трения система представляет гармонический осциллятор. Такую задачу об осцилляторе, который при отсутствии трения был бы гармоническим, мы уже рассматривали в гл. I, § 4, предполагая, однако, при этом, что сила трения пропорциональна скорости.

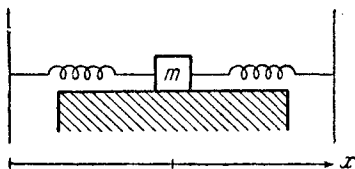


Рис. 115.

Этот закон трения удовлетворительно определяет сопротивление движению тела со стороны жидкой или газообразной среды при не слишком больших скоростях. Однако этот линейный закон совершенно не отображает закономерностей «сухого» трения — трения между твердыми поверхностями (без слоя смазки между ними), имеющегося в рассматриваемой колебательной системе. Достаточно хорошо основные черты этих закономерностей, во всяком случае в области малых скоростей, передаются предположением о «постоянном»

¹⁾ В § 9 гл. VIII мы докажем, что фазовые траектории идут действительно так, путем сведения задачи к некоторому точечному преобразованию прямой в прямую,

или «кулоновском» трении. Конечно, когда речь идет о постоянном трении, то нужно понимать под этим трение, постоянное по величине, но не по направлению, так как направление силы трения всегда противоположно направлению скорости (только в этом случае условие диссипативности, т. е. неравенство (3.2), соблюдается).

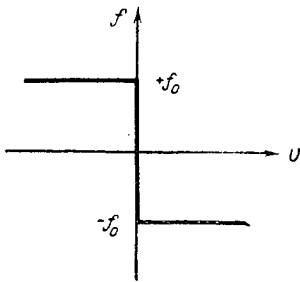


Рис. 116.

Зависимость кулоновской силы трения f от скорости v можно, как мы уже это делали, изобразить диаграммой, приведенной на рис. 116. При этом следует помнить, что величина силы трения для $v = 0$ может принимать в зависимости от величины других действующих на систему сил любые значения от $+f_0$ до $-f_0$, полностью уравновешивая эти силы при условии, что их равнодействующая не превышает по абсолютной величине максимальную силу трения покоя f_0 ¹⁾.

В рассматриваемой нами системе на массу m кроме силы сухого трения действует еще сила натяжения пружин $-kx$. Поэтому неподвижный осциллятор ($\dot{x} = 0$) останется в покое, если сила натяжения пружин по абсолютному значению не превышает f_0 , так как она будет полностью уравновешена силой сухого трения. Таким образом, все положения осциллятора с координатами $-\frac{f_0}{k} \leq x \leq +\frac{f_0}{k}$ могут быть положениями покоя. Если же $|kx| > f_0$, то сила натяжения пружины уже не будет полностью уравновешена силой сухого трения и осциллятор придет в движение. При движении осциллятора сила кулоновского трения $f = +f_0$ при $\dot{x} < 0$ и $f = -f_0$ при $\dot{x} > 0$.

Итак, для рассматриваемой задачи мы можем записать силу кулоновского трения в следующем виде:

$$f = \begin{cases} +f_0 & \text{при } \dot{x} < 0, \\ +f_0 & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } kx > f_0, \\ +kx & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } |kx| \leq f_0, \\ -f_0 & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } kx < -f_0, \\ -f_0 & \text{при } \dot{x} > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

(сила кулоновского трения является, таким образом, нелинейной, разрывной функцией и зависит не только от скорости \dot{x} , но и от координаты x осциллятора).

¹⁾ По закону Кулона максимальная сила трения покоя f_0 пропорциональна силе давления одной трущейся поверхности на другую; в нашем случае $f_0 = \rho_0 mg$, где ρ_0 — так называемый коэффициент трения.

Соответственно нелинейное дифференциальное уравнение движения осциллятора

$$m\ddot{x} = -kx + f \quad (3.12)$$

мы можем записать в виде двух *различных линейных* уравнений, одно из которых справедливо для движения влево:

$$m\ddot{x} + kx = +f_0 \quad (\dot{x} < 0), \quad (3.12a)$$

а другое — для движения вправо:

$$m\ddot{x} + kx = -f_0 \quad (\dot{x} > 0). \quad (3.12б)$$

При неподвижном осцилляторе (т. е. при $\dot{x} = 0$) $\ddot{x} = 0$, если $|kx| \leq f_0$, $m\ddot{x} = -kx + f_0$, если $kx > f_0$, и, наконец, $m\ddot{x} = -kx - f_0$, если $kx < -f_0$.

Как найти движение такой системы? Пусть, например, в начальный момент у нас $\dot{x} > 0$. Движение системы описывается первым дифференциальным уравнением (3.12a). Скорость будет уменьшаться до некоторого момента $t = t_1$, и когда система достигнет координаты $x = x_1$, скорость обратится в нуль. Затем скорость переменит знак, и система будет двигаться в обратном направлении¹⁾. Обратное движение, само собой разумеется, описывается уже вторым уравнением (3.12б), причем теперь в качестве начальных условий обратного движения нужно взять те значения координаты и скорости $(x_1, 0)$, которыми обладала система в конце предыдущего этапа движения. Таким же образом поступают и дальше: меняют уравнение при каждом изменении направления движения, «припасовывая» начальные условия, т. е. принимая за начальное состояние то состояние, в которое пришла система в предшествующем движении. Обозначая $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{f_0}{m} = a\omega_0^2$ (очевидно, что в таком случае $a = \frac{f_0}{k}$), напомним уравнения движения рассматриваемой системы в таком виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \begin{cases} +a\omega_0^2 & \text{при } \dot{x} < 0, \\ -a\omega_0^2 & \text{при } \dot{x} > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Вводя для первого уравнения новую переменную $\xi_1 = x - a$, а для второго $\xi_2 = x + a$, получим два одинаковых уравнения: $\ddot{\xi}_1 + \omega_0^2 \xi_1 = 0$ (при $\ddot{\xi}_1 < 0$) и $\ddot{\xi}_2 + \omega_0^2 \xi_2 = 0$ (при $\ddot{\xi}_2 > 0$), но для переменных, отнесенных к разным началам координат. Решениями этих уравнений являются уравнения гармонического колебания. Следовательно, движение рассматриваемой системы можно представить себе составленным из двух «половин» гармонических колебаний,

¹⁾ Тело, конечно, может остановиться. Остановится оно или не остановится, зависит от того, что больше в точке x_1 : максимальное значение силы трения f_0 или сила упругости.

происходящих относительно двух различных положений равновесия, сдвинутых соответственно на расстояние $+a$ и $-a$ от истинного положения равновесия, которое занимала бы система при отсутствии трения. «Смена уравнений» происходит в тот момент, когда скорость системы обращается в нуль, но координата отлична от нуля. Следовательно, при каждой «смене уравнений» мы имеем начальные условия $x = x_{0i}$; $\dot{x} = 0$. Решение, удовлетворяющее этим начальным условиям, есть $x_{0i} \cos \omega_0 t$ (если для момента «смены уравнений» положить $t = 0$). Поэтому каждое «полуколебание» мы должны изображать отрезком косинусоиды от 0 до π , т. е. от одного экстремального значения до следующего.

Изображая движение на осциллограмме $x = f(t)$, мы должны поступить следующим образом (рис. 117). Пусть начальное отклонение системы x_{01} , а начальная скорость $\dot{x}_{01} = 0$. Если начальное отклонение положительно, то скорость первое время будет отрицательна и, значит, положение равновесия будет смещено на $+a$, т. е. на величину a вверх от оси времен. Поэтому в результате первого полуколебания от одного экстремального значения до другого система придет вниз до наибольшего отклонения x_{02} , причем $|x_{02}| = |x_{01}| - 2a$.

Дальше, для второго полуколебания (при $\dot{x} > 0$) вступает в силу второе уравнение, и следовательно, это будет полуколебание относительно положения равновесия, сдвинутого на $-a$, т. е.

на величину a книзу от оси времен, начинающееся также с экстремального значения. К концу этого полуколебания система достигнет наибольшего отклонения x_{03} (над осью t), причем $|x_{03}| = |x_{02}| - 2a = |x_{01}| - 4a$.

То обстоятельство, что положение равновесия смещается в сторону начального отклонения, как легко видеть, и обуславливает затухание колебаний. Наибольшие отклонения, которых достигает система (экстремумы отклонений), убывают каждый раз по абсолютной величине на $2a$, а наибольшие отклонения в одну сторону (максимумы или минимумы) представляют собой убывающую арифметическую прогрессию с разностью прогрессии, равной $4a$. Ясно, что эта прогрессия состоит из конечного числа членов, и движение прекращается по прошествии конечного числа колебаний. Действительно, когда наибольшее отклонение упадет до величины, меньшей, чем $3a$, например отклонение x_{03} на рис. 117, то следующее движение приведет систему в область, заключенную между прямыми $+a$ и $-a$,

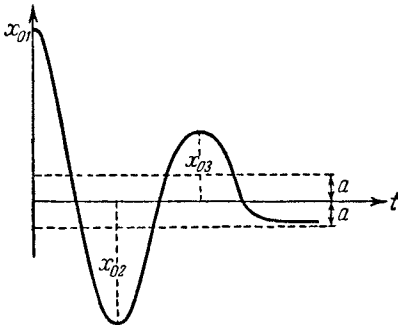


Рис. 117.

в которой система при отсутствии скорости может оставаться в покое в любой точке, так как в этой области $|kx| \leq f_0$. Таким образом, в рассматриваемом случае наибольшие отклонения убывают не по геометрической прогрессии, как в случае линейного осциллятора (с силой трения, пропорциональной скорости), а по арифметической прогрессии, и движение прекращается через конечный промежуток времени. Термин «логарифмический декремент затухания» в этом случае теряет свой смысл, ибо логарифм отношения двух последовательных отклонений уже не есть постоянная величина.

«Условный период» колебаний системы в том смысле, как мы его определили для затухающего колебания в случае трения, пропорционального скорости, т. е. интервал времени между двумя максимумами (во время колебательного этапа движения) для случая постоянного трения не зависит от величины силы трения и совпадает с периодом гармонического осциллятора¹⁾. При этом, как легко убедиться из рассмотрения рис. 117, расстояние (по оси времени) между максимумом и следующим нулевым значением больше, чем между нулевым значением и следующим максимумом. Эта разница тем более заметна, чем меньше максимум. Такой же «сдвиг» максимальных значений по оси времени «назад» в направлении предшествующих нулевых значений, как мы видели, имеет место и в линейной системе с трением, пропорциональным скорости. Наконец, отметим еще одно различие между системами с линейным и постоянным трением (связь этого различия с только что отмеченным легко проследить). Именно, в случае линейного трения всегда можно, по крайней мере формально, разделять системы на колебательные и аperiodические. В случае же постоянного трения разделение систем на колебательные и аperiodические вообще теряет смысл, ибо всегда при любом трении можно выбрать достаточно большое начальное отклонение, так что система совершит ряд колебаний, прежде чем ее движение прекратится. Физический смысл этого свойства систем с постоянным трением выступает особенно ясно при рассмотрении вопроса о балансе энергии в системе.

Если начальное отклонение системы есть x_{01} , а начальная скорость равна нулю, то начальная энергия системы есть только потенциальная энергия V , причем $V_1 = \frac{kx_{01}^2}{2}$. Работа A , затрачиваемая на преодоление силы трения, не зависит от скорости, а зависит только от пути (ибо сила трения постоянна). Очевидно, что за первую половину «условного периода» эта работа составляет:

$$A_1 = (|x_{01}| + |x_{02}|)f_0.$$

¹⁾ Заметим, что в рассматриваемом случае постоянного трения интервалы времени между нулевыми значениями координаты, соответствующими движению системы в одну и ту же сторону (во время колебательного этапа), уже не являются одинаковыми и поэтому не могут быть положены в основу определения «условного периода».

где x_{02} — второе наибольшее отклонение, потенциальная же энергия при $x = x_{02}$ будет:

$$V_2 = \frac{kx_{02}^2}{2};$$

так как $V_1 - V_2 = A_1$, то

$$\frac{k}{2}(x_{01}^2 - x_{02}^2) = (|x_{01}| + |x_{02}|)f_0,$$

$$|x_{01}| - |x_{02}| = \frac{2f_0}{k} = 2a$$

(этот результат мы уже получили раньше из другого рассмотрения), и

$$A_1 = 2f_0(|x_{01}| + a).$$

Мы видим, что с увеличением начального отклонения A_1 растет линейно, а V_1 — по квадратичному закону. Следовательно, при достаточно большом начальном отклонении запас энергии в системе будет гораздо больше, чем потери энергии на трение за половину условного периода, и значит, при достаточно больших начальных отклонениях система первое время всегда будет себя вести, как колебательная.

Посмотрим теперь, как изобразится исследованное нами движение на фазовой плоскости. Для этого положим, как обычно, $\frac{dx}{dt} = y$ и получим два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2(x-a)}{y} \quad \text{при } y < 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2(x+a)}{y} \quad \text{при } y > 0;$$

интегрируя, находим:

$$\frac{(x-a)^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_1^2\omega_0^2} = 1 \quad \text{при } y < 0, \quad (3.14a)$$

$$\frac{(x+a)^2}{R_2^2} + \frac{y^2}{R_2^2\omega_0^2} = 1 \quad \text{при } y > 0, \quad (3.14б)$$

где R_1 и R_2 — константы интегрирования. Уравнения (3.14a) и (3.14б) определяют семейства «полуэллипсов», центры которых смещены соответственно вправо (3.14a) и влево (3.14б) на a . Пользуясь методом «припасования» (см. выше) и учитывая направление движения по фазовой плоскости, нетрудно построить фазовые траектории, как это и сделано на рис. 118. По этому рисунку, представляющему фазовый «портрет» рассматриваемой динамической системы, мы сразу можем судить о характере возможных движений. Все фазовые траектории суть спирали, составленные из полуэллипсов, и приходят на отрезок O_1O_2 , который является геометрическим местом состояний равновесия. Таким образом, вообще говоря, наша система со-

вершает колебания вокруг положения равновесия с уменьшающимися размахами и останавливается, совершив конечное число этих размахов, зависящее от начальных условий. В частном случае, когда начальные условия соответствуют одной из точек отрезка O_1O_2 , наша система остается в покое. Состоянию покоя, как мы видим, соответствуют не отдельные точки, а целый отрезок прямой O_1O_2 . Но на этом отрезке система обладает все же некоторой своеобразной «неустойчивостью». Действительно, пусть, например, система остановилась в точке $+x_1$, и мы, толкая ее в разные стороны, сообщаем ей одну и ту же величину начальной скорости t .

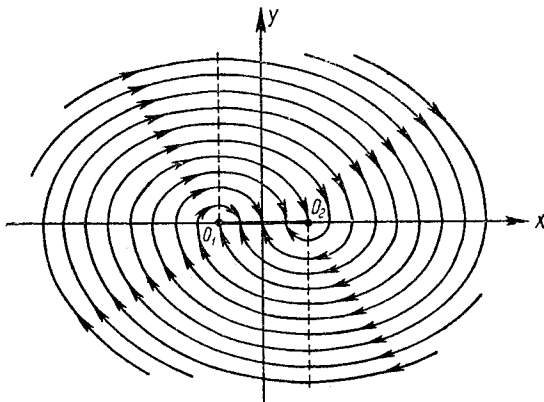


Рис. 118.

Но, толкая ее в одну сторону, мы «закидываем» представляющую точку на $+y_1$, а толкая в другую сторону — на $-y_1$ (рис. 119). Так как верхние полуэллипсы в этом месте имеют большие полуоси, чем нижние, то они

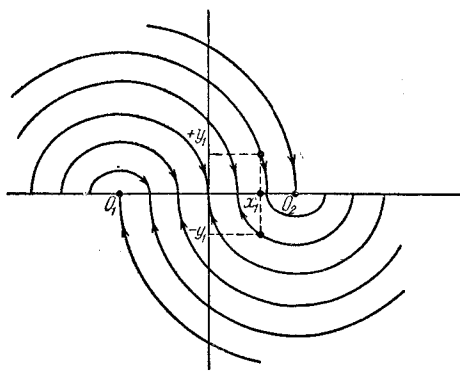


Рис. 119.

идут «круче» к оси абсцисс, чем нижние, и, следовательно, при толчке $-y_1$ система в конечном счете больше приблизится к «истинному» положению равновесия (к началу координат), чем при толчке $+y_1$ она удалится от этого положения равновесия. Следовательно, если толчки действуют как в ту, так и в другую сторону одинаково часто (например, этого можно достигнуть, подвергая систему искусственному систематическому

встряхиванию), то в конце концов наша система придет в область, непосредственно прилегающую (размеры этой области сколь угодно малы при достаточно малых толчках) к «истинному» положению равновесия.

Эти явления — наличие целой области положений равновесия (так называемый «застой») и приближение системы к истинному положению равновесия в результате толчков — наблюдаются в большей или

меньшей степени во всех измерительных и указательных приборах, в которых подвижная система испытывает сухое трение (например, трение в подшипниках). Застой представляет собой, конечно, вредное явление в измерительных приборах, и поэтому в них всегда стремятся сделать трение в подшипниках и вообще сухое трение возможно малым. Ясно, что «жидкое» трение не может играть такой роли, так как оно влияет только на скорость установления подвижной системы, но не влияет на окончательное ее положение. Поэтому в некоторых системах измерительных и указательных приборов используется весьма остроумный прием, позволяющий «превратить» сухое трение в жидкое. Именно, оси сообщается постоянное движение взад и вперед вдоль подшипника. Тогда составляющая силы трения оси о подшипник *в направлении вращения* пропорциональна скорости вращения (если скорость достаточно мала), и прибор ведет себя как система, обладающая жидким, а не сухим трением.

§ 3. Ламповый генератор в случае Г-характеристики

Прием, которым мы воспользовались в предыдущем параграфе, не является, конечно, специфичным для диссипативных систем. Его можно применить в том случае, когда «силы трения» хотя и могут быть аппроксимированы разрывной характеристикой, но не подчиняются условию диссипативности. Мы рассмотрим сейчас при помощи этого

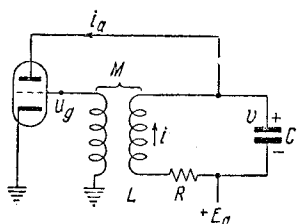


Рис. 120.

же приема — замены нелинейного уравнения несколькими линейными с приспособиванием начальных условий — два примера, для которых не удовлетворяется условие диссипативности. Эти примеры имеют существенное значение; они позволяют нам подойти к теории периодических процессов в нелинейных системах. В качестве первого примера рассмотрим ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода и индуктивной обратной связью (рис. 120). Пренебрегая сеточными токами и анодной реакцией и применяя обозначения, указанные на рисунке, мы можем, исходя из законов Кирхгофа, написать следующие дифференциальные уравнения для колебаний в рассматриваемом ламповом генераторе:

$$Ri = -v - L \frac{di}{dt}, \quad i = i_a + C \frac{dv}{dt},$$

или после исключения v :

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_a. \quad (3.15)$$

Здесь $i_a = i_a(u_g)$ — анодный ток, зависящий, как мы предположили, только от напряжения на сетке лампы

$$u_g = -M \frac{di}{dt}. \quad (3.16)$$

Предположим, что характеристика лампы $i_a = i_a(u_g)$ имеет ток насыщения (равный I_s) и большую крутизну восходящего участка и что рабочая точка лежит на этом восходящем участке характеристики. Такая характеристика лампы изображена на рис. 121 пунктирной линией. Если амплитуда колебаний напряжения на сетке лампы настолько велика, что большую часть времени анодный ток i_a равен либо нулю (лампа заперта), либо току насыщения I_s , то мы можем достаточно хорошо отобразить свойства такой лампы идеализированной Г-характеристикой, изображенной на том же рис. 121 сплошной линией:

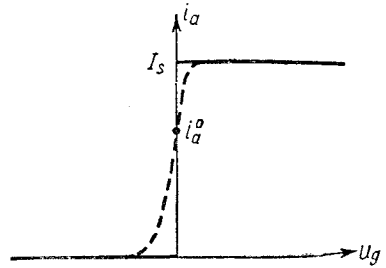


Рис. 121.

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{при } u_g < 0, \\ I_s & \text{при } u_g > 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

(мы будем считать, что при $u_g = 0$ $i_a = i_a^0$). Как мы увидим дальше, амплитуда колебаний сеточного напряжения будет тем больше, чем при прочих равных условиях меньше затухание контура. Отсюда можно заключить, что наша идеализация характеристики лампы (так называемая Г-характеристика) в случае достаточно малого затухания контура и достаточно сильной обратной связи может привести к результатам, имеющим определенный физический интерес.

Выберем такое расположение катушек, чтобы коэффициент взаимной индукции $M < 0$ (как увидим ниже, в этом случае генератор будет совершать автоколебания); тогда уравнение для тока в колебательном контуре генератора, уравнение (3.15), может быть приведено к виду

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{x} < 0, \\ \omega_0^2 & \text{при } \dot{x} > 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

где

$$x = \frac{i}{I_s}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{и} \quad 2h = \frac{R}{L}.$$

Уравнение (3.18) (равно как и (3.17)) имеет разрывную правую часть, так как анодный ток меняется скачком при проходе \dot{x} или u_g через нуль. Вследствие этого мы должны дополнительно к уравне-

нию (3.18) определить, как ведет себя система при прохождении \dot{x} через нуль. Исходя из физически ясного требования ограниченности напряжений и токов в схеме, мы можем утверждать, что x и \dot{x} непрерывны всюду и, в частности, при $\dot{x} = 0$ ¹⁾. Поэтому, как и в предыдущем случае, мы будем рассматривать два движения, подчиняющихся двум различным дифференциальным уравнениям, и будем «припасовывать» начальные условия нового движения к тому конечному состоянию, в которое привело систему предшествующее движение.

Каждое из уравнений (3.18) определяет затухающее «полуколебание» (мы будем предполагать, что затухает мало). Из этих двух «полуколебаний» только одно происходит относительно смещенного положения равновесия, именно то, для которого $\frac{dx}{dt} > 0$. Положение равновесия для этого «полуколебания» смещается на единицу в сторону, противоположную той, в которую смещалось состояние равновесия для соответствующего «полуколебания» в случае твердого трения. Нетрудно сообразить, что это обстоятельство при достаточно малых начальных отклонениях и достаточно малом линейном затухании приводит к последовательному увеличению размахов колебаний, а не к их уменьшению, как было в случае сухого трения. Такое нарастающее колебание, состоящее из двух «затухающих полусинусоид», из которых одна смещена в направлении оси ординат на единицу, изображено на рис. 122.

Однако легко убедиться, что это нарастание колебаний не будет продолжаться бесконечно и что в системе установятся незатухающие колебания с некоторой постоянной «амплитудой», так как при больших размахах колебаний будет происходить их последовательное уменьшение.

Этот процесс установления периодических колебаний в ламповом генераторе мы можем проследить, рассматривая фазовые траектории на фазовой плоскости x, y ($y = \dot{x}$). Мы не будем предполагать, что сопротивление R колебательного контура достаточно мало (но оно во всяком случае таково, что $h < \omega_0$). Ясно, что фазовые траектории в нижней полуплоскости ($y < 0$) совпадают с фазовыми траекториями

¹⁾ Действительно, если бы x (или ток i) изменялись скачком, то были бы бесконечно большие э. д. с. индукции и напряжение на сетке, которые пропорциональны $\frac{di}{dt}$. Это невозможно, следовательно, x — непрерывная функция времени. Точно также невозможны скачки напряжения на конденсаторе v , ибо иначе были бы бесконечные токи и напряжения в контуре. Но $L \frac{di}{dt} = -v - Ri$, поэтому непрерывным будет и $\frac{di}{dt}$ (или \dot{x}) в силу непрерывности v и i . Это условие непрерывности можно получить и путем предельного перехода в задаче о ламповом генераторе с непрерывной характеристикой лампы, когда эта характеристика стремится к Γ -характеристике.

(спиралями) затухающего линейного осциллятора (гл. I, § 4), а в верхней ($y > 0$) — с такими же траекториями, но для случая осциллятора со смещенным в точку $(1, 0)$ состоянием равновесия. Из этих «полу-

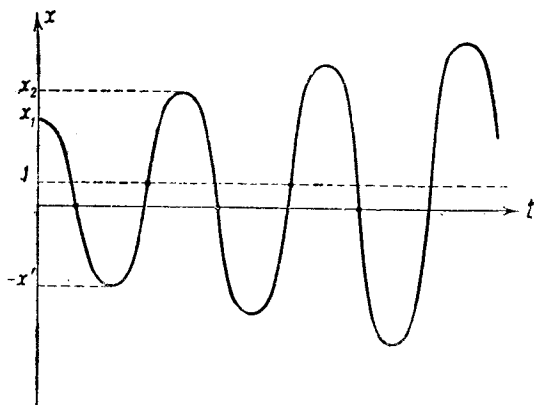


Рис. 122.

витков» спиралей и образуются целые фазовые траектории, являющиеся *непрерывными* кривыми (как мы только что разбирали, x и $y = \dot{x}$ должны быть непрерывными функциями времени и, в частности, в те моменты, когда $y = 0$).

Единственным состоянием равновесия и, очевидно, неустойчивым, является точка

($x_0, 0$), где $x_0 = \frac{i_a^0}{I_s}$.

Общий вид фазовой плоскости лампового генератора с Г-характеристикой изображен на рис. 123.

Покажем, что на фазовой плоскости существует замкнутая фазовая траектория (так называемый *предельный цикл*), к которой асимптотически

(при $t \rightarrow +\infty$) приближаются все остальные фазовые траектории (а это как раз и означает, что в рассматриваемой схеме при любых начальных условиях будут устанавливаться незатухающие, периодические колебания). С этой целью рассмотрим произвольную фазовую траекторию, выходящую на нижнюю полуплоскость в некоторой точке x_1

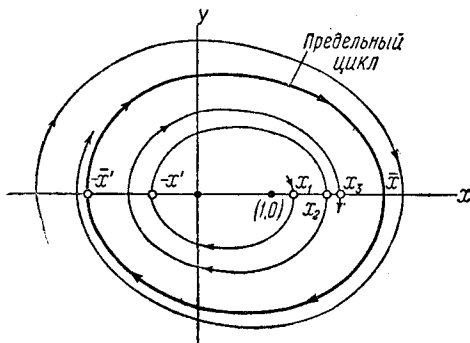


Рис. 123.

¹⁾ Напомним, что мы полагаем анодный ток *однозначной* функцией сетевого напряжения. В частности, при $v_g = 0$, что имеет место в состоянии равновесия, $i_a = i_a^0$.

полуоси положительных x (рис. 123). Пройдя нижнюю полуплоскость, она пересечет полуось отрицательных x (обозначим абсциссу этой точки пересечения через $-x'$), выйдет на верхнюю полуплоскость и затем вернется обратно на полуось положительных x (абсциссу этой второй, последующей точки пересечения обозначим через x_2 ; очевидно, x_1, x' и $x_2 > 0$).

Найдем связь между первой и второй точками пересечения рассматриваемой произвольной фазовой траектории с полуосью положительных x — связь между x_1 и x_2 . Так как в нижней полуплоскости эта траектория является «полувитком» спирали для осциллятора с затуханием и с состоянием равновесия в точке $(0, 0)$, то согласно (1.31)

$$x' = x_1 e^{-\frac{d}{2}},$$

где $d = hT = \frac{2\pi h}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}$ — логарифмический декремент затухания контура генератора. В верхней полуплоскости эта траектория является также «полувитком» такой же спирали, но для осциллятора с состоянием равновесия, смещенным на единицу вправо, т. е. в точку $(1, 0)$. Поэтому согласно тому же соотношению

$$x_2 - 1 = (x' + 1) e^{-\frac{d}{2}},$$

так как $x' + 1$ и $x_2 - 1$ — расстояния начальной и конечной точек «полувитка» от «состояния равновесия» $(1, 0)$. Исключая x' , получим:

$$x_2 = 1 + e^{-\frac{d}{2}} + x_1 e^{-d}. \quad (3.19)$$

Эта функция, определяющая по заданной точке пересечения фазовой траектории с полуосью положительных x последующую точку пересечения, называется *функцией последования*. Она определяет некоторое *точечное преобразование полупрямой* (полуоси положительных x) *самой в себя*, устанавливая определенное взаимно-однозначное и непрерывное соответствие точек x_1 этой полупрямой с точками x_2 той же полупрямой.

Неподвижная точка этого точечного преобразования — точка, преобразующаяся сама в себя (для нее $x_1 = x_2$), очевидно, является точкой пересечения *замкнутой* фазовой траектории с полуосью положительных x . Подставляя в (3.19) $x_1 = \bar{x}$, $x_2 = \bar{x}$, получим для неподвижной точки:

$$\bar{x} = 1 + e^{-\frac{d}{2}} + \bar{x} e^{-d},$$

или

$$\bar{x} = \frac{1 + e^{-\frac{d}{2}}}{1 - e^{-d}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{d}{2}}} > 1. \quad (3.20)$$

Таким образом, рассматривая точечное преобразование полуоси положительных x самой в себя, осуществляемое фазовыми траекториями и выражаемое функцией последования (3.19), мы доказали, что на фазовой плоскости лампового генератора имеется *единственная* замкнутая фазовая траектория, соответствующая периодическим, незатухающим колебаниям в генераторе. Однако, для того чтобы утверждать, что эти незатухающие колебания действительно могут происходить и что наши высказывания о наличии периодического режима имели физическое значение, нам следует ответить еще на два вопроса. Во-первых, на вопрос о том, при каких начальных условиях устанавливается найденное нами периодическое решение, в частности установится ли оно, если начальные значения x и \dot{x} будут достаточно малы. Во-вторых, на вопрос о том, *устойчиво* ли найденное периодическое движение по отношению к произвольным малым изменениям начальных условий, например по отношению к изменениям максимального значения силы тока. На оба эти вопроса мы легко сможем ответить, рассматривая график функции последования (3.19) — так называемую «диаграмму Ламерея» (рис. 124). Очевидно, графиком функции последования (3.19) является прямая линия с угловым коэффициентом $0 < e^{-d} < 1$, отсекающая на оси ординат положительный отрезок $1 + e^{-\frac{d}{2}}$. Неподвижная точка \bar{x} , по определению, должна лежать на прямой $x_1 = x_2$ и, следовательно, является точкой пересечения этой

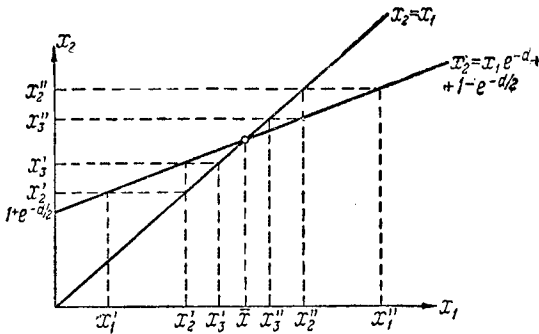


Рис. 124.

прямой с графиком функции последования (из рис. 124 еще раз следует существование и единственность неподвижной точки).

Возьмем какую-либо фазовую траекторию, отличную от замкнутой, и рассмотрим последовательность точек ее пересечения с полуосью $y=0, x > 0$ — последовательность точек x_1, x_2, x_3, \dots (рис. 123). В этой последовательности точек каждая последующая точка определяется по предыдущей функцией последования (3.19), и, пользуясь построением, приведенным на рис. 124, можно определить по заданной

первой точке x_1 все последующие x_2, x_3, x_4, \dots . Такое построение (так называемая «лестница Ламерея») на рис. 124 проведено для двух последовательностей точек, для одной из которых начальная точка $x'_1 < \bar{x}$, а для другой $x''_1 > \bar{x}$. Как видно из рис. 124, точки обеих последовательностей x'_1, x'_2, x'_3, \dots и $x''_1, x''_2, x''_3, \dots$ приближаются к неподвижной точке \bar{x} ¹⁾. Это, очевидно, означает, что фазовые траектории, идущие как вне, так и внутри замкнутой фазовой траектории, асимптотически приближаются (при $t \rightarrow \infty$) к последней. Такую изолированную замкнутую фазовую траекторию, к которой стремятся все соседние и которая соответствует периодическому режиму в системе, мы будем называть *предельным циклом*.

Таким образом, полученные результаты дают право ответить сразу на оба интересующих нас вопроса. Действительно, во-первых, каковы бы ни были начальные условия, в системе установятся незатухающие колебания и, во-вторых, эти незатухающие колебания устойчивы²⁾, так как отклонения (в обе стороны) от стационарного режима затухают. Таким образом, мы видим, что в данном случае, несмотря на наличие трения, в нашей системе устанавливаются и поддерживаются незатухающие колебания за счет сил, зависящих от состояния движения самой системы, причем «амплитуда» этих колебаний определяется свойствами системы, а не начальными условиями. Такие колебания мы будем называть *автоколебаниями*, а системы, в которых возможны автоколебания, — *автоколебательными системами*³⁾.

Амплитуда автоколебаний⁴⁾ для безразмерной величины x равна

$$x^* = \frac{1}{2} (\bar{x} + \bar{x}') = \frac{1}{2} \bar{x} (1 + e^{-d/2}) = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-d/2}}{1 - e^{-d/2}} = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{d}{4},$$

или для тока в колебательном контуре

$$I = I_s \cdot x^* = \frac{I_s}{2} \operatorname{cth} \frac{d}{4}. \quad (3.21)$$

¹⁾ Нетрудно показать и аналитически, что последовательность x_1, x_2, x_3, \dots при любых x_1 имеет своей предельной точкой неподвижную точку преобразования \bar{x} , т. е. что $x_n \rightarrow \bar{x}$ при $n \rightarrow \infty$ и любых x_1 . Действительно, как нетрудно видеть,

$$x_n = \frac{1 - e^{-(n-1)d}}{1 - e^{-d/2}} + x_1 e^{-(n-1)d}$$

и, следовательно, $x_n \rightarrow \frac{1}{1 - e^{-d/2}} = \bar{x}$ при $n \rightarrow \infty$ и любых x_1 . Это также

следует и из теоремы Кенигса, которая будет подробно рассмотрена в § 7 гл. V.

²⁾ Можно легко показать, что рассматриваемое периодическое движение устойчиво в смысле Ляпунова. Рассуждения в тексте доказывают лишь абсолютную орбитную устойчивость рассматриваемого движения. В дальнейшем мы подробно остановимся на исследовании устойчивости периодических движений в неконсервативных системах (см. § 6 гл. V).

³⁾ В гл. V мы дадим (для случая одной степени свободы) математическое определение понятий «автоколебание», «автоколебательная система».

⁴⁾ Под амплитудой (периодических) колебаний какой-либо величины мы будем понимать половину разности максимального и минимального значений этой величины.

Она тем больше, чем меньше затухание колебательного контура.

При $d \ll 1$, разлагая $e^{-\frac{d}{2}}$ в степенной ряд и ограничиваясь главными членами, получим следующее приближенное выражение для амплитуды установившихся колебаний тока в колебательном контуре:

$$I = \frac{2I_s}{d}.$$

Период этих стационарных колебаний в рассматриваемом случае совпадает с «периодом» затухающих колебаний линейного осциллятора. Но это справедливо только для рассматриваемого частного случая. В дальнейшем мы увидим, что, вообще говоря, период автоколебаний вовсе не совпадает с «периодом» затухающих колебаний линейного контура, входящего в состав автоколебательной системы.

Энергия, необходимая для поддержания незатухающих колебаний в контуре, доставляется анодной батареей. Легко видеть, что эта компенсирующая потери энергия поступает из анодной батареи не все время, а только в течение полупериода за каждый период, именно того полупериода, в течение которого течет анодный ток (рассеяние же энергии в колебательном контуре происходит, конечно, все время, так как контур обладает постоянным сопротивлением R)¹⁾. Так как батарея дает ток только в течение полупериода, то средняя мощность, отдаваемая батареей, имеет значение

$$W_A = \frac{I_s E_a}{2},$$

где E_a — напряжение, даваемое батареей. Так как i как функция времени нам известна, то можно подсчитать мощность, развиваемую в колебательном контуре, подставляя в интеграл $\int Ri^2 dt$ выражение для i для первой и второй половин периода. Однако, как будет показано ниже, при достаточно малых затуханиях колебания в контуре близки к синусоидальным. Ограничиваясь этим случаем, мы можем для подсчета мощности, рассеиваемой в контуре, считать колебания синусоидальными с амплитудой $\frac{2I_s}{d}$. Но в таком случае можно принять с достаточной степенью точности, что переменное напряжение на контуре $V \approx I \cdot \omega L$, а средняя за период рассеиваемая в контуре мощность

$$W = \frac{RI^2}{2} = \frac{RI}{2} \cdot \frac{2I_s}{d} = \frac{RII_s}{\pi R} = \frac{I_s \omega LI}{\pi} = \frac{VI_s}{\pi},$$

¹⁾ Конечно, за исключением тех моментов времени, для которых ток в колебательном контуре равен нулю.

и, наконец, к. п. д. генератора

$$\eta = \frac{W}{W_A} = \frac{I_s V}{\pi} \cdot \frac{2}{I_s E_a} = \frac{2}{\pi} \frac{V_A}{E_a}.$$

Ясно, что переменное напряжение на контуре V должно быть меньше анодного напряжения батареи E_a , так как в противном случае в некоторые моменты напряжение на аноде падало бы до нуля и даже становилось отрицательным, а тогда лампа не вела бы себя так, как мы предполагали, и наша идеализация характеристики в таком случае не была бы применима. Следовательно, к. п. д. генератора при сделанных нами предположениях не может превышать $\frac{2}{\pi}$, т. е. 64% ¹⁾.

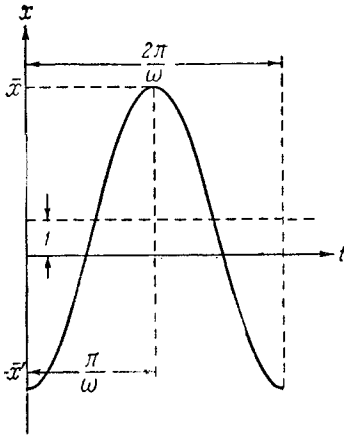


Рис. 125.

Остальная часть мощности, отдаваемой батареей, как легко сообразить, рассеивается на аноде лампы в виде тепла.

Исследуем более подробно характер того периодического процесса, который, как мы обнаружили, может происходить в ламповом генераторе. С этой целью найдем разложение

функции, изображающей зависимость силы тока от времени для этого периодического процесса, в ряд Фурье. В частности, это разложение даст нам возможность показать (о чем у нас уже шла речь), что при достаточно малом затухании рассматриваемый периодический процесс будет как угодно близок к синусоидальному.

Функция, изображающая этот периодический процесс с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (рис. 125), может быть записана следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi h}{\omega}}} e^{-ht} \frac{\cos(\omega t - \vartheta)}{\cos \vartheta} && \text{при } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}, \\ x &= -\frac{e^{\frac{\pi h}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi h}{\omega}}} e^{-ht} \frac{\cos(\omega t - \vartheta)}{\cos \vartheta} && \text{при } \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}, \end{aligned} \right\} (3.22)$$

где

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{h}{\omega}.$$

¹⁾ Коэффициент полезного действия генератора может быть выше 64% , если рабочая точка на характеристике смещена влево, т. е. если анодный ток появляется не при нулевом, а при каком-то положительном напряжении на сетке.

Здесь константы интегрирования подобраны так, чтобы получилось найденное непрерывно дифференцируемое периодическое решение, т. е. чтобы $x(0) = x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = -\bar{x}'$, при $t = \frac{\pi}{\omega}$ для обоих выражений $x = \bar{x}$, $\dot{x}(0) = \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \dot{x}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0$, причем $\dot{x} > 0$ для $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$ и $\dot{x} < 0$ для $\frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}$. Воспользовавшись выражениями (3.22), можно найти по известным формулам разложение $x(t)$ в ряд Фурье. Однако это разложение можно найти в рассматриваемом случае совершенно иным путем, не зная наперед аналитического выражения $x(t)$. Мы используем этот второй путь, который, допуская простую физическую интерпретацию, приводит к менее громоздким выкладкам. Именно, мы можем рассуждать следующим образом. Исследуя поведение изображающей точки на фазовой плоскости, мы убедились, что в течение промежутка времени от 0 до $\frac{\pi}{\omega}$ ($x(0) < 0$, $\dot{x}(0) = 0$) величина $\dot{x} > 0$, а в промежутке от $\frac{\pi}{\omega}$ до $\frac{2\pi}{\omega}$ величина $\dot{x} < 0$, и т. д.

Это справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося процесса. Но если это так, то мы можем утверждать, что функция $i_a = i_a(u_g)$ в уравнении (3.15) есть периодическая функция времени с периодом T . Вид этой функции для рассматриваемого нами случая Г-характеристики таков, что нашим утверждением однозначно определяется значение функции $i_a = F(t)$ в любой момент времени. Именно, $i_a = F(t)$

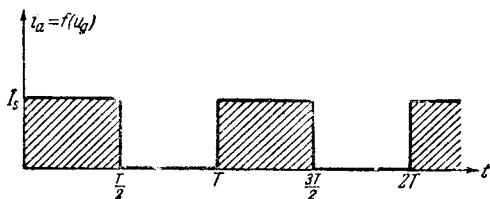


Рис. 126.

представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов (рис. 126), причем в течение одного полупериода, когда $u_g > 0$, $i_a(u_g) = I_s$, а в течение другого полупериода, когда $u_g < 0$, $i_a(u_g) = 0$. Другими словами, хотя i_a и является функцией u_g , т. е. в конечном счете функцией силы тока в колебательном контуре, но он зависит от нее только в том смысле, что период функции $F(t)$ определяется свойствами системы, а форма (или, иначе, амплитуды членов ряда Фурье, представляющего эту периодическую функцию) не зависит от характера движений в системе. Мы можем поэтому рассматривать функцию

$$f_1(\dot{x}) = \frac{i_a(-M\dot{x})}{I_s} = \frac{i_a(u_g)}{I_s} \text{ в уравнении}$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 f_1(\dot{x}) \quad (3.23)$$

не как функцию \dot{x} , а как некую действующую на линейный

колебательный контур периодическую, заданную как функцию времени «внешнюю силу» $f(t)$, частота которой, однако, не является произвольной, а совпадает с «условной частотой» затухающих колебаний в системе, т. е. с частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \hbar^2}$. Свойства системы таковы, что она приспособливает «внешнюю силу» к своему периоду, как бы «рубит» эту силу на части, совпадающие с периодом системы. Таким образом, задача сводится к исследованию действия внешней силы на колебательную систему. В рассматриваемом случае мы можем, следовательно, амплитуды основного тона и обертонов изучаемого периодического процесса определять так же, как в задаче о вынужденных колебаниях, если вынуждающая периодическая «внешняя сила» $f(t)$ задана (на протяжении одного периода) следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Разлагаем эту функцию в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\omega t. \quad (3.24)$$

Так как здесь мы имеем дело с линейной задачей, для которой соблюдается принцип суперпозиции, то полное решение для «вынужденных» колебаний можно искать как сумму «вынужденных» решений, обусловленных отдельными членами ряда (3.24), т. е. искать «вынужденное» периодическое решение в виде:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t). \quad (3.25)$$

В таком случае

$$\dot{x} = \sum_1^{\infty} (-a_s s\omega \sin s\omega t + b_s s\omega \cos s\omega t),$$

$$\ddot{x} = \sum_1^{\infty} (-a_s s^2 \omega^2 \cos s\omega t - b_s s^2 \omega^2 \sin s\omega t).$$

Подставляя значения x , \dot{x} и \ddot{x} в уравнение (3.23) и приравнявая нулю коэффициенты при косинусах и синусах, найдем, что все коэффициенты Фурье с *четными* номерами равны нулю (кроме $a_0 = 1$), а

коэффициенты Фурье с *нечетными* номерами определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} -\omega^2 s^2 a_s + 2h\omega s b_s + \omega_0^2 a_s &= 0, \\ -\omega^2 s^2 b_s - 2h\omega s a_s + \omega_0^2 b_s &= \frac{2\omega_0^2}{\pi s}, \end{aligned}$$

где $s = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Решая эти уравнения, находим интересующие нас выражения для нечетных коэффициентов Фурье:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= -\frac{2\omega_0^2}{\pi(2k+1)} \frac{2h\omega(2k+1)}{[\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)^2]^2 + 4h^2\omega^2(2k+1)^2}, \\ b_{2k+1} &= \frac{2\omega_0^2}{\pi(2k+1)} \frac{\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)^2}{[\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)^2]^2 + 4h^2\omega^2(2k+1)^2}, \end{aligned}$$

и для квадратов амплитуд соответствующих гармоник:

$$\begin{aligned} R_{2k+1}^2 &= a_{2k+1}^2 + b_{2k+1}^2 = \\ &= \frac{4\omega_0^4}{\pi^2(2k+1)^2} \frac{1}{[\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)^2]^2 + 4h^2\omega^2(2k+1)^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Мерой несинусоидальности периодической функции $x(t)$, т. е. количественной характеристикой отклонения ее формы от синусоиды, служит *клирфактор* χ , определяемый выражением¹⁾

$$\chi^2 = \frac{\sum_{s=2}^{\infty} (a_s^2 + b_s^2)}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Оценим величину клирфактора при малых h . Формулы (3.26) представляют собой результат применения обычной теории линейного резонанса к рассматриваемому случаю. Основной «резонансный» тон внешней силы порождает основной тон $x(t)$, причем квадрат амплитуды этого тона $a_1^2 + b_1^2$, как нетрудно убедиться, неограниченно растет при $h \rightarrow 0$. Остальные члены разложения внешней силы имеют частоты, далекие от резонанса, и поэтому они порождают движение, для которого интересующая нас сумма квадратов коэффициентов ряда Фурье при $h \rightarrow 0$ стремится к конечному положительному пределу (этот предел соответствует случаю действия нерезонансных членов на гармонический осциллятор без трения).

Отсюда ясно, что при достаточно малом h периодическое движение в генераторе с Г-характеристикой имеет сколь угодно малый клирфактор или, иначе говоря, что в этом случае автоколебания сколь угодно близки по форме к синусоидальным.

¹⁾ Заметим, что в рассматриваемом случае можно найти точное выражение для клирфактора в конечном виде.

Мы пользовались в вышеприведенных рассуждениях представлениями обычной теории резонанса.

Известно, что благодаря явлению резонанса сильно несинусоидальная внешняя сила при наличии линейного затухания может поддерживать в гармоническом осцилляторе колебания, весьма близкие (в смысле близости периода и малости клирфактора) к одному из его собственных (и, следовательно, синусоидальных) колебаний. Мы можем поэтому сказать, что в задаче о генераторе с Γ -характеристикой при достаточно малом h мы имеем дело с *авторезонансом*, т. е. с резонансом под действием силы, порождаемой движением самой системы¹⁾.

Заметим, что в данном частном случае благодаря особым свойствам характеристики мы смогли бы, исходя из теории вынужденных колебаний, решить задачу не только об установившемся режиме, но и о процессе установления автоколебаний при любых начальных условиях.

Если бы мы рассматривали ту же ламповую схему, но с «перевернутой» обратной связью, т. е. при $M > 0$, то мы получили бы результат, сходный с полученным в предыдущем параграфе. Действие лампы с Γ -характеристикой было бы эквивалентно (при колебаниях) некоторому кулоновскому трению в соответствующей механической задаче. Конечно, в этом случае автоколебания были бы невозможны и колебания были бы затухающими.

В рассмотренной нами системе периодический процесс, если он существует (это будет при $M < 0$), устанавливается при любых начальных условиях, т. е. имеет место самовозбуждение автоколебаний. Такой режим автоколебательных систем называется *мягким режимом* в отличие от *жесткого режима*, при котором для установления периодических колебаний необходим начальный толчок конечной величины. Иначе говоря, при жестком режиме автоколебательная система имеет и устойчивое периодическое движение и устойчивое равновесное состояние, и установление того или другого зависит от того, какие начальные условия были заданы.

В ламповом генераторе с Γ -характеристикой «мягкость» режима была обусловлена тем, что характеристика лампы не смещена, т. е. что вертикальная часть характеристики проходит через точку $u_g = 0$. В случае же смещенной характеристики для лампового генератора также получается жесткий режим. Смещенная Γ -характеристика может служить удовлетворительной идеализацией для того случая, когда, во-первых, переменные напряжения на сетке далеко превосходят напряжение насыщения лампы и, во-вторых, рабочая точка смещена либо в область тока насыщения, либо в область, где анодный ток равен нулю. В случае смещенной Γ -характеристики поведение лампы

¹⁾ В дальнейшем изложении мы еще вернемся к теории авторезонанса.

вого генератора будет определяться уравнениями такого же вида, как и при отсутствии смещения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x &= \omega_0^2 b \text{ при } \dot{x} > b, \\ \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \text{ при } \dot{x} < b, \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

причем для случая смещения, изображенного на рис. 127, величина $b > 0$ (затухание мы по-прежнему считаем малым). Разница заключается в том, что в этом случае «смена уравнений» происходит не при $\dot{x} = 0$, а при $\dot{x} = b$. В соответствии с этим должно быть изменено все наше рассмотрение, и в частности, изменится картина на фазовой плоскости (рис. 128). Фазовую плоскость мы должны «разрезать» не по прямой $y = 0$ (т. е. по оси x , как в случае отсутствия смещения), а по прямой $y = b$, и верхнюю часть полуплоскости сместить на единицу вправо. Из соображений непрерывности и в этом случае вытекает необходимость существования одной замкнутой траектории состоящей из двух «полуспиралей». К этой траектории стремятся все другие траектории, кроме тех, которые лежат внутри заштрихованной

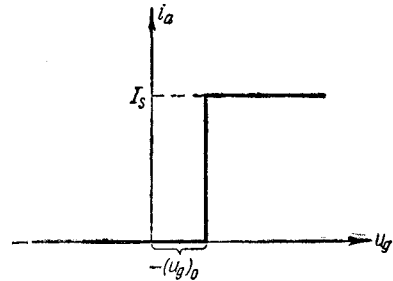


Рис. 127.

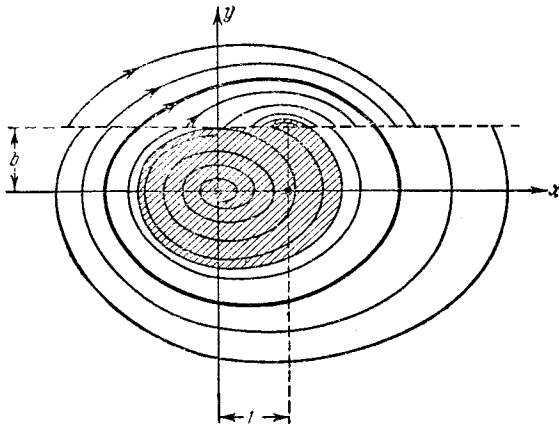


Рис. 128.

области, образованной «предельной спиралью» и прямой $y = b$. Из всех начальных состояний, лежащих внутри этой области, система стремится к состоянию равновесия, которое является, следовательно,

устойчивым (устойчивый фокус). Из картины на фазовой плоскости со всей очевидностью следует, что в генераторе установится периодический процесс только в том случае, когда в начальный момент напряжение или сила тока в контуре достаточно велики¹⁾.

§ 4. Теория часов. Модели с ударами

Часы представляют собой, как известно, такую колебательную систему, которая способна совершать колебания со стационарной амплитудой, не зависящей от начальных условий. Правда, для того чтобы часы пошли, т. е. чтобы эта стационарная амплитуда установилась, обычно нужен некоторый достаточно большой начальный толчок, но амплитуда установившихся колебаний сама по себе не зависит от величины начального толчка (иначе говоря, в большинстве часов имеет место жесткий режим возбуждения автоколебаний). Если начальный толчок слишком мал, то периодический процесс вообще не установится, колебания затухнут. Эта область начальных значений, из которой система стремится к состоянию равновесия, а не к состоянию периодического движения, в разных часах может быть разной величины и зависит от устройства часов, но, как правило, существует во всяких часах. Эти характерные черты часового механизма мы и попытаемся объяснить, рассматривая возможно более простые, идеализированные модели часов.

Всякий часовой механизм грубо может быть разделен на три основных части: 1) колебательная система, например маятник, баланси́р, горизонтальный маятник и т. д.; 2) заводной механизм — гиря, пружина и, наконец, 3) спусковой механизм, связывающий колебательное устройство с заводным механизмом. Эта связь заключается в следующем: при определенных положениях колебательной системы (в дальнейшем мы будем для краткости говорить о маятнике) приходит в действие спусковой механизм, сообщающий маятнику за счет энергии заводного механизма некоторый импульс. Длительность этого импульса в различных часах бывает различна, но в хороших часовых механизмах импульс бывает весьма кратковременным. Действует спусковой механизм обычно два раза за период и притом вблизи положения равновесия колебательной системы, т. е. в той области, где скорость системы наибольшая. Таково в общих чертах устройство всякого часового механизма. Для нас в устройстве часов наиболее существенно то, что момент, когда начинает действовать спусковой механизм, целиком определяется положением колебательной системы (например, спусковой механизм приходит в действие каждый раз, когда маятник проходит через положение равновесия). Кроме того, характер воздействия и величина импульса также зависят от состояния маятника. Следовательно, всякие силы, которые могут возникнуть в механизме,

¹⁾ Более подробно эта задача будет рассмотрена в § 4 гл. VIII.

зависят только от положений и скоростей отдельных частей системы, но не зависят явно от времени. Таким образом, часы — это *автономная* система.

Для теоретического рассмотрения работы часовых механизмов мы должны, как и во всех других случаях, сделать некоторые упрощающие предположения об устройстве часового механизма, которые, делая такое рассмотрение возможным, отображали бы в то же время основные свойства часового механизма. Простейшими теоретическими моделями часов являются модели с ударами, в которых используется представление о воздействии со стороны спускового механизма на колебательную систему часов в виде *мгновенных ударов*. Такие «ударные» модели часов мы и будем рассматривать в настоящем параграфе. Именно, мы будем предполагать, что колебательная система (балансир, маятник) *в момент прохождения системы через положение равновесия* испытывает со стороны спускового механизма мгновенные удары, приводящие к мгновенным увеличениям скорости колебательной системы. Что касается закона изменения скорости при ударе, то тут уместны два наиболее простых предположения. Во-первых, можно предположить, что при ударе скорость системы всегда увеличивается на одну и ту же величину, независимо от скорости системы до удара. Пусть, например, скорость до удара v_0 и после удара v_1 . Тогда наше предположение сводится к тому, что $v_1 - v_0 = \text{const}$ или что $mv_1 - mv_0 = \text{const}$; наше предположение сводится таким образом к предположению о постоянстве количества движения, сообщаемого спусковым механизмом колебательной системе. Другое простое предположение сводится к тому, что кинетическая энергия системы при ударе изменяется на одну и ту же величину независимо от скорости системы до удара. Это предположение сводится к тому, что $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}$. Наши предположения, конечно, не исчерпывают всех возможных типов удара и являются лишь простейшими допущениями. Однако, присматриваясь к устройству часового механизма, можно подметить некоторые обстоятельства, говорящие в пользу второго допущения. Именно, в случае гиревого заводного механизма гиря при каждом ударе часов опускается на одно и то же расстояние, т. е. совершает одну и ту же работу. Поэтому вполне естественно второе предположение, что колебательная система получает одно и то же количество энергии¹⁾. В случае же первого предположения, поскольку энергия, сообщаемая механизму, существенно зависит от скорости системы, мы должны были бы сделать довольно искусственное допущение, что потери энергии в спусковом механизме изменяются в широких пределах, причем чем меньше скорость системы, тем больше потери энергии в спусковом механизме (так как чем меньше скорость системы до толчка, тем меньшую энергию она получает при

¹⁾ Это второе предположение и делается обычно в теории часов. См., например, [133].

толчке в случае первого предположения). Но все же первое предположение ($mv_1 - mv_0 = \text{const}$), хотя и кажется в силу этих соображений менее естественным, отнюдь не является невозможным, поэтому мы рассмотрим оба эти предположения, причем, как мы убедимся, они приводят в некоторых случаях к существенно различным результатам.

Помимо предположения о характере удара надо сделать известные предположения о характере силы трения в часовом механизме. Здесь мы также ограничимся двумя простейшими предположениями, которые мы уже применяли в других случаях. Во-первых, мы предположим, что величина силы трения пропорциональна скорости («линейное трение») и, во-вторых, что величина силы трения не зависит от скорости («постоянное трение»). Эти предположения также приведут нас к существенно различным результатам.

1. Часы в случае линейного трения. Мы начнем рассмотрение со случая «линейного трения» и удара с постоянным количеством движения, причем будем предполагать сначала, что спусковой механизм действует только один раз за период (удар, например, наносится при прохождении положения равновесия слева направо)¹⁾. Этот случай может быть исследован методом, аналогичным примененному для рассмотрения лампового генератора с Γ -характеристикой. Действительно, если логарифмический декремент затухания системы d (затухание мы считаем малым), а приращение скорости, которое получает система при ударе, a , то при начальной скорости y_1 (мы считаем начальным момент, непосредственно следующий за ударом) скорость через период будет:

$$\left. \begin{array}{l} \text{непосредственно до удара } y' = y_1 e^{-d}, \\ \text{» после удара } y_2 = y_1 e^{-d} + a. \end{array} \right\} \quad (3.28)$$

Для того чтобы процесс был периодическим, нужно, чтобы $y_2 = y_1 = \bar{y}$, где \bar{y} — стационарная амплитуда. Следовательно,

$$\bar{y} = \frac{a}{1 - e^{-d}}.$$

Стационарная амплитуда имеет всегда конечную величину, и a оказывается по сравнению с этой амплитудой тем меньше, чем меньше d . Рассуждениями, аналогичными тем, которые были приведены для лампового генератора, можно показать, что эта стационарная амплитуда устойчива и что при малом y_1 колебания будут нарастать.

В этом можно убедиться и непосредственно из выражения (3.28), связывающего две последующие амплитуды; действительно, при сколь угодно малом y_1 последующая амплитуда y_2 непременно будет больше y_1 .

¹⁾ Один удар за период имеет место, например, в спусковом устройстве, применяемом в хронометрах.

Следовательно, рассматриваемая нами модель часов обладает свойством самовозбуждения: колебания в ней нарастают при сколь угодно малых начальных отклонениях. Картина на фазовой плоскости для этого случая изображена на рис. 129. Фазовая плоскость заполнена кусками спиралей, начинающихся и кончающихся на верхней полуоси y . Дойдя по спирали до верхней полуоси y , представляющая точка делает скачок каждый раз на одну и ту же величину a вверх по оси y и снова продолжает движение по соответствующей спирали. Из соображений непрерывности ясно, что благодаря скачку путь представляющей точки по одной из спиралей окажется замкнутым, что и соответствует периодическому движению.

Таким образом, при сделанных предположениях мы получаем нужные свойства часового механизма в смысле наличия периодического процесса с амплитудой, не зависящей от начальных условий. Но наш идеализированный механизм обладает способностью самовозбуждения; при сколь угодно малом начальном толчке в конце концов часы будут совершать незатухающие колебания. Между тем в реальных часах всегда нужен некоторый начальный толчок конечной величины, для того чтобы часы пошли. Значит, наши предположения не дают возможности объяснить одно из наиболее типичных свойств часового механизма. К тому же результату мы придем, сохраняя предположение о линейном трении и переходя к другому закону удара, именно, полагая, что

$$y_2^2 - y'^2 = h^2 = \text{const.}$$

В таком случае скорость будет:

$$\begin{aligned} \text{непосредственно до удара } y' &= y_1 e^{-d}, \\ \text{» после удара } y_2 &= \sqrt{y'^2 + h^2} = \sqrt{y_1^2 e^{-2d} + h^2}. \end{aligned}$$

Стационарная амплитуда \bar{y} определяется из условия

$$y_2 = y_1 = \bar{y} \quad \text{и} \quad \bar{y}^2 (1 - e^{-2d}) = h^2 \quad \text{или} \quad \bar{y} = \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-2d}}}.$$

И в этом случае также, как легко видеть, будет иметь место самовозбуждение.

Картина на фазовой плоскости изменится по сравнению с картиной для предыдущего случая только в том смысле, что скачки a вдоль оси y будут уже не постоянны по величине, а будут функцией y' (т. е. скорости, которая предшествует удару):

$$a = \sqrt{y'^2 - h^2} - y'.$$

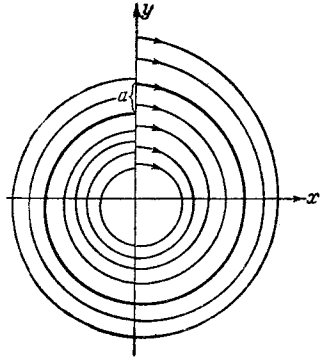


Рис. 129.

Значит, при возрастании предшествующей скорости скачки скорости будут убывать. Так как шаг спирали, т. е. разница между двумя последовательными значениями y , соответствующими значению $x = 0$, наоборот, возрастает при возрастании y , то опять-таки из соображений непрерывности ясно, что должна существовать такая спираль, движение которой будет замкнутым.

Аналогичное рассмотрение можно провести и для того случая, когда спусковой механизм наносит удары колебательной системе

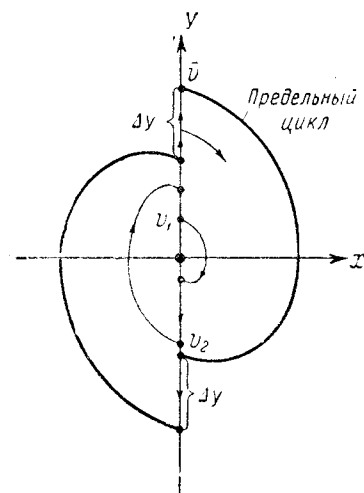


Рис. 130.

дважды за период, т. е. при каждом прохождении системы через положение равновесия¹⁾. При этом, конечно, каждый раз наносятся подталкивающие удары — удары в направлении движения. Картина на фазовой плоскости для этого случая изображена на рис. 130. Фазовые траектории состоят из «полувитков» спиралей затухающего осциллятора и имеют разрывы на оси y , соответствующие мгновенным ударам, наносимым колебательной системе часов со стороны спускового механизма.

Обозначим через v величины (абсолютные значения) скоростей, которыми обладает колебательная система часов *непосредственно после* ударов. Очевидно, скорость после каждого удара v_2 однозначно

определяется скоростью системы после предыдущего удара v_1 (рис. 130). Для двух примененных ранее предположений о законе удара мы получим следующие функции последования — функции, связывающие между собой v_1 и v_2 :

$$v_2 = v_1 e^{-\frac{a}{2}} + a, \quad (3.29)$$

если при ударе колебательной системе передается определенное (всегда одно и то же) количество движения, т. е. при ударе $\Delta(y) = a = \text{const}$, и

$$v_2^2 = v_1^2 e^{-a} + h^2, \quad (3.30)$$

если при каждом ударе кинетическая энергия системы увеличивается на одну и ту же величину: $\Delta(y^2) = h^2 = \text{const}$.

¹⁾ Два удара за период осуществляются в большинстве спусковых механизмов и, в частности, в «анкерном спуске», применяемом, например, в карманных часах.

В обоих случаях соответствующие точечные преобразования имеют единственную неподвижную точку

$$\bar{v} = \frac{a}{1 - e^{-d/2}}$$

при первом предположении относительно закона удара и

$$\bar{v} = \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-d}}}$$

при втором, т. е. в обоих случаях система имеет единственное периодическое движение, которое, как нетрудно показать построением графиков функции последования, устойчиво и устанавливается при любых начальных условиях. Графики функций последования (диаграммы Ламерея) имеют вид, аналогичный рис. 124; во втором случае этот график следует строить не для v , а для v^2 .

Все рассмотренные нами модели часов с линейным трением объясняют наличие периодического процесса с определенной и не зависящей от начальных условий амплитудой автоколебаний, но все они дают мягкий режим, т. е. не объясняют необходимости начального толчка конечной величины для установления колебаний маятника или балансира часов.

Чтобы объяснить это свойство часов, нужно, как мы увидим ниже, отказаться от предположения о линейном трении и принять, что часы представляют собой автоколебательную систему с сухим трением.

2. Ламповый генератор с контуром в цепи сетки в случае γ -характеристики. Мы рассматривали в теории часов удары, которые мгновенно изменяли количество движения и энергию системы. Аппарат, создававший эти удары, развивал бесконечно большую мощность, мгновенно отдавая определенные порции энергии. Естественен вопрос, применима ли такая идеализация при рассмотрении электрических колебательных систем. Покажем, что аналогичное положение вещей встречается и в электрических системах. Предположим, например, что в генераторе с колебательным контуром в цепи сетки (в дальнейших рассуждениях мы, как и обычно, пренебрегаем реакцией анода и сеточным током) устанавливаются настолько большие синусоидальные колебания, что напряжение на сетке далеко заходит как в область, где анодный ток нуль, так и в область насыщения. Но если в контуре происходит синусоидальный колебательный процесс, то напряжение на сетке v (рис. 131) дважды за период меняет знак. Когда v проходит через нуль в положительном направлении, анодный ток чрезвычайно быстро (т. е. в течение времени τ , очень малого по сравнению с периодом колебаний T) переходит от значения нуль к значению I_s . За время τ э. д. с. индукции $M \frac{di_a}{dt}$ очень быстро нарастает от значения нуль, которое она имела прежде (когда $i_a = 0$),

до некоторого очень большого значения, а затем, когда i_a становится равным I_s , примерно так же быстро спадает до нуля. Когда v проходит через нуль в отрицательном направлении, анодный ток чрезвычайно быстро изменяется от значения I_s до нуля. При этом э. д. с. индукции очень быстро изменяется от значения нуля до некоторого очень большого (по абсолютной величине) отрицательного значения, а затем снова очень быстро принимает значение нуля. Таким образом, на контур в этом случае действуют кратковременные э. д. с., достигающие

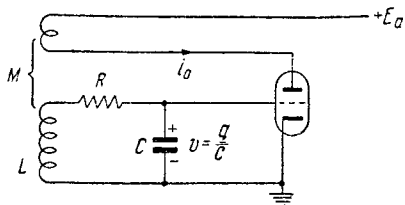


Рис. 131.

очень большой величины, и притом тем большей, чем круче изменяется анодный ток от нуля до I_s при увеличении v . Если мы примем, что этот переход происходит скачком (Γ -характеристика), то нам придется иметь дело с мгновенной бесконечно большой э. д. с. Нетрудно видеть, что здесь мы имеем полную аналогию с рассмотренным нами случаем часов, когда на колеблющуюся массу действует в надлежащие моменты мгновенный импульс, сообщаящий этой массе фиксированное количество движения.

В механике можно рассматривать действие силы $f(t)$, отличной от нуля в течение достаточно малого промежутка времени τ , как мгновенный удар, изменяющий скачком количество движения $m\dot{x}$ (речь идет о простейшем прямолинейном движении) на величину $\Delta(m\dot{x}) = \int_t^{t+\tau} f(t) dt$. Аналогично можно считать, что если э. д. с. индукции $\mathcal{E} = M \frac{di_a}{dt}$ отлична от нуля лишь в течение достаточно малого промежутка времени, то она вызывает быстрое, в пределе (при $\tau \rightarrow 0$) скачкообразное изменение потока индукции $L\dot{q}$ на величину

$$\Delta(L\dot{q}) = \int_t^{t+\tau} \mathcal{E} dt = \int_t^{t+\tau} M \frac{di_a}{dt} dt = M [i_a(t+\tau) - i_a(t)] = M \Delta i_a,$$

где t и $t + \tau$ — моменты начала и конца изменения анодного тока i_a . В момент скачка потока индукции сама координата q (заряд конденсатора) не меняется, так что скачок (так же как и удар в механическом случае) не нарушает непрерывности изменений координаты.

Для доказательства сформулированного закона скачка достаточно проинтегрировать уравнение лампового генератора с контуром в цепи сетки (1.62)

$$LC\ddot{v} + RC\dot{v} + v = M \frac{di_a}{dt}$$

по времени за интервал от t до $t + \tau$, в течение которого происходит изменение анодного тока от 0 до I_s (или от I_s до 0). Тогда получим:

$$LC [\dot{v}(t + \tau) - \dot{v}(t)] + RC [v(t + \tau) - v(t)] + \int_t^{t+\tau} v dt = \int_t^{t+\tau} M \frac{di_a}{dt} dt.$$

При предельном переходе к Γ -характеристике интервал сеточных напряжений v , на котором происходит изменение анодного тока, стремится к нулю, т. е. $v(t + \tau) \rightarrow v(t)$, стремится к нулю время τ , в течение которого этот интервал проходится системой. Поэтому

$$\int_t^{t+\tau} v dt \rightarrow 0$$

и

$$LC [\dot{v}(t + \tau) - \dot{v}(t)] \rightarrow \int_t^{t+\tau} M \frac{di_a}{dt} dt = M \Delta i_a$$

или

$$\Delta(L\dot{q}) \rightarrow M\Delta i_a.$$

При переходе напряжения на сетке через нуль в положительном направлении ($q=0$, $\dot{q}>0$) $\Delta i_a = I_s$ и $\Delta(L\dot{q}) = MI_s$. Точно так же при переходе v через нуль в обратном направлении ($q=0$, $\dot{q}<0$) $\Delta(L\dot{q}) = -MI_s$. Тогда, как нетрудно видеть, поведение системы определяется следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q &= 0 \quad (q \neq 0), \\ \Delta\dot{q} &= \frac{M}{L} I_s \quad (q=0, \dot{q}>0), \\ \Delta\dot{q} &= -\frac{M}{L} I_s \quad (q=0, \dot{q}<0) \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

и тем дополнительным условием, что q изменяется непрерывно. Таким образом, осциллограмма всякого движения системы будет состоять из дуг «затухающих синусоид»:

$$q = Ae^{-h(t-t_0)} \cos[\omega(t-t_0) + \varphi],$$

начинающихся и кончающихся на оси времен. Между двумя соседними дугами существует в точке их смыкания (на оси t) разность наклонов, определенная условиями скачка.

Исследование системы (3.31) вполне аналогично исследованию, проведенному нами для часов в случае двух ударов за период, сообщающих постоянное количество движения.

3. Модель часов с кулоновским трением. Рассмотрим для объяснения жесткого режима возбуждения колебаний в часах ударную модель часов с сухим, кулоновским трением. Мы уже рассмотрели движение осциллятора с кулоновским трением (§ 3 гл. III). При надлежащем выборе единиц уравнение движения такого осциллятора имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + x &= -f_0 \text{ при } \dot{x} > 0, \\ \ddot{x} + x &= +f_0 \text{ при } \dot{x} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

где f_0 — наибольшая сила трения покоя, деленная на коэффициент упругости пружины осциллятора. На фазовой плоскости, как мы уже видели, фазовые траектории будут спиралями, составленными из кусков полуэллипсов или в нашем случае (в силу выбора единиц) из кусков полуокружностей; центром полуокружностей в верхней полуплоскости является точка $(-f_0, 0)$, а в нижней — точка $(+f_0, 0)$.

Добавив мгновенные удары, мы получим ударную модель часов с кулоновским трением. Пусть спусковое устройство наносит колебательной системе (балансиру часов) один удар за колебание. Для простоты рассмотрения мы несколько «перенесем» место удара и будем считать, что удар происходит в момент, когда баланsir проходит

в положительном направлении через точку $x = -f_0$, а не через точку $x = 0$.

Рассмотрим сначала первое предположение относительно закона удара: положим, что

$$mv_1 - mv_0 = \text{const},$$

или, пользуясь обозначениями фазовой плоскости,

$$Dy = a. \quad (3.33)$$

Чтобы ответить на вопрос о характере возможных движений в этом случае, мы рассмотрим характер траекторий на фазовой плоскости

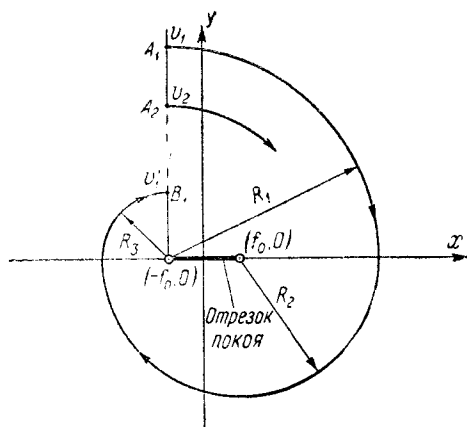


Рис. 132.

и найдем функцию последования для скоростей балансира непосредственно после ударов. Пусть скорость балансира непосредственно после удара равна v_1 ; точка A_1 , изображающая ее состояние, имеет координаты $(-f_0, v_1)$. Отсюда изображающая точка, как мы только что отмечали, будет двигаться по окружности с центром в точке $(-f_0, 0)$ и с радиусом $R_1 = v_1$ (рис. 132). Дойдя до полуоси положительных x , она или попадет на *отрезок покоя* ($-f_0 \leq x \leq +f_0$,

$y=0$), состоящий из состояний равновесия (это будет при $R_1 \leq 2f_0$), или же (при $R_1 = v_1 > 2f_0$) перейдет в нижнюю полуплоскость и будет там двигаться (без скачков) по полуокружности с центром в точке $(+f_0, 0)$, радиус которой равен $R_2 = R_1 - 2f_0 = v_1 - 2f_0$. Если $R_2 \leq 2f_0$, то изображающая точка все же попадет на отрезок покоя (на этот раз — снизу). Только при $R_2 > 2f_0$, т. е. при $v_1 > 4f_0$, изображающая точка перейдет на верхнюю полуплоскость и будет там двигаться по четверти окружности, центром которой снова

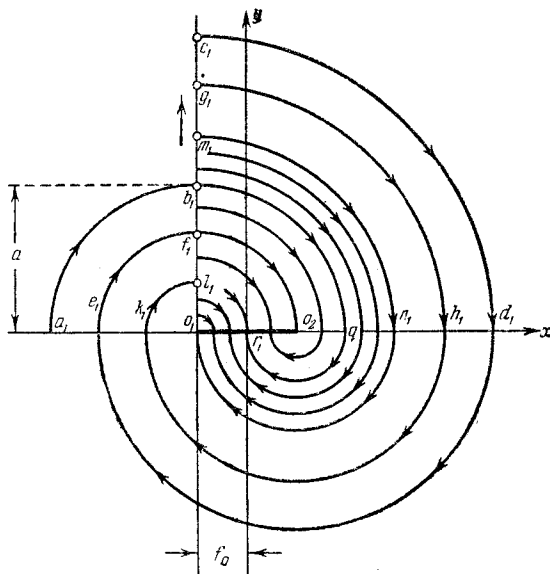


Рис. 133.

является точка $(-f_0, 0)$, а радиус равен $R_3 = R_2 - 2f_0 = v_1 - 4f_0$, пока не придет на «полупрямую ударов» ($x = -f_0, y > 0$) в точке B_1 с ординатой

$$v'_1 = v_1 - 4f_0. \quad (3.34)$$

В этом состоянии колебательной системе наносится подталкивающий мгновенный удар, в результате чего скорость y мгновенно увеличивается на величину a , и изображающая точка скачком переходит в точку $A_2(-f_0, v_2)$, где

$$v_2 = v'_1 + a = v_1 - 4f_0 + a \quad (v_1 > 4f_0). \quad (3.35)$$

Соотношение (3.35) и есть искомая функция последования, определяющая по заданной скорости системы v_1 после удара ($v_1 > 4f_0$) скорость v_2 непосредственно после следующего удара. Очевидно, последовательность скоростей $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots$ после удара

составляет арифметическую прогрессию с общим членом

$$v_n = v_1 + (n - 1)(a - 4f_0).$$

Легко видеть, что характер возможных движений в нашей системе зависит от знака $a - 4f_0$.

Случай I. $a - 4f_0 < 0$. В этом случае (рис. 133), каковы бы ни были начальные условия, колебания системы будут затухать, и изображающая точка после конечного числа размахов дойдет до отрезка состояний равновесия, простирающегося на f_0 в обе стороны от начала координат.

Случай II. $a - 4f_0 > 0$. В этом случае фазовая плоскость может быть разбита на две области с различными характерами возможных

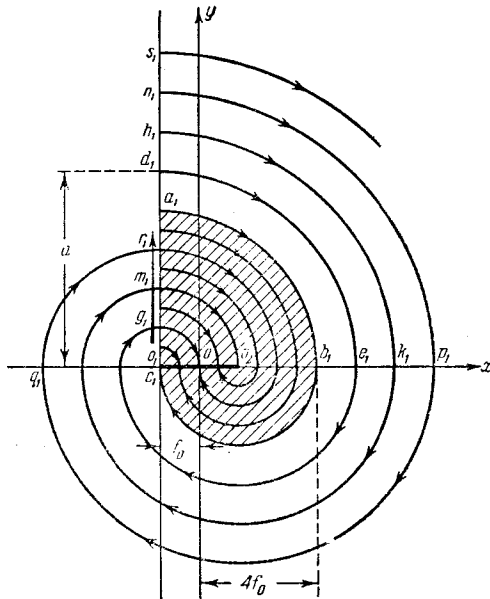


Рис. 134.

движений. Именно, если в начальный момент представляющая точка находится внутри области a_1, b_1, c_1 (рис. 134), то система в конечное время дойдет до отрезка состояний равновесия; колебания системы прекратятся. Если же начальные условия соответствуют точкам, лежащим вне этой области или на границе, колебания системы будут неограниченно нарастать.

Случай III. $a - 4f_0 = 0$. В этом идеальном случае полного равенства фазовая плоскость также может быть разбита на две части с различным характером возможных движений. Если начальные условия лежат внутри области a_1, b_1, c_1 (рис. 135), то изображающая

точка придет, еще не успев сделать полного оборота, к отрезку состояний равновесия. Если же начальные значения лежат вне этой области, то все движения суть периодические, с амплитудой, которая определяется начальными условиями.

В этом последнем случае мы имеем дело с континуумом периодических движений¹³, т. е. с обстоятельством, характерным для консервативной системы. Но как и всякая консервативная система, наша система неустойчива по отношению к малым изменениям параметров. Достаточно, например, немного изменить величину f_0 , чтобы прийти к случаю I или II, т. е. к существенно иной картине.

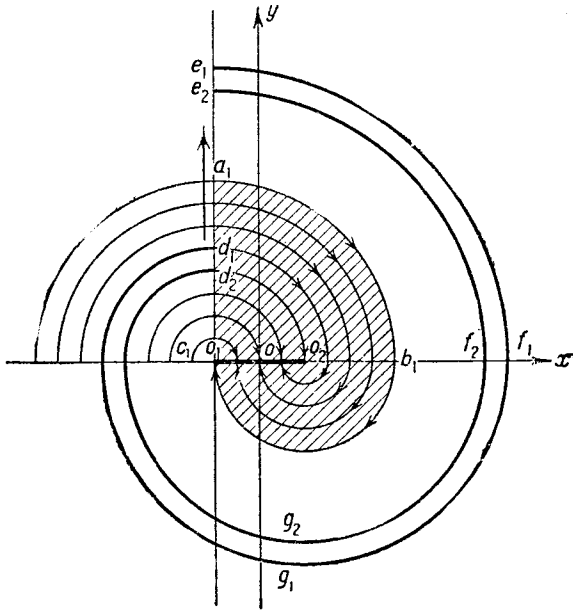


Рис. 135.

Мы видим, таким образом, что принятая нами на этот раз идеализация закона трения и закона удара не отображает наиболее существенной черты реальных часов, именно того, что в часах возможны периодические движения только с вполне определенной амплитудой, не зависящей от начальных условий. Достаточно, однако, изменить допущение о характере ударов, сохранив предположение о характере сил трения, чтобы снова ударить систему, способную совершать периодическое движение только с одной, вполне определенной амплитудой. Примем снова, что при ударе спусковой механизм сообщает системе одну и ту же кинетическую энергию, т. е. положим, что

$$\Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \text{const} \quad \text{или} \quad \Delta (y^2) = h^2, \quad (3.36)$$

где h — константа, величина которой определяется устройством спускового механизма.

В этом случае величина «скачка» a на фазовой плоскости снова не будет постоянна, а будет зависеть от скорости движения нашей системы в момент, непосредственно предшествующий удару. Именно, как следует из выражения (3.36), $a = \sqrt{y^2 + h^2} - y$, величина «скачка» убывает в зависимости от предударной скорости y по гипер-

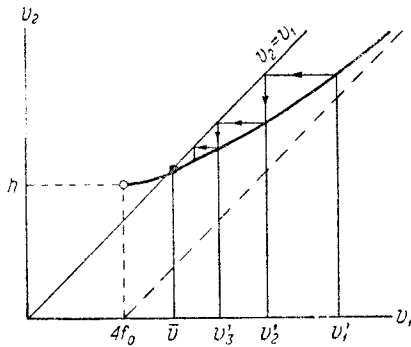


Рис. 136.

болическому закону. Функция последования для скоростей балансира после удара, поскольку по-прежнему последующая скорость до удара v_1' дается выражением (3.34), очевидно, запишется в виде

$$v_2^2 = (v_1 - 4f_0)^2 + h^2 \quad (v_1 > 4f_0) \quad (3.37)$$

(по-прежнему изображающая точка после оборота возвращается на «полупрямую ударов» $x = -f_0$, $y > 0$ только при $v_1 > 4f_0$; при $v_1 \leq 4f_0$ изображающая точка попадает на отрезок покоя и колебание балансира прекращается). График функции последования (3.37) изображен на рис. 136. Это — гипербола, начинающаяся в точке $v_1 = 4f_0$, $v_2 = h$ с асимптотой $v_2 = v_1 - 4f_0$. Пересечение этой гиперболы с прямой $v_1 = v_2$, если оно существует, даст нам неподвижную точку \bar{v} , которая является скоростью после удара для *периодического* движения. Очевидно, такая точка существует при

$$h > 4f_0, \quad (3.38)$$

и если существует, то единственная. Для неподвижной точки имеем:

$$\bar{v}^2 = (\bar{v} - 4f_0)^2 + h^2,$$

откуда

$$\bar{v} = \frac{h^2}{8f_0} + 2f_0$$

(для нее, очевидно, должно быть $\bar{v} > 4f_0$, что выполняется при $h > 4f_0$). Амплитуда периодических колебаний балансира часов, очевидно, равна

$$\bar{x} = \bar{v} - f_0 = \frac{h^2}{8f_0} + f_0.$$

Условие (3.38), как легко видеть, предъявляет известные требования к силе пружины или весу гири заводного механизма. Дей-

ствительно, так как путь, проходимый гирей при каждом ударе, задан конструкцией механизма, то работа, совершаемая гирей, должна быть во всяком случае больше, чем энергия, сообщаемая системе. Следовательно, чем больше f_0 , тем больше должен быть вес гири, чтобы условие (3.38) могло быть соблюдено. Если условие (3.38) выполнено, то в системе возможен *единственный* периодический процесс с определенной амплитудой, которому соответствует на фазовой плоскости замкнутая траектория, составленная из частей окружностей и отрезка оси u длиной a . Можно показать, хотя бы путем построения «лестницы Ламерея» (рис. 136) или пользуясь теоремой Кенигса (см. § 7 гл. V), что рассматриваемая неподвижная точка \bar{u} *устойчива* и, следовательно, имеет место процесс приближения соседних движений к найденному периодическому.

Отсюда же следует, что предельное периодическое движение устойчиво в смысле Ляпунова. Полученная нами картина на фазовой плоскости (рис. 137) показывает, что при сделанных предположениях

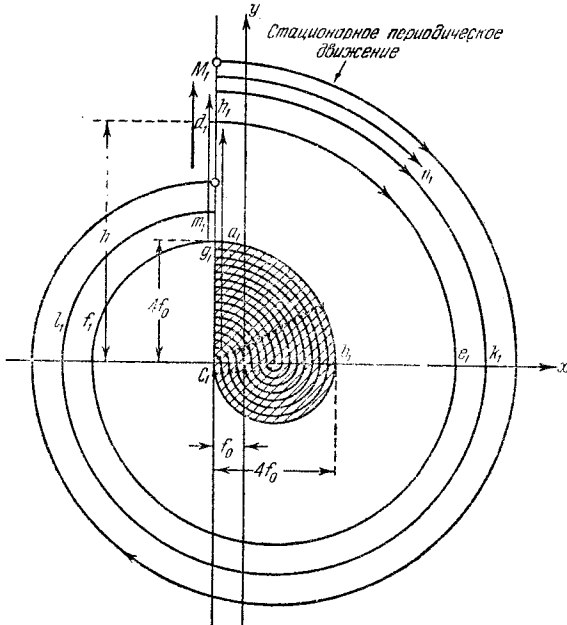


Рис. 137.

(постоянное кулоновское трение и постоянное приращение энергии при ударе) система обладает обоими наиболее характерными свойствами часового механизма: 1) наличие единственного периодического процесса (с определенной амплитудой) и 2) необходимость начальной толчка (или отклонения) конечной величины для того, чтобы этот процесс

установился. Второе из этих свойств, как легко видеть, обусловлено наличием постоянного трения в системе, и чем больше постоянное трение, тем больше область, в которой начальные отклонения затухают, и тем больше должен быть начальный толчок, чтобы часы пошли. Постоянное трение неизбежно присутствует в часах, так как маятник часов должен при движении привести в действие спусковой механизм, а для этого при любой конструкции механизма необходимо преодолеть трение покоя, имеющее конечную величину, для чего маятник должен обладать некоторой энергией. Таким образом, второе типичное свойство часов (необходимость начального толчка достаточной величины) тесно связано с самим принципом устройства часов. Особенности же устройства часов, обуславливающие это свойство, прежде всего могут быть охвачены предположением, что в часах присутствует постоянное трение. Самое предположение о постоянном трении, как и всякая идеализация, конечно, не охватывает всех свойств системы, а отражает наиболее характерную черту этой системы. Именно, предположение о постоянном трении может быть сделано тогда, когда в системе присутствуют силы трения, которые при сколь угодно малой скорости движения все же сохраняют конечную величину. Если же при достаточно малой скорости силы трения становятся сколь угодно малыми, то лучше отражает свойства системы предположение о «линейном трении». Конечно, в часах присутствует и то и другое трение; трение в спусковом механизме лучше может быть отражено при помощи первой идеализации, а сопротивление воздуха движению маятника — при помощи второй. Однако учет трения о воздух, т. е. введение линейного трения, не дало бы ничего нового, только вместо частей окружности на фазовой плоскости нужно было бы проводить части спирали. Постоянное же трение связано с существенно новым свойством — с отсутствием самовозбуждения колебаний и необходимостью начального толчка для установления периодического процесса, т. е. с наличием жесткого режима возбуждения автоколебаний.

Те же результаты мы получим, рассматривая модель часов с двумя подталкивающими ударами за каждое колебание (при $x = -f_0$, $y > 0$ и при $x = +f_0$, $y < 0$). И в этом случае предположение, что при каждом ударе балансиру сообщается одно и то же количество движения ($\Delta(y) = a = \text{const}$), не может отобразить основных свойств часов, именно, существования устойчивых периодических колебаний. Если же предположить, что каждый удар увеличивает кинетическую энергию балансира на определенную, всегда одну и ту же величину, т. е. что при ударе $\Delta(y^2) = h^2 = \text{const}$, то для скоростей после ударов получается функция последования

$$v_2^2 = (v_1 - 2f_0)^2 + h^2,$$

где v_1 и v_2 — заданная и последующая скорости балансира после ударов (под v_1 и v_2 здесь понимаются абсолютные значения скоростей).

Иначе говоря, модель с двумя ударами ведет себя так же, как и модель с одним ударом за период, но с вдвое меньшим трением: при $h > 2f_0$ существует единственное устойчивое периодическое движение, которое устанавливается при всех скоростях после удара $v_1 > 2f_0$; если же $v_1 \leq 2f_0$, то система приходит в одно из состояний равновесия. Картина на фазовой плоскости для модели часов с двумя ударами за период в предположении, что закон удара выражается соотношением (3.36) и что $h > 2f_0$, изображена на рис. 138.

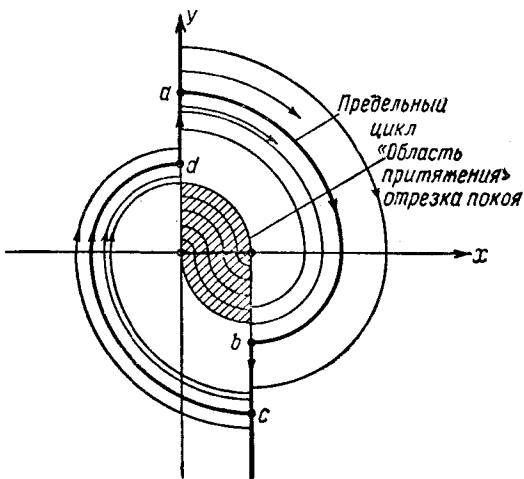


Рис. 138.

Замкнутая разрывная кривая $abcda$ является устойчивым (разрывным) предельным циклом, который соответствует периодическим автоколебаниям колебательной системы (балансира, маятника) часов.

Все те выводы, к которым мы пришли, рассматривая разные предположения о законе трения и характере толчков, могут быть пояснены простыми энергетическими соображениями. Для этого нужно лишь иметь в виду, что при линейном трении энергия, рассеиваемая за период, пропорциональна квадрату амплитуды, а при постоянном трении она представляет собой линейную функцию амплитуды. С другой стороны, при ударе по закону $v_1 - v_0 = \Delta v_0 = \text{const}$ энергия, поступающая в систему за период, возрастает на величину

$$\frac{m}{2} (v_0 + \Delta v_0)^2 - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2} (2v_0 \Delta v_0 + \Delta v_0^2),$$

т. е. (так как $\Delta v_0 = \text{const}$) является линейной функцией амплитуды. При ударе же по закону $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}$ энергия системы

возрастает за период на постоянную величину. После этого сразу становятся ясными основные полученные нами результаты. Всякий периодический процесс возможен только при условии, что энергия системы по прошествии периода имеет ту же величину, что и в начале периода.

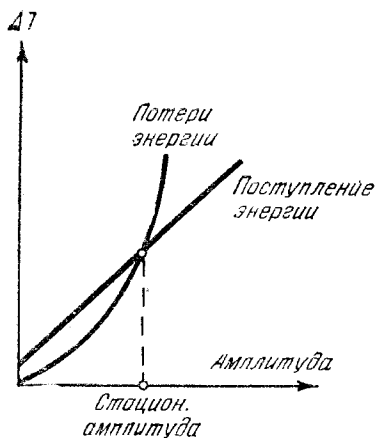


Рис. 139.

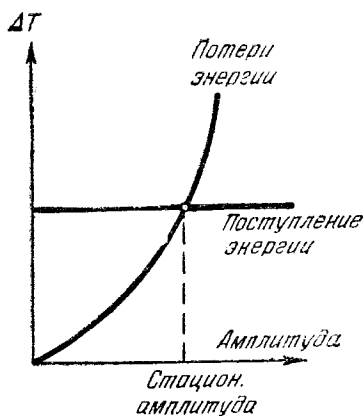


Рис. 140.

Посмотрим, может ли быть соблюдено это условие в разных рассмотренных нами случаях. В первом случае («линейное трение» и удар по закону $v_1 - v_0 = \text{const}$) потери энергии растут пропорционально квадрату амплитуды, а поступление энергии в систему есть линейная функция амплитуды. Ясно, что где-то и только при одной определенной амплитуде наступает баланс энергии и существует только одна стационарная амплитуда (рис. 139). Во втором случае (линейное трение и удар по закону

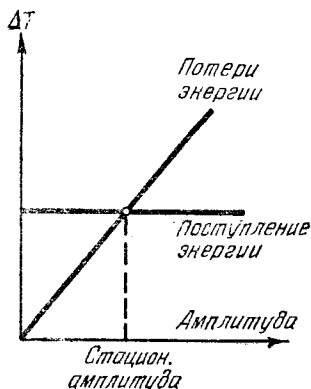


Рис. 141.

$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}$) потери пропорциональны квадрату амплитуды, а поступление энергии — постоянная величина. Опять-таки существует только одна стационарная амплитуда, при которой имеет место баланс энергии (рис. 140). В третьем случае (постоянное трение и удар по закону $v_1 - v_0 = \text{const}$) и потери и поступление энергии — линейные функции амплитуды. Следовательно, либо вообще нет стационарной амплитуды, либо таких стационарных амплитуд бесконечное множество.

Наконец, в четвертом случае (постоянное трение и удар по закону $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}$) потери энергии есть линейная функция амплитуды, а поступающая энергия имеет постоянную величину, и снова возможна только одна стационарная амплитуда, для которой наступает баланс энергии (рис. 141).

§ 5. Теория часов. Безударная модель «спуска с отходом назад»¹⁾

В предыдущем параграфе мы рассмотрели несколько простейших ударных моделей часовых механизмов, пользуясь которыми мы смогли объяснить некоторые основные свойства часов: существование единственного периодического движения и необходимость начального толчка конечной величины для возбуждения этих колебаний, т. е. жесткий режим (последнее потребовало учета сухого трения в колебательной системе часов). Однако эти модели, являясь примитивными, не могут отобразить весьма важных количественных характеристик часовых механизмов, в частности, не могут объяснить зависимость периода колебаний часов от силы или момента сил заводного механизма и от сил трения²⁾.

Для того чтобы получить зависимость хода часов, т. е. зависимость их периода, от параметров, что, например, необходимо для выяснения условий, когда эта зависимость наименьшая, а стабильность хода часов наибольшая, требуется более детальное рассмотрение динамики часов с учетом основных, характерных особенностей того или иного типа часового механизма и, в частности, примененного в нем спускового устройства³⁾. Мы рассмотрим ниже при определенных упрощающих предположениях динамику часов, снабженных так называемым «спуском с отходом назад»⁴⁾. Схема этого спуска приведена на рис. 142. Ходовое колесо, связанное через систему шестерен с заводным механизмом, своими фигурными зубьями соприкасается с концами (*палеттами*) скобы, находящейся на одной оси с балан-

¹⁾ Написано Н. А. Железцовым.

²⁾ Сила заводного механизма и силы трения являются наиболее сильно меняющимися параметрами часов. Например, сила пружинного завода уменьшается по мере раскручивания пружины, а силы трения заметно зависят от положения часов. Это приводит к некоторому изменению периода колебаний часов. Между тем наиболее удовлетворительная из рассмотренных нами ударная модель часов с кулоновским трением привела к автоколебаниям, период которых не зависит ни от силы удара (т. е. от сил заводного механизма), ни от сил трения.

³⁾ Значительный вклад в развитие динамики часов часов сделан за последние годы в работах Н. Н. Баутина [22—25, 27, 28].

⁴⁾ Такой спуск, иногда называемый еще «крючковым», находит себе применение в стенных часах, будильниках и т. п. По динамике этому спуску аналогичен «шпиндельный» спуск, который применялся в наиболее ранних конструкциях часов, в частности в часах Гюйгенса.

сиром или маятником часов. Тем самым заводной механизм через спусковое устройство (через ходовое колесо и скобу) создает некоторый момент сил M , приложенный к балансиру и зависящий от взаимного расположения ходового колеса и скобы. На рис. 142, а изображено

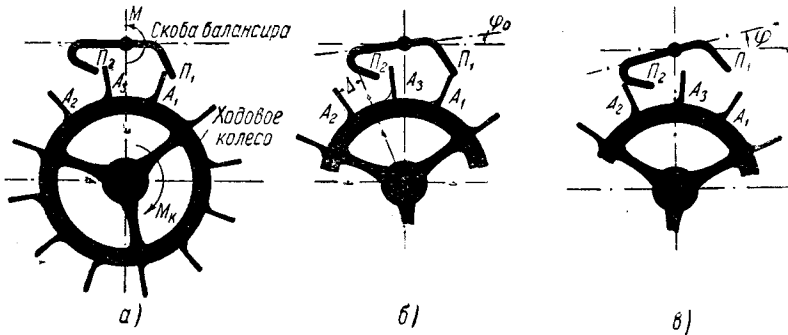


Рис. 142.

среднее положение вилки балансира ($\varphi = 0$), при котором ходовое колесо, соприкасаясь зубом A_1 с правой палеттой Π_1 скобы, поворачивает балансир в направлении против вращения часовой стрелки (это направление мы примем за направление положительных φ). Это ускоренное движение балансира будет продолжаться до тех пор, пока балансир не повернется на некоторый угол φ_0 (рис. 142, б) и зуб A_1 не соскочит с палетты Π_1 (угол $2\varphi_0$ называется «углом подъема» балансира). После соскока зуба A_1 с палетты Π_1 балансир будет продолжать двигаться в направлении положительных φ , а ходовое колесо, освободившись от балансира, придет в быстрое ускоренное движение (ускорение тем больше, чем меньше момент инерции ходового колеса). При этом движении зуб A_2 и левая палетта Π_2 скобы идут навстречу друг другу¹⁾, и через некоторый малый интервал времени зуб A_2 нанесет балансиру через палетту Π_2 встречный удар. После установления контакта зуба A_2 с палеттой Π_2 ходовое колесо будет создавать на оси скобы отрицательный момент, тормозящий движение балансира в положительном направлении. Но балансир по инерции может повернуться еще на некоторый угол в положительном направлении, заставляя ходовое колесо сделать некоторый «отход назад» (отсюда и название спуска), и лишь затем начнет движение в обратном направлении, разгоняясь моментом, приложенным через палетту Π_2 со стороны ходового колеса (рис. 142, в). Балансир проходит среднее положение ($\varphi = 0$), и при достижении угла $\varphi = -\varphi_0$ зуб A_2 соскакивает с палетты Π_2 . После «падения ходового колеса»

¹⁾ Это — так называемое «падение ходового колеса». Угол Δ на рис. 142, б называется углом падения ходового колеса.

в соприкосновение с палеттой P_1 приходит зуб A_3 , движение балансира в направлении отрицательных φ тормозится и затем начинается движение в положительном направлении ($\dot{\varphi} > 0$), и т. д. Таким образом, ходовое колесо подталкивает балансира дважды за каждое его колебание и, совершая некоторую положительную работу, компенсирует потери энергии в колебательной системе из-за трения.

Исследование динамики часов с таким спусковым устройством довольно затруднительно [16, 22]. Поэтому для упрощения задачи мы перейдем к модели часов с *одной* степенью свободы, которая получается в предположении, что *момент инерции ходового колеса I_k равен нулю*¹⁾. При таком предположении «падение ходового колеса» после каждого соскока зуба с палетты скобы будет происходить *мгновенно* и всегда одна из палетт, или правая P_1 , или левая P_2 , находится в контакте с каким-либо зубом ходового колеса.

Кинематика спускового устройства, как мы видели, такова, что при $\varphi \leq -\varphi_0$ с зубом ходового колеса контактирует только правая палетта P_1 , при $\varphi \geq +\varphi_0$ — только левая палетта P_2 , а при $-\varphi_0 < \varphi < +\varphi_0$ может контактировать любая из палетт. При контакте зуба ходового колеса с палеттой P_1 момент сил M , создаваемый ходовым колесом на оси балансира, больше нуля, при контакте с палеттой P_2 момент $M < 0$. Поэтому момент сил, развиваемый ходовым колесом на оси балансира, $M = M(\varphi)$ является на интервале $-\varphi_0 < \varphi < +\varphi_0$ *двузначной* функцией угла поворота балансира φ ($M > 0$ или $M < 0$ в зависимости от того, какая из палетт контактирует с зубом ходового колеса).

Это налагает известные ограничения на характер фазовой поверхности для рассматриваемой динамической модели часов. Действительно, в качестве такой поверхности мы не можем взять обычную плоскость с декартовыми координатами φ и $\dot{\varphi}$ ²⁾, так как задание точки на ней ($\varphi, \dot{\varphi}$), где $-\varphi_0 < \varphi < +\varphi_0$, не определяет однозначно сил, действующих в системе, и, следовательно, не определяет однозначно состояния системы. В соответствии с *двузначностью* зависимости момента M от φ фазовой поверхностью может служить «плоскость с наложениями» (рис. 143), состоящая из двух наложенных друг на друга полуплоскостей: (I) $\varphi < \varphi_0$ и (II) $\varphi > -\varphi_0$. Первая из них соответствует контакту зуба ходового колеса с правой палеттой P_1 , вторая — с левой палеттой P_2 . Точки такой *двулистной* фазовой поверхности и состояния системы соответствуют уже *взаимно*

¹⁾ Если привести момент инерции ходового колеса (вместе со всей системой шестерен и заводным механизмом) к оси балансира, то во многих часовых механизмах он будет составлять всего несколько процентов от момента инерции I балансира. Для таких часов наше предположение, что $I_k = 0$, будет достаточно удовлетворительным.

²⁾ Мы будем отвлекаться от того обстоятельства, что в силу конструктивных причин углы поворота ограничены, и будем считать, что φ может принимать любые значения.

однозначно. При этом, очевидно, переход изображающей точки с листа (I) на лист (II) происходит при $\varphi = +\varphi_0$ и обратный — при $\varphi = -\varphi_0$ ¹⁾. При переходе изображающей точки с одного листа на другой ее абсцисса, конечно, остается неизменной. Неизменной, несмотря на наличие встречных ударов по

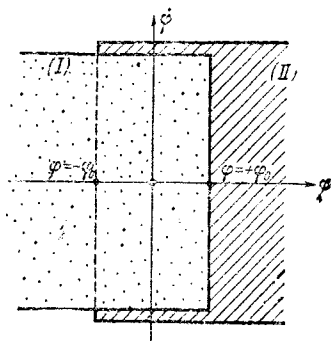


Рис. 143.

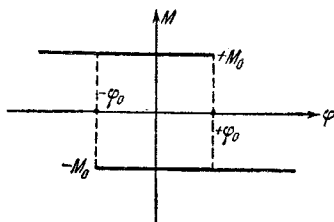


Рис. 144.

палеттам, наносимых зубьями ходового колеса в конце «падения» ходового колеса, будет оставаться и ордината $\dot{\psi}$ (скорость балансира) в силу нашего предположения, что момент инерции ходового колеса I_k равен нулю²⁾.

Для дальнейшего упрощения рассмотрения динамики изучаемой нами модели часов сделаем еще следующие предположения о силах, действующих на балансирующий часов. Во-первых, мы предположим, что момент сил M , действующий на балансиру со стороны спускового

¹⁾ Здесь и ниже мы под листами понимаем полуплоскости (I) и (II), составляющие двулистную фазовую поверхность — поверхность «с наложением» для рассматриваемой модели часов.

²⁾ Переход изображающей точки с одного листа на другой соответствует процессу освобождения ходового колеса от балансира, его «падению» (повороту на угол Δ) и встречному удару по соответствующей палетте. Нетрудно показать, что ходовое колесо в силу нашего предположения о равенстве нулю его момента инерции не несет никакого момента количества движения и, следовательно, при встречном ударе своим зубом по палетте (это удар для простоты будем полагать абсолютно неупругим) не будет изменять скорости балансира $\dot{\psi}$.

Действительно, пусть $\dot{\psi}_0$ и $\dot{\psi}$ — скорости ходового колеса соответственно при соскакивании его зуба с палетты и непосредственно перед ударом о другую палетту. Очевидно (мы предположим пока, что момент инерции ходового колеса I_k мал, но отличен от нуля), $\frac{1}{2} I_k (\dot{\psi}^2 - \dot{\psi}_0^2) = M_k \Delta$, где M_k — момент сил на оси колеса, приложенный со стороны заводного механизма (мы считаем его постоянным). Тогда предупредительный момент количества движения ходового колеса равен $G = I_k \dot{\psi} = I_k \sqrt{\dot{\psi}_0^2 + \frac{2M_k \cdot \Delta}{I_k}}$ и стремится к нулю при $I_k \rightarrow 0$, несмотря на то, что $\dot{\psi} \rightarrow \infty$.

механизма, постоянен по абсолютной величине, т. е. $M = +M_0$, когда с зубом ходового колеса контактирует палетта Π_1 , и $M = -M_0$, когда контактирует палетта Π_2 (рис. 144)¹⁾. Во-вторых, силы трения будем представлять в виде сил кулоновского трения (наибольший момент силы трения покоя, который мы будем считать не зависящим от угла поворота балансира, обозначим через f_0)²⁾.

Ниже мы рассмотрим, опираясь на разобранный динамическую модель часов со спуском с «отходом назад», два типа часовых механизмов. Один из них имеет балансир без «собственного периода» (центр тяжести такого балансира лежит на его оси вращения и нет никакой пружины, которая бы приводила его к среднему положению $\varphi = 0$). Этот тип часовых механизмов, как мы увидим, не обладает хорошей стабильностью хода и поэтому применяется лишь в тех случаях, когда не нужна большая стабильность периода колебаний (он применяется, например, в автоспусках фотоаппаратов, в звонковых устройствах будильников и т. п.) [16, 25, 67].

Второй тип часовых механизмов имеет балансир «с собственным периодом» (балансиры с пружиной или маятник), который при отсоединенном спуске может совершать затухающие колебания. Этот второй тип, обладающий достаточно хорошей стабильностью хода, применяется во многих конструкциях часов (главным образом стенных)³⁾.

1. Модель часов с балансиром «без собственного периода». Динамические уравнения рассматриваемой модели часов с балансиром «без собственного периода», очевидно, запишутся в виде

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}\right) + M(\varphi),$$

где I — момент инерции балансира, $M = M(\varphi)$ — момент сил на оси балансира, создаваемый спусковым устройством, и $f\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}\right)$ — момент сил кулоновского трения. При движении балансира $\left(\frac{d\varphi}{dt} \neq 0\right)$

$$f\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}\right) = -f_0 \operatorname{sgn} \frac{d\varphi}{dt}$$

¹⁾ Вид зависимости $M = M(\varphi)$ при контакте зуба ходового колеса с данной палеттой определяется профилем палетты; в частности, его можно выбрать таким, чтобы M было постоянным.

²⁾ Силы сухого трения в колебательной системе часов возникают в двух местах: в подшипниках оси балансира и при скольжении зуба ходового колеса по той или иной палетке скобы балансира. Последние в большинстве часов являются основными и, очевидно, пропорциональны при заданном коэффициенте трения давлению зуба на палетку, т. е. пропорциональны силе заводного механизма.

³⁾ С динамикой первого типа часовых механизмов сходна динамика ранних, безмаятниковых часов, которые часто называются «догалилеевыми» часами. Динамика второго типа часов близка к динамике часов Гюйгенса [128].

и уравнение движения принимает вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -f_0 \operatorname{sgn} \frac{d\varphi}{dt} \pm M_0 \quad (3.39)$$

(верхний знак — при контакте зуба ходового колеса с палеттой Π_1 , нижний — при контакте с палеттой Π_2).

Введем новые, безразмерные переменные:

$$x = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad t_{\text{нов}} = + \sqrt{\frac{M_0}{I \cdot \varphi_0}} t; \quad (3.40)$$

тогда уравнение (3.39) приведет к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -F \operatorname{sgn} y - (-1)^n \end{aligned} \right\} \quad (y \neq 0), \quad (3.41)$$

где

$$F = \frac{f_0}{M_0},$$

n — номер палетты, находящейся в контакте с зубом ходового колеса (точкой вверху обозначено дифференцирование по новому, безразмерному времени).

В случае $M_0 \leq f_0$ (т. е. $F \geq 1$) и неподвижного осциллятора ($y = 0$) момент спускового устройства не может преодолеть сил сухого трения, поэтому $\dot{y} = 0$ (т. е. $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$) и любое состояние $(x, 0)$ является состоянием равновесия. В этом случае никаких периодических движений быть не может и любое движение заканчивается приходом системы в одно из состояний равновесия.

Поэтому ниже мы будем предполагать, что $M_0 > f_0$ или, что то же самое, $F < 1$. В этом случае, как нетрудно видеть, система не имеет состояний равновесия.

Для фазовых траекторий на листе (I) ($x < +1$; с зубом ходового колеса контактирует правая палетта Π_1 и $M = +M_0$), разделив второе из уравнений (3.41) на первое, получаем следующее уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - F \operatorname{sgn} y}{y};$$

после интегрирования

$$\frac{y^2}{2} - (1 + F)x = \text{const} \quad (3.42a)$$

на нижней половине листа ($y < 0$) и

$$\frac{y^2}{2} - (1 - F)x = \text{const} \quad (3.42б)$$

на верхней ($y > 0$). Таким образом, фазовые траектории на листе (I) состоят из дуг парабол (3.42a) и (3.42б), причем в нижней половине

листа изображающая точка движется влево, ибо там $\dot{x} = y < 0$, а в верхней — вправо (рис. 145). Все фазовые траектории на листе (I) выходят на его границу на полупрямой $x = +1, y < 0$.

Фазовые траектории на листе (II) симметричны (относительно начала координат) с траекториями на листе (I), так как уравнения (3.41) для траекторий на листе (II) — полуплоскости $x > -1$ — переходят в уравнения для траекторий на листе (I) при замене переменных x, y на $-x, -y$. Для выяснения характера возможных движений балансира проведем две полупрямые: (v) $x = -1, y = -v < 0$ и (v') $x = +1, y = v' > 0$, и рассмотрим последовательность точек пересечения с ними любой фазовой траектории — последовательность v, v_1, v_2, v_3, \dots (рис. 146)¹.

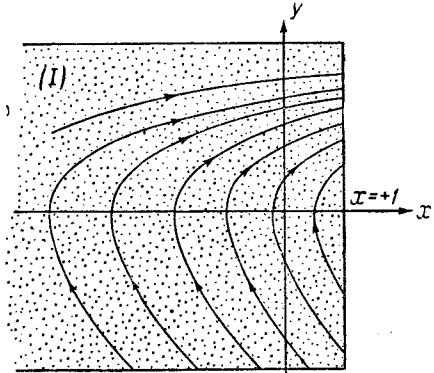


Рис. 145.

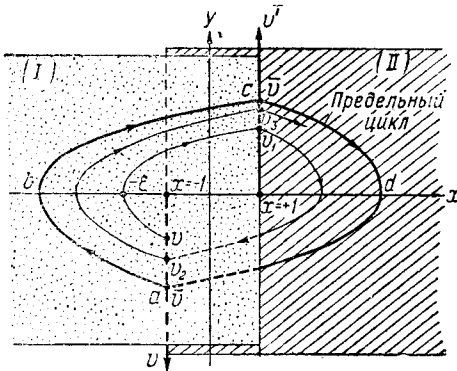


Рис. 146.

(II) на лист (I) в точке $(-1, -v)$. Там она будет двигаться по параболе (3.42a), выйдет на ось абсцисс в точке $(-\xi, 0)$, причем, очевидно, ξ определяется уравнением

$$\frac{v^2}{2} + (1 + F) = (1 + F)\xi,$$

или

$$v^2 = 2(1 + F)(\xi - 1). \quad (3.43a)$$

Затем изображающая точка движется в верхней половине листа (I) и выходит,

наконец, на границу этого листа на полупрямой (v') в точке $(+1, v_1)$, где $v_1 > 0$, и определяется соотношением

$$(1 - F)\xi = \frac{v_1^2}{2} - (1 - F),$$

¹ Очевидно, точки этих полупрямых соответствуют состояниям системы, при которых после прекращения контакта одной из палетт наступает контакт другой палетты с зубом ходового колеса; v и v' являются абсолютными значениями скоростей балансира в этих состояниях.

или

$$v_1^2 = 2(1 - F)(\xi + 1). \quad (3.43б)$$

Таким образом, фазовые траектории на листе (*I*) ставят точки полупрямых (v) и (v') в некоторое однозначное и непрерывное соответствие или, другими словами, осуществляют некоторое точечное преобразование полупрямой (v) в полупрямую (v'), выражаемое функцией последования (3.43а) и (3.43б) (мы получили функцию последования, записанную в параметрическом виде; параметром является ξ — наибольшее отклонение балансира¹⁾). В дальнейшем изображающая точка перейдет на лист (*II*) и, двигаясь по соответствующей фазовой траектории (для которой есть симметричная на листе (*I*)), выйдет снова на полупрямую (v) в некоторой точке ($-1, -v_2$). При этом в силу отмеченной выше симметрии фазовых траекторий на листах (*I*) и (*II*) v_2 определяется по v_1 той же функцией последования, выражаемой соотношениями (3.43а) и (3.43б). Иначе говоря, точечное преобразование полупрямой (v') в полупрямую (v) тождественно с точечным преобразованием полупрямой (v) в полупрямую (v'); поэтому ниже мы будем говорить о едином точечном преобразовании полупрямых (v) и (v') друг в друга.

Следовательно, при любом движении балансира в последовательности его скоростей v, v_1, v_2, v_3, \dots в моменты смены контактирующей палетки каждая последующая скорость определяется предыдущей найденной функцией последования. Это дает возможность проследить за ходом любой выбранной фазовой траектории. *Неподвижная точка* \bar{v} точечного преобразования, т. е. точка, для которой $v = v_1 = \bar{v}$, очевидно, соответствует *симметричному предельному циклу*, являясь точками пересечения этого предельного цикла с полупрямыми (v) и (v'). Для неподвижной точки имеем:

$$(1 + F)(\bar{\xi} - 1) = (1 - F)(\bar{\xi} + 1),$$

откуда амплитуда автоколебаний балансира

$$\bar{\xi} = \frac{1}{F} \quad (3.44)$$

и

$$\bar{v}^2 = 2 \frac{1 - F^2}{F}. \quad (3.45)$$

¹⁾ Конечно, в рассматриваемом случае параметр ξ нетрудно исключить, и тогда мы получили бы функцию последования, записанную в явном виде. Мы, однако, не будем исключать ξ , чтобы на этом простом примере показать, как можно вести исследование, пользуясь функцией последования в параметрическом виде. Следует заметить, что во многих задачах трудно получить функцию последования, записанную в явном виде, но сравнительно легко получить ее в параметрической форме (см. гл. VIII).

Для выяснения устойчивости найденного предельного цикла построим на единой диаграмме кривые $v = v(\xi)$ и $v_1 = v_1(\xi)$ (если по оси ординат откладывать не v и v_1 , а v^2 и v_1^2 , то мы получим две прямые, изображенные на рис. 147). Точка их пересечения является неподвижной точкой точечного преобразования. Зада-

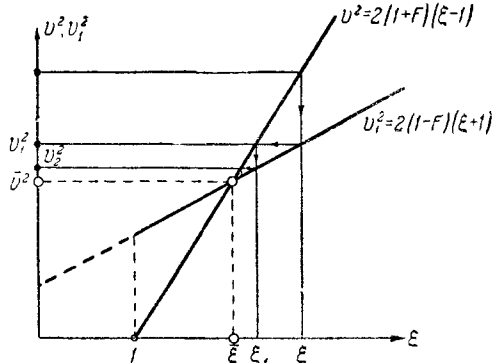


Рис. 147.

димся любым v (на рис. 147 для определенности взято $v > \bar{v}$); по прямой (3.43а) определим ξ и затем по прямой (3.43б) определим v_1 ; по v_1 как по новой, исходной точке преобразования найдем ξ_1 и v_2 и т. д. Построенная «лестница Ламе-рея» сходится к неподвижной точке в силу того обстоятельства, что прямая $v^2 = 2(1+F)(\xi-1)$ идет круче, чем прямая $v_1^2 = 2(1-F)(\xi+1)$, т. е. последовательность v, v_1, v_2, v_3, \dots сходится к \bar{v} при любых $v > \bar{v}$. Точно так же она будет сходиться к \bar{v} и при $v < \bar{v}$. Это доказывает устойчивость найденного единственного периодического движения балансира часов, доказывает, что это движение будет устанавливаться при любых начальных условиях.

Амплитуда автоколебаний балансира дается формулой (3.44) или в обычных угловых единицах

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 \bar{\xi} = \varphi_0 \frac{M_0}{f_0}.$$

Для вычисления периода автоколебаний обратим внимание на то обстоятельство, что предельный цикл (он изображен на рис. 146) состоит из четырех дуг параболы, на каждой из которых ускорение балансира \dot{y} постоянно. На дуге параболы ab ускорение $\dot{y} = 1 + F$ и, следовательно, время пробега изображающей точки по этой дуге предельного цикла равно

$$\tau_1 = \frac{\bar{v}}{1 + F};$$

аналогично, на дуге bc $\dot{y} = 1 - F$ и время пробега равно

$$\tau_2 = \frac{\bar{v}}{1 - F}.$$

Поэтому период автоколебаний (в единицах безразмерного времени) равен

$$\tau = 2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{F(1-F^2)}}, \tag{3.46}$$

или в обычных единицах

$$T = 4 \sqrt{\frac{2\varphi_0 I}{M_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{F(1-F^2)}}. \quad (3.47)$$

Как видим, период автоколебаний балансира зависит как от силы заводного механизма, так и от силы трения. Силе заводного механизма пропорционален момент сил M_0 , развиваемый спусковым устройством. Но ей же пропорциональны и давление, оказываемое зубьями ходового колеса на палетты вилки балансира, и, следовательно,

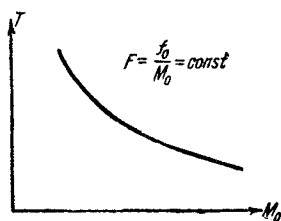


Рис. 148.

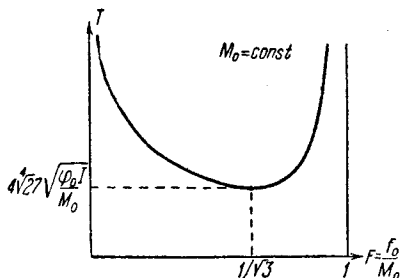


Рис. 149.

(с известной степенью точности) момент сил сухого трения, действующий на балансир, т. е. f_0 . Поэтому с той же степенью точности мы можем считать, что коэффициент F , а значит и амплитуда автоколебаний $\bar{\xi}$ или $\bar{\varphi}$ не зависят от силы заводного механизма и определяются, в основном, коэффициентом трения зуба ходового колеса о палетту. Период автоколебаний зависит и от M_0 и от F (графики зависимости T от M_0 и F даны на рис. 148 и 149). Количественной мерой стабильности хода часов при изменении силы заводного механизма и коэффициента трения могут служить величины

$$S_M = \frac{1}{\frac{M_0}{T} \left| \frac{\partial T}{\partial M_0} \right|_{F = \text{const}}}, \quad S_f = \frac{1}{\frac{F}{T} \left| \frac{\partial T}{\partial F} \right|_{M_0 = \text{const}}},$$

которые показывают, во сколько раз относительное изменение периода автоколебаний меньше относительного изменения того или иного параметра часов. Как легко подсчитать, исходя из формулы (3.47),

$$S_M = 2 \quad \text{и} \quad S_f = 2 \frac{1-F^2}{|1-3F^2|}. \quad (3.48)$$

Наилучшая стабильность хода часов при изменении коэффициента трения ($S_f = \infty$ или $\frac{\partial T}{\partial F} = 0$) получается при $F = \frac{1}{\sqrt{3}}$, однако стабильность хода при изменении силы заводного механизма всегда невелика ($S_M = 2$).

2. Модель часов с балансиrom, обладающим «собственным периодом». Перейдем теперь к рассмотрению модели часов, на балансиr которых кроме сил трения и сил, действующих со стороны спуска, действует еще сила, «притягивающая» его к среднему положению (колебательной системой часов является или балансиr с пружиной или маятник и она имеет «собственный период», т. е. может совершать колебания при отсоединенном спусковом устройстве).

Уравнение движения колебательной системы таких часов можно записать в виде

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi = f\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}\right) + M(\varphi),$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в предыдущем пункте, а $k\varphi$ является моментом сил пружины балансира¹⁾. Это уравнение для движущегося балансира $\left(\frac{d\varphi}{dt} \neq 0\right)$, если ввести новые переменные

$$x = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad t_{\text{нов}} = \omega_0 t = \sqrt{\frac{k}{I}} t$$

и безразмерные параметры часов

$$\lambda = \frac{M_0}{k\varphi_0} \quad \text{и} \quad r = \frac{f_0}{k\varphi_0},$$

можно записать в виде следующей системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - r \operatorname{sgn} y - \lambda (-1)^n, \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

где, как и раньше, n — номер палетты, контактирующей с зубом ходового колеса; и точкой вверху обозначено дифференцирование по новому времени (очевидно, по-прежнему листом (I) двулистной фазовой поверхности, соответствующим контакту правой палетты Π_1 с зубом ходового колеса, является полуплоскость $x < +1$ и листом (II) , соответствующим контакту левой палетты Π_2 , — полуплоскость $x > -1$).

Рассмотрим фазовые траектории на листе (I) (по-прежнему фазовые траектории на листе (II) симметричны (относительно начала координат) с траекториями на листе (I)). Прежде всего найдем состояния равновесия. В силу того, что мы учитываем силы сухого, кулоновского трения, равновесие наступит во всяком состоянии, в котором осциллятор неподвижен $\left(\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ или } y = 0\right)$, а сумма моментов сил пружины и спускового механизма не превышает максимального момента

¹⁾ Это уравнение, конечно, справедливо и для часов с маятником при малых углах отклонения маятника от его среднего, вертикального положения, что в часах всегда имеет место.

силы трения покоя, т. е.

$$|M_0 - k\varphi| < f_0 \quad \text{или} \quad |x - \lambda| < r.$$

Очевидно, в зависимости от параметров могут представиться три случая: а) если $\lambda + r \leq 1$, то на листе (I) имеется отрезок ($y = 0$, $\lambda - r \leq x \leq \lambda + r$), состоящий из состояний равновесия, — отрезок покоя $O_1^+ O_1^-$ (рис. 150);

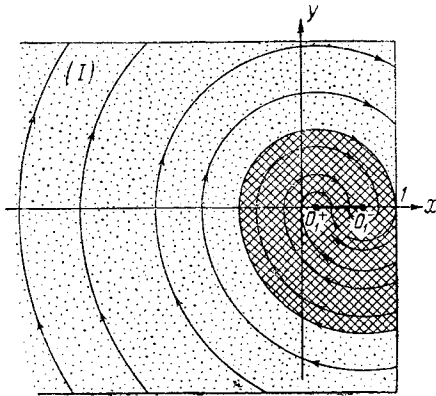


Рис. 150.

б) если $\lambda + r > 1$, но $\lambda - r \leq 1$, то состояниями равновесия будут точки отрезка ($y = 0$, $\lambda - r \leq x \leq 1$), и, наконец, в) состояний равновесия не существует, если $\lambda - r > 1$ (в последнем случае и точка $O_1^+(\lambda - r, 0)$, и точка $O_1^-(\lambda + r, 0)$ лежат вне листа (I)).

Интегрируя уравнения (3.49) для листа (I) (для него $n = 1$), нетрудно убедиться, что фазовыми траекториями будут дуги полуокружностей:

$$y^2 + [x - (\lambda + r)]^2 = \text{const} \quad (3.50a)$$

в нижней половине листа, $y < 0$ (с центром в точке $O_1^-(\lambda + r, 0)$) и

$$y^2 + [x - (\lambda - r)]^2 = \text{const} \quad (3.50б)$$

в верхней половине, $y > 0$ (с центром в точке $O_1^+(\lambda - r, 0)$). На рис. 150 изображены фазовые траектории на листе (I) для случая $\lambda + r < 1$. Фазовые траектории, начинающиеся в заштрихованной области, входят (через конечный промежуток времени) в отрезок покоя $O_1^+ O_1^-$. Все остальные фазовые траектории выходят на границу листа на полупрямой

$$x = +1, \quad y > 0.$$

Для выяснения характера возможных движений колебательной системы часов, так же как и в предыдущей задаче, проведем на фазовой поверхности две полупрямые: (v) $x = -1$, $y = -v$ ($v > 0$) и (v') $x = +1$, $y = v' > 0$, и рассмотрим точечное преобразование их друг в друга, осуществляемое фазовыми траекториями. Пусть изображающая точка перешла с листа (II) на лист (I) в точке $(-1, -v)$ полупрямой (v) (рис. 151). На листе (I) она, двигаясь по соответствующей полуокружности (3.50a), придет на ось абсцисс в точке $(-\xi, 0)$, где $\xi > 1$ и определяется уравнением

$$v^2 = [\xi + \lambda + r]^2 - [1 + \lambda + r]^2 = \xi^2 + 2(\lambda + r)\xi - 1 - 2(\lambda + r). \quad (3.51a)$$

Если $-\xi < \lambda - r$, то изображающая точка пересечет ось абсцисс и будет двигаться в верхней половине листа (I) по полуокружности (3.50 б):

$$y^2 + [x - (\lambda - r)]^2 = [\xi + \lambda - r]^2$$

и или выйдет на полупрямую (v') в точке $(+1, v_1)$, определяемой уравнением

$$v_1^2 = [\xi + \lambda - r]^2 - [1 - \lambda + r]^2 \doteq \xi^2 + 2(\lambda - r)\xi - 1 + 2(\lambda - r), \quad (3.51б)$$

или придет на отрезок покоя, в одно из равновесных состояний. Последнее имеет место при

$$\xi + \lambda - r < 1 - \lambda + r \text{ или } \xi < \xi_1 = 1 - 2(\lambda - r). \quad (3.52)$$

Соотношения (3.51 а) и (3.51 б) для рассматриваемого точечного преобразования, записанной опять в параметрической форме; функция последования для точечного преобразования полупрямой (v') в полупрямую (v), осуществляемого фазовыми траекториями на листе (II), имеет тот же вид в силу указанной выше симметрии фазовых траекторий на листах (I) и (II). Эта функция последования определяет в последовательности точек пересечения любой выбранной фазовой траектории с полупрямыми (v) и (v') (в последовательности v, v_1, v_2, v_3, \dots) каждую последующую точку по предыдущей. Неподвижная точка преобразования \bar{v} (для нее $v = v_1 = \bar{v}$) соответствует симметричному предельному циклу (рис. 151).

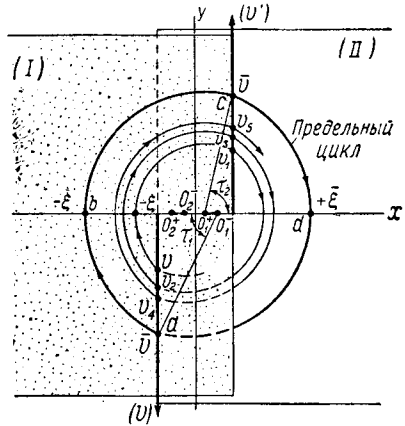


Рис. 151.

Для отыскания неподвижной точки, а также для определения ее устойчивости построим диаграмму Ламерея (рис. 152). Построив на ней кривые (3.51а) и (3.51б) (первую из них следует строить только для $\xi > 1$, вторую для $\xi > \xi_1 = 1 - 2(\lambda - r)$), нетрудно найти неподвижную точку как точку пересечения этих кривых (на рис. 152 по оси ординат отложены v^2 и v_1^2 вместо v и v_1 ; в этом случае кривые (3.51а) и (3.51б) являются параболлами). Очевидно, если $\xi_1 > 1$, что имеет место при $\lambda < r$, то кривые (3.51а) и (3.51б) не пересекаются; первая из них идет всюду над второй, последовательность чисел v, v_1, v_2, \dots будет монотонно убывающей и система при любых начальных условиях будет приходить в одно из состояний

равновесия. Автоколебаний часов в этом случае не будет (диаграмма Ламерея для этого случая изображена на рис. 152, а).

Если же $\xi_1 < 1$, что имеет место при

$$\lambda > r, \quad (3.53)$$

то кривые (3.51а) и (3.51б) имеют единственную точку пересечения, а рассматриваемое точечное преобразование — единственную неподвижную точку, которая, как нетрудно убедиться, является устойчивой (рис. 152, б). Таким образом, при выполнении неравенства (3.53) на

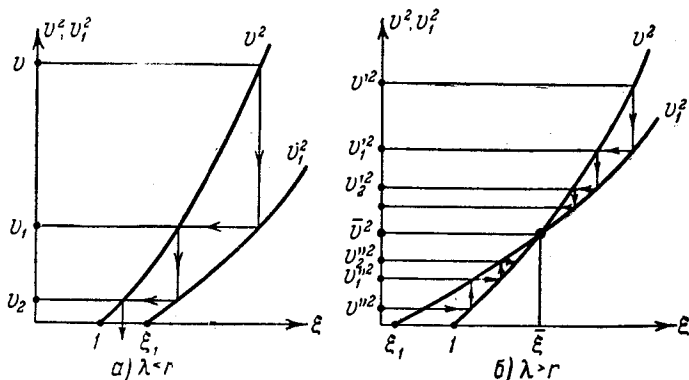


Рис. 152.

фазовой поверхности имеется единственный устойчивый предельный цикл, который и соответствует автоколебательному режиму часов (предельный цикл для случая $\lambda + r < 1$ и $\lambda > r$ изображен на рис. 151).

В зависимости от значений параметров λ и r (но $\lambda > r$) мы будем иметь или жесткий или

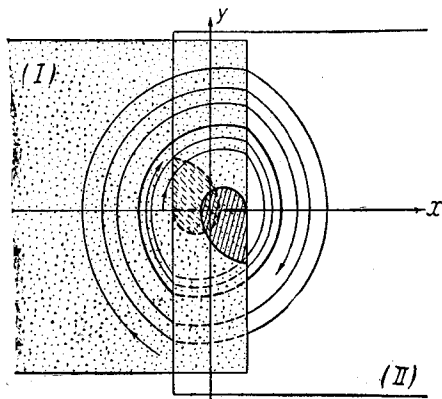


Рис. 153.

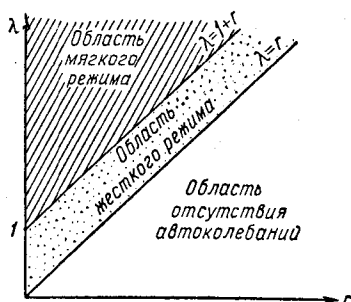


Рис. 154.

мягкий режим установления автоколебаний. Если $\lambda > r$, но $\lambda < 1 + r$, то наряду с устойчивым предельным циклом на фазовой поверхности

имеются еще отрезки устойчивых состояний равновесия (на каждом листе) и установление автоколебаний происходит не при всех начальных условиях (вне заштрихованной области на рис. 153). Если же $\lambda > 1 + r$, то состояний равновесия не существует и все фазовые траектории асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются к предельному циклу, т. е. имеет место мягкий режим установления автоколебаний (они устанавливаются при любых начальных условиях). На рис. 154 изображена плоскость параметров часов λ, r (точнее ее первый квадрант) с отмеченными на ней областями существования различных режимов часов.

Остановимся теперь более подробно на периодическом движении колебательной системы часов, которое, как мы видели, существует только при $\lambda > r$ или, что то же самое, при $M_0 > f_0$. Приравнивая v^2 и v_1^2 в выражениях (3.51a) и (3.51б), мы получим для амплитуды автоколебаний балансир:

$$\bar{\xi} = \frac{\lambda}{r}, \quad (3.54)$$

или в обычных угловых единицах¹⁾

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 \bar{\xi} = \varphi_0 \frac{M_0}{f_0}.$$

Для вычисления периода автоколебаний заметим, что изображающие точки двигаются по фазовым траекториям — полуокружностям — с угловой скоростью относительно их центров, равной единице²⁾. Поэтому время пробега (в единицах безразмерного времени) изображающей точки по той или иной дуге полуокружности, составляющей предельный цикл, равно величине центрального угла этой дуги и период автоколебаний (также в единицах безразмерного времени) равен

$$\tau = 2(\pi + \tau_1 - \tau_2),$$

где τ_1 и $\pi - \tau_2$ — центральные углы дуг ab и bc предельного цикла

¹⁾ Мы получили то же самое выражение для амплитуды автоколебаний, что и в случае часов с балансиром без «собственного периода» (см. (3.44)). Это полностью объясняется консервативностью момента пружины балансира — $k\varphi$. Действительно, поскольку работа спускового механизма за период автоколебаний равна $4M_0\varphi_0$, а работа кулоновских сил трения за тот же промежуток времени равна $4f_0\bar{\varphi}$, уравнение баланса энергии запишется в виде $4M_0\varphi_0 = 4f_0\bar{\varphi}$, независимо от того, имеет балансир пружину или нет, так как работа пружины за период автоколебаний равна нулю. Из этого уравнения баланса энергии мы получим для обоих типов часов:

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 \frac{M_0}{f_0}.$$

²⁾ Действительно, квадрат фазовой скорости согласно уравнениям (3.49) равен $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = y^2 + [x + (-1)^n \lambda + r \operatorname{sgn} y]^2 = R^2$ — квадрату радиуса соответствующей полуокружности; поэтому угловая скорость движения изображающей точки равна единице.

(рис. 151). Очевидно, τ_1 и τ_2 удовлетворяют неравенствам:

$$0 < \tau_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 < \tau_2 < \pi,$$

и определяются соотношениями:

$$\cos \tau_1 = \frac{1 + \lambda + r}{\bar{\xi} + \lambda + r} \quad \text{и} \quad \cos \tau_2 = \frac{1 - \lambda + r}{\bar{\xi} + \lambda - r}. \quad (3.55)$$

Так как $\frac{1 + \lambda + r}{\bar{\xi} + \lambda + r} > \frac{1 - \lambda + r}{\bar{\xi} + \lambda - r}$, то $\tau_1 < \tau_2$ и период автоколебаний

$$\tau = 2\pi - 2(\tau_2 - \tau_1) < 2\pi. \quad (3.56)$$

В обычных единицах период автоколебаний равен

$$T = \frac{\tau}{\omega_0} = \tau \sqrt{\frac{l}{k}} < 2\pi \sqrt{\frac{l}{k}}.$$

Он всегда меньше периода свободных колебаний балансира (или маятника).

Посмотрим, как зависит период автоколебаний T от параметров часов: от λ , т. е. от силы заводного механизма, и от $\frac{\lambda}{r} = \bar{\xi}$, т. е. от коэффициента трения, причем сделаем это для наиболее интересного для практики случая малых λ и r ($r < \lambda \ll 1$)¹⁾. При заданном $\bar{\xi}$ и $\lambda, r \rightarrow 0$ $\tau_1, \tau_2 \rightarrow \tau^0 = \arccos \frac{1}{\bar{\xi}}$, а $\tau \rightarrow 2\pi$. При $\lambda, r \ll 1$, очевидно, имеем следующие приближенные соотношения:

$$-\sin \tau^0 \cdot (\tau_1 - \tau_0) = \frac{1 + \lambda + r}{\bar{\xi} + \lambda + r} - \frac{1}{\bar{\xi}} = \frac{(\bar{\xi} - 1)(\lambda + r)}{\bar{\xi}(\bar{\xi} + \lambda + r)}$$

и, пренебрегая в знаменателе $\lambda + r$ по сравнению с $\bar{\xi}$,

$$\tau_1 \approx \tau^0 - \frac{(\bar{\xi} - 1)(\lambda + r)}{\bar{\xi}^2 \sin \tau^0};$$

аналогично

$$\tau_2 \approx \tau^0 + \frac{(\bar{\xi} + 1)(\lambda - r)}{\bar{\xi}^2 \sin \tau^0}$$

¹⁾ Как и в предыдущем пункте, мы будем считать, что наибольший момент сил трения покоя f_0 пропорционален силе давления зубьев ходового колеса на палетты балансира или, иначе, силе заводного механизма. Тогда отношение $\frac{\lambda}{r} = \bar{\xi}$ не будет зависеть от силы заводного механизма, а будет определяться коэффициентом трения между поверхностями зуба ходового колеса и скобы балансира.

и, следовательно,

$$\tau \approx 2\pi - 4\lambda \frac{\sqrt{\frac{r^2}{\xi^2} - 1}}{\xi^2} = 2\pi - 4r \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}, \quad (3.57)$$

так как $\sin \tau^0 = \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}}$. График зависимости τ от $\frac{r}{\lambda} = \frac{1}{\xi}$ (при постоянном λ) дан на рис. 155 (при $\frac{r}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0$). Рассматривая τ как функцию λ и $\frac{r}{\lambda} = \frac{1}{\xi}$, нетрудно получить следующие выражения

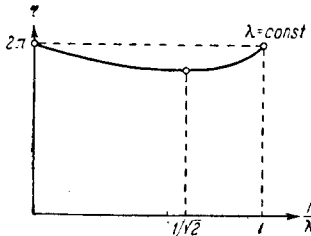


Рис. 155.

для стабильности хода часов при изменении силы заводного механизма и коэффициента трения:

$$S_M = \frac{1}{\frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} \right|_{\frac{r}{\lambda} = \text{const}}} = \frac{\pi \xi^3}{2\lambda \sqrt{\frac{r^2}{\xi^2} - 1}} = \frac{\pi}{2r \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}}$$

и

$$S_f = \frac{1}{\frac{r}{2\pi} \left| \frac{\partial \tau}{\partial r} \right|_{\lambda = \text{const}}} = \frac{2\pi \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}}{r \left(1 - 2\frac{r^2}{\lambda^2}\right)}$$

(3.58)

Как видим, стабильность хода часов тем лучше, чем меньше r и λ , т. е. чем меньше трение в колебательной системе часов и чем слабее воздействие на нее со стороны спускового механизма по сравнению с моментом $k\varphi_0$. Во всяком случае, стабильность хода часов с балансиrom, «обладающим собственным периодом», может быть сделана значительно более хорошей, чем стабильность часов с балансиrom без «собственного периода» [23].

§ 6. Свойства простейших автоколебательных систем

На частных примерах часов и лампового генератора (с характеристикой, состоящей из прямолинейных отрезков), рассмотренных в предыдущих параграфах, мы познакомились с основными чертами весьма многочисленных и практически весьма важных устройств, которые

целесообразно объединить в отдельный своеобразный класс, именно класс *автоколебательных* систем. Общей чертой этих систем является их способность совершать *автоколебания*, т. е. такие колебания, амплитуда которых, с одной стороны, в течение долгого времени может оставаться постоянной, а с другой стороны, вообще говоря, не зависит от начальных условий и определяется не начальными условиями, а свойствами самой системы. К числу таких автоколебательных систем следует помимо рассмотренных нами (часы и ламповый генератор) отнести, например, электрический звонок, всевозможные генераторы пилообразных и разрывных колебаний, дуговой генератор электрических колебаний, целый ряд музыкальных инструментов, как-то: духовые и смычковые инструменты и т. д. При известных условиях автоколебания могут возникнуть в передней подвеске автомобиля (так называемое явление «шимми» колес автомобиля). Автоколебательными системами являются и периодические переменные звезды типа цефеид [124, 54—56].

Свойство автоколебаний — независимость амплитуды от начальных условий — является весьма характерным их признаком. Однако не всегда автоколебательные системы обладают этим свойством в совершенно «чистом» виде. Так, например, амплитуда колебаний маятника часов, как мы видели, в известном смысле зависит от начальных условий. Если отклонить маятник мало, то он будет совершать затухающие колебания, часы остановятся. Для того чтобы установились незатухающие колебания (чтобы часы пошли), обычно нужно дать маятнику достаточно большое начальное отклонение или сообщить достаточно большую начальную скорость. Таким образом, целой области начальных условий (начальное отклонение больше данной величины) соответствует одна и та же амплитуда незатухающих колебаний. Как мы увидим в дальнейшем, в некоторых автоколебательных системах может существовать несколько стационарных процессов с различными амплитудами, и тот или другой из них устанавливается в зависимости от начальных условий, хотя и в этом случае целой области начальных условий соответствует одна и та же амплитуда незатухающих колебаний.

Другая типичная черта автоколебаний заключается в следующем: во всякой автоколебательной системе происходит компенсация потерь за счет какого-то источника энергии, и поэтому в автоколебательной системе непременно должен существовать такой источник энергии, причем, так как мы рассматриваем случай автономной системы, т. е. системы, на которую не действуют силы, явно зависящие от времени, то и источник энергии должен создавать силу, которая сама по себе не является заданной функцией времени, а определяется самой системой. Такова, например, анодная батарея в рассмотренном в предыдущей главе примере с ламповым генератором (или заводной механизм в часах); батарея дает некоторое постоянное напряжение, не зависящее от времени, но зато энергия, отдавае-

мая батареей, будет при колебаниях периодически изменяться. Так же как и для случая лампового генератора, для всех автоколебательных систем является весьма характерной именно такая связь между системой и источником энергии. Сам по себе источник отдавал бы постоянную энергию, но вследствие того, что работа, которую совершает этот источник, зависит от состояния системы (от ее координат и скоростей), действие источника энергии может стать периодическим, причем этот период определяется свойствами самой автоколебательной системы. Таким образом, автоколебательная система представляет собой устройство, которое из постоянного источника энергии периодически черпает известные порции энергии, т. е. *за счет неперiodического источника энергии создает периодический процесс*. С точки зрения этого определения сразу видно, что, например, паровая машина является автоколебательной системой.

§ 7. Предварительное рассмотрение автоколебаний, близких к синусоидальным

Весьма общим классом автоколебательных систем с одной степенью свободы являются системы, описываемые уравнением¹⁾

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, \dot{x}) - 2h\dot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (3.59)$$

К уравнению такого типа мы всегда приходим, если в составе нашей системы имеется колебательный контур с линейным затуханием. Если мы, например, имеем дело с обычным ламповым генератором, то $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $2h = \frac{R}{L}$, а $F(x, \dot{x})$ — приведенная²⁾ э. д. с., действующая на колебательный контур благодаря обратной связи. Работа этой силы, в конечном счете, восполняет потери энергии, обусловленные наличием сопротивления, благодаря чему и становится возможным периодический процесс.

Как по заданной функции $f(x, \dot{x})$ (которую можно, например, предположить аналитической на всей фазовой плоскости x, \dot{x}) определить, возможны ли в системе устойчивые автоколебания, и если возможны, то хотя бы приближенно найти характеристики (амплитуду, период, форму) таких колебаний — эта задача является *основной* для теории нелинейных колебаний в автономных системах с одной степенью свободы. В сущности почти все дальнейшее изложение в той или иной форме связано с этой основной задачей. Однако, прежде чем перейти к систематическому изложению теории, мы

¹⁾ В ряде простейших случаев $F(x, \dot{x})$ не зависит от x , так что вместо (3.59) имеем:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \psi(\dot{x}).$$

²⁾ Размерность $F(x, \dot{x})$ может не совпадать с размерностью электродвижущей силы.

сейчас дадим предварительное, нестрогое рассмотрение важного класса автоколебаний, так называемых *автоколебаний, близких к синусоидальным*¹⁾, имеющее целью уяснить постановку задачи теоретического изучения автоколебаний. О колебаниях, близких к синусоидальным, предварительно заметим следующее. Если, например, мы знаем, что периодическое решение уравнения (3.59) существует и соответствующая ему замкнутая фазовая траектория расположена на фазовой плоскости вне круга фиксированного радиуса R_0 и если $f(x, \dot{x})$ достаточно мала всюду вне этого круга (мы предполагаем ω_0 заданным), то мы можем сказать, что наше решение будет достаточно близко к синусоидальному²⁾. С другой стороны, как нетрудно видеть, требование малости функции $f(x, \dot{x})$ отнюдь не является необходимым. Возможны автоколебания, имеющие форму сколь угодно близкую к синусоидальной, хотя функция $f(x, \dot{x})$ принимает в некоторые моменты движения сколь угодно большие значения. С та-

1) Хотя автоколебания по своей физической природе, по характеру действующих сил, существенно отличаются от колебаний консервативных систем, тем не менее *форма* установившихся автоколебаний может сколь угодно мало отличаться от формы колебаний консервативной системы.

В частности, в ряде практически весьма важных случаев форма автоколебаний весьма мало отличается (в смысле малости клирфактора) от формы колебаний линейного гармонического осциллятора. Например, глядя на осциллограмму колебаний генератора с Γ -характеристикой в случае малого h , мы не сможем отличить ее от осциллограммы гармонического осциллятора.

2) Чтобы пояснить смысл этого утверждения, приведем доказательство. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y; \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \varphi(x, y). \end{aligned}$$

К такой системе легко преобразуется уравнение (3.59) после надлежащей замены переменных.

Пусть дано, что эта система имеет периодическое движение, фазовая траектория которого лежит вне круга радиуса R_0 . Пусть, далее, вне круга радиуса R_0

$|\varphi(x, y)| < \varepsilon R_0$, где $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -1 + \frac{x\varphi(x, y)}{r^2}; \\ \dot{r} &= + \frac{y\varphi(x, y)}{r}. \end{aligned}$$

Вне круга радиуса R_0

$$\left| \frac{x\varphi(x, y)}{r^2} \right| < \frac{|\varphi(x, y)|}{R_0} < \varepsilon < \frac{1}{2}; \quad \left| \frac{y\varphi(x, y)}{r} \right| < |\varphi(x, y)| < \varepsilon R_0.$$

Дадим оценку «поправки» к периоду гармонического осциллятора:

$$\int_0^{2\pi} \dot{\varphi}(t) dt = -2\pi + \alpha, \quad \text{где } |\alpha| < 2\pi\varepsilon,$$

кими системами мы имели дело в теории часов и в теории генератора с Γ -характеристикой и с колебательным контуром в цепи сетки, так как очевидно, что если мы имеем дело с мгновенной передачей конечного количества движения, то это может произойти только в результате действия бесконечно большой силы.

Вопрос о характеристиках и, в частности, о спектральном составе периодического процесса, по крайней мере для случая автоколебаний, близких к синусоидальным, может быть приближенно продискутирован при помощи представления об *авторезонансе*, о котором мы уже упоминали при изложении теории генератора с Γ -характеристикой.

Напомним предварительно некоторые элементарные положения обычной теории резонанса. Мы говорим о резонансе в линейном осцилляторе, когда под действием внешней периодической силы и силы трения, пропорциональной скорости, в нем поддерживается движение, близкое к одному из его собственных колебаний в том смысле, что период этого движения достаточно близок к собственному периоду осциллятора, а клирфактор достаточно мал. Пусть мы имеем внешнюю периодическую силу $\Phi(t)$ с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, действующую на гармонический осциллятор с линейным затуханием, собственная частота которого также равна ω (этот частный случай нас главным образом будет интересовать):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \Phi(t) - 2h\dot{x}. \quad (3.60)$$

Представим $\Phi(t)$ в виде:

$$\Phi(t) = P \cos \omega t + Q \sin \omega t + G(t), \quad (3.60a)$$

$$\int_0^{\tau} \dot{\varphi}(t) dt = -2\pi, \text{ где } \tau \text{ — искомый период.}$$

Отсюда $\left| \int_{2\pi}^{\tau} \dot{\varphi}(t) dt \right| < 2\pi\varepsilon$, что дает поправку к периоду $|\tau - 2\pi| < 4\pi\varepsilon$.

Оценим максимальное изменение радиуса-вектора за период:

$$\Delta r < \int_0^{\tau} |\dot{r}_{\max}| dt < \int_0^{\tau} \varepsilon R_0 dt < \varepsilon R_0 (2\pi + 4\pi\varepsilon).$$

Отсюда следует, что замкнутая траектория, соответствующая периодическому решению, лежит на фазовой плоскости между двумя концентрическими окружностями, разность радиусов которых меньше $R_0(2\pi\varepsilon + 4\pi\varepsilon^2)$. Само собой разумеется, что если мы заранее знаем, что траектория периодического движения лежит между окружностями с радиусами R_0 и R_1 ($R_1 > R_0$), то нам достаточно требовать малости $\varphi(x, y)$ лишь в области между двумя окружностями.

выделив резонансные члены¹⁾. Существует *определенное* собственное колебание

$$x_1(t) = \frac{P \sin \omega t - Q \cos \omega t}{2h\omega}, \quad (I)$$

для которого резонансные члены внешней силы компенсируются развивающейся при этом колебании силой трения. Нетрудно видеть, что при достаточно малом h (если $P^2 + Q^2 \neq 0$) в системе будет поддерживаться под действием силы $\Phi(t)$ периодическое движение, сколь угодно близкое к собственному колебанию (I) в том смысле, что для этого движения собственное колебание (I) будет как угодно сильно доминировать над остальными членами соответствующего разложения в ряд Фурье, или, говоря более точно, в том смысле, что для этого движения клирфактор будет как угодно мал. Докажем это утверждение. Обозначим разность между точным решением уравнения (3.60) и собственным колебанием $x_1(t)$ через $z(t)$, тогда $x(t) = x_1(t) + z(t)$. Очевидно, что $z(t)$ порождается нерезонансными членами $G(t)$ и удовлетворяет уравнению

$$\ddot{z} + \omega^2 z = G(t) - 2hz,$$

где

$$G(t) = \frac{P_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (P_n \cos n\omega t + Q_n \sin n\omega t).$$

Понимая в дальнейшем под $z(t)$ «вынужденное» решение этого уравнения, т. е.

$$z(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n),$$

где

$$C_n = \frac{\sqrt{P_n^2 + Q_n^2}}{\sqrt{(n^2 - 1)^2 \omega^4 + 4h^2 n^2 \omega^2}} \leq \frac{\sqrt{P_n^2 + Q_n^2}}{\omega^2},$$

мы можем записать квадрат клирфактора рассматриваемого периодического движения в виде:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} C_n^2}{\frac{P^2 + Q^2}{4h^2 \omega^2}},$$

¹⁾ То есть подобрав постоянные P и Q так, чтобы

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G(t) \cos \omega t dt = 0, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G(t) \sin \omega t dt = 0.$$

или, так как

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n^2 < \frac{1}{\omega^4} \left[\frac{P_0^2}{2} + P^2 + Q^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (P_n^2 + Q_n^2) \right] = \frac{1}{\pi\omega^3} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G^2(t) dt,$$

$$x^2 \leq \frac{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G^2(t) dt}{P^2 + Q^2} \frac{4h^2}{\pi\omega}.$$

Таким образом, условие малости клирфактора имеет вид

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{G^2(t) dt}{\pi\omega} \ll \frac{P^2 + Q^2}{4h^2}.$$

Если $\Phi(t)$ задано, то при достаточно малом h клирфактор сколь угодно мал, каков бы ни был спектр $\Phi(t)$, если только $P^2 + Q^2 \neq 0$.

Нас интересует сейчас не случай внешней силы (вынужденные колебания), а автоколебания, где сама система порождает действующую на нее силу. Уравнение движения здесь имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, \dot{x}) - 2h\dot{x}. \quad (3.59)$$

Предположим, что нам известно периодическое движение этой системы, соответствующее автоколебательному процессу: $x = \varphi(t)$, $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$. Очевидно, что это решение удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = F[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)] - 2h\dot{\varphi}, \quad (3.61)$$

т. е. уравнению системы, находящейся под действием силы, явно зависящей от времени¹⁾. Таким образом, автоколебания можно рассматривать как вынужденные колебания, поддерживаемые внешней силой, вид которой определяется видом самих автоколебаний. Если функция времени $F[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)]$ такова, что для нее выполняются условия резонанса, в частности если ее период достаточно близок к $\frac{2\pi}{\omega_0}$, то целесообразно говорить об авторезонансе²⁾.

¹⁾ Заметим, что уравнению (3.61) удовлетворяет только рассматриваемое периодическое движение и, вообще говоря, ему *не удовлетворяют* другие движения, определяемые уравнением (3.59). Отсюда следует, что, исходя из решений этого неавтономного уравнения, нельзя, например, рассматривать вопросы устойчивости.

²⁾ В частности, при помощи представления об авторезонансе можно заключить, что если функция $F[x(t), \dot{x}(t)]$ в уравнении (3.59) *как функция времени* практически не зависит от характера колебаний в контуре (например,

Заметим, что мы имеем известный произвол в выборе уравнения вида (3.61); например, часто бывает целесообразно писать это уравнение в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2)\varphi - 2h\dot{x}, \quad (3.62)$$

где ω — частота автоколебаний, и таким образом рассматривать действие измененной внешней силы

$$F_1(\varphi, \dot{\varphi}) = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2)\varphi$$

на линейный осциллятор с иной («поправленной») частотой. Ибо может оказаться, что при написании уравнения в виде (3.61) мы не будем иметь выполнения условий резонанса, в то время как при написании в виде (3.62) и подходящем выборе ω они будут выполняться.

Покажем теперь, как, пользуясь представлением об авторезонансе и *заранее постулировав* существование у уравнения (3.59) периодического решения, близкого к синусоидальному, можно получить приближенные выражения для амплитуды основного тона и для частоты этого решения.

Предположим, что периодическое решение уравнения (3.59) близко (в смысле малости клифактора) к синусоидальному колебанию:

$$x_0(t) = A \cos \omega t; \quad \dot{x}_0(t) = -A\omega \sin \omega t,$$

где A и ω — пока неопределенные константы. Подставляя тогда в уравнение (3.62) вместо точного решения φ «нулевое приближение» $x_0(t) = A \cos \omega t$, мы можем опять, теперь уже приближенно, рассматривать автоколебания, как вынужденные колебания. Мы получаем, таким образом, следующую задачу о вынужденных колебаниях:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_1(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) - 2h\dot{x}. \quad (3.63)$$

Разлагая $F_1(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t)$ в ряд Фурье, имеем (см. (3.60a)):

$$F_1(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) = P(A) \cos \omega t + Q(A) \sin \omega t + G(A, t),$$

где

$$P(A) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_1(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \cos \omega t dt,$$

$$Q(A) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_1(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \sin \omega t dt.$$

от величины размахов) и если при уменьшении затухания контура ее период стремится к периоду гармонического осциллятора $\frac{2\pi}{\omega_0}$, то при уменьшении затухания контура мы будем получать колебания все более и более синусоидальные. Это замечание имеет практический интерес. В частности, как раз такое положение дела мы имели в теории генератора с Γ -характеристикой.

Вынужденное решение уравнения (3.63) имеет вид:

$$x_1(t) = \frac{P(A) \sin \omega t - Q(A) \cos \omega t}{2h\omega} + z_1(A, t),$$

где $z_1(A, t)$ — члены, порождаемые нерезонансным членом $G(A, t)$. Если предположить, что ω , $P(A)$ и $Q(A)$ заданы, то можно сказать, что существует определенное собственное колебание

$$\frac{P(A) \sin \omega t - Q(A) \cos \omega t}{2h\omega},$$

для которого резонансные члены внешней силы компенсируются развиваемой этим собственным колебанием силой трения. Очевидно, что мы можем отождествить это собственное колебание с тем собственным колебанием $x_0(t) = A \cos \omega t$, которое по нашему предположению порождает внешнюю силу. Это сразу дает два уравнения¹⁾:

$$P(A) = 0, \quad Q(A) + 2h\omega A = 0, \quad (3.64)$$

которые «отбирают» те A и ω , которые характеризуют возможные автоколебания, близкие к синусоидальным.

Однако следует ясно отдать себе отчет, что найденные по уравнениям (3.63) амплитуда и частота, вообще говоря, отнюдь не являются амплитудой основного тона и частотой *точного* периодического решения (даже если, как мы предположили, такое точное решение действительно существует и имеет малый клирфактор²⁾), так как мы при переходе к «вынужденному» рассмотрению вместо точного решения подставили $A \cos \omega t$. Можно ожидать, что мы получим следующее приближение к амплитуде основного тона и частоте

¹⁾ Эти уравнения часто называют уравнениями, получаемыми путем приравнивания нулю коэффициентов при «резонансных членах». Поясним происхождение этого названия и одновременно дадим другой, с известной точки зрения более убедительный, вывод этих уравнений. Именно, вместо уравнения (3.62) рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2)x - 2h\dot{\varphi} = f_1(\varphi, \dot{\varphi}).$$

Предполагая существование колебаний, близких к синусоидальному колебанию $x = A \cos \omega t$, получаем задачу из теории вынужденных колебаний гармонического осциллятора *без трения*:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = P(A) \cos \omega t + [Q(A) + 2h\omega A] \sin \omega t + G(A, t).$$

Как известно, отсутствие неограниченного нарастания колебаний может иметь место в рассматриваемом случае лишь тогда, когда коэффициенты при резонансных членах внешней силы равны нулю. Это замечание снова приводит к уравнениям (3.64).

²⁾ Следует подчеркнуть, что наличие действительных решений уравнений (3.64) еще само по себе ничего не говорит о существовании периодических решений дифференциального уравнения (3.59).

точного решения, если мы при «вынужденном» рассмотрении вместо нулевого приближения подставим «первое приближение»¹⁾:

$$x_1(t) = A \cos \omega t + z_1(A, t).$$

Мы получим совершенно аналогичным образом (вместо (3.64)) новые, вообще говоря, измененные условия для определения A и ω , а также найдем «второе приближение»:

$$x_2(t) = A \cos \omega t + z_2(A, t).$$

Такой процесс составления уравнений для определения A и ω и составления последовательных «приближений» можно продолжать неограниченно. Если этот процесс сходящийся, то может оказаться, что мы таким путем найдем точное решение. Для обоснования этого процесса и для доказательства существования периодического решения нужно специальное математическое рассмотрение. Мы затронем связанные с этим вопросы в дальнейшем, когда будем изучать количественные методы Пуанкаре.

Предположение о том, что автоколебания близки к синусоидальным, широко используется в теории колебаний для решения ряда задач. Например, такие приближенные количественные методы рассмотрения ламповых генераторов, как метод Баркгаузена — Мёллера (метод «средней крутизны» или «квазилинейный» метод) [18, 136, 178, 73, 74, 29] или как метод Ван-дер-Поля [186, 90], основаны на этом предположении. Также и методы Пуанкаре [184, 185] удобно применять в тех случаях, когда колебания близки к синусоидальным²⁾.

В заключение параграфа для иллюстрации введенного здесь представления об авторезонансе проведем вычисление периода и амплитуды автоколебаний часов со спуском с отходом назад и балансиrom с собственным периодом — часов, рассмотренных нами в пункте 2 § 5 настоящей главы.

Запишем уравнение движения таких часов (3.49) в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_1(x, \dot{x}) + (\omega^2 - 1)x = F(x, \dot{x}),$$

¹⁾ Заметим, что если «первое приближение» с достаточной точностью представляет искомое периодическое движение, которое по нашему предположению близко к синусоидальному, то для него должно соблюдаться условие малости клирфактора. Однако, если это условие выполнено, то мы, вообще говоря, еще ничего не можем сказать о том, будут ли полученные из уравнений (3.64) A и ω с достаточной точностью представлять тон нашего решения, и о том каков будет клирфактор для дальнейших «приближений».

²⁾ Условия близости колебаний к синусоидальным соблюдаются, конечно, далеко не всегда. В некоторых случаях эти условия не могут быть выполнены, а в других специально выбирают такие условия работы системы, чтобы колебания имели заданную форму, значительно отличающуюся от синусоидальной. Таковы, например, всевозможные мультивибраторы, генераторы напряжения пилообразной формы и т. п.

где $F_1(x, \dot{x}) = -r \operatorname{sgn} \dot{x} - (-1)^n \lambda$ — сумма приведенных моментов сил сухого трения и спускового устройства. Предположим, что периодическое решение этого уравнения близко к синусоидальному:

$$x = A \cos \omega t$$

(это, как мы видели, имеет место при $r < \lambda \ll 1$). Такое колебание, а также вид функции F_1 для этого колебания изображены на рис. 156. Вычислив первые коэффициенты Фурье для функции $F[x(t), \dot{x}(t)]$

$$P(A) = \frac{4}{\pi} \left[r - \frac{\lambda}{A} \right],$$

$$Q(A) = (\omega^2 - 1) A - \frac{4\lambda}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}},$$

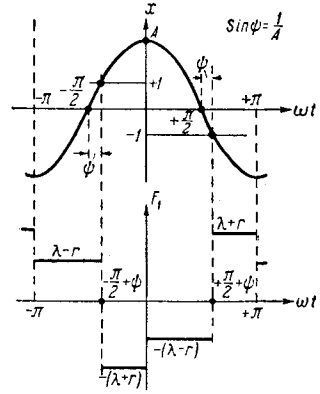


Рис. 156.

получим следующие уравнения (в соответствии с (3.64)) для амплитуды A и частоты ω периодического решения:

$$r - \frac{\lambda}{A} = 0, \quad (\omega^2 - 1) A - \frac{4\lambda}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} = 0,$$

откуда

$$A = \frac{\lambda}{r}, \quad \omega^2 = 1 + \frac{4\lambda}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} = 1 + \frac{4r}{\pi} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}.$$

Учитывая, что автоколебания рассматриваемых часов близки к синусоидальным только при $r, \lambda \ll 1$, получим:

$$\omega \approx 1 + \frac{2r}{\pi} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi - 4r \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}.$$

Полученные соотношения, очевидно, совпадают с формулами (3.54) и (3.57), являющимися результатом строгого рассмотрения той же задачи для случая $r, \lambda \ll 1$.

ГЛАВА IV

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ¹⁾

Мы приступим сейчас к систематическому изложению теории нелинейных систем и методов исследования и решения нелинейных дифференциальных уравнений, обратив особое внимание на вопросы так называемого качественного интегрирования, о важности которого мы уже упоминали. Однако наша задача будет заключаться не столько в том, чтобы дать математически безупречные доказательства всем высказываемым утверждениям, или в том, чтобы дать исчерпывающую классификацию всех возможных случаев, сколько в том, чтобы пояснить идею качественного интегрирования и развить существующие методы в связи с их применениями к теории колебаний и к некоторым другим вопросам.

Наиболее общим случаем среди тех, которыми мы ограничили наше рассмотрение, является нелинейная система, описываемая одним нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, или, что то же самое, двумя дифференциальными уравнениями первого порядка. Однако мы начнем изложение общей теории не с этого общего случая, а с более простого случая нелинейных систем первого порядка (систем с $1/2$ степени свободы), т. е. таких динамических моделей, движение которых описывается одним нелинейным дифференциальным уравнением *первого порядка*:

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (4.1)$$

К таким динамическим моделям приводит при соответствующих упрощающих предположениях рассмотрение ряда задач, имеющих определенный физический интерес.

Прежде всего мы рассмотрим системы, движение которых с достаточной точностью определяется уравнением (4.1) с правой частью $f(x)$, являющейся аналитической функцией на всей прямой x , за исключением, может быть, некоторого конечного числа точек.

¹⁾ § 6 п. 2 данной главы переработан Н. А. Железцовым, § 5 (пп. 2—4, 6), § 6 п. 1 и § 7 написаны им заново.

Общая теория, которую мы будем излагать, имеет конечной целью установление зависимости координаты системы от времени, т. е. вида функции $x(t)$, установление же картины в одномерном фазовом «пространстве», т. е. на фазовой прямой, играет лишь вспомогательную, хотя и весьма существенную роль.

§ 1. Теорема существования и единственности

Рассмотрим плоскость t, x . Решениями нашего уравнения $x = \varphi(t)$ являются кривые на плоскости t, x . Эти кривые мы также будем называть интегральными кривыми (их не следует, однако, смешивать с фазовыми траекториями и интегральными кривыми на фазовой плоскости).

Пусть нам даны начальные условия: $x = x_0$ при $t = t_0$, или, иначе, пусть на плоскости t, x дана точка с координатами (t_0, x_0) . Если для уравнения (4.1) выполнены условия теоремы Коши¹⁾ (например, если функция $f(x)$ является аналитической на некотором интервале,

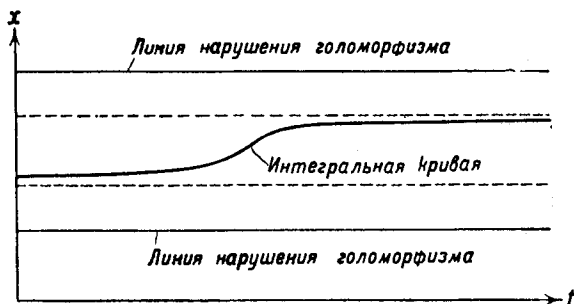


Рис. 157.

включающем x_0), то имеется единственное решение уравнения (4.1), удовлетворяющее этим начальным условиям, или, иначе, через точку (t_0, x_0) проходит единственная интегральная кривая. Эта интегральная кривая продолжается во всяком случае до тех пор, пока x не дойдет до того значения, при котором $f(x)$ не голоморфна. Если функция $f(x)$ аналитическая на всей прямой, то решение продолжаемо до тех пор, пока x не уходит в бесконечность²⁾. Если же x не уходит в бесконечность, то решение продолжаемо от $t = -\infty$ до $t = +\infty$.

Даже тогда, когда существуют точки нарушения голоморфизма, возможны случаи продолжаемости решения от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. В этих случаях решение, например, протекает между двумя прямыми, параллельными оси t , ординаты которых являются точками нарушения голоморфизма для функции $f(x)$ (рис. 157).

¹⁾ См. Дополнение I.

²⁾ Заметим, что это может случиться в конечное время. Тогда решение продолжаемо (в указанном здесь смысле) вплоть до этого момента. В качестве простого примера можно указать на уравнение $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$.

Резюмируя, можно сказать следующее. Вся плоскость t, x может быть разбита на полосы, границы которых представляют собой прямые, параллельные оси t , такие, что их ординаты являются точками нарушения голоморфизма функции $f(x)$. В каждой такой полосе через каждую точку проходит единственная интегральная кривая. Эти кривые аналитические и не пересекаются друг с другом внутри полосы.

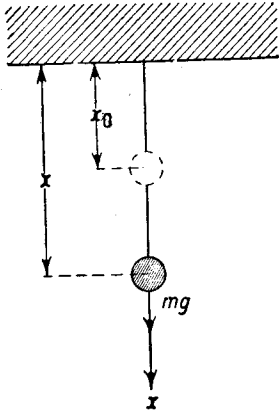


Рис. 158.

Из сформулированной теоремы мы ничего не можем заключить о том, что происходит на границах этих полос. Там может быть как непрерывный переход интегральной кривой через границу, так и всевозможные случаи нарушения непрерывности.

Рассмотрим пример, имеющий физический интерес, когда условия теоремы Коши не выполнены. Именно, рассмотрим равноускоренное падение тела массы m с ускорением g в случае, когда начальная скорость равна нулю (рис. 158).

На основании закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(x - x_0),$$

откуда, беря корень с положительным знаком (мы ограничиваемся рассмотрением движения в одном направлении), получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = +\sqrt{2g(x - x_0)}. \quad (4.2)$$

Найдем решение этого уравнения, соответствующее начальным условиям $t = t_0$; $x = x_0$. Нетрудно видеть, что при этом значении x функция $f(x) = \sqrt{2g(x - x_0)}$ не голоморфна, так как производная $f'(x)$ обращается в бесконечность при $x = x_0$ и, следовательно, в этой точке не существует разложения в ряд Тейлора. Таким образом, на плоскости t, x вдоль прямой $x = x_0$ условия теоремы Коши не соблюдены. Отсюда мы можем заключить, что в точках этой прямой возможны случаи неединственности решений, случаи несуществования и т. д.

В рассматриваемом примере можно решить этот вопрос непосредственным интегрированием. Именно, уравнение (4.2) имеет при рассматриваемых начальных условиях решение:

$$x - x_0 = \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$

(заметим, что у этих парабол мы должны рассматривать только их

правые от оси симметрии части, так как $\frac{dx}{dt} \geq 0$ в силу условия, наложенного на знак корня).

Кроме этого решения уравнение имеет еще одно решение, удовлетворяющее тем же начальным условиям:

$$x = x_0.$$

Это решение может быть получено по обычным правилам как огибающая семейства парабол $x - x_0 = \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$ с переменным параметром t_0 . Таким образом, мы видим (рис. 159), что через каждую точку прямой $x = x_0$ проходит не одна, а две интегральные кривые, т. е. условия единственности решения нарушены.

Нетрудно указать физический смысл неединственности решения. Мы исходили при исследовании падения тела не из ньютоновского закона движения $m \frac{d^2x}{dt^2} = f$, а из закона сохранения энергии. С точки зрения закона сохранения энергии

тело может при выбранных нами начальных условиях как падать равноускоренно, так и находиться в покое. Этим еще раз иллюстрируется, даже для случая одной степени свободы, хорошо известное обстоятельство, что закон сохранения энергии является недостаточным для установления законов движения.

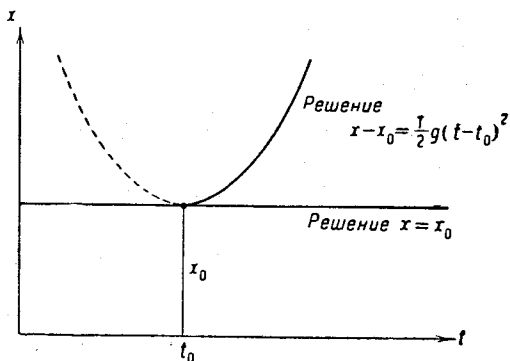


Рис. 159.

§ 2. Качественный характер кривых на плоскости t, x в зависимости от вида функции $f(x)$

Предположим, что $f(x)$ — функция, аналитическая для всякого значения x . Посмотрим, какие существуют при этом возможные решения. Пусть уравнение $f(x) = 0$ не имеет действительных корней. Тогда $\frac{dx}{dt}$ сохраняет все время один и тот же знак, и все решения суть монотонные функции, возрастающие или убывающие от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет действительные корни $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$, которые, очевидно, соответствуют состояниям равновесия. Соответствующие интегральные кривые на плоскости t, x — прямые, параллельные оси t и разбивающие плоскость t, x на полосы. Так как интегральные кривые не могут пересекаться

(в силу теоремы Коши), то каждая интегральная кривая должна целиком заключаться в одной из таких полос и, следовательно, быть монотонной, так как внутри полосы $f(x)$ не меняет знака. Более того, нетрудно видеть, что если интегральная кривая заключена в полосе между двумя параллельными оси t прямыми ($x = x_i$, $x = x_{i+1}$), являющимися решениями нашего дифференциального уравнения, то она асимптотически приближается к одной из этих прямых при $t \rightarrow +\infty$, к другой при $t \rightarrow -\infty$. Если же интегральная кривая заключена в части плоскости, ограниченной такой прямой, параллельной оси t , только с одной стороны, то эта интегральная кривая либо при возрастании t , либо при убывании t уходит в бесконечность; в другую же сторону она стремится к граничной прямой.

Таким образом, зная $f(x)$, нетрудно выяснить качественный характер кривых на плоскости t, x .

Очевидно, что эти кривые, если только $f(x)$ — аналитическая функция, не могут быть периодическими, так как они монотонны. Это замечание впоследствии окажется существенным.

§ 3. Представление движения на фазовой прямой

Рассмотрим теперь представление исследуемых движений в одномерном пространстве, в частности на фазовой прямой. Метод отображения движения при этом применяется тот же самый, как и в случае двумерной фазовой плоскости. Рассматриваемый случай, однако, более прост, так как здесь мы имеем дело с одномерным движением изображающей точки (рис. 160).

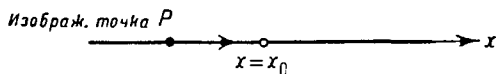


Рис. 160.

Пусть для данного x изображающая точка имеет скорость $f(x)$, т. е. ее движение подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (4.1)$$

Предположим, как мы уже делали, что на всей прямой, кроме, может быть, конечного числа точек, $f(x)$ — аналитическая функция. Тогда в силу теоремы Коши задание начального значения $x = x_0$ в начальный момент времени $t = t_0$ однозначно определит дальнейшее движение изображающей точки, по крайней мере до тех пор, пока изображающая точка не подойдет к границе области аналитичности.

Проследим движение во времени изображающей точки, находящейся в момент $t = t_0$ в области аналитичности. Проследим это движение в пределах от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, если во время движе-

ния изображающая точка не выйдет из области аналитичности, и в пределах от $t = \tau_1$ до $t = \tau_2$ ($\tau_1 < t_0 < \tau_2$), если изображающая точка к моментам τ_1, τ_2 подходит к границе области аналитичности. При этом движении изображающая точка опишет или точку (в частном случае покоя), или отрезок прямой, или полупрямую, или, наконец, всю прямую, которые таким образом являются возможными *траекториями* движений на фазовой прямой. Характер движения изображающей точки по фазовой прямой не зависит от того, в какой момент это движение началось, так как уравнения движения не зависят явно от времени. С этим связано то обстоятельство, что каждая отдельная траектория на фазовой прямой соответствует не одному движению, а бесконечному множеству движений, начинающихся в различные времена.

Каждым двум точкам A и B , расположенным на одной и той же траектории, соответствует определенный (конечный) промежуток времени, в течение которого изображающая точка проходит расстояние от A до B . Заметим, что изображающая точка, двигающаяся по траектории, не может достигнуть точки равновесия (точки равновесия, как мы знаем, определяются уравнением $f(x) = 0$) в конечный промежуток времени. Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы Коши. Действительно, если бы изображающая точка, двигающаяся по закону $x = \varphi(t)$, достигла при каком-то конечном $t = t_0$ состояния равновесия $x = x_0$, то мы имели бы два *различных* решения дифференциального уравнения (первое $x = \varphi(t)$ и второе $x = x_0$), принимающих одно и то же значение при $t = t_0$, что противоречит теореме Коши. Траектория изображающей точки, которая в этом случае асимптотически стремится к состоянию равновесия, не достигая его в конечное время, будет представлять собой или отрезок или полупрямую, концом которой является точка $x = x_0$ (рис. 160). Существенным здесь является то обстоятельство, что сама точка $x = x_0$ не принадлежит к рассматриваемой траектории, а является самостоятельной траекторией. Это ясно в силу того, что какой бы конечный момент времени мы ни взяли, изображающая точка будет находиться на конечном расстоянии от точки $x = x_0$, хотя, может быть, это расстояние и будет очень мало. Сформулируем теперь для фазовой прямой теорему о непрерывной зависимости решения от начальных условий ¹⁾.

Рассмотрим движение двух изображающих точек $P_1 \{x = x_1(t)\}$ и $P_2 \{x = x_2(t)\}$, начавших двигаться в один и тот же момент времени $t = t_0$, и проследим их в течение некоторого конечного промежутка времени T , в течение которого изображающая точка P_1 не выходит из области аналитичности. Тогда теорема о непрерывной

¹⁾ Мы даем теперь несколько иную формулировку этой теоремы по сравнению с даваемой в Дополнении I — формулировку, которая приспособлена к одномерному фазовому пространству.

зависимости от начальных условий гласит: каково бы ни было T и каково бы ни было ε ($\varepsilon > 0$), всегда можно найти такое δ $\{\delta(\varepsilon, T) > 0\}$, чтобы

$$|x_1(t) - x_2(t)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

если

$$|x_1(t_0) - x_2(t_0)| < \delta,$$

т. е. всегда можно выбрать начальные значения настолько мало отличающимися друг от друга, чтобы движения изображающих точек за данный промежуток времени T как угодно мало отличались друг от друга.

Перейдем теперь к исследованию траекторий на фазовой прямой в зависимости от вида функции $f(x)$.

Предположим, что $f(x)$ — функция, аналитическая на всей прямой x . Если уравнение $f(x) = 0$ не имеет действительных корней, то все движения имеют одну и ту же траекторию, совпадающую со всей фазовой прямой. Если же $f(x)$ имеет действительные корни $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, ..., $x = x_k$, то могут быть траектории различных типов:

- а) состояния равновесия;
- б) интервалы между двумя корнями;
- в) интервалы между одним из корней и бесконечностью (полу-прямые).

На каждой траектории движение происходит в какую-нибудь определенную сторону, так как $f(x)$ не меняет знака на траектории. Если $f(x) > 0$, то изображающая точка движется вправо; если $f(x) < 0$,

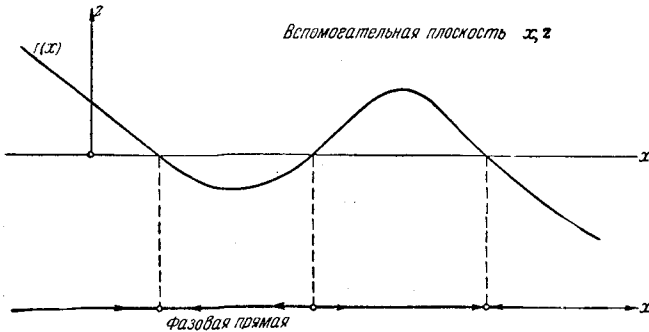


Рис. 161.

то изображающая точка движется влево; точки, где $f(x) = 0$, как мы уже говорили, соответствуют состояниям равновесия. Зная вид кривой $z = f(x)$ и пользуясь этими соображениями, можно разбить фазовую прямую на траектории и указать направление движения изо-

бражающей точки по траекториям¹⁾. Пример такого построения приведен на рис. 161. Разбитая на траектории фазовая прямая дает наглядное отображение возможных движений рассматриваемой динамической системы, описываемой одним дифференциальным уравнением первого порядка. Очевидно, что основными элементами, которые полностью определяют характер движений на фазовой прямой, являются состояния равновесия. Зная состояния равновесия и их устойчивость, мы можем нарисовать себе качественную картину возможных движений. В частности, отсюда сразу видно, что в случае аналитичности $f(x)$ на всей прямой в системе невозможны периодические движения. Поведение интегральных кривых на плоскости t, x можно установить, если известен характер движений изображающей точки на фазовой прямой. Рассмотрим плоскость t, x , причем фазовую прямую совместим с осью x . Пусть изображающая точка движется по фазовой прямой. Построим на плоскости t, x точку с абсциссой t и с ординатой, равной смещению изображающей точки по оси x в данный момент t . Абсцисса этой точки есть время и поэтому меняется; ордината, вообще говоря, тоже меняется, так как изображающая точка

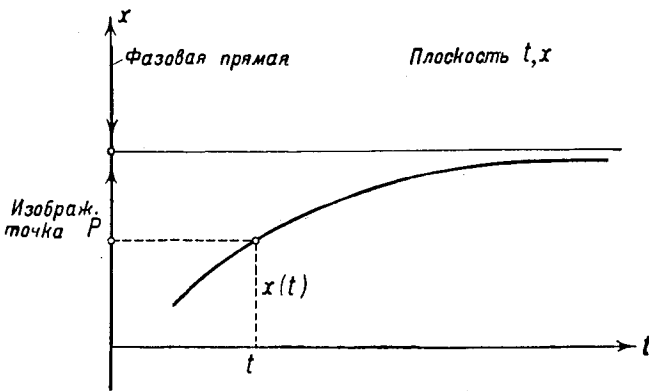


Рис. 162.

двигается. Следовательно, точка будет двигаться на плоскости t, x , описывая какую-то кривую. Эта кривая и будет интегральной кривой нашего уравнения (рис. 162).

§ 4. Устойчивость состояний равновесия

В свое время мы дали уже определение устойчивости состояния равновесия, следуя Ляпунову. Посмотрим, как выглядит это определение для рассматриваемого случая и каким образом возможно

¹⁾ Стрелками на фазовой прямой указывается направление движения изображающей точки.

аналитически распознавать устойчивость или неустойчивость состояний равновесия.

В нашем случае состояние равновесия $x = x_0$ будет устойчиво по Ляпунову, если, задав сколь угодно малое положительное ε , можно всегда найти такое δ , что

$$|x(t) - x_0| < \varepsilon \quad \text{для} \quad t_0 \leq t < +\infty, \quad \text{если} \quad |x(t_0) - x_0| < \delta.$$

Ляпунов дает аналитический рецепт исследования устойчивости состояний равновесия. Мы изложим сперва самый рецепт, а затем дадим его обоснование.

Пусть нас интересует устойчивость состояния равновесия $x = x_0$. Так как мы подразумеваем при этом устойчивость по Ляпунову, то мы интересуемся малыми отклонениями от состояния равновесия. Положим $x = x_0 + \xi$; тогда ξ — отклонение от состояния равновесия. По нашему предположению $f(x)$ — аналитическая функция. Переходя от переменной x к переменной ξ в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (4.1)$$

получим:

$$\frac{d\xi}{dt} = f(x_0 + \xi) = f(x_0) + f'(x_0)\xi + \frac{1}{1 \cdot 2} f''(x_0)\xi^2 + \dots$$

или, так как $f(x_0) = 0$, то уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots, \quad (4.3)$$

где

$$a_1 = f'(x_0); \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) \quad \text{и т. д.}$$

Данный Ляпуновым рецепт исследования устойчивости сводится к следующему. Отбросим в уравнении (4.3) нелинейные члены. Мы получим тогда *линейное* уравнение:

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi, \quad (4.4)$$

которое носит название линеаризованного уравнения или уравнения первого приближения. Интеграл этого уравнения находится сразу:

$$\xi = ce^{\lambda t}, \quad \text{где} \quad \lambda = a_1 = f'(x_0).$$

Ляпунов утверждает, что если $\lambda < 0$, то решение $x = x_0$ уравнения (4.1) устойчиво, т. е. что состояние равновесия устойчиво; если $\lambda > 0$, то состояние равновесия неустойчиво; если $\lambda = 0$, то уравнение первого приближения, вообще говоря, не может дать ответа на вопрос об устойчивости. Таким образом, Ляпунов утверждает, что в известных случаях уравнения, полученные путем отбрасывания не-

линейных членов, могут дать правильный ответ на вопрос об устойчивости решений нелинейных уравнений.

В рассматриваемом простом случае весьма нетрудно обосновать этот рецепт исследования устойчивости. Умножая обе части уравнения (4.3) на ξ , будем иметь:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\xi^2)}{dt} = a_1 \xi^2 + a_2 \xi^3 + \dots = F(\xi). \quad (4.5)$$

Представим $F(\xi)$ при помощи теоремы Тейлора, замечая, что

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F''(0) = 2a_1,$$

$$F(\xi) = \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} F''(\vartheta \xi) \quad (\text{где } 0 < \vartheta < 1),$$

и положим $\rho = \frac{1}{2} \xi^2$; тогда уравнение (4.5) примет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} F''(\vartheta \xi). \quad (4.6)$$

Если $F''(0) < 0$ (или, что то же самое, $a_1 < 0$), то в силу непрерывности функции $F''(\xi)$ и $F''(\vartheta \xi) < 0$ для достаточно малых $|\xi|$. Отсюда следует по (4.6), что и $\frac{d\rho}{dt} < 0$ для тех же $|\xi|$. Если $\rho = \frac{1}{2} \xi^2$ уменьшается, то уменьшается и $|\xi|$ и никогда не сможет начать увеличиваться. Отсюда следует, что условие $a_1 = f'(x_0) < 0$ достаточно для устойчивости по Ляпунову рассматриваемого состояния равновесия $x = x_0$, так как в этом случае вокруг $x = x_0$ всегда существует такая область начальных значений, из которой наша изображающая точка будет асимптотически приближаться к состоянию равновесия.

Совершенно таким же образом можно показать, что при $a_1 = f'(x_0) > 0$ состояние равновесия $x = x_0$ неустойчиво по Ляпунову.

Таким образом, рецепт Ляпунова оправдывается, так как результат исследования устойчивости состояния равновесия при помощи полного нелинейного уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots$$

совпадает с результатом исследования устойчивости при помощи линейного уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1 \xi,$$

если $a_1 \neq 0$. Основание для указанного отбрасывания нелинейных членов, таким образом, состоит в том, что нелинейные члены при малых значениях ξ весьма малы по сравнению с основным линейным членом; когда же линейный член равен нулю, то вопрос требует особого исследования.

Мы привели рассуждения, связанные с отбрасыванием нелинейных членов, поскольку аналогичные рассуждения нам будут встречаться при рассмотрении более сложных динамических систем и поскольку в нашем простейшем случае особенно отчетливо вырисовывается идея, лежащая в основе метода Ляпунова. Но, с другой стороны, в нашем конкретном случае одного уравнения первого порядка нетрудно непосредственно, исследуя характер функции $f(x)$ вблизи состояния равновесия $x = x_0$, однозначным образом заключить об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия.

Так как $f(x_0) = 0$, то здесь могут быть три существенно различных случая:

1) $f(x)$ меняет знак вблизи состояния равновесия $x = x_0$ с плюса на минус при возрастании x (рис. 163). Отсюда следует на основании предыдущего, что изображающая точка, находящаяся в доста-

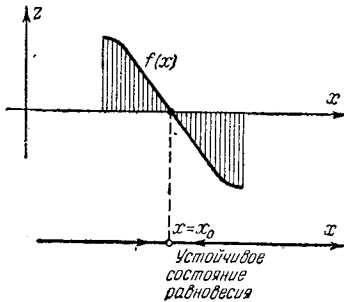


Рис. 163.

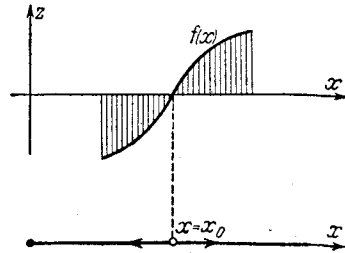


Рис. 164.

точной близости к состоянию равновесия $x = x_0$, будет асимптотически к нему приближаться при возрастании t . Ясно, что в этом случае состояние равновесия устойчиво по Ляпунову.

2) $f(x)$ меняет знак вблизи состояния равновесия $x = x_0$ с минуса на плюс при возрастании x (рис. 164). Это значит, что изображающая точка, помещенная в достаточной близости к состоянию равновесия, будет удаляться от состояния равновесия; отсюда следует, что состояние равновесия неустойчиво в смысле Ляпунова.

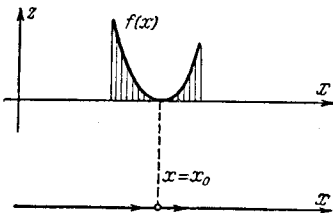


Рис. 165.

3) $f(x)$ не меняет знака вблизи состояния равновесия $x = x_0$ при возрастании x (рис. 165). Это значит, что изображающая точка, помещенная

достаточно близко к положению равновесия с одной стороны, будет приближаться к нему, помещенная с другой — удаляться. Ясно, что состояние равновесия является неустойчивым по Ляпунову.

Для рассматриваемого случая условия устойчивости можно сформулировать еще более кратко. Перенесем начало координат в точку x_0 . Тогда для устойчивости необходимо, чтобы x и f по обе стороны от положения равновесия были разных знаков, так как в противном случае, т. е. когда $\frac{dx}{dt}$ и x одного знака, раз возникшее отклонение от положения равновесия будет возрастать, т. е. состояние равновесия будет неустойчиво.

Все эти случаи могут быть исследованы и аналитически.

Если $a_1 \neq 0$, мы получим тогда как раз то, что мы нашли, следуя Ляпунову.

§ 5. Зависимость характера движений от параметра

Во всякой реальной системе на связь между скоростью и координатой, определяемую уравнением (4.1), в той или иной степени влияет ряд факторов. Так, например, если мы рассматриваем механическую систему и эта связь обусловлена наличием сухого трения, то величина трения зависит от ряда факторов: давления между трущимися поверхностями, их температуры и т. д. Эти факторы часто считают неизменными, хотя, строго говоря, они никогда не бывают абсолютно постоянными. Поэтому небольшие изменения этих факторов неизбежны во всякой реальной системе, и с этим всегда необходимо считаться; значит, необходимо знать, как изменяется характер движения при небольших изменениях этих факторов. Кроме того, в ряде случаев нас специально интересует вопрос о том, как изменяется характер движения в системе при изменении того или другого фактора. На математическом языке мы можем сформулировать эту задачу следующим образом: правая часть нашего дифференциального уравнения зависит от некоторого параметра λ :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda); \quad (4.7)$$

нас интересует вопрос, как изменяется характер движений в системе при изменении этого параметра λ . Как мы уже говорили, основными элементами, которые полностью определяют характер движений на фазовой прямой, являются состояния равновесия.

Состояние равновесия рассматриваемой системы дается уравнением

$$f(x, \lambda) = 0. \quad (4.8)$$

Это уравнение определит на плоскости λ, x некоторую кривую (рис. 166), выражающую зависимость координат состояний равновесия от параметра λ .

По предыдущему, состояние равновесия $x = \bar{x}$ устойчиво, если

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) < 0, \quad (4.9)$$

и неустойчиво, если

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) > 0. \quad (4.10)$$

Мы видим, таким образом, что теория зависимости состояний равновесия динамической системы первого порядка от параметра *в точности копирует* теорию зависимости состояний равновесия простейшей консервативной системы с одной степенью свободы от параметра. Совершенно так же, как и раньше, мы имеем здесь дело с бифуркационными значениями параметра, сменой устойчивости и т. д.

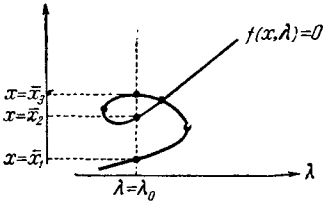


Рис. 166.

Мы не будем повторять уже изложенную теорию бифуркации (см. гл. II, § 5) и перейдем к рассмотрению

нескольких физических систем, приводящему при соответствующих упрощающих предположениях относительно их свойств к динамическим системам (моделям) первого порядка.

1. Вольтова дуга в цепи с сопротивлением и самоиндукцией. К числу таких систем относится схема вольтовой дуги, включенной на батарею с э. д. с. E через сопротивление R и самоиндукцию L (рис. 167). Эта схема приводит к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка, если мы будем учитывать только те элементы схемы, которые изображены на рис. 167, и пренебрежем всеми паразитными параметрами, которые имеются в любой реальной схеме, считая, что скорости колебательных процессов в схеме малы по сравнению со скоростями установления ионных процессов, обуславливающих ток в вольтовой дуге.

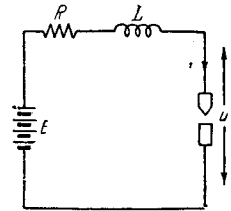


Рис. 167.

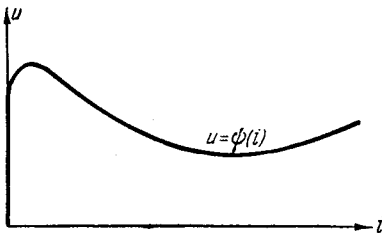


Рис. 168.

Нелинейность этого уравнения обусловлена тем, что дуга представляет собой проводник, не подчиняющийся закону Ома, т. е. тем, что сила тока, текущего через дугу, представляет собой нелинейную функцию напряжения на зажимах дуги. Связь напряжения на зажимах дуги с силой тока, текущего через дугу, может быть задана графически так называемой *статической* характеристикой

дуги $i = \varphi(u)$ или $u = \psi(i)$, где u — напряжение, а i — сила тока (рис. 168).

При сделанных предположениях из второго закона Кирхгофа получим для рассматриваемой схемы следующее дифференциальное

уравнение первого порядка:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \psi(i) = E,$$

или

$$\frac{di}{dt} = f(i) = \frac{E - Ri - \psi(i)}{L}. \quad (4.11)$$

Состояния равновесия ($i = I$) определяются условием $f(i) = 0$, т. е. уравнением

$$E - Ri - \psi(i) = 0. \quad (4.12)$$

Чтобы найти корни этого уравнения, построим, как это обычно делают в электротехнике, на одной плоскости характеристику дуги $u = \psi(i)$ и так называемую «нагрузочную» прямую $u = E - Ri$; их точки пересечения дадут нам значения тока I в состояниях равновесия (рис. 169). Там же отложена и кривая $u = E - Ri - \psi(i)$, которая в некотором масштабе изображает функцию $f(i)$, а зная $f(i)$, можно сразу построить траектории на фазовой прямой (рис. 170)¹⁾. В рассматриваемом случае существуют три состояния равновесия: $i = I_1, i = I_2, i = I_3$, из которых, как это вытекает из приведенных выше признаков устойчивости, первое и последнее устойчивы, а среднее неустойчиво.

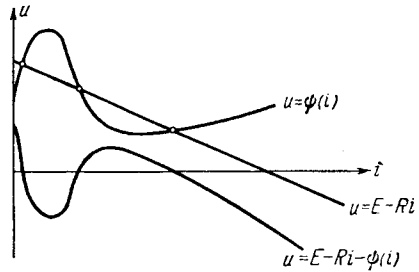


Рис. 169.

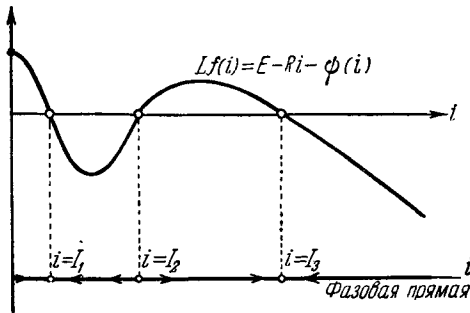


Рис. 170.

Установим, как зависит характер движения в нашей динамической системе от параметров, например от E или R .

Пусть E будет переменный параметр. В согласии с общими правилами строим на плоскости E, I кривую $f(I, E) = 0$ или

$$E - RI - \psi(I) = 0$$

¹⁾ Поскольку за координату системы мы выбрали ток i , который *однозначно* определяет u и $\frac{di}{dt}$, фазовой линией будет прямая i . Заметим, что прямая u не может служить фазовой линией, так как ток i не является однозначной функцией напряжения на дуге u и поэтому задание u еще не определяет однозначно состояния системы.

(рис. 171). Эта кривая, как видно из чертежа, имеет две точки бифуркации и, следовательно, два бифуркационных значения параметра E : $E = E_1$ и $E = E_2$. Бифуркационное значение параметра $E = E_2$ соответствует столь большому напряжению батареи (при заданном R), при котором состояния равновесия I_1 и I_2 сливаются и исчезают, так

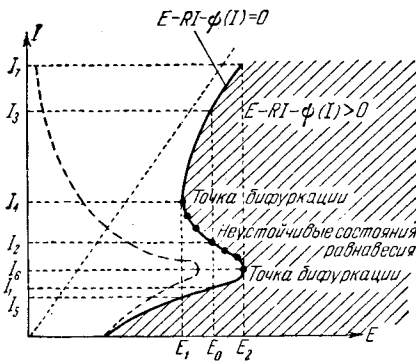


Рис. 171.

что при дальнейшем увеличении E остается только одно устойчивое состояние равновесия $i = I_3$, соответствующее значительному току. Бифуркационное значение параметра $E = E_1$ соответствует столь малому напряжению батареи (при заданном R), что состояния равновесия $i = I_3$ и $i = I_4$ сливаются и исчезают, и мы имеем при дальнейшем уменьшении E лишь одно устойчивое состояние равновесия I_1 , соответствующее незначительному току. Из этой диаграммы следует, что если мы будем медленно и непрерывно

изменять E , то в бифуркационных точках мы будем иметь скачкообразные переходы системы из одного состояния равновесия в другое. Сила тока в цепи дуги будет в соответствии с уравнением (4.11) увеличиваться от I_6 до I_7 (при $E = E_2$) и падать от I_4 до I_5 (при $E = E_1$). Картина зависимости стационарного тока I от напряжения батареи E имеет гистерезисный характер (рис. 172). Аналогично можно построить бифуркационную картину при заданном E и изменяющемся R .

Мы рассмотрели случай достаточно малых сопротивлений в цепи дуги — случай $R < |\psi'|_{\max}$, где $|\psi'|_{\max}$ — наибольшее абсолютное значение наклона характеристики дуги $u = \psi(i)$ на падающем участке. Если же

$$R > |\psi'|_{\max}, \quad (4.13)$$

то при любых E имеется только одно состояние равновесия и притом устойчивое (рис. 173). Устойчивость состояния равновесия получается при любых L , в частности при сколь угодно малых L . Этот вывод находится в определенном противоречии с экспериментальными данными: оказывается, условие (4.13) не является достаточным для устойчивости состояния равновесия на падающем участке характе-

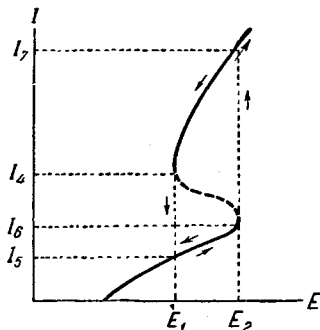


Рис. 172.

ристики. Это говорит о том, что, рассматривая схему с вольтовой дугой в виде динамической системы первого порядка (с $1/2$ степени свободы), мы не учли каких-то параметров схемы, существенных для рассматриваемого случая. Такими существенными параметрами в случае больших R и малых L являются малая паразитная емкость дуги и инерционность ионных процессов в дуге. Эту задачу о режимах горения вольтовой дуги, в цепи которой имеются не только сопротивление и самоиндукция, но и емкость, мы рассмотрим в § 5 гл. V¹⁾.

2. Динатрон в цепи с сопротивлением и емкостью.

В качестве второго примера электрической системы с $1/2$ степени свободы мы рассмотрим схему, изображенную на рис. 174²⁾.

Уравнение такой схемы (при учете только тех элементов, которые изображены на рис. 174) запишется на основании законов Кирхгофа в следующем виде:

$$RC \frac{du}{dt} + u + Ri = E. \quad (4.14)$$

Здесь $i = \varphi(u)$ — анодный ток тетрода, являющийся нелинейной, но однозначной функцией анодного напряжения u . График этой зависимости (анодная характеристика тетрода), как мы уже указывали в § 7 гл. I, имеет падающий участок (рис. 175).

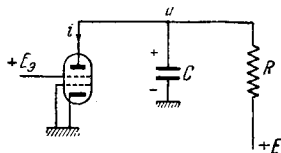


Рис. 174.

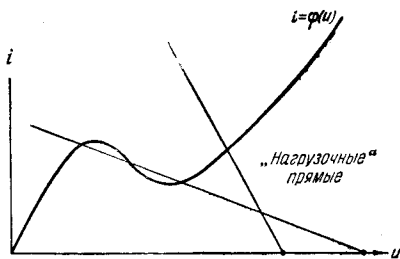


Рис. 175.

Состояния равновесия $u = U$ определяются уравнением

$$E - u - Ri = 0 \quad (4.15)$$

¹⁾ Как мы там увидим, инерционность ионных процессов в дуге может быть приближенно заменена некоторой «эквивалентной» самоиндукцией, включенной последовательно с дугой.

²⁾ Если анодная цепь тетрода не содержит специально включенной емкости, то под емкостью C следует понимать малую паразитную емкость анодного узла, составляемую из емкости между анодом тетрода и другими его электродами, а также из паразитной емкости сопротивления R .

и могут быть найдены графически как точки пересечения характеристики $i = \varphi(u)$ и «нагрузочной» прямой $E - u - Ri = 0$ (см. рис. 175). Очевидно, при заданной характеристике тетрода $i = \varphi(u)$ в зависимости от значений E и R имеется либо одно, либо три состояния равновесия. Если считать параметром схемы напряжение анодного питания E , а сопротивление R считать фиксированным, то можно на плоскости E, U построить кривую (4.15), выражающую зависимость координат состояний равновесия U от параметра E (при фиксированном R). Такое построение выполнено на рис. 176. Здесь воз-

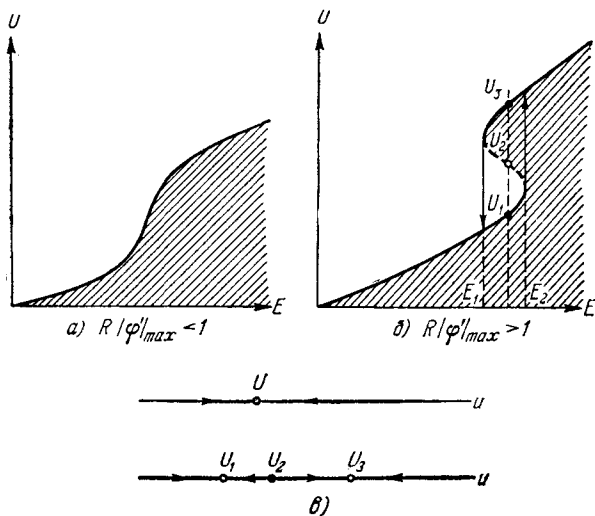


Рис. 176.

можно два случая. Если сопротивление R достаточно мало ($R|\varphi'|_{\max} < 1$, где $|\varphi'|_{\max}$ — наибольшее абсолютное значение крутизны характеристики на падающем участке), то при любых E имеется одно состояние равновесия (рис. 176, а). Если же $R|\varphi'|_{\max} > 1$, то на некотором интервале напряжений E имеется три состояния равновесия (рис. 176, б). В последнем случае значения E_1 и E_2 являются бифуркационными.

Заштриховав область, в которой

$$E - u - Ri > 0$$

или $\frac{du}{dt} > 0$, нетрудно определить устойчивость состояний равновесия. Именно, точки кривой (4.15), лежащие *над* этой областью, соответствуют устойчивым, а точки *под* ней — неустойчивым равновесным состояниям. Таким образом, в тех случаях, когда имеется одно состояние равновесия, оно всегда устойчиво; если же имеется три

состояния равновесия, то крайние состояния ($u = U_1$ и $u = U_3$ на рис. 176, б) устойчивы, а среднее ($u = U_2$) неустойчиво. Фазовые прямые при наличии одного и трех состояний равновесия изображены на рис. 176, в; при любых начальных условиях система приближается к одному из состояний равновесия.

3. Ламповое реле. К динамической системе первого порядка приводит также рассмотрение лампового реле, схема которого изображена на рис. 177 (на этой схеме емкость C_a изображает малую, паразитную емкость анодного узла лампы Λ_1)¹⁾.

Для анодного узла лампы Λ_1 на основании законов Кирхгофа получаем уравнение

$$C_a \frac{du_{a1}}{dt} + i_1 + \frac{u_{a1} - E_a}{R_{a1}} + \frac{u_{a1}}{R_1 + R_2} = 0 \quad (4.16)$$

(при составлении этого уравнения мы пренебрегли сеточным током лампы Λ_2 , так как обычно рассматриваемая схема работает практически

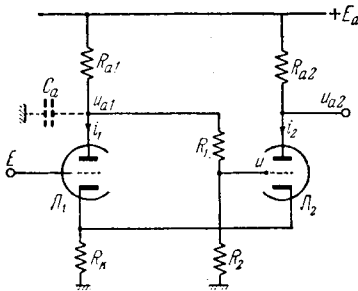


Рис. 177.

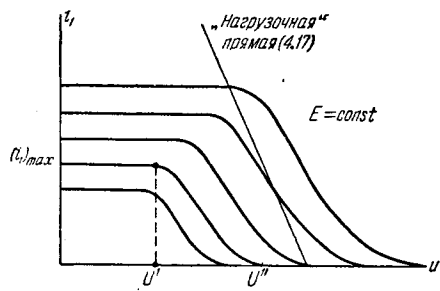


Рис. 178.

без сеточных токов ламп). Пренебрегая паразитной емкостью катодного узла, мы можем считать, что анодные токи ламп являются функциями напряжений E и u на сетках ламп Λ_1 и Λ_2 (u является координатой состояния схемы, E мы будем рассматривать как параметр; напряжения u и E , равно как и u_{a1} , отсчитываются от заземленного узла схемы).

На рис. 178 изображено семейство характеристик ламповой группы (ламп Λ_1 и Λ_2 с общим катодным сопротивлением), дающих зависимость анодного тока i_1 лампы Λ_1 от напряжения u (при различных, но постоянных напряжениях E). При достаточно малых u ($u \leq U'$) лампа Λ_2 заперта ($i_2 = 0$) и анодный ток i_1 лампы Λ_1 не зависит от

¹⁾ Мы не будем учитывать других паразитных емкостей и параметров. Заметим, что паразитную емкость сеточного узла лампы Λ_2 в схемах обычно компенсируют включением соответствующей емкости параллельно сопротивлению R_1 .

u ($i_1 = (i_1)_{\max} = \text{const}$). При $u > U'$ анодный ток лампы L_2 отличен от нуля, причем увеличение u вызывает увеличение i_2 и напряжения на катодном узле u_k и, следовательно, *уменьшение* i_1 , пока, наконец, при $u = U''$ лампа L_1 не заперта. При $u > U''$ лампа L_1 заперта, $i_1 = 0$. Напряжения U' и U'' , при которых запираются соответственно лампы L_2 и L_1 , а также максимальный ток $(i_1)_{\max}$, конечно, зависят от напряжения E (с ростом E они увеличиваются). В то же время мы будем считать, что наибольшая крутизна характеристики на падающем участке (ее абсолютное значение мы будем обозначать через S_0) не зависит от E .

Далее, напряжение на сетке лампы L_2

$$u = \beta u_{a1},$$

где $\beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ — коэффициент передачи делителя напряжений, состоящего из сопротивлений R_1 и R_2 (1). Исключая с помощью этого соотношения u_{a1} из уравнения (4.16), получим следующее дифференциальное уравнение первого порядка для напряжения u :

$$\frac{C_a}{\beta} \frac{du}{dt} = \frac{E_a}{R_{a1}} - i_1(u, E) - \frac{u}{\beta} \left(\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right). \quad (4.16a)$$

Состояния равновесия определяются уравнением

$$\frac{E_a}{R_{a1}} - i_1 - \frac{u}{\beta} \left(\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) = 0 \quad (4.17)$$

и могут быть найдены графически как точки пересечения характеристики ламповой группы $i_1 = i_1(u, E)$ с «нагрузочной» прямой (4.17). В зависимости от напряжения E на сетке лампы L_1 , а также от других параметров схемы имеется либо одно, либо три состояния равновесия.

Если наклон «нагрузочной» прямой (4.17) $\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right)$ больше наибольшего наклона падающего участка характеристики S_0 , что имеет место при

$$\beta \frac{S_0 R_{a1}}{1 + \frac{R_{a1}}{R_1 + R_2}} < 1,$$

1) Напомним, что мы пренебрегаем паразитной емкостью сеточного узла лампы L_2 . Если паразитная емкость этого узла равна C_2 , то выражение для коэффициента передачи делителя напряжений, приведенное в тексте, остается справедливым, если сопротивление R_1 зашунтировано емкостью, равной $\frac{R_2 C_2}{R_1}$.

то при каждом E имеется единственное состояние равновесия и притом, как нетрудно убедиться, устойчивое. В этом случае (см. рис. 178) равновесное значение напряжения U на сетке лампы L_2 монотонно и непрерывно убывает с ростом E , и зависимость выходного напряжения U_{a2} на аноде лампы L_2 от E имеет вид, изображенный на рис. 179. Выходное напряжение U_{a2} является непрерывной функцией входного напряжения E (при условии, что E изменяется достаточно медленно), и наша схема работает как обычный усилитель напряжений (с большим коэффициентом усиления из-за наличия в схеме *положительной* обратной связи).

Если же

$$\beta \frac{S_0 R_{a1}}{1 + \frac{R_{a1}}{R_1 + R_2}} > 1,$$

т. е. наклон прямой (4.17) меньше наибольшего наклона падающего участка характеристики ламповой группы (рис. 180), то на некотором интервале напряжений $E_1 < E < E_2$ схема имеет три состояния равновесия U_1, U_2 и U_3 , из которых два (U_1 и U_3) являются устойчивыми и одно (U_2) — неустойчивым¹⁾. Поэтому теперь

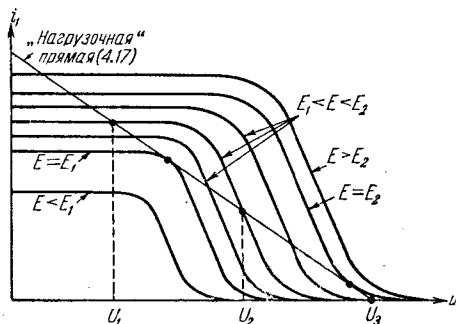


Рис. 180.

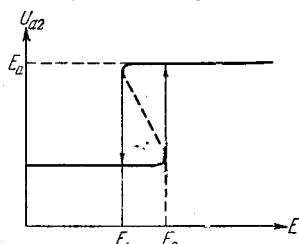


Рис. 181.

зависимость выходного напряжения U_{a2} от E будет изображаться кривой S-образной формы (рис. 181); пунктирный участок соответствует неустойчивым состояниям равновесия. Напряжения $E = E_1$ и $E = E_2$, при

¹⁾ Действительно, линеаризованное уравнение, справедливое вблизи состояния равновесия $u = U$, имеет вид:

$$\frac{C_a}{\beta} \frac{d\xi}{dt} = -A \cdot \xi,$$

где

$$\xi = u - U \text{ и } A = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) + \left(\frac{di_1}{du} \right)_{u=U}.$$

Для состояний равновесия $u = U_1$ и $u = U_3$ $A > 0$ и для $u = U_2$ $A < 0$; поэтому первые два равновесных состояния устойчивы, а последнее неустойчиво.

которых происходят слияние состояний равновесия и изменение их числа, являются бифуркационными. Строго говоря, характеристика схемы, приведенная на рис. 181, является *статической*: она дает зависимость *равновесных* значений выходного напряжения U_{a2} от *постоянных* во времени значений напряжения E на сетке лампы L_1 . Однако эта характеристика верна с некоторой степенью точности и для переменных E (тем точнее, чем медленнее изменяется E). Поэтому, если мы будем достаточно медленно (и непрерывно) изменять входное напряжение E , то в точках бифуркации (при $E = E_2, \dot{E} > 0$ и при $E = E_1, \dot{E} < 0$) будут иметь место быстрые (тем более быстрые, чем меньше паразитные емкости схемы) изменения выходного напряжения, происходящие в соответствии с уравнением (4.16a).

Таким образом, в этом случае рассматриваемая схема работает как ламповое реле, обладая основными характерными свойствами релейных устройств (наличие быстрых переходов из одного состояния равновесия в другое, «гистерезисная» характеристика).

4. Движение глассирующего судна. Рассмотрим теперь несколько примеров механических систем, движение которых может быть удовлетворительно описано одним дифференциальным уравнением первого порядка. В качестве первого примера рассмотрим прямолинейное движение глассирующего судна (без учета килевой и бортовой качки). Уравнение его движения согласно второму закону Ньютона может быть записано в виде:

где v — скорость судна, m — его масса, T и W — силы упора (тяги) винта и сопротивления судна. T и W являются функциями скорости v , при этом, сила упора винта монотонно убывает с увеличением скорости (при заданном режиме работы двигателя судна), а характеристика сопротивления глассирующего судна имеет на некотором интервале скоростей падающий участок (она изображена на рис. 182)¹.

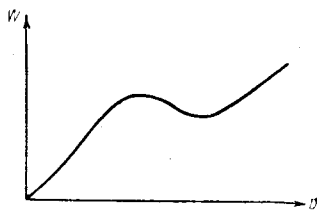


Рис. 182.

$$m \frac{dv}{dt} = T(v) - W(v), \quad (4.18)$$

где v — скорость судна, m — его масса, T и W — силы упора (тяги) винта и сопротивления судна. T и W являются функциями скорости v , при этом, сила упора винта монотонно убывает с увеличением скорости (при заданном режиме работы двигателя судна), а характеристика сопротивления глассирующего судна имеет на некотором интервале скоростей падающий участок (она изображена на рис. 182)¹.

¹ При достаточно малых скоростях движения глассирующее судно находится в «режиме плавания», когда его вес уравновешивается гидростатическими силами; при увеличении скорости сопротивление движению возрастает. По мере увеличения скорости все большая и большая доля веса судна уравновешивается гидродинамической подъемной силой, действующей на днище корпуса, корпус судна все больше и больше выходит из воды, в результате чего происходит значительное уменьшение погруженной поверхности судна, и на некотором интервале скоростей сила сопротивления уменьшается при увеличении скорости. При больших скоростях движения судно находится в «режиме глассирования», погруженная поверхность с ростом скорости уменьшается незначительно, и сопротивление снова возрастает с увеличением скорости.

«Состояния равновесия» $v = V = \text{const}$ (здесь они соответствуют режимам равномерного движения судна), очевидно, определяются условием

$$T(v) = W(v).$$

В зависимости от характеристики сопротивления $W = W(v)$ и характеристики винта $T = T(v)$ обычно имеется либо один, либо три режима равномерного движения. Типичные случаи изображены на рис. 183, а и б (там же

изображены и соответствующие разбиения фазовых прямых на фазовые траектории). Нетрудно видеть, что при наличии одного режима равномерного движения (рис. 183, а) этот режим всегда устойчив, а при наличии трех режимов равномерного движения (рис.

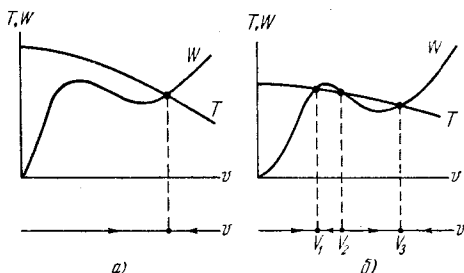


Рис. 183.

183, б) режимы со скоростями $v = V_1$ и $v = V_3$ устойчивы, а режим со средней скоростью ($v = V_2$) неустойчив. Случай трех режимов равномерного движения может иметь место при упоре винта $T = T(v)$, мало меняющемся с увеличением скорости, и в частности при буксировке моделей глиссеров в испытательных бассейнах, если при буксировке сила тяги T постоянна.

Очевидно, при любых начальных условиях глиссирующее судно приходит в один из устойчивых режимов равномерного движения.

5. Однофазный асинхронный мотор. В качестве второго примера рассмотрим задачу о вращении ротора однофазного асинхронного мотора. Некоторые недостатки этого типа моторов (в чем заключаются эти недостатки — выяснится при нашем рассмотрении) делают его мало пригодным для работы в обычных условиях, и поэтому асинхронные однофазные моторы изготавливаются только очень небольших мощностей и используются только в тех случаях, когда при трогании с места и малых оборотах мотора нагрузка на него мала. Этими условиями определяется область применения однофазных асинхронных моторов — ими пользуются, например, для вращения небольших вентиляторов. При питании статора мотора однофазным переменным током получается зависимость вращающего момента от числа оборотов, примерно указанная на рис. 184. С другой стороны, вращению ротора препятствует трение (в подшипниках) и сопротивление воздуха (движению вентилятора); учитывая как первое («твердое»), так и второе («жидкое») трение, мы можем зависимость момента сил трения от скорости изобразить примерно так, как это указано на рис. 185.

Обозначая вращающий момент через $M(\omega)$, момент сил трения через $m(\omega)$ и момент инерции через I , можно написать дифференциальное уравнение движения ротора:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M(\omega) - m(\omega).$$

Мы имеем дело, таким образом, с одной зависимой переменной — угловой скоростью ω .

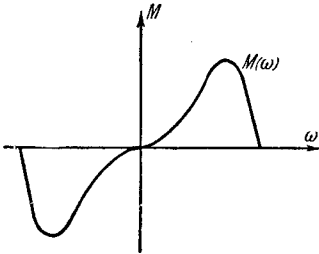


Рис. 184.

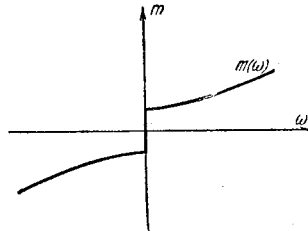


Рис. 185.

«Состояния равновесия» (они соответствуют как состоянию покоя ($\omega = 0$), так и режимам равномерного вращения мотора) даются уравнением

$$M(\omega) - m(\omega) = 0.$$

Чтобы найти корни этого уравнения, строим две вспомогательные кривые $z = M(\omega)$ и $z = m(\omega)$ и находим точки их пересечения (рис. 186). Далее, как в предыдущем примере, найдем функцию $f(\omega) = \frac{M(\omega) - m(\omega)}{I}$ и построим траектории на фазовой прямой (рис. 187).

В нашем случае имеются три устойчивых состояния равновесия: $\omega = \omega_0$; $\omega = \omega_2$; $\omega = \omega_2'$; и два неустойчивых: $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_1'$. Из

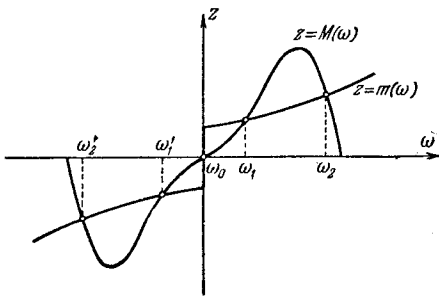


Рис. 186.

устойчивости состояния $\omega = \omega_0 = 0$, соответствующего полному покою (отсутствие вращения), следует, что ротор, вообще говоря, сам собой не приходит во вращение, его нужно каким-то образом «забросить» за состояния ω_1 или ω_1' , т. е. раскрутить его до некоторого числа оборотов ω_1 , после чего он сам доходит до нормального числа оборотов ω_2 .

Мотор может вращаться как в

ту, так и в другую сторону (два устойчивых состояния равновесия ω_2 и ω_2'), и направление установившегося вращения зависит только от

того, в какую сторону был раскручен ротор. Для того чтобы избавиться от необходимости раскручивать ротор мотора, употребляют специальные приемы (добавочные обмотки, полюса и т. д.), нарушающие симметрию в картине вращения в обе стороны, вследствие чего появляется некоторый начальный вращающий момент и мотор сам трогается с места и, конечно, уже всегда в одну сторону.

Однако начальный вращающий момент с помощью нарушения симметрии нельзя сделать достаточно большим, и поэтому мотор все же плохо трогает с места. Этот недостаток мы и имели в виду выше — он очень сильно ограничивает область применения однофазных асинхронных моторов.

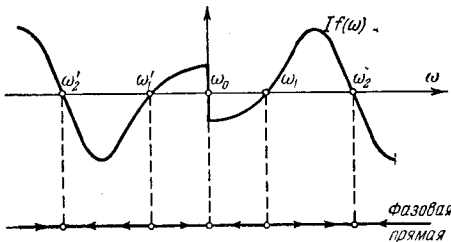


Рис. 187.

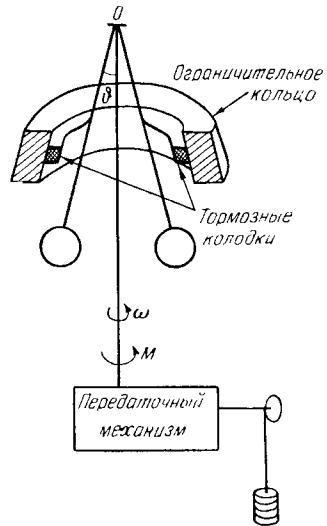


Рис. 188.

6. Фрикционный регулятор. Рассмотрим еще одну механическую систему, приводящую при определенных упрощающих предположениях к динамической системе первого порядка, — фрикционный регулятор, устройство которого схематически изображено на рис. 188. Такие фрикционные регуляторы применяются в ряде астрономических приборов, в телеграфных аппаратах, в патефонах и т. п. для стабилизации скорости вращения тех или иных осей. Их действие основано на том, что по мере увеличения скорости вращения оси регулятора шары регулятора расходятся и при некотором угле $\vartheta \equiv \vartheta_0$ тормозные колодки начинают тереться об ограничительное кольцо, создавая тормозящий момент, который будет тем больше, чем больше скорость вращения (при росте возрастает сила нажима тормозных колодок на ограничительное кольцо). Этот тормозящий момент, резко возрастающий при увеличении скорости вращения, приводит систему в режим равномерного вращения, скорость которого оказывается сравнительно слабо зависящей от момента сил M , действующего на ось регулятора со стороны передающего механизма.

Считая все части регулятора идеально жесткими и предполагая, что во время процесса регулирования $\vartheta \equiv \vartheta_0$, мы получим

динамическую модель с $1/2$ степени свободы (ее движение будет описываться дифференциальным уравнением первого порядка).

Однако временно для получения выражения зависимости давления тормозных колодок на ограничительное кольцо мы не будем полагать, что $\vartheta \equiv \vartheta_0$, и будем рассматривать регулятор как систему с двумя степенями свободы (с обобщенными координатами φ и ϑ). Функция Лагранжа для такой системы запишется в виде

$$L = \frac{1}{2} I(\vartheta) \omega^2 + \frac{1}{2} J_{\vartheta} \dot{\vartheta}^2 - V(\vartheta),$$

где $I(\vartheta)$ — момент инерции регулятора относительно его оси, J_{ϑ} — момент инерции шаров регулятора относительно точки O и $V(\vartheta)$ — потенциальная энергия регулятора. Будем пренебрегать всеми силами трения, кроме сил сухого трения тормозных колодок об ограничительное кольцо. Момент m этих сил трения (относительно оси регулятора) мы будем считать пропорциональным моменту N сил давления тормозных колодок на ограничительное кольцо (моменту относительно точки O), т. е. будем полагать, что

$$m = N\varphi(\omega),$$

где $\varphi(\omega)$ — функция, пропорциональная коэффициенту трения и поэтому определяемая свойствами трущихся поверхностей тормозных колодок и ограничительного кольца (вид этой функции изображен на рис. 189).

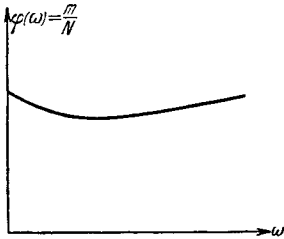


Рис. 189.

Тогда мы получим уравнение движения регулятора в виде следующих уравнений Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right) = M - m, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -N$$

или

$$I(\vartheta) \dot{\omega} + I'(\vartheta) \omega \dot{\vartheta} = M - m, \quad J_{\vartheta} \ddot{\vartheta} - \frac{1}{2} I'(\vartheta) \omega^2 + V'(\vartheta) = -N. \quad (4.19)$$

Полагая в этих уравнениях $\vartheta \equiv \vartheta_0$, мы получим, во-первых, выражение для момента сил давления тормозных колодок на ограничительное кольцо:

$$N = \frac{1}{2} I'(\vartheta_0) \omega^2 - V'(\vartheta_0)$$

или

$$N = a(\omega^2 - \omega_0^2), \quad (4.20)$$

где $a = \frac{1}{2} I'(\vartheta_0)$ и $\omega_0^2 = \frac{2V'(\vartheta_0)}{I'(\vartheta_0)}$ — квадрат той скорости вращения регулятора, при которой положение $\vartheta = \vartheta_0$ было бы равновесным и без ограничительного кольца; мы получим, во-вторых, уравнение

движения динамической модели первого порядка:

$$I(\vartheta_0) \dot{\omega} = M - a\varphi(\omega)(\omega^2 - \omega_0^2). \quad (4.21)$$

Состояния равновесия (т. е. режимы равномерного вращения регулятора) $\omega = \Omega$, очевидно, определяются уравнением

$$a\varphi(\Omega)(\Omega^2 - \omega_0^2) = M. \quad (4.22)$$

Скорость равномерного вращения Ω , конечно, зависит от момента M , приложенного к оси регулятора со стороны передаточного механизма (эта зависимость, обычно называемая статической характеристикой регулятора, дается в неявном виде уравнением (4.22)). Локально мы можем эту зависимость характеризовать величиной производной¹⁾

$$\frac{d\Omega}{dM} = \frac{1}{2a\Omega\varphi(\Omega) + a\varphi'(\Omega)(\Omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (4.23)$$

Устойчивость режима равномерного вращения определяется уравнением первого приближения

$$I(\vartheta_0) \frac{d(\Delta\omega)}{dt} = -a \{2\Omega\varphi(\Omega) + \varphi'(\Omega)(\Omega^2 - \omega_0^2)\}$$

или

$$I(\vartheta_0) \frac{d(\Delta\omega)}{dt} + \frac{\Delta\omega}{\left(\frac{d\Omega}{dM}\right)} = 0. \quad (4.24)$$

Очевидно, режим равномерного вращения устойчив, если $\frac{d\Omega}{dM} > 0$, и неустойчив, если $\frac{d\Omega}{dM} < 0$.

Статическая характеристика регулятора $\Omega = \Omega(M)$ в зависимости от вида функции $\varphi(\omega)$ (от крутизны падающего участка характеристики

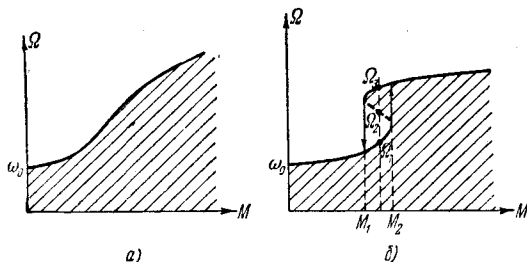


Рис. 190.

трения) и от величины параметра регулятора ω_0 ²⁾ является или однозначной монотонной кривой (рис. 190, а), когда при каждом

¹⁾ Во всех выражениях (4.20) — (4.23) и ниже мы должны считать, что $\omega > \omega_0$. Только в этом случае $N > 0$ и тормозные колодки поджаты к ограничительному кольцу.

²⁾ ω_0 можно в некоторых пределах изменять путем перемещения ограничительного кольца.

значении момента M система имеет единственный и притом устойчивый режим равномерного вращения, или же имеет S-образную форму (рис. 190, б). В последнем случае при $M_1 < M < M_2$ система имеет три режима равномерного вращения со скоростями Ω_1, Ω_2 и Ω_3 , два из которых ($\Omega = \Omega_1$ и $\Omega = \Omega_3$) устойчивы и один ($\Omega = \Omega_2$) неустойчив. Значения $M = M_1$ и $M = M_2$ являются бифуркационными. При переходе момента M через них в системе имеют место переходы из одного режима равномерного вращения в другой¹⁾.

§ 6. Периодические движения

В рассмотренных нами динамических системах первого порядка единственными стационарными движениями были состояния равновесия. В них не было никаких периодических движений. Это понятно, так как мы ограничивались рассмотрением систем, движение которых подчинялось уравнениям первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (4.1)$$

с *однозначными* правыми частями (с однозначными функциями $f(x)$) — уравнениям, которые вообще не допускают периодических решений. Действительно, если бы такое периодическое движение происходило, то система должна была бы дважды проходить через одно и то же значение x в противоположных направлениях, т. е. с *двумя различными значениями скорости* $\frac{dx}{dt}$, что невозможно в силу однозначности функции $f(x)$.

Периодические движения в системах первого порядка становятся возможными только в тех случаях, когда правая часть уравнения (4.1) — функция $f(x)$ — *неоднозначна* хотя бы на некотором интервале изменения x .

Примером может служить уравнение движения гармонического осциллятора с *заданной полной энергией* h :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = h \quad (= \text{const})$$

¹⁾ Наша динамическая модель фрикционного регулятора не имеет никаких периодических колебаний, любое ее движение заканчивается приходом в устойчивый режим равномерного вращения. Между тем при некоторых условиях в реальных фрикционных регуляторах не имеется устойчивого режима равномерного вращения и в них возникают автоколебания [132,9]. Для объяснения самовозбуждения регулятора и установления автоколебаний необходимо отказаться от предположения, что все части регулятора являются абсолютно жесткими, и учесть большую, но конечную жесткость плоских пружин, на которых укреплены тормозные колодки. Это приведет к рассмотрению динамической модели с полутора степенями свободы (ее движение будет описываться системой дифференциальных уравнений третьего порядка). Это рассмотрение выходит за пределы настоящей книги.

или после приведения к виду (4.1)

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{h - \frac{kx^2}{2}},$$

которое, как известно, имеет периодическое решение

$$x = \sqrt{\frac{2h}{k}} \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и α — произвольная постоянная. Заметим, что для этой системы первого порядка фазовой линией не может служить отрезок прямой $x: -A \leq x \leq +A$, где $A = +\sqrt{\frac{2h}{k}}$ — заданная

амплитуда колебаний, так как задание x еще не определяет однозначно скорости системы \dot{x} (каждому значению x на интервале $-A < x < +A$ соответствуют *два* различных значения \dot{x}). В качестве фазовой линии мы можем взять любую простую (без самопересечений) замкнутую кривую, например окружность (рис. 191). Каждому значению x соответствуют *две* точки окружности, что дает возможность установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие точек этой окружности и состояний гармонического осциллятора с заданной энергией. Например, мы можем считать, что на

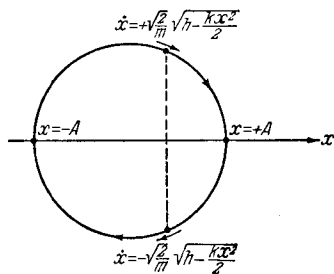


Рис. 191.

верхней полуокружности $\dot{x} = +\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{h - \frac{kx^2}{2}}$ и на нижней $\dot{x} = -\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{h - \frac{kx^2}{2}}$; тогда задание точки окружности однозначно определяет x и \dot{x} , т. е. однозначно определяет состояние системы.

Это положение является общим для динамических систем первого порядка: периодические движения возможны только в таких системах, фазовые линии которых имеют замкнутые участки (только такие фазовые линии допускают замкнутые фазовые траектории, соответствующие периодическим движениям). Поэтому *неоднозначность правой части уравнения (4.1) на некотором интервале изменения x является необходимым условием существования периодических решений этого уравнения.*

Ниже мы рассмотрим два примера физических систем, которые при определенных упрощающих предположениях относительно их свойств приводят к динамическим системам первого порядка с *двухзначной* правой частью уравнения (4.1).

1. Двухпозиционный регулятор температуры. Первым примером будет двухпозиционный (релейный) регулятор температуры, схема которого изображена на рис. 192. Для температуры печи θ (мы будем считать ее одинаковой по

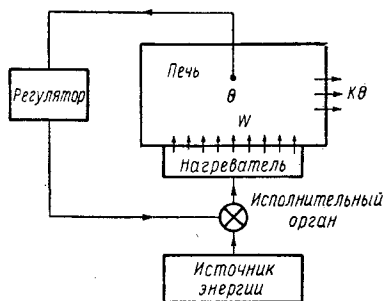


Рис. 192.

всему объему печи и будем отсчитывать от температуры окружающей среды) имеем следующее уравнение теплового баланса:

$$C \frac{d\theta}{dt} = W - K\theta, \quad (4.25)$$

где C — теплоемкость печи (мы будем считать ее не зависящей от температуры), W — мощность, подводимая к печи со стороны нагревателя, $K\theta$ — мощность теплоотдачи печи во внешнюю среду (приближенно можно считать, что мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур печи и внешней среды, т. е. что справедлив так называемый закон теплоотдачи Ньютона; коэффициент K называется коэффициентом теплоотдачи). Температура печи измеряется термопарой (или каким-либо другим измерителем температуры), которая через регулятор и исполнительный орган управляет мощностью, подводимой к печи.

Рассмотрим *двухпозиционный регулятор*, т. е. регулятор типа «включено — выключено», который в зависимости от температуры печи θ или полностью выключает нагреватель ($W = 0$), или включает его на определенную мощность ($W = W_0$). Характеристика такого регулятора изображена на рис. 193. Она всегда имеет гистерезисный характер: если включение нагревателя печи происходит при температуре печи θ_1 , то его выключение происходит при температуре $\theta_2 > \theta_1$; на интервале температур $\theta_1 < \theta < \theta_2$ характеристика регулятора $W = W(\theta)$ *двузначна*¹⁾.

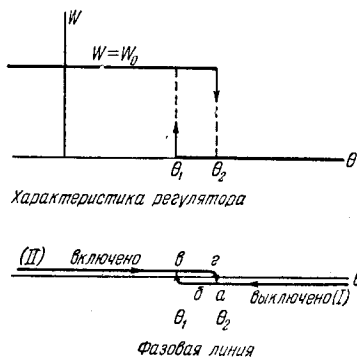


Рис. 193.

¹⁾ Один из распространенных в настоящее время двухпозиционных регуляторов температуры регулятор ЭРМ-47 устроен следующим образом. Термопара, измеряющая температуру печи, подключена к гальванометру, на стрелке которого укреплен алюминиевый листочек («флажок»), входящий в зазор между контурной катушкой и катушкой обратной связи лампового генератора. При изменении температуры флажок перемещается и изменяет коэффициент взаи-

В соответствии с этой двузначностью характеристики регулятора фазовой линией системы (печи с регулятором) будет линия «с налогом» (рис. 193), состоящая из двух полупрямых, одна из которых (I) ($\theta > \theta_1$) соответствует выключенному, а другая (II) ($\theta < \theta_2$) включенному нагревателю. При этом переход изображающей точки с полупрямой (I) на полупрямую (II) происходит только в точке b (при $\theta = \theta_1$), а обратный — только в точке a (при $\theta = \theta_2$). Фазовая линия имеет замкнутый участок $abvga$, и если система имеет периодическое движение, то фазовой траекторией, соответствующей этому движению, может быть только замкнутая кривая $abvga$ (так как других замкнутых фазовых траекторий фазовая линия не допускает).

Решение уравнения (4.25) при выключенном нагревателе ($W = 0$, изображающая точка находится на полупрямой (I)), очевидно, записывается в виде

$$\theta = Ae^{-\frac{K}{C}t}, \quad (4.26)$$

а при включенном нагревателе ($W = W_0$, изображающая точка находится на полупрямой (II)) — в виде

$$\theta = \frac{W_0}{K} + Be^{-\frac{K}{C}t}. \quad (4.27)$$

При $\theta_\infty = \frac{W_0}{K} < \theta_2$ (θ_∞ — это та температура, которая установилась бы в печи при всегда включенном нагревателе) система имеет единственное состояние равновесия

$$\theta_0 = \frac{W_0}{K}$$

(оно лежит на полупрямой (II)). В этом случае, как нетрудно убедиться, при любых начальных условиях в системе установится это состояние равновесия. Равновесная температура θ_0 будет зависеть как от мощности нагревателя (от W_0), так и от условий теплоотдачи

миоиндукции между катушками генератора (при введении флажка в зазор между катушками он экранирует катушки друг от друга и коэффициент взаимоиנדукции падает). Ламповый генератор находится в жестком режиме возбуждения автоколебаний (см. гл. IX), поэтому изменение коэффициента взаимоиנדукции приводит при определенных положениях флажка к возникновению автоколебаний конечной амплитуды или к их срыву. Поскольку средний анодный ток лампы генератора при отсутствии автоколебаний гораздо больше, чем при наличии их (генератор имеет автоматическое смещение в цепи сетки), реле, обмотка управления которого включена в анодную цепь лампы, будет включать или выключать нагреватель в зависимости от положения флажка, т. е. в зависимости от температуры печи. Как известно, при жестком режиме возбуждения и срыв автоколебаний происходят при различных значениях коэффициента взаимоиנדукции между катушками генератора (срыв происходит при меньшем коэффициенте взаимоиנדукции, чем возникновение автоколебаний). Это и обуславливает гистерезисный характер характеристики регулятора.

(от K), и будет изменяться при их изменении, так как нагреватель при температурах, близких к θ_0 , всегда включен.

Пусть теперь

$$\theta_\infty = \frac{W_0}{K} > \theta_2. \quad (4.28)$$

В этом случае на *всей* полупрямой (II) $\frac{d\theta}{dt} > 0$, а на полупрямой (I)

$\frac{d\theta}{dt} < 0$ (последнее, конечно, имеет место всегда). Поэтому на фазовой линии нет никаких состояний равновесия и изображающая точка *после первого же переключения регулятора* будет описывать *замкнутую* фазовую траекторию *абвга*. В системе установится *автоколебательный режим*. Температура печи при этих колебаниях будет колебаться в пределах от θ_1 до θ_2 , т. е. в пределах зоны двузначности характеристики регулятора. В таком автоколебательном

режиме температура печи не выходит за пределы этой зоны (а она может быть сделана достаточно узкой), несмотря на возможные изменения мощности нагревателя W_0 или изменение условий теплоотдачи.

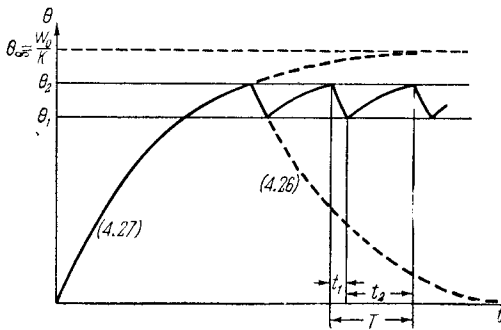


Рис. 194.

из кусков экспонент (4.26) и (4.27), «сшитых» так, чтобы температура θ была непрерывной функцией времени. Периодические колебания являются «релаксационными», т. е. сильно отличающимися по своей форме от гармонических, и носят «пилообразный» характер.

Найдем период автоколебаний. Интервал времени t_1 , в течение которого нагреватель выключен и температура изменяется от θ_2 до θ_1 , определяется согласно (4.26) соотношением

$$\theta_1 = \theta_2 e^{-\frac{K}{C} t_1},$$

откуда

$$t_1 = \frac{C}{K} \ln \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

Аналогично интервал времени t_2 , в течение которого нагреватель

включен и температура возрастает от θ_1 до θ_2 , определяется в согласии с (4.27) выражением

$$\theta_2 = \frac{W_0}{K} + \left(\theta_1 - \frac{W_0}{K} \right) e^{-\frac{K}{C} t_2}$$

или

$$t_2 = \frac{C}{K} \ln \frac{\frac{W_0}{K} - \theta_1}{\frac{W_0}{K} - \theta_2}.$$

Таким образом, период автоколебаний

$$T = t_1 + t_2 = \frac{C}{K} \left\{ \ln \frac{\theta_2}{\theta_1} + \ln \frac{\frac{W_0}{K} - \theta_1}{\frac{W_0}{K} - \theta_2} \right\}$$

или

$$T = \frac{C}{K} \ln \frac{\frac{\theta_\infty}{\theta_1} - 1}{\frac{\theta_\infty}{\theta_2} - 1}. \quad (4.29)$$

Ясно, что чем уже зона двузначности характеристики регулятора (чем ближе θ_1 к θ_2), тем меньше период автоколебаний, тем чаще происходят переключения регулятора (включения и выключения нагревателя печи)¹⁾.

2. Колебания в схеме с неоновой лампой. В качестве второго примера динамической системы с 1/2 степени свободы, колебания

¹⁾ При постановке рассмотренной задачи о двухпозиционном регуляторе температуры мы считали, что температура в печи в каждый момент времени одинакова по *всему* объему печи. Это, конечно, справедливо только при достаточно медленных колебаниях температуры (настолько медленных, что в каждый момент времени распределение температуры по объему печи достаточно мало отличается от равномерного). Если учесть конечную скорость теплообмена между отдельными частями объема печи, то мы приходим к динамической системе более высокого порядка или даже к распределенной системе. Температура печи в автоколебательном режиме будет несколько выходить за пределы зоны двузначности характеристики регулятора, а период автоколебаний не будет стремиться к нулю при приближении θ_1 к θ_2 , что находится в полном соответствии с экспериментальными данными о работе двухпозиционных регуляторов.

Рассмотренная нами динамическая модель двухпозиционного регулятора температуры дает удовлетворительное согласие с экспериментальными результатами только при достаточно широкой зоне двузначности и при наличии достаточно интенсивного теплообмена между отдельными частями объема печи.

которой описываются дифференциальным уравнением первого порядка (4.1) с двузначной правой частью, мы рассмотрим схему релаксационного генератора с неоновой лампой (рис. 195)¹⁾. Подобная схема рассматривалась Ван-дер-Полем, Фридлиндером и др. [152, 153, 188, 146, 143].

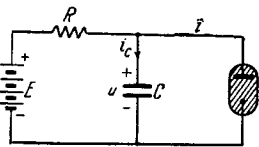


Рис. 195.

При рассмотрении этой схемы мы не будем учитывать никаких паразитных параметров элементов схемы и будем считать, что сила тока i через неоновую лампу является *функцией* напряжения u на ней и определяется *статической* характеристикой лампы $i = \varphi(u)$ ²⁾. В результате этого мы приходим к динамической системе с 1/2 степени свободы, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$C \frac{du}{dt} + i = \frac{E - u}{R}$$

или

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{RC} \{E - u - R\varphi(u)\} = f(u). \quad (4.30)$$

Нелинейность этой схемы обусловлена присутствием в ней неоновой лампы, для которой связь между током i и напряжением u не определяется законом Ома, а выражается нелинейной зависимостью $i = \varphi(u)$, имеющей гистерезисный характер. Наиболее типичные черты статической характеристики неоновой лампы, которые играют существенную роль в рассматриваемых нами процессах и которые мы будем учитывать, таковы: при малых напряжениях лампа совсем не пропускает тока («не горит»), ток в лампе возникает только при определенном напряжении U_1 —напряжении зажигания. При этом сразу устанавливается некоторая сила тока I_1 , отличная от нуля. При дальнейшем увеличении напряжения u сила тока возрастает по закону, близкому к линейному. При уменьшении напряжения, когда напряжение достигает значения U_1 (при «горящей» лампе), лампа еще не гаснет. При дальнейшем уменьшении u сила тока через лампу по-

¹⁾ Заметим, что рассмотрение тиратронного генератора пилообразных напряжений аналогично рассмотрению схемы с неоновой лампой.

²⁾ Таким образом, мы предполагаем, что в каждый момент времени состояние неоновой лампы не отличается от *статического* (от установившегося режима при соответствующем *постоянном* напряжении u на неоновой лампе). Это, очевидно, можно делать только при достаточно медленных процессах в схеме, когда скорости изменения u значительно меньше скоростей установления газового разряда в неоновой лампе. Время установления газового разряда в неоновой лампе имеет величину порядка сотен микросекунд. Поэтому результаты, которые будут получены ниже для периодических колебаний в рассматриваемой схеме, будут справедливы только для схем, частоты колебаний которых не превышают (по порядку величины) десятка тысяч колебаний в секунду.

степенно уменьшается, наконец, лампа сразу гаснет при некотором напряжении U_2 — напряжении гашения и при токе I_2 , причем $U_2 < U_1$ и $I_2 < I_1$. Все эти существенные для рассматриваемого генератора с неоновой лампой черты статической характеристики $i = \varphi(u)$ передаются кривой, изображенной на рис. 196, а.

Конечно, в действительности цепь неоновой лампы обладает некоторой малой паразитной самоиндукцией и установление газового разряда требует малого, но все же конечного промежутка времени;

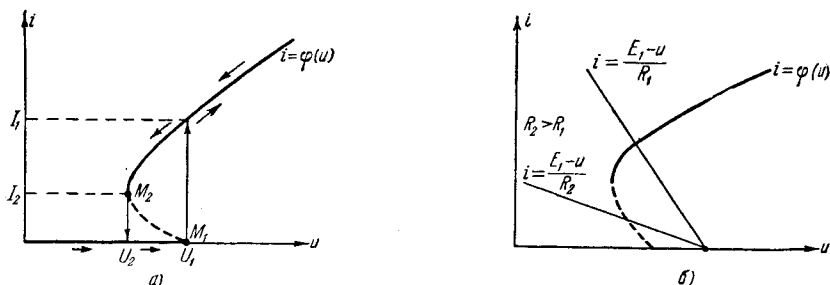


Рис. 196.

поэтому изменение тока через неоновую лампу не может совершаться мгновенно. Но поскольку мы пренебрегаем этими факторами, мы будем считать, что ток через неоновую лампу при ее зажигании и гашении изменяется от 0 до I_1 и от I_2 до 0 мгновенно, скачком.

В то же время, несмотря на скачки тока, напряжение u изменяется непрерывно, так как скачкообразные изменения этого напряжения ($\frac{du}{dt} = \infty$) связаны с бесконечными токами (ток заряда конденсатора $i_c = C \frac{du}{dt}$) и напряжениями, что мы считаем в нашей схеме невозможным. Поэтому изменения тока i через неоновую лампу при ее зажигании (при $u = U_1$) и при ее гашении (при $u = U_2$) происходят так, как указано на рис. 196, а стрелками¹⁾. Пунктирный участок $M_1 M_2$ статической характеристики неоновой лампы, «мимо» которого проскакивает изображающая точка, обычно не осуществляется в статическом режиме из-за его неустойчивости. Характеристика, приведенная на рис. 196, а, в основных чертах совпадает с той характеристикой, которая может быть снята экспериментально.

Состояния равновесия системы определяются из условия $f(u) = 0$, т. е. из уравнения

$$\frac{E - u}{R} = \varphi(u). \quad (4.31)$$

¹⁾ Тем самым мы считаем, что во время этих быстрых (скачкообразных) изменений тока i через неоновую лампу ток i уже не определяется статической характеристикой $i = \varphi(u)$, а система не подчиняется уравнению (4.30).

Чтобы найти корни этого уравнения, строим кривую $i = \varphi(u)$ и прямую $i = \frac{E-u}{R}$ и находим их точки пересечения. В том случае, когда $E > U_1$, т. е. когда напряжение батареи больше напряжения зажигания лампы (а мы этим одним случаем и ограничим наше рассмотрение), существует только одна точка пересечения статической характеристики $i = \varphi(u)$ и «нагрузочной» прямой $i = \frac{E-u}{R}$, причем положение этой точки пересечения зависит от значений параметров E и R (рис. 196, б). Устойчивость этого состояния равновесия $u = U$ определяется, как мы уже знаем, знаком $f'(u)$. Легко убедиться, что если состояние равновесия лежит на восходящем участке характеристики, то оно устойчиво, если же оно лежит на падающем участке, то неустойчиво¹⁾. Следовательно, для каждого $E > U_1$ мы можем, увеличивая R , перейти от устойчивого состояния равновесия к неустойчивому, причем чем больше E , тем больше должно быть то критическое сопротивление $R_{кр}$, при котором точка пересечения переходит на нижний, падающий участок характеристики, и единственное состояние равновесия становится неустойчивым.

Ограничимся рассмотрением колебаний в схеме с неоновой лампой, начинающихся из таких начальных состояний, для которых точка (u, i) , изображающая состояние неоновой лампы, лежит или на участке $i = 0$, или на восходящем участке статической характеристики²⁾. В этом случае мы можем совсем не принимать во внимание падающего участка характеристики, так как *неоновая лампа*

1) Последний результат находится в некотором противоречии с экспериментальными данными. Оказывается, состояние равновесия на падающем участке будет устойчивым, если сопротивление R будет достаточно большим, а емкость C — достаточно малой (см. § 5 гл. V). Это обусловлено стабилизирующим действием инерционности газового разряда, конечными скоростями установления стационарных состояний в неоновой лампе. Вывод о неустойчивости состояния равновесия на падающем участке характеристики, равно как и все наше рассмотрение задачи о колебаниях в схеме с неоновой лампой, справедлив только при достаточно больших емкостях C , при которых колебания в схеме достаточно медленны.

2) Если бы нас интересовали колебания, начинающиеся из других начальных состояний (даже из тех, которые лежат на падающем участке характеристики), то для их рассмотрения наша динамическая система первого порядка непригодна. Мы должны выйти за ее пределы и учесть существенные малые паразитные параметры из числа тех, которыми мы сейчас пренебрегаем (необходимо, в частности, учесть инерционность газового разряда и вместо статической характеристики неоновой лампы взять дифференциальное уравнение, отображающее динамику газового разряда). Однако это не представляет особого интереса, так как весьма быстро (через несколько сотен микросекунд) схема придет в состояние, соответствующее какой-либо точке на участке $i = 0$ или на восходящем участке статической характеристики лампы, и дальнейшие колебания в ней будут описываться рассматриваемой здесь динамической системой первого порядка (см. § 7 п. 1 гл. X).

никогда не придет в состояния, изображаемые точками этого падающего участка.

Тогда ток i через неоновую лампу будет *двузначной* функцией напряжения u на интервале $U_2 < u < U_1$ и *однозначной* вне этого интервала (рис. 197, а). В соответствии с этим, как и в предыдущей задаче, фазовой линией будет линия «с наложением» (рис. 197, б), состоящая из двух полу-прямых (I) и (II) $u > U_2$, первая из которых соответствует состояниям системы с погашенной, а вторая — состояниям с горящей неоновой лампой. При этом переход изображающей точки с одной полупрямой на другую (зажигание и гашение неоновой лампы) происходит соответственно при $u = U_1$ и $u = U_2$, т. е. в конечных точках этих полупрямых. Поскольку фазовая линия допускает единственную замкнутую фазовую траекторию $abvga$, в нашей системе возможен только единственный периодический процесс.

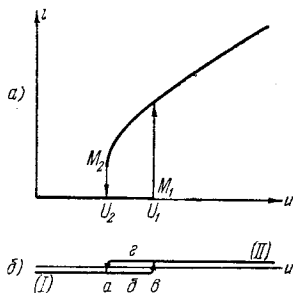


Рис. 197.

При помощи этой фазовой линии легко проследить за движением системы в разных случаях. В том случае, когда R достаточно мало и положение равновесия устойчиво (оно лежит при $E > U_1$ на полупрямой (II)), сразу после присоединения лампы к конденсатору она вспыхнет, и после этого напряжение на лампе и ток через нее начнут уменьшаться. Скорость изменения напряжения на зажимах лампы будет определяться параметрами схемы, т. е. уравнением (4.30), но во всяком случае она будет конечной. Уменьшение напряжения u будет продолжаться до тех пор, пока не будет достигнуто устойчивое состояние равновесия $u = U$ (рис. 198), в котором схема и останется (строго говоря, будет иметь место асимптотическое при $t \rightarrow +\infty$ приближение системы к этому состоянию равновесия).

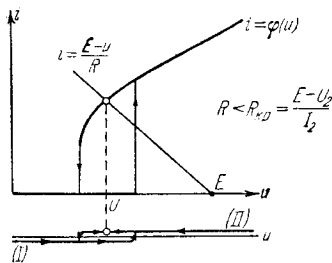


Рис. 198.

Если же R настолько велико, что на полупрямой (II) нет состояния равновесия (напомним, что в этом случае состояние равновесия лежит на падающем участке характеристики лампы и неустойчиво), то теперь на всей полупрямой (II) $\frac{du}{dt} < 0$ и, поскольку на полупрямой (I) $\frac{du}{dt} > 0$ (ибо $E > U_1$), в схеме после первого же зажигания или

гашения неоновой лампы установится *периодический процесс*, изображаемый на фазовой линии замкнутой фазовой траекторией *abvga* или замкнутой кривой *ABV'GA'A* на плоскости *u, i* (рис. 199). Участок *abv* этой замкнутой фазовой траектории соответствует

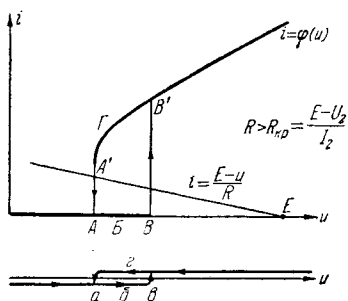


Рис. 199.

процессу заряда конденсатора *C* через сопротивление *R* при погашенной лампе, участок *vga* — разряду конденсатора через горящую неоновую лампу.

Осциллограммы колебаний, т. е. вид кривых *u(t)*, *i(t)* и $i_c = C \frac{du}{dt}$, даны на рис. 200. Вид этих кривых вначале, до установления периодического процесса, зависит от начальных условий. Так, например, если в начальный момент $u_0 = E$ (схема включается путем замыкания ключа B_2 на рис. 201; ключ B_1 был замкнут раньше), то характер установления будет таким, как это изображено на рис. 202. Если же в начальный момент $u_0 = 0$ (ключ B_2 замкнут и схема включается замыканием ключа

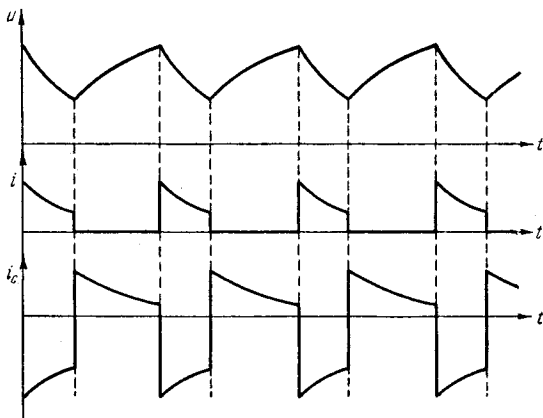


Рис. 200.

B_1 на рис. 201), то характер установления будет иной, изображенный на рис. 203.

Мы нарисовали качественную картину автоколебаний в схеме с неоновой лампой. Для того чтобы определить их количественные характеристики (период, амплитуду, вид осциллограмм), нужно задать конкретным видом нелинейной функции $i = \varphi(u)$. Проведем вычисления для кусочно-линейной функции $\varphi(u)$, график которой

состоит из прямолинейных отрезков (рис. 204). Пусть устойчивые участки статической характеристики лампы (падающего участка

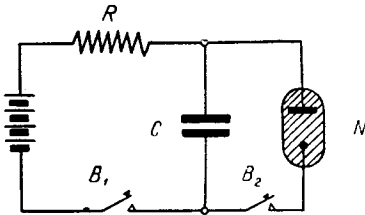


Рис. 201.

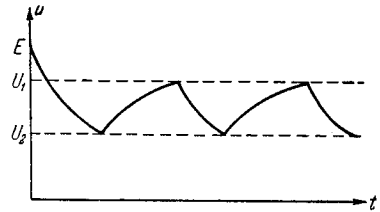


Рис. 202.

характеристики мы не будем рассматривать) заданы уравнением

$$i = \begin{cases} 0 & \text{на полупрямой (I) (при погашенной лампе),} \\ \frac{u - U_0}{R_i} & \text{на полупрямой (II) (при горячей лампе)} \end{cases}$$

(постоянные $U_0 = \frac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2} < U_2$ и $R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_1 - I_2}$, имеющие соответственно размерности напряжения и сопротивления, характеризуют свойства горячей лампы).

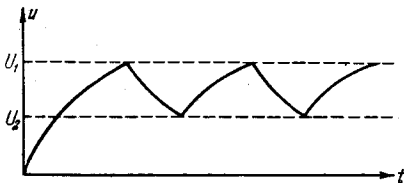


Рис. 203.

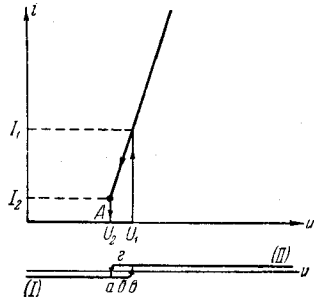


Рис. 204.

Начнем рассмотрение с того момента, когда лампа погасла и изображающая точка находится в положении *a* (рис. 204). На участке *ab* (лампа не горит, $i = 0$) имеем следующее уравнение движения:

$$RC \frac{du}{dt} = E - u. \tag{4.32}$$

Так как $E > U_1$, то напряжение u на конденсаторе будет увеличиваться (при $u < U_1$ $\frac{du}{dt} > 0$) и через некоторый интервал времени τ_1 достигнет напряжения зажигания U_1 . Поскольку решением уравнения (4.32), удовлетворяющим начальному условию $u = U_2$ при $t = 0$,

$$u = E - (E - U_2) e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{4.33}$$

является τ_1 определяется соотношением

$$U_1 = E - (E - U_2) e^{-\frac{\tau_1}{RC}}$$

или

$$\tau_1 = RC \ln \frac{E - U_2}{E - U_1}. \quad (4.34)$$

После того как лампа вспыхнет, уравнение движения примет вид

$$C \frac{du}{dt} = \frac{E - u}{R} - \frac{u - U_0}{R_i}.$$

Вводя обозначение $\rho = \frac{RR_i}{R + R_i}$, приведем это уравнение к виду

$$C \frac{du}{dt} = \frac{E}{R} + \frac{U_0}{R_i} - \frac{u}{\rho}. \quad (4.35)$$

Пусть $\frac{U_2}{\rho} > \frac{E}{R} + \frac{U_0}{R_i}$, что имеет место при

$$R > R_{кр} = \frac{E - U_2}{I_2}. \quad (4.36)$$

Тогда при $U_2 < u < U_1$ $\frac{du}{dt} < 0$, напряжение на конденсаторе будет уменьшаться, так как ток разряда конденсатора через горящую неоновую лампу при $R > R_{кр}$ всегда больше тока заряда через сопротивление R ; через некоторый промежуток времени τ_2 конденсатор разрядится до напряжения U_2 и лампа погаснет. Решение уравнения (4.35) при начальном условии $u = U_1$ при $t = 0$ таково:

$$\frac{u}{\rho} = \frac{E}{R} + \frac{U_0}{R_i} + \left(\frac{U_1}{\rho} - \frac{E}{R} - \frac{U_0}{R_i} \right) e^{-\frac{t}{\rho C}}. \quad (4.37)$$

Подставляя $u = U_2$ при $t = \tau_2$ и разрешая относительно τ_2 , получим:

$$\tau_2 = \rho C \ln \frac{\frac{U_1}{\rho} - \frac{E}{R} - \frac{U_0}{R_i}}{\frac{U_2}{\rho} - \frac{E}{R} - \frac{U_0}{R_i}}$$

или, приняв во внимание, что $\frac{U_1 - U_0}{R_i} = I_1$ и $\frac{U_2 - U_0}{R_i} = I_2$,

$$\tau_2 = \rho C \ln \frac{RI_1 + U_1 - E}{RI_2 + U_2 - E}. \quad (4.38)$$

Период автоколебаний равен

$$\tau = \tau_1 + \tau_2. \quad (4.39)$$

Таким образом, мы получили аналитические выражения как для периода автоколебаний, так и для определения формы осциллограммы. Осциллограмма автоколебаний напряжения на конденсаторе C состоит из кусков экспонент (см. уравнения (4.33) и (4.37)) и по форме весьма отлична от синусоидальной. Период автоколебаний пропорционален емкости конденсатора C и зависит более сложным образом от остальных параметров схемы и неоновой лампы. На рис. 205 изображена качественная зависимость периода автоколебаний τ от напряжения батареи E при постоянных прочих параметрах. Автоколебания существуют только при $U_1 < E < E_{кр} = U_2 + RI_2$. При E , приближающемся как к U_1 , так и к $E_{кр}$, $\tau \rightarrow +\infty$ (в первом случае к бесконечности стремится τ_1 , во втором — τ_2).

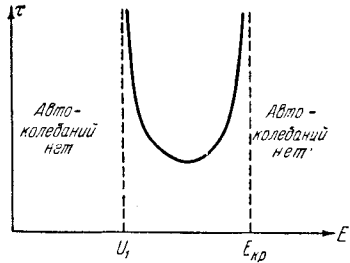


Рис. 205.

В заключение еще раз напомним, что рассмотренная нами динамическая система первого порядка удовлетворительно отражает процессы в схеме релаксационного генератора с неоновой лампой только при достаточно больших емкостях C , т. е. при не очень быстрых колебаниях, при которых не сказывается инерционность ионных процессов в неоновой лампе.

§ 7. Мультивибратор с одной RC-цепью

Другим примером электрической автоколебательной системы может служить так называемый мультивибратор (с одной RC-цепью), схема которого изображена на рис. 206. Такой мультивибратор генерирует колебания напряжения, по форме близкие к «прямоугольным», — периодическую последовательность почти прямоугольных импульсов напряжения.

Уравнения колебаний мультивибратора, если учитывать только те элементы схемы, которые изображены на рис. 206, и пренебрегать сеточным током лампы L_2 , запишутся в виде:

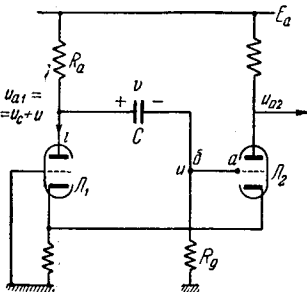


Рис. 206.

$$i + C \frac{dv}{dt} + \frac{u + v - E_a}{R_a} = 0, \quad C \frac{dv}{dt} = \frac{u}{R_g}. \quad (4.40)$$

Пренебрегая анодной реакцией, мы можем считать анодные токи ламп однозначными функциями сеточного напряжения u на лампе L_2 . В частности, зависимость анодного тока i лампы L_1 от этого напряжения

дается характеристикой ламповой группы $i = \varphi(u)$, которая, как мы видели в п. 3 § 6 настоящей главы, имеет вид, изображенный на рис. 207. Ниже, для некоторого упрощения рассмотрения колебаний схемы, будем считать, что середина падающего участка — место наибольшей крутизны — лежит при напряжении $u = 0$ (будем обозначать через S_0 наибольшее абсолютное значение крутизны характеристики на падающем участке: $S_0 = -\varphi'(0)$, тогда $|\varphi'(u)| \leq S_0$ ¹⁾).

Исключая v (напряжение на конденсаторе C) из уравнений (4.40), мы получим дифференциальное уравнение первого порядка для напряжения u на сетке лампы L_2 :

$$C(R_a + R_g) \left[1 + \frac{R_a R_g}{R_a + R_g} \varphi'(u) \right] \frac{du}{dt} + u = 0. \quad (4.41)$$

Поскольку ток i является *однозначной* функцией напряжения u , задание u однозначно определяет $\frac{du}{dt}$, т. е. состояние рассматриваемой нами динамической модели мультивибратора. Поэтому мы можем взять в качестве фазовой линии системы прямую u .

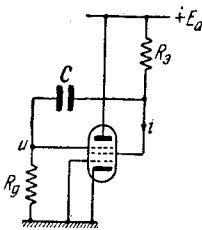


Рис. 208.

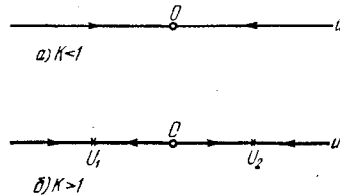


Рис. 209.

Единственным состоянием равновесия, как это следует из уравнения (4.41), является состояние $u = 0$. Его устойчивость, очевидно, определяется следующим линеаризованным уравнением (уравнением

¹⁾ С динамикой рассматриваемой схемы сходна динамика мультивибратора с лампой в «транзитронном» режиме (рис. 208). Уравнения колебаний в такой схеме совпадают с уравнениями (4.40), а зависимость тока i экранной сетки от напряжения u на третьей сетке дается характеристикой, сходной с изображенной на рис. 207. Падающий участок на ней обусловлен перераспределением электронного потока с катода лампы между экранной сеткой и анодом при изменении напряжения u на третьей сетке (при уменьшении этого напряжения большая часть электронного потока с катода идет на экранную сетку, т. е. ток i растет, а анодный ток падает).

первого приближения):

$$C(R_a + R_g)[1 - K] \frac{du}{dt} + u = 0, \quad (4.42)$$

где

$$K = \frac{S_0 R_a R_g}{R_a + R_g}$$

— коэффициент, имеющий смысл коэффициента передачи усилителя, который получается из мультивибратора размыканием цепи сетки лампы L_2 (разрывом соединения точек a и b на рис. 206; точка a — вход и точка b — выход усилителя).

Если $K < 1$, то состояние равновесия $u = 0$ устойчиво и устанавливается в системе при любых начальных условиях, так как в силу неравенства $|\varphi'(u)| \leq S_0 \frac{du}{dt} > 0$ при $u < 0$ и $\frac{du}{dt} < 0$ при $u > 0$.

Разбиение фазовой прямой на фазовые траектории для этого случая невозбуждающегося мультивибратора дано на рис. 209, a .

Иная картина получается при $K > 1$ (рис. 209, b), когда состояние равновесия $u = 0$ неустойчиво (мультивибратор самовозбуждается). Обозначим через U_1 и U_2 те значения u , при которых коэффициент при $\frac{du}{dt}$ в уравнении (4.41) обращается в нуль (т. е. $\frac{du}{dt}$ обращается в бесконечность). Очевидно, U_1 и U_2 определяются уравнением

$$\frac{R_a R_g}{R_a + R_g} \varphi'(u) = -1$$

и $U' < U_1 < 0 < U_2 < U''$. При переходе через $u = U_1$ или $u = U_2$ $\frac{du}{dt}$ меняет знак, поэтому $\frac{du}{dt} > 0$ при $u < U_1$, $\frac{du}{dt} < 0$ при $U_1 < u < 0$, $\frac{du}{dt} > 0$ при $0 < u < U_2$ и, наконец, $\frac{du}{dt} < 0$ при $u > U_2$.

Следовательно, изображающая точка при любых начальных условиях приходит или в точку $u = U_1$, или в точку $u = U_2$, которые, однако, не являются состояниями равновесия и из которых нет выходящих фазовых траекторий.

Таким образом, уравнение примененной нами динамической модели мультивибратора — уравнение (4.41) — приводит систему в такие состояния ($u = U_1$ или $u = U_2$), из которых с точки зрения этого уравнения нет выхода. Наша динамическая модель мультивибратора, полученная в результате учета *только некоторых свойств* реального мультивибратора и описываемая уравнением (4.41), оказалась *неудовлетворительной, противоречивой* и не может отображать колебания в реальном мультивибраторе.

Дело здесь, конечно, в том, что при построении динамической модели мультивибратора *не учли каких-то существенных*

факторов, коренным образом определяющих закономерности колебательных процессов в мультивибраторе на некоторых этапах движения.

Таковыми существенными параметрами, определяющими закономерности колебаний в мультивибраторе на этих этапах движения, являются *малые паразитные емкости* в схеме (емкости C_a и C_g анодного узла лампы L_1 и сеточного узла лампы L_2 или же емкость C_k катодного узла). Эти емкости, несмотря на их малость, играют определяющую роль во время быстрых изменений напряжения u на сетке лампы L_2 , составляющих одну из характерных особенностей колебаний мультивибратора. При учете паразитных емкостей C_a и C_g или емкости C_k мы приходим к динамической модели второго порядка (с одной степенью свободы), которая будет достаточно удовлетворительно отображать колебания, происходящие в мультивибраторе. Такая динамическая модель мультивибратора будет рассмотрена в § 5 гл. VIII и в § 4 гл. X.

Другой путь, дающий возможность рассмотреть колебания в мультивибраторе, состоит в «исправлении» динамической модели первого порядка путем введения некоторых *дополнительных постулатов*, которые указывали бы закон движения системы из состояний $u = U_1$ и $u = U_2$, заменяя уравнение (4.41) на определенных этапах колебаний. Эти дополнительные постулаты устанавливаются или на основании экспериментальных данных о колебательных процессах в мультивибраторе и некоторых дополнительных физических соображений, или же путем рассмотрения «более полной» динамической модели с фактическим учетом существенных паразитных параметров, но полагая их достаточно малыми (точнее, стремящимися к нулю). Последний метод будет нами использован в гл. X при рассмотрении ряда колебательных систем с «разрывными» колебаниями¹⁾.

Сейчас же мы рассмотрим колебания мультивибратора, пользуясь динамической моделью первого порядка, дополненной *постулатом о скачках напряжения* u на сетке лампы L_2 . Известно, что мультивибратор при $K > 1$ совершает автоколебания, которые носят «разрывной» характер: сравнительно медленные изменения напряжения u периодически сменяются весьма быстрыми. Скорости последних определяются скоростями перезаряда паразитных емкостей схемы и тем больше, чем меньше паразитные емкости (наиболее существенными из них являются емкости C_a и C_g). При достаточно малых паразитных емкостях мы можем рассматривать эти быстрые изменения напряжения как бесконечно быстрые, как мгновенные, скачкообразные.

В соответствии с этим мы дополним нашу динамическую модель мультивибратора постулатом о том, что в модели наряду с движениями,

¹⁾ Разрывными колебаниями называются такие колебания, при которых наряду с сравнительно медленными изменениями состояния имеются и весьма быстрые изменения состояния системы. Мультивибратор является типичным представителем генераторов разрывных колебаний.

подчиняющимися уравнению (4.41), могут иметь место мгновенные, скачкообразные изменения напряжения u , которые, конечно, уравнению (4.41) не подчиняются. Уравнение (4.41) заведомо не пригодно для описания движения системы после того, как последняя пришла в состояние $u = U_1$ или в состояние $u = U_2$; поэтому мы предположим, что из этих состояний система выходит путем скачка в такие состояния, в которых уравнение (4.41) снова определяет закон движения. Для определения состояний, в которые система перескакивает, необходимо привлечь дополнительные физические соображения. Предположим, что в схеме не может быть бесконечных напряжений и токов. Тогда в силу нашего предположения ток заряда конденсатора $C \frac{dv}{dt}$ всегда ограничен; следовательно, при скачках напряжения u напряжение v на конденсаторе C изменяться не будет, так как иначе $\frac{dv}{dt} = \infty$, что невозможно. Этому условия непрерывности напряжения на конденсаторе C («условия скачка») в рассматриваемой задаче достаточно для однозначного определения состояния, в которое приходит система в результате скачка¹⁾.

Исключая из уравнений (4.40) $C \frac{dv}{dt}$, мы получим v как функцию напряжения u :

$$v = F(u) = E_a - R_a \varphi(u) - \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) u \quad (4.43)$$

(само собой разумеется, что это соотношение справедливо только для тех состояний мультивибратора, для которых соблюдается уравнение (4.41) или, что то же самое, уравнения (4.40)). Очевидно, что v является однозначной и непрерывной функцией u . Ее график при $K > 1$ приведен на рис. 210, а (нетрудно видеть, что при $u = U_1$ и $u = U_2$ $F'(u) = 0$). Поскольку состояния мультивибратора непосредственно перед скачком ($u = U_1$ или $u = U_2$) и после скачка ($u = U'_1$ или соответственно $u = U'_2$) таковы, что для них справедливо уравнение (4.41), а следовательно и соотношение (4.43), и при скачке v

¹⁾ В других задачах, например в задаче о колебаниях двух связанных между собой мультивибраторов [37], условия непрерывности напряжений на конденсаторах при скачках недостаточно для однозначного определения состояний системы после скачков. В этих случаях приходится делать некоторые дополнительные предположения для однозначного определения этих состояний.

Если же закон скачков в системе получается на основании предельного рассмотрения «более полной» динамической модели (с учетом существенных паразитных параметров, но считая их стремящимися к нулю), то состояния системы после скачков всегда определяются однозначно без каких-либо дополнительных условий (см. гл. X). Заметим, что подобное предельное рассмотрение «более полной» динамической модели мультивибратора (см. § 4 гл. X) показывает, что при скачках напряжение v действительно не изменяется, а скачки начинаются не только при $u = U_1$ и $u = U_2$, но и при любых u на интервале $U_1 < u < U_2$.

не изменяется, состояние мультивибратора ($u = U_j$) непосредственно после скачка из состояния U_j ($j = 1, 2$) определяется уравнением

$$F(U_j) = F(U_j')$$

или

$$R_a \varphi(U_j') + \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) U_j = R_a \varphi(U_j) + \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) U_j. \quad (4.44)$$

Графическое решение этого уравнения дано на рис. 210, а. Очевидно, состояние мультивибратора после скачка однозначно определяется

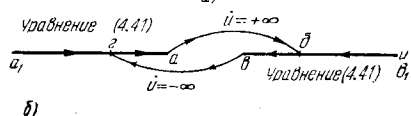
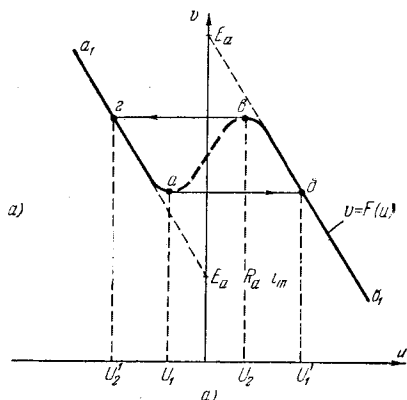


Рис. 210.

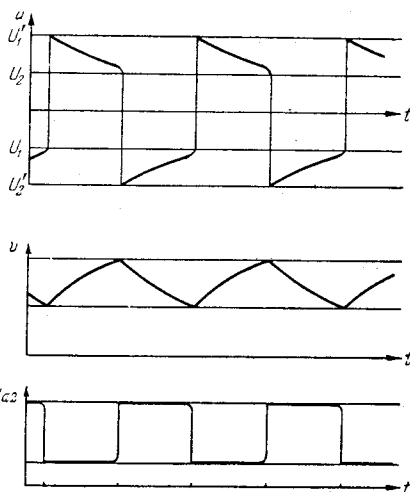


Рис. 211.

его состоянием перед скачком (U_1' и U_2' однозначно определяются соответственно по U_1 и U_2).

Таким образом, колебания в мультивибраторе оказываются периодическими и состоят из медленных изменений напряжения u (с конечной скоростью) от U_1' до U_2 и от U_2' до U_1 , подчиняющихся уравнению (4.41), и скачкообразных изменений от U_1 до U_1' и от U_2 до U_2' , определяемых условиями скачка. На рис. 210, а этому периодическому движению соответствует замкнутая кривая $abvga$ (участки bv и ga соответствуют «медленным», с конечной скоростью, а участки ab и vg — «быстрым», скачкообразным изменениям напряжения u). Осциллограммы колебаний напряжений u , v и u_{a2} приведены на рис. 211. Колебания напряжения v на конденсаторе C непрерывны и имеют «пилообразную» форму, а колебания анодного напряжения u_{a2} лампы L_2 близки к «прямоугольным».

Для определения периода автоколебаний нужно проинтегрировать уравнение (4.41) или

$$dt = -C(R_a + R_g) \left[1 + \frac{R_a R_g}{R_a + R_g} \varphi'(u) \right] \frac{du}{u} \quad (4.45)$$

в пределах от $u = U'_2$ до $u = U_1$ и от $u = U'_1$ до $u = U_2$, так как длительность скачкообразных изменений напряжения u предполагается равной нулю. Для вычисления периода можно ограничиться простейшей симметричной кусочно-линейной характеристикой ламповой группы (рис. 212, а). В областях, по которым нужно производить интегрирование, — в области отсутствия тока и в области тока насыщения ($i = I_m = 2S_0 U_0$) эта характеристика достаточно удовлетворительно отображает свойства реальной ламповой группы (ламп с общим катодным сопротивлением). В этих областях $\varphi'(0) = 0$, уравнение (4.41) является линейным:

$$C(R_a + R_g) \frac{du}{dt} + u = 0$$

и легко интегрируется. В результате интегрирования получается сравнительно простая, весьма характерная для процессов подобного рода формула для периода¹⁾:

$$T = 2C(R_a + R_g) \ln(2K - 1), \quad (4.46)$$

где, как и раньше,

$$K = \frac{S_0 R_a}{1 + \frac{R_a}{R_g}}$$

¹⁾ Зависимость напряжения u на конденсаторе C от напряжения u на сетке лампы L_2 во время «медленных» движений изображена на рис. 212, б. Согласно уравнению (4.44) для участка $бв$ имеем:

$$\left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) U'_1 = R_a I_m - \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) U_0, \text{ т. е. } U'_1 = U_0 (2K - 1).$$

Поэтому длительность «медленного» движения по участку $бв$ равна

$$C(R_a + R_g) \ln(2K - 1).$$

В силу симметрии характеристики ламповой группы длительность «медленного» движения по участку $га$ будет такой же; поэтому для полного периода получается формула (4.46).

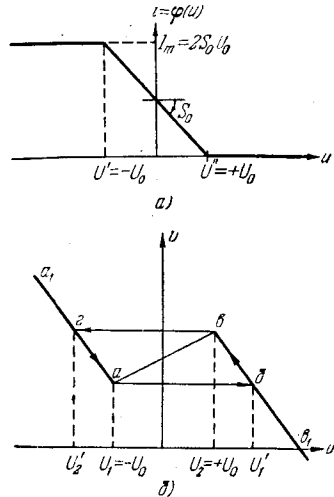


Рис. 212.

В эту формулу помимо постоянной времени $C(R_a + R_g)$ входит еще и логарифмическая зависимость от коэффициента K , из которой следует, что при приближении к границе возбуждения (при $K \rightarrow 1$) быстро возрастает частота колебаний. Частота колебаний возрастает также и при уменьшении емкости C . Однако, строго говоря, при больших частотах колебаний мы уже не можем рассматривать мультивибратор как систему с $1/2$ степени свободы (без фактического учета малых паразитных емкостей схемы), так как в этом случае их роль настолько существенна, что колебания перестают быть разрывными и приближаются по своей форме к синусоидальным.

Итак, мы смогли рассмотреть колебания в мультивибраторе, «дополнив» его динамическую модель первого порядка постулатом о скачках напряжения на сетке и лампы L_2 . В такой «дополненной» динамической модели напряжение u на интервале $U'_2 < u < U'_1$ уже не определяет однозначно состояния системы, так как при этих напряжениях мы имеем различные законы движения в зависимости от того, какое движение («медленное» или «быстрое», скачкообразное) имеет место. В соответствии с этим фазовой линией для модели, дополненной постулатом о скачках, будет не прямая u , а линия «с наложениями», изображенная на рис. 210, б и топологически эквивалентная линии a_1ab и v_1vg на рис. 210, а. На участках a_1a и v_1v движение определяется уравнением (4.41), а скачки из a в b и из v в g , изображенные тонкими линиями, — постулатом о скачках напряжения u ($\frac{du}{dt} = +\infty$ на участке ab и $\frac{du}{dt} = -\infty$ на участке vg). Фазовая линия, как и в других примерах, разобранных в § 7 настоящей главы, допускает замкнутую фазовую траекторию, которая соответствует разрывным периодическим колебаниям мультивибратора.

На этом мы закончим рассмотрение динамических систем первого порядка (к рассмотрению разрывных колебаний в таких системах мы вернемся в гл. X) и перейдем к рассмотрению динамических систем второго порядка.

ГЛАВА V

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ¹⁾

Мы будем рассматривать в этой главе автономные динамические системы второго порядка (с одной степенью свободы), т. е. такие динамические системы (динамические модели реальных физических систем), движение которых отображается двумя дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (5.1)$$

Такие системы представляют собой наиболее общий случай среди тех, которые составляют сейчас предмет нашего рассмотрения. Как уже было сказано, к двум уравнениям первого порядка приводит (при соответствующих упрощающих предположениях), например, исследование различных электротехнических и радиотехнических схем, в частности, рассмотрение лампового генератора при обычных упрощающих предположениях; к таким же задачам приводит исследование многих механических систем, исследование ряда вопросов динамики полета и т. д.

Следует подчеркнуть, что для математического изучения движений подобных физических систем еще недостаточно систем дифференциальных уравнений (5.1): кроме закона движения, выражаемого системой уравнений (5.1), необходимо знать еще многообразие возможных состояний рассматриваемой системы, иначе говоря, фазовое пространство динамической системы, точки которого *взаимно однозначно* и *непрерывно* соответствуют состояниям системы ²⁾.

Но характер фазового пространства должен точно так же быть выведен из физической задачи, как и вид дифференциальных уравнений. Если, например, мы знаем, что наша система приходит к прежнему состоянию при изменении x на 2π , то этим самым имеем

¹⁾ §§ 5 и 12 переработаны Н. А. Железцовым, § 1, § 3 (п. 1), § 7 (пп. 2, 3), §§ 9 и 11 написаны им заново.

²⁾ Конечно, в рассматриваемом сейчас случае динамических систем второго порядка (с одной степенью свободы) фазовое пространство является двумерным, т. е. некоторой поверхностью, так как состояние системы полностью задается парой чисел x, y .

указания о характере фазового пространства, о его связности, о его «цилиндричности». Дифференциальные уравнения сами по себе еще не определяют характера возможных движений системы, характера возможных фазовых траекторий в фазовом пространстве, пока это пространство еще не выбрано. Чтобы пояснить это, рассмотрим простейшую линейную систему:

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b.$$

Если x и y — обычные декартовы координаты на фазовой плоскости, то фазовые траектории суть прямые линии. На фазовой плоскости мы имеем континуум «убегающих» движений. Если же x и y — ортогональные криволинейные координаты на торе (например, x — азимут меридиональной плоскости, а y — полярный угол с вершиной на оси тора), то фазовые траектории для той же системы дифференциальных уравнений образуют либо континуум замкнутых кривых (если a и b соизмеримы), т. е. континуум периодических решений, либо континуум траекторий, всюду плотно заполняющих поверхность тора (если a и b не соизмеримы), т. е. континуум так называемых квазипериодических решений. Этот пример показывает значение природы фазового пространства, его связности, для картины поведения фазовых траекторий. Общие законы поведения, определяемые одним и тем же уравнением интегральных кривых, будут различны в случае плоскости и тора.

В настоящей главе мы ограничимся наиболее важным для применений случаем, когда фазовая поверхность представляет собой обычную плоскость. Позже, в гл. VII, на примерах мы коснемся имеющего существенное значение для механики случая цилиндрической фазовой поверхности, а в гл. VIII рассмотрим также несколько систем с многолистной фазовой поверхностью.

§ 1. Фазовые траектории и интегральные кривые на фазовой плоскости

Итак, будем рассматривать систему двух автономных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (5.1)$$

описывающих движения некоторой динамической системы второго порядка¹⁾, предполагая, что состояния этой динамической системы взаимно однозначно и непрерывно соответствуют точкам фазовой

¹⁾ Заметим, что если бы мы имели одно уравнение второго порядка $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, то заменой $\dot{x} = y$ мы всегда могли бы привести его к виду $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y)$, т. е. к виду (5.1).

плоскости x, y . Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ будем полагать аналитическими (на всей фазовой плоскости)¹⁾.

Условия теоремы Коши о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений (см. Дополнение 1) для уравнений (5.1), очевидно, выполнены, и поэтому существует единственная система функций: $x = x(t)$, $y = y(t)$, удовлетворяющая уравнениям (5.1) и заданным начальным условиям: $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = t_0$. Так как решение зависит от начальных условий, то иногда, для того чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы будем записывать такое решение в следующем виде:

$$x = \varphi(t - t_0; x_0, y_0), \quad y = \psi(t - t_0; x_0, y_0)^2). \quad (5.2)$$

Отметим, что φ и ψ являются аналитическими функциями не только времени t , но и координат начального состояния системы x_0, y_0 .

Всякое решение (5.2) (с заданными x_0, y_0, t_0) мы можем рассматривать как параметрическое уравнение некоторой кривой на фазовой плоскости x, y , которая пробегается изображающей точкой при заданном движении системы. По принятой нами терминологии такие кривые носят название *фазовых траекторий*.

С другой стороны, решение (5.2) мы можем рассматривать и как уравнения кривых в пространстве x, y, t — как уравнения интегральных кривых системы уравнений (5.1). Ясно, что каждая фазовая траектория является проекцией на фазовую плоскость некоторой интегральной кривой в пространстве x, y, t ³⁾. Более того, в силу автономности уравнений (5.1) все их интегральные кривые (5.2) с одинаковыми x_0, y_0 , но с различными t_0 образуют в пространстве x, y, t цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси t , и, следовательно, проектируются на одну и ту же фазовую траекторию на фазовой плоскости (рис. 213). Иными словами, каждая фазовая траектория соответствует совокупности движений динамической системы, проходящих через одни и те же состояния и отличающихся друг от друга лишь началом отсчета времени.

¹⁾ Требование аналитичности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ введено лишь ради некоторого упрощения доказательств и может быть заменено более слабым требованием существования у этих функций непрерывных частных производных тех или иных порядков (в ряде случаев — первого порядка).

²⁾ Такая форма записи решения возможна только в силу автономности рассматриваемых уравнений (5.1). Действительно, пусть $x = \varphi(t; x_0, y_0)$, $y = \psi(t; x_0, y_0)$ — решение уравнений (5.1), удовлетворяющее начальным условиям: $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = 0$; очевидно, функции φ и ψ таковы, что $\varphi(0; x_0, y_0) \equiv x_0$ и $\psi(0; x_0, y_0) \equiv y_0$. Так как уравнения (5.1) автономны (их правые части — функции P и Q — не зависят явно от времени t), то их решением будет и система функций (5.2), которая будет (в силу теоремы Коши) единственным решением, удовлетворяющим начальным условиям: $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = t_0$.

³⁾ Две другие проекции интегральной кривой (5.2) на плоскости x, t и y, t являются, очевидно, обычными осциллограммами изменений x и y при заданном движении системы.

Так как условия теоремы Коши для системы уравнений (5.1) выполнены, то через каждую точку пространства x, y, t проходит единственная интегральная кривая этой системы уравнений, т. е.

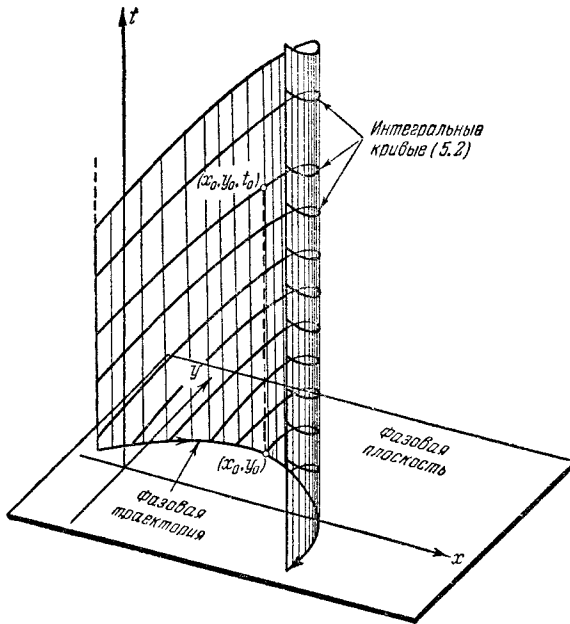


Рис. 213.

интегральные кривые в пространстве x, y, t пересекаться не могут. То же самое *благодаря автономности уравнений* (5.1) можно сказать и о фазовых траекториях: они также не могут пересекаться, так как *через каждую точку фазовой плоскости проходит единственная фазовая траектория*¹⁾.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующий пример. Если в некоторой точке (\bar{x}, \bar{y}) функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ обращаются в нули, то уравнения (5.1) имеют своим решением: $x \equiv \bar{x}, y \equiv \bar{y}$ (а в пространстве x, y, t — интегральную прямую, параллельную

¹⁾ В самом деле, если бы, например, через некоторую точку (x^*, y^*) фазовой плоскости проходили две фазовые траектории, то тогда и через каждую точку прямой $x = x^*, y = y^*$ в пространстве x, y, t проходили бы по две различные интегральные кривые уравнений (5.1), что противоречит теореме Коши.

Заметим для сравнения, что интегральные кривые *неавтономной* системы $\dot{x} = P(x, y, t), \dot{y} = Q(x, y, t)$ по-прежнему не пересекаются в пространстве x, y, t , если выполнены условия теоремы Коши, но их проекции на плоскость x, y , вообще говоря, будут пересекаться.

оси t); фазовая траектория, соответствующая этому состоянию равновесия, состоит из одной (изолированной) точки. В силу только что указанного свойства фазовых траекторий изображающая точка, двигаясь по другим фазовым траекториям, не может прийти в состояние равновесия ни при каком конечном t . Точно так же изображающая точка, не находящаяся на предельном цикле, не может прийти на него за какой-либо конечный интервал времени. Таким образом, установление состояний равновесия или периодических колебаний в динамических системах, описываемых уравнениями (5.1) с правыми частями, удовлетворяющими условиям теоремы Коши, происходит только асимптотически (только при $t \rightarrow +\infty$).

Если разделить одно из уравнений (5.1) на другое, то мы исключим время и получим одно уравнение первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (5.3)$$

которое во многих случаях более легко интегрируется, чем система второго порядка (5.1). Решение этого уравнения $y = y(x; C)$ (или в неявной форме $F(x, y) = C$), где C — постоянная интегрирования, дает нам семейство его интегральных кривых, т. е. таких кривых на плоскости x, y , которые в каждой своей точке имеют наклон касательной, определяемый уравнением (5.3)¹⁾. Применяя теорему Коши к уравнению (5.3), можно доказать, что вследствие аналитичности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ через каждую точку плоскости x, y проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (5.3), за исключением, быть может, особых точек этого уравнения, где оно теряет смысл. В рассматриваемом нами случае особыми точками являются только те точки, в которых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$, т. е. только состояния равновесия системы (5.1)²⁾. В них интегральные кривые могут пересекаться.

Как легко видеть, каждая фазовая траектория является интегральной кривой или, по крайней мере, ее частью, а интегральная кривая (или ее дуга), не проходящая через особую точку, непременно является фазовой траекторией. С другой стороны, интегральная кривая, проходящая через особую точку, всегда состоит из нескольких фазовых траекторий. Тем не менее, интегрируя более простое

¹⁾ В дальнейшем под интегральными кривыми мы будем понимать только интегральные кривые уравнения (5.3).

Заметим также, что обычно две кривые, являющиеся решением дифференциального уравнения (5.3) и составляющие аналитическое продолжение друг друга, называют одной интегральной кривой, хотя бы такая кривая и проходила через точку, где это уравнение теряет смысл. Решения, соответствующие так понимаемым интегральным кривым, мы автоматически получаем, например, в тех случаях, когда уравнение (5.3) интегрируется в квадратурах.

²⁾ Доказательство полностью аналогично тому, которое было проведено для простейших консервативных систем (см. гл. II, § 2).

уравнение (5.3) и находя его интегральные кривые, мы получаем одновременно и разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории: фазовыми траекториями будут особые точки (состояния равновесия), интегральные кривые, не проходящие через особые точки, и дуги интегральных кривых, заключенные между двумя особыми точками (или между особыми точками и бесконечностью). Конечно, уравнение интегральных кривых (5.3) не дает нам никаких указаний о направлении движения изображающей точки по найденным фазовым траекториям, так как время из него исключено. Направление движения изображающей точки определяется из уравнений (5.1).

§ 2. Линейные системы общего типа

Рассмотрим сначала простейшие динамические системы вида (5.1), а именно те, которые отображаются системой двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy, \quad (5.4)$$

где a, b, c, d — константы, причем x и y мы будем считать декартовыми координатами на фазовой плоскости.

Как известно, общее решение системы (5.4) имеет вид¹⁾

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= C_1 x_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 x_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0, \quad (5.6)$$

а так называемые «коэффициенты распределения» x_1 и x_2 определяются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a - \lambda_k + b x_k &= 0, \\ c + (d - \lambda_k) x_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

(они составляют совместную систему уравнений, поскольку λ_k — корни характеристического уравнения) или

$$x_1 = \frac{\lambda_1 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_1 - d}, \quad x_2 = \frac{\lambda_2 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_2 - d}. \quad (5.8)$$

Отметим также, что

$$x_1 - x_2 = \frac{\lambda_1 - a}{b} - \frac{\lambda_2 - a}{b} = \frac{d - a}{b} \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = \frac{\lambda_1 - a}{b} \cdot \frac{\lambda_2 - a}{b} = -\frac{c}{b}$$

¹⁾ Мы предполагаем, что оба корня имеют отличные от нулей действительные части и что нет кратных корней.

и, следовательно, коэффициенты распределения являются корнями уравнения

$$bx^2 + (a - d)x - c = 0. \quad (5.9)$$

Мы не будем исследовать характер движений во времени в зависимости от характера корней характеристического уравнения и не будем приводить решений к действительному виду в случае комплексных λ и x^1), а перейдем сразу к анализу характера возможных траекторий на фазовой плоскости.

Для этой цели мы используем, подобно тому как мы это делали в гл. I для частного случая $a=0$, линейное однородное преобразование координат. Именно, с помощью линейного однородного преобразования

$$\xi = ax + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y \quad (5.10)$$

приведем систему (5.4) к так называемому «каноническому» виду:

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta, \quad (5.11)$$

где λ_1 и λ_2 — какие-то, пока неизвестные, константы.

Нетрудно показать, что это всегда можно сделать при наших предположениях о характере корней уравнения (5.6). Дифференцируя формулы преобразования (5.10), имеем:

$$\frac{d\xi}{dt} = a \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \gamma \frac{dx}{dt} + \delta \frac{dy}{dt}.$$

Заменяя здесь $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ их выражениями из основной дифференциальной системы (5.4), приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \lambda_1(ax + \beta y) &= a(ax + by) + \beta(cx + dy), \\ \lambda_2(\gamma x + \delta y) &= \gamma(ax + by) + \delta(cx + dy). \end{aligned}$$

Сравнивая здесь коэффициенты при x и y в правых и левых частях, приходим к системе четырех уравнений, линейных и однородных относительно a, β, γ, δ :

$$\left. \begin{aligned} a(a - \lambda_1) + \beta c &= 0, & \gamma(a - \lambda_2) + \delta c &= 0, \\ ab + \beta(d - \lambda_1) &= 0, & \gamma b + \delta(d - \lambda_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Эти уравнения дают для a, β, γ, δ решения, не равные тождественно нулю, только в том случае, если λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0, \quad (5.6)$$

¹⁾ Нетрудно видеть, что λ и x становятся одновременно комплексными, если $(a - d)^2 + 4bc < 0$.

т. е. корнями обычного характеристического уравнения. Каждая пара линейных однородных уравнений (5.12) определяет лишь отношение неизвестных. Первая пара определяет отношение $\frac{\alpha}{\beta}$, вторая $\frac{\gamma}{\delta}$. Так как по нашему предположению корни характеристического уравнения не равны между собой, то эти отношения не равны между собой, и, следовательно, α , β , γ , δ могут быть выбраны так, чтобы детерминант

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отличие от нуля этого детерминанта обеспечивает возможность разрешения уравнений (5.10) относительно x и y и, следовательно, гарантирует взаимную однозначность преобразования. Таким образом, мы видим, что в невырожденном случае всегда возможно преобразовать нашу систему к каноническому виду.

Рассмотрим различные случаи, которые могут здесь представиться.

1) *Корни λ_1 и λ_2 действительны и одного знака.* Тогда коэффициенты преобразования действительны, и мы имеем переход от действительной плоскости, x , y к действительной плоскости ξ , η (мы будем интерпретировать преобразование фазовой плоскости в активном смысле). Наша задача заключается в исследовании преобразованной фазовой плоскости ξ , η , где имеет силу каноническая система

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta, \quad (5.11)$$

и затем в истолковании полученных результатов для исходной плоскости x , y .

Деля одно из канонических уравнений на другое, имеем:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\eta}{\xi}. \quad (5.13)$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\eta = C |\xi|^a, \quad \text{где } a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (5.14)$$

Условимся понимать под λ_2 корень характеристического уравнения с большим модулем (это, очевидно, не нарушает общности нашего рассмотрения). Тогда, поскольку в рассматриваемом случае λ_1 и λ_2 одного знака, $a > 1$, и мы имеем дело с интегральными кривыми параболического типа (рис. 214). Все интегральные кривые (кроме оси η , которой соответствует $C = \infty$) касаются в начале координат оси ξ , которая также является интегральной кривой уравнения (5.13). Начало координат является особой точкой. Как мы уже знаем, это —

особая точка типа узла. Нетрудно выяснить направление движений на фазовой плоскости.

Если λ_1 и λ_2 отрицательны, то, как видно из уравнений (5.11), $|\xi|$ и $|\eta|$ убывают с течением времени. Изображающая точка с течением времени приближается к началу координат, однако никогда его не достигая в конечное время, так как это противоречило бы теореме Коши, которая для системы (5.11) справедлива на всей плоскости ξ, η . Мы имеем дело с *устойчивым узлом*. Если λ_1 и λ_2 положительны, то $|\xi|$ и $|\eta|$ возрастают с течением времени и изображающая точка с течением времени удаляется от начала координат. Мы имеем дело с *неустойчивым узлом*.

Перейдем теперь обратно на фазовую плоскость x, y . Как мы знаем, при этом не меняется общий качественный характер поведения интегральных кривых вокруг состояния равновесия, но касательные к интегральным кривым в особой точке уже не будут совпадать с осями координат.

Представляет интерес выяснить направления касательных к интегральным кривым в особой точке на плоскости x, y . Так как на плоскости ξ, η такими касательными служили оси $\xi=0$ и $\eta=0$, то для ответа на этот вопрос достаточно выяснить, каким прямым на плоскости x, y соответствуют прямые $\xi=0$ и $\eta=0$ на плоскости ξ, η . Из уравнений (5.10) видно, что оси ξ (т. е. прямой $\eta=0$) на плоскости x, y соответствует прямая

$$\gamma x + \delta y = 0, \quad \text{или} \quad y = -\frac{\gamma}{\delta} x, \quad (5.15)$$

проходящая через начало координат и имеющая (согласно (5.12)) угловой коэффициент

$$x_1 = -\frac{\gamma}{\delta} = \frac{c}{a - \lambda_2} = \frac{d - \lambda_2}{b}.$$

Аналогично оси η (прямой $\xi=0$) на плоскости x, y соответствует прямая

$$ax + \beta y = 0, \quad \text{или} \quad y = -\frac{a}{\beta} x, \quad (5.16)$$

также проходящая через начало координат, но имеющая другой угловой коэффициент:

$$x_2 = -\frac{a}{\beta} = \frac{c}{a - \lambda_1} = \frac{d - \lambda_1}{b}.$$

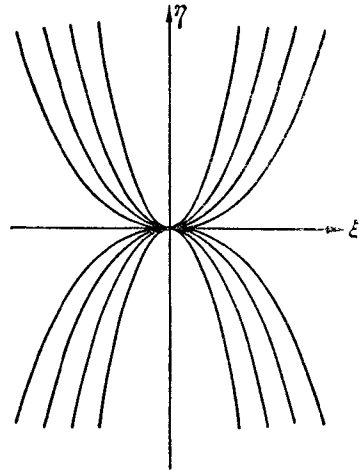


Рис. 214.

Нетрудно видеть, что угловые коэффициенты этих прямых совпадают с коэффициентами распределения λ_1 и λ_2 , определяемыми соотношениями (5.7) или (5.8), и, следовательно, могут быть найдены как корни уравнения (5.9).

Прямые $y = \lambda_1 x$ и $y = \lambda_2 x$ служат, с одной стороны, интегральными кривыми для уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$ ¹⁾ (подобно тому как прямые $\xi = 0$ и $\eta = 0$ служат интегральными кривыми для уравнения $\frac{d\eta}{d\xi} = a \frac{\eta}{\xi}$). С другой стороны, первая из них (она соответствует оси ξ на плоскости ξ, η) служит касательной для всех интегральных кривых, кроме одной — прямой $y = \lambda_2 x$ ²⁾. Пользуясь всем предыдущим,

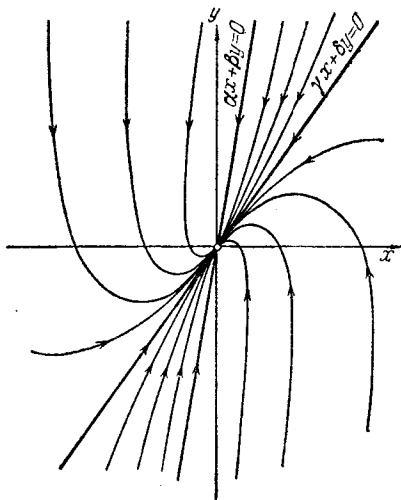


Рис. 215.

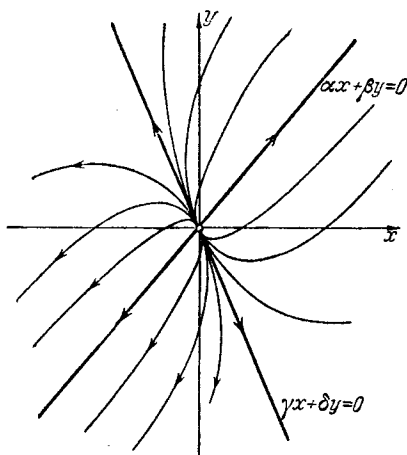


Рис. 216.

нетрудно представить себе характер фазовых траекторий вокруг устойчивого (рис. 215) или неустойчивого (рис. 216) узла в общем случае, т. е. характер траекторий на фазовой плоскости x, y , когда λ_1 и λ_2 действительны и одинаковых знаков.

¹⁾ Каждая из прямых $y = \lambda_1 x$ или $y = \lambda_2 x$ не является одной траекторией, а состоит из *трех* траекторий (два движения к состоянию равновесия или от состояния равновесия и само состояние равновесия).

²⁾ Направление λ_1 для касательной к континууму интегральных кривых (в узле) определяется соотношениями (5.7) или (5.8) по корню характеристического уравнения λ_1 с меньшим модулем. Если направления касательных к интегральным кривым в узле определяются без предварительного решения характеристического уравнения, а как корни уравнения (5.9), то направлению касательной к континууму интегральных кривых, очевидно, соответствует тот корень λ , для которого выражение $|a + b\lambda|$ имеет меньшее значение, так как согласно (5.7) $\lambda_2 = a + b\lambda_2$.

2) Корни λ_1 и λ_2 действительны, но разных знаков. Преобразование от координат x, y к координатам ξ, η опять действительное. На плоскости ξ, η точно так же имеет место каноническая система:

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta, \quad (5.11)$$

однако теперь λ_1 и λ_2 разных знаков.

Уравнение кривых на фазовой плоскости имеет вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -a \frac{\eta}{\xi}, \quad \text{где } a = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|. \quad (5.17)$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\eta = C |\xi|^{-a}. \quad (5.18)$$

Это уравнение определяет семейство кривых гиперболического типа, имеющих обе оси координат асимптотами (при $a=1$ мы имели бы семейство обычных равнобочных гипербол). Оси координат и в этом случае являются интегральными кривыми; это будут единственные интегральные кривые, проходящие через начало координат¹⁾ (рис. 217).

Начало координат и здесь, конечно, является особой точкой. Особая точка такого типа, как мы уже знаем, носит название «седла» (линии уровня вблизи горной седловины ведут себя как раз таким образом).

Известные уже нам соображения позволяют в этом случае установить характер движения изображающей точки по фазовым траекториям вблизи состояния равновесия. Пусть, например, $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 < 0$. Тогда изображающая точка, помещенная на оси ξ , будет удаляться от начала координат, а помещенная на оси η будет неограниченно приближаться к началу координат, не достигая его в конечное время. Направления движений по остальным фазовым траекториям легко указать, пользуясь соображениями непрерывности (рис. 217).

Как мы уже знаем, особая точка типа седла неустойчива. Переходя теперь обратно к координатам x, y , мы получим в силу уже много раз использованных соображений ту же самую качественную картину характера траекторий вокруг начала координат (рис. 218). Как и в предыдущем случае, угловые коэффициенты прямых, проходящих через особую точку (сепаратрис седла), даются уравнением

$$bx^2 + (a-d)x - c = 0.$$

Пограничным между рассмотренными случаями узла и седла является случай, когда один из корней характеристического уравнения (5.6)

¹⁾ Каждая из таких интегральных прямых, проходящих через начало координат, состоит из трех фазовых траекторий системы уравнений (5.11): из двух движений к состоянию равновесия (или от состояния равновесия) и из состояния равновесия.

(пусть λ_1) обращается в нуль, что имеет место при $ad - bc = 0$. В этом случае коэффициенты правых частей уравнений (5.4) пропорциональны друг другу ($\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$), и система уравнений (5.4) имеет

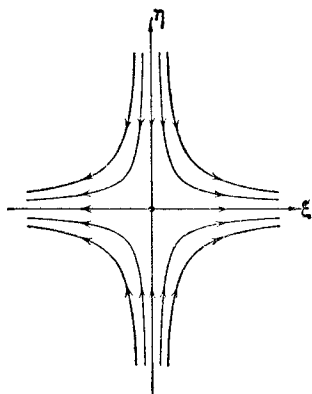


Рис. 217.

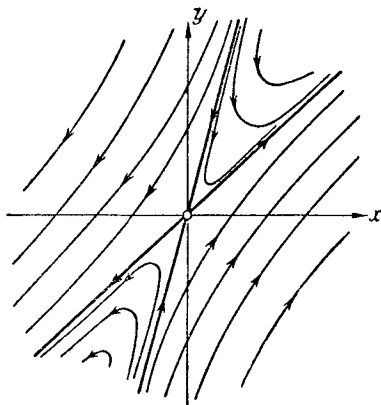


Рис. 218.

своими состояниями равновесия все точки прямой $ax + by = 0$. Остальные интегральные прямые составляют семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом

$$x_2 = \frac{c}{d},$$

по которым изображающие точки либо приближаются к состояниям равновесия, либо удаляются от них в зависимости от знака второго корня характеристического уравнения $\lambda_2 = a + d$ (рис. 219)¹⁾.

3) λ_1 и λ_2 — комплексные сопряженные. Нетрудно видеть, что тогда при действительных x и y мы будем иметь

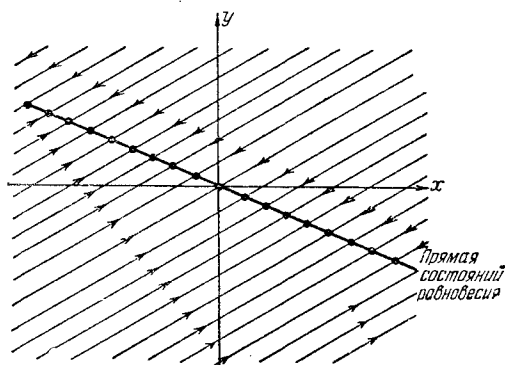


Рис. 219.

комплексно сопряженные ξ и η . Однако, вводя еще одно промежуточное преобразование, легко можно и в этом случае свести рассмотрение

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= a_1 + jb_1, & \xi &= u + jv, \\ \lambda_2 &= a_1 - jb_1, & \eta &= u - jv, \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

¹⁾ На рис. 219 изображен тот случай, когда $a + d > 0$ и состояния равновесия устойчивы.

к действительному линейному однородному преобразованию. Положим где a_1, b_1, u, v — действительные величины. Тогда можно показать, что преобразование от x, y к u, v является при наших предположениях действительным, линейным, однородным, с детерминантом, отличным от нуля.

В силу уравнений (5.19) имеем:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + j \frac{dv}{dt} &= (a_1 + jb_1)(u + jv), \\ \frac{du}{dt} - j \frac{dv}{dt} &= (a_1 - jb_1)(u - jv),\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{du}{dt} = a_1 u - b_1 v; \quad \frac{dv}{dt} = a_1 v + b_1 u. \quad (5.20)$$

Для исследования этой системы дифференциальных уравнений рассмотрим прежде всего вид интегральных кривых на фазовой плоскости. Дифференциальное уравнение этих кривых

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 v + b_1 u}{a_1 u - b_1 v} \quad (5.21)$$

легче интегрируется после перехода к полярной системе координат. Именно, в полярной системе r, φ после подстановки $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$ получим:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a_1}{b_1} r,$$

откуда

$$r = C e^{\frac{a_1}{b_1} \varphi}. \quad (5.22)$$

Таким образом, мы видим, что на фазовой плоскости u, v мы имеем дело с семейством логарифмических спиралей, каждая из которых имеет асимптотическую точку в начале координат. Начало координат — особая точка типа фокуса (рис. 220).

Установим характер движения изображающей точки по фазовым траекториям. Умножая первое из уравнений (5.20) на u , второе на v и складывая, получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = a_1 \rho, \quad \text{где } \rho = u^2 + v^2. \quad (5.23)$$

Таким образом, при $a_1 < 0$ ($a_1 = \operatorname{Re} \lambda$) изображающая точка непрерывно приближается к началу координат, не достигая его, однако, в конечное время (так как это противоречило бы теореме Коши), и значит, при $a_1 < 0$ мы имеем дело с *устойчивым фокусом*.

Если же $a_1 > 0$, то изображающая точка непрерывно удаляется от начала координат; мы имеем дело с *неустойчивым фокусом*.

При переходе от плоскости u, v к исходной фазовой плоскости x, y спирали также останутся спиралями, однако будут деформированы (рис. 221)¹⁾.

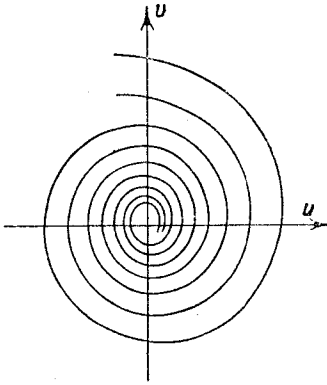


Рис. 220.

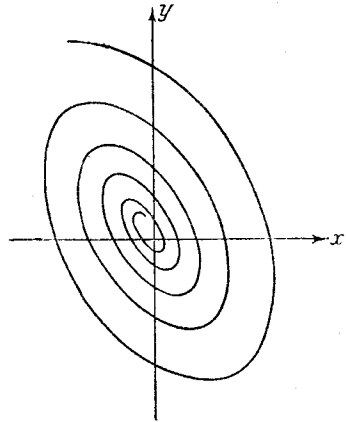


Рис. 221.

При $a_1 = 0$ фазовыми траекториями на плоскости u, v будут окружности $u^2 + v^2 = \text{const}$, которым на плоскости x, y соответствуют эллипсы

$$by^2 + (a - d)xy - cx^2 = \text{const}$$

(заметим, что $a_1 = 0$ имеет место при $a + d = 0$), — в этом случае мы имеем дело с особой точкой типа *центра* (рис. 222).

Сформулируем теперь результаты нашего исследования. В рассматриваемой общей линейной системе в случае отсутствия вырождения (т. е. при $ad - bc \neq 0$) могут быть шесть типов состояний равновесия в зависимости от характера корней характеристического уравнения:

- 1) Устойчивый узел (λ_1 и λ_2 действительны и отрицательны).
- 2) Неустойчивый узел (λ_1 и λ_2 действительны и положительны).
- 3) Седло (λ_1 и λ_2 действительны и разных знаков).
- 4) Устойчивый фокус (λ_1 и λ_2 комплексны и $\text{Re } \lambda < 0$).
- 5) Неустойчивый фокус (λ_1 и λ_2 комплексны и $\text{Re } \lambda > 0$).
- 6) Центр (λ_1 и λ_2 мнимые).

¹⁾ На плоскости u, v окружности $u^2 + v^2 = \text{const}$ являются так называемыми «циклами без контакта», т. е. такими замкнутыми кривыми, которые пересекаются фазовыми траекториями (без точек соприкосновения). Эти окружности при переходе на плоскость x, y преобразуются в эллипсы

$$by^2 + (a - d)xy - cx^2 = \text{const},$$

которые, следовательно, будут являться циклами без контакта для фазовых траекторий системы уравнений (5.4) в случае особой точки типа фокуса.

Первые пять типов состояний равновесия являются «грубыми»: их характер не изменяется при достаточно малых изменениях правых частей уравнений (5.4) (малыми должны быть изменения не только правых частей, но и их производных первого порядка).

Связь между типами состояний равновесия и характером корней характеристического уравнения может быть представлена наглядно следующим образом.

Введем обозначения:

$$\sigma = -(a + d), \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Тогда характеристическое уравнение запишется в виде

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0. \quad (5.24)$$

Для различных σ и Δ будем иметь различные корни λ_1 и λ_2 . Рассмотрим плоскость с прямоугольными декартовыми координатами σ и Δ и отметим на этой плоскости области, соответствующие тому или другому характеру состояния равновесия (рис. 223).

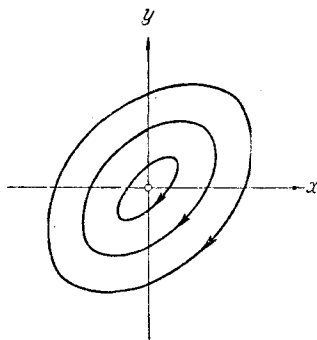


Рис. 222.

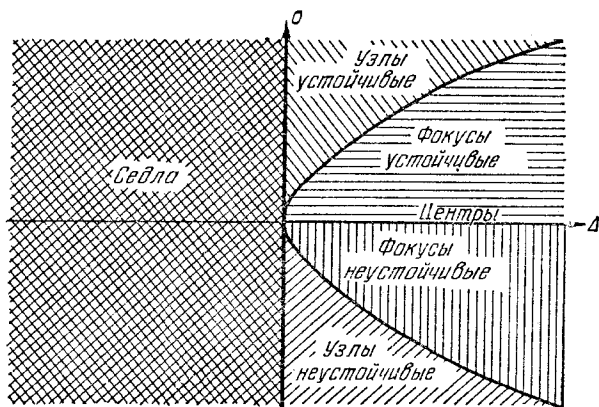


Рис. 223.

Условием устойчивости состояния равновесия является, как нетрудно видеть, наличие отрицательной действительной части у λ_1 и λ_2 . Необходимым и достаточным условием для этого являются неравенства $\sigma > 0$; $\Delta > 0$. На нашей диаграмме этому условию соответствуют точки, расположенные в первой четверти. Особая точка будет типа фокуса, если λ_1 и λ_2 комплексны. Этому условию удовлетворяют те

точки плоскости σ, Δ , для которых $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, т. е. точки, лежащие между ветвями параболы $\sigma^2 = 4\Delta$. Точки полуоси $\sigma = 0, \Delta > 0$ соответствуют состояниям равновесия типа центра. Аналогично λ_1 и λ_2 будут действительны, но разных знаков, т. е. особая точка будет типа седла, если $\Delta < 0$, и т. д. В итоге мы получим диаграмму разбиения плоскости параметров σ, Δ на области, соответствующие различным типам состояний равновесия (рис. 223). Если коэффициенты линейной системы a, b, c, d зависят от некоторого параметра, то при изменении этого параметра будут меняться соответственно σ и Δ . На плоскости σ, Δ мы будем иметь, таким образом, некоторую кривую, переходящую при некоторых бифуркационных значениях параметра из одной области в другую. На диаграмме видно, как могут происходить такие переходы. Если исключить особые случаи (прохождение через начало координат), то нетрудно видеть, что седло может перейти в узел, устойчивый или неустойчивый; устойчивый узел может перейти либо в седло, либо в устойчивый фокус, и т. д. Заметим (это нам понадобится в дальнейшем), что случай равных корней ($\sigma^2 - 4\Delta = 0$) соответствует границе между узлами и фокусами. Если коэффициенты линейной системы зависят от двух параметров, то обычно бывает целесообразно построить плоскость этих параметров и на ней построить диаграмму, соответствующую только что рассмотренной.

§ 3. Примеры линейных систем

Для иллюстрации всего сказанного выше относительно типов состояний равновесия линейных систем мы рассмотрим две схемы, которые при соответствующих упрощающих предположениях описываются линейными дифференциальными уравнениями и в которых путем изменения параметров может быть получен любой тип равновесных состояний.

1. Малые колебания динатронного генератора. Эту схему мы уже рассматривали в гл. I (§ 7, п. 2) как пример системы с «отталкивающей» (при $RS_0 > 1$) силой. Рассмотрим теперь малые колебания вблизи состояния равновесия динатронного генератора, когда рабочая точка лежит на падающем участке характеристики тетрода. Для этой схемы было получено (см. уравнение (1.76)) следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + [RC - LS_0] \frac{du}{dt} + [1 - RS_0] u = 0$$

или, если ввести безразмерное время $t_{\text{нов}} = \omega_0 t$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, и безразмерные параметры $r = \omega_0 RC, s = \omega_0 LS_0$,

$$\ddot{u} + (r - s) \dot{u} + (1 - rs) u = 0 \quad (5.25)$$

(здесь точкой сверху обозначено дифференцирование по новому безразмерному времени).

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + (r - s)\lambda + (1 - rs) = 0, \tag{5.26}$$

а следовательно, и тип рассматриваемого состояния равновесия зависят от параметров схемы r и s . Для отображения этой зависимости мы построим на плоскости этих двух безразмерных параметров (в ее первой четверти) области, соответствующие различным типам состояния равновесия динаotronного генератора на падающем участке характеристики (рис. 224).

При $rs > 1$, т. е. над гиперболой $rs = 1$, корни характеристического уравнения (5.26) действительны и разных знаков, т. е. состояние равновесия является седлом. Корни характеристического уравнения комплексны при

$$(r - s)^2 < 4(1 - rs)$$

$$\text{или } (r + s)^2 < 4,$$

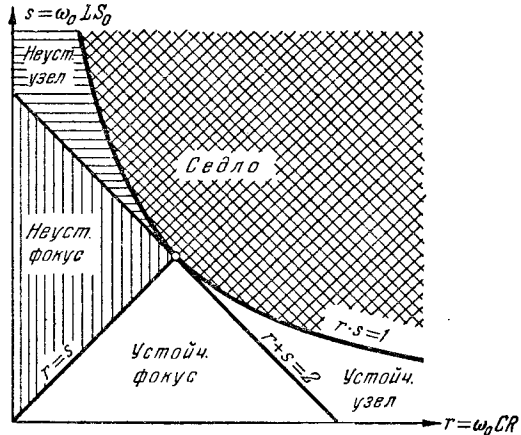


Рис. 224.

т. е. под прямой $r + s = 2$ лежит область значений параметров, при которых

состояние равновесия — фокус. В области значений параметров между этой прямой и гиперболой $rs = 1$ состояние равновесия — узел. Устойчивость узла или фокуса, как мы видели, определяется знаком коэффициента характеристического уравнения при λ в первой степени: именно, при $r > s$ узел или фокус устойчив, а при $r < s$ неустойчив. Таким образом, отрезок прямой $r = s$ до пересечения с гиперболой $rs = 1$ и затем участок гиперболы справа от этой точки пересечения составляют границу области устойчивости генератора. Если состояние равновесия неустойчиво, то динаотронный генератор уйдет из окрестности этого состояния равновесия. Однако, пользуясь линейным уравнением, мы ничего не сможем сказать о режимах, которые установятся в генераторе.

2. «Универсальная» схема. Вторым примером общей линейной системы может служить так называемая «универсальная» схема [125], приведенная на рис. 225, или ей эквивалентная (рис. 226), конечно, при условии соответствующей ее идеализации и в частности «линеаризации». Именно, мы будем считать, что характеристики как первой, так и второй лампы прямолинейны. Это предположение, как мы уже неоднократно указывали, имеет смысл только для небольших областей

изменения напряжений на сетках ламп, и поэтому линеаризация лишает нас возможности рассматривать поведение системы во всей области изменения переменных. Но в известной, ограниченной области мы

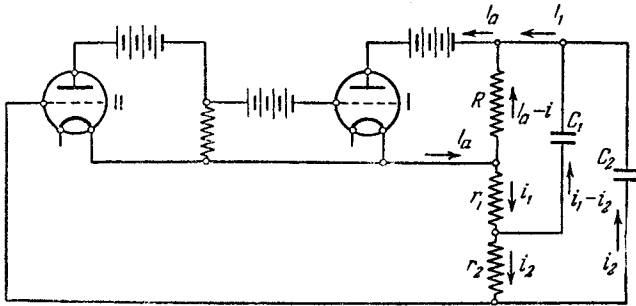


Рис. 225.

можем считать систему линейной и правильно описать ее поведение в этой области.

Кроме того, мы будем, как делали это и прежде, пренебрегать сеточными токами и анодной реакцией. В результате этих упрощаю-

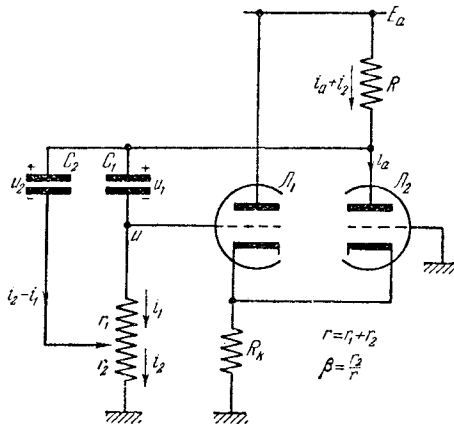


Рис. 226.

щих предположений мы, исходя из уравнений Кирхгофа, получим для рассматриваемой схемы (в обозначениях рис. 226) следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 &= u_2 - u_1, & R(i_a + i_2) + u_2 + r_2 i_2 &= E_a, \\ C_1 \frac{du_1}{dt} &= i_1, & C_2 \frac{du_2}{dt} &= i_2 - i_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

причем в линейном приближении (для состояний, близких к состоянию равновесия: $i_1 = i_2 = 0$, $u = 0$)

$$i_a = i_{a0} - Su = i_{a0} - S(r_1 i_1 + r_2 i_2),$$

где S — абсолютное значение крутизны падающего участка характеристики ламповой группы (ламп \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 с общим катодным сопротивлением R_k) в рабочей точке (в состоянии равновесия). Дифференцируя первые два уравнения по времени и используя последние два, а также выражение для анодного тока лампы \mathcal{L}_2 , получаем два дифференциальных (линейных) уравнения первого порядка для токов i_1 и i_2 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{-\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i_1 + \frac{1}{C_2} i_2}{r_1}, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{\left[\frac{1}{C_2} - RS\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\right] i_1 + (RS - 1) \frac{1}{C_2} i_2}{R + r_2(1 - RS)} \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

или, если ввести $k = RS \geq 0$, $r = r_1 + r_2$ и $\beta = \frac{r_2}{r}$ ($0 \leq \beta \leq 1$),

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{-\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i_1 + \frac{1}{C_2} i_2}{(1 - \beta)r}, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{\left[\frac{1}{C_2}(1 - k) - \frac{1}{C_1}k\right] i_1 + (k - 1) \frac{1}{C_2} i_2}{R - \beta r(k - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Чтобы определить характер особой точки (состояния равновесия $i_1 = i_2 = 0$), составим характеристическое уравнение системы линейных дифференциальных уравнений (5.29):

$$C_1 C_2 (1 - \beta) r [R - \beta r(k - 1)] \lambda^2 + [R(C_1 + C_2) - (k - 1)r(C_1 + \beta C_2)] \lambda + 1 = 0. \quad (5.30)$$

Характер корней λ уравнения (5.30), а следовательно и характер особой точки, зависит от четырех безразмерных параметров схемы k , β , $\frac{R}{r}$ и $\frac{C_2}{C_1}$. Выбирая различные значения этих параметров, можно получить все рассмотренные выше типы особых точек. В дальнейшем мы будем считать переменными параметрами только k и β (первый из них может меняться путем изменения S , второй — путем изменения положения движка потенциометра r), а параметры $\frac{R}{r}$ и $\frac{C_2}{C_1}$ — фиксированными.

Построим разбиение плоскости параметров k , β на области, каждой из которых соответствует определенный тип особой точки

(рис. 227). Прежде всего при $k=0$ мы получим два действительных отрицательных корня, т. е. особую точку типа устойчивого узла¹⁾. Этого и следовало ожидать, так как при $k=0$ ламповая группа не

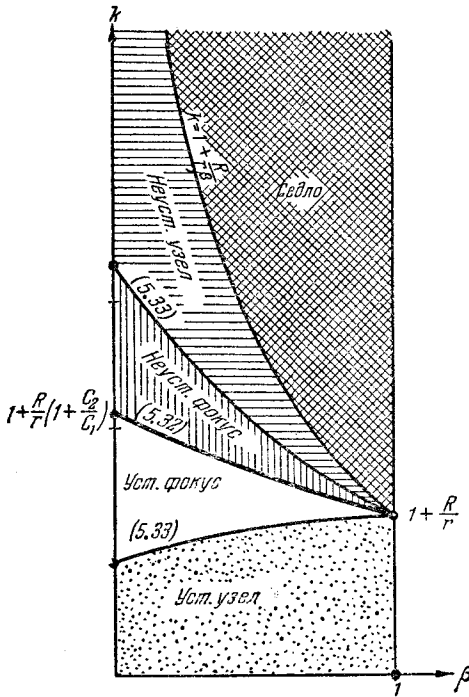


Рис. 227.

знаком коэффициента при γ . Этот коэффициент обращается в нуль на гиперболе

$$k = 1 + \frac{R}{r} \frac{C_1 + C_2}{C_1 + \beta C_2}, \quad (5.32)$$

положителен под ней и отрицателен над ней. Поскольку $0 \leq \beta \leq 1$,

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{C_1 + C_2}{C_1 + \beta C_2}$$

и гипербола (5.32) лежит под гиперболой $k = 1 + \frac{R}{r\beta}$ и, следовательно, является границей самовозбуждения схемы.

¹⁾ Действительно, при $k=0$ коэффициенты при λ^2 и λ положительны, положительным является и дискриминант уравнения

$$\begin{aligned} [R(C_1 + C_2) + r(C_1 + \beta C_2)]^2 - 4C_1C_2(1 - \beta)r[R + \beta r] = \\ = [C_1(R + r) - C_2(R + \beta r)]^2 + 4C_1C_2[R + \beta r]^2 > 0. \end{aligned}$$

играет никакой роли, а в отсутствии электронных ламп в схеме, состоящей из емкостей и сопротивлений, могут происходить только затухающие аperiodические движения, т. е. могут существовать только состояния равновесия типа устойчивого узла. Далее, при

$$k > 1 + \frac{R}{r\beta} \quad (5.31)$$

коэффициент при λ^2 является отрицательным, и следовательно, мы имеем дело с особой точкой типа седла (границей области седла является гипербола $k = 1 + \frac{R}{r\beta}$). Точкам, лежащим

под гиперболой $k = 1 + \frac{R}{r\beta}$, соответствует особая точка типа узла или фокуса. Устойчивость особой точки в этом случае определяется

Граница, разделяющая области действительных и комплексных корней (разделяющая области узла и фокуса), определяется условием равенства нулю дискриминанта характеристического уравнения (5.30), т. е. условием

$$[R(C_1 + C_2) - (k - 1)r(C_1 + \beta C_2)]^2 - 4C_1 C_2 (1 - \beta)r[R - \beta r(k - 1)] = 0. \quad (5.33)$$

Кривая, определяемая на плоскости параметров k, β уравнением (5.33), как нетрудно видеть, имеет две ветви, одна из которых (граница неустойчивых узлов и неустойчивых фокусов) проходит между гиперболами (5.32) и $k = 1 + \frac{R}{\beta r}$, а другая — под гиперболой (5.32), но над осью $k = 0$ ¹⁾.

Если условие самовозбуждения соблюдено и особая точка является неустойчивой, то мы можем лишь утверждать, что система уходит из состояния равновесия, и можем определить характер этого движения, но ничего не можем сказать о дальнейшей судьбе системы, так как мы ограничились линейными уравнениями. Анализ нелинейных уравнений «универсальной» схемы (см. гл. X, § 10) показывает, что при выполнении условий самовозбуждения в схеме устанавливаются автоколебания: непрерывные при $k < k_{кр} = 1 + \frac{R}{r\beta}$ (или, что то же самое, при $\beta < \beta_{кр} = \frac{R}{r(k-1)}$) и разрывные при $k > k_{кр}$ (или при $\beta > \beta_{кр}$)²⁾. Заметим, что в последнем случае рассмотренная нами упрощенная модель не отображает законов движения реальной схемы: вблизи состояния равновесия в этом случае происходят «быстрые» движения, скорости которых определяются не уравнениями (5.29), а малыми паразитными емкостями схемы, и тем больше, чем меньше эти емкости. Поэтому было бы более правильным назвать область $k > 1 + \frac{R}{\beta r}$ на диаграмме рис. 227 не областью «седла», а областью «быстрых» движений (скачков), уводящих систему от состояния равновесия.

¹⁾ В самом деле, дискриминант уравнения является полиномом второй степени относительно k , положителен на оси $k = 0$ и на гиперболе $k = 1 + \frac{R}{r\beta}$ и отрицателен на гиперболе (5.32). В силу непрерывности зависимости дискриминанта от k между гиперболами (5.32) и $k = 1 + \frac{R}{r\beta}$, а также между гиперболой (5.32) и осью $k = 0$ должны проходить ветви кривой (5.33). В каждой из этих областей проходит по одной ветви кривой (5.33), так как уравнение (5.33) по каждому β определяет только два корня для k .

²⁾ Именно из-за того, что в схеме возможны как непрерывные, так и разрывные автоколебания, она и была названа «универсальной».

§ 4. Состояния равновесия. Устойчивость состояний равновесия

От частного случая линейной системы вернемся снова к общему случаю динамической системы, описываемой двумя дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (5.1)$$

Пусть соответствующее фазовое пространство является плоскостью x, y , где x и y — декартовы координаты.

Чтобы отыскать на фазовой плоскости состояния равновесия, нужно найти те точки фазовой плоскости, где фазовая скорость равняется нулю, или, иначе, нужно найти точки пересечения кривых

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \quad (5.34)$$

Как мы уже знаем, эти точки будут *особыми* точками дифференциального уравнения первого порядка, определяющего интегральные кривые:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (5.3)$$

В этом смысле мы будем говорить, что состояния равновесия нашей динамической системы суть особые точки семейства интегральных кривых на фазовой плоскости.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости состояний равновесия. Напомним определение устойчивости и неустойчивости для этого общего случая. Состояние равновесия называется устойчивым, если, задав вокруг состояния равновесия *любую* область ϵ , всегда можно найти соответствующую область $\delta(\epsilon)$ такую, что помещенная в область $\delta(\epsilon)$ (при $t = t_0$) изображающая точка *никогда* (при $t > t_0$) не выйдет из области ϵ . Состояние равновесия называется неустойчивым, если существует такая область ϵ вокруг состояния равновесия, что для нее нельзя подобрать область $\delta(\epsilon)$, обладающую только что указанным свойством. Пуанкаре [185] и Ляпунов [84] дали аналитический метод исследования устойчивости состояний равновесия. Мы изложим этот метод и дадим его обоснование.

Мы интересуемся устойчивостью состояния равновесия x_0, y_0 (x_0, y_0 — точки пересечения кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$). Так как это значит, что мы интересуемся характером движений при наличии некоторых отклонений от состояния равновесия, то для удобства выкладки мы введем вместо переменных x, y новые зависимые переменные ξ, η , определив их как смещения относительно положения равновесия (на фазовой плоскости):

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta. \quad (5.35)$$

По нашему предположению $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — аналитические функции. Переходя от переменных x, y к переменным ξ, η в уравнениях (5.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a\xi + b\eta + [p_{11}\xi^2 + 2p_{12}\xi\eta + p_{22}\eta^2 + \dots], \\ \frac{d\eta}{dt} &= c\xi + d\eta + [q_{11}\xi^2 + 2q_{12}\xi\eta + q_{22}\eta^2 + \dots], \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

где

$$\begin{aligned} a &= P'_x(x_0, y_0), & b &= P'_y(x_0, y_0), \\ c &= Q'_x(x_0, y_0), & d &= Q'_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

и т. д.

Обоснованный Ляпуновым метод исследования устойчивости сводится к следующему. Отбросим в уравнениях (5.34) нелинейные члены. Мы получим тогда систему *линейных* уравнений с постоянными коэффициентами, так называемую систему уравнений первого приближения:

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta. \quad (5.37)$$

Решение этой системы уравнений напишется сразу, коль скоро нам известны корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ляпунов показал, что в случае, если оба корня этого уравнения имеют отличные от нуля действительные части, то исследование уравнений первого приближения, полученных путем отбрасывания нелинейных членов, всегда дает правильный ответ на вопрос об устойчивости состояния равновесия в системе (5.1). Именно, если оба корня имеют отрицательную действительную часть и если, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то состояние равновесия будет устойчивым; если же хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, т. е. если система уравнений первого приближения имеет нарастающие решения, то состояние равновесия неустойчиво.

Перейдем к доказательству этих утверждений Ляпунова. При этом рассмотрим отдельно случай действительных λ и случай комплексных λ .

1. Случай действительных корней характеристического уравнения. В этом случае, как мы знаем, систему уравнений первого приближения можно путем линейного однородного преобразования¹⁾

$$u = \alpha\xi + \beta\eta, \quad v = \gamma\xi + \delta\eta \quad (5.38)$$

¹⁾ См. § 2. Здесь лишь изменены буквенные обозначения переменных.

привести к так называемому «каноническому» виду:

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 u;$$

$$\frac{dv}{dt} = \lambda_2 v,$$

где λ_1 и λ_2 — как раз корни характеристического уравнения. Применим то же преобразование к системе (5.1). Мы получим тогда опять нелинейную систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \lambda_1 u + (\bar{p}_{11}u^2 + 2\bar{p}_{12}uv + \bar{p}_{22}v^2) + \dots, \\ \frac{dv}{dt} &= \lambda_2 v + (\bar{q}_{11}u^2 + 2\bar{q}_{12}uv + \bar{q}_{22}v^2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Умножая первое уравнение на u , второе на v и складывая, получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \dots = \Phi(u, v), \quad (5.40)$$

где $\rho = u^2 + v^2$.

Рассмотрим отдельно три случая: λ_1 и λ_2 оба отрицательны, λ_1 и λ_2 оба положительны, λ_1 и λ_2 разных знаков.

1. Если λ_1 и λ_2 оба отрицательны, то, как нетрудно показать, кривая $\Phi(u, v) = 0$ имеет в начале координат изолированную точку, а поверхность $z = \Phi(u, v)$ имеет максимум в начале координат. Отсюда следует, что существует область S вокруг начала координат, в которой $\Phi(u, v) < 0$ (за исключением точки $u=0, v=0$, так как $\Phi(0, 0) = 0$). Наличие такой области сразу позволит нам доказать устойчивость состояния равновесия.

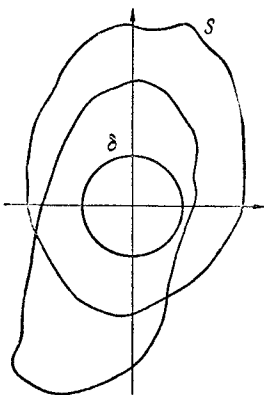


Рис. 228.

Пусть вокруг начала координат нам задана какая-то область ϵ . Выберем в качестве области δ область, ограниченную окружностью с центром в начале координат, целиком лежащую как в области S , так и в области ϵ (рис. 228). Нетрудно видеть, что если мы поместим изображающую точку где-нибудь внутри области δ (ϵ), то она никогда не уйдет из этой области и,

следовательно, не сможет достичь границы области ϵ . Действительно, $\frac{d\rho}{dt} < 0$ для всех точек области δ ¹⁾; следовательно, изоб-

¹⁾ Кроме точки $u=0, v=0$; но изображающая точка, попавшая в начало координат, останется там в покое.

ражающая точка с течением времени может только приближаться к началу координат. Таким образом, исследуемое состояние равновесия устойчиво по Ляпунову. Больше того, можно показать, что в этом случае состояние равновесия асимптотически устойчиво, т. е. при неограниченном возрастании времени изображающая точка асимптотически стремится к состоянию равновесия. Действительно, так как $\rho = u^2 + v^2$ монотонно убывает с течением времени, начиная от начального значения $\rho = \rho_0$, то при $t \rightarrow \infty$ ρ стремится либо к нулю, либо к какому-нибудь пределу ρ_1 ($\rho_1 > 0$). Нетрудно видеть, что стремление к пределу, отличному от нуля, исключено, так как при

конечной скорости $\left(\left| \frac{d\rho}{dt} \right| > \gamma > 0, \text{ если } \rho_0 \geq \rho > \rho_1 \right)$ за неограниченное время ρ должно было бы уменьшиться на сколь угодно большую величину и не смогло бы оставаться положительным. Очевидно, что эти утверждения не нарушатся при обратном возвращении на плоскость ξ, η . Соответствующее состояние равновесия устойчиво по Ляпунову, и изображающая точка, помещенная вблизи состояния равновесия на плоскости ξ, η , также будет асимптотически приближаться к состоянию равновесия.

Сделаем в связи с этим одно замечание, которое нам пригодится впоследствии. Каждая окружность на плоскости u, v , целиком лежащая внутри области S , является «циклом без прикосновения» (или «циклом без контакта»; cycle sans contact по Пуанкаре), так как все интегральные кривые пересекают ее (при отрицательных S_1 и S_2 все кривые входят внутрь) и ни одна не касается. Мы можем построить целое семейство таких окружностей, вложенных друг в друга и стягивающихся к началу координат; такое семейство можно назвать семейством циклов без прикосновения. Посмотрим, как будет выглядеть эта картина на плоскости ξ, η . Так как кругу на плоскости u, v соответствует эллипс на плоскости ξ, η , то состояние равновесия на плоскости ξ, η может быть окружено семейством эллипсов, вложенных друг в друга, стягивающихся к началу координат и являющихся циклами без прикосновения (рис. 229). Если изображающая точка пересечет граничный цикл без прикосновения (самый большой из этих эллипсов), то она необходимо начнет пересекать все остальные, асимптотически стремясь к особой точке.

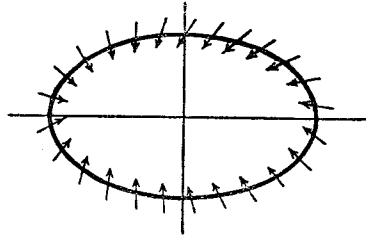


Рис. 229.

2. Если λ_1 и λ_2 оба положительны, то кривая $\Phi(u, v) = 0$ опять имеет в начале координат изолированную точку, а поверхность $z = \Phi(u, v)$ теперь уже имеет не максимум, а минимум в начале координат. Отсюда следует, что существует область (область S)

вокруг начала координат, в которой $\Phi(u, v) > 0$ (за исключением точки $u=0, v=0$, так как $\Phi(0, 0)=0$).

Докажем, что в этом случае состояние равновесия неустойчиво. Возьмем в качестве области ϵ область, ограниченную кругом, целиком лежащим в области S (рис. 230).

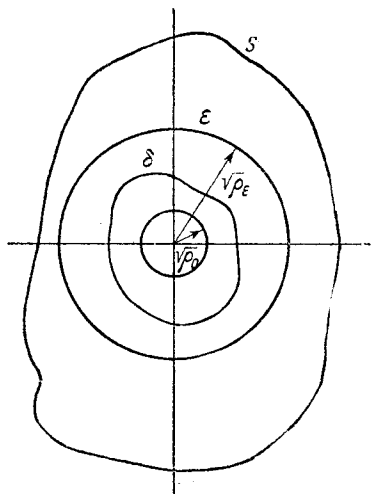


Рис. 230.

Можно показать, что *нельзя* выбрать область δ , охватывающую начало, такой, чтобы изображающая точка, помещенная в любую точку этой области, никогда не достигла границы области ϵ . Применим доказательство от противного. Положим, что такая область существует. Поместим тогда изображающую точку в момент $t=t_0$ в какую-нибудь из точек этой области, не являющуюся началом координат. Так как для всей области S (кроме начала координат) $\Phi(u, v) = \frac{d\rho}{dt} > 0$,

то изображающая точка с возрастанием времени монотонно удаляется от начала; это может нарушиться лишь при выходе изображающей

точки из области S . Обозначим через ρ_0 значение $u^2 + v^2$ в момент времени $t=t_0$ и через ρ_ϵ значение $u^2 + v^2$ для границы области ϵ . Очевидно, что в кольце между окружностями $\rho = \rho_0$ и $\rho = \rho_\epsilon$ $\Phi(u, v)$ или, что то же самое, $\frac{d\rho}{dt}$ имеет некоторый *положительный* нижний предел. Поэтому изображающая точка будет удаляться от начала координат со скоростью, отличной от нуля, и в конечное время дойдет до границы области ϵ ¹⁾. Мы пришли таким образом к противоречию, и значит, нужной области δ отыскать нельзя. Состояние равновесия является неустойчивым по Ляпунову.

Как и в предшествующем случае, все качественные утверждения без изменения переносятся на плоскости ξ, η . Заметим, что в этом случае на плоскости ξ, η также существует семейство вложенных друг в друга эллипсов, служащих циклами без прикосновения. Изображающая точка, помещенная в достаточной близости к состоянию равновесия, неизбежно будет удаляться от него, пересекая все циклы без прикосновения.

¹⁾ Если нижний предел функции $\Phi(u, v)$ в кольце $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_\epsilon$ равен

γ ($\gamma > 0$), то время прохождения кольца $\tau < \frac{\rho_\epsilon - \rho_0}{\gamma}$.

3. Если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, то кривая $\Phi(u, v) = 0$ имеет в начале координат узловую точку, а поверхность $z = \Phi(u, v)$ имеет в начале координат седлообразный экстремум. Отсюда следует, что вокруг начала чередуются области, в которых $\Phi(u, v) > 0$, с областями, в которых $\Phi(u, v) < 0$, причем границей раздела служит

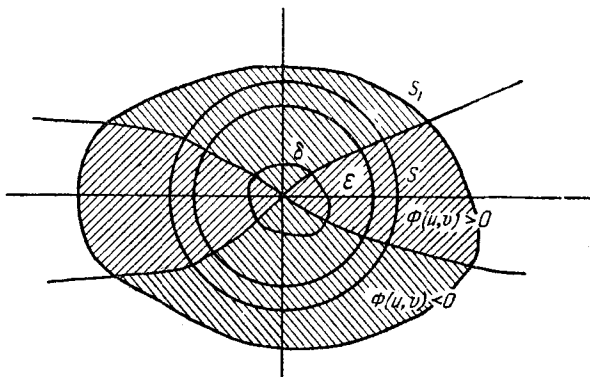


Рис. 231.

кривая $\Phi(u, v) = 0$ с простой узловой точкой в начале координат (рис. 231).

Мы можем это обстоятельство сформулировать еще и так: вокруг начала координат существует окружность с центром в начале координат и с радиусом, отличным от нуля, которая пересекает кривую $\Phi(u, v) = 0$ четыре раза. Назовем область внутри этой окружности областью S ; эта область S разбивается кривой $\Phi(u, v) = 0$ на четыре внутренние области таким образом, что в двух из них $\Phi(u, v) > 0$, а в двух других $\Phi(u, v) < 0$. Докажем, что в этом случае состояние равновесия неустойчиво. Это можно сделать, если обратить внимание на знак $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ вблизи начала координат. Дифференцируя еще раз $\frac{d\rho}{dt}$ и заменяя $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ их значениями из дифференциальных уравнений, имеем:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2\rho}{dt^2} = \lambda_1^2 u^2 + \lambda_2^2 v^2 + \dots = \Phi_1(u, v).$$

Поверхность $z = \Phi_1(u, v)$, как нетрудно убедиться, имеет минимум в начале координат. Следовательно, вокруг начала координат существует область S_1 , внутри которой $\Phi_1(u, v) > 0$ (за исключением точки $u = 0, v = 0$, так как $\Phi_1(0, 0) = 0$) или, что все равно, $\frac{d^2\rho}{dt^2} > 0$.

Перейдем теперь к самому доказательству. Возьмем в качестве области ϵ область, ограниченную окружностью, целиком лежащую

как в области S , так и в области S_1 ¹⁾. Нетрудно показать, что *нельзя* выбрать такую область δ , охватывающую начало, чтобы изображающая точка, помещенная в любую точку области δ , никогда не достигла границы области ϵ .

Действительно, предположим, что такая область δ существует. Так как она должна охватить начало, то в ней необходимо должны найтись точки, для которых $\Phi(u, v) > 0$. Поместим тогда изображающую точку в момент $t = t_0$ в какую-нибудь из таких точек области δ , где $\Phi(u, v) > 0$ или, что все равно, $\frac{d\rho}{dt} > 0$. Так как при $t = t_0$ $\frac{d\rho}{dt} > 0$ и так как во всей области S_1 $\frac{d^2\rho}{dt^2} > 0$ (область ϵ выбрана внутри области S_1 , а область δ не может иметь частей, лежащих вне ϵ), то наша изображающая точка начнет удаляться от начала координат с возрастающей скоростью и в конечное время достигнет границы области ϵ ²⁾. Мы пришли, таким образом, к противоречию. Нужной области δ выбрать нельзя. Состояние равновесия является неустойчивым по Ляпунову. Ясно, что то же самое относится к соответствующему состоянию равновесия на плоскости ξ, η .

2. Случай комплексных корней характеристического уравнения. В этом случае, как мы знаем, линейную систему можно путем действительного линейного однородного преобразования привести к виду

$$\frac{du_1}{dt} = a_1 u_1 - b_1 v_1, \quad \frac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 + b_1 u_1,$$

где a_1 и b_1 — действительная и мнимая части λ ($\lambda_1 = a + jb$, $\lambda_2 = a - jb$). Применим те же преобразования к нелинейной системе. Мы получим тогда снова нелинейную систему:

$$\frac{du_1}{dt} = a_1 u_1 - b_1 v_1 + \dots; \quad \frac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 + b_1 u_1 + \dots \quad (5.41)$$

Умножая первое уравнение на u_1 , второе на v_1 и складывая, получаем следующее выражение для квадрата радиуса-вектора $\rho = u_1^2 + v_1^2$:

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = a_1 (u_1^2 + v_1^2) + \dots = \psi(u_1, v_1).$$

¹⁾ Областью ϵ , в частности, может служить область S , которую всегда можно выбрать так, чтобы она была целиком расположена внутри области S_1 .

²⁾ Нетрудно оценить это время τ . Пусть ρ_ϵ — квадрат радиуса круга, ограничивающего область ϵ . Пусть γ ($\gamma > 0$) — значение $\frac{d\rho}{dt}$ в момент $t = t_0$.

Тогда в течение всего времени движения внутри области S_1 $\frac{d\rho}{dt} \geq \gamma$; отсюда следует, что $\tau < \frac{\rho_\epsilon - \rho_0}{\gamma}$.

Так как здесь точками обозначены члены третьей степени и выше, то нетрудно показать обычным путем, что $\psi(a_1, v_1)$ имеет максимум или минимум в начале координат в зависимости от знака a_1 . Повторяя в точности рассуждения, которые мы приводили в случае действительных корней, имеющих одинаковые знаки, мы найдем, что в случае $a_1 < 0$ состояние равновесия устойчиво по Ляпунову и даже асимптотически устойчиво, а в случае $a_1 > 0$ состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову. В обоих случаях достаточно малые окружности вблизи начала служат циклами без прикосновения. При переходе к плоскости ξ, η это семейство окружностей превратится в семейство эллипсов без контакта, в которые интегральные кривые входят или выходят в зависимости от знака a_1 .

Итак, мы обосновали метод Ляпунова, заключающийся в отбрасывании нелинейных членов для случая, когда корни характеристического уравнения не равны между собой и имеют отличные от нулей действительные части. Ограничение, связанное с отсутствием равных корней, несущественно, — мы его приняли лишь для упрощения доказательства. Ограничение, связанное с наличием действительных частей, отличных от нуля, у обоих корней характеристического уравнения, существенно. В предположении, что рассматриваемое уравнение — общего вида, оно не может быть устранено. Таким образом, теорему Ляпунова об устойчивости состояний равновесия в нашем случае можно сформулировать так: *если действительные части корней характеристического уравнения отрицательны, то состояние равновесия устойчиво; если хотя бы одна действительная часть положительна, то состояние равновесия неустойчиво.*

Если действительные части обоих корней характеристического уравнения равны нулю или если один корень равен нулю, а другой отрицателен, то уравнения первого приближения не дают ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия.

Таким образом, устойчивость состояния равновесия системы (5.1) вполне определяется соответствующими уравнениями первого приближения (5.37) в том случае, когда оба корня характеристического уравнения имеют отличные от нуля действительные части. Можно показать (мы на этом здесь останавливаться не будем), что в этом случае уравнения первого приближения определяют не только устойчивость состояния равновесия, но и характер фазовых траекторий в достаточно малой его окрестности. Более того, состояния равновесия (особые точки), для которых действительные части обоих корней характеристического уравнения отличны от нуля, являются *грубыми*: их характер, т. е. характер фазовых траекторий в их достаточно малой окрестности, сохраняется при любых достаточно малых изменениях правых частей уравнения (5.1) — функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ (при условии, что достаточно малыми являются также и их производные первого порядка; подробнее см. гл. VI, § 4). Таким образом, совершенно так же, как и в § 2, мы имеем здесь пять типов

грубых состояний равновесия: устойчивый узел, неустойчивый узел, устойчивый фокус, неустойчивый фокус и седло. Для исследования характера грубых состояний равновесия удобно пользоваться диаграммой, приведенной на рис. 223. В нашем случае

$$\sigma = - [P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)]$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & Q'_x(x_0, y_0) \\ P'_y(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \quad (5.42)$$

Грубым состояниям равновесия соответствуют все точки плоскости параметров σ , Δ , лежащие вне оси $\Delta = 0$ и полуоси $\sigma = 0$, $\Delta > 0$, которые на рис. 223 изображены жирной линией. В случае узла и седла, как мы знаем, интегральные кривые входят в особую точку по двум направлениям, которые, само собой разумеется, также могут быть определены из соответствующих линейных уравнений. Пользуясь результатами § 2, мы можем написать для определения угловых коэффициентов этих направлений следующее уравнение:

$$P'_y(x_0, y_0) x^2 + \{P'_x(x_0, y_0) - Q'_y(x_0, y_0)\} x - Q'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Точкам оси $\Delta = 0$ и полуоси $\sigma = 0$, $\Delta > 0$ соответствуют *негрубые* состояния равновесия (негрубые особые точки), т. е. такие

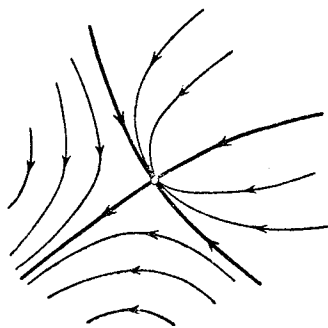


Рис. 232.

состояния равновесия, характер которых может быть изменен сколь угодно малыми изменениями правых частей уравнений (5.1) (при сколь угодно малых изменениях функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их производных). Именно поэтому их характер (и в частности, устойчивость) не определяется линеаризованными уравнениями — уравнениями первого приближения (5.37). Точкам полуоси $\sigma = 0$, $\Delta > 0$ могут соответствовать состояния равновесия как типа центра, так и типа устойчивого или неустойчивого фокуса, точкам оси

$\Delta = 0$ — так называемые *сложные* особые точки, простейшая из которых (точка типа седло-узел) изображена на рис. 232¹⁾.

¹⁾ Сложные особые точки (сложные состояния равновесия), т. е. такие особые точки, для которых $\Delta = 0$, очевидно, являются точками *соприкосновения* кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$. В силу этого сложная особая точка при сколь угодно малых изменениях функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ может либо распастись на две (или даже на большее число) особых точек или исчезнуть. Особые точки, для которых $\Delta \neq 0$, носят название *простых*, их число не может изменяться при достаточно малых изменениях функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

§ 5. Пример: состояния равновесия в цепи вольтовой дуги

В качестве примера, иллюстрирующего применение методов Ляпунова для определения устойчивости состояний равновесия, рассмотрим состояния равновесия в цепи вольтовой дуги, включенной последовательно с индуктивностью и зашунтированной емкостью (рис. 233). Эта схема представляет собой некоторое видоизменение схемы дугowego генератора; рассмотренная выше нами схема вольтовой дуги с одной индуктивностью (гл. IV, § 5) получается из этой схемы в предположении, что она не содержит емкости ($C=0$). Предполагая, что ток через дуговой промежуток является функцией напряжения на дуге, т. е. снова пренебрегая инерционностью ионных процессов в дуге, нетрудно при помощи законов Кирхгофа получить следующие уравнения колебаний в схеме (они записаны в обозначениях, приведенных на рис. 233):

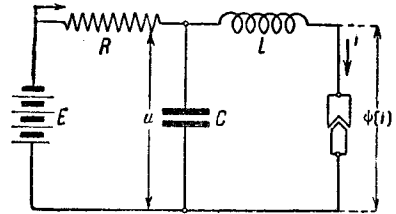


Рис. 233.

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= u - \psi(i), \\ C \frac{du}{dt} &= \frac{E - u}{R} - i, \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

где $\psi(i) = v$ — напряжение на дуге, являющееся однозначной функцией силы тока i , протекающего через дугу (графически мы изображали эту зависимость — статическую характеристику дуги — так, как это указано на рис. 234).

Состояния равновесия системы определяются из условий $\frac{du}{dt} = 0$ и $\frac{di}{dt} = 0$, из которых получаются уравнения:

$$u = E - Ri, \quad u = \psi(i). \quad (5.44)$$

Следовательно, состояниями равновесия являются точки пересечения

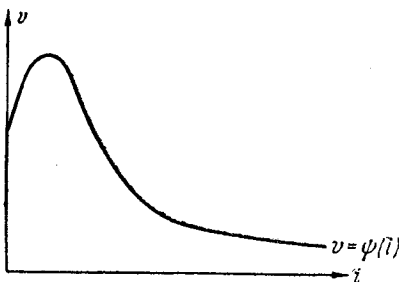


Рис. 234.

этих прямой и кривой. В зависимости от величин E и R этих точек может быть либо одна (рис. 235), либо три (рис. 236). Для анализа устойчивости состояний равновесия мы по методу Ляпунова представим в уравнения (5.43) $u = u_0 + \eta$ и $i = i_0 + \xi$, где u_0 и i_0 — значения, соответствующие какому-либо из состояний равновесия. Далее, разлагая характеристику дуги $\psi(i_0 + \xi)$ в ряд $\psi(i_0 + \xi) = \psi(i_0) + \xi\psi'(i_0) + \dots$

и ограничиваясь первым членом ряда, мы получим два уже линейных дифференциальных уравнения для ξ и η (так как i_0 и u_0 удовлетворяют условиям (5.44) и все члены, их содержащие, вместе дадут нуль):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\eta}{RC} - \frac{\xi}{C}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\eta}{L} - \frac{\rho\xi}{L}, \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

где $\rho = \psi'(i_0)$ — тангенс угла наклона характеристики дуги в точке, соответствующей данному состоянию равновесия (величина размерности

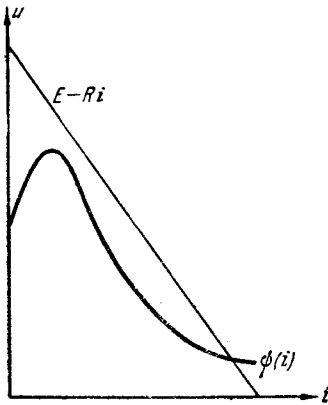


Рис. 235.

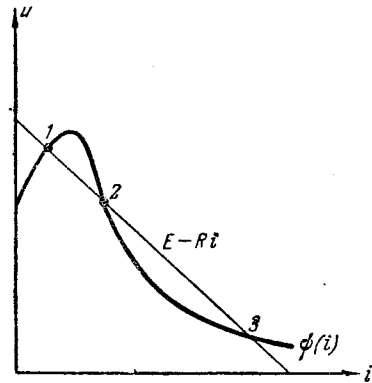


Рис. 236.

сопротивления). Сопротивление дуги ρ — величина переменная, которая при некоторых значениях i_0 может принимать отрицательные значения; однако, пользуясь этим понятием, нужно помнить все оговорки, которые мы сделали, когда впервые ввели термин «отрицательное сопротивление» (гл. I, § 6).

Характеристическое уравнение этой системы дифференциальных уравнений в виде детерминанта запишется так:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\rho}{L} - \lambda & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 + \lambda \left(\frac{1}{RC} + \frac{\rho}{L} \right) + \frac{1}{LC} \left(\frac{\rho}{R} + 1 \right) = 0. \quad (5.46)$$

Характер корней уравнения зависит от значений четырех параметров: R , C , L и ρ . Для того чтобы выяснить характер этих корней при всех возможных значениях параметров, мы построим три диаграммы: раз-

биение плоскостей параметров схемы на области, каждая из которых соответствует определенному типу состояний равновесия, именно, разбиение плоскостей $R, \rho; L, \rho; C, \rho$; при этом нужно иметь в виду, что L, C и R могут принимать только положительные значения, в то время как ρ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Для построения первой диаграммы R, ρ приведем условие комплексности корней к виду

$$[L - RC\rho]^2 - [2R \sqrt{LC}]^2 < 0. \quad (5.47)$$

Граница области комплексных корней определяется уравнением четвертого порядка (относительно R и ρ), которое распадается на два уравнения второго порядка:

$$L - RC\rho + 2R \sqrt{LC} = 0;$$

$$L - RC\rho - 2R \sqrt{LC} = 0.$$

Каждое из этих уравнений определяет гиперболу; уравнения их отнесены к асимптотам, причем одной из асимптот для обеих кривых является ось ρ , а другой: для первой кривой — прямая $\rho = -2 \sqrt{\frac{L}{C}}$

и для второй — прямая $\rho = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$.

«Кривой клин», образованный обеими гиперболами I и 2 (рис. 237), как легко видеть, и представляет собой область комплексных корней. Границей области корней с положительной действительной частью, т. е. границей области устойчивости узлов и фокусов, является кривая $L + RC\rho = 0$, т. е. гипербола 3 с осями ρ и R в качестве асимптот, расположенная в четвертом квадранте и пересекающая гиперболу I в точке $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ и $\rho = -\sqrt{\frac{L}{C}}$ (см. рис. 237). Очевидно, что все узлы и фокусы, лежащие выше этой гиперболы, устойчивы, лежащие ниже — неустойчивы. Наконец, границей области седел является прямая 4 , определяемая уравнением $R + \rho = 0$, так как при $R + \rho < 0$ корни уравнения (5.46), как известно, всегда будут разных знаков. Очевидно, что область, лежащая ниже прямой $\rho = -R$, является областью особых точек типа седла. Мы получаем в результате для параметров R и ρ диаграмму разбиения плоскости этих параметров на области различных типов особых точек, приведенную на рис. 237.

Как видно из этой диаграммы, при $\rho > 0$ (выше оси R) существуют только устойчивые особые точки. Эти точки будут фокусами, если ρ (сопротивление дуги, т. е. сопротивление в контуре) не слишком велико и сопротивление нагрузки, шунтирующей контур, не слишком мало. При $\rho < 0$ (падающие участки характеристики)

состояния равновесия могут быть устойчивы, только если $|\rho|$ не слишком велико и, с другой стороны, R не слишком мало и не слишком велико. При $\rho < 0$ возможны все три типа неустойчивости: неустойчивый узел, неустойчивый фокус и седло. Далее фокус

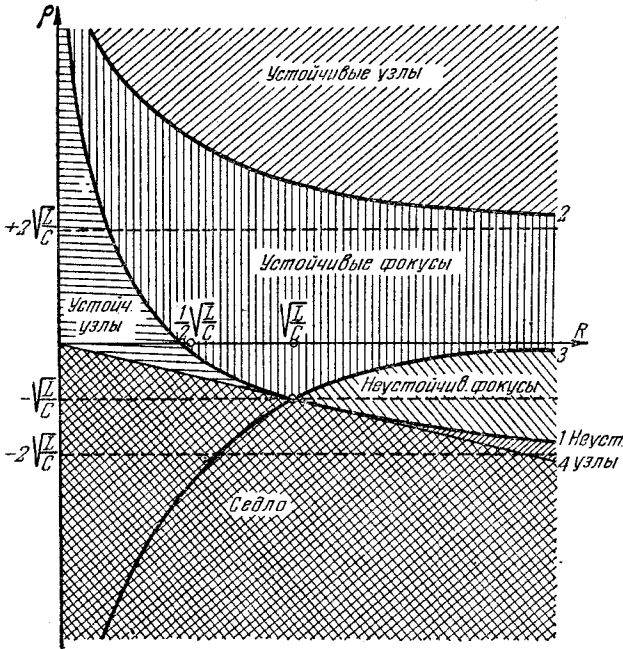


Рис. 237.

(устойчивый или неустойчивый в зависимости от знака ρ) получается при $|\rho| < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, если R достаточно велико, и это условие аналогично условию осцилляторности для обычного линейного контура. Вообще при $\rho < 0$ и $|\rho| < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ можно, изменяя величину R , получить любую особую точку, если же $\rho < 0$ и $|\rho| > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то возможны только неустойчивые особые точки — либо седло, либо неустойчивый узел в зависимости от величины параметра R .

Для того чтобы установить зависимость типа особой точки от других параметров, мы построим аналогичные диаграммы для L , ρ (рис. 238) и C , ρ (рис. 239). Для обеих диаграмм граница комплексных корней выразится уравнением

$$L^2 + (RC\rho)^2 - 2RCL\rho - 4R^2CL = 0$$

или

$$\rho = \frac{L}{CR} \pm 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

На диаграмме L, ρ эта граница представляет собой одну кривую с асимптотой $\rho = \frac{L}{CR}$, вертикальной касательной в точке $L=0, \rho=0$ и горизонтальной касательной в точке $L=R^2C, \rho=-R$.

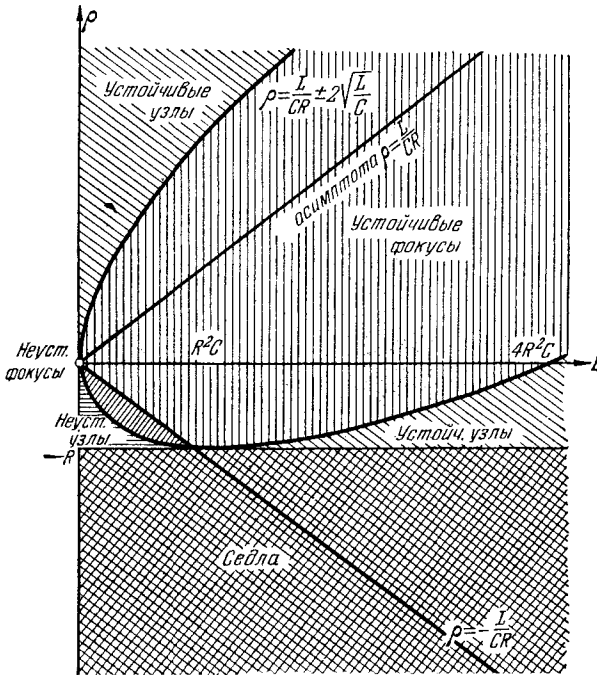


Рис. 238.

На диаграмме C, ρ эта граница распадается на две кривые гиперболического типа с асимптотами $C=0$ и $\rho=0$. Граница области устойчивости узлов и фокусов, определяемая уравнением $RC\rho = -L$, представляет собой для второй диаграммы C, ρ гиперболу с осями координат в качестве асимптот и для первой диаграммы — прямую. Граница области особых точек типа седла дается уравнением

$$\rho = -R,$$

т. е. и в той и в другой диаграмме представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс. В результате мы получаем две диаграммы, изображенные на рис. 238 и 239. Легко убедиться, что эти диаграммы вполне согласуются с первой, изображенной на рис. 237,

и лишь дополняют ее. Все три диаграммы позволяют судить о характере особых точек при любых значениях параметров R , C , L и ρ .

Очевидно, состояние равновесия, лежащее на восходящем участке характеристики дуги (например, точка 1 на рис. 236), всегда

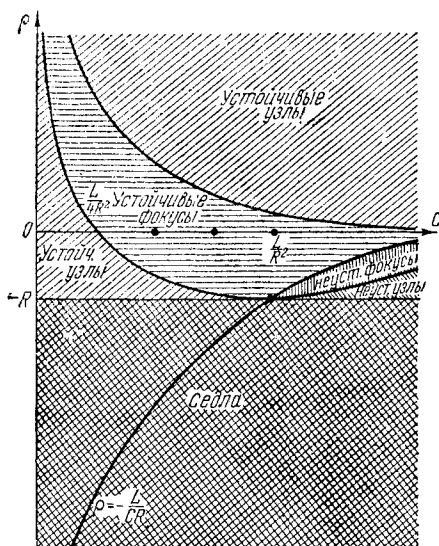


Рис. 239.

устойчиво, так как для него $\rho > 0$. Зная соотношения между L , C , R и ρ , мы могли бы сразу установить, принадлежит ли это состояние равновесия к типу фокусов или к типу узлов. Если же состояние равновесия лежит на падающем участке характеристики дуги (в области отрицательных ρ) и наклон нагрузочной прямой $u = E - Ri$ меньше наклона характеристики дуги, т. е. если $\rho < 0$ и $|\rho| > R$ (эти условия всегда выполняются для среднего состояния равновесия в случае существования трех состояний равновесия — для точки 2 на рис. 236), то это состояние равновесия является седлом и, следовательно, неустойчиво как при малых, так и при больших L и C .

Наконец, состояние равновесия, лежащее на падающем участке характеристики дуги ($\rho < 0$), но для которого $|\rho| < R$ (это и имеет место, например, для точки 3 на рис. 236), не может быть седлом и является либо узлом, либо фокусом. Это состояние равновесия устойчиво при малых C (см. рис. 239), а при малых L , как это следует из рис. 238, неустойчиво.

Два условия устойчивости состояния равновесия на падающем участке характеристики дуги:

$$|\rho| < R \text{ и } L > |\rho| RC,$$

при $L \neq 0$ сводятся к одному условию: $|\rho| < R$, как это мы получили в § 6 гл. IV, если положить $C = 0$. Однако, поскольку любая схема обладает некоторой, пусть малой, паразитной емкостью, для устойчивости состояния равновесия на падающем участке характеристики дуги необходимо (кроме выполнения условия $|\rho| < R$), чтобы схема содержала некоторую, не слишком малую индуктивность, тем меньше, чем меньше емкость C .

При рассмотрении устойчивости состояний равновесия в схеме с вольтовой дугой мы пользовались *статической* характеристикой дуги, которая, строго говоря, относится только к установившимся, равно-

весным процессам в дуге. Поэтому наше рассмотрение будет удовлетворительным только при достаточно медленных колебаниях в схеме, что имеет место при достаточно больших L или C . Если же L и C малы и в схеме имеют место быстрые колебания, то в этом случае инерционность ионных процессов в дуге играет существенную роль, и мы не можем для анализа устойчивости равновесных состояний использовать статическую характеристику дуги, а должны вместо нее применить динамические (дифференциальные) уравнения, которые с той или иной степенью точности отображают динамику дугового разряда. Оказывается, инерционность дугового разряда является стабилизирующим фактором, достаточным для того, чтобы состояние равновесия схемы при малой емкости C стало устойчивым без всякой индуктивности в цепи дуги.

Простейшее дифференциальное уравнение первого порядка, которое в какой-то мере отображает динамику процессов в дуге вблизи состояний равновесия (u_0, i_0), может быть записано в виде:

$$\tau \left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{u_0}{i_0} \frac{d\eta}{dt} \right) + \xi - \rho\eta = 0, \quad (5.48)$$

где $\xi = u - u_0$, $\eta = i - i_0$ и u — напряжение на зажимах дуги [200,51]. Это уравнение приближенно учитывает инерционность дугового разряда, которая обусловлена главным образом тепловой инерцией электродов дуги и газового промежутка (постоянная времени τ , характеризующая эту инерционность, имеет порядок величины, равный $10^{-3} - 10^{-4}$ сек). Из уравнения (5.48) как предельные случаи мы получаем и линеаризованную статическую характеристику $\xi = \rho\eta$, если положить производные равными нулю, и динамическую характеристику для высокочастотных колебаний, когда тепловое состояние дуги не успевает изменяться и дуга ведет себя как обычный проводник, подчиняющийся закону

Ома, $\xi = \frac{u_0}{i_0} \eta$, если считать производные настолько большими, что в уравнении можно отбросить члены $\xi - \rho\eta$.

Для схемы дуги без индуктивности, но с емкостью, кроме уравнения (5.48) имеем:

$$C \frac{d\xi}{dt} = - \frac{\xi}{R} - \eta \quad (5.49)$$

(мы пишем уравнение сразу для отклонений напряжения и тока от их равновесных значений). Характеристическое уравнение для системы линейных дифференциальных уравнений (5.48) и (5.49) имеет вид:

$$C \tau \frac{u_0}{i_0} \lambda^2 + \left\{ \tau \left(1 + \frac{u_0}{R i_0} \right) + \rho C \right\} \lambda + \left(1 + \frac{\rho}{R} \right) = 0, \quad (5.50)$$

и следовательно, состояние равновесия на падающем участке статической характеристики ($\rho < 0$) будет устойчивым, если

$$|\rho| < R \quad \text{и} \quad \tau \left(1 + \frac{u_0}{R i_0} \right) > |\rho| C.$$

Эти условия выполняются при достаточно больших сопротивлениях R и при достаточно малых емкостях C . Таким образом, схема дуги с малой емкостью (например, с $C < \tau/|\rho|$) будет иметь устойчивое состояние равновесия на падающем участке характеристики и без всякой индуктивности в ее цепи, если только $|\rho| < R$. Этот вывод находится в качественном согласии с экспериментальными данными.

§ 6. Предельные циклы и автоколебания

После рассмотрения состояний равновесия перейдем к периодическим движениям, которые, как мы знаем, могут встречаться в системах, описываемых уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (5.1)$$

Если T ($T > 0$) — наименьшее число, для которого при всяком t

$$x(t + T) = x(t),$$

$$y(t + T) = y(t),$$

то движение $x = x(t)$, $y = y(t)$ называется периодическим движением с периодом T . Как мы знаем, периодическому движению соответствует замкнутая фазовая траектория на фазовой плоскости x, y , и обратно: всякой замкнутой траектории соответствует бесчисленное множество периодических движений, отличающихся друг от друга выбором начала отсчета времени. Замкнутые фазовые траектории мы уже встречали при рассмотрении консервативных систем, где они всегда образовывали целые континуумы траекторий, вложенных одна в другую (например, траектории вокруг особой точки типа центра). В рассмотренных нами примерах автоколебательных систем (генератор с Γ -характеристикой, часы; см. гл. III, §§ 3—5) периодическому движению на фазовой плоскости соответствовала изолированная замкнутая кривая, к которой с внешней и внутренней сторон приближались (при возрастании t) соседние траектории по спиральям. Такие изолированные замкнутые траектории носят название *предельных циклов*. Простые примеры¹⁾ позволяют убедиться, что и системы вида (5.1) с аналитическими правыми частями, вообще говоря, допускают в качестве траекторий предельные циклы.

¹⁾ Например, для системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= +y + x \left[1 - (x^2 + y^2) \right], \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y \left[1 - (x^2 + y^2) \right] \end{aligned}$$

траектория $x^2 + y^2 = 1$ является предельным циклом. Его параметрическими уравнениями будут:

$$x = \cos(t - t_0),$$

$$y = \sin(t - t_0),$$

а уравнения всех других фазовых траекторий запишутся в виде:

$$x = \frac{\cos(t - t_0)}{\sqrt{1 + C e^{-2(t - t_0)}}}, \quad y = \frac{\sin(t - t_0)}{\sqrt{1 + C e^{-2(t - t_0)}}}.$$

Значениям постоянной интегрирования $C > 0$ соответствуют фазовые траектории, накручивающиеся на предельный цикл изнутри (при $t \rightarrow +\infty$), а значениям $0 > C > -1$ — траектории, накручивающиеся снаружи.

Мы будем называть предельный цикл *устойчивым*, если существует такая область на фазовой плоскости, содержащая этот предельный цикл, — окрестность (ϵ), что все фазовые траектории, начинающиеся в окрестности (ϵ), асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ приближаются

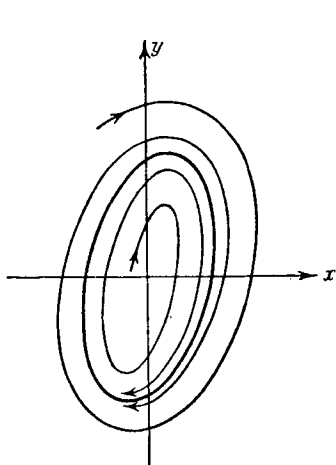


Рис. 240.

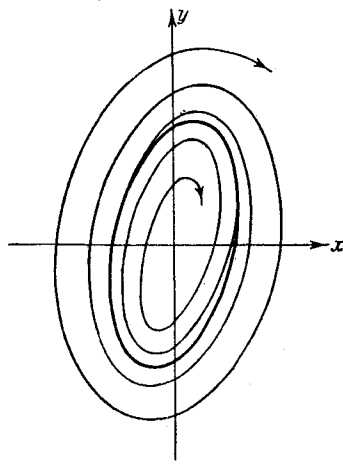


Рис. 241.

к предельному циклу. Если же, наоборот, в любой сколь угодно малой окрестности (ϵ) предельного цикла существует хотя бы одна фазовая траектория, не приближающаяся к предельному циклу при $t \rightarrow +\infty$, то такой предельный цикл будем называть *неустойчивым*.

Для иллюстрации сказанного на рис. 240 изображен устойчивый предельный цикл, а на рис. 241 и 242 — неустойчивые предельные циклы. Заметим, что неустойчивые циклы, подобные изображенному на рис. 242, такие, что все траектории с одной стороны (например, извне) приближаются к ним, а с другой стороны (например, изнутри) удаляются от них при $t \rightarrow +\infty$, иногда называют «полуустойчивыми» или двойными (последнее название обусловлено тем, что обычно такие циклы при подходящем изменении параметра системы расщепляются на два, один из которых устойчив, а другой неустойчив).

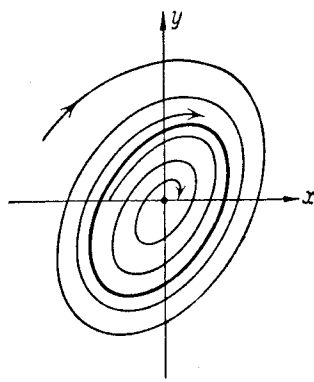


Рис. 242.

Наряду с устойчивостью предельного цикла как траектории, определение которой было только что дано (ее часто называют *орбитальной устойчивостью*), можно говорить об устойчивости в смысле

Ляпунова периодического движения, соответствующего предельному циклу. Именно, периодическое движение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ (с периодом T , так что $\varphi(t + T) \equiv \varphi(t)$ и $\psi(t + T) \equiv \psi(t)$) называется устойчивым в смысле Ляпунова, если для каждого заданного положительного ε можно подобрать такое положительное δ , что для любого другого движения $x = x(t)$, $y = y(t)$, удовлетворяющего условиям

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta \text{ и } |y(t_0) - \psi(t_0)| < \delta,$$

выполняются неравенства:

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \text{ и } |y(t) - \psi(t)| < \varepsilon$$

при любых $t > t_0$. Ниже мы будем пользоваться главным образом понятием орбитной устойчивости предельного цикла.

Устойчивость предельного цикла (равно как и устойчивость в смысле Ляпунова соответствующих периодических движений) определяется знаком его «характеристического показателя»

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ P'_x[\varphi(t), \psi(t)] + Q'_y[\varphi(t), \psi(t)] \right\} dt, \quad (5.51)$$

где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — любое периодическое решение, соответствующее рассматриваемому предельному циклу, и T — период решения. Именно, *предельный цикл устойчив при $h < 0$ и неустойчив при $h > 0$* (значению $h = 0$ соответствуют как устойчивые, так и неустойчивые предельные циклы).

Для исследования устойчивости периодического движения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ в смысле Ляпунова можно, как показал Ляпунов, идти по пути линеаризации уравнений, подобно тому, как мы это делали при исследовании устойчивости состояний равновесия. Если положить $x = \varphi(t) + \xi$, $y = \psi(t) + \eta$, подставить эти выражения в уравнения (5.1), разложить правые части этих уравнений — функции $P(\varphi + \xi, \psi + \eta)$ и $Q(\varphi + \xi, \psi + \eta)$ — в ряды по степеням ξ и η и отбросить нелинейные члены, то мы получим линейные уравнения («уравнения первого приближения») для координат «возмущения» ξ и η :

$$\frac{d\xi}{dt} = P'_x[\varphi(t), \psi(t)] \xi + P'_y[\varphi(t), \psi(t)] \eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = Q'_x[\varphi(t), \psi(t)] \xi + Q'_y[\varphi(t), \psi(t)] \eta.$$

Это — система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами периода T (ибо P'_x, P'_y, Q'_x, Q'_y суть функции от φ и ψ — периодических функций времени с периодом T). Общий вид ее решения таков:

$$\begin{aligned} \xi &= C_1 f_{11}(t) e^{h_1 t} + C_2 f_{12}(t) e^{h_2 t}, \\ \eta &= C_1 f_{21}(t) e^{h_1 t} + C_2 f_{22}(t) e^{h_2 t}, \end{aligned}$$

где f_{ik} — некоторые периодические функции (с периодом T). От показателей h_1 и h_2 , которые носят название «характеристических показателей», зависит характер решений для ξ и η , именно, знаки их действительных частей определяют, являются ли эти решения нарастающими или затухающими.

В рассматриваемой задаче (в силу автономности исходной системы уравнений (5.1)) один из характеристических показателей равен нулю, а другой равен h [185]. Знак этого показателя определяет, устойчиво ли движение [8], именно: периодическое движение устойчиво в смысле Ляпунова (правда, не абсолютно, так как возмущения по фазе не затухают), если $h < 0$, и неустойчиво, если $h > 0$; если же $h = 0$, то уравнения первого приближения не решают вопроса об устойчивости периодического движения.

Прежде чем переходить к доказательству сформулированного условия устойчивости предельного цикла, мы остановимся, забегая по некоторым пунктам немного вперед, на принципиальном вопросе о физической интерпретации изолированных замкнутых траекторий — предельных циклов.

Если мы потребуем, чтобы в реальных физических системах качественный характер возможных движений сохранялся при произвольных малых изменениях самих систем (на языке математики — при произвольных малых изменениях правых частей системы (5.1)), то, как это мы увидим в дальнейшем, мы этим запретим существование изолированных замкнутых кривых. В системах, удовлетворяющих этому требованию устойчивости качественного характера движений при малых изменениях динамической системы, — в так называемых «грубых» системах, — могут быть только изолированные замкнутые траектории (только предельные циклы) и притом обязательно с характеристическим показателем, отличным от нуля (поэтому орбитная устойчивость предельного цикла влечет за собой устойчивость по Ляпунову всех соответствующих ему периодических движений).

С физической точки зрения представляет интерес следующее замечание, которое можно сделать относительно движений, отображаемых устойчивым предельным циклом. Именно, можно сказать, что для таких движений период и «амплитуда»¹⁾ не зависят от начальных условий в том смысле, что все соседние движения (соответствующие целой области начальных значений — так называемой области устойчивости в большом) асимптотически приближаются к периодическому движению по предельному циклу, которое имеет определенный период и определенную «амплитуду».

Вышеприведенные свойства периодических движений, отображаемых предельными циклами с отрицательными характеристическими показателями: а) устойчивость по отношению к малым изменениям самой системы; б) независимость (в указанном смысле) периода и «амплитуды» от начальных условий — составляют характерную черту реальных автоколебательных процессов.

Конкретное исследование уравнений вида (5.1), с которыми пришлось иметь дело в различных случаях автоколебаний, также показало на ряде примеров, что если уравнения (5.1) с достаточной точностью отображают законы движения реальной автоколебательной

¹⁾ Точнее следовало бы сказать: «период и весь спектр амплитуд, получающийся при разложении периодического движения в ряд Фурье».

системы, то они обязательно имеют предельные циклы с отрицательным характеристическим показателем, и что стационарные периодические процессы действительно отображаются этими предельными циклами.

Отсюда мы делаем такой вывод: *реальные автоколебательные процессы, уступающие в системах, достаточно точно отображаемых уравнениями (5.1), математически соответствуют предельным циклам с отрицательным характеристическим показателем. Наличие таких предельных циклов в фазовом портрете рассматриваемой динамической системы является необходимым и достаточным условием для возможности (при надлежащих начальных условиях) существования автоколебаний в системе, т. е. для того, чтобы система была автоколебательной* [3, 5].

Неустойчивый предельный цикл, имеющий положительный характеристический показатель, само собой разумеется, также может содаться в фазовом портрете «грубых» систем. Однако такой предельный цикл не соответствует реальному периодическому процессу; он играет лишь роль «водораздела», по обе стороны от которого траектории имеют различное поведение. Ясно, что это обстоятельство также имеет существенный физический интерес. Например, наличие неустойчивого цикла дает объяснение так называемого «жесткого» режима, при котором малые начальные отклонения в системе затухают, а большие, наоборот, нарастают.

§ 7. Точечные преобразования и предельные циклы

Как мы видели в гл. III, §§ 3—5, один из способов нахождения предельных циклов и определения их устойчивости состоит в сведении задачи к некоторому точечному преобразованию, к вычислению соответствующей так называемой функции последования.

1. Функция последования и точечное преобразование. Понятие функции последования было введено Пуанкаре и состоит в следующем.

Проведем на фазовой плоскости динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (5.1)$$

через неособые точки так называемый *отрезок без контакта* L , т. е. такой отрезок, в каждой точке которого фазовые траектории системы (5.1) пересекают его, не касаясь¹⁾. Обозначим через A и B его концевые точки и через s — координату точек отрезка L (мы будем предполагать, что s монотонно увеличивается при движении вдоль отрезка от A к B ; например, за s может быть взято расстояние точки отрезка от концевой точки A).

¹⁾ В некоторых случаях бывает целесообразно пользоваться вместо отрезка без контакта (отрезка прямой) *дугой без контакта*, т. е. дугой простой гладкой кривой, которая пересекает фазовые траектории, не касаясь их. Все сказанное ниже сохраняется в силе и в этих случаях.

Пусть Q — точка на L . Рассмотрим траекторию C , проходящую через точку Q , и пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ — движение по этой траектории, при котором точка Q соответствует $t = t_0$. Проследим траекторию C для значений $t > t_0$. Может случиться, что при значении $t > t_0$ траектория C больше не пересекает отрезок L . Мы скажем тогда, что точка Q «не имеет последующих на отрезке L ».

Но может случиться, что траектория C пересекает отрезок L еще раз при значении $t > t_0$. Пусть \bar{t} — первое значение t , большее t_0 , при котором C пересекается с L , и \bar{Q} — соответствующая точка отрезка L . Мы скажем тогда, что точка Q «имеет последующую \bar{Q} на отрезке L » (рис. 243).

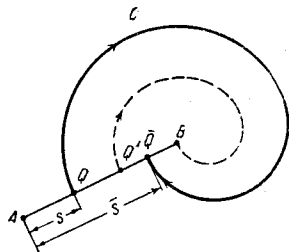


Рис. 243.

Легко показать, на основании теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий, что если какая-нибудь точка Q имеет последующую, не совпадающую с концами A или B отрезка L , то и все достаточно близкие к Q точки L также имеют последующие.

Пусть s и \bar{s} — координаты различных точек и их последующих на отрезке L . Ясно, что \bar{s} является функцией от s . Эта функция

$$\bar{s} = f(s) \quad (5.52)$$

называется *функцией последования* и выражает собой закон некоторого *точечного преобразования* отрезка L (или его части), устанавливая однозначное соответствие между точками этого отрезка (или его части) и их последующими (на том же отрезке L). Геометрически ясно, что «функцию последования» мы имеем тогда, когда отрезок без контакта пересекает траектории, имеющие характер спиралей или замкнутые. При этом очевидно, что если некоторому значению $s = s_0$ соответствует замкнутая траектория, то $f(s_0) = s_0$, т. е. точка Q и ее последующая \bar{Q} совпадают (такие точки отрезка L , преобразующиеся сами в себя, носят название *неподвижных точек* точечного преобразования (5.52)). Обратное, отыскание замкнутых траекторий, пересекающих данный отрезок без контакта, сводится к отысканию тех значений s , для которых $\bar{s} = f(s) = s$. Нетрудно также видеть, что в том случае, когда все траектории, пересекающие отрезок L , замкнуты, функция последования имеет вид $\bar{s} = s$. Пуанкаре доказал ряд свойств функции $\bar{s} = f(s)$, которые мы приведем без доказательства.

I свойство. Если точка Q_0 , соответствующая $s = s_0$, имеет последующую на отрезке L , то функция $\bar{s} = f(s)$ — голоморфная функция s в точке $s = s_0$.

II свойство. Производная $\frac{d\bar{s}}{ds}$ всегда положительна.

Первое свойство является, по сути дела, следствием теоремы о том, что решения системы (5.1) с аналитическими правыми частями являются аналитическими функциями от начальных условий, а последнее — следствием теоремы Коши, того обстоятельства, что фазовые траектории не могут пересекаться.

Геометрически последнее свойство означает, что если мы будем двигаться по отрезку L , например, в положительном направлении, то и последующие проходимых нами точек будут двигаться по отрезку L в том же направлении.

Предположим, что некоторая точка Q_0 отрезка L , соответствующая $s = s_0$, имеет последующую (не совпадающую с концами A или B отрезка L). Тогда, в силу сказанного выше, все достаточно близкие к Q_0 точки также имеют последующие и, следовательно, для всех значений s , достаточно близких к s_0 , существует функция последования $\bar{s} = f(s)$. Будем двигаться по отрезку L от точки Q_0 в положительном (или отрицательном) направлении, т. е., другими словами, будем, начиная с s_0 , увеличивать (или уменьшать) s .

Могут представиться следующие возможности:

1) Или мы дойдем до точки Q' отрезка L , соответствующей $s = s'$, для которой последующей будет конец B (или A) отрезка L (рис. 243). Тогда точки L , соответствующие значениям $s > s'$ (или $s < s'$), не будут уже, в силу свойства II, иметь последующих на отрезке L и функция последования не будет определена для значений $s > s'$ (или $s < s'$). В этом случае мы, вообще говоря, можем удлинить отрезок без контакта и, следовательно, увеличить интервал значений s , для которых определена функция последования¹⁾.

2) Или мы дойдем до такого значения $s = s'$, что все точки отрезка L , соответствующие значениям s на интервале $s_0 < s < s'$ (или $s' < s < s_0$), будут иметь последующие, а точка Q' , соответствующая $s = s'$, не будет иметь последующей на отрезке L .

Можно показать, что в этом случае траектория, проходящая через точку Q' , будет кончаться в особой точке, не пересекая больше L . В том случае, когда мы имеем лишь простые особые точки, эта точка может быть только седлом²⁾.

Может случиться, что точки, соответствующие значениям $s > s'$, опять имеют последующие. Таким образом, у нас имеется функция последования для $s < s'$ и для $s > s'$. Для $s = s'$ функция последо-

¹⁾ Удлинение отрезка без контакта возможно до наступления соприкосновения с фазовыми траекториями.

²⁾ Эта точка не может быть ни узлом, ни фокусом. Действительно, предположим, что траектория, проходящая через Q' , кончается (не пересекая уже больше L) в узле или фокусе. Тогда, как нетрудно показать, все траектории, проходящие через точки L , соответствующие значениям s , меньшим (или большим) s' , но достаточно близким к s' , также кончались бы в этой особой точке, не пересекая уже больше L . Но отсюда следовало бы, что точки, соответствующие значениям s , меньшим s' , не имеют последующих, что противоречило бы нашему предположению.

вания неопределенна (рис. 244 и 245). Однако иногда говорят об этих двух функциях последования (одной для $s < s'$, другой для $s > s'$) как об одной функции последования, и тогда при значении $s = s'$

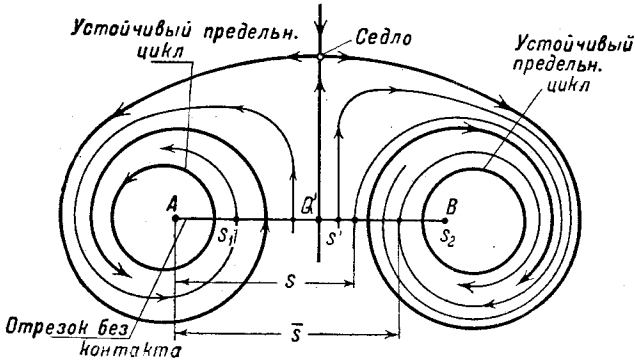


Рис. 244.

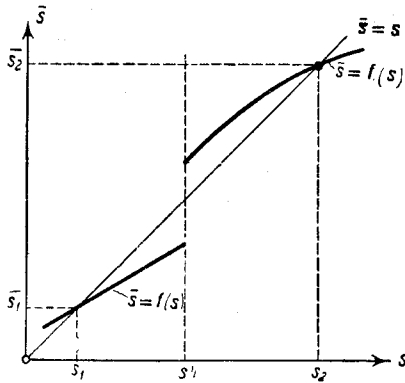


Рис. 245.

эта функция будет, вообще говоря, претерпевать разрыв в том смысле, что $f(s' + 0) \neq f(s' - 0)$.

2. Устойчивость неподвижной точки. Теорема Кенигса. Итак, если мы знаем точечное преобразование некоторого отрезка L самого в себя (знаем функцию последования), то задача отыскания замкнутых фазовых траекторий (предельных циклов), пересекающих этот отрезок, сводится к нахождению неподвижных точек, т. е. таких точек s^* отрезка L , для которых

$$f(s^*) = s^*.$$

Графически мы можем найти эти неподвижные точки как точки пересечения на плоскости s, \bar{s} , на так называемой *диаграмме Ламерея*,

кривой $\bar{s} = f(s)$ (графика функции последования) и биссектрисы $\bar{s} = s$ (рис. 246).

Существенно, что функция последования позволяет не только найти предельные циклы, но и решить вопрос об их устойчивости, так как характер ее поведения вблизи неподвижной точки полностью определяется характером поведения фазовых траекторий в окрестности предельного цикла. С целью определения устойчивости предельного цикла рассмотрим последовательности точек пересечения с отрезком L фазовых траекторий, лежащих в некоторой окрестности предельного цикла, которому соответствует неподвижная точка s^* , — последовательности точек:

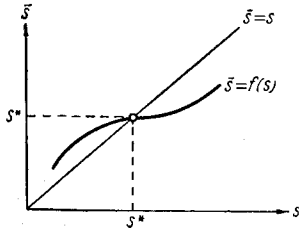


Рис. 246.

$$s, s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, \quad (S)$$

в которых каждая последующая точка, очевидно, определяется по предыдущей функции последования, т. е.

$$s_1 = f(s), \quad s_2 = f(s_1), \dots, \quad s_{n+1} = f(s_n), \dots$$

Если какая-либо из этих фазовых траекторий стремится при $t \rightarrow +\infty$ к предельному циклу, то соответствующая последовательность (S) будет иметь своей предельной точкой неподвижную точку s^* . И наоборот, из сходимости последовательности (S) к неподвижной точке s^* мы можем сделать вывод, что соответствующая ей фазовая траектория стремится к предельному циклу при $t \rightarrow +\infty$.

Если предельный цикл устойчив, то (в силу определения устойчивости) существует такая его окрестность (ϵ) , что все фазовые траектории с начальными точками в этой окрестности асимптотически приближаются к предельному циклу при $t \rightarrow +\infty$. Но это одновременно означает, что на отрезке L существует окрестность (ϵ^*) неподвижной точки s^* — часть отрезка L , лежащая в двумерной области (ϵ) (рис. 247), такая, что каждая последовательность (S) с начальной точкой в окрестности (ϵ^*) сходится к неподвижной точке s^* (т. е. при любых s , принадлежащих (ϵ^*) , $s_n \rightarrow s^*$ при $n \rightarrow +\infty$).

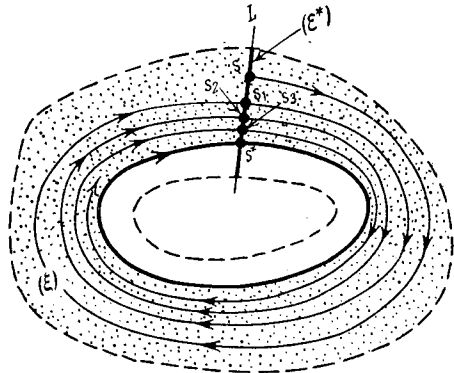


Рис. 247.

Будем называть неподвижную точку точечного преобразования *устойчивой*, если существует такая ее окрестность (ϵ^*) , что все по-

следовательности

$$s, s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots$$

с начальными точками s в (ε^*) сходятся к этой неподвижной точке. Тогда сказанное выше, очевидно, означает, что устойчивому предельному циклу соответствует устойчивая неподвижная точка, причем, как нетрудно видеть, это соответствие является взаимным.

Наоборот, неподвижную точку s^* мы будем называть *неустойчивой*, если в любой сколь угодно малой ее окрестности найдется (хотя бы одна) такая точка s , что последовательность s, s_1, s_2, \dots не сходится к s^* . Она, очевидно, соответствует неустойчивому предельному циклу, так как существование таких последовательностей точек, начинающихся в любой сколь угодно малой окрестности неподвижной точки и не сходящихся к ней, говорит о наличии в сколь угодно малой окрестности предельного цикла фазовых траекторий, уходящих от него при $t \rightarrow +\infty$.

Условие устойчивости неподвижной точки s^* точечного преобразования, выражаемого функцией последования $\bar{s} = f(s)$, а следовательно, и условие устойчивости соответствующего предельного цикла дается *теоремой Кенигса* [168, 169]¹⁾:

неподвижная точка s^ точечного преобразования $\bar{s} = f(s)$ устойчива, если*

$$\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=s^*} < 1, \quad (5.53a)$$

и неустойчива, если

$$\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=s^*} > 1. \quad (5.53b)$$

Для доказательства теоремы Кенигса перенесем прежде всего начало отсчета координат точек отрезка L в неподвижную точку s^* и введем

$$\xi = s - s^*, \quad \bar{\xi} = \bar{s} - s^*$$

(неподвижной точкой будет $\xi = 0$). Тогда последовательности точек $s, s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots$, в которой каждая последующая точка получается из предыдущей применением функции последования, будет соответствовать последовательность положительных чисел:

$$|\xi|, |\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_n|, |\xi_{n+1}|, \dots,$$

где $\xi_n = s_n - s^*$.

Если $\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=s^*} < 1$, то на отрезке L существует такая окрестность неподвижной точки $|\xi| \leq A$ (рис. 248, а), для всех точек

¹⁾ Мы даем общую формулировку теоремы Кенигса, пригодную и для случая, когда $\frac{d\bar{s}}{ds} < 0$, что может иметь место для динамических систем (5.1) с неаналитическими правыми частями или с фазовой поверхностью, отличной от обычной плоскости.

которой, кроме $\xi = 0$,

$$|\bar{\xi}| < \alpha |\xi|, \quad (5.54)$$

где α — некоторое число, положительное, но *меньшее единицы*. Поэтому каждая последовательность положительных чисел

$$|\xi|, |\xi_1|, |\xi_2|, \dots$$

при условии, что $|\xi| \leq A$, является монотонно убывающей и ограниченной снизу и, следовательно, в силу известной теоремы о сходимости таких числовых последовательностей, сходится к некоторому пределу, который, однако, не может быть отличным от нуля¹⁾. Таким

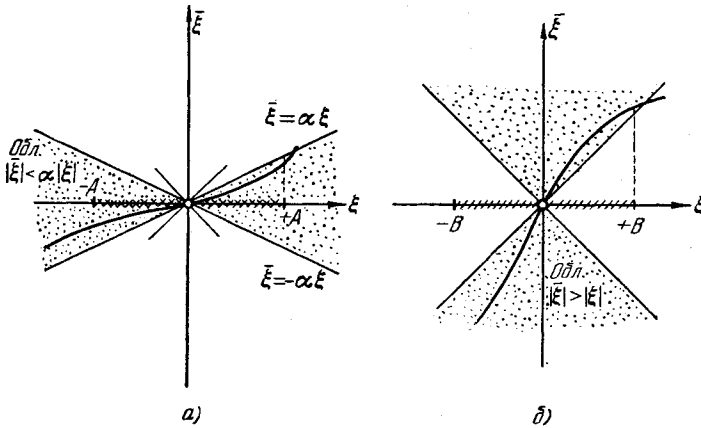


Рис. 248.

образом, при выполнении условия (5.53а) любая последовательность точек s, s_1, s_2, \dots с начальными точками в окрестности: $s^* - A \leq s \leq s^* + A$ сходится к s^* и, следовательно, неподвижная точка s^* устойчива.

Если же выполнено условие (5.53б), то существует такая окрестность $|\xi| \leq B$, для точек которой $|\bar{\xi}| > |\xi|$ (рис. 248, б). Поэтому любая последовательность чисел $|\xi|, |\xi_1|, |\xi_2|, \dots$ (при условии, что $|\xi| \leq B$) заведомо не может сходиться к пределу $\xi = 0$, а последовательности s, s_1, s_2, \dots (с начальными точками $s^* - A \leq s \leq s^* + A$) не могут сходиться к s^* . Следовательно, в этом случае неподвижная

¹⁾ В самом деле, если бы этот предел был отличен от нуля и равнялся a ($a > 0$), то тогда при всех n $|\xi_n| > a > 0$ и в силу условия (5.54)

$$|\xi_n| - |\xi_{n+1}| > \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) |\xi_{n+1}| > \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) a,$$

что противоречит критерию Коши для предела числовой последовательности.

точка будет неустойчивой. Тем самым мы доказали теорему Кенигса¹⁾. Заметим, что эта теорема не решает вопроса об устойчивости неподвижной точки, если $\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=s^*} = 1$ (в этом случае требуется дополнительное исследование, так как устойчивость определяется знаками старших производных функции последования).

3. Условие устойчивости предельного цикла. Найдем теперь, основываясь на теореме Кенигса, условие устойчивости предельного цикла на фазовой плоскости, выраженное через правые части уравнений динамической системы:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (5.1)$$

Пусть C_0 — предельный цикл системы (5.1), параметрическими уравнениями которого являются

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

(φ и ψ — периодические функции с периодом T).

Введем в окрестности этого предельного цикла новую, криволинейную систему координат u, v (рис. 249), полагая

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u) - v\psi'(u), \\ y &= \psi(u) + v\varphi'(u). \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

Прямые $u = \text{const}$ являются нормальными к предельному циклу, а кривые $v = \text{const}$ — замкнутыми кривыми (кривая $v = 0$ совпадает с предельным циклом C_0). Якобиан рассматриваемого преобразования координат

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi'(u) - v\psi''(u) & -\psi'(u) \\ \psi'(u) + v\varphi''(u) & \varphi'(u) \end{vmatrix} = \varphi'^2 + \psi'^2 + v[\psi'\varphi'' - \varphi'\psi''] > 0$$

при всех u и достаточно малых v (в силу того обстоятельства, что ни в одной точке предельного цикла $\varphi'^2 + \psi'^2$ не обращается в нуль, мы можем выбрать такие положительные числа a и A , чтобы при любых u $\varphi'^2 + \psi'^2 > a$ и при $|v| \leq A$ якобиан $D > 0$). Поэтому в кольцевой области, ограниченной замкнутыми кривыми $v = -A$

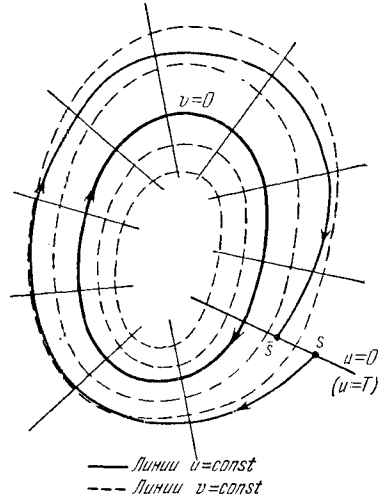


Рис. 249.

¹⁾ Напомним, что для точечных преобразований отрезка L , осуществляемых фазовыми траекториями динамических систем (5.1) с аналитическими правыми частями и плоской фазовой поверхностью, $\frac{d\bar{s}}{ds} = f'(s) > 0$. Поэтому условием устойчивости неподвижной точки для них (или условием устойчивости соответствующего предельного цикла) будет неравенство $f'(s_0) > 1$ и условием неустойчивости — неравенство $f'(s_0) < 1$.

и $v = \pm A$ и содержащей в себе предельный цикл C_0 , не могут пересекаться между собой ни отрезки нормалей $u = \text{const}$, ни замкнутые кривые $v = \text{const}$ и каждой точке плоскости (в этой области) соответствует единственная пара чисел — криволинейных координат (u, v) .

Перейдем в уравнениях (5.1) в кольцевой области $|v| \leq A$ к новым переменным u и v . Мы будем иметь:

$$[\varphi' - v\psi''] \frac{du}{dt} - \psi' \frac{dv}{dt} = P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi'),$$

$$[\psi' + v\varphi''] \frac{du}{dt} + \varphi' \frac{dv}{dt} = Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi').$$

Разрешая относительно $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, получим:

$$\frac{du}{dt} = \frac{P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi')\varphi' + Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi')\psi'}{D},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi')[\psi' + v\varphi''] + Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi')[\varphi' - v\psi'']}{D}$$

или после деления одного из уравнений на другое:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi')[\psi' + v\varphi''] + Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi')[\varphi' - v\psi'']}{P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi')\varphi' + Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi')\psi'}. \quad (5.56)$$

Принимая во внимание тождества

$$P(\varphi, \psi) \equiv \varphi', \quad Q(\varphi, \psi) \equiv \psi', \quad (5.57)$$

нетрудно убедиться в том, что знаменатель правой части уравнения (5.56) не обращается в нуль при $v=0$, а следовательно, и в некоторой окрестности предельного цикла $v=0$ (в том, что предельный цикл $v=0$ является интегральной кривой уравнения (5.56), нетрудно убедиться прямой подстановкой $v=0$ в это уравнение)¹⁾. Кроме того, правая часть этого уравнения, очевидно, есть периодическая функция u с периодом T .

Возьмем в качестве отрезка без контакта L отрезок нормали $u=0$ (очевидно, тот же отрезок будет соответствовать $u=T$ и вообще $u=nT$, где n — целое число) и обозначим через

$$v = \Phi(u, s) \quad (5.58)$$

решение уравнения (5.56), удовлетворяющее начальному условию: $v=s$ при $u=0$, — уравнение фазовой траектории, проходящей через некоторую точку $M(v=s)$ отрезка L . В силу теоремы о непрерывной зависимости решений уравнений (5.1) или уравнения (5.56) от начальных условий, всякая фазовая траектория, пересекающая

¹⁾ В этой окрестности уравнение (5.56) не имеет особых точек и, следовательно, каждая интегральная кривая состоит из одной фазовой траектории.

(при $t = t_0$) отрезок L в достаточно малой окрестности точки пересечения с ним предельного цикла (эту точку мы будем обозначать через M_0), пересечет этот отрезок еще раз при t , близком к $t_0 + T$ (соответствующее $u = T$, так как вблизи предельного цикла $\frac{du}{dt}$ близко к единице). Поэтому координата последующей точки пересечения траектории (5.58) с отрезком L , очевидно, определится соотношением

$$\bar{v} = \bar{s} = \Phi(T, s) = f(s). \quad (5.59)$$

Эта функция последования, существующая в некоторой окрестности точки M_0 , определяет точечное преобразование отрезка L самого в себя (в той же окрестности), причем, конечно, точка M_0 ($v = s = 0$) является неподвижной точкой.

Устойчивость неподвижной точки M_0 (а следовательно, и устойчивость предельного цикла C_0) определяется, очевидно, величиной $f'(0)$. Покажем, как можно найти значение $f'(0)$, зная функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Как мы уже видели, знаменатель правой части уравнения (5.56) не обращается в нуль в некоторой окрестности предельного цикла (при $|v| \leq A$). Поэтому в этой окрестности правая часть уравнения (5.56) является аналитической функцией и может быть представлена в виде ряда по степеням v ; тогда

$$\frac{dv}{du} = A_1(u)v + A_2(u)v^2 + \dots \quad (5.56a)$$

(коэффициенты ряда A_1, A_2, \dots суть периодические функции u с периодом T). Воспользовавшись тождествами $P'_x\varphi' + P'_y\psi' \equiv \varphi''$ и $Q'_x\varphi' + Q'_y\psi' \equiv \psi''$ (они получаются дифференцированием тождеств (5.57)), нетрудно подсчитать, что

$$A_1(u) = P'_x + Q'_y - \frac{d}{du} \ln(\varphi'^2 + \psi'^2).$$

С другой стороны, так как решения уравнений с аналитическими правыми частями являются аналитическими функциями начальных условий (см. Дополнение I), то решение (5.58) есть аналитическая функция s и может быть разложено в ряд по степеням s :

$$v = \Phi(u, s) = a_1(u)s + a_2(u)s^2 + \dots$$

(свободный член равен нулю, поскольку значению $s = 0$ соответствует предельный цикл $v = 0$). Для нахождения функций $a_i(u)$ подставим этот ряд в уравнение (5.56a) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях s . Тогда мы получим:

$$a'_1(u)s + a'_2(u)s^2 + \dots \equiv A_1(u)[a_1(u)s + a_2(u)s^2 + \dots] + \\ + A_2(u)[a_1(u)s + a_2(u)s^2 + \dots]^2 + \dots$$

и

$$a'_1 = A_1(u)a_1, \\ a'_2 = A_1(u)a_2 + A_2(u)a_1^2, \\ \dots \dots \dots$$

Интегрируя эти рекуррентные дифференциальные уравнения при начальных условиях:

$$a_1(0) = +1 \quad \text{и} \quad a_i(0) = 0 \quad (i = 2, 3, \dots)$$

(последние получаются из очевидного тождества: $\Phi(0, s) \equiv s$), можно найти коэффициенты разложения функции $\Phi(u, s)$. В частности

$$\ln a_1(u) = \int_0^u A_1(t) dt = \int_0^u (P'_x + Q'_y) dt - \ln \frac{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2}{[\varphi'(0)]^2 + [\psi'(0)]^2}$$

и, следовательно,

$$f'(0) = a_1(T) = e^{\int_0^T (P'_x + Q'_y) dt}$$

(в силу того, что функции φ и ψ , а значит и их производные, суть периодические функции с периодом T).

Таким образом, рассматриваемый предельный цикл C_0 *устойчив*, если его характеристический показатель

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)] dt < 0,$$

и *неустойчив*, если

$$h > 0$$

(ибо в первом случае $0 < f'(0) < 1$, а во втором $f'(0) > 1$).

§ 8. Индексы Пуанкаре

Прежде чем переходить к рассмотрению задач о движении конкретных динамических систем второго порядка, нам придется изложить некоторые общие теоремы о свойствах фазовых траекторий, а также некоторые способы качественного исследования фазовых портретов динамических систем, которые позволяют получить некоторые, часто весьма неполные сведения о характере фазовых траекторий и, следовательно, о характере движений той или иной динамической системы.

В первую очередь мы изложим общие законы совместного существования состояний равновесия различных типов и замкнутых траекторий, сформулированные Пуанкаре [108]. Для формулировки этих законов необходимо ввести понятие об индексе замкнутой кривой по отношению к векторному полю. Это понятие индекса будет иметь значение и для других целей, в частности для изучения зависимости качественной картины траекторий от параметра.

Рассмотрим фазовую плоскость динамической системы, определяемой уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (5.1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ мы будем предполагать для сокращения рассуждений аналитическими на всей фазовой плоскости.

Возьмем на фазовой плоскости какую-нибудь *простую замкнутую кривую* N , не проходящую через состояния равновесия. Возьмем на этой кривой какую-нибудь точку S и проведем через нее вектор, совпадающий с направлением касательной, проходящей через эту точку фазовой траектории (рис. 250). Если рассматриваемую точку S мы будем двигать вдоль кривой N , вектор касательной к фазовой траектории будет непрерывно вращаться. Когда точка S сделает полный оборот по замкнутой кривой N и вернется на прежнее место, то вектор сделает некоторое целое число оборотов, т. е. повернется на угол $2\pi j$, где j — целое число. Направление вращения вектора мы будем считать положительным, когда оно совпадает с направлением, в котором точка S обходит замкнутую кривую N ;

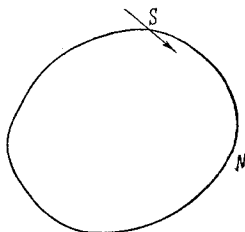


Рис. 250.

для определенности можно, например, условиться, что точка S всегда обходит кривую N , совершая оборот против часовой стрелки. Таким образом, j может быть как положительным, так и отрицательным целым числом или же равным нулю. Целое число j в известном смысле *не зависит от формы замкнутой кривой* N . Действительно, если вид кривой непрерывно изменяется, то и угол, на который поворачивается вектор, может изменяться тоже только непрерывно (если наша замкнутая кривая при изменении не проходит через особые точки); следовательно, он вообще не меняется, так как он может принимать только дискретный ряд значений. Поэтому все другие замкнутые кривые, если они содержат только те же особые точки, что и кривая N , дадут то же число j . Целое число j носит название *индекса замкнутой кривой* N по отношению к рассматриваемому векторному полю. Окружим простой замкнутой кривой N какое-нибудь одно состояние равновесия, какую-нибудь одну особую точку. Как мы видели, если эта замкнутая кривая не содержит других особых точек, то индекс не зависит от формы этой кривой и, следовательно, определяется характером особой точки. Поэтому индекс такой замкнутой кривой можно отнести к самой особой точке и говорить об индексе Пуанкаре рассматриваемой особой точки.

Непосредственным рассмотрением (рис. 251) нетрудно убедиться, что индексы Пуанкаре для центра, узла и фокуса равны $+1$, индекс Пуанкаре для седла равен -1 .

Также непосредственным рассмотрением нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений:

1) индекс замкнутой кривой, не содержащей внутри себя ни одной особой точки, равен нулю (рис. 252);

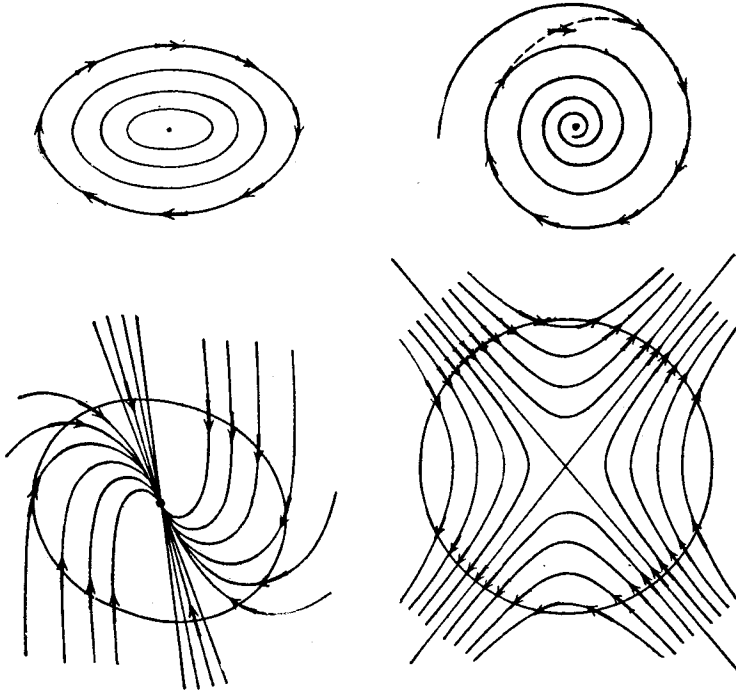


Рис. 251.

2) индекс замкнутой кривой, содержащей внутри себя несколько особых точек, равен сумме индексов этих точек¹⁾;

3) индекс замкнутой кривой, являющейся одновременно замкнутой траекторией системы (5.1), равен $+1$ (см. рис. 251, случай центра), так как тогда направление вектора каждый раз совпадает с направлением касательной к кривой N ;

¹⁾ Рассмотрим замкнутую кривую N , содержащую несколько особых точек. Разобьем область, ограниченную кривой N , при помощи проведения внутренних кривых («перегородок») на меньшие области с таким расчетом, чтобы каждая из получившихся областей содержала по одной особой точке. Тогда угол, на который повернется вектор при обходе кривой N , равен сумме углов, на которые повернутся векторы при обходе отдельных областей, если все эти области обходить в одном и том же направлении; углы поворота, получающиеся при обходе внутренних перегородок, взаимно уничтожаются, так как каждая такая перегородка обходится дважды: один раз в прямом, другой раз в обратном направлении. Отсюда вытекает утверждение 2).

4) индекс замкнутой кривой, вдоль которой векторы, определенные системой (5.1), направлены либо все внутрь, либо все наружу (эта замкнутая кривая представляет собой «цикл без контакта»), равен $+1$ (см. рис. 251, случай узла)¹⁾.

Эти утверждения, полученные путем непосредственного рассмотрения, т. е. в сущности путем рассмотрения отдельных примеров

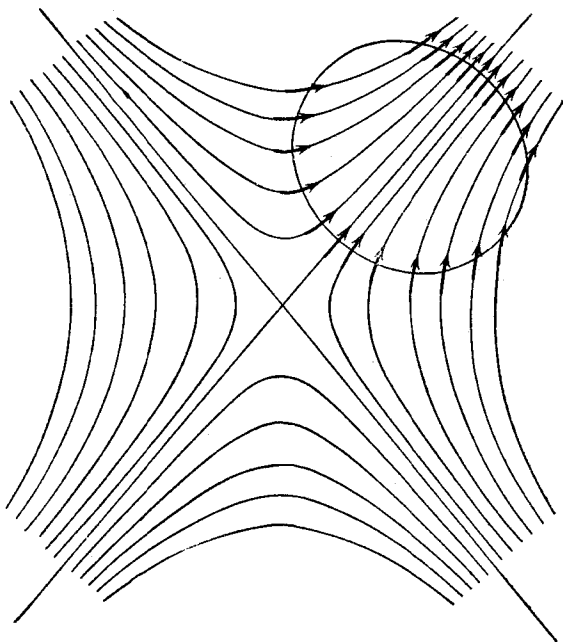


Рис. 252.

и некоторых соображений о непрерывности, опирающихся на геометрическую интуицию²⁾, могут быть строго доказаны, например аналитически. Прежде чем перейти к выводам из этих утверждений, дадим несколько примеров такого аналитического рассмотрения.

Нетрудно видеть, что индекс замкнутой кривой N по отношению к векторному полю, определяемому системой (5.1), может быть выражен криволинейным интегралом:

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint_N d \left\{ \operatorname{arctg} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \right\} = \frac{1}{2\pi} \oint_N \frac{P dQ - Q dP}{Q^2 + P^2}.$$

¹⁾ Следует отметить, что индекс не учитывает направления движения по фазовым траекториям; например, устойчивый узел и неустойчивый узел имеют один и тот же индекс $+1$.

²⁾ За исключением утверждения 2), которое можно считать обоснованным соображениями, данными в сноске.

Это — криволинейный интеграл от полного дифференциала; следовательно, если внутри области, охватываемой кривой N , вдоль которой производится интегрирование, соответствующие подинтегральные функции и их производные непрерывны, то интеграл равен нулю. Отсюда сразу и строго получается наше первое утверждение о том, что индекс замкнутой кривой N , внутри которой нет особых точек, равен нулю¹⁾, так как при наших предположениях о правых частях системы (5.1) непрерывность подинтегральных функций и их производных может нарушаться лишь в тех точках, где одновременно $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$.

Вычислим теперь аналитически индекс Пуанкаре для особой точки, т. е. вычислим индекс простой замкнутой кривой, охватывающей эту особую точку и не содержащей никаких других особых точек. При этом будем предполагать, что для этой точки $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Чтобы не менять обозначений, предположим, что рассматриваемая особая точка представляет собою начало координат, так что

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y),$$

где P_2 и Q_2 — ряды, начинающиеся с членов не ниже второго порядка по x и y .

Докажем сначала, что при вычислении индекса особой точки ($\Delta \neq 0$) мы можем отбросить члены высших порядков, т. е. P_2 и Q_2 . Так как по-предыдущему индекс не зависит от формы кривой, то можно при вычислении индекса взять за кривую N окружность достаточно малого радиуса ρ ($\rho > 0$).

Переходя к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, преобразуем криволинейный интеграл в обычный определенный интеграл:

$$j = I(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos \varphi + b \sin \varphi) d(c \cos \varphi + d \sin \varphi) - (c \cos \varphi + d \sin \varphi) d(a \cos \varphi + b \sin \varphi) + \rho F(\rho, \varphi) d\varphi}{(a \cos \varphi + b \sin \varphi)^2 + (c \cos \varphi + d \sin \varphi)^2 + \rho G(\rho, \varphi)},$$

где $F(\rho, \varphi)$, $G(\rho, \varphi)$ — степенные ряды по ρ (начинающиеся с членов нулевого измерения по ρ), коэффициенты которых — периодические функции φ .

Здесь через $I(\rho)$ мы обозначили определенный интеграл, стоящий в правой части. Ясно, что криволинейный интеграл, с которым связано понятие индекса, имеет смысл лишь для $\rho > 0$. Однако обратим внимание на следующее. Определенный интеграл $I(\rho)$ является непрерывной функцией ρ для достаточно малых ρ (так как $\Delta \neq 0$). Поэтому $\lim_{\rho \rightarrow 0} I(\rho) = I(0)$. С другой стороны, мы знаем, что криволинейный инте-

¹⁾ Обратное утверждение не имеет места, так как могут быть сложные особые точки (для которых $\Delta = 0$) с индексом, равным нулю.

грал не зависит от ρ для достаточно малых ρ . Отсюда следует, что, для достаточно малых ρ , $I(\rho) = I(0)$ и, наконец, что $j = I(0)$:

$$j = I(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos \varphi + b \sin \varphi) d(c \cos \varphi + d \sin \varphi) - (c \cos \varphi + d \sin \varphi) d(a \cos \varphi + b \sin \varphi)}{(a \cos \varphi + b \sin \varphi)^2 + (c \cos \varphi + d \sin \varphi)^2}.$$

Таким образом показано, что при вычислении индекса Пуанкаре для простой особой точки ($c \Delta \neq 0$) можно отбросить нелинейные члены. Чтобы вычислить $I(0)$, удобно применить следующий прием. Перейдем снова к обычным координатам и запишем наше выражение опять в виде криволинейного интеграла:

$$j = I(0) = \oint_N \frac{(ax + by) d(cx + dy) - (cx + dy) d(ax + by)}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2},$$

где N — любая простая замкнутая кривая, охватывающая начало, так как для линейного уравнения, получающегося после отбрасывания нелинейных членов, единственная особая точка — начало координат. Прием заключается в том, что за такую замкнутую кривую выбирают эллипс Γ :

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1;$$

тогда, как показывают несложные выкладки,

$$j = I(0) = \frac{\Delta}{2\pi} \oint_{\Gamma} (x dy - y dx),$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

или в силу известного выражения для площади через криволинейный интеграл

$$j = I(0) = \frac{\Delta}{\pi} S,$$

где S — площадь эллипса. Так как $S = \frac{\pi}{|\Delta|}$ ¹⁾, то

$$j = \frac{\Delta}{|\Delta|}.$$

¹⁾ Возьмем эллипс $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1$. Чтобы вычислить площадь этого эллипса, перейдем от прямоугольных координат x, y к координатам $\xi = ax + by$, $\eta = cx + dy$, которые также будем интерпретировать как прямоугольные координаты.

Тогда эллипс $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1$ деформируется в круг $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Площадь этого круга $S_1 = \pi$.

С другой стороны

$$S_1 = S \left| D \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ x, y \end{pmatrix} \right|,$$

Отсюда сразу следует, что индекс Пуанкаре для узла, фокуса и центра равен $+1$, а для седла равен -1 , т. е. те же самые результаты, которые мы получили из непосредственного рассмотрения. (Индекс Пуанкаре сложной особой точки, поскольку для нее $\Delta = 0$, может быть отличным от ± 1 . Например, для особой точки типа седло — узел $j = 0$; см. рис. 253.) Мы не будем дальше проводить аналитических рассмотрений, с помощью которых можно было бы обосновать остальные наши утверждения; заметим только, что второе утверждение прямо получается из основных свойств криволинейного интеграла.

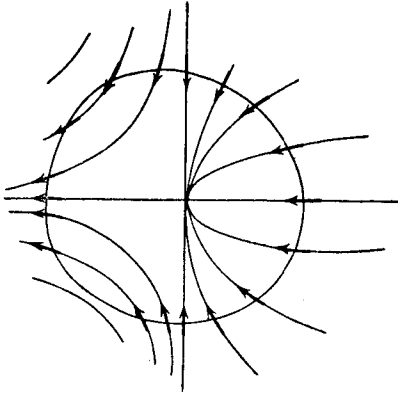


Рис. 253.

Перейдем теперь к следствиям, которые вытекают из теории индексов

в отношении законов совместного существования замкнутых фазовых траекторий и состояний равновесия различной природы.

Следствие 1. Внутри замкнутой фазовой траектории находится по крайней мере одна особая точка, так как индекс такой траектории по-прежнему равен $+1$, а индекс замкнутой кривой, внутри которой нет особых точек, равен нулю.

Следствие 2. Если внутри замкнутой фазовой траектории находится одна особая точка, то это не может быть седло, не может быть также никакая особая точка с индексом, отличным от $+1$.

Следствие 3. Если внутри замкнутой фазовой траектории находятся только простые особые точки (для них $\Delta \neq 0$), то число таких особых точек всегда нечетное, причем число седел на единицу меньше числа остальных особых точек.

Заметим, что те же выводы (на основании утверждения 4)) можно сделать для любой замкнутой кривой, являющейся циклом без прикосновения. Отсюда, в частности, вытекает следующее: если бесконечность абсолютно устойчива или абсолютно неустойчива, то сумма индексов всех особых точек, находящихся на конечном расстоянии, равна $+1$.

где $D \begin{pmatrix} \xi, \eta \\ x, y \end{pmatrix}$ — соответствующий якобиан. Так как

$$D \begin{pmatrix} \xi, \eta \\ x, y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \Delta,$$

то $S_1 = S \cdot |\Delta|$, откуда площадь

$$S = \frac{\pi}{|\Delta|}.$$

§ 9. Системы без замкнутых траекторий

Трудности, которые возникают при исследовании конкретных динамических систем, очень велики, и поэтому часто ввиду отсутствия регулярных и достаточно эффективных методов приходится обращаться к различным способам численного интегрирования. Однако есть случаи, когда на основании общей теории исследование сравнительно просто может быть доведено до конца. Один из таких случаев (практически, пожалуй, наиболее важный) — это тот, когда удастся каким-либо способом показать, что на фазовой плоскости рассматриваемой системы нет замкнутых фазовых траекторий.

Можно указать ряд критериев для отсутствия замкнутых фазовых траекторий, каждый из которых дает некоторые достаточные условия. Хотя эти критерии отнюдь не дают какого-либо регулярного способа доказательства отсутствия замкнутых траекторий у системы, заданной уравнениями типа (5.1), тем не менее, как это будет видно из приведенных физических примеров, они представляют определенный практический интерес.

Предположим, что рассматриваемая система отображается уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (5.1)$$

где мы опять будем предполагать $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ аналитическими на всей фазовой плоскости.

Первый критерий, который мы рассмотрим, — это так называемый *критерий Бендиксона*, являющийся достаточным условием отсутствия замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий [137].

Критерий Бендиксона: *если в некоторой односвязной области на фазовой плоскости выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий динамической системы (5.1)¹⁾.*

Для доказательства воспользуемся теоремой Грина, согласно которой

$$\iint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint (P dy - Q dx).$$

Если интеграл по контуру берется по кривой, целиком состоящей из траекторий, то в силу уравнений (5.1) он равен нулю, а следовательно, и двукратный интеграл также равен нулю. Но в таком

¹⁾ Заметим, что сформулированный критерий остается в силе и в тех случаях, когда $P'_x + Q'_y$ обращается в нуль в отдельных точках или на некоторых кривых в этой области.

случае выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ должно обязательно менять знак где-нибудь внутри взятого контура; таким образом наше утверждение доказано.

Известным обобщением критерия Бендиксона является *критерий Дюлака* [148, 108]: *если существует такая непрерывная с непрерывными производными функция $V(x, y)$, что в некоторой односвязной области на фазовой плоскости выражение $\frac{\partial}{\partial x}(VP) + \frac{\partial}{\partial y}(VQ)$ знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий системы (5.1)*¹⁾. Доказательство критерия полностью аналогично доказательству критерия Бендиксона, и поэтому приводить его мы не будем.

Перейдем теперь к критериям, связанным с гораздо более слабым требованием — с требованием отсутствия замкнутых фазовых траекторий, т. е., иначе говоря, к критериям отсутствия периодических решений системы (5.1).

Можно было бы дать на основании изложенной в § 8 теории индексов ряд критериев; мы приведем только некоторые из них, практически наиболее существенные. Впоследствии мы познакомимся еще с некоторыми критериями, основанными на свойствах так называемой «кривой контактов».

1. Если в системе не существует особых точек, то у нее не может быть и замкнутых фазовых траекторий.

2. Если в системе существует только одна особая точка, причем индекс ее не равен $+1$ (например, седло), то в этой системе не может быть замкнутых фазовых траекторий.

3. Если система обладает несколькими особыми точками, сумма индексов любой комбинации которых не равна $+1$, то такая система не допускает замкнутых фазовых траекторий.

4. Если система допускает, например, только простые особые точки, причем через все точки с индексами $+1$ проходят интегральные кривые, уходящие в бесконечность, то такая система не допускает замкнутых фазовых траекторий.

Для иллюстрации сказанного выше мы рассмотрим несколько физических систем, которые отображаются динамическими моделями без замкнутых фазовых траекторий.

1. Симметричное ламповое реле (триггер). В качестве первого примера мы рассмотрим работу симметричного лампового реле или

¹⁾ Здесь также допустимо, чтобы $\frac{\partial}{\partial x}(VP) + \frac{\partial}{\partial y}(VQ)$ обращалось в нуль в отдельных точках или на каких-либо кривых в этой области. Далее, очевидно, что критерий Бендиксона можно рассматривать как частный случай критерия Дюлака.

триггера, схема которого приведена на рис. 254 (емкости C_a и C_g изображают малые, паразитные емкости схемы). Эта схема при определенных условиях имеет два устойчивых состояния равновесия и может быть переброшена из одного состояния равновесия в другое подачей соответствующего импульса напряжения в подходящий узел схемы. Она находит себе довольно широкое применение в ряде радиотехнических устройств (например, в катодных осциллографах в качестве устройства, запускающего так называемую «ждушую» развертку электронного луча по оси времени при приходе на вход осциллографа одиночного импульса напряжения), в счетчиках электрических импульсов, а

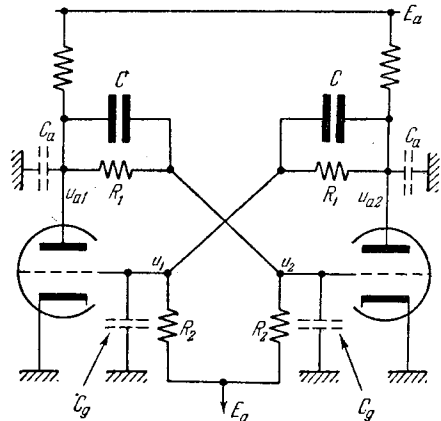


Рис. 254.

также в современных электронных цифровых математических машинах.

Мы рассмотрим упрощенную схему триггера (рис. 255), которая получается из полной схемы (рис. 254) в предположении, что сеточные токи отсутствуют и что

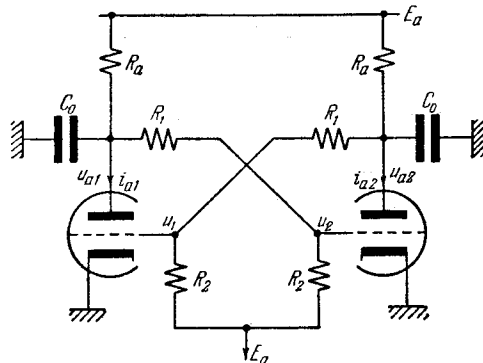


Рис. 255.

$CR_1 = C_g R_2$. Тогда коэффициент передачи β делителей напряжения, передающих колебания анодных напряжений на сетки ламп, получается постоянным и не зависящим от формы колебаний анодных напряжений¹⁾:

$$u_1 - E_g = \beta (u_{a2} - E_g),$$

$$u_2 - E_g = \beta (u_{a1} - E_g), \quad (5.60)$$

где $\beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, а эквивалентные емкости анодных узлов (емкости C_0 на рис. 255) равны $C_0 = C_a + \frac{CC_g}{C + C_g}$. Эта упрощенная схема, как мы увидим, описывается двумя уравнениями первого

1) Строго говоря, уравнения делителей напряжений являются дифференциальными. Например, для делителя, передающего колебания напряжения на аноде левой лампы на сетку правой (рис. 254):

$$i = C \frac{d(u_{a1} - u_2)}{dt} + \frac{u_{a1} - u_2}{R_1} = C_g \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2 - E_g}{R_2},$$

порядка (в то время как полная схема (рис. 254) при $CR_1 \neq C_g R_2$ — системой уравнений четвертого порядка) и позволит нам рассмотреть работу триггера как реле, перебрасываемого из одного состояния равновесия в другое подачей импульса напряжения в *несимметричную* точку схемы например на сетку одной из ламп (часто, чтобы не накладывать дополнительных электрических

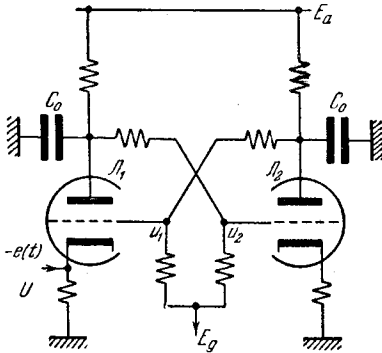


Рис. 256.

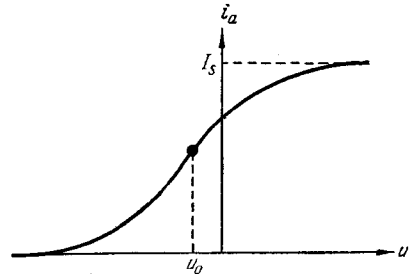


Рис. 257.

связей на управляющую сетку лампы, этот импульс подают на другую сетку лампы (например, на пентодную, если в схеме использованы пентоды) или на небольшое сопротивление, включенное в цепь катода (рис. 256)). Для этой схемы (в обозначениях рис. 255) имеем следующие уравнения:

$$C_0 \frac{du_{a1}}{dt} + i_{a1} + \frac{u_{a1} - E_g}{R_1 + R_2} + \frac{u_{a1} - E_a}{R_a} = 0,$$

$$C_0 \frac{du_{a2}}{dt} + i_{a2} + \frac{u_{a2} - E_g}{R_1 + R_2} + \frac{u_{a2} - E_a}{R_a} = 0.$$

Далее, пренебрегая анодной реакцией, будем считать, что анодный ток каждой из ламп является функцией только напряжения на ее где i — ток через делитель, откуда

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C + C_g) \frac{du_2}{dt} + u_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \frac{du_{a1}}{dt} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} (u_{a1} - E_g) + E_g.$$

Однако если $CR_1 = C_g R_2$, то это уравнение имеет при *любых* u_{a1} общим решением

$$u_2 = E_g + \frac{R_2}{R_1 + R_2} (u_{a1} - E_g) + A e^{-\frac{t}{CR_1}}$$

и, следовательно, по истечении достаточно большого промежутка времени после включения схемы (при $t \gg CR_1$) будет иметь место второе соотношение (5.60), какие бы переменные u_{a1} ни были. Ток, потребляемый делителем, как нетрудно подсчитать, равен $i = \frac{CC_g}{C + C_g} \frac{du_{a1}}{dt} + \frac{u_{a1} - E_g}{R_1 + R_2}$; поэтому мы можем заменить RC -делитель (при условии, что $CR_1 = C_g R_2$) делителем, состоящим только из сопротивлений R_1 и R_2 , зашунтированных емкостью $\frac{CC_g}{C + C_g}$.

сетке, т. е. что $i_{a1} = f(u_1)$ и $i_{a2} = f(u_2)$. Относительно характеристики лампы $i_a = f(u)$ предположим, что она имеет вид, изображенный на рис. 257, т. е. обладает следующими свойствами:

1) ток является монотонно возрастающей функцией напряжения на сетке, т. е. $f'(u) \geq 0$, причем $0 \leq f(u) \leq I_s$, где I_s — ток насыщения лампы;

2) крутизна характеристики $f'(u)$ имеет единственный максимум и монотонно падает до нуля при удалении от этого максимума в обе стороны.

Вводя в написанные выше уравнения колебаний характеристику ламп, а также используя (5.60), можно привести эти уравнения к виду:

$$\begin{aligned} C_0 R \frac{du_1}{dt} &= -u_1 - \beta R f(u_2) + E, \\ C_0 R \frac{du_2}{dt} &= -u_2 - \beta R f(u_1) + E, \end{aligned} \quad (5.61)$$

где

$$R = \frac{R_a(R_1 + R_2)}{R_a + R_1 + R_2}, \quad E = E_g + \beta \frac{R}{R_a} (E_a - E_g) = \frac{R_2 E_a + (R_1 + R_a) E_g}{R_1 + R_2 + R_a},$$

или к одному уравнению первого порядка:

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_2 + \beta R f(u_1) - E}{u_1 + \beta R f(u_2) - E}. \quad (5.62)$$

Состояния равновесия схемы определяются, очевидно, уравнениями:

$$u_2 + \beta R f(u_1) - E = 0, \quad (5.63a)$$

$$u_1 + \beta R f(u_2) - E = 0. \quad (5.63b)$$

и могут рассматриваться как точки пересечения кривых (5.63a) и (5.63b) на фазовой плоскости (заметим, что первая из них является изоклиной горизонтальных касательных, а вторая — изоклиной вертикальных касательных). Нетрудно видеть, что при любых значениях параметров существует «симметричное» состояние равновесия — состояние равновесия (U, U) , лежащее на биссектрисе $u_1 = u_2$, которая, кстати сказать, является интегральной прямой уравнения (5.62). Действительно, уравнение, определяющее координаты этого состояния равновесия:

$$U + \beta R f'(U) - E = 0,$$

в силу указанных выше свойств функции $f(u)$, всегда имеет одно и только одно решение, соответствующее единственной точке пересечения кривой $y = f(u)$ и прямой $y = \frac{E - u}{\beta R}$. Кроме этого «симметричного» состояния равновесия схема может иметь и другие, не лежащие на интегральной прямой $u_1 = u_2$, но попарно ей симметричные (если точка (a, b) является состоянием равновесия, то состоянием равновесия будет и точка (b, a)); таким образом, общее число состояний

равновесия всегда нечетное. Для отыскания состояний равновесия нужно построить кривые (5.63а) и (5.63б) и найти их точки пересечения. Такое построение дано на рис. 258, а — для случая $\beta Rf'(U) < 1$, когда имеется только одно («симметричное») состояние равновесия, и на рис. 258, б — для случая $\beta Rf'(U) > 1$, когда имеются три состояния равновесия¹⁾.

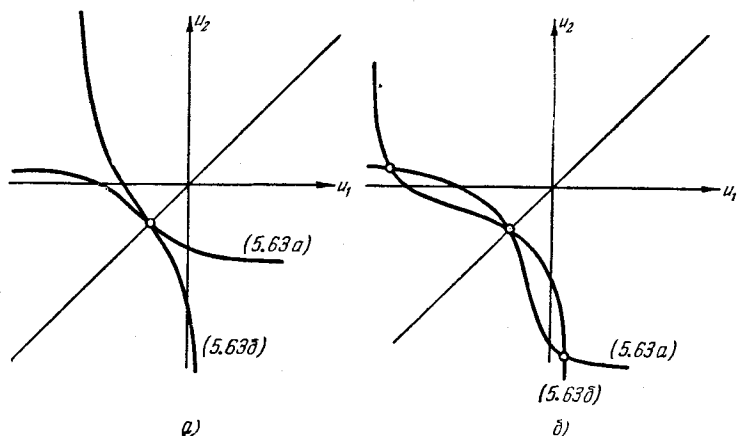


Рис. 258.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости состояний равновесия. Для этого составим уравнение первого приближения для малых отклонений состояния равновесия (u_1^0, u_2^0) . Положим

$$u_1 = u_1^0 + \xi, \quad u_2 = u_2^0 + \eta;$$

тогда, как нетрудно убедиться, уравнения первого приближения имеют вид:

$$C_0 R \frac{d\xi}{dt} = -\xi - \beta R f'(u_2^0) \eta, \quad C_0 R \frac{d\eta}{dt} = -\eta - \beta R f'(u_1^0) \xi,$$

а характеристические показатели λ определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} C_0 R \lambda + 1 & \beta R f'(u_2^0) \\ \beta R f'(u_1^0) & C_0 R \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$C_0 R \lambda_{1,2} = -1 \pm \beta R \sqrt{f'(u_1^0) f'(u_2^0)}.$$

¹⁾ Если $\beta R f'(U)$ близко к единице, а крутизна характеристики ламп $f'(u)$ в «симметричном» состоянии равновесия не максимальна, то рассматриваемая система может, вообще говоря, иметь и более трех состояний равновесия. При $\beta R f'(U) < 1$ их число может быть равно 5, 9, 13, ..., а при $\beta R f'(U) > 1$ — 7, 11, ... в зависимости от вида характеристики $f(u)$ на участке от $u = U$ до точки максимальной крутизны. Ниже мы будем рассматривать только наиболее интересные для практики случаи одного и трех состояний равновесия.

Принимая во внимание, что $-\beta Rf'(u_1^0)$ есть тангенс угла наклона касательной кривой (5.63а) и $-\frac{1}{\beta Rf'(u_2^0)}$ — тангенс угла наклона касательной кривой (5.63б), получаем, что «симметричное» состояние равновесия устойчиво (устойчивый узел) при $\beta Rf'(U) < 1$ и неустойчиво (седло) при $\beta Rf'(U) > 1$. Следовательно, это состояние равновесия устойчиво, если оно единственно, и неустойчиво, если состояний равновесия три; остальные два состояния равновесия в последнем случае всегда устойчивы (они являются устойчивыми узлами).

Далее, если обозначить через $P(u_1, u_2)$ и $Q(u_1, u_2)$ правые части уравнений (5.61), то

$$\frac{\partial P}{\partial u_1} + \frac{\partial Q}{\partial u_2} = -2 < 0$$

на всей фазовой плоскости, и поэтому, согласно критерию Бендиксона, рассматриваемая система не допускает существования замкнутых контуров, составленных из фазовых траекторий, и, тем более, замкнутых фазовых траекторий. Нетрудно также видеть, что из бесконечности все фазовые траектории направлены внутрь; в самом деле, из уравнений (5.61) следует, что выражение

$$\frac{1}{2} C_0 R \frac{d}{dt} (u_1^2 + u_2^2) = -(u_1^2 + u_2^2) - \beta R [u_1 f(u_2) + u_2 f(u_1)] + E(u_1 + u_2)$$

при достаточно больших u_1 или u_2 всегда отрицательно; иначе говоря, окружность $u_1^2 + u_2^2 = A^2$ достаточно большого радиуса A является циклом без контакта, причем все фазовые траектории входят внутрь круга, ограниченного этой окружностью.

Этих сведений достаточно для разбиения фазовой плоскости на фазовые траектории. Это разбиение схематически изображено на рис. 259, а (для $\beta Rf'(U) < 1$) и на рис. 259, б (для $\beta Rf'(U) > 1$).

Рассмотрим теперь процесс переброса триггера из одного состояния равновесия в другое при подаче на одну из ламп импульса напряжения. Пусть $\beta Rf'(U) > 1$ и триггер в начале работы находится в состоянии равновесия, соответствующем узлу U_1 на фазовой плоскости, когда лампа L_1 заперта, а лампа L_2 отперта. Пусть на лампу L_1 подается короткий импульс напряжения, отпирающий ее (например, отрицательный импульс на катодное сопротивление этой лампы; см. рис. 256). Уравнения схемы при наличии добавочного напряжения $e(t)$, подведенного к лампе L_1 , имеют вид:

$$\begin{aligned} C_0 R \frac{du_1}{dt} &= -u_1 - \beta Rf(u_2) + E, \\ C_0 R \frac{du_2}{dt} &= -u_2 - \beta Rf[u_1 + e(t)] + E. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Считая импульс прямоугольным, с плоской вершиной (рис. 260), мы можем во время действия импульса (при $0 < t < \tau$) рассматривать нашу систему как автономную и построить ее фазовый портрет на фазовой плоскости u_1, u_2 (он, конечно, будет отличаться от портрета,

построенного нами ранее для $e=0$). По-прежнему каждое движение приводит систему в одно из устойчивых состояний равновесия

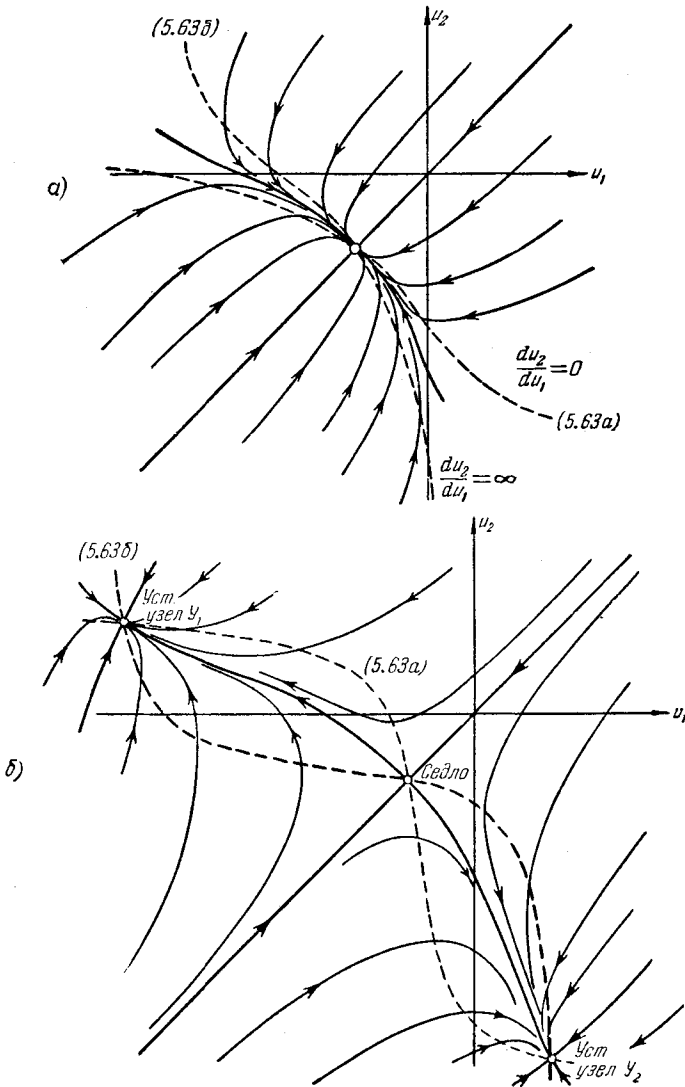


Рис. 259.

(устойчивые состояния равновесия — опять узлы). Состояния равновесия теперь определяются как точки пересечения кривых

$$u_2 + \beta Rf(u_1 + e) - E = 0 \quad \text{и} \quad u_1 + \beta Rf(u_2) - E = 0,$$

первая из которых получается из кривой (5.63а) сдвигом влево на e (мы считаем, что $e > 0$), а вторая совпадает с кривой (5.63б).

Пусть амплитуда импульса e настолько велика, что во время действия импульса триггер имеет одно состояние равновесия U (оно будет устойчивым узлом) слева от биссектрисы (рис. 261). Будем считать крутизны переднего и заднего фронтов импульса настолько большими, что за время их прохода состояние системы не успевает заметно измениться (емкости схемы не успевают заметно изменить заряды). Тогда непосредственно после прохода переднего фронта импульса (при $t = 0$) состояние системы будет изображаться на фазовой плоскости (рис. 261) точкой U_1 , которая до прихода импульса была устойчивым узлом, но во время действия импульса является простой, неособой точкой. По соответствующей фазовой траектории изображающая точка пойдет в соответствии с уравнениями (5.64) к устойчивому узлу U . Если за время действия импульса (т. е. до

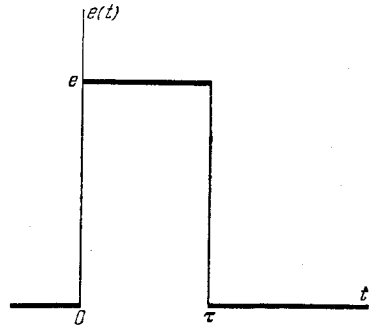


Рис. 260.

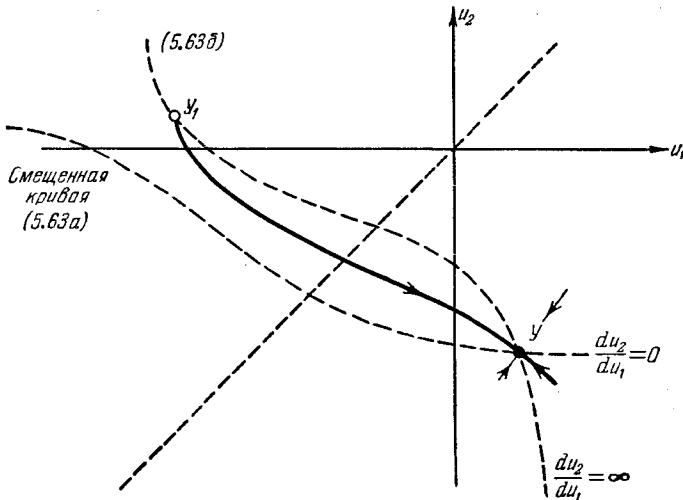


Рис. 261.

$t = \tau$) она перейдет через биссектрису $u_1 = u_2$, то после прекращения импульса (при $t = \tau$) она окажется в области «притяжения» узла U_2 на фазовой плоскости для $e = 0$ (рис. 259, б) и в дальнейшем будет асимптотически к нему приближаться. Таким образом, если импульс

имел достаточно большую амплитуду e и длительность τ , то он перебросит триггер из состояния равновесия U_1 в состояние равновесия U_2 . Заметим, что после повторной подачи такого же импульса триггер, конечно, останется в состоянии равновесия U_2 (для обратного переброса необходим импульс противоположного знака).

Сделаем еще одно замечание, имеющее определенный практический интерес. Как известно, триггер применяется в качестве счетной

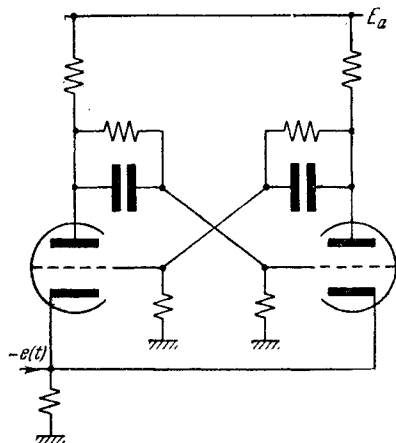


Рис. 262.

ячейки для счета электрических импульсов (по модулю, равному двум). С этой целью импульсы подают в *симметричную* точку схемы (например, на общее катодное сопротивление; см. рис. 262), и тогда *каждый* импульс перебрасывает триггер из одного состояния равновесия в другое (тем самым по состоянию триггера можно определить, какое число импульсов, четное или нечетное, было подано на вход триггера). Нетрудно видеть, что рассмотренная нами упрощенная схема триггера не будет перебрасываться из одного состояния равновесия в другое при подаче импульса в

симметричную точку схемы. В самом деле, уравнения колебаний упрощенной схемы при симметричной подаче импульса прямоугольной формы и амплитуды e запишутся в виде:

$$C_0 R \frac{du_1}{dt} = -u_1 - \beta R f(u_2 + e) + E,$$

$$C_0 R \frac{du_2}{dt} = -u_2 - \beta R f(u_1 + e) + E$$

или в виде одного уравнения:

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{-u_1 - \beta R f(u_2 + e) + E}{-u_2 - \beta R f(u_1 + e) + E},$$

которое, очевидно, имеет интегральной кривой прямую $u_1 = u_2$. Поэтому во время действия импульса изображающая точка не может перейти через биссектрису $u_1 = u_2$ и, следовательно, попасть в область притяжения другого узла. Оставшись в области притяжения исходного состояния равновесия, она после прекращения импульса вернется в это состояние равновесия и, таким образом, переброс триггера из одного состояния равновесия в другое не состоится. Это отражает реальные свойства триггера: для того чтобы триггер мог работать в качестве счетной ячейки, он должен иметь достаточно большие емкости C (рис. 254).

2. Работа динамомашины на общую нагрузку. Рассмотрим две одинаковые динамомашины постоянного тока последовательного возбуждения, которые включены параллельно и работают на общую нагрузку (рис. 263). Полагая скорости вращения якорей машин постоянными и одинаковыми и пренебрегая гистерезисными явлениями

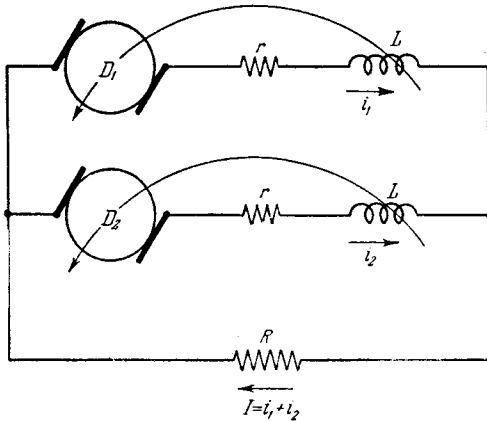


Рис. 263.

в магнитных цепях машин, мы можем записать э. д. с. E каждой из машин в виде некоторой

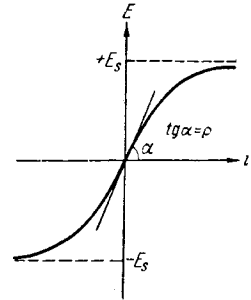


Рис. 264.

однозначной функции тока i в ее обмотке возбуждения: $E = \psi(i)$. Положим, что характеристика каждой машины имеет вид, приведенный на рис. 264, т. е. что:

1) $E = \psi(i)$ является непрерывно дифференцируемой *нечетной* функцией ($\psi(-i) \equiv -\psi(i)$ и $\psi(0) = 0$), причем при $i \rightarrow +\infty$ $\psi(i) \rightarrow E_s$ (соответственно $\psi(i) \rightarrow -E_s$ при $i \rightarrow -\infty$);

2) производная $\psi'(i) \geq 0$ и *не возрастает* при увеличении $|i|$, т. е. при любых $|i''| > |i'| > 0$ $\psi'(i'') \leq \psi'(i') \leq \rho$, где $\rho = \psi'(0) > 0$.

Уравнения рассматриваемой системы (в обозначениях рис. 263) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di_1}{dt} &= \psi(i_1) - (r + R) i_1 - R i_2, \\ L \frac{di_2}{dt} &= \psi(i_2) - (r + R) i_2 - R i_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

Деля одно уравнение на другое, получим уравнение интегральных кривых:

$$\frac{di_2}{di_1} = \frac{\psi(i_2) - (r + R) i_2 - R i_1}{\psi(i_1) - (r + R) i_1 - R i_2}. \quad (5.66)$$

Состояния равновесия определяются уравнениями

$$\psi(i_1) - (r + R) i_1 - R i_2 = 0, \quad (5.67a)$$

$$\psi(i_2) - (r + R) i_2 - R i_1 = 0, \quad (5.67b)$$

а их характер — корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

коэффициенты которого для состояния равновесия (I_1, I_2) , как легко подсчитать, равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{L} [2(r+R) - \psi'(I_1) - \psi'(I_2)], \\ \Delta &= \frac{1}{L^2} \{[\psi'(I_1) - (r+R)][\psi'(I_2) - (r+R)] - R^2\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

Заметим, что дискриминант характеристического уравнения

$$\frac{\sigma^2}{4} - \Delta = \frac{[\psi'(I_1) - \psi'(I_2)]^2}{4L^2} + \frac{R^2}{L^2} > 0,$$

т. е. состояния равновесия рассматриваемой системы могут быть только узлами или седлами.

Прежде всего при любых параметрах системы ее состоянием равновесия является начало координат фазовой плоскости $i_1 = i_2 = 0$, соответствующее невозбужденным режимам обеих машин. Для него $\sigma L = 2(r+R-\rho)$ и $\Delta L^2 = (\rho-r)[\rho - (r+2R)]$. Поэтому это состояние равновесия — устойчивый узел ($\sigma > 0, \Delta > 0$) при $r > \rho$, седло ($\Delta < 0$) при $r < \rho < r+2R$ и неустойчивый узел ($\sigma < 0, \Delta > 0$) при $r+2R < \rho$.

Для отыскания состояний равновесия, лежащих на биссектрисе $i_2 = i_1$ (мы будем называть их ради краткости *A*-точками), положим

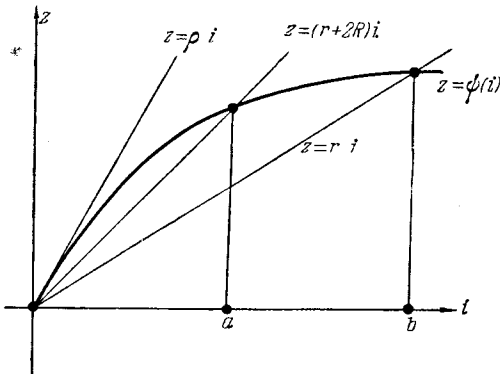


Рис. 265.

в уравнениях (5.67а) и (5.67б) $i_1 = i_2 = a$; тогда для координат этих точек получим:

$$\psi(a) - (r+2R)a = 0. \quad (5.69)$$

Это — как раз нужные состояния равновесия, так как в режимах, им соответствующих, обе машины работают правильно, отдавая наибольшую мощность на сопротивлении R . Как видно из графического решения уравнения

(5.68), приведенного на рис. 265, такие состояния равновесия существуют только при $r+2R < \rho$ и притом только два: $A(a, a)$ и $A_1(-a, -a)$, где $a > 0$. Для *A*-точек: $\sigma L = 2[r+R - \psi'(a)]$ и $\Delta L^2 = [\psi'(a) - r][\psi'(a) - (r+2R)]$. Так как $\psi'(a) < r+2R$, то эти полезные состояния равновесия устойчивы (устой-

чивые узлы) лишь при $r > \psi'(a)$ и неустойчивы (седла) при $r < \psi'(a)$.

Если $r < \rho$, то на другой биссектрисе $i_2 = -i_1$ существуют два состояния равновесия: $B(b, -b)$ и $B_1(-b, b)$. Эти «вредные» состояния равновесия (динамомашин работают одна на другую и ток через сопротивление $R I = i_1 + i_2 = 0$) мы будем обозначать как B -точки. Координата b ($b > 0$), очевидно, определяется уравнением

$$\psi(b) - rb = 0, \quad (5.70)$$

т. е. точкой пересечения кривой $z = \psi(i)$ и прямой $z = ri$ (рис. 265). Для B -точек: $\sigma L = 2[r + R - \psi'(b)] > 0$, $\Delta L^2 = [\psi'(b) - r][\psi'(b) - (r + 2R)] > 0$, так как $\psi'(b) < r$. Следовательно, B -точки, если они существуют, всегда являются устойчивыми узлами.

Посмотрим теперь, какие режимы могут иметь место в рассматриваемой нами системе. Для этого построим «галерею фазовых портретов» системы, считая характеристику машин неизменной и взяв за параметры системы сопротивления r и R . Прежде всего, как это следует из уравнений (5.65),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L \frac{d}{dt} (i_1^2 + i_2^2) = \\ = -R(i_1 + i_2)^2 - r(i_1^2 + i_2^2) + i_1 \psi(i_2) + i_2 \psi(i_1) < 0 \end{aligned}$$

в точках окружности $i_1^2 + i_2^2 = \text{const}$ достаточно большого радиуса. Поэтому каждая такая окружность является *циклом без контакта*, причем все фазовые траектории идут из бесконечности в область внутри цикла без контакта (т. е. бесконечность абсолютно неустойчива). Отсюда, между прочим, следует, что сумма индексов Пуанкаре для всех состояний равновесия равна $+1$.

Далее, в силу симметрии схемы и нечетности функции $\psi(i)$ обе биссектрисы $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$ являются интегральными прямыми уравнения (5.66), а весь фазовый портрет симметричен относительно этих прямых; в частности, симметрично друг другу относительно них расположены и состояния равновесия¹⁾. Поэтому в дальнейшем мы можем ограничиться исследованием вида фазовых траекторий в одном квадранте фазовой плоскости, заключенном между этими интегральными прямыми (мы будем рассматривать их вид в квадранте K_1 , содержащем положительную полуось Oi_1).

Состояния равновесия, как мы уже указывали, являются точками пересечения кривых (5.67а) и (5.67б)²⁾, уравнения которых могут

¹⁾ Следствием симметрии фазового портрета относительно прямых $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$ является также одно, общее для всех рассмотренных выше состояний равновесия свойство: все интегральные кривые уравнения (5.66) проходят через них по направлениям с угловыми коэффициентами $\alpha_{1,2} = \pm 1$.

²⁾ Заметим, что эти кривые являются изоклинами на фазовой плоскости: первая — изоклиной вертикальных, а вторая — изоклиной горизонтальных наклонных.

быть записаны в явной форме:

$$i_2 = \varphi(i_1), \quad (5.67a)$$

$$i_1 = \varphi(i_2), \quad (5.67б)$$

где

$$\varphi(i) = \frac{\psi(i) - (r + R)i}{R}. \quad (5.71)$$

Эти кривые, конечно, симметричны друг другу относительно интегральных прямых $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$. Поэтому для отыскания состояний равновесия, лежащих в квадранте K_1 (включая его границы), нам достаточно построить кривую (5.67a) для $i_1 \geq 0$ и по ней как зеркальное отражение от прямых $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$ — кривую (5.67б) (последнюю нужно строить только в пределах квадранта K_1). Такие построения кривых (5.67a) и (5.67б) для различных значений параметров r и R даны на рис. 266 (там сплошной линией изображена кривая (5.67a) при $i_1 \geq 0$ и пунктирной — ее зеркальные отражения от прямых $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$ — кривая (5.67б) в пределах квадранта K_1).

I. $r > \rho$. В этом случае (рис. 266, I) $\varphi'(0) = \frac{\rho - (r + R)}{R} < -1$ и кривая (5.67a) при $i_1 > 0$ целиком лежит в квадранте K_2 , а ее зеркальное отражение от прямой $i_2 = -i_1$ — кривая (5.67б) — в K_1 . Эти кривые нигде, кроме начала координат, не пересекаются, и на фазовой плоскости (рис. 267, I) имеется единственное состояние равновесия — устойчивый узел O . Поскольку других состояний равновесия нет, равно как нет и замкнутых фазовых траекторий¹⁾, то все фазовые траектории асимптотически приближаются к узлу O , — в системе при любых начальных условиях будет устанавливаться режим, в котором обе машины не возбуждены²⁾.

II. $r < \rho < r + 2R$. Теперь $-1 < \varphi'(0) < +1$ и кривая (5.67a) вблизи начала координат лежит в квадранте K_1 и затем при некотором $i_1 = b$ переходит в квадрант K_2 (рис. 266, II). Соответственно, кривая (5.67б) лежит в K_1 только при $i_1 \geq b$, пересекаясь с кривой (5.67a) только в начале координат O и в точке $B(b, -b)$. Поэтому на фазовой плоскости (рис. 267, II) имеются три состояния равновесия: седло O и два устойчивых узла $B(b, -b)$ и $B_1(-b, b)$; при

¹⁾ Если бы на фазовой плоскости имелась замкнутая фазовая траектория, то, согласно теории индексов Пуанкаре, она охватывала бы узел O , что невозможно, так как через него проходят интегральные прямые $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$, уходящие в бесконечность. По той же причине замкнутых фазовых траекторий не существует и при других значениях параметров системы (через каждый узел, как мы увидим, проходит интегральная прямая $i_2 = i_1$ или $i_2 = -i_1$; следовательно, замкнутая фазовая траектория, если бы она существовала, не могла бы охватывать ни одного из них и иметь индекс Пуанкаре, равный $+1$).

²⁾ Все интегральные кривые уравнения (5.66), кроме прямой $i_2 = i_1$, проходят через узел O , касаясь прямой $i_2 = -i_1$. В этом нетрудно убедиться, воспользовавшись приемом, приведенным в примечании на стр. 296.

любых начальных условиях в системе устанавливается один из режимов работы машин, при котором они работают друг на друга (одна — генератором, другая — мотором), а ток во внешней цепи равен нулю.

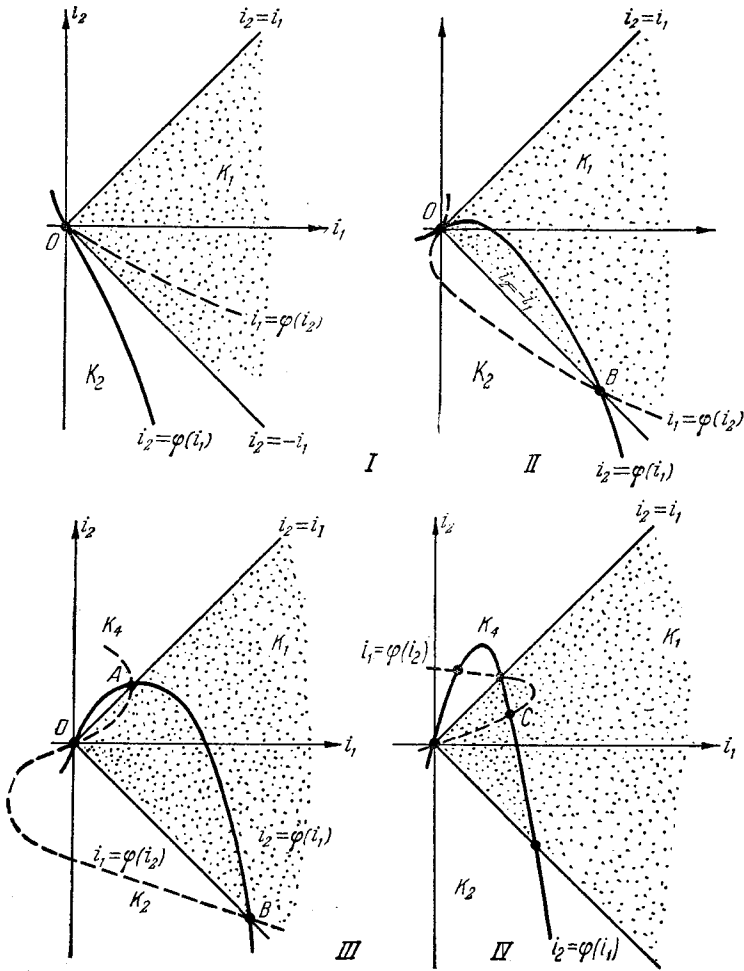


Рис. 266.

III. $r + 2R < \rho$, $r < \psi'(a)$. Так как $r + 2R < \rho$, то $\psi'(0) > +1$ и кривая (5.67а) сначала (при малых i_1) идет в квадранте K_4 , затем при $i_1 = a$ переходит в K_1 и, наконец, при $i_1 = b$ — в K_2 (рис. 266, III). Соответственно кривая (5.67б) лежит в K_1 только при $0 \leq i_2 \leq a$ и при $i_2 \leq -b$. Будем полагать функцию $\psi(i)$ такой, что эти кривые

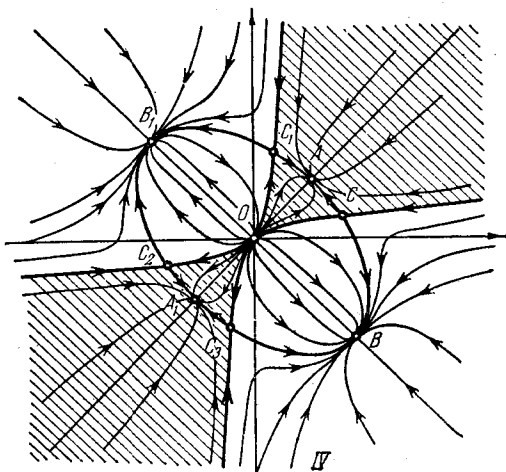
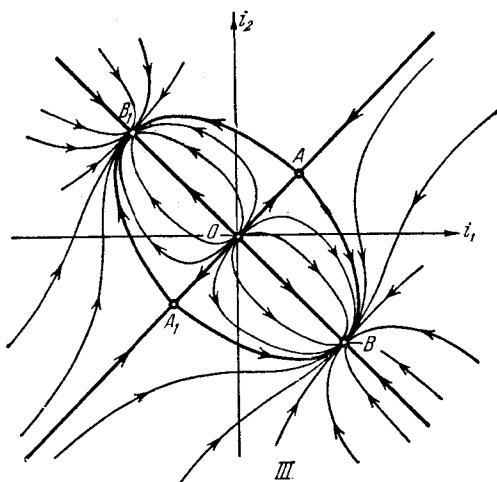
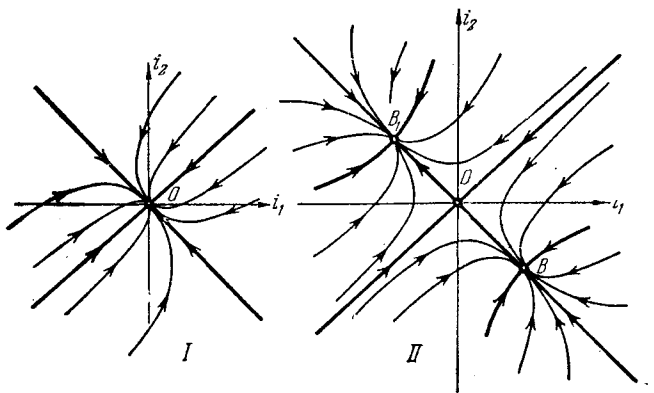


Рис. 267.

не пересекаются внутри квадранта K_1 (именно этот случай и изображен на рис. 266, III), это вполне может быть, поскольку $\varphi'(a) = \frac{\psi'(a) - (r + R)}{R} > -1$. Тогда на фазовой плоскости мы будем иметь пять состояний равновесия: неустойчивый узел O , два седла A и A_1 и два устойчивых узла B и B_1 (рис. 267, III)¹⁾. Режим работы машин с отдачей мощности во внешнюю цепь и невозбужденный режим обеих машин оказались неустойчивыми, и в системе при любых начальных условиях опять установится один из режимов работы машин самих на себя.

IV. $r + 2R < \rho$, $r > \psi'(a)$. В отличие от предыдущего случая здесь $\varphi'(a) < -1$ и кривые (5.67а) и (5.67б) пересекаются *внутри* квадранта K_1 по крайней мере в одной точке. Ниже мы будем рассматривать только тот случай, когда эта точка пересечения *единственна* (точка $C(c', c'')$ на рис. 266, IV)²⁾, а на фазовой плоскости (рис. 267, IV) имеются девять состояний равновесия: неустойчивый узел O , четыре устойчивых узла A, A_1, B, B_1 и четыре S -точки: $C(c', c'')$, $C_1(c'', c')$, $C_2(-c', -c'')$ и $C_3(-c'', -c')$. На основании теории индексов Пуанкаре нетрудно убедиться, что это — седла. В самом деле, сумма индексов Пуанкаре для всех состояний равновесия, как мы уже видели, равна $+1$; известные нам пять состояний равновесия на интегральных прямых $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$ (точки O, A, A_1, B, B_1) суть узлы, и сумма их индексов равна $+5$, следовательно, сумма индексов четырех S -точек должна равняться -4 , т. е. S -точки должны быть седлами. Устойчивым стационарным режимам работы машин соответствуют устойчивые узлы A, A_1, B, B_1 , т. е. устойчивыми будут и режим правильной работы машин с отдачей мощности во внешнюю цепь и режим работы одной машины на другую. Установление того или иного режима зависит от начальных условий; если начальное состояние системы соответствует какой-либо точке области, ограниченной сепаратрисами (усаами седел C) и заштрихованной на рис. 267, IV, то установится режим работы машин с отдачей мощности во внешнюю цепь.

¹⁾ Сделанных выше предположений относительно вида функции $\psi(i)$ недостаточно для доказательства отсутствия точек пересечения кривых (5.67а) и (5.67б) внутри квадранта K_1 . Вообще говоря, при $r < \psi'(a)$ в зависимости от вида функции $\psi(i)$ может быть любое, но обязательно четное число таких точек пересечения, а на фазовой плоскости — 5, 13, 21 и т. д. состояний равновесия, из которых 3, 7, 11, ... будут узлами, а остальные — седлами, так как сумма индексов Пуанкаре для всех состояний равновесия равна $+1$.

Заметим, что теперь на фазовой плоскости имеются замкнутые контуры, составленные из фазовых траекторий (например, контур ABA_1B_1A на рис. 267, III), но по-прежнему нет замкнутых фазовых траекторий.

²⁾ Вообще говоря, при $r > \psi'(a)$ в зависимости от вида функции $\psi(i)$ может быть любое нечетное число точек пересечения кривых (5.67а) и (5.67б) внутри квадранта K_1 , а на фазовой плоскости — 9, 17, 25 и т. д. состояний равновесия.

На рис. 268 приведены бифуркационные кривые, разбивающие плоскость параметров системы r и R (или, точнее, первый квадрант этой плоскости) на области, каждая из которых соответствует определенному типу фазового портрета системы (нумерация областей совпадает с нумерацией частей рис. 267, на которых изображены типы фазовых портретов системы). Бифуркационными кривыми будут: 1) прямая $r = \rho$, которая отделяет режим I от режима II ; 2) прямая $r + 2R = \rho$, отделяющая область II от области III , и 3) кривая $r = \psi'(a)$, где a определяется уравнением (5.69), — граница области IV , в которой правильный режим работы машин (с отдачей мощности во внешнюю цепь) устойчив. Уравнение последней бифуркационной кривой может быть записано в параметрической форме:

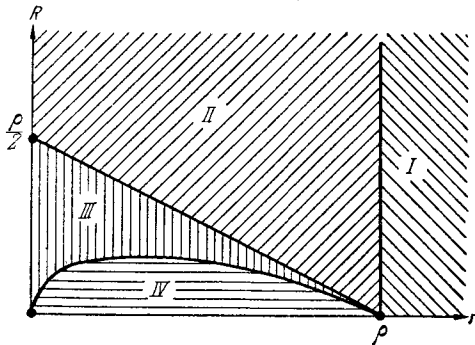


Рис. 268.

где a — параметр, пробегающий значения от 0 до $+\infty$. Нетрудно видеть, что эта кривая проходит через точки $r = \rho$, $R = 0$ (при $a = 0$) и $r = R = 0$ (при $a \rightarrow +\infty$) и лежит под прямой $r + 2R = \rho$.

$$r = \psi'(a), \quad R = \frac{1}{2} \left[\frac{\psi(a)}{a} - \psi'(a) \right],$$

где a — параметр, пробегающий значения от 0 до $+\infty$. Нетрудно видеть, что эта кривая проходит через точки $r = \rho$, $R = 0$ (при $a = 0$) и $r = R = 0$ (при $a \rightarrow +\infty$) и лежит под прямой $r + 2R = \rho$.

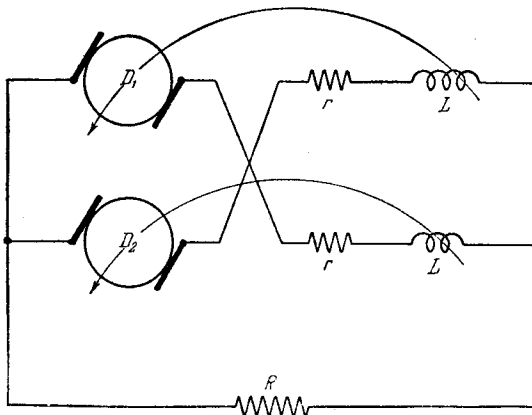


Рис. 269.

Итак, мы видим, что параллельное включение динамомашин последовательного возбуждения на общую нагрузку, выполненное по

схеме, приведенной на рис. 263, нельзя признать правильным, ибо оно допускает устойчивую работу машин самих на себя, а режим работы машин с отдачей мощности во внешнюю цепь устойчив только в ограниченной области параметров (в области IV на рис. 268), в которой существует и устойчив также и режим работы машин самих на себя. Этим недостатком лишена схема перекрестного включения обмоток возбуждения машин, когда обмотка возбуждения одной машины включается последовательно с якорем другой (рис. 269). В этом случае, как легко убедиться (что мы предоставляем читателям), режим работы машин самих на себя как стационарный совсем не существует, а режимы работы машин с отдачей мощности во внешнюю цепь существуют при $r + 2R < \rho$ и устойчивы.

3. Осциллятор с квадратичными членами [20]. Рассмотрим осциллятор, уравнение которого

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -ax + \alpha x^2 - b \frac{dx}{dt} + \beta \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

содержит квадратичные члены в выражениях как для силы пружины, так и для силы трения. Это уравнение можно записать в виде следующих двух уравнений первого порядка¹⁾:

$$\frac{dx}{dt} = y = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2 = Q(x, y). \quad (5.72)$$

Покажем, что такой осциллятор не может быть автоколебательной системой при любых значениях параметров (но $b \neq 0$). Для этой цели воспользуемся критерием Дюлака, взяв за множитель $B(x, y)$ функцию $B(x, y) = be^{-\beta x}$. Поскольку, как легко видеть, $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = -b^2e^{-\beta x} < 0$ при $b \neq 0$, система (5.72) не имеет, согласно критерию Дюлака, не только замкнутых фазовых траекторий, но и замкнутых контуров, составленных из различных фазовых траекторий, и, следовательно, не может быть автоколебательной.

4. Еще один пример неавтоколебательной системы [26]. Докажем, что система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x(ax + by + c) = P(x, y), \\ \dot{y} &= y(a'x + b'y + c') = Q(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (5.73)$$

встречающаяся в ряде вопросов нелинейной теории колебаний²⁾, также не имеет предельных циклов. Эта система имеет интегральными прямыми оси координат $x = 0$ и $y = 0$ и на них три состояния равновесия: $(0, 0)$, $(0, -\frac{c'}{b'})$ и $(-\frac{c}{a}, 0)$. Кроме того, если

¹⁾ Не нарушая общности, можно полагать массу $m = 1$.

²⁾ В частности, к этой системе приводит рассмотрение ряда задач об автоколебательных системах с двумя степенями свободы при помощи метода Ван-дер-Поля [112, 176, 177].

$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, имеется еще одно состояние равновесия (x_0, y_0) , не лежащее на осях координат и определяемое системой уравнений:

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

Поэтому, если бы система (5.73) имела замкнутую фазовую траекторию, то последняя должна была бы лежать в пределах одного квадранта, содержащего точку (x_0, y_0) , не пересекая ни одной из указанных интегральных прямых, и охватывать состояние равновесия (x_0, y_0) ¹). Но это невозможно, в чем нетрудно убедиться, применив критерий Дюлака. Возьмем в качестве множителя B функцию $B(x, y) = x^{k-1}y^{h-1}$, где k и h — некоторые (пока неопределенные) постоянные. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = x^{k-1}y^{h-1} \{ (a + ka + ha')x + \\ + (kb + hb' + b')y + kc + hc' \}. \end{aligned}$$

Взяв в качестве постоянных k и h решение системы уравнений

$$ka + ha' + a = 0, \quad kb + hb' + b' = 0,$$

т. е.

$$k = \frac{b'(a' - a)}{\delta} \quad \text{и} \quad h = \frac{a(b - b')}{\delta},$$

получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = B(x, y) \frac{b'c(a' - a) + ac'(b - b')}{\delta} \neq 0$$

в пределах каждого квадранта фазовой плоскости, если только

$$\sigma = b'c(a' - a) + ac'(b - b') \neq 0.$$

Следовательно, согласно критерию Дюлака система (5.73) при $\sigma \neq 0$ не имеет замкнутых фазовых траекторий и, в частности, предельных циклов²).

¹) Ясно, что при $\delta = 0$, когда состояния равновесия (x_0, y_0) не существует, нет и замкнутых фазовых траекторий.

²) Если же $\sigma = 0$, то система уравнений (5.73) является консервативной, имея своим интегралом выражение

$$x^k y^h (ac'x + b'cy + cc') = \text{const};$$

вся область, заключенная между осями координат и прямой $ac'x + b'cy + cc' = 0$ (они являются интегральными прямыми), целиком заполнена замкнутыми фазовыми траекториями, охватывающими состояние равновесия (x_0, y_0) , которое в этом случае является центром.

§ 10. Исследование поведения фазовых траекторий в удаленных частях плоскости

При исследовании качественной картины фазовых траекторий в конкретных задачах весьма большую роль играет исследование поведения фазовых траекторий в достаточно удаленных частях фазовой плоскости¹⁾. Иногда этот вопрос решается весьма просто. Умножим первое уравнение системы (5.1) на x , второе на y и сложим. Мы получим тогда:

$$\frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} = P(x, y)x + Q(x, y)y = R(x, y).$$

Легко видеть, что если, начиная с некоторых значений x и y , $R(x, y)$ принимает определенный знак и сохраняет его, какие бы мы значения (достаточно большие по абсолютной величине) ни давали x и y , то ответ дается сразу. Именно, мы можем сразу сказать, что все достаточно большие круги с центром в начале координат служат циклами без прикосновения и что знак $R(x, y)$ (для достаточно больших x, y) определяет, будет ли бесконечность устойчива или неустойчива. Однако, вообще говоря, такой элементарный прием не дает ответа [$R(x, y)$ не сохраняет определенного знака], и вопрос требует специального исследования.

Таким образом возникает задача исследования хода фазовых траекторий в бесконечно удаленных частях плоскости. Кажется, что можно просто решить задачу, совершив замену переменных, которая перевела бы бесконечно удаленную часть плоскости в конечную.

Этого, например, можно достичь с помощью преобразования Бендиксона:

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}; \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}; \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (5.74)$$

которое переводит бесконечно удаленные точки плоскости x, y в начало координат плоскости u, v . Геометрически это преобразование есть так называемое преобразование обратными радиусами (рис. 270).

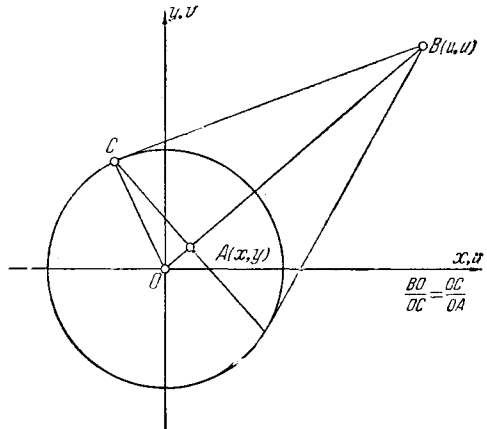


Рис. 270.

¹⁾ Заметим, что здесь мы не коснемся ряда вопросов, представляющих интерес для общей теории, например вопроса о совместном существовании особых точек различных типов на сфере Пуанкаре, вопроса об изображении траекторий на проективной плоскости и т. д.

Соблюсти верное направление по траекториям при этом нетрудно — достаточно провести преобразование не для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

а для системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Однако, несмотря на кажущуюся простоту, преобразование Бендиксона приводит обычно к сложной особой точке высокого порядка в начале координат плоскости u, v , так как каждая интегральная кривая плоскости x, y , уходящая в бесконечность (или выходящая из нее), преобразуется в интегральную кривую, входящую (выходящую) в начало координат плоскости u, v . Так как исследование сложных особых точек высокого порядка обычно бывает весьма сложно, то способ Бендиксона применим лишь в очень редких случаях¹⁾.

Поэтому вместо преобразования Бендиксона значительно удобнее пользоваться более сложным по идее, но приводящим к более

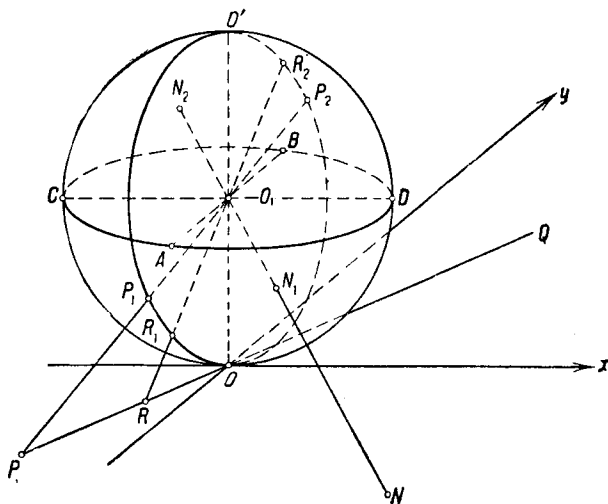


Рис. 271.

простым выкладкам преобразованием Пуанкаре [181]. Геометрическая основа преобразования Пуанкаре заключается в отображении плоскости x, y на сферу радиуса 1, касающуюся плоскости x, y в начале координат (рис. 271). При этом точке N плоскости x, y будем

¹⁾ Заметим, что, вообще говоря, и преобразование Бендиксона и приводящее к более простым выкладкам преобразование Пуанкаре целесообразно использовать лишь в тех случаях, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены по x, y .

ставить в соответствие только одну точку сферы N_1 , лежащую на полупрямой O_1N , проходящей через центр сферы, т. е. лежащую на нижнем (южном) полушарии. На экватор (большой круг, параллельный плоскости x, y) отображаются бесконечно удаленные точки плоскости. По определению преобразования ясно, что прямые линии плоскости x, y перейдут в большие круги сферы, причем прямые, проходящие через начало координат, перейдут в большие круги, перпендикулярные к экватору. Например, прямая PR отображается на большой круг сферы, проходящий через точки P_1R_1 . Интегральные кривые плоскости перейдут в соответственные кривые сферы, причем седла, узлы и фокусы сохраняют тот же вид. Однако на сфере появятся новые особые точки, лежащие на экваторе. Например, через точку C (и точку D) будут проходить все те интегральные кривые (точнее, их изображения), для которых $y \rightarrow 0$ при неограниченном удалении от начала, а через точку A (и B) — те, для которых соответственно $y \rightarrow \pm \infty$. Таким образом, *особые точки экватора могут не быть точками пересечения кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$* , но определяются (и определяют собой) поведением интегральных кривых при неограниченном удалении от начала. Отсюда следует удобство этого изображения для определения хода кривых в бесконечности.

Остается выяснить вопрос об аналитическом аппарате, переводящем точки плоскости в точки сферы. Использование координат на сфере (долгот и широт) представляется неудобным, так как формулы перехода недостаточно просты и выражаются не алгебраически (благодаря чему можно излишне усложнить простое уравнение).

Поэтому Пуанкаре употребляет такие формулы преобразования:

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{\tau}{z}. \quad (5.75)$$

Очевидно, что $\tau = \frac{y}{x}$ есть тангенс направления на исследуемую точку. Координатные линии $z = \text{const}$ и $\tau = \text{const}$ на плоскости прямые, параллельные оси y , и прямые, проходящие через начало координат. На сфере же они являются большими кругами, проходящими через диаметр AB ($z = \text{const}$) или OO' ($\tau = \text{const}$). Очевидно, что эти круги не будут взаимно перпендикулярны. Только в окрестности экватора ($z = 0$), за исключением малых кусков вблизи точек A и B , можно считать, что они перпендикулярны. Можно построить плоскость, на которой z и τ будут служить прямоугольными декартовыми координатами: это будет касательная плоскость к сфере, проходящая через исследуемую точку на экваторе. Ось τ будет прямой, лежащей в плоскости экватора и направленной в сторону положительной оси y . Ось z пойдет вертикально вниз. Точки этой плоскости τ, z получим, проектируя точки сферы из ее центра O_1 . Очевидно, что на этой плоскости τ, z будет удобно изучать все

бесконечные точки плоскости x, y , кроме «концов» оси y , изображаемых на сфере точками A и B , и их окрестностей. Для рассмотрения этих точек придется сделать другое преобразование:

$$y = \frac{1}{z}, \quad x = \frac{\tau}{z}. \quad (5.76)$$

Все чертежи будут аналогичны, и ясно, что совокупность обоих преобразований даст поведение интегральных кривых вблизи экватора. Окончательно мы можем получить ясное представление о ходе интегральных кривых, рассматривая из точки O_1 нижнее (южное) полушарие сферы. Проектируя затем нижнее полушарие при помощи ортогональной проекции на касательную плоскость к нижнему (южному) полюсу, можем весь ход интегральных кривых очень удобно отобразить на внутренности круга. Преобразуем теперь исходное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

к координатам Пуанкаре $x = \frac{1}{z}$ и $y = \frac{\tau}{z}$. Имеем:

$$dx = -\frac{dz}{z^2}, \quad dy = \frac{z d\tau - \tau dz}{z^2}$$

и

$$\frac{dz}{dt} = -P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)z^2, \quad \frac{d\tau}{dt} = -P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)\tau z + Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)z \quad (5.77)$$

или, наконец, деля одно на другое, исключаем время:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{-z}{\frac{Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)} - \tau}. \quad (5.78)$$

Чтобы исследовать бесконечно удаленные точки, лежащие у «концов» оси y , нужно, как мы уже говорили, воспользоваться преобразованием (5.76). В этом случае уравнения (5.77) и (5.78) принимают соответственно вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)z^2, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)\tau z + P\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{-z}{\frac{P\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)}{Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)} - \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (5.79)$$

Из (5.78) видно, что если не имеет места тождество $Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right) \equiv \tau P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)$, то экватор, определенный уравнением $z=0$, есть интегральная кривая. В случае, если $Q = \tau P$, решение будет $\tau = \text{const}$, и, следовательно, все интегральные кривые пересекают под прямым углом экватор. Особые точки, лежащие на экваторе, определяются соотношениями $z=0, \frac{Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)} = \tau$. Особые точки, лежащие у «кон-

цов» оси y , должны быть исследованы по уравнениям (5.79). Такая особая точка ($z=0, \tau=0$) существует, если одновременно выполнены условия:

$$z=0, \quad \frac{P\left(0, \frac{1}{z}\right)}{Q\left(0, \frac{1}{z}\right)} = 0. \quad (5.80)$$

Исследование характера и устойчивости найденных таким образом бесконечно удаленных особых точек производится обычным методом.

Для примера рассмотрим случай простого линейного осциллятора с трением, дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$\frac{dy}{dt} = -hy - \omega_0^2 x = Q(x, y); \quad \frac{dx}{dt} = y = P(x, y).$$

После преобразования Пуанкаре (5.75) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = \tau z, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\tau^2 - h\tau - \omega_0^2, \quad (5.81)$$

и бесконечно удаленные особые точки определяются соотношениями:

$$z=0, \quad \tau^2 + h\tau + \omega_0^2 = 0,$$

откуда

$$\tau = -\frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega_0^2}. \quad (5.82)$$

Легко убедиться, что особых точек, лежащих на «концах» оси y , не существует. Действительно:

$$\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{h}{z}} = -\frac{1}{h} \neq 0.$$

Так как экватор есть интегральная кривая, то возможны два случая: либо экватор есть предельный цикл ($\frac{h^2}{4} < \omega_0^2$ и бесконечно

удаленных особых точек нет), который, очевидно, будет устойчив, если $h < 0$, и неустойчив, если $h > 0$; либо, наконец, на экваторе существуют четыре особые точки, попарно диаметрально противоположно расположенные, угловые коэффициенты направления которых даются выражениями:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega_0^2} < 0; \\ \tau_2 &= -\frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega_0^2} < 0.\end{aligned}$$

Этот случай будет иметь место, если

$$\frac{h^2}{4} > \omega_0^2.$$

Для определения устойчивости особых точек положим

$$z = \xi, \quad \tau = \tau_i + \eta.$$

Подставляя эти значения в уравнения (5.81), имеем:

$$\frac{d\xi}{dt} = -(\tau_i + \eta)\xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = -(\tau_i + \eta)^2 - h(\tau_i + \eta) - \omega_0^2,$$

или, наконец, пренебрегая членами высших порядков:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\tau_i \xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = -2\tau_i \eta - h\eta. \quad (5.83)$$

Характеристические показатели λ определяются из уравнения:

$$\begin{vmatrix} -\tau_i - \lambda & 0 \\ 0 & -2\tau_i - h - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = -\tau_i, \quad \lambda_2 = -2\tau_i - h.$$

Итак, λ_1 всегда положительно, т. е. особые точки в бесконечности все неустойчивы. Так как λ_2 для τ_1 равно $-2\sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega_0^2}$, то точка τ_1 есть седло; так как λ_2 для τ_2 равно $+2\sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega_0^2}$, то τ_2 есть неустойчивый узел. На рис. 272 изображено поведение интегральных кривых в бесконечности для случая $\frac{h^2}{4} < \omega_0^2$. На рис. 273 изображена та же ортогональная проекция сферы на плоскость, касающуюся сферы в нижней точке, для случая $\frac{h^2}{4} > \omega_0^2$.

Исследование бесконечности иногда позволяет однозначно ответить на вопрос о существовании в рассматриваемой системе предельного цикла. Действительно, пусть мы знаем, что бесконечность абсолютно неустойчива. Тогда, если единственная особая точка на конечном расстоянии — неустойчивый узел или фокус, то, поскольку фазовые траектории не могут пересекаться, непременно должен быть хотя бы один устойчивый предельный цикл (строгое доказательство этого утверждения, весьма важного для качественного

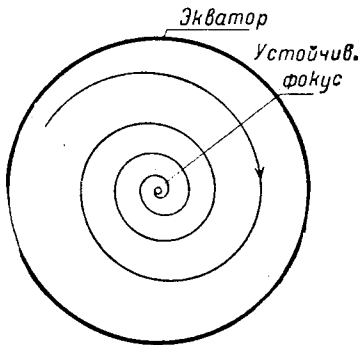


Рис. 272.

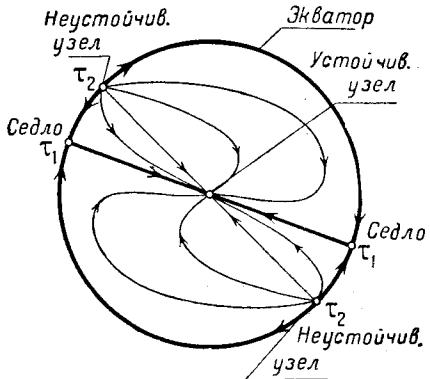


Рис. 273.

исследования динамических систем с одной степенью свободы, будет дано в следующей главе).

Покажем применение этого приема в конкретном физическом случае, доказав существование предельного цикла для простейшей автоколебательной схемы с колебательным контуром в цепи сетки (см. подробнее гл. VII).

Уравнение Кирхгофа для напряжения на конденсаторе колебательного контура, как мы видели в § 6 гл. I (см. уравнение (1.64)), имеет вид:

$$CL \frac{d^2 u}{dt^2} + [RC - MS(u)] \frac{du}{dt} + u = 0,$$

где $S = S(u)$ — крутизна характеристики лампы (мы будем ниже полагать, что $S \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$). Это уравнение колебаний может быть приведено к двум уравнениям первого порядка:

$$\frac{du}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{u}{LC} - \frac{1}{LC} [RC - MS(u)] y. \quad (5.84)$$

Полагая в соответствии с (5.75) $u = \frac{1}{z}$, $y = \frac{\tau}{z}$, получим:

$$\frac{dz}{dt} = -\tau z, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\tau^2 - \frac{1}{CL} \left[RC - MS\left(\frac{1}{z}\right) \right] \tau - \frac{1}{CL}. \quad (5.85)$$

Эта система имеет те же состояния равновесия (и того же характера), что и система (5.81) при $h = \frac{R}{L}$ и $\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$ (в силу нашего предположения, что $S \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$ или $z \rightarrow 0$). Следовательно, поведение фазовых траекторий исходной системы в бесконечности должно быть совершенно такое же, как у осциллятора с частотой $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ и затуханием $\frac{R}{L}$, а такой случай мы только что исследовали и знаем, что бесконечность в этом случае неустойчива. Поэтому, если единственная особая точка, находящаяся на конечном расстоянии, неустойчива,

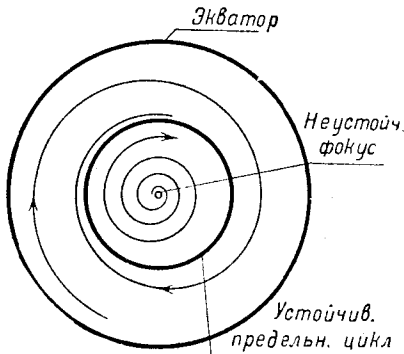


Рис. 274.

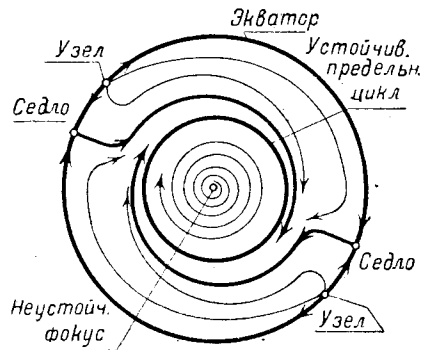


Рис. 275.

то уравнение лампового генератора обязательно имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл. Ориентировочный, с точностью до четного числа циклов (полуустойчивый цикл считается за два) вид проекции сферы Пуанкаре на плоскость, касающуюся сферы в нижней точке, изображен на рис. 274 и 275.

Итак, исследуя поведение интегральных кривых в удаленных частях плоскости, мы доказали, что уравнение лампового генератора имеет по крайней мере один предельный цикл. Прежде всего сам собой напрашивается вопрос: какой смысл этого доказательства, для чего оно нужно? Ведь известно, что в ламповом генераторе при рассматриваемых нами условиях происходят колебания, зачем же это доказывать? Но мы ведь вовсе не имели в виду доказывать, что в реальном ламповом генераторе происходят колебания. Мы доказали только, что та математическая модель, которая соответствует нашему идеализированному генератору, допускает устойчивый периодический процесс. Если бы оказалось, что наше уравнение не имеет предельного цикла, это значило бы, что мы не учли какого-нибудь существенного обстоятельства, обуславливающего возможность непрерывных автоколебаний в реальной системе, и наша идеализация, следовательно,

не пригодна. Физическая ценность всякого строгого рассмотрения и, в частности, строгого решения вопроса о существовании предельных циклов именно в том и заключается, что сопоставление результатов этого рассмотрения с данными опыта позволяет судить, насколько целесообразна наша исходная идеализация, не упущены ли те или иные существенные для рассматриваемого вопроса моменты. При нестрогом же рассмотрении мы никогда не можем знать, что именно является причиной несоответствия между теорией и опытом: неправильная исходная идеализация или допущенные при рассмотрении нестрогости. Однако физическая ценность нашего рассмотрения, несмотря на его математическую безупречность, все же невелика. Действительно, ведь исследуемое нами уравнение имеет физический смысл, т. е. достаточно точно описывает поведение реальной системы, только если токи и напряжения в системе не слишком велики. Ведь когда мы, например, принимаем, что для достаточно больших значений имеет место насыщение, то нельзя это утверждение экстраполировать для значений сколь угодно больших, ибо при очень больших напряжениях появляются, например, большие сеточные токи, которыми мы пренебрегли, и ряд других обстоятельств, не учтенных нами. Поэтому, если мы строго убедились в существовании предельного цикла, то, чтобы выяснить физическую ценность этого утверждения, необходимо хотя бы приблизительно определить место предельного цикла на фазовой плоскости, с тем чтобы убедиться, что он лежит в области, для которой наша идеализация еще справедлива.

§ 11. Оценка месторасположения предельных циклов ¹⁾

Для качественного исследования динамической системы с одной степенью свободы, описываемой уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (5.1)$$

т. е. для выяснения возможных типов ее движений, как мы увидим в гл. VI, нет надобности находить все фазовые траектории. Для этой цели достаточно найти лишь некоторые, основные фазовые траектории — траектории, определяющие качественный характер фазового портрета. Именно, нужно знать число, характер и взаимное расположение состояний равновесия (особых точек) и предельных циклов, а также ход сепаратрис (усов седел). Знания этих основных, определяющих качественную картину траекторий достаточно для доведения до конца качественного исследования динамической системы типа (5.1).

Вопрос о существовании состояний равновесия и их характере решается сравнительно простыми приемами, изложенными в §§ 2 и 4 настоящей главы. В то же время до сих пор нет общих методов решения вопросов о существовании предельных циклов, определения

¹⁾ Написано Н. А. Железцовым.

их числа и хотя бы приближенного места расположения. Исключения составляют системы, близкие к консервативным (в частности, к гармоническому осциллятору), системы с «кусочно-линейными» уравнениями, а также системы с разрывными колебаниями, для которых все эти вопросы могут быть решены при количественном исследовании (см. гл. VIII, IX и X). Поэтому для каждого типа задачи приходится изобретать специальные методы, а в крайнем случае прибегать к численному интегрированию или графическому интегрированию при помощи метода изоклин. Последние методы, конечно, обычно приводят к цели, однако их неудобства заключаются в том, что параметрам приходится давать численное значение. Между тем часто особенно интересным является зависимость характера движения от параметров системы, которых может быть несколько.

Один из наиболее часто применяемых приемов исследования предельных циклов (доказательства существования и определения их месторасположения) состоит в построении на фазовой плоскости циклов без контакта, на которых вектор скорости изображающей точки направлен либо везде наружу, либо везде внутрь области, ограниченной этой кривой.



Рис. 276.

Если на какой-нибудь замкнутой кривой вектор скорости изображающей точки направлен по одну сторону кривой, кроме некоторого числа точек, где он касается, то, очевидно, в этих точках мы имеем дело с соприкосновением четного порядка (рис. 276), при котором фазовая траектория пересекает нашу кривую (и в том же направлении, что и соседние). С интересующей нас точки зрения такая кривая принципиально ничем не отличается от цикла без контакта, поэтому такие замкнутые кривые с отдельными точками соприкосновения четного порядка мы будем также включать в класс циклов без контакта.

Если внутри такого цикла без прикосновения нет устойчивых особых точек и вектор скорости на нем везде направлен внутрь, то мы можем сказать, что существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл, заключенный внутри нашего цикла без прикосновения. Точно так же, если бесконечность неустойчива и существует цикл без прикосновений, на котором вектор скорости направлен везде наружу и вне которого нет устойчивых особых точек, то существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл, расположенный в области, лежащей вне цикла без прикосновений. Аналогичные рассуждения можно привести для исследования неустойчивых предельных циклов, только в этом случае нужно рассматривать противоположное направление вектора скорости¹⁾.

¹⁾ Эти утверждения, а также утверждения, которые будут приведены ниже, геометрически достаточно очевидны. Строгое доказательство этих утверждений основано на общей теории поведения фазовых траекторий (см. гл. VI).

Если при помощи двух циклов без контакта удастся выделить на фазовой плоскости кольцеобразную (двусвязную) область, не содержащую внутри себя состояний равновесия, то можно сделать определенные заключения о существовании в ней предельных циклов. Именно, если вектор скорости изображающей точки на этих циклах без контакта направлен внутрь кольцеобразной области, заключенной между ними, точнее, нигде не направлен наружу, то в этой кольцеобразной области существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл (вообще же существует нечетное число предельных циклов, из них устойчивых на один больше, чем неустойчивых). Если вектор скорости на обоих циклах без контакта везде направлен наружу (или, точнее, нигде не направлен внутрь), то существует по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, заключенный в этой кольцеобразной области (в общем случае в этой области имеется нечетное число предельных циклов, из которых неустойчивых циклов на один больше, чем устойчивых). Если же, наконец, вектор скорости изображающей точки на одном цикле без контакта направлен всюду вне, а на другом — всюду внутрь кольцеобразной области, ограниченной ими, то в этой области предельных циклов либо нет совсем, либо имеется четное число (из них половина устойчивых)¹⁾.

Число предельных циклов в таких кольцеобразных областях, конечно, не определяется соображениями, приведенными выше. В некоторых случаях удается доказать единственность (или отсутствие) предельного цикла в данной кольцеобразной области, пользуясь *критерием Дюлака для кольцеобразной области* [148]: динамическая система (5.1) не может иметь более одной замкнутой фазовой траектории (или более одного замкнутого контура, составленного из траекторий) в кольцеобразной области (G), если в этой области выражение

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ),$$

где $B(x, y)$ — некоторая функция, непрерывная и с непрерывными производными (первого порядка) в области (G), знакоопределенно. Здесь речь идет о фазовых траекториях, содержащих внутри себя внутреннюю границу кольцевой области. Ясно, что в области (G) не может быть замкнутых фазовых траекторий, которые непрерывной деформацией могли бы быть стянуты в точку без выхода за пределы области (G). Таких траекторий не может быть в силу критерия Дюлака, доказанного ранее в § 9.

Для доказательства критерия допустим, что система (5.1) имеет в кольцеобразной области (G) две замкнутые фазовые траектории

¹⁾ Доказательство этих утверждений приведено в гл. VI, § 2 (см. теорему V).

(или два замкнутых контура, составленных из траекторий) $abca$ и $a_1b_1c_1a_1$, содержащих внутри себя внутреннюю границу области (G) (рис. 277). Тогда для замкнутого контура $abca a_1c_1b_1a_1a$

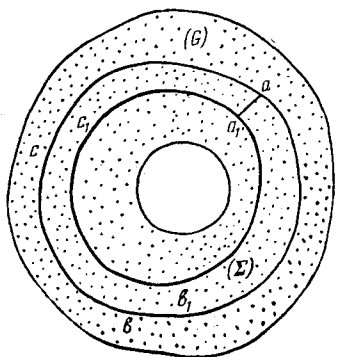


Рис. 277.

$\oint B(P dy - Q dx) = 0$. Но согласно теореме Грина $\oint B(P dy - Q dx) =$

$$= \iint_{(\Sigma)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (BP) + \frac{\partial}{\partial y} (BQ) \right] dx dy, \text{ где}$$

интегрирование ведется по области (Σ) , заключенной между замкнутыми кривыми $abca$ и $a_1b_1c_1a_1$. Таким образом,

$$\iint_{(\Sigma)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (BP) + \frac{\partial}{\partial y} (BQ) \right] dx dy$$

должен равняться нулю, что противоречит знакопостоянству подинтегрального выражения в области (Σ) , которая является частью области (G) .

Следовательно, в области (G) не может быть более одной замкнутой фазовой траектории системы (5.1). Очевидно, критерий сохраняет силу и в тех случаях, когда выражение $\frac{\partial}{\partial x} (BP) + \frac{\partial}{\partial y} (BQ)$ знакопостоянно в области (G) всюду, кроме некоторых точек или кривых, где оно обращается в нуль.

Как мы уже говорили, общих, регулярных методов для отыскания циклов без контакта не существует. В некоторых задачах удается найти такие циклы без контакта среди кривых, принадлежащих к заданному семейству простых замкнутых кривых (например, среди окружностей с центром в начале координат). Пусть

$$F(x, y) = C \quad (5.86)$$

— уравнение семейства простых замкнутых кривых, сплошь заполняющих фазовую плоскость, среди которых мы намереваемся искать циклы без контакта для динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (5.1)$$

Будем полагать, что каждой кривой семейства (5.86) (это семейство кривых часто называют, следуя Пуанкаре, топографической системой кривых) соответствует единственное C и что кривая с заданным C содержит внутри себя все кривые с меньшими C (таким образом, при увеличении C «размеры» кривых (5.86) увеличиваются). При движении изображающей точки по некоторой фазовой траектории она будет пересекать кривые топографической системы (5.86). При

таким движении, очевидно,

$$\frac{dC}{dt} = F'_x(x, y)P(x, y) + F'_y(x, y)Q(x, y) = \Phi(x, y),$$

и циклами без контакта являются все кривые топографической системы, на которых функция $\Phi(x, y)$ знакоопределенна. Именно, если на некоторой кривой топографической системы $\Phi(x, y) \leq 0$, то эта кривая является циклом без контакта, причем в силу нашего предположения об увеличении «размеров» кривых при увеличении C все

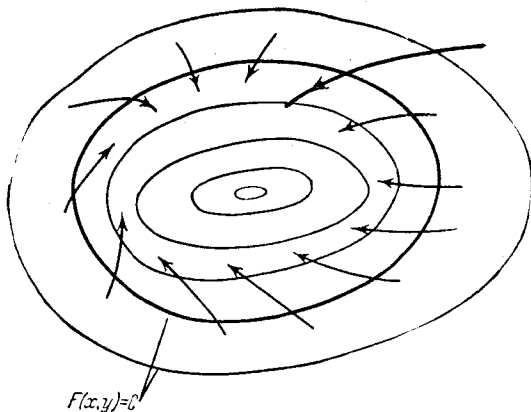


Рис. 278.

фазовые траектории, пересекающие эту кривую, идут (при увеличении t) в область, лежащую внутри нее (рис. 278). Точно также, если на некоторой кривой семейства (5.86) $\Phi(x, y) \geq 0$, то фазовые траектории пересекают эту кривую, выходя в область вне ее. Ясно также, что в кольцеобразных областях, в которых функция $\Phi(x, y)$ знакопостоянна, предельных циклов (и вообще замкнутых фазовых траекторий) быть не может. Предельные циклы могут существовать только в тех кольцеобразных областях, в которых функция $\Phi(x, y)$ знакопеременна.

Несколько иной формой того же метода отыскания кривых без контакта является так называемый метод контактной кривой, принадлежащий Пуанкаре [181, 108]. Контактной кривой Пуанкаре называют ту кривую, в точках которой фазовые траектории системы (5.1) касаются кривых заданной топографической системы (5.86). Ее уравнением, очевидно, является

$$\frac{P}{Q} = -\frac{F'_y}{F'_x},$$

или $PF'_x + QF'_y = 0$. Если топографическая система выбрана так, что кривая контактов замкнутая, то мы можем провести наибольшую и наименьшую кривые топографической системы, касающиеся контактной

кривой. Тогда все кривые топографической системы, лежащие вне такой наибольшей кривой и внутри наименьшей кривой, являются циклами без контакта и предельные циклы, если они существуют, расположены в кольцеобразной области, ограниченной этими двумя кривыми топографической системы и содержащей контактную кривую.

Для иллюстрации сказанного выше рассмотрим два примера качественного исследования динамических систем. В качестве первого примера рассмотрим уравнения:

$$\frac{du}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{u}{LC} - \frac{1}{LC} [RC - MS(u)]y, \quad (5.84)$$

описывающие колебания лампового генератора при обычных упрощающих предположениях, причем будем полагать, что крутизна характеристики лампы $S(u)$ является функцией четной и монотонно убывающей при увеличении $|u|$. Возьмем в качестве топографической системы семейство эллипсов $CL \cdot y^2 + u^2 = A^2$, тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d(A^2)}{dt} = [MS(u) - RC]y^2 = \Phi(u, y).$$

Если $MS(0) < RC$ (условия самовозбуждения генератора не выполнены), то на всей фазовой плоскости $\Phi(u, y) \leq 0$ и, следовательно, $\frac{d(A^2)}{dt} \leq 0$, т. е. все фазовые траектории приближаются к началу координат — устойчивому состоянию равновесия. Если же $MS(0) > RC$, то единственное состояние равновесия $(0, 0)$ неустойчиво, и, кроме того, существует такой отрезок $|U| \leq U_0$, на котором $MS(u) - RC \geq 0$. Поэтому все эллипсы с $A \leq u_0$ являются циклами без контакта, так как на них $\Phi(u, y) \geq 0$; фазовые траектории пересекают их, выходя в область, лежащую вне эллипса $LCy^2 + u^2 = u_0^2$. Следовательно, в области внутри этого эллипса нет предельных циклов¹⁾. По крайней мере один устойчивый предельный цикл лежит вне эллипса $LCy^2 + u^2 = u_0^2$, ибо там нет состояний равновесия и бесконечность, как мы видели (в предположении, что $S(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$), неустойчива.

В качестве второго примера мы дадим полное качественное исследование динамической системы [19]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy - y(x^2 + y^2), \end{aligned} \right\} \quad (5.87)$$

к которой приводится задача о синхронизации лампового генератора при решении ее методом Ван-дер-Поля [190, 7].

Прежде всего фазовый портрет симметричен относительно начала координат, так как уравнения (5.87) инвариантны относительно замены

¹⁾ Отсутствие предельных циклов внутри эллипса $LCy^2 + u^2 = u_0^2$ при $MS(0) > RC$ и на всей фазовой плоскости при $MS(0) < RC$, как нетрудно видеть, вытекает и из критерия Бендиксона.

переменных x, y на $-x, -y$. Далее, уравнение интегральных кривых

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy - y(x^2 + y^2)}{ax + by - x(x^2 + y^2)},$$

которое получается в результате деления второго из уравнений (5.87) на первое, имеет своими интегральными кривыми прямые $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$, где k_1, k_2 — корни квадратного уравнения $b k^2 + (a - d) k - c = 0$, т. е.

$$k_{1,2} = \frac{d - a \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2b}$$

(конечно, при условии, что дискриминант уравнения $\delta = (a - d)^2 + 4bc > 0$). Из уравнений (5.87) также следует, что бесконечность абсолютно неустойчива, т. е. что изображающая точка в далеких частях фазовой плоскости (при возрастании t) движется по направлению к началу координат. В этом легко убедиться, заметив, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = ax^2 + (b + c)xy + dy^2 - (x^2 + y^2)^2 < 0$$

при достаточно больших $x^2 + y^2$.

Состояниям равновесия системы соответствуют особые точки на фазовой плоскости — точки, удовлетворяющие уравнениям:

$$ax + by - x(x^2 + y^2) = 0, \quad cx + dy - y(x^2 + y^2) = 0.$$

Корнями этой системы уравнений являются $x = 0, y = 0$ и

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a + bk_{1,2}}{1 + k_{1,2}^2}}, \quad y_{1,2} = \pm k_{1,2} \sqrt{\frac{a + bk_{1,2}}{1 + k_{1,2}^2}}.$$

Таким образом, в конечной части плоскости x, y может быть в зависимости от параметров уравнений (5.87) одно, или три, или пять состояний равновесия. Состояние равновесия $(0, 0)$ существует всегда, и его характер определяется коэффициентами

$$\sigma = -(a + d) \quad \text{и} \quad \Delta = ad - bc$$

характеристического уравнения $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$ (заметим, что дискриминантом последнего является выражение δ , введенное ранее). Другие состояния равновесия, если они существуют, лежат на интегральных прямых $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$ и поэтому могут быть только узлами или седлами¹⁾.

¹⁾ Числители $a + bk_{1,2}$ в подкоренных выражениях для координат особых точек, лежащих вне начала координат, как нетрудно видеть, являются корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$. Поэтому особых точек вне начала координат не существует, если точка $(0, 0)$ является фокусом или устойчивым узлом; вне начала координат имеются две особые точки, если $(0, 0)$ — седло (уравнение $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$ имеет только один положительный корень); если же точка $(0, 0)$ — неустойчивый узел, то вне начала координат имеются четыре особые точки.

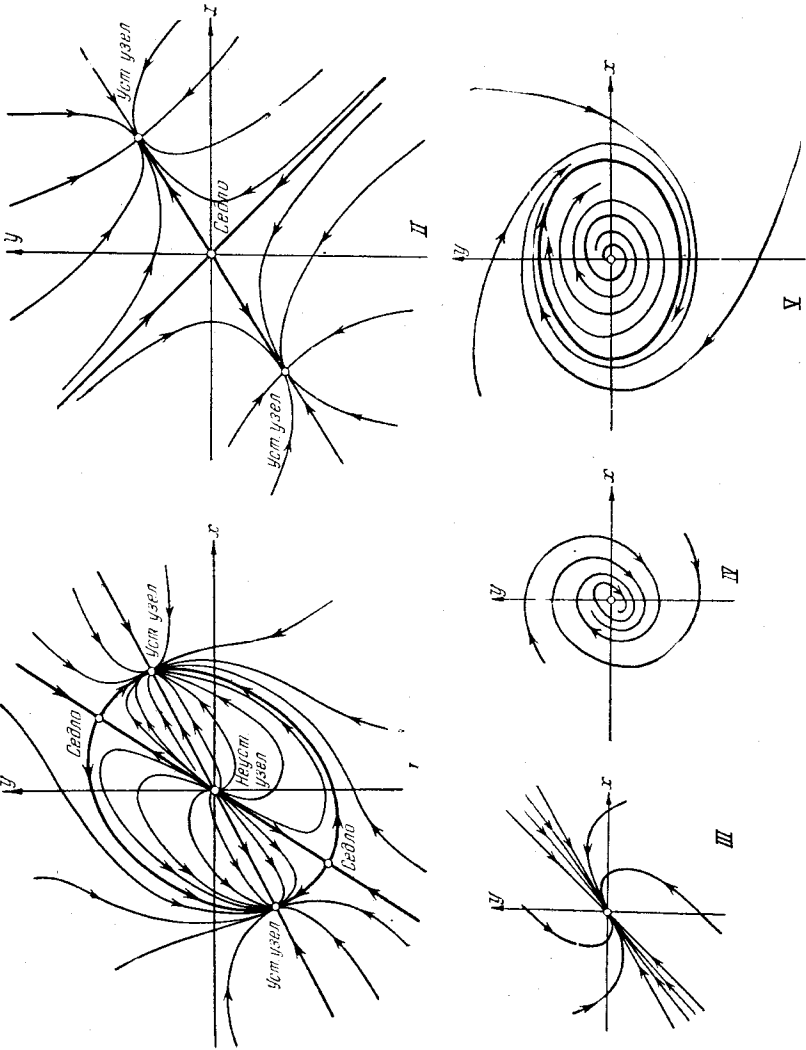


Рис. 279.

Очевидно, возможны следующие случаи:

I. $\delta > 0, \Delta > 0, \sigma < 0$. В этом случае на фазовой плоскости (рис. 279, I) имеются пять особых точек (состояний равновесия): $(0, 0)$ — неустойчивый узел и вне начала координат — два седла и два устойчивых узла. Предельных циклов нет, поскольку через все особые точки проходят интегральные прямые, простирающиеся в бесконечность. Для доказательства сделанных выше утверждений относительно характера особых точек, лежащих вне начала координат, достаточно вспомнить, что бесконечность абсолютно неустойчива и, следовательно, сумма индексов Пуанкаре для всех особых точек равна $+1$. Поэтому четыре особых точки вне начала координат не могут быть все седлами или узлами, две из них являются седлами и две — узлами, причем последние — обязательно устойчивые узлы в силу неустойчивости бесконечности.

II. $\delta > 0, \Delta < 0$. Теперь (рис. 279, II) начало координат — седло, а вне начала координат имеются два устойчивых узла. Предельных циклов по-прежнему нет (доказательство этих утверждений полностью аналогично проведенному выше).

III. $\delta > 0, \Delta > 0, \sigma > 0$. На фазовой плоскости (рис. 279, III) имеется единственное состояние равновесия — устойчивый узел $(0, 0)$, к которому асимптотически приближаются все фазовые траектории. Через узел проходят две интегральные прямые $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$, поэтому предельных циклов не существует.

IV. $\delta < 0, \sigma > 0$. Единственным состоянием равновесия является устойчивый фокус $(0, 0)$. Предельных циклов, как мы покажем ниже, не существует, поэтому (рис. 279, IV), как и в предыдущем случае, все траектории приближаются (при $t \rightarrow +\infty$) к началу координат.

V. $\delta < 0, \sigma < 0$. В этом случае единственное состояние равновесия — начало координат — является неустойчивым фокусом; так как бесконечность неустойчива, то на фазовой плоскости имеется по крайней мере один устойчивый предельный цикл. Покажем, пользуясь критерием Дюлака, что при $\delta < 0$ на фазовой плоскости не может быть более одного предельного цикла (тем самым мы докажем и отсутствие предельных циклов в предыдущем случае, так как если бы предельные циклы в случае IV существовали, то их было бы обязательно четное число). Возьмем в качестве множителя $B(x, y)$ функцию

$$B(x, y) = \frac{1}{by^2 - cx^2 + (a-d)xy},$$

которая в силу условия $\delta = (a-d)^2 + 4bc < 0$ всюду, кроме начала координат, непрерывна вместе со своими производными и, следовательно, знакоопределенна. Тогда, если обозначить через $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ правые части уравнения (5.87), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = -2(x^2 + y^2)B(x, y);$$

это выражение не меняет знака в кольцеобразной области, которая получается из фазовой плоскости исключением сколь угодно малой окрестности начала координат. Таким образом, в рассматриваемом случае предельный цикл один, и разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории имеет вид, изображенный на рис. 279, V (все фазовые траектории асимптотически при $t \rightarrow \infty$ приближаются к этому предельному циклу).

Для определения границ, в которых расположен предельный цикл в случае V , возьмем в качестве топографической системы семейство окружностей

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Как мы уже видели,

$$\frac{1}{2} \frac{d(R^2)}{dt} = ax^2 + (b+c)xy + dy^2 - (x^2 + y^2)^2$$

или в полярных координатах

$$\frac{1}{2} \frac{d(R^2)}{dt} = \frac{R^2}{2} [a + d + (a-d) \cos 2\varphi + (b+c) \sin 2\varphi] - R^4.$$

Нетрудно видеть, что

$$R_1^2 \leq a + d + (a-d) \cos 2\varphi + (b+c) \sin 2\varphi \leq R_2^2,$$

где

$$R_1^2 = \frac{a + d - \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}}{2}$$

и

$$R_2^2 = \frac{a + d + \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}}{2}.$$

Поэтому при $(a+d)^2 > (a-d)^2 + (b+c)^2$ (или, что то же самое, при $4ad > (b+c)^2$) циклами без контакта являются все окружности с радиусами $R \leq R_1$ и $R \geq R_2$, так как при $R \leq R_1$, $\frac{dR}{dt} \leq 0$ и при $R \geq R_2$, $\frac{dR}{dt} \leq 0$, и единственный предельный цикл расположен между окружностями радиусов R_1 и R_2 . Если же $4ad < (b+c)^2$, то величина R_1 оказывается мнимой, циклами без контакта среди кривых рассматриваемой топографической системы будут только окружности с радиусами $R \geq R_2$ (на них, по-прежнему, $\frac{dR}{dt} \leq 0$) и предельный цикл лежит внутри окружности радиуса R_2 ¹⁾.

Таким образом, в зависимости от параметров уравнений (5.87) мы будем иметь один из разобранных выше случаев. Области существо-

¹⁾ В последнем случае циклы без контакта, вне которых лежит предельный цикл, можно найти среди эллипсов

$$by^2 + (a-d)xy - cx^2 = \text{const.}$$

вания каждого из них, изображенные на плоскости параметров σ и Δ , даны на рис. 280.

В заключение параграфа заметим еще следующее. Для частных видов дифференциальных уравнений типа (5.1) иногда удается доказать наличие или отсутствие предельных циклов при помощи соображений, специфичных для данного уравнения, не опираясь на общую теорию. Такой анализ, представляющий большой физический интерес, был дан, например, Льенаром [174] для уравнения катодного генератора при некоторых упрощающих соображениях о симметрии характеристики.

§ 12. Приближенные методы интегрирования

Как уже неоднократно указывалось, до сего времени не существует регулярных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в общем

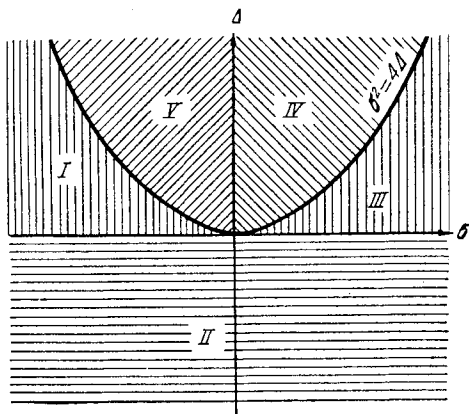


Рис. 280.

виде, а вместе с тем и строгих методов построения фазового портрета исследуемой нелинейной динамической системы. Поэтому для исследования конкретной динамической системы часто наиболее простым (а иногда и единственным) является метод приближенного графического интегрирования, т. е. метод построения приближенного фазового портрета данной динамической системы. Конечно, метод графического интегрирования, как и другие подобные методы, требует задания определенных численных значений для всех параметров системы или в лучшем случае заданий численных значений комбинаций из этих параметров. Это — существенный недостаток всяких методов численного интегрирования, ограничивающий общность результатов и затрудняющий обозрение всей проблемы в целом. Поэтому там, где возможно применение аналитических методов, может быть даже и сложных, их всегда следует предпочесть методам численного интегрирования. Однако к рассматриваемым нами проблемам аналитические методы исследования могут быть применены только при известных ограничивающих условиях, которые не могут быть соблюдены в ряде автоколебательных устройств, в частности в таких устройствах, которые не содержат обычных колебательных контуров. Это и есть один из тех случаев, когда метод приближенного графического интегрирования оказывается единственно возможным. Наиболее подходящим для наших целей приемом приближенного

графического интегрирования является метод изоклин. Суть этого метода заключается в следующем ¹⁾. Поведение рассматриваемых нами

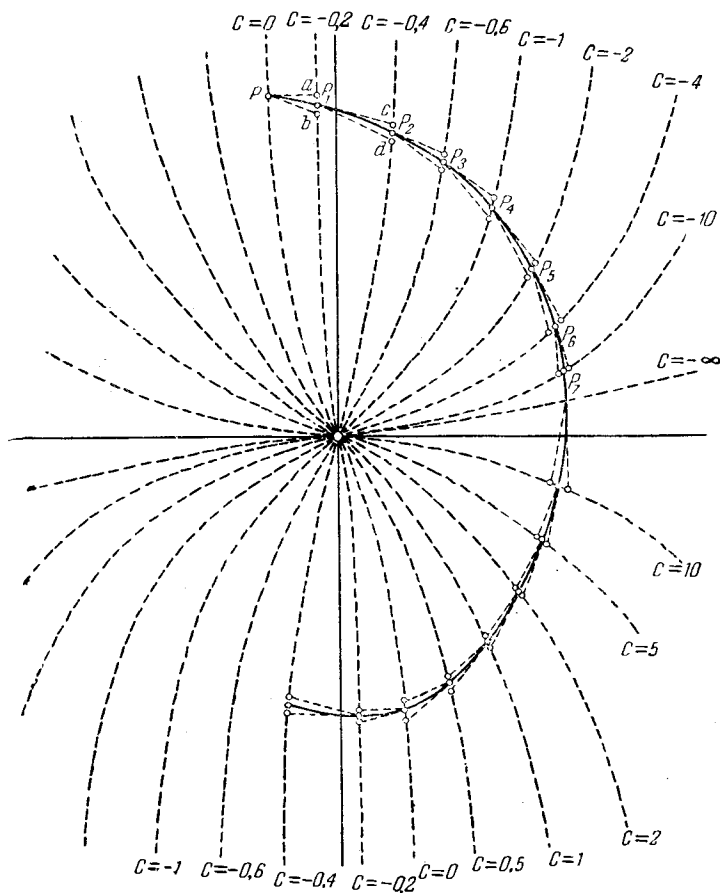


Рис. 281.

систем после исключения времени описывается одним нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = f(x, y). \quad (5.3)$$

Кривые $f(x, y) = C$ на фазовой плоскости представляют собой геометрическое место таких точек, через которые все отыскиваемые нами интегральные кривые проходят под одним и тем же углом

¹⁾ Мы ограничиваемся очень кратким изложением метода изоклин, так как метод этот достаточно широко распространен и описание его легко найти в литературе. См., например, [110].

к оси абсцисс, именно под углом, тангенс которого равен C . Поэтому кривые $f(x, y) = C$ и носят название изоклин (кривых равного наклона). Придавая C различные численные значения (значения параметров системы, входящих в уравнение (5.3), также должны быть численно заданы), мы можем построить на фазовой плоскости семейство изоклин разыскиваемых интегральных кривых (рис. 281). Для каждой из изоклин известен тот наклон, который имеют все интегральные кривые, пересекающие данную изоклину, и поэтому мы можем на каждую изоклину нанести отрезки касательных к интегральным кривым, проходящим через эту изоклину. Ясно, что точки пересечения двух или нескольких изоклин суть особые точки, так как в них направление интегральных кривых становится неопределенным.

Построив достаточно густое поле изоклин, можно приступить к построению приближенного фазового портрета. Начнем построение с интегральной кривой, проходящей через какую-либо точку P фазовой плоскости. Пусть точка P лежит на изоклине $C = 0$. Проводим из нее два отрезка: один в направлении касательной, соответствующей изоклине $C = 0$, а другой в направлении касательной, соответствующей соседней изоклине $C = -0,2$, до пересечения их с этой соседней изоклиной. Получаем точки a и b и лежащую между ними точку P_1 принимаем за точку нашей интегральной кривой. Из точки P_1 проводим две прямые под углами, соответствующими изоклинам $C = -0,2$ и $C = -0,4$, до пересечения с изоклиной $C = -0,4$. Точка P_2 , лежащая посередине между c и d , будет третьей точкой отыскиваемой интегральной кривой. Продолжая дальше подобное построение, мы получим последовательность точек $P, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$, через которые и проведем интегральную кривую, проходящую через точку P . Подобным образом мы можем продолжать построение этой интегральной кривой и нанести на фазовую плоскость ряд других интегральных кривых. В результате мы получим, правда, приближенный, но достаточно подробный фазовый портрет исследуемой конкретной системы (имеющей определенные значения параметров). По этому портрету мы сможем судить, устанавливаются ли при данных значениях параметров автоколебания в системе, каких наибольших значений достигают x и y при этих колебаниях и т. д. Однако по этому портрету, построенному для определенных значений параметров системы, мы не можем судить о том, как изменяется поведение системы при изменении того или иного из ее параметров. Для ответа на этот вопрос нужно построить целую «галерею» фазовых портретов, соответствующих различным значениям того параметра, влияние изменений которого мы хотим проследить.

Типичным примером, иллюстрирующим применение метода изоклин, может служить произведенное Ван-дер-Полем [188, 189] исследование фазовой плоскости уравнения

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0.$$

Это уравнение характерно (конечно, при соответствующих идеализациях) для ряда автоколебательных задач. Например, к этому уравнению может быть приведено уравнение колебаний лампового гене-

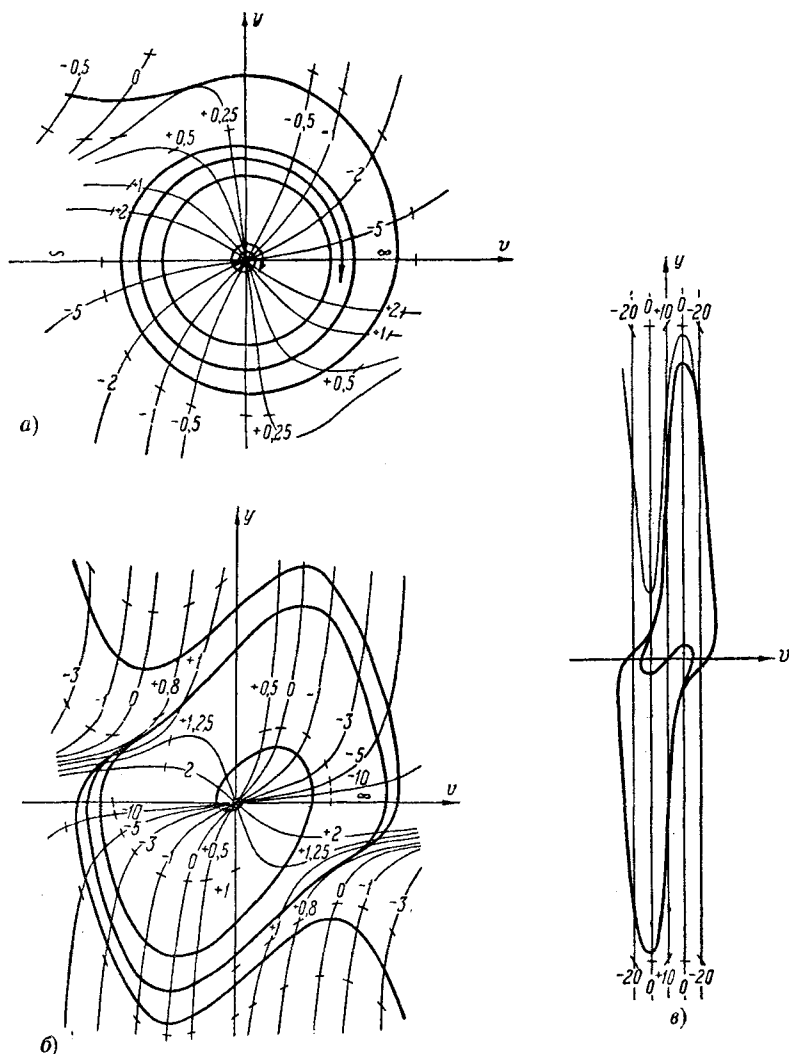


Рис. 282.

ратора в случае кубической характеристики лампы; сам Ван-дер-Пооль интересовался этим уравнением в связи с теорией колебаний симметричного мультивибратора, в цепи которого введены самондукции.

Записав уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dv}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -v + \varepsilon(1 - v^2)y$$

и деля затем одно уравнение на другое, получим уравнение первого порядка — уравнение интегральных кривых:

$$\frac{dy}{dv} = \varepsilon(1 - v^2) - \frac{v}{y}.$$

Придавая параметру ε определенные положительные числовые значения и применяя метод изоклин, Ван-дер-Поля получает «фазовую портретную галерею», изображенную на рис. 282 (*a, б, в* относятся соответственно к случаям малых, средних и больших значений ε). При помощи этой галереи можно судить о том, как изменяется характер движения в системе при изменении параметра ε . Состояние равновесия системы (0,0) при $\varepsilon > 0$ всегда неустойчиво (при $0 < \varepsilon < 2$ — неустойчивый фокус, при $\varepsilon > 2$ — неустойчивый узел). Все портреты содержат единственный предельный цикл, следовательно, при всех значениях $\varepsilon > 0$ в системе происходит установление автоколебательного режима, причем установление автоколебаний является мягким (одни и те же автоколебания устанавливаются при любых начальных условиях). Но размахи и форма этих автоколебаний, а также характер их установления в разных случаях различные. При малых положительных ε предельный цикл близок к окружности (автоколебания близки к синусоидальным), остальные фазовые траектории суть спирали, медленно скручивающиеся к предельному циклу (рис. 282, *a*). При возрастании ε увеличиваются размахи величины $y = \frac{dv}{dt}$, форма автоколебаний становится все более и более отличной от синусоидальной (предельный цикл имеет форму, все более и более отличную от окружности, рис. 282, *б* и *в*); наконец, начальное нарастание колебаний (из начальных состояний, близких к состоянию равновесия), осцилляторное при малых ε (при $\varepsilon < 2$), становится аperiodическим при больших ε (при $\varepsilon > 2$)¹⁾.

В качестве второго примера приведем построение методом изоклин фазовых портретов лампового генератора с двухзвенной RC-цепочкой.

¹⁾ Необходимо подчеркнуть, что, вообще говоря, форма автоколебаний не связана с характером особой точки, лежащей внутри соответствующего предельного цикла. Поэтому ту связь между формой автоколебаний и характером особой точки, которая обнаружилась в случае уравнения Ван-дер-Поля, не следует обобщать на какие-либо другие автоколебательные системы (например, на ламповый генератор с другими характеристиками лампы).

Заметим также, что кубическая характеристика может удовлетворительно передавать форму реальной характеристики лампы только в области между точками, в которых крутизна кубической характеристики обращается в нуль. Если колебания выходят за пределы этой области, то в поведении рассматриваемой математической модели могут появиться черты, вовсе не характерные для реальных ламповых генераторов.

Две схемы такого генератора (с двойным триодом и с лампой в транзитронном режиме) приведены на рис. 283. Уравнения обеих схем, полученные на основании законов Кирхгофа, при обычных наших

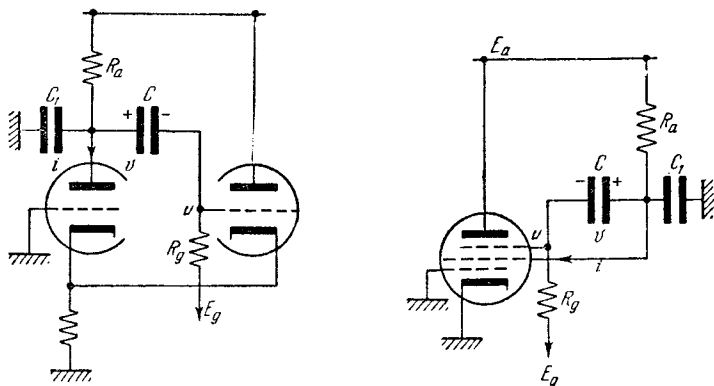


Рис. 283.

предположениях (при пренебрежении, в частности, сеточными токами и анодной реакцией) имеют в обозначениях рис. 283 следующий вид:

$$C \frac{dv}{dt} = \frac{u - E_g}{R_g}; \quad \frac{E_a - (u + v)}{R_a} = i(u) + C \frac{dv}{dt} + C_1 \frac{d(u + v)}{dt}, \quad (5.88)$$

где $i = i(u)$ — характеристика ламповой группы (или лампы в транзитронном режиме); для работы схем как автоколебательных систем

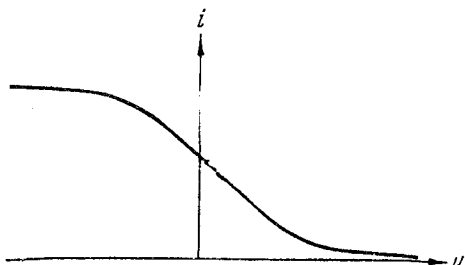


Рис. 284.

существенно, что эта характеристика (рис. 284) имеет падающий участок, на котором крутизна отрицательна.

Для единственного состояния равновесия, очевидно, имеем:

$$\begin{aligned} u &= E_g, \\ v &= E_a - R_a i(E_g) - E_g. \end{aligned}$$

Для упрощения уравнений введем новые переменные

x, y , пропорциональные переменным составляющим напряжений на сетке и на конденсаторе C ,

$$u = E_g + u_0 x, \quad v = E_a - R_a i(E_g) - E_g + a u_0 y,$$

новое, безразмерное время $t_{\text{нов}} = T t_{\text{ст}}$ и приведенную, безразмерную характеристику

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S} [i(E_g + u_0 x) - i(E_g)],$$

где u_0 и T — некоторые масштабы напряжения и времени, α — безразмерный коэффициент и S — абсолютное значение крутизны характеристики в «рабочей точке», соответствующей состоянию равновесия ($S = -\frac{di}{du}$ при $u = E_g$). Тогда уравнения (5.88) примут вид:

$$\frac{CR_g}{T} \dot{y} = x; \quad \frac{C_1 R_a}{T} \dot{x} = R_a S \varphi(x) - \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_1}{C} \right) \right] x - \alpha y$$

(точкой сверху обозначено дифференцирование по новому, безразмерному времени). Выбрав

$$\alpha = 1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_1}{C} \right) \text{ и } T = CR_g + (C + C_1) R_a,$$

мы приведем уравнения (5.88) к следующему безразмерному виду:

$$\dot{y} = x; \quad \mu \dot{x} = -y - x - K \varphi(x) \quad (5.89)$$

с двумя (безразмерными) параметрами

$$\mu = \frac{R_a C_1}{R_g C} \frac{1}{\left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_1}{C} \right) \right]^2}, \quad K = \frac{S R_a}{1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_1}{C} \right)} \quad (5.90)$$

(коэффициент усиления $K \geq 0$, а положительный параметр μ , по порядку величины обычно совпадающий с C_1/C , не превышает $1/4$)¹⁾.

Единственное состояние равновесия лежит теперь (на плоскости x, y) в начале координат; характеристическим уравнением для него, как нетрудно видеть, является квадратное уравнение

$$\mu \lambda^2 + (1 - K) \lambda + 1 = 0, \quad (5.91)$$

ибо по определению функции $\varphi(x)$: $\varphi'(0) = -1$. Поэтому это состояние равновесия устойчиво при $K < 1$, неустойчиво при $K > 1$, является фокусом при $(K - 1)^2 < 4\mu$ и узлом при $(K - 1)^2 > 4\mu$ (на рис. 285 приведено разбиение плоскости параметров μ, K на области, соответствующие различным типам состояния равновесия).

Бесконечность в подобных схемах всегда неустойчива. В самом деле, при больших (по абсолютному значению) напряжениях u мы попадаем на горизонтальные участки характеристики, где i или $\varphi(x)$ постоянны. Поэтому в далеких областях схема ведет себя как линейная, имеющая состояние равновесия типа устойчивого узла, и следовательно, все фазовые траектории приходят из бесконечности в

¹⁾ К уравнениям (5.89) приводятся уравнения колебаний генераторов с RC -цепочками, схемы которых получаются из изображенных на рис. 283 подсоединением к сеточному узлу (к узлу управляющего электрода лампы или ламповой группы) еще одного конденсатора (конденсатор C_1 может быть исключен). Эти уравнения при $\mu \ll 1$, $\mu \ll K - 1$ описывают также и колебания мультивибратора с одной RC -цепью (см. § 8 гл. IV), отображая существенную роль малых, паразитных емкостей (например, паразитной емкости C_1).

область конечных x, y ¹⁾. И если в начале координат лежит неустойчивое состояние равновесия (это имеет место при $K > 1$), то на фазовой плоскости существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл. Для случая характеристики $\varphi(x)$ с монотонно убывающей (по абсолютной величине) крутизной (при удалении от «рабочей точки») этот предельный цикл будет единственным²⁾.

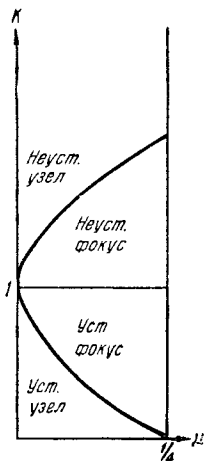


Рис. 285.

Для отыскания этого предельного цикла можно применить, например, метод изоклин³⁾. Разделив первое уравнение (5.89) на второе, мы получим дифференциальное уравнение интегральных кривых:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu x}{y + x + K\varphi(x)}, \quad (5.92)$$

уравнением изоклины (с наклоном касательной к интегральным кривым, равным x) будет:

$$y = -\left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)x - K\varphi(x). \quad (5.93)$$

В частности, изоклиной горизонтальных касательных ($x = \frac{dy}{dx} = 0$) является ось y (ось $x = 0$),

а изоклиной вертикальных касательных ($x = \frac{dy}{dx} = \infty$) — кривая

$$y = -x - K\varphi(x). \quad (5.93a)$$

Предельные циклы, а также некоторые другие фазовые траектории, построенные при помощи метода изоклин, изображены на рис. 286—289. Построения даны для характеристики

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\frac{2}{3} & \text{при } x \leq -1, \\ -x + \frac{x^3}{3} & \text{при } |x| \leq 1, \\ -\frac{2}{3} & \text{при } x \geq +1 \end{cases} \quad (5.94)$$

¹⁾ Строго говоря, сказанное выше доказывает неустойчивость бесконечности по всем направлениям, кроме направления вдоль оси y . Однако нетрудно убедиться, что в этом направлении экватор сферы Пуанкаре не содержит особых точек вообще, и поэтому бесконечность не может быть устойчивой и в этом направлении.

²⁾ При $K < 1$, когда начало координат — устойчивое состояние равновесия, предельных циклов не существует (в этом легко убедиться, применяя, например, критерий Бендиксона) и все фазовые траектории асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются к состоянию равновесия.

³⁾ Позже, в § 5 гл. VIII, мы найдем предельный цикл для случая кусочно-линейной характеристики методом точечного преобразования.

(падающий участок характеристики аппроксимирован симметричной кубической параболой) и для различных значений параметров μ и K . В областях $x > +1$ и $x < -1$ уравнения (5.89) линейны и имеют прямолинейные фазовые траектории $y = x^*x + \frac{2}{3}K$ (в области $x > +1$) и $y = x^*x - \frac{2}{3}K$ (в области $x < -1$), где x^* — корни уравнения $x^3 + x + \mu = 0$. Этим обстоятельством можно воспользоваться для построения цикла без контакта, содержащего внутри себя предельный цикл. Этот цикл без контакта (кривые *ABCDEF*А на рис. 286—288) составляется из фазовых траекторий *ABC* и *DEF* и вертикальных отрезков прямых *CD* и *FA*.

При $0 < K - 1 \ll \sqrt{\mu}$ автоколебания в схемах близки к синусоидальным, о чем можно судить по тому, что форма предельного цикла на рис. 286 ($\mu = 0,2$ и $K = 1,2$) близка к эллипсу. При увеличении «возбуждения» схемы (при увеличении K или при уменьшении μ , когда неравенство $K - 1 \ll \sqrt{\mu}$ уже не соблюдается) форма предельного цикла искажается (рис. 287 и 288) и автоколебания становятся все более и более отличными по форме от синусоидальных¹⁾. При $\mu \ll 1$ и $\mu \ll K - 1$ автоколебания приближаются к разрывным (рис. 289), так как фазовая скорость движения изображающей точки вне кривой (5.93а) становится, как это следует из второго уравнения (5.89), очень большой (она стремится к бесконечности при $\mu \rightarrow 0$), мы получаем фазовый портрет мультивибратора с одной *RC*-цепью и с малой паразитной емкостью C_1 ($C_1 \ll C$). При малых μ (т. е. при $C_1 \ll C$) предельный цикл лежит в малой (тем меньшей, чем меньше μ) окрестности кривой *авба*, которая состоит из дуг кривой (5.93а) и отрезков горизонтальных прямых и является *предельным положением* (при $\mu \rightarrow 0$) предельного цикла. Этим обстоятельством, характерным не только для мультивибратора, мы будем широко пользоваться при рассмотрении различных систем с «разрывными колебаниями» (см. главу X).

Графическое интегрирование позволяет, таким образом, не только получить ответы на вопрос о поведении системы при данных значениях ее параметров, но и проследить, как изменяется поведение системы при изменении того или иного из ее параметров. Правда, для этого нужно выполнить значительное число построений. Однако в некоторых случаях такого общего обозрения поведения системы не требуется, и возникает лишь вопрос о поведении системы при данных начальных условиях, что можно приближенно описать при помощи тех значений, которые будут получать координата и скорость системы через определенные промежутки времени после начального момента t_0 . Например, если мы изучаем какой-либо периодический

¹⁾ Именно поэтому в схемы *RC*-генераторов синусоидальных колебаний с малым клирфактором обязательно вводятся дополнительные элементы (термисторы, ограничительные диоды), которые ограничивают амплитуду автоколебаний и обеспечивают выполнение неравенства $0 < K - 1 \ll \sqrt{\mu}$.

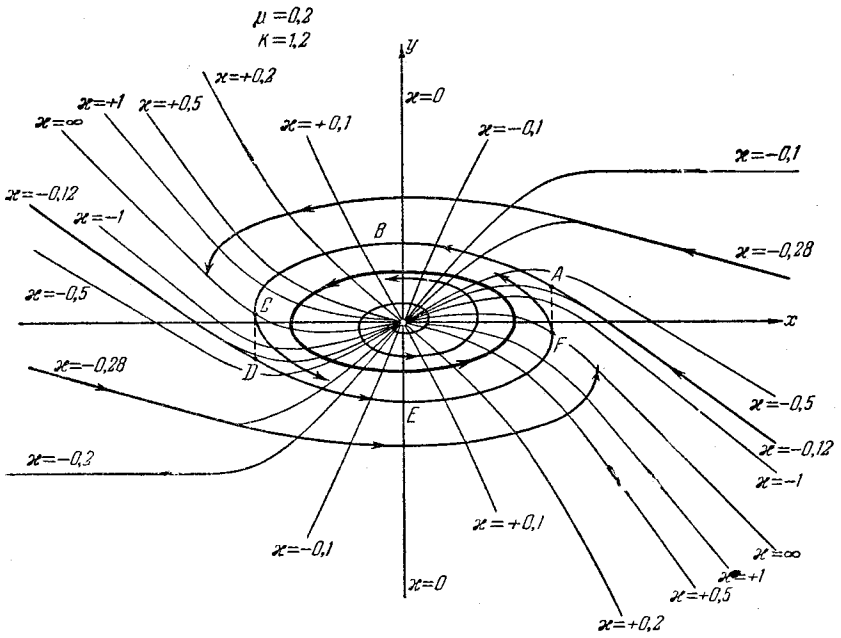


Рис. 286.

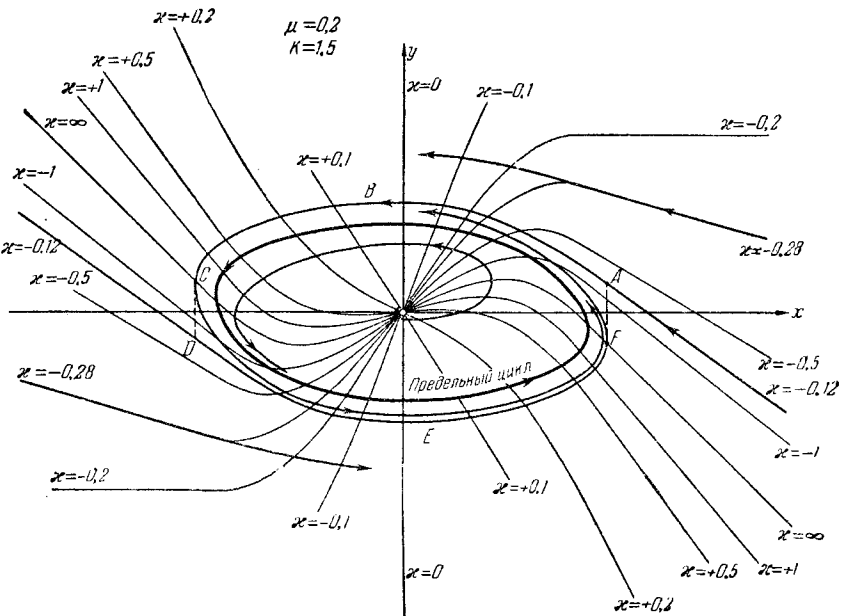


Рис. 287.

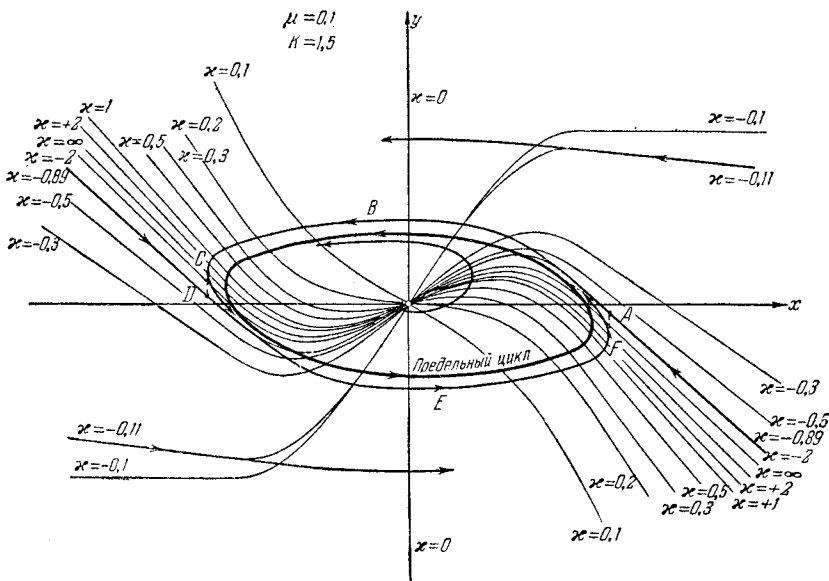


Рис. 288.

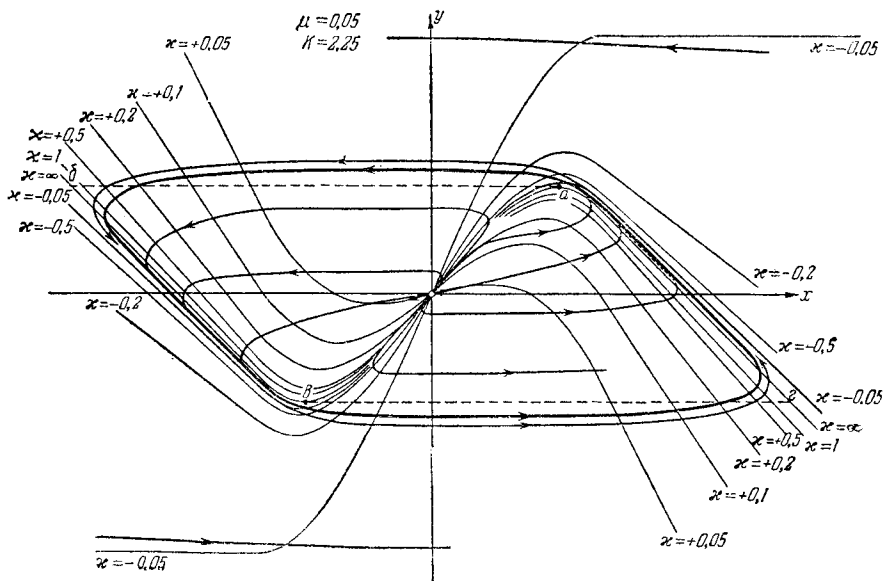


Рис. 289.

процесс и знаем одно из состояний, соответствующих этому периодическому процессу, а также хотя бы приблизительно период этого процесса τ , то достаточно вычислить значения координаты и скорости, разделенные промежутками времени, допустим, в $\frac{\tau}{10}$, чтобы получить представление о ходе всего процесса. Такие задачи — вычисление значений функций, определяемых данными дифференциальными уравнениями (и данными начальными условиями), — можно производить при помощи одного из методов приближенного численного интегрирования, например метода Адамса или метода Рунге. Этот последний метод наиболее прост и для рассматриваемых нами вопросов, пожалуй, наиболее пригоден; поэтому мы и изложим вкратце его применение к интересующим нас задачам¹⁾. Мы имеем два дифференциальных уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (5.1)$$

и начальные значения при $t = t_0$: $x = x_0$, $y = y_0$. Нужно вычислить приращения значений x и y за малый промежуток времени Δt . Для этого составляют выражения:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= P(x_0, y_0) \Delta t, & \Delta y_1 &= Q(x_0, y_0) \Delta t, \\ \Delta x_2 &= P\left(x_0 + \frac{\Delta x_1}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_1}{2}\right) \Delta t; & \Delta y_2 &= Q\left(x_0 + \frac{\Delta x_1}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_1}{2}\right) \Delta t, \\ \Delta x_3 &= P\left(x_0 + \frac{\Delta x_2}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_2}{2}\right) \Delta t; & \Delta y_3 &= Q\left(x_0 + \frac{\Delta x_2}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_2}{2}\right) \Delta t, \\ \Delta x_4 &= P(x_0 + \Delta x_3, y_0 + \Delta y_3) \Delta t; & \Delta y_4 &= Q(x_0 + \Delta x_3, y_0 + \Delta y_3) \Delta t. \end{aligned}$$

Тогда приращения функции x и y за малый промежуток времени Δt могут быть с большой степенью точности выражены следующим образом:

$$\Delta x = \frac{1}{3} \left[\Delta x_2 + \Delta x_3 + \frac{\Delta x_1 + \Delta x_4}{2} \right]; \quad \Delta y = \frac{1}{3} \left[\Delta y_2 + \Delta y_3 + \frac{\Delta y_1 + \Delta y_4}{2} \right].$$

Мы получаем значения функции x и y в момент времени $t_1 = t_0 + \Delta t$: $x_1 = x_0 + \Delta x$; $y_1 = y_0 + \Delta y$. Принимая x_1 и y_1 за новые начальные значения, мы можем вычислить значения x и y для момента $t_0 + 2\Delta t$ и, продолжая таким образом дальше, получить ряд последовательных значений x и y , разделенных промежутками времени Δt . Для определения каждой пары значений x и y , как видим, требуется вычисление четырех значений функции P и четырех значений функции Q . Если функции P и Q сложные, то это вычисление становится весьма громоздким. В этом случае удобнее может оказаться метод Адамса.

¹⁾ Более подробные сведения о методе Рунге, а также изложение других методов численного интегрирования можно найти в [110, 76].

ГЛАВА VI

ОСНОВЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ¹⁾

§ 1. Введение

Настоящая глава имеет чисто математический характер. В ней уточняются некоторые понятия, которыми мы пользовались в предыдущей главе, и доказываются те предложения, на которые мы опирались, рассматривая приведенные там примеры динамических систем второго порядка ²⁾.

Как и в гл. V, мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений второго порядка (динамическую систему)

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (6.1)$$

с *аналитическими* на всей фазовой плоскости x, y функциями $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Мы предположим, кроме того, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не имеют общего множителя, отличного от постоянного числа, т. е. не могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &= P^*(x, y) f(x, y), \\ Q(x, y) &= Q^*(x, y) f(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

где $P^*(x, y)$, $Q^*(x, y)$ и $f(x, y)$ — аналитические функции, причем $f(x, y)$ отлична от тождественной константы. При этом предположении кривые

$$P(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad Q(x, y) = 0$$

¹⁾ §§ 1, 3 и 4 данной главы написаны Е. А. Леонтович-Андроновой.

²⁾ Для того чтобы сознательно пользоваться при исследовании нелинейных колебаний качественной теорией дифференциальных уравнений, нужно знакомство не только с результатами этой теории, но, в известной мере, и с теми методами, с теми способами рассуждений, при помощи которых были получены эти результаты. Поэтому в этой главе мы даем не только результаты, касающиеся общей теории поведения траекторий на фазовой плоскости, но и некоторые доказательства.

могут иметь во всякой конечной части плоскости лишь конечное число точек пересечения, и следовательно, динамическая система (6.1) может иметь лишь *конечное число состояний равновесия*¹⁾.

Первым вопросом, естественно возникающим при качественном рассмотрении динамических систем, является вопрос о том, какие типы фазовых траекторий вообще возможны в динамических системах второго порядка. Траектории, встречавшиеся в рассмотренных ранее примерах (см. гл. II, III и V), являлись либо состояниями равновесия, либо замкнутыми траекториями, либо, наконец, траекториями, стремящимися к состояниям равновесия или к замкнутым траекториям при $t \rightarrow +\infty$ (или при $t \rightarrow -\infty$). Исчерпываются ли этим возможные типы фазовых траекторий, и если нет, то нельзя ли установить, каковы вообще все возможные типы отдельных траекторий? Оказывается, что на основании двух общих теорем: теоремы Коши о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений и теоремы о непрерывной зависимости этого решения от начальных условий (см. Дополнение I) — можно получить исчерпывающие сведения относительно возможного характера отдельной траектории [137, 81]. Рассмотрению этого вопроса будет посвящен следующий параграф.

Перейдем от рассмотрения одной отдельной траектории к рассмотрению всей совокупности траекторий в целом. Основываясь на примерах предыдущих глав, можно ожидать, что для знания качественной картины необходимо знать взаимное расположение не всех траекторий, а лишь некоторого конечного числа так называемых «особых» траекторий. В простейших случаях такими особыми траекториями являлись состояния равновесия, замкнутые траектории и сепаратрисы. Исчерпываются ли этими типами все возможные типы «особых» траекторий, взаимное расположение которых определяет качественную структуру? И какова общая характеристика таких траекторий? Этим вопросам посвящен § 3 настоящей главы. В нем дается точное определение «особых» и «неособых» траекторий и показывается, что особые траектории разделяют всю совокупность траекторий на отдельные области — ячейки, заполненные неособыми траекториями с одинаковым поведением [17, 80, 145].

Параграфы 4 и 5 настоящей главы посвящены другому кругу вопросов. В § 4 сформулированы некоторые общие требования, которым должна удовлетворять система вида (6.1), если она соответствует реальной физической задаче. Именно, у такой системы качественная картина траекторий должна оставаться неизменной при всех достаточно малых изменениях правых частей. Системы, обладающие

¹⁾ Отметим, что в случае, когда функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют общий множитель, отличный от постоянного числа, т. е. имеют вид (6.2), все точки кривой $f(x, y) = 0$ являются, очевидно, состояниями равновесия (а эта кривая называется *особой линией* динамической системы (6.1)).

этими свойствами, называются «грубыми». В § 4 дается точная математическая формулировка грубости системы, устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы система была грубой, и рассматривается, какие типы «особых» траекторий и какие типы ячеек, заполненных обыкновенными траекториями, возможны в грубых системах [17].

В § 5 в предположении, что в правые части системы (6.1) входит некоторый параметр, рассматривается зависимость качественной картины от параметра. Если предположить «общий» характер зависимости правых частей от параметра, то можно считать, что при всех значениях параметра, кроме бифуркационных (ср. гл. II, § 5), система является грубой. При прохождении параметра через бифуркационное значение совершается переход от одной грубой системы к другой, с измененной качественной структурой. В § 5 рассмотрено, как совершается это изменение качественной структуры, и в частности, как появляются (рождаются) и исчезают предельные циклы [10—13].

§ 2. Общая теория поведения траекторий на фазовой плоскости. Предельные траектории и их классификация

1. Предельные точки полутраектории и траектории. Введем прежде всего некоторые элементарные понятия, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t - t_0; x_0, y_0) = x(t), \\ y &= \psi(t - t_0; x_0, y_0) = y(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

— решение системы (6.1) и L — соответствующая этому решению траектория. Часть траектории, точкам которой соответствуют значения $t \geq t_0$, будем называть *положительной полутраекторией* и обозначать через L^+ или $L_{M_0}^+$, где M_0 — точка, соответствующая значению $t = t_0$. Точно так же часть траектории, точкам которой соответствуют значения $t \leq t_0$, будем называть *отрицательной полутраекторией* и обозначать через L^- или $L_{M_0}^-$.

Если при всех значениях $t \geq t_0$ (или $t \leq t_0$), при которых определено решение (6.1), изображающая точка $M[x(t), y(t)]$ остается в некоторой ограниченной части плоскости, то это решение заведомо определено при всех значениях t , $t_0 \leq t < +\infty$ (или при $-\infty < t \leq t_0$), так что в этом случае точкам полутраектории $L_{M_0}^+$ ($L_{M_0}^-$) соответствуют всевозможные значения $t \geq t_0$ ($t \leq t_0$). Если изображающая точка $M[x(t), y(t)]$ остается в некоторой ограниченной части плоскости при всех t , при которых определено решение (как $t \geq t_0$, так и $t \leq t_0$), то решение, очевидно, определено при всех t , $-\infty < t < +\infty$.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать *только такие полутраектории и траектории, которые целиком лежат в некоторой*

ограниченной части плоскости (они и представляют основной интерес) и в дальнейшем не будем это оговаривать каждый раз. Иногда, чтобы подчеркнуть, что рассматриваются *все* точки траектории, мы будем называть ее *целой траекторией*.

Существенными для дальнейшего являются понятия предельной точки полутраектории и предельной траектории. Точка M^* называется *предельной точкой* положительной полутраектории L^+ (или соответственно отрицательной полутраектории L^-), если при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и любом сколь угодно большим $T > t_0$ (любом $T < t_0$) в ε -окрестности точки M^* имеется точка полутраектории L^+ (L^-), соответствующая значению $t > T$ (или соответственно $t < T$)¹.

Из приведенного определения предельной точки²) полутраектории непосредственно следует, что если ξ^* , η^* — координаты предельной точки M^* положительной полутраектории L^+ , то существует последовательность неограниченно возрастающих значений t :

$$t_1, t_2, \dots, t_n, \dots \quad (t_n \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty)$$

таких, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = \xi^* \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y(t_n) = \eta^*. \quad (6.4)$$

Очевидно, обратно, из существования последовательности неограниченно возрастающих значений t_n , для которой выполняются условия (6.4), следует, что точка $M^*(\xi^*, \eta^*)$ есть предельная точка полутраектории L^+ . Очевидно также, что если точка M^* есть предельная точка полутраектории L^+ при некотором выборе начального положения изображающей точки M_0 на L^+ , то она будет также предельной точкой L^+ и при любом другом выборе точки M_0 на L^+ .

Точка M^* называется *предельной точкой целой траектории* L , если M^* есть предельная точка либо для положительной полутраек-

¹) В дальнейшем мы неоднократно будем рассматривать точки, лежащие на расстоянии, меньшем некоторого заданного ε , от данной точки или от данной траектории, полутраектории и т. п. или, вообще, от заданного множества точек K . Совокупность всех точек, находящихся на расстоянии, меньшем ε , от точек заданного множества K , мы будем (ради краткости) называть ε -окрестностью этого множества. Таким образом, ε -окрестность данной точки составляют все внутренние точки круга радиуса ε с центром в этой точке.

²) Термин «предельная точка» употребляется и в теории множеств. Точка M^* называется в теории множеств предельной точкой множества K , если в любой сколь угодно малой ее окрестности лежат точки множества K , отличные от M^* . Не следует смешивать эти два понятия. Например, состояние равновесия является предельной точкой для самого себя (в смысле определения, данного в тексте), но не является предельной точкой в теоретико-множественном смысле. В самом деле, в этом случае все множество K состоит из единственной точки (из состояния равновесия) и поэтому в любой окрестности состояния равновесия не содержится никаких отличных от него точек множества K .

Вместо термина «предельная точка» в смысле теории множеств мы во избежание путаницы будем пользоваться термином «точка сгущения».

тории L^+ , либо для отрицательной полутраектории L^- , выделенной из траектории L (в первом случае M^* часто называют ω -предельной точкой, во втором — α -предельной точкой траектории L).

Предельная точка траектории L может как принадлежать самой траектории L , так и не принадлежать ей. Поясним это на примерах тех полутраекторий, которые встречались в рассмотренных выше частных случаях динамических систем. Всякое состояние равновесия является своей единственной предельной точкой (как ω -, так и α -предельной). Все точки замкнутой траектории, очевидно, также являются ее ω - и α -предельными точками. Действительно, соответствующее замкнутой траектории L движение

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

является периодическим (с некоторым периодом T_0) и каждая точка $M(\xi, \eta)$ этой траектории соответствует бесчисленному множеству значений t :

$$t_1 = \tau, \quad t_2 = \tau + T_0, \quad \dots, \quad t_n = \tau + (n-1)T_0, \quad \dots,$$

а также

$$t'_1 = \tau, \quad t'_2 = \tau - T_0, \quad \dots, \quad t'_n = \tau - (n-1)T_0, \quad \dots$$

Поэтому она согласно определению является как ω -, так и α -предельной точкой L (в рассматриваемом случае $x(t_n) = \xi$, $y(t_n) = \eta$ при любом n). Траектория, стремящаяся к состоянию равновесия (как в случае узла и фокуса, так и в случае седла), имеет своей единственной предельной точкой это состояние равновесия. Для полутраектории L^+ (или L^-), имеющей вид спирали, наматывающейся на предельный цикл, очевидно, все точки этого предельного цикла являются предельными. Очевидно, в двух последних примерах предельная точка не являлась точкой соответствующей полутраектории.

Ниже мы будем рассматривать только положительные полутраектории (целиком лежащие, как уже было сказано выше, в ограниченной области плоскости), так как все сказанное относительно положительных полутраекторий, очевидно, справедливо и для отрицательных полутраекторий (с заменой t на $-t$).

2. Первая основная теорема о множестве предельных точек полутраектории. Докажем теперь следующую теорему, которая позволяет ввести понятие предельной траектории.

Теорема о предельной траектории. Если $M^(\xi^*, \eta^*)$ есть предельная точка полутраектории L^+ , то и все точки траектории L^* , проходящей через точку M^* , являются предельными для L^+ .*

Мы всегда можем предполагать, что траектория L^* отличается от состояния равновесия, так как в случае, когда M^* — состояние равновесия, справедливость утверждения теоремы очевидна. Пусть $M'(\xi', \eta')$ — какая-нибудь отличная от M^* точка траектории L^* , проходящей через точку $M^*(\xi^*, \eta^*)$. Траектории L^* соответствует

бесчисленное множество движений, отличающихся друг от друга лишь выбором начала отсчета времени, и очевидно, какое бы движение мы ни выбрали, разность значений t , соответствующих данным точкам M^* и M' , всегда одна и та же; обозначим эту разность через τ . Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε -окрестность точки M^* . В силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий для всякого $\varepsilon > 0$ всегда можно указать такое $\delta > 0$, чтобы всякая траектория, проходящая при $t = \tau^*$ через какую-либо точку δ -окрестности точки M^* , проходила бы при значении $t = \tau^* \pm \tau$ через некоторую точку ε -окрестности точки M' . Так как точка M^* является предельной точкой для L^+ , то на L^+ существует бесконечное множество точек $M_n(x_n, y_n)$, соответствующих неограниченно возрастающим значениям t_n и находящихся в δ -окрестности точки M^* . Но тогда на L^+ будет также существовать бесконечное множество точек $M'_n(x'_n, y'_n)$, соответствующих тоже неограниченно возрастающим значениям $t'_n = t_n \pm \tau$ и лежащих в ε -окрестности точки M' . При этом в случае, когда $\tau < 0$, всегда можно начать со столь большого $n = n_0$, чтобы мы имели $t'_{n_0} = t_{n_0} \pm \tau > t_0$, так что точки $M'_n(x'_n, y'_n)$ ($n \geq n_0$) заведомо принадлежали бы полутраектории L^+ . Но ε можно взять сколь угодно малым, и следовательно, точка M' является предельной для полутраектории L^+ . Так как в качестве точки M' можно взять любую точку траектории L^* , то, очевидно, всякая ее точка является предельной для L^+ . Таким образом теорема доказана.

Траекторию L^* мы будем называть предельной траекторией для полутраектории L^+ или просто *предельной траекторией*. Очевидно, все точки L^* будут либо точками области G , либо точками границы G , т. е. L^* лежит в ограниченной части плоскости. Когда предельная точка траектории L является точкой самой этой траектории, то L называется *самопредельной* траекторией. В силу предыдущего, состояния равновесия и замкнутая траектория являются самопредельными.

Прежде чем переходить к доказательству общих теорем относительно возможного характера предельных траекторий — теорем, которые представляют для нас сейчас наибольший интерес, напомним, что называется замкнутым множеством (в теоретико-множественном смысле), и введем понятие связного множества. Как известно, множество точек (на плоскости) называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки сгущения. Таким образом, если последовательность точек, принадлежащих данному замкнутому множеству K , стремится к некоторой точке N_0 , то эта точка N_0 непременно является точкой множества K . Замкнутое множество называется *связным*, если оно не может быть представлено как сумма двух замкнутых множеств, не имеющих друг с другом общих точек. Заметим, что если мы имеем два замкнутых множества без общих точек, то наименьшее из расстояний между любыми двумя точками, из которых одна принадлежит одному множеству, а другая — другому, отлично от нуля.

Пусть K — множество *всех* предельных точек данной полутраектории L^+ . Следующая основная теорема характеризует это множество.

Первая основная теорема. *Множество предельных точек данной полутраектории L^+ является замкнутым, связным и состоит из целых траекторий.*

Докажем, что множество K замкнутое (в теоретико-множественном смысле), т. е. что всякая точка сгущения множества K принадлежит K . Пусть M — точка сгущения множества K . Тогда по самому определению точки сгущения в любой ее окрестности есть точки K , т. е. предельные точки полутраектории L^+ , а следовательно и точки самой полутраектории L^+ , соответствующие сколь угодно большим значениям t . А это и означает, что M есть предельная точка полутраектории L^+ .

Для доказательства того, что множество K связное, предположим противное, т. е. предположим, что оно несвязное и, следовательно, в силу того, что оно является замкнутым, может быть представлено в виде суммы двух замкнутых множеств K_1 и K_2 без общих точек (при этом множества K_1 и K_2 содержат все предельные точки L^+). Наименьшее расстояние между двумя точками, одна из которых принадлежит множеству K_1 , а другая множеству K_2 , отлично от нуля. Пусть ρ_0 — это расстояние. Возьмем $\epsilon < \frac{\rho_0}{3}$ и рассмотрим ϵ -окрестности множеств K_1 и K_2 , которые также не имеют общих точек. Так как точки множеств K_1 и K_2 являются предельными для полутраектории L^+ , то в их ϵ -окрестностях непременно лежат бесконечные последовательности точек этой полутраектории, соответствующие неограниченно возрастающим значениям t . Но тогда в силу непрерывности полутраектории и вне ϵ -окрестностей множеств K_1 и K_2 должно лежать бесчисленное множество точек полутраектории L^+ , соответствующих неограниченно возрастающим значениям t . Так как по предположению полутраектория L^+ лежит в ограниченной части плоскости, то эти точки должны иметь хотя бы одну точку сгущения M_1 . Поскольку они соответствуют неограниченно возрастающим значениям t , то M_1 будет предельной точкой полутраектории L^+ . Точка M_1 не может принадлежать ни множеству K_1 , ни множеству K_2 (так как точка M_1 лежит либо вне ϵ -окрестностей множеств K_1 и K_2 , либо, в крайнем случае, на границе этих ϵ -окрестностей), и следовательно, у L^+ должны существовать предельные точки, отличные от точек множеств K_1 и K_2 , что противоречит сделанному предположению. Таким образом, второе утверждение теоремы доказано.

Последнее утверждение теоремы — о том, что множество предельных точек полутраектории L^+ состоит из целых траекторий, — очевидно, непосредственно следует из предыдущей теоремы.

Так как в силу сделанных предположений число состояний равновесия у рассматриваемой нами системы во всякой ограниченной области фазовой плоскости конечно, то из доказанной теоремы следует, в частности, что в том случае, когда среди предельных точек полутраектории L^+ нет точек, отличных от состояний равновесия, эта полутраектория будет иметь одну и только одну предельную

точку — одно состояние равновесия. Очевидно также, что если K есть множество всех предельных точек данной полутраектории, то при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ все точки этой полутраектории, соответствующие значениям $t > T$, где T — зависящая от ε величина, будут лежать в ε -окрестности множества K .

Мы доказали первую основную теорему для случая траекторий на фазовой плоскости, однако она справедлива и для траекторий на любой фазовой поверхности (например, на торе), а также в фазовом пространстве n измерений (в случае системы n уравнений первого порядка).

3. Вспомогательные предложения. Прежде чем перейти к доказательству второй основной теоремы, которая покажет нам, какие траектории могут быть предельными, нам придется остановиться на ряде вспомогательных предложений, связанных с так называемым «отрезком без контакта». Возьмем на фазовой плоскости какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0)$, отличную от состояния равновесия. Пусть L_0 — траектория, проходящая через точку M_0 . Проведем через эту точку прямую D , не касающуюся в точке M_0 траектории L_0 . Очевидно, что мы всегда можем выделить на этой прямой такой отрезок, содержащий точку M_0 , который ни в одной своей точке не касался бы ни одной из траекторий системы (6.1). Такой отрезок, как известно, и называется *отрезком без контакта*.

Дадим ряд предложений, относящихся к отрезку без контакта, которые нам будут необходимы в дальнейшем; некоторые из этих предложений совершенно очевидны, и мы их не будем доказывать.

I. Прямая D делит фазовую плоскость на две части, и мы можем различать две стороны прямой D . Пусть на рассматриваемой траектории L_0 задано движение $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ ¹⁾ и пусть точке M_0 соответствует значение $t = t_0$. Так как в точке M_0 прямая D не касается траектории L_0 , то в силу непрерывности правых частей уравнений (6.1) мы всегда можем указать такие $t_1 < t_0$ и $t_2 > t_0$, чтобы часть траектории, соответствующая значениям t , удовлетворяющим неравенству $t_1 < t < t_0$, лежала целиком по одну сторону прямой D , а часть траектории, соответствующая значениям t , лежащим в интервале $t_0 < t < t_2$, целиком лежала по другую сторону прямой.

II. В силу непрерывности правых частей системы (6.1) изображающая точка, двигаясь по любой из траекторий, пересекающих отрезок без контакта, при возрастании t всегда переходит с одной и той же стороны прямой D на другую ее сторону, т. е. *все траектории пересекают отрезок без контакта в одном и том же направлении*.

Отсюда, в частности, следует, что если какая-нибудь фазовая траектория пересекает отрезок без контакта дважды, то она может

¹⁾ В следующих предложениях мы будем считать, что если дана траектория L_0 , то дано и движение по траектории, т. е. решение системы (6.1), соответствующее этой траектории, с некоторым выбранным значением t_0 .

пересечь его только так, как это показано на рис. 290, но не так, как показано на рис. 291.

III. Сколь бы малое $\Delta > 0$ мы ни взяли, всегда существует столь малая окрестность точки M_0 , что всякая траектория, проходящая при $t=t_0$ через точку этой окрестности, пересекает отрезок без контакта при некотором значении $t=t'_0$, отличающемся от значения t_0 меньше чем на Δ , $|t'_0 - t_0| < \Delta$.

IV. Всякая часть траектории, соответствующая значениям t внутри некоторого конечного промежутка $\alpha \leq t \leq \beta$, может

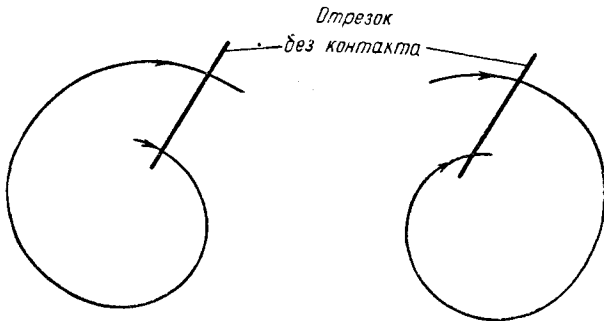


Рис. 290.



Рис. 291.

иметь лишь конечное число точек пересечения с любым отрезком без контакта.

Доказательство поведем от противного. Предположим, что траектория L имеет бесчисленное множество точек пересечения с некоторым отрезком без контакта l и что все эти точки соответствуют значениям t , лежащим между α и β . В силу принципа Больцано-Вейерштрасса из бесчисленного множества значений t , соответствующих этим точкам пересечения, мы можем выбрать последовательность $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, стремящуюся (при $n \rightarrow +\infty$) к некоторому значению τ ($\alpha \leq \tau \leq \beta$) и при этом такую, чтобы соответствующие значения t_n точки $M_n(x_n, y_n)$ траектории L стремились бы к точке $M_0(x_0, y_0)$, соответствующей значению $t=\tau$. Эта точка M_0 , очевидно, должна лежать на отрезке без контакта l , поскольку к ней стремятся точки M_n , лежащие на этом отрезке. Но в силу предложения I для значений t , достаточно близких к τ , на траектории L не может быть точек, которые лежали бы опять на отрезке без контакта. Последнее утверждение находится в противоречии с тем, что τ есть предельное значение t , соответствующее точкам пересечения L с l , т. е. с тем, что есть сколь угодно близкие к τ значения t , которым соответствуют точки пересечения L с l . Мы пришли к противоречию, и этим самым доказано, что число точек конечно.

V. Точки пересечения незамкнутой траектории L_0 с любым отрезком без контакта l , соседние по значениям времени t , будут также соседними и на отрезке l . Расположим значения t , соответствующие точкам пересечения траектории L_0 с отрезком l , в порядке возрастания $t: t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$. Возьмем две точки пересечения L_0 с $l: Q_k$ и Q_{k+1} , соответствующие соседним значениям времени t_k и t_{k+1} , и покажем, что на отрезке $Q_k Q_{k+1}$ не может быть больше точек пересечения L_0 с l . Действительно, если бы на отрезке $Q_k Q_{k+1}$ была еще одна точка пересечения, то она могла бы соответствовать либо значениям $t < t_k$, либо значениям $t > t_{k+1}$ (так как между t_k и t_{k+1} нет значений t_n , соответствующих точкам пересечения L_0 с l). Но при значении $t = t_{k+1}$ изображающая точка, двигающаяся по

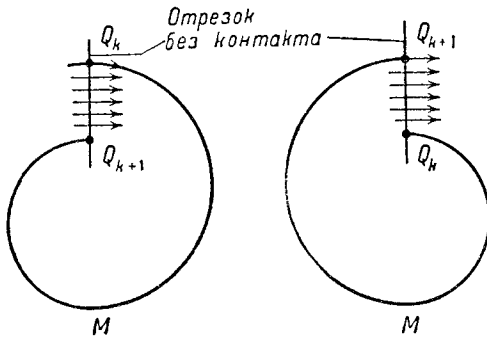


Рис. 292.

траектории, входит в область, лежащую внутри замкнутой кривой $Q_k M Q_{k+1} Q_k$, составленной из куска траекторий $Q_k M Q_{k+1}$ и отрезка $Q_{k+1} Q_k$, или выходит из этой области (рис. 292). Для того чтобы изображающая точка смогла еще раз пересечь отрезок $Q_k Q_{k+1}$, она должна выйти из этой замкнутой кривой (или войти внутрь ее). Это невозможно, так как изображающая точка не может пересечь ни кусок траектории $Q_k M Q_{k+1}$ (траектории на фазовой плоскости не пересекаются), ни отрезок $Q_k Q_{k+1}$, так как она должна была бы пересечь последний в направлении, противоположном первоначальному, что невозможно по предложению II. Отсюда следует, что на нашем отрезке не может быть точек пересечения для $t > t_{k+1}$. Таким же образом можно показать, что на отрезке $Q_k Q_{k+1}$ не может быть точек пересечения с траекторией L_0 , соответствующих значениям $t < t_k$.

Доказанное предложение можно сформулировать и так: *последовательные точки пересечения положительной полутраектории с любым отрезком без контакта l располагаются на отрезке l в порядке возрастания времени.*

VI. *Замкнутая траектория может иметь с отрезком без контакта только одну точку пересечения.* Действительно, предположим, что замкнутая траектория L_0 имеет более одной точки пересечения с отрезком без контакта l , и пусть Q_k и Q_{k+1} — две соседние точки пересечения, соответствующие значениям $t = t_k$ и $t = t_{k+1}$ ($t_{k+1} > t_k$), так что на отрезке $Q_k Q_{k+1}$ нет больше точек пересечения L_0 с l . Очевидно, что на траектории L_0 есть точки, со-

ответствующие значениям $t < t_k$, лежащие вне (или внутри) замкнутой кривой $Q_kMQ_{k+1}Q_k$, составленной из куска Q_kMQ_{k+1} траектории L_0 и отрезка $Q_{k+1}Q_k$, а также есть точки, соответствующие значениям $t > t_{k+1}$, лежащие внутри (или вне) этой замкнутой кривой (рис. 292). Так как траектория L_0 замкнута, то изображающая точка, двигающаяся по дуге Q_kMQ_{k+1} и попавшая внутрь (оказавшаяся вне) кривой $Q_kMQ_{k+1}Q_k$, должна выйти из нее (войти в нее), чтобы описать внешнюю (внутреннюю) часть траектории L_0 . Это, очевидно, невозможно, так как все траектории пересекают отрезок Q_kQ_{k+1} в одном и том же направлении, а пересечь дугу траектории Q_kMQ_{k+1} изображающая точка также не может. Противоречие, к которому мы пришли, доказывает, что все точки пересечения замкнутой траектории L_0 с отрезком без контакта l непременно совпадают.

VII. Рассмотрим незамкнутую положительную полутраекторию L^+ , для которой траектория L^* (не являющаяся состоянием равновесия) есть предельная. Если через какую-нибудь точку M_0 траектории L^* проведен отрезок без контакта, то на этом отрезке будет лежать бесконечная последовательность точек полутраектории L^+ (расположенных в порядке возрастания времени t), стремящихся к точке M_0 . Это предложение является следствием первой основной теоремы и предложений III и V.

VIII. Пусть $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ — движение по траектории L , не являющейся состоянием равновесия, причем точка M_0 этой траектории соответствует значению $t = t_0$, а точка M_1 — значению $t = t_1$. Пусть l — отрезок без контакта в точке M_1 . Тогда, сколь бы малы ни были ϵ и Δ ($\epsilon > 0$, $\Delta > 0$), всегда можно указать такое $\delta = \delta(\epsilon, \Delta)$, что изображающая точка, помещенная в момент $t = t_0$ на расстоянии, меньшем δ , от точки M_0 , при некотором значении $t = t'_1$, удовлетворяющем неравенству $|t_1 - t'_1| < \Delta$, необходимо пересечет отрезок без контакта l , оставаясь в течение промежутка времени от $t = t_0$ до $t = t'_1$ на расстоянии, меньшем ϵ , от точек траектории L , соответствующих значениям t между t_0 и t_1 .

Это предложение (справедливое как для $t_1 > t_0$, так и для $t_1 < t_0$) является следствием теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий и предложения III.

4. Вторая основная теорема о множестве предельных точек полутраектории. Если полутраектория L^+ не замкнута и имеет хотя бы одну предельную траекторию, не являющуюся состоянием равновесия, то она сама не может быть предельной.

Пусть L^* — траектория, не являющаяся состоянием равновесия, — предельная для полутраектории L^+ . Будем доказывать теорему от противного. Предположим, что полутраектория L^+ сама является предельной для некоторой полутраектории L_1^+ , и покажем, что мы придем к противоречию.

Возьмем какую-нибудь точку P на траектории L^* и проведем через эту точку отрезок без контакта l . Так как точка P является

предельной для полутраектории L^+ , то на отрезке l будет лежать бесчисленное множество точек траектории L^+ , расположенных в порядке возрастания t (предложение VII).

Возьмем три последовательные точки пересечения L^+ с l : P_1, P_2, P_3 ; так как мы предположили, что траектория L^+ сама является предельной для полутраектории L^+ , то, в частности, предельной для полутраектории L^+ будет точка P_3 . Тогда, опять-таки на основании предложения VII, либо на отрезке P_1P_2 , либо на отрезке P_2P_3 должна быть последовательность точек полутраектории L^+ , стремящихся к точке P_3 . Мы покажем, что это невозможно, так как полутраектория L^+ может пересекать каждый из отрезков P_1P_2 и P_2P_3 только по одному разу.

Действительно, пусть Q — одна из точек пересечения полутраектории L^+ с отрезком P_1P_2 . Изображающая точка, помещенная в момент $t = \tau$ в точку Q , при значениях $t > \tau$ либо войдет в область, лежащую внутри замкнутой кривой $P_1MP_2P_1$, образованной дугой P_1MP_2 полутраектории L^+ и отрезком без контакта P_1P_2 , либо выйдет из этой области. Пусть, например, изображающая точка при $t > \tau$ входит в указанную область, тогда она уже не сможет выйти из нее, так как она не может выйти ни через дугу P_1MP_2 (траектории не пересекаются), ни через отрезок P_1P_2 (все траектории пересекают отрезок без контакта в одном и том же направлении). Следовательно, изображающая точка уже не сможет пересечь отрезок P_1P_2 при $t > \tau$.

Совершенно такое же рассуждение можно провести для того случая, когда изображающая точка выходит при $t > \tau$ в область вне замкнутой кривой $P_1MP_2P_1$; ясно, что аналогичное рассуждение справедливо и для отрезка P_2P_3 . Таким образом, предположение, что полутраектория L^+ есть предельная для полутраектории L^+ , приводит к противоречию, и теорема доказана.

В частности, из этой теоремы следует, что незамкнутая траектория не может быть самопредельной, так как в противном случае она имела бы предельную траекторию, не являющуюся состоянием равновесия, — саму себя, а с другой стороны сама являлась бы предельной.

Эта теорема отражает черты, характерные для плоскости, и может не быть справедливой для траекторий в других фазовых пространствах. Она не справедлива, например, для траекторий на торе, а также в случае системы трех уравнений, аналогичных системе (6.1), когда фазовым пространством является евклидово пространство трех измерений.

Из второй основной теоремы следует невозможность других типов предельных траекторий, кроме: 1) состояний равновесия, 2) замкнутых траекторий, 3) незамкнутых траекторий, имеющих в качестве предельных точек только состояния равновесия, так как в силу этой теоремы никакая незамкнутая предельная траектория сама уже не может иметь предельных точек, отличных от состояния равновесия. Мы добавим ко второй основной теореме еще две теоремы, ко-

торые позволят установить, какие комбинации из названных типов предельных траекторий возможны в качестве множества всех предельных точек полутраектории.

Теорема III. *Если полутраектория L^+ имеет замкнутую предельную траекторию L_0 , то L_0 является единственной предельной траекторией для L^+ .*

Если сама полутраектория L^+ замкнута, то все ее точки являются предельными для нее самой, и ясно, что никаких других предельных точек у нее быть не может. В этом случае теорема очевидна.

Предположим теперь, что L^+ не замкнута. Докажем сначала, что сколь бы малое $\epsilon > 0$ мы ни взяли, все точки полутраектории L^+ , начиная с некоторого значения $t = t_1$ (зависящего от ϵ), будут находиться внутри ϵ -окрестности траектории L_0 . Пусть полутраектории L^+ соответствует движение $x = x(t)$, $y = y(t)$, а траектории L_0 $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$. Так как траектория L_0 замкнута, то $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ — периодические функции, т. е. существует такое h (период движения по L_0), что

$$\bar{x}(t + h) \equiv \bar{x}(t), \quad \bar{y}(t + h) \equiv \bar{y}(t).$$

Возьмем какую-нибудь точку P траектории L_0 , соответствующую значению $t = \tau$. Эта же точка будет соответствовать и значениям $\tau + h$, $\tau + 2h$, ... Напомним, что в силу автономности системы уравнений (6.1) мы всегда можем выбрать движение по траектории L_0 так, чтобы значение τ , которому соответствует точка P , было любым выбранным значением.

Проведем в точке P отрезок без контакта l , целиком лежащий внутри рассматриваемой ϵ -окрестности (ϵ можно взять сколь угодно малым). В силу предложения VII на отрезке без контакта находится последовательность точек полутраектории L^+ : $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$, стремящихся к точке P (так как точка P — предельная для полутраектории L^+). При этом точки P_1, P_2, \dots расположены на отрезке l в порядке возрастания значений t :

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots (t_n \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty).$$

На основании предложения VIII, выбирая $\Delta < \frac{h}{3}$ ($\Delta > 0$), мы всегда можем взять окружность столь малого радиуса $\delta = \delta(\epsilon, \Delta)$ вокруг точки P , чтобы траектория, проходящая при $t = \tau$ через любую точку внутри этой окружности, за время от $t = \tau$ до $t = T$ не выходила из ϵ -окрестности L_0 и в момент $t = T$, сколь угодно мало отличающийся от $\tau + h$ ($|T - (\tau + h)| < \Delta$), пересекла бы отрезок l .

Возьмем точку P_{k_1} , соответствующую $t = t_{k_1}$ и лежащую внутри окружности радиуса δ на отрезке l . Будем считать в данном случае $\tau = t_{k_1}$. Тогда, в силу только что сказанного, значение T будет равно некоторому t_{k_2} , причем, в силу выбора Δ ($\Delta < \frac{h}{3}$), t_{k_2} заведомо больше t_{k_1} ($t_{k_2} > t_{k_1}$).

Часть полутраектории L^+ , соответствующая промежутку времени от t_{k_1} до t_{k_2} , целиком содержится в ϵ -окрестности L_0 . Ясно, что точка P_{k_2} (соответствующая $t = t_{k_2}$) лежит на отрезке l ближе к точке P , чем точка P_{k_1} , и содержится, следовательно, внутри δ -окрестности точки P . К точке P_{k_2} приложимо поэтому такое же рассуждение, как и к точке P_{k_1} , значит, существует такая точка P_{k_3} , соответствующая значению $t = t_{k_3} > t_{k_2}$, лежащая на отрезке без контакта l , что часть полутраектории L^+ , соответствующая значениям t между t_{k_2} и t_{k_3} , целиком содержится внутри ϵ -окрестности L_0 .

Продолжая такое же рассуждение далее, мы видим, что вся часть полутраектории L^+ , соответствующая значениям t , бóльшим t_{k_1} , содержится внутри ϵ -окрестности L_0 .

Покажем теперь, что замкнутая траектория L_0 содержит все предельные точки полутраектории L^+ . Доказательство поведем от противного. Предположим, что полутраектория L^+ имеет предельную точку Q , не лежащую на замкнутой траектории L_0 и, следовательно, находящуюся на некотором расстоянии $d > 0$ от L_0 . В любой сколь угодно малой окрестности точки Q должны находиться точки полутраектории L^+ , соответствующие сколь угодно большим значениям t .

Но, с другой стороны, в силу доказанного выше, сколь бы малое $\epsilon > 0$ мы ни взяли, всегда найдется такое $t = \tau_0$, что все точки полутраектории L^+ , соответствующие $t > \tau_0$, будут лежать внутри ϵ -окрестности траектории L_0 .

Мы всегда можем взять ϵ меньше, чем $d/2$, так что точка Q будет лежать вне ϵ -окрестности L_0 , и, следовательно, сколь угодно близко от точки Q не смогут находиться точки полутраектории L^+ , соответствующие сколь угодно большим значениям t . Таким образом, мы приходим к противоречию, и теорема доказана.

Теорема IV. Если среди предельных точек полутраектории нет состояний равновесия, то она либо замкнута, либо незамкнута, но имеет замкнутую предельную траекторию.

Действительно, предположим, что L^+ не замкнута. В силу сделанных на основании теоремы III заключений траектория, предельная для L^+ , может быть либо замкнутой траекторией (и тогда в силу предыдущей теоремы она является единственной предельной траекторией L^+), либо незамкнутой траекторией, стремящейся к состоянию равновесия. Но второй случай, очевидно, невозможен, так как то состояние равновесия, к которому стремилась бы предельная для L^+ траектория, очевидно, являлось бы предельным также и для L^+ , что противоречило бы предположению. Таким образом, теорема доказана.

Следствием этой теоремы является следующая, очень часто используемая теорема:

Теорема V. Пусть G — замкнутая двухсвязная (кольцевая) область, которая не содержит состояний равновесия и из которой траектории не выходят при возрастании t (при убывании t).

Тогда внутри такой области G непременно существует хотя бы один устойчивый (неустойчивый) предельный цикл.

Действительно, у всякой незамкнутой траектории, входящей при возрастании t (убывании t) в область G , множество предельных точек целиком лежит в этой области и, следовательно, не содержит состояний равновесия. А тогда, в силу теоремы IV, это множество является замкнутой траекторией (предельным циклом).

Таким образом, в области G лежит хотя бы один предельный цикл. Однако в ней может лежать и более одного предельного цикла. Если предположить, что среди этих предельных циклов нет «полуустойчивых» (они возможны только в «негрубых» системах; см. § 4 настоящей главы), то, очевидно, в случае, когда все траектории при возрастании t входят в область G , в ней заведомо лежит хотя бы один устойчивый предельный цикл, а в случае, когда все траектории при возрастании t выходят из области G , — хотя бы один неустойчивый.

В случае, когда в области G существуют полуустойчивые предельные циклы, справедливость теоремы устанавливается несколько более сложным рассуждением, которое мы не приводим. На эту теорему мы опираемся во всех случаях, когда существует область между двумя циклами без контакта, в которую все траектории входят при возрастании t (при убывании t)¹⁾.

5. Возможные типы полутраекторий и их предельных множеств. Доказанные теоремы позволяют установить возможный характер множества предельных точек полутраектории, целиком лежащей в ограниченной части плоскости. Именно, это множество может быть одного из следующих типов: I. Одно состояние равновесия. II. Одна замкнутая траектория. III. Совокупность состояний равновесия и траекторий, стремящихся к этим состояниям равновесия как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$.

Нетрудно видеть, что состояния равновесия, входящие в множество предельных точек типа III, не могут быть фокусами или узлами, так как всякая траектория, попавшая в достаточно малую окрестность такого состояния равновесия, стремится к нему и не может иметь никакой другой предельной точки. Следовательно, состояния равновесия, которые могут входить в множество предельных точек типа III, в случае, если эти состояния равновесия простые, непременно являются седлами, а отличные от состояний равновесия траектории, входящие в это множество, — сепаратрисами седел. Зная возможные типы предельных множеств, мы можем сразу сказать, какие типы полутраекторий возможны. Очевидно, мы получаем следующие

¹⁾ Сформулированная теорема справедлива и при более общих предположениях относительно правых частей динамической системы, в частности в случае кусочно-линейных систем, рассмотренных в главах VIII и X. Не приводя тех очевидных изменений, которые в этом случае должны быть внесены в доказательство теоремы, мы будем пользоваться ею в указанных главах.

возможные типы полутраекторий: 1) состояние равновесия; 2) замкнутая полутраектория; 3) полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия; 4) полутраектория, стремящаяся к замкнутой траектории; 5) полутраектория, стремящаяся к предельному множеству типа III¹⁾.

Полутраектории всех перечисленных типов, за исключением последнего, встречались в рассмотренных выше примерах неоднократно. Простейший пример полутраектории последнего

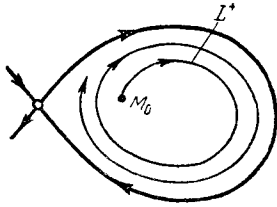


Рис. 293.

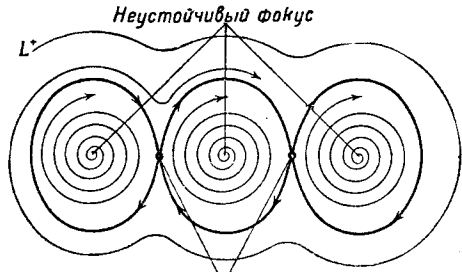


Рис. 294.

типа изображен на рис. 293, где полутраектория L^+ стремится к предельному множеству, состоящему из сепаратрисы, выходящей из седла и возвращающейся в то же седло. Более сложный случай изображен на рис. 294, где полутраектория L^+ (внешняя) стремится к предельному множеству, состоящему из двух состояний равновесия и четырех сепаратрис, стремящихся к этим состояниям равновесия как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$.

§ 3. Качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории. Особые траектории

1. Топологически инвариантные свойства и топологическая структура разбиения на траектории. Перейдем теперь к основной задаче качественного исследования динамической системы — к установлению качественной картины разбиения фазовой плоскости на траектории. Рассмотрение приведенных в предыдущей главе частных примеров динамических систем приводит к мысли, что для знания качественной картины нужно знать поведение не всех траекторий, а лишь некоторых особых траекторий. Таких особых траекторий в рассмотренных примерах было конечное число, и они разбивали всю совокупность траекторий на области, в которых траектории вели себя одинаково. Особыми траекториями в этих примерах были состояния равновесия, предельные циклы и траектории, стремя-

¹⁾ Отметим, что в случае, когда фазовая поверхность системы не является плоскостью, приведенные типы траекторий могут не исчерпывать всех возможных типов траекторий.

щиеся к седлам, — сепаратрисы седел. Если взаимное расположение этих особых траекторий было известно и, кроме того, было известно, какие из состояний равновесия и предельных циклов устойчивы, а какие неустойчивы, то мы получали полную качественную картину фазовых траекторий. Естественно возникают вопросы: всегда ли существует конечное число таких особых траекторий, знание которых позволяет установить качественную картину фазовых траекторий? Как в общем случае эти особые траектории могут быть охарактеризованы и исчерпывают ли или нет особые траектории, встречавшиеся в рассмотренных выше примерах, вообще все возможные типы таких траекторий? Выяснению всех этих вопросов и посвящен настоящий параграф [17, 80].

Однако сначала нужно уточнить смысл некоторых понятий, которыми мы постоянно пользовались, в частности понятий качественной картины фазовых траекторий и качественного исследования данной динамической системы. Для этого нам прежде всего придется напомнить понятие топологического отображения (или преобразования). Как известно, топологическим отображением называется взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение плоскости в себя (или одной плоскости в другую), т. е. отображение, при котором каждой точке $M(x, y)$ соответствует одна и только одна точка $M'(x', y')$ той же самой (или другой) плоскости; всяким двум различным точкам $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ соответствуют две различные точки $M'_1(x'_1, y'_1)$ и $M'_2(x'_2, y'_2)$ и, кроме того, всяким двум сколь угодно близким точкам M_1 и M_2 соответствуют сколь угодно близкие точки M'_1 и M'_2 . Отображение, обратное топологическому, очевидно, также является топологическим, т. е. взаимно-однозначным и непрерывным. Всякое топологическое отображение плоскости в себя (или плоскости в другую плоскость) может быть задано однозначными и непрерывными функциями

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y),$$

которые однозначно могут быть разрешены относительно x, y :

$$x = \varphi_1(x', y'), \quad y = \psi_1(x', y'),$$

где φ_1 и ψ_1 — также непрерывные функции¹⁾. Очевидно, вид кривых, областей и вообще множеств на плоскости при топологическом отображении может измениться очень сильно, однако некоторые свойства кривых, областей и т. д. остаются неизменными. Так, если на плоскости дана замкнутая кривая (например, окружность), то после любого топологического отображения плоскости в себя кривая, в которую она отображается, также непременно будет замкнутой, хотя вид ее может сильно отличаться от вида исходной кривой (кривая, являющаяся топологическим отображением окружности, называется простой замкнутой кривой). Отрезку прямой после топологического отображения может соответствовать уже не отрезок прямой, а некоторая дуга, однако эта дуга заведомо будет дугой без самопересечения (дуга, являющаяся топологическим отображением отрезка, называется простой дугой). Свойства,

¹⁾ Наглядное пояснение того, что такое топологическое отображение плоскости в себя, может быть дано следующим образом. Представим себе, что плоскость сделана из резины, и будем различным образом деформировать ее, именно, в разных местах растягивать или сжимать, нигде не разрывая и нигде не делая складок. Можно сказать, что всякому топологическому отображению соответствует некоторая деформация рассматриваемой резиновой плоскости, выполненная с соблюдением указанных условий.

остающиеся неизменными при всевозможных топологических отображениях, называются *топологически инвариантными свойствами или топологическими характеристиками*.

Пусть теперь дана динамическая система (6.1). Она определяет некоторое семейство траекторий или, в другой терминологии, некоторое разбиение плоскости на траектории. Будем рассматривать всевозможные топологические отображения плоскости в себя и смотреть, как при этом изменяется заданное системой (6.1) разбиение на траектории. Очевидно, вид траекторий при этом может сильно измениться, но некоторые черты этого разбиения остаются неизменными или, иначе, топологически инвариантными. Например, остается неизменным число и взаимное расположение замкнутых траекторий, состояний равновесия и т. д.; если состояние равновесия системы (6.1) было седлом, то и после любого топологического преобразования характер его сохранится.

С другой стороны, негрудно видеть, что фокус или узел топологически тождественны, т. е. всегда можно указать такое топологическое преобразование плоскости в себя, при котором узел преобразуется в фокус и наоборот, — геометрически этот факт совершенно нагляден.

Мы можем теперь перейти к уточнению понятия качественной картины фазовых траекторий или топологической структуры разбиения на траектории. *Две топологические структуры разбиения фазовой плоскости на траектории, заданные двумя системами вида (6.1), называют тождественными, если существует топологическое (т. е. взаимно-однозначное и непрерывное) отображение плоскости в себя, при котором траектории одной системы отображаются в траектории другой* (при этом траектория отображается в траекторию как при прямом, так и при обратном отображении). Это определение тождественности двух структур является косвенным определением самого понятия топологической структуры разбиения на траектории. Можно сказать, что *под топологической структурой разбиения на траектории (или, что то же самое, под качественной картиной фазовых траекторий) понимают все те свойства этого разбиения, которые остаются инвариантными при всевозможных топологических отображениях плоскости в себя*. Примеры таких свойств были приведены выше.

Мы скажем, что проведено полное качественное исследование динамической системы, если установлена топологическая структура разбиения на траектории этой системы. Как уже указывалось, на основании рассмотренных частных примеров можно думать, что для установления топологической структуры разбиения на траектории нужно знать поведение не всех траекторий, а лишь некоторых особых траекторий.

2. Орбитно-устойчивые и орбитно-неустойчивые (особые) траектории. Перейдем теперь к рассмотрению особых и неособых траекторий и наряду с наглядными геометрическими фактами дадим

точные математические формулировки. При этом всюду в дальнейшем будем предполагать, что система (6.1) рассматривается в ограниченной области плоскости G . Будем рассматривать траекторию L , целиком лежащую в области G . Возьмем какую-нибудь положительную полутраекторию L_M^+ , выделенную из траектории L и начинающуюся в точке M , и рассмотрим ее ϵ -окрестность. Отметим при этом, что ϵ -окрестность полутраектории L_M^+ непременно содержит ϵ -окрестность предельного множества этой полутраектории.

Мы скажем, что *положительная полутраектория L_M^+ орбитно-устойчива*, если при любом заданном $\epsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что у всякой траектории L' , при $t = t_0$ проходящей через любую точку M' , принадлежащую δ -окрестности M , полутраектория L_M^+ (точки которой соответствуют значениям $t > t_0$) целиком лежит в ϵ -окрестности полутраектории L_M^+ .

Траектория L называется *орбитно-устойчивой* при $t \rightarrow +\infty$ или ω -орбитно-устойчивой, если всякая выделенная из нее положительная полутраектория орбитно-устойчива. Можно показать (геометрически это представляется очевидным), что если у траектории L хотя бы одна положительная полутраектория орбитно-устойчива, то всякая другая положительная полутраектория, выделенная из этой траектории, также будет орбитно-устойчивой, т. е. траектория L будет орбитно-устойчива при $t \rightarrow +\infty$ ¹⁾.

Полутраектории или траектории, не являющиеся орбитно-устойчивыми при $t \rightarrow +\infty$, называются орбитно-неустойчивыми при $t \rightarrow +\infty$, или ω -орбитно-неустойчивыми. Очевидно, если траектория L орбитно-неустойчива при $t \rightarrow +\infty$ и M — какая-нибудь ее точка, то всегда можно указать такое $\epsilon_0 > 0$, что при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ найдется траектория L' , проходящая при $t = t_0$ через точку δ -окрестности точки M и заведомо выходящая при некотором $t > t_0$ из ϵ_0 -окрестности полутраектории L . Отметим, что наличие орбитно-неустойчивых траекторий ни в коей мере не противоречит теореме о непрерывной зависимости от начальных значений, так как в этой теореме рассматривается лишь конечный промежуток значений t .

Все сказанное относительно положительной полутраектории с очевидными изменениями может быть повторено и относительно отрицательной полутраектории. Таким образом, мы будем также говорить о траектории, орбитно-устойчивой при $t \rightarrow -\infty$, или α -орбитно-устойчивой, и о траектории, орбитно-неустойчивой при $t \rightarrow -\infty$, или α -орбитно-неустойчивой. Будем называть траекторию L , орбитно-устойчивую как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$, *орбитно-устойчивой* или *неособой*. Всякую траекторию, не являющуюся орбитно-устойчивой, будем называть *орбитно-неустойчивой* или *особой*. Таким образом, особая траектория непременно орбитно-неустой-

¹⁾ Точное доказательство этого геометрически очевидного факта не совсем тривиально.

чива хотя бы в одну «сторону», т. е. она может быть орбитно-неустойчивой при $t \rightarrow +\infty$ или орбитно-неустойчивой при $t \rightarrow -\infty$ или орбитно-неустойчивой и при $t \rightarrow -\infty$, и при $t \rightarrow +\infty$.

Напомним при этом (см., например, гл. II, § 7), что траектория, являющаяся орбитно-устойчивой при $t \rightarrow +\infty$, может не быть устойчивой по Ляпунову при $t \rightarrow +\infty$.

Введенное таким образом понятие орбитной устойчивости и неустойчивости полутраектории и траектории характеризует поведение этой полутраектории или траектории не самой по себе, а по отношению к близким полутраекториям и траекториям. Поясним эти понятия на примерах траекторий, встречавшихся в рассмотренных выше динамических системах. Очевидно, всякая полутраектория, стремящаяся к состоянию равновесия типа узел или фокус, орбитно-устойчива ¹⁾. Орбитно-устойчивыми будут и все полутраектории, стремящиеся к предельным циклам. Орбитно-устойчивыми, т. е. неособыми траекториями, очевидно, будут траектории, стремящиеся при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ к узлам или фокусам или при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) стремящиеся к узлу, а при $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) — к предельному циклу, а также траектории, стремящиеся к предельным циклам и при $t \rightarrow +\infty$, и при $t \rightarrow -\infty$ (все такие траектории орбитно-устойчивы и при $t \rightarrow +\infty$, и при $t \rightarrow -\infty$).

Из этих примеров нетрудно видеть, что в случае, когда траектория неособая (орбитно-устойчивая), все близкие к ней траектории ведут себя весьма похожим образом. Но это совершенно не имеет места для тех траекторий, которые мы выше причисляли к «особым». Начнем с состояний равновесия. Узлы и фокусы орбитно-устойчивы или при $t \rightarrow +\infty$, или при $t \rightarrow -\infty$, но никогда не могут

¹⁾ Хотя геометрически этот факт совершенно нагляден, мы все же проведем то рассуждение, с помощью которого он доказывается. Как мы видели в случае, когда состояние равновесия O есть узел или фокус, существует семейство эллипсов без контакта, вложенных друг в друга и стягивающихся к точке O . При любом $\varepsilon > 0$ всегда можно указать эллипс без контакта C_ε , целиком лежащий в ε -окрестности точки O . Но ε -окрестность всякой стремящейся к O полутраектории непременно содержит ε -окрестность ее предельной точки O , и поэтому точки внутри такого эллипса C_ε принадлежат ε -окрестности любой стремящейся к O полутраектории. Пусть L_M^+ — одна из таких полутраекторий. Очевидно, в конечное время t она достигнет этого эллипса C_ε , войдет в него и уже больше из него не выйдет. Но, в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий, вокруг точки M всегда можно указать такую δ -окрестность, чтобы все траектории, проходящие при некотором значении $t = t_0$ через точки этой δ -окрестности, в течение конечного промежутка значений t достигли бы эллипса без контакта C_ε , не выходя до этого из ε -окрестности полутраектории L_M^+ (или, точнее, из ε -окрестности части L_M^+ до ее пересечения с эллипсом без контакта); войдя в эллипс C_ε , они, очевидно, из него уже больше не выйдут, а следовательно, не выйдут из ε -окрестности L_M^+ . Так как все сказанное справедливо при любом $\varepsilon > 0$, то отсюда, очевидно, следует орбитная устойчивость L_M^+ .

быть орбитно-устойчивы и при $t \rightarrow +\infty$, и при $t \rightarrow -\infty$; седло орбитно-неустойчиво и при $t \rightarrow +\infty$, и при $t \rightarrow -\infty$. Устойчивые и неустойчивые предельные циклы в отношении орбитной устойчивости ведут себя так же, как фокусы и узлы, т. е. могут быть орбитно-устойчивыми либо только при $t \rightarrow +\infty$, либо только при $t \rightarrow -\infty$. Полутраектории, стремящиеся к седлу (сепаратрисы седел), орбитно-неустойчивы. Действительно, если L_M^+ — стремящаяся к седлу полутраектория, то всегда можно указать такое $\epsilon > 0$, чтобы при любом $\delta > 0$ полутраектории, отличные от самой L_M^+ , проходящие через точки δ -окрестности точки M , при возрастании t непременно выходили бы из ϵ_0 -окрестности L_M^+ .

3. Возможные типы особых и неособых траекторий. Дадим теперь доказательство основных общих теорем об особых траекториях и о качественной картине разбиения фазовой плоскости на траектории.

Теорема I. Всякая траектория, являющаяся предельной для какой-либо отличной от нее траектории, является особой, т. е. орбитно-неустойчивой.

Пусть L^* — траектория, являющаяся предельной хотя бы для одной отличной от нее самой траектории L (пусть для определенности L стремится к L^* при $t \rightarrow +\infty$). Если L^* — состояние равновесия, то на L заведомо всегда найдется точка M , находящаяся на расстоянии d , отличном от нуля, от этого состояния равновесия. Если L^* не является состоянием равновесия, то на L также непременно найдутся точки (обозначим одну из них через M), находящиеся на отличном от нуля расстоянии от точек траектории L .

Действительно, таких точек могло бы не быть только в том случае, если бы траектория L была предельной траекторией для L^* . Но это невозможно, так как у L есть отличные от состояний равновесия предельные точки, именно точки L^* , а тогда, в силу теоремы III, L не может быть предельной ни для одной траектории, в частности для L^* . Возьмем теперь $\epsilon_0 < d$. Тогда точка M будет лежать вне ϵ_0 -окрестности L^* . Но L^* — предельная траектория для L и, следовательно, при любом $\delta > 0$ в δ -окрестности всякой точки L^* будут находиться точки L , соответствующие (при некотором выборе движения на L) сколь угодно большим значениям t , и в частности большим того, которому соответствует точка M . А так как точка M траектории L по самому выбору ϵ_0 лежит вне ϵ_0 -окрестности L^* , то отсюда, очевидно, следует, что L^* во всяком случае орбитно-неустойчива при $t \rightarrow -\infty$ (α -орбитно-неустойчива). Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим теперь полутраекторию, среди предельных точек которой есть отличные от состояний равновесия. Пусть L^+ — такая полутраектория и K — ее предельное множество. ϵ -окрестность предельного множества K является частью ϵ -окрестности L^+ . При этом для всякого $\epsilon > 0$ можно указать такое $T(\epsilon)$, чтобы точки L^+ , соответствующие значениям $t > T$, целиком лежали в ϵ -окрестности K .

Пусть P — какая-нибудь отличная от состояния равновесия точка множества K и l — отрезок без контакта, проведенный через эту точку. Как мы знаем (см. предложение VII), на отрезке l лежит последовательность точек полутраектории P_1, P_2, \dots, P_n , соответствующих неограниченно возрастающим значениям t и стремящихся к точке P . Будем обозначать через C_i замкнутую кривую, состоящую из дуги $P_i P_{i+1}$ полутраектории L^+ и части $P_i P_{i+1}$ отрезка l (такие замкнутые кривые рассматривались в предложении V).

Все замкнутые кривые C_i , начиная с достаточно большого i , очевидно, лежат целиком в ε -окрестности предельного множества K . При этом предельное множество K лежит либо внутри всех этих

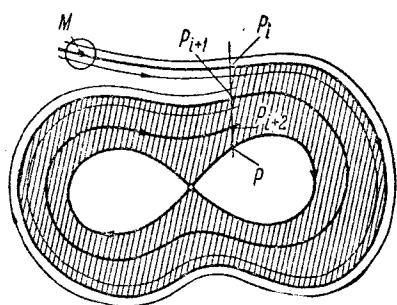


Рис. 295.

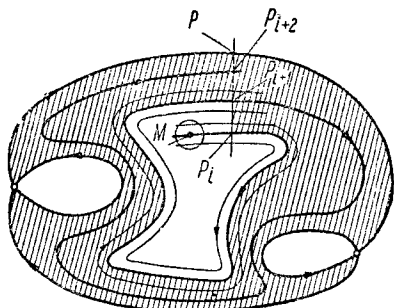


Рис. 296.

кривых C_i , либо вне всех этих кривых (рис. 295 и 296). Рассмотрим область G_i , граница которой состоит из замкнутой кривой C_i и предельного множества K (см. заштрихованные области на рис. 295 и 296). При любом $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого достаточно большого i , всякая область G_i целиком содержится в ε -окрестности K^1). Очевидно, все отличные от P_{i+1} и P точки части $P_{i+1}P$ дуги l принадлежат области G_i .

После этих предварительных замечаний докажем следующую теорему:

Теорема II. Незамкнутая полутраектория L^+ , имеющая среди своих предельных точек отличные от состояний равновесия, является орбитно-устойчивой.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ все траектории, проходящие через достаточно малую окрестность какой-либо точки полутраектории L^+ , с возрастанием t в конце концов войдут внутрь ε -окрестности предельного множества K и больше уже не выйдут из нее. В силу предыдущего, при любом $\varepsilon > 0$ можно указать такое целое число I (зависящее от ε), что при всяком

¹⁾ Геометрически этот факт очевиден, однако точное доказательство его проводится хотя и элементарным, но довольно кропотливым рассуждением.

$i > l$ область G_i , граница которой состоит из кривой C_i и множества K , целиком лежит в ε -окрестности K .

Пусть M — какая-нибудь точка полутраектории L^+ и $i > l$ — какое-нибудь фиксированное целое число. В силу предложения VIII всегда можно указать столь малую окрестность точки M , чтобы всякая траектория, при $t = t_0$ проходящая через точку этой окрестности, пересекала при некотором $t = T$ дугу l в точке, сколь угодно близкой к точке P_{i+1} , и, во всяком случае, в точке, лежащей между точками P_i и P_{i+2} (см. рис. 295 и 296). Но при значениях $t > T$ эта траектория, очевидно, будет находиться в области G_i и выйти из этой области не может.

Действительно, она не может пересечь ни кривую C_i (см. предложение V), ни предельное множество K , состоящее (в силу теоремы II § 2) из целых траекторий. Таким образом, теорема доказана.

В частности, из этой теоремы следует, что всякая полутраектория, стремящаяся к предельному циклу, орбитно-устойчива.

Перейдем теперь к выяснению того, когда замкнутая траектория является орбитно-устойчивой (т. е. неособой) и когда орбитно-неустойчивой (т. е. особой). Для этого отметим прежде всего, что для рассматриваемых нами динамических систем, т. е. систем с аналитическими правыми частями, могут представиться, как будет показано в следующем параграфе, следующие два случая:

- 1) либо все траектории, отличные от данной замкнутой траектории L и проходящие через достаточно малую окрестность L , не замкнуты;
- 2) либо все траектории, проходящие через все достаточно близкие к L точки, замкнуты ¹⁾.

Очевидно, первый случай имеет место, когда траектория L есть предельный цикл; второй случай — в консервативных системах.

Теорема III. *Замкнутая траектория L_0 , не являющаяся предельной ни для одной незамкнутой траектории, орбитно-устойчива.*

Для доказательства теоремы докажем сначала, что все траектории, проходящие через точки, достаточно близкие к траектории L_0 , замкнуты. Действительно, если бы среди сколь угодно близких к L_0 траекторий могли быть незамкнутые траектории, то тогда мы имели бы указанный выше случай 1), т. е. все траектории, кроме L_0 , проходящие через точки, достаточно близкие к L_0 , были бы не замкнуты. Но

¹⁾ Может представиться еще одна логическая возможность, когда через сколь угодно близкие к L точки проходят как замкнутые, так и незамкнутые траектории. Например, последовательность замкнутых траекторий L_i , вложенных одна в другую, может стягиваться к данной замкнутой траектории L , а между траекториями L_i могут находиться незамкнутые траектории. Однако этот случай невозможен, когда правые части динамической системы — аналитические функции.

тогда нетрудно видеть, что траектория L_0 непременно является предельной траекторией для незамкнутой траектории. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ таково, что в ε -окрестности L_0 не лежит ни одного состояния равновесия и ни одной замкнутой траектории, кроме L_0 . Проведем через какую-нибудь точку P на L_0 отрезок без контакта l . Пусть L' — какая-нибудь траектория, проходящая при $t = t_0$ через точку Q_1 отрезка l столь близко к P , что при некотором $\tau > t_0$, не выходя до этого из ε -окрестности L_0 , она пересекает отрезок l еще раз в точке Q_2 (см. предложение VIII § 2 настоящей главы). Обозначим через C замкнутую кривую, состоящую из дуги Q_1Q_2 траектории L' и части Q_1Q_2 дуги l . Кривая C , а также кольцевая область G между C и L_0 целиком лежат в ε -окрестности L_0 . С другой стороны, либо при $t < t_0$, либо при $t > \tau$ траектория L' будет целиком лежать в области G . Так как в силу выбора ε в ε -окрестности L_0 нет ни одного состояния равновесия и ни одной замкнутой траектории, кроме L_0 , то из теоремы IV § 2 настоящей главы, очевидно, следует, что L_0 является предельной траекторией для незамкнутой траектории L' , что противоречит предположению. Следовательно, все траектории, проходящие через точки некоторой достаточно малой окрестности L_0 , замкнуты.

Но нетрудно видеть, что тогда все достаточно близкие к L_0 траектории, в силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и в силу того, что они замкнуты, будут целиком лежать в ε -окрестности L_0 . Это и означает, что L_0 орбитно-устойчива. Теорема доказана.

В дополнение к приведенным теоремам сделаем ряд замечаний по поводу полутраекторий, стремящихся к состоянию равновесия.

В рассмотренных выше примерах мы видели, что такие полутраектории могут быть как орбитно-устойчивыми (например, полутраектории, стремящиеся к узлу или фокусу), так и орбитно-неустойчивыми (например, полутраектории, стремящиеся к седлу). В таких примерах состояние равновесия было простое: узел, фокус или седло. Можно показать в общем виде, не делая никаких предположений относительно того состояния равновесия, к которому стремится рассматриваемая полутраектория (так что это состояние равновесия может быть как простым, так и сложным), что в случае, когда такая полутраектория орбитно-неустойчива, она непременно должна быть граничной для некоторой седловой области. Не проводя доказательства, остановимся все же на этом несколько подробнее.

Если полутраектория L_M^+ , стремящаяся к состоянию равновесия O , орбитно-неустойчива, то можно указать $\varepsilon_0 > 0$ такое, что среди траекторий, проходящих через сколь угодно близкие к L точки, всегда найдется траектория, выходящая при возрастании t из ε_0 -окрестности L . Рассмотрим ε_0 -окрестность состояния равновесия O . Мы всегда можем предполагать ε_0 столь малым, чтобы ε_0 -окрестность

O не содержала ни одного состояния равновесия кроме O , ни одной замкнутой траектории, а также не содержала бы точку M полутраектории L_M^+ . Возьмем на L_M^+ точку Q , соответствующую $t = \tau$, такую, чтобы сама точка Q и все точки L_M^+ , соответствующие значениям $t > \tau$, лежали бы в ε_0 -окрестности состояния равновесия O . Проведем через точку Q отрезок без контакта l (целиком лежащий в ε_0 -окрестности O ; см. рис. 297).

Очевидно, все траектории, проходящие через достаточно близкие к точке M точки, непременно пересекут (при возрастании t) отрезок l . Предположим, что через какую-нибудь отличную от Q точку Q' отрезка l проходит полутраектория L'^+ , которая, не выходя из ε_0 -окрестности O , стремится к состоянию равновесия O при $t \rightarrow +\infty$. Нетрудно видеть, что тогда и все траектории, пересекающие часть QQ' отрезка l , при возрастании t не выходят из ε_0 -окрестности O , так как при возрастании t они входят внутрь «мешка», образованного частями QO и $Q'O$ полутраекторий L_M^+ и L'^+ и частью QQ' отрезка без контакта.

Если бы отрезок l по обе стороны от точки Q пересекал полутраектории, которые при возрастании t , не выходя из ε_0 -окрестности O , стремились бы к состоянию равновесия O , то существовала бы окрестность точки O , через все точки которой проходили бы полутраектории, не выходящие из ε_0 -окрестности O , что, очевидно, противоречит предположению. Поэтому через сколь угодно близкие к Q точки отрезка l , хотя бы по одну сторону от точки Q , непременно должны проходить траектории, выходящие при возрастании t из ε_0 -окрестности O (рис. 298). Можно показать, что тогда в случае рассматриваемой нами системы (т. е. системы, правые части которой — аналитические функции) непременно существует отрицательная полутраектория L^{*-} , стремящаяся к состоянию равновесия O , ограничивающая вместе с полутраекторией L_M^+ «седловую область» и при достаточно малом ε_0 имеющая точки вне ε_0 -окрестности состояния равновесия O (см. рис. 298).

Мы будем называть орбитно-неустойчивые полутраектории, стремящиеся к состоянию равновесия (безразлично, к простому, т. е. к седлу, или сложному), *сепаратрисами этого состояния равновесия*. Отметим при этом, что всякая полутраектория, выделенная из незамкнутой предельной траектории, заведомо является сепаратрисой. Однако очевидно, что сепаратриса может и не быть предельной. В этом случае она является траекторией, отделяющей друг от друга траектории различного поведения. Простой пример представлен на рис. 299.

На основании всего предыдущего мы можем сделать исчерпывающие заключения относительно того, какие полутраектории, а

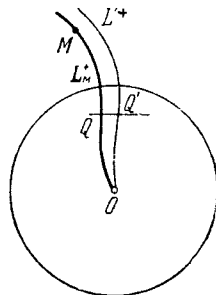


Рис. 297.

следовательно и какие траектории, орбитно-неустойчивы. Именно, всякая орбитно-неустойчивая (т. е. особая) траектория принадлежит к одному из следующих типов:

- 1) состояние равновесия¹⁾;
- 2) предельный цикл;
- 3) незамкнутая траектория, у которой хотя бы одна полутраектория является сепаратрисой какого-нибудь состояния равновесия.

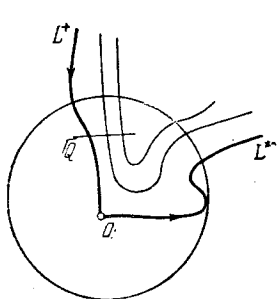


Рис. 298.

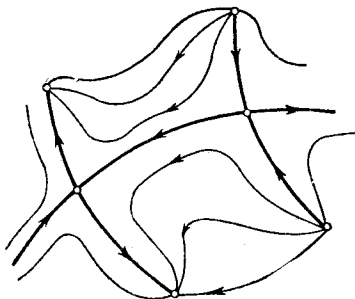


Рис. 299.

Свойство траектории быть особой или неособой является свойством топологически-инвариантным. Именно, имеет место следующая теорема:

Теорема IV. *Если разбиения на траектории, заданные двумя динамическими системами в ограниченной области G , тождественны, т. е. существует отображение плоскости в себя, при котором траектории этих систем отображаются друг в друга, то орбитно-устойчивые полутраектории отображаются в орбитно-устойчивые, а орбитно-неустойчивые — в орбитно-неустойчивые.*

Доказательство этой теоремы, не представляющее затруднений, мы опускаем.

4. Элементарные ячейки — области, заполненные неособыми траекториями одинакового поведения. Рассмотрим теперь совокупность всех особых траекторий данной системы (6.1), которую, как и всюду в настоящем параграфе, будем предполагать заданной в *ограниченной* области плоскости. Можно показать, что при сделанном нами предположении об аналитичности правых частей системы (6.1) *число особых траекторий конечно.* Для простейшего случая грубых

¹⁾ Состояние равновесия является орбитно-неустойчивым в случае, когда к нему стремится хотя бы одна траектория. Если же состояние равновесия — центр, то оно, очевидно, является орбитно-устойчивым. Однако мы во всех случаях будем причислять состояние равновесия к особым траекториям.

систем этот факт может быть просто установлен на основании изложенного в следующем параграфе¹⁾.

Особые траектории разделяют область G на частичные области, точки которых являются точками *неособых* (орбитно-устойчивых) траекторий. Граница каждой такой частичной области состоит из точек, принадлежащих особым траекториям, и из точек, граничных для области G . Мы ограничимся здесь рассмотрением только таких областей, в границу которых не входят граничные точки G . Такие области будем называть *элементарными ячейками* (или просто ячейками). Очевидно, ячейки состоят из целых орбитно-устойчивых (т. е. неособых) траекторий. Кроме того, нетрудно видеть, что граница всякой ячейки состоит из целых особых траекторий²⁾. Точки одной и той же особой траектории могут быть граничными для нескольких ячеек. На основании того, что число особых траекторий конечно, нетрудно показать, что число ячеек в области G конечно³⁾.

Рассмотрим теперь более подробно, как ведут себя неособые траектории одной и той же ячейки. Для этого приведем сначала несколько простых, но очень важных для дальнейшего вспомогательных предложений.

1. *Вокруг каждой точки орбитно-устойчивой полутраектории L^+ , стремящейся к состоянию равновесия O , всегда можно указать такую окрестность, чтобы все проходящие через точки этой окрестности траектории были орбитно-устойчивы при $t \rightarrow +\infty$ и стремились бы к тому же состоянию равновесия O , что и L^+ .*

¹⁾ Доказательство конечности числа особых траекторий в общем случае систем, правые части которых — аналитические функции, довольно сложно и заведомо выходит за рамки настоящей книги.

²⁾ Это утверждение доказывается следующим рассуждением, полностью аналогичным проведенным при доказательстве теоремы I § 1. Пусть точка P , граничная для некоторой компоненты, принадлежит особой траектории L_0 , не являющейся состоянием равновесия (в случае, когда L_0 есть состояние равновесия, сделанное утверждение очевидно). Тогда в любой сколь угодно малой окрестности точки P будут находиться точки данной ячейки. Но в силу того, что ячейка состоит из целых траекторий (очевидно, орбитно-устойчивых), и в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных значений, какую бы отличную от P точку P_1 траектории L_0 мы ни взяли, в любой сколь угодно малой окрестности точки P_1 также будут находиться точки рассматриваемой ячейки, что и означает, что точка P_1 , а значит и всякая точка L_0 , также будет граничной для данной ячейки.

³⁾ Подробное доказательство, которое мы опускаем, основывается на следующих элементарных предложениях. Прежде всего, особая траектория, не являющаяся предельной, может быть граничной не более чем для двух ячеек. В случае, когда особая траектория L_0 является граничной для двух ячеек, очевидно, точки одной ячейки лежат по одну ее сторону, а точки другой ячейки — по другую ее сторону. Далее доказывается следующее предложение, основывающееся на предыдущем: всякая особая траектория может быть граничной лишь для конечного числа ячеек.

Отсюда нетрудно показать, что число ячеек конечно.

Докажем это утверждение. Для этого заметим прежде всего, что вокруг каждой точки L^+ , очевидно, всегда можно взять столь малую окрестность, чтобы все точки этой окрестности принадлежали той же ячейке, что и L^+ ¹⁾, и, следовательно, являлись бы точками орбитно-устойчивых траекторий. Кроме того, всегда можно взять столь малым $\varepsilon > 0$, чтобы ε -окрестность полутраектории L^+ кроме состояния равновесия O , к которому стремится полутраектория L^+ , не содержала бы целиком ни одной орбитно-неустойчивой траектории. Но тогда все полутраектории, проходящие через достаточно малую окрестность любой точки L^+ , в силу орбитной устойчивости L^+ при $t \rightarrow +\infty$ не выходят из ε -окрестности L^+ , а следовательно, предельное множество этих полутраекторий также лежит целиком в ε -окрестности L^+ . Но это предельное множество должно состоять из целых особых траекторий, а так как в ε -окрестности L^+ лежит целиком только одна особая целая траектория — состояние равновесия O , то, значит, это предельное множество состоит из одного только состояния равновесия O , что и доказывает утверждение I.

II. *Вокруг каждой точки полутраектории L^+ , имеющей отличную от состояния равновесия предельную траекторию, всегда можно указать такую окрестность, что все проходящие через точки этой окрестности траектории орбитно-устойчивы при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$ имеют то же предельное множество, что и L^+ .*

III. *Вокруг каждой точки замкнутой орбитно-устойчивой траектории существует такая окрестность, что все проходящие через точки этой окрестности орбитно-устойчивые траектории замкнуты и одна лежит внутри другой.*

Предложения II и III доказываются рассуждениями, аналогичными проведенному при доказательстве предложения I (с небольшим дополнением), и мы их опускаем.

Используя приведенные вспомогательные предложения, можно доказать ряд теорем, полностью характеризующих поведение траекторий одной и той же ячейки.

Теорема V. *Если все траектории, принадлежащие одной и той же ячейке, не замкнуты, то они имеют одни и те же ω - и α -предельные множества.*

Для доказательства теоремы предположим противное, т. е. предположим, что существуют две принадлежащие одной и той же ячейке траектории L и L' , у которых предельные множества при $t \rightarrow +\infty$ (или $t \rightarrow -\infty$) различны.

Соединим какую-нибудь точку A на L и какую-нибудь точку B на L' непрерывной дугой I , целиком лежащей внутри рассматриваемой

¹⁾ Это, очевидно, следует из того, что по самому определению ячейки она является областью и, следовательно, все ее точки являются внутренними, т. е. всегда можно указать окрестность принадлежащей ячейке точки, целиком состоящую из точек этой же ячейки.

ячейки, так что через все точки дуги l проходят орбитно-устойчивые траектории (такая дуга l , очевидно, всегда может быть проведена в силу того, что по предположению траектории L и L' принадлежат одной и той же ячейке). Принимая во внимание сформулированные в настоящем параграфе предложения I и II, нетрудно видеть, что на дуге l всегда найдутся точки двух типов: через точки первого типа проходят траектории, имеющие при $t \rightarrow +\infty$ то же предельное множество, что и траектория L , через точки второго типа — траектории, имеющие при $t \rightarrow +\infty$ то же предельное множество, что и траектория L' . Очевидно, точками первого типа являются все достаточно близкие к A точки дуги l , а точками второго типа — все достаточно близкие к B точки l . При движении по дуге l от точки A к точке B мы должны перейти от точек первого типа к точкам второго типа. Следовательно, на дуге l непременно должна быть точка (обозначим ее через M_0), являющаяся либо последней точкой первого типа, либо первой точкой второго типа, либо, наконец, через точку M_0 проходит траектория, имеющая при $t \rightarrow +\infty$ предельное множество, отличное от предельных множеств траекторий L и L' . Траектория L_0 , проходящая через точку M_0 , очевидно, орбитно-устойчива (так как все точки дуги l принадлежат орбитно-устойчивым траекториям). Но точка M_0 не может быть последней точкой первого типа. Действительно, если бы она была точкой первого типа, т. е. траектория L_0 при $t \rightarrow +\infty$ имела бы то же предельное множество, что и L , то в силу того, что L_0 орбитно-устойчива, и в силу предложений I и II настоящей главы все траектории, проходящие через достаточно близкие к M_0 точки дуги l , имели бы то же предельное множество, что и траектория L , и, очевидно, точка M_0 не могла бы быть *последней* точкой первого типа. Совершенно так же можно показать, что точка M_0 не может быть первой точкой второго типа. Предположим, наконец, что при $t \rightarrow +\infty$ L_0 стремится к предельному множеству, отличному от предельного множества L и от предельного множества L' . Но тогда, в силу предложений I и II, и у всех траекторий, проходящих через достаточно близкие к M_0 точки дуги l , было бы то же предельное множество, что у L_0 , а это, очевидно, означает, что точка M_0 не могла бы быть первой точкой не первого типа, что противоречит сделанному предположению. Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассуждением, полностью аналогичным проведенному при доказательстве последней теоремы, можно доказать следующую теорему:

Теорема VI. *Если внутри какой-нибудь ячейки существует хоть одна замкнутая траектория, то все траектории этой ячейки замкнуты, одна лежит внутри другой, и между любыми двумя траекториями этой ячейки не могут лежать точки, не принадлежащие этой ячейке.*

Приведенные теоремы в общем виде устанавливают тот факт, который мы охарактеризовали словами: «неособые траектории внутри

каждой ячейки ведут себя одинаковым образом», и вносят точный смысл в эти слова. Очевидно, это не имеет места для тех траекторий, которые мы назвали особыми.

5. Односвязные и двухсвязные ячейки. Естественно поставить теперь вопрос о том, какие возможны типы отдельных ячеек у рассматриваемых нами динамических систем. Именно, так же как мы говорим о топологической структуре разбиения на траектории области плоскости G , в которой определена динамическая система, можно говорить о топологической структуре разбиения на траектории отдельной ячейки и интересоваться вопросом о классификации ячеек по топологической структуре их разбиения на траектории. При этом мы можем рассматривать либо ячейку как таковую, либо ячейку вместе с границей (состоящей из целых особых траекторий), т. е. замкнутую ячейку, являющуюся замкнутой областью (для целей качественного исследования больший интерес представляет рассмотрение именно ячеек вместе с границей).

Не останавливаясь подробно на вопросе такой классификации ячеек, мы все же приведем (без доказательств) основные относящиеся сюда предложения.

Основной топологической характеристикой всякой области, а значит, в частности, и ячейки, является *число связности*¹⁾, и вопрос, естественно возникающий первым, — это какова связность, возможная у ячеек.

Следующая теорема, которую мы формулируем без доказательства²⁾, дает ответ на этот вопрос.

¹⁾ Граница всякой области может состоять либо из одного связного куска — «граничного континуума», т. е. замкнутого связного множества, либо из двух, трех и т. д. граничных континуумов (либо из бесконечного числа граничных континуумов, но этот случай не представляет для нас никакого интереса). Если граница области состоит из одного граничного континуума, то область называется односвязной; если из двух, трех и т. д., то область соответственно называется двухсвязной, трехсвязной и т. д. В случае, когда область двухсвязна, трехсвязна и т. д., один из граничных континуумов называется внешним граничным континуумом, остальные — внутренними.

Простейшим примером односвязной области является область внутри простой замкнутой кривой (в частности, внутри окружности), двухсвязной — кольцевая область между двумя простыми замкнутыми кривыми, трехсвязной — область, граница которой состоит из одной внешней замкнутой кривой и еще двух простых замкнутых кривых, лежащих внутри внешней замкнутой кривой и одна вне другой. Отметим при этом, что в случае двухсвязной, трехсвязной и т. д. области внутренние, граничные континуумы, в частности, могут быть отдельными точками. Очевидно, области с различным числом связности заведомо не являются топологически тождественными (здесь мы рассматриваем области как точечные множества и говорим об их топологической тождественности как точечных множеств).

²⁾ Доказательство этой теоремы хотя и просто по идее, но довольно длинно. Оно основывается на следующем вспомогательном предложении: на каждом из граничных континуумов ячейки непременно лежат предельные точки траекторий этой ячейки.

Теорема VII. *Всякая ячейка не более чем двухсвязна.*

Нетрудно видеть, что ячейки, заполненные замкнутыми траекториями, всегда двухсвязны. Это непосредственно следует из теоремы VI и того факта, что внутри замкнутой траектории всегда лежит состояние равновесия. Ячейки, заполненные незамкнутыми траекториями, могут быть как односвязными, так и двухсвязными.

Приведем без доказательства еще одну теорему, в которой устанавливается весьма существенное свойство границ двухсвязной ячейки, заполненной незамкнутыми траекториями.

Теорема VIII. *В случае, когда ячейка, заполненная незамкнутыми траекториями, двухсвязна, один из ее граничных континуумов является α -предельным, а другой — ω -предельным множеством для траекторий этой ячейки.*

Таким образом, в случае двухсвязной ячейки, заполненной незамкнутыми траекториями, у ячейки не может быть ни одной граничной точки, не являющейся предельной для траекторий этой ячейки.

Используя приведенные теоремы, можно исчерпывающим образом описать границы, возможные у ячеек, и установить условия (геометрически эти условия представляются очевидными), при которых две ячейки, рассматриваемые без границ или вместе с границами, имеют одинаковую топологическую структуру разбиения на траектории¹⁾. Однако это рассмотрение выходит за рамки настоящей книги.

В следующем параграфе будет дана исчерпывающая классификация замкнутых ячеек в случае так называемых «грубых» систем. В настоящем же параграфе мы ограничимся только тем, что приведем несколько (геометрических) примеров односвязных и двухсвязных ячеек.

Примеры односвязных областей даны на рис. 300 и 301 (см. также рис. 306 и 309). Примеры двухсвязных областей даны на рис. 302 и 303 (см. также рис. 305). Жирными линиями на этих рисунках обозначены особые траектории, входящие в границы ячейки²⁾.

¹⁾ Нетрудно видеть, что число различных типов ячеек (т. е. ячеек с различной топологической структурой разбиения на траектории) в случае, когда ячейка рассматривается без границы, конечно. Число различных типов замкнутых ячеек, т. е. в случае, когда ячейка рассматривается вместе с границей, неограниченно увеличивается при увеличении числа состояний равновесия у динамической системы. Однако в случае грубых систем, рассмотренных в следующем параграфе, независимо от числа состояний равновесия системы существует лишь конечное число типов замкнутых ячеек.

²⁾ Отметим, что в примере на рис. 301 граница ячейки имеет довольно сложный характер. Все точки кривой вида восьмерки являются так называемыми «недостижимыми точками границы»; именно, не существует простой дуги, концом которой являлась бы точка на кривой вида восьмерки, а остальные точки принадлежали бы ячейке.

В заключение остановимся еще в общих чертах, не приводя никаких доказательств, на вопросах, касающихся полного качественного исследования данной динамической системы (A) в области G .

Особые траектории разделяют область G на частичные области — именно на ячейки и частичные области, в границу которых входят точки границы G . Если мы будем знать топологическую структуру

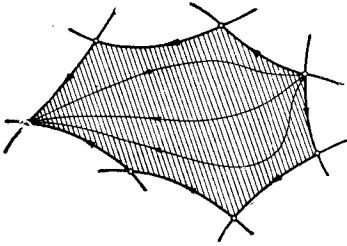


Рис. 300.

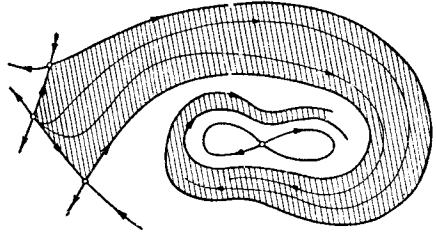


Рис. 301.

разбиения на траектории всех этих частичных областей и, кроме того, будем знать их взаимное расположение, то мы будем считать законченным качественное исследование рассматриваемой динамической системы в области G .

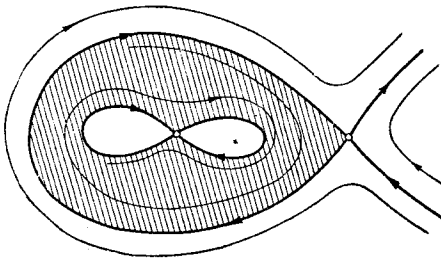


Рис. 302

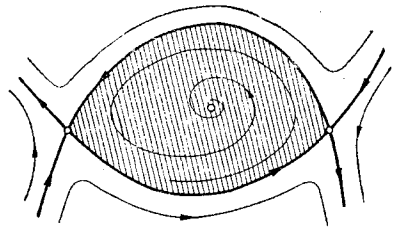


Рис. 303.

Очевидно, для того чтобы знать взаимное расположение частичных областей, необходимо знать расположение особых траекторий и поведение траекторий в ячейках.

Можно показать, что если известен характер каждого состояния равновесия, известно взаимное расположение предельных множеств (состояний равновесия, предельных циклов и предельных множеств типа III; см. § 1), а также расположение сепаратрис, не являющихся предельными, то это позволяет полностью установить топологическую структуру всех ячеек и их взаимное расположение, т. е. по-

звolyет полностью установить топологическую структуру разбиения на траектории в области G^1).

Доказательство этого факта, основного в вопросе качественного исследования динамических систем и являющегося геометрически совершенно наглядным, хотя и элементарно по идее, но все же далеко выходит за рамки настоящей книги. В следующем параграфе мы вернемся к этому вопросу при рассмотрении грубых систем.

§ 4. Грубые системы [17, 145]

1. Грубые динамические системы. Вопрос о том, какими свойствами должны обладать динамические системы (модели), соответствующие физическим задачам, в общих чертах рассматривался во Введении. Вернемся к этому вопросу и остановимся на нем более подробно.

При написании дифференциального уравнения, как мы уже говорили, мы никогда не учитываем и не можем учесть всех без исключения факторов, которые так или иначе влияют на поведение рассматриваемой физической системы. С другой стороны, ни один из учитываемых нами факторов не может оставаться абсолютно неизменным во время движения физической системы. Когда мы при рассмотрении той или другой конкретной физической задачи приписываем параметрам вполне определенные фиксированные значения, то это имеет смысл только при условии, что малые изменения параметров не изменяют существенно характера движения. Предположим, что рассматриваемая динамическая система соответствует некоторой реальной физической задаче. В правые части такой динамической системы всегда войдет то или другое число параметров, соответствующих тем параметрам рассматриваемой физической задачи, которые учитывались при написании дифференциальных уравнений.

Если эта динамическая система хорошо отображает свойства рассматриваемой физической задачи, то в силу сказанного выше при малых изменениях параметров у нее, вообще говоря, должны сохраняться те черты, которые характеризуют поведение рассматриваемой физической модели. Прежде всего, у динамических систем, соответствующих физическим задачам, при малых изменениях параметров должна оставаться неизменной качественная структура разбиения на траектории. Если же некоторые качественные черты обусловлены определенными количественными соотношениями между параметрами, входящими в дифференциальные уравнения, описывающие физическую задачу, то эти качественные черты исчезают при сколь

¹⁾ Описание взаимного расположения особых траекторий называется «схемой», определяющей качественную структуру разбиения на траектории (см. [82]).

угодно малом изменении параметров. Ясно, что такие качественные черты, вообще говоря, не наблюдаются в реальных системах.

Поэтому естественно прежде всего выделить класс динамических систем, у которых топологическая структура фазовых траекторий не меняется при малых изменениях дифференциальных уравнений. Такие системы мы будем называть «*грубыми*». В настоящем параграфе дается точное математическое определение грубых систем и устанавливаются их основные свойства.

Пусть данная система (6.1)

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

— в дальнейшем мы будем называть ее «системой (A)» — рассматривается в некоторой ограниченной области плоскости G . Предположим, кроме того, что граница области G является «циклом без контакта», т. е. простой замкнутой (несамопересекающейся) кривой C , которую все траектории системы (A) пересекают и ни одна не касается¹⁾. Это предположение (не являющееся необходимым в излагаемой ниже теории грубых систем) хотя и ограничивает весьма сильно рассматриваемый класс системы, но освобождает дальнейшее изложение от непринципиальных усложнений.

Будем наряду с системой (A) рассматривать измененную систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) + p(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) + q(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

где $p(x, y)$, $q(x, y)$ — малые добавки к правым частям системы (6.1), являющиеся также аналитическими функциями x и y . При этом в дальнейшем, кроме малости самих функций $p(x, y)$ и $q(x, y)$, мы будем требовать также и малости частных производных от этих функций. Измененную систему мы в дальнейшем будем называть «системой (\tilde{A})».

Очевидно, при всех достаточно малых $p(x, y)$ и $q(x, y)$ кривая C будет циклом без контакта также и для траекторий системы (\tilde{A}).

Напомним предварительно основные общие теоремы, касающиеся изменения решений системы дифференциальных уравнений при малых изменениях правых частей этих уравнений. На этих теоремах основывается все дальнейшее изложение. Первая из этих теорем — теорема IV Дополнения I — может быть в геометрической форме сформулирована следующим образом:

¹⁾ Этот цикл без контакта должен быть столь велик, чтобы можно было ограничиться изучением характера траекторий в области внутри него, не суживая физической задачи.

Задавая любой конечный промежуток времени, всегда можно взять систему (\tilde{A}) , столь близкую к данной системе (A) , и столь близкие начальные точки, чтобы соответствующие траектории систем (A) и (\tilde{A}) в течение выбранного промежутка времени сколь угодно мало отличались друг от друга.

Однако основной для дальнейшего является теорема V Дополнения I, уточняющая по сравнению с теоремой IV характер близости решений систем (A) и (\tilde{A}) в случае, когда близки не только правые части систем (A) и (\tilde{A}) , но и их частные производные.

В силу этой теоремы, если

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0),$$

$$y = \psi(t - t_0, x_0, y_0)$$

— решение системы (A) , а

$$x = \tilde{\varphi}(t - t_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0),$$

$$y = \tilde{\psi}(t - t_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$$

— решение системы (\tilde{A}) , то на любом конечном промежутке времени не только сами функции $\varphi(t - t_0, x_0, y_0)$ и $\tilde{\varphi}(t - t_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$, $\psi(t - t_0, x_0, y_0)$ и $\tilde{\psi}(t - t_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$, но и их частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}_0}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}_0}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$ и $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}_0}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y_0}$ и $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}_0}$ будут сколь угодно близки, когда правые части системы (\tilde{A}) и их частные производные достаточно близки к правым частям системы (A) и их частным производным, а начальная точка $\tilde{M}_0(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ достаточно близка к точке $M_0(x_0, y_0)$.

На основании приведенных теорем каждая траектория в части, соответствующей конечному промежутку времени, мало меняется при малых изменениях правых частей. Однако отсюда еще вовсе не следует, что она будет мало меняться в течение неограниченного промежутка времени. Отсюда, конечно, тем более не следует, что разбиение на траектории у близких систем всегда имеет одинаковый характер¹⁾.

Требование неизменности качественной картины разбиения на траектории, т. е. требование «грубости» системы, может быть мате-

¹⁾ Простейшим примером системы, у которой качественная картина траекторий изменяется при малых изменениях правых частей, может служить система

$$\frac{dx}{dt} = ax + by; \quad \frac{dy}{dt} = -bx + ay,$$

у которой при $a = 0$ все траектории замкнуты (начало координат — центр), а при столь угодно малых $a \neq 0$ нет ни одной замкнутой траектории (начало координат — фокус).

матически сформулировано следующим образом: система (A) называется «грубой» (в области G), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при всевозможных аналитических функциях $p(x, y)$, $q(x, y)$, удовлетворяющих в области G неравенствам:

$$\left. \begin{aligned} |p(x, y)| < \delta, \quad |q(x, y)| < \delta, \quad |p'_x(x, y)| < \delta, \\ |p'_y(x, y)| < \delta, \quad |q'_x(x, y)| < \delta, \quad |q'_y(x, y)| < \delta, \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

существует топологическое (т. е. взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное) отображение области G в себя, при котором каждая траектория системы (A) отображается в траекторию измененной системы (\tilde{A}) и обратно, и при этом соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем ε .

Приведем определение «грубых систем» без предположения, что граница области, в которой рассматривается динамическая система, является циклом без контакта. Введем сначала некоторую вспомогательную терминологию.

Пусть G_1 и G_1^* — две замкнутые области. Мы скажем, что эти области ε -близки, если существует топологическое отображение этих областей друг на друга, при котором соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем ε .

Предположим, что в двух ε -близких замкнутых областях G_1 и G_1^* определены соответственно динамические системы (A_1) и (A_1^*) .

Мы скажем, что разбиение замкнутой области G_1 на траектории системы (A) ε -тождественно разбиению замкнутой области G_1^* на траектории системы (A_1^*) , если существует топологическое отображение G_1 на G_1^* , переводящее траектории системы (A) и траектории системы (\tilde{A}) друг в друга, при котором соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем ε .

Пусть система (A) определена в области G и пусть G_1 — какая-нибудь замкнутая область, целиком (вместе с границей) содержащаяся в G . Система (A) называется *грубой* в замкнутой области G_1 , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что какую бы систему (\tilde{A}), удовлетворяющую в области G неравенствам (6.6), мы ни взяли, найдется содержащаяся в области G замкнутая область G_1^* , разбиение которой на траектории системы (A) ε -тождественно разбиению области G_1 на траектории системы (\tilde{A}).

Таким образом, в случае, когда система (A) грубая, разбиение на траектории области G у всякой измененной системы (\tilde{A}), правые части которой вместе с их частными производными достаточно близки к правым частям системы (6.5), топологически тождественно разбиению на траектории, заданному системой (A), и, кроме того, мало сдвинуто (меньше чем на ε) по отношению к разбиению на траектории, заданному системой (A) (при этом $\varepsilon > 0$ может быть взято сколь угодно малым). В частности, например, очевидно, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ ¹⁾ и надлежащем $\delta > 0$ в ε -окрестности каждого состояния равновесия системы (A) будет лежать одно и только

¹⁾ Именно при таком $\varepsilon > 0$, что в ε -окрестности всякого данного состояния равновесия системы (A) кроме O не лежат уже больше другие состояния равновесия и в ε -окрестности каждого данного предельного цикла системы (\tilde{A}) не лежат другие предельные циклы.

одно состояние равновесия системы (\tilde{A}) и при этом того же характера, что и у системы (A), и в ϵ -окрестности каждого предельного цикла системы (A) один и только один предельный цикл системы (\tilde{A}) и т. д.

Переходя к установлению необходимых и достаточных условий грубости, сделаем одно весьма важное замечание: ограничения, которые требование грубости накладывает на рассматриваемые динамические системы, таково, что они выделяют «общий случай». Другими словами, всякая наперед заданная система, вообще говоря, является грубой, в то время как негрубые системы являются исключительными системами (ср. также § 5 настоящей главы).

В дальнейшем, говоря о системе (\tilde{A}), сколь угодно близкой к системе (A), \bullet сколь угодно малых добавках к правым частям системы (A) или о сколь угодно малых изменениях динамической системы и т. д., мы всегда будем подразумевать малость не только самих функций $p(x, y)$, $q(x, y)$, но и их частных производных.

2. Грубые состояния равновесия. Установим прежде всего, какие ограничения накладывает требование грубости на существующие в этой системе состояния равновесия.

Имеет место следующая теорема:

Теорема I. *У грубой системы не может быть состояния равновесия, для которого*

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Действительно, если состояние равновесия $O(x_0, y_0)$ таково, что для него $\Delta = 0$, то это, очевидно, означает, что кривые $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$ в их общей точке $O(x_0, y_0)$ не просто пересекаются, а имеют соприкосновение того или другого порядка. Нетрудно показать¹⁾, что в этом случае всегда найдутся аналитические функции

$$\tilde{P}(x, y), \quad \tilde{Q}(x, y),$$

сколь угодно близкие (вместе со своими частными производными) к функциям $P(x, y)$, $Q(x, y)$, такие, что в сколь угодно малой окрестности точки $O(x_0, y_0)$ (т. е. при любом сколь угодно малом $\epsilon > 0$) у кривых

$$\tilde{P}(x, y) = 0, \quad \tilde{Q}(x, y) = 0$$

¹⁾ Точное аналитическое доказательство, хотя и не представляющее особых затруднений, мы опускаем ввиду геометрической наглядности этого факта.

будет существовать более одной общей точки. А это, очевидно, и означает, что система (A) не может быть грубой, и следовательно, теорема доказана.

В случае, когда $\Delta(x_0, y_0) \neq 0$, изоклины

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0$$

в общей точке $O(x_0, y_0)$ имеют простую точку пересечения (такие состояния равновесия называются простыми).

Нетрудно показать в этом случае, что если взять функции $\tilde{P}(x, y)$, $\tilde{Q}(x, y)$, достаточно близкие (вместе со своими производными) к функциям $P(x, y)$, $Q(x, y)$, то кривые $\tilde{P}(x, y) = 0$, $\tilde{Q}(x, y) = 0$ будут иметь только одну общую точку, близкую к точке $O(x_0, y_0)$ ¹⁾. Однако отсюда еще не следует, что условие $\Delta \neq 0$ является достаточным для того, чтобы состояние равновесия было «грубым», т. е. могло существовать в грубой системе; мы уже видели, что линейная система, у которой состояние равновесия есть центр, — негрубая, хотя $\Delta \neq 0$. Этот вопрос требует дополнительного рассмотрения, к которому мы и перейдем.

Перечислим состояния равновесия, возможные при условии $\Delta \neq 0$. Если обозначить

$$\sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0), \quad \Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & Q'_x(x_0, y_0) \\ P'_y(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

то, как мы видели выше (см. § 2 и 4 гл. V), возможны следующие случаи:

1) $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta > 0$. Корни характеристического уравнения действительные и одинаковых знаков. Состояние равновесия — узел (устойчивый или неустойчивый в зависимости от знака σ).

2) $\Delta < 0$. Корни характеристического уравнения действительные и разных знаков. Состояние равновесия — седло.

3) $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, $\sigma \neq 0$. Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные. Состояние равновесия есть фокус (устойчивый или неустойчивый в зависимости от знака σ).

Нетрудно убедиться в том, что в случаях 1), 2) и 3) состояние равновесия является «грубым», т. е. может существовать в грубой системе. В дальнейшем мы остановимся на этом несколько подробнее.

4) $\Delta > 0$, $\sigma = 0$. Корни характеристического уравнения чисто мнимые. В этом случае характер состояния равновесия в общем виде

¹⁾ Отметим, что при этом существенно требование малости не только добавок $p(x, y)$, $q(x, y)$, но и их частных производных. Действительно, можно показать, что всегда существуют сколь угодно малые добавки $p(x, y)$, $q(x, y)$, у которых частные производные не малы, такие, что в случае $\Delta \neq 0$ кривые $P(x, y) + p(x, y) = 0$, $Q(x, y) + q(x, y) = 0$ будут иметь любое наперед заданное число общих точек, сколь угодно близких к точке $O(x_0, y_0)$.

не был установлен (для линейной системы состояние равновесия, у которого корни чисто мнимые, есть центр).

Мы рассмотрим этот случай подробно (он рассматривается значительно сложнее, чем случаи 1), 2) и 3)) и покажем, что в этом случае состояние равновесия всегда является «негрубым», т. е. не может существовать в грубой системе.

Метод, с помощью которого мы будем устанавливать характер состояния равновесия в случае 4), применим также и в случае 3). А так как единообразное рассмотрение этих двух случаев удобно для дальнейшего, то мы положим сейчас, что корни характеристического уравнения — комплексные сопряженные.

Предполагая, что состояние равновесия O совпадает с началом координат, и приводя надлежащим линейным преобразованием переменных систему (A) к каноническому виду, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - by + g(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= bx + ay + h(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

где $g(x, y)$, $h(x, y)$ — ряды, расположенные по степеням x и y , начинающиеся с членов не ниже второй степени, а a и b — действительная и мнимая части корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения, так что $\lambda_1 = a + jb$, $\lambda_2 = a - jb$, где $b \neq 0$; при $a \neq 0$ мы имеем случай 3), а при $a = 0$ — случай 4).

Функции $g(x, y)$ и $h(x, y)$ могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots, \\ h(x, y) &= Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \dots, \end{aligned}$$

где $P_i(x, y)$ и $Q_i(x, y)$ — однородные многочлены степени i .

Переходя в системе (A) (см. (6.7)) к полярным координатам, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{ar^2 + r \cos \theta g(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta h(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r} = \\ &= ar + r^2 [P_2(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q_2(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta] + \dots \\ &\dots + r^i [P_i(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q_i(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta] + \dots \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r^2} [br^2 + g(r \cos \theta, r \sin \theta)r \cos \theta - h(r \cos \theta, r \sin \theta)r \sin \theta] = \\ &= b + r [Q_2(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P_2(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta] + \dots \\ &\dots + r^{i-1} [Q_i(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P_i(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Так как $b \neq 0$, то при всех достаточно малых r , т. е. при всех достаточно малых x и y ,

$$\frac{d\theta}{dt} \neq 0.$$

Это, очевидно, означает, что любая полупрямая

$$\theta = \text{const}$$

во всех достаточно близких к началу координат точках (отличных от начала координат) не имеет контактов с траекториями, при этом в зависимости от знака b будем иметь: либо $\frac{d\theta}{dt} > 0$, либо $\frac{d\theta}{dt} < 0$.

Нам удобнее будет в дальнейшем рассматривать вместо системы (6.8) одно уравнение, получающееся делением первого из уравнений (6.8) на второе:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{ar + r^2 [P_2(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q_2(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta] + \dots}{b + r [Q_3 \cos \theta - P_3 \sin \theta] + r^2 [Q_3 \cos \theta - P_3 \sin \theta] + \dots} = R(r, \theta).$$

Принимая во внимание, что знаменатель правой части этого уравнения не обращается в нуль при $r=0$, мы, очевидно, можем разложить правую часть по степеням r :

$$\frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta) = rR_1(\theta) + r^2R_2(\theta) + \dots, \quad (6.9)$$

где коэффициенты $R_i(\theta)$ — периодические функции θ с периодом 2π , и ряд в правой части сходится при всех θ , во всяком случае для всех достаточно малых значений r . Нетрудно видеть¹⁾, что

$$\left. \begin{aligned} R_1(\theta) &= \frac{a}{b}, \\ R_2(\theta) &= \frac{P_2 \cos \theta + Q_2 \sin \theta}{b} - \frac{a}{b^2} (Q_2 \cos \theta - P_2 \sin \theta). \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Пусть

$$r = f(\theta, r_0)$$

— решение уравнения (6.9), обращающееся в r_0 при $\theta=0$, так что

$$f(0, r_0) \equiv r_0.$$

Очевидно, всякому такому решению уравнения (6.9) соответствует траектория системы (A), пересекающая полупрямую $\theta=0$ в точке, лежащей на расстоянии r_0 от начала; и обратно, всякой траектории, пересекающей полупрямую $\theta=0$ в достаточно близкой к началу точке, соответствует решение $r=f(\theta, r_0)$, где r_0 принимает некоторое данное значение. Кроме того, нетрудно видеть, что все от-

¹⁾ Выражения для коэффициентов $R_i(\theta)$ через P_i и Q_i проще всего могут быть получены следующим образом: из (6.9), очевидно, следует тождественное равенство: $ar + (P_2 \cos \theta + Q_2 \sin \theta)r^2 + \dots = (R_1r + R_2r^2 + \dots) \times [b + r(Q_2 \cos \theta - P_2 \sin \theta) + r^2(Q_3 \cos \theta - P_3 \sin \theta) + \dots]$. Приравнявая члены с одинаковыми степенями, мы получим рекуррентные соотношения для определения $R_i(\theta)$. В (6.10) через P_2 и Q_2 обозначены соответственно $P_2(\cos \theta, \sin \theta)$ и $Q_2(\cos \theta, \sin \theta)$.

личные от состояния равновесия O траектории, проходящие через достаточно близкие к O точки, пересекают прямую $\theta=0$ в достаточно близких от начала точек¹⁾. Поэтому, рассматривая решение $r=f(\theta, r_0)$ при всех достаточно малых r_0 , мы рассмотрим все траектории, проходящие через достаточно близкие к O точки. В силу того, что правая часть уравнения (6.9) — аналитическая функция θ и r , функция $f(\theta, r_0)$ будет аналитической функцией θ, r_0 (см. теорему III Дополнения I) и может быть разложена в ряд по степеням r_0 , сходящийся при всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$ для всех достаточно малых значений r_0 ($|r_0| < \rho_0$, где $\rho_0 > 0$ — некоторая достаточно малая величина):

$$r=f(\theta, r_0)=u_1(\theta)r_0+u_2(\theta)r_0^2+\dots \quad (6.11)$$

Так как $r=f(\theta, r_0)$ есть решение уравнения (6.9), то, подставляя выражение (6.11) в это уравнение, мы должны получить тождественное относительно r_0 равенство, т. е.

$$\left(\frac{du_1}{d\theta}r_0+\frac{du_2}{d\theta}r_0^2+\dots\right)=R_1(\theta)(u_1r_0+u_2r_0^2+\dots)+ \\ +R_2(\theta)(u_1r_0+u_2r_0^2+\dots)^2+\dots$$

Отсюда, приравнявая выражения при одинаковых степенях r_0 , мы получим рекуррентные дифференциальные уравнения для определения функций $u_i(\theta)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{d\theta} &= u_1R_1, \\ \frac{du_2}{d\theta} &= u_2R_1 + R_2u_1^2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Кроме того, из условия

$$f(0, r_0) \equiv r_0$$

мы, очевидно, получаем:

$$u_1(0) = 1, \quad u_i(0) = 0, \quad i = 2, 3, \dots$$

Этими начальными условиями совместно с дифференциальными уравнениями (6.12) функции $u_i(\theta)$ определяются полностью. В частности, первое из этих уравнений дает:

$$u_1(\theta) = e^{\frac{a}{b}\theta},$$

откуда, в частности, следует, что при $a=0$

$$u_1(\theta) = 1.$$

¹⁾ Это можно показать на основании теоремы II Дополнения I, если принять во внимание, что решение $r=0$ определено при всех θ .

Так как во всех достаточно близких к началу O точках (отличных от O) прямая $\theta = 0$ не имеет контактов с траекториями системы (A), то достаточно малый отрезок этой прямой с концом в точке O будет вполне аналогичен отрезку без контакта, хотя один конец его упирается в состояние равновесия. Если в решении $r = f(\theta, r_0)$ положить $\theta = 2\pi$, то, очевидно, при всяком данном r_0 ($|r_0| < \rho_0$) значение r соответствует «последующей» точке пересечения траектории с полупрямой $\theta = 0$, а функция $r = f(2\pi, r_0) = u_1(2\pi)r_0 + \dots$ будет полностью аналогична функции последования, о которой шла речь в § 7 гл. V. При этом, конечно, мы должны рассматривать только положительные значения r_0 , так как отрицательные значения не имеют геометрического смысла. Пользуясь этой функцией, мы можем сделать исчерпывающие заключения относительно возможного характера траекторий в окрестности состояния равновесия O .

Введем функцию $\Psi(r_0) = f(2\pi, r_0) - r_0 = \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0^2 + \dots$.
Здесь

$$\alpha_1 = u_1(2\pi) - 1 = e^{2\pi \frac{a}{b}} - 1,$$

$$\alpha_k = u_k(2\pi), \quad k > 1.$$

Очевидно, значения r_0 (и только такие значения), при которых

$$\Psi(r_0) = f(2\pi, r_0) - r_0 = 0,$$

соответствуют замкнутым траекториям.

Отметим, что при $a = 0$, т. е. в случае 4), мы имеем $\alpha_1 = 0$. Кроме того, коэффициенты α_i в разложении функции $\Psi(r_0)$ обладают следующими свойствами: если $\alpha_1 = 0$, то непременно и $\alpha_2 = 0$. И вообще, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2n-1} = 0$, то непременно и $\alpha_{2n} = 0$, т. е. первый не равный нулю коэффициент всегда нечетного номера¹⁾.

Возможны следующие два случая:

а) Хотя бы один из коэффициентов α_j отличен от нуля.

¹⁾ Покажем, что в случае, когда $a = 0$, а следовательно и $\alpha_1 = 0$, непременно и $\alpha_2 = 0$. Если $a = 0$, то в формулах (6.12) $R_1 = \frac{a}{b} = 0$. Первое из уравнений принимает вид $\frac{du_1}{d\theta} = 0$. Отсюда, принимая во внимание начальные условия, $u_1 = 1$. Второе из уравнений (6.12) будет тогда $\frac{du_2}{d\theta} = R_2(\theta)$, но в силу (6.10) $R_2(\theta)$ есть однородная функция $\cos \theta$ и $\sin \theta$ третьей степени. Интегрируя обе части последнего уравнения в пределах от 0 до 2π и принимая во внимание, что $u_2(0) = 0$, получим $u_2(2\pi) = 0$. Аналогично можно показать, что первый не равный нулю коэффициент α_j — нечетного номера (см. [84], а также [13]).

Пусть α_j — первый из отличных от нуля коэффициентов (в силу предыдущего j — непременно нечетное). Тогда при всех достаточно малых $r_0 > 0$

$$\Psi(r_0) = \alpha_j r_0^j + \dots$$

отлично от нуля. В этом случае все траектории, проходящие через достаточно близкие к O точки, являются спиралями, стремящимися к состоянию равновесия O либо при $t \rightarrow +\infty$ (когда $\alpha_j < 0$ и $b > 0$, т. е. когда при всех достаточно малых r_0 $\Psi(r_0) < 0$ и $\frac{d\Psi}{dt} > 0$, или когда $\alpha_j > 0$ и $b < 0$, т. е. $\Psi(r_0) > 0$ и $\frac{d\Psi}{dt} < 0$), либо при $t \rightarrow -\infty$ (когда $\alpha_j < 0$ и $b < 0$, т. е. когда при всех достаточно малых r_0 $\Psi(r_0) < 0$ и $\frac{d\Psi}{dt} < 0$, или когда $\alpha_j > 0$ и $b > 0$, т. е. $\Psi(r_0) > 0$ и $\frac{d\Psi}{dt} > 0$). Состояние равновесия имеет характер фокуса. Этот фокус может быть устойчивым или неустойчивым (в зависимости от знаков b и α_j). Случай $a \neq 0$, т. е. $j = 1$, был уже рассмотрен. В случае $j > 1$ мы будем называть состояние равновесия *сложным фокусом кратности j* или j -кратным фокусом.

б) Все коэффициенты α_i равны нулю.

В этом случае $\Psi(r_0) \equiv 0$ и, следовательно, все траектории, проходящие через достаточно малую окрестность O , замкнуты.

Состояние равновесия O есть *центр*¹⁾.

Указанные два случая, очевидно, исчерпывают все возможности, которые могут здесь представиться.

Мы покажем ниже, что в грубой системе не может быть сложного фокуса и центра. Для этого сделаем некоторые предварительные замечания.

Пусть наряду с системой (A) рассматривается измененная система (\tilde{A}), достаточно близкая к системе (A), вида²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \tilde{a}x - \tilde{b}y + \tilde{g}(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \tilde{b}x + \tilde{a}y + \tilde{h}(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

¹⁾ Можно показать, что в этом случае система (A) обладает аналитическим интегралом, именно, интегралом вида

$$x^2 + y^2 + A_3(x, y) + \dots = C,$$

где невыписанные члены содержат x и y в степени не ниже третьей. Отметим еще также, что в случае, когда правые части системы не являются аналитическими функциями, возможен случай, когда существует бесконечная последовательность вложенных друг в друга и стягивающихся в точку замкнутых траекторий, между которыми могут лежать как замкнутые, так и незамкнутые траектории.

²⁾ К такому виду можно, очевидно, с помощью линейной замены переменных привести любую измененную систему, достаточно близкую к системе (A).

Вводя полярные координаты, а затем переходя, как и выше при рассмотрении системы (A), от системы к одному уравнению, мы получим соответствующее системе (\tilde{A}) дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{d\theta} = \tilde{R}(r, \theta) = \tilde{R}_1(\theta)r + \tilde{R}_2(\theta)r^2 + \dots, \quad (6.14)$$

аналогичное уравнению (6.9).

Если

$$r = \tilde{f}(\theta, r_0) = \tilde{u}_1(\theta)r_0 + \tilde{u}_2(\theta)r_0^2 + \dots$$

— решение уравнения (6.14), то, очевидно, для определения функций $\tilde{u}_i(\theta)$ мы получим такие же рекуррентные дифференциальные уравнения, как и для определения $u_i(\theta)$, нужно только в них вместо $R_i(\theta)$ подставить $\tilde{R}_i(\theta)$.

В частности (так же как и в случае уравнения (6.9)),

$$\tilde{u}_1(\theta) = e^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\theta}.$$

Будем, как и в случае системы (A), рассматривать функцию последования:

$$r = \tilde{f}(2\pi, r_0),$$

а также функцию

$$\tilde{\Psi}(r_0) = \tilde{f}(2\pi, r_0) - r_0.$$

Предположим, что построенная для исходной системы (A) функция

$$r = f(2\pi, r_0)$$

определена при всех значениях r_0 , удовлетворяющих неравенству: $|r_0| < \rho_0$ (ρ_0 — некоторая положительная постоянная).

На основании теоремы V Дополнения I нетрудно показать, что у всякой системы (\tilde{A}), достаточно близкой к системе (A), функция

$$r = \tilde{f}(2\pi, r_0)$$

также определена при всех значениях r_0 , $|r_0| < \rho_0$, и при этих значениях сколь угодно близка к функции $f(2\pi, r_0)$, а производная ее сколь угодно близка к производной от функции $f(2\pi, r_0)$.

После этого замечания перейдем к доказательству следующей теоремы.

Теорема II. У грубой системы не может быть состояния равновесия, для которого

$$\Delta > 0, \quad \sigma = P'_x + Q'_y = 0.$$

Для доказательства теоремы предположим противное, т. е. предположим, что у системы (A), являющейся грубой, есть состояние равновесия, для которого

$$\Delta(x_0, y_0) > 0, \quad \sigma = 0.$$

Если предположить, как и выше, что состояние равновесия лежит в начале координат, то система (A) может быть в этом случае приведена к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -by + g(x, y) = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= bx + h(x, y) = Q(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Для нее возможны два указанных случая а) и б), т. е. состояние равновесия O может быть либо сложным фокусом, либо центром.

Покажем, что в обоих случаях можно указать сколь угодно близкую к системе (A) измененную систему, у которой разбиение на траектории некоторой области, содержащей начало, качественно отлично от разбиения этой области на траектории, заданного системой (A). Для этого рассмотрим измененную систему (\tilde{A}):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \tilde{a}x - by + g(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \tilde{a}y + bx + h(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

у которой $\tilde{a} \neq 0$ (знак \tilde{a} будет фиксирован дальше).

Пусть

$$\Psi(r_0) = f(2\pi, r_0) - r_0,$$

$$\tilde{\Psi}(r_0) = \tilde{f}(2\pi, r_0) - r_0$$

— введенные выше функции, построенные соответственно для систем (A) и (\tilde{A}), определенные при всех r_0 , $|r_0| < \rho_0$.

Рассмотрим отдельно случаи а) и б), которые возможны для системы (A).

а) Состояние равновесия $O(0,0)$ системы (A) есть сложный фокус. В этом случае не все коэффициенты в разложении $\Psi(r_0)$ обращаются в нуль. Пусть α_{2k+1} — первый не обращающийся в нуль коэффициент, так что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2k} = 0, \quad \alpha_{2k+1} \neq 0.$$

Предположим для определенности, что $b > 0$ и $\alpha_{2k+1} < 0$, т. е. что сложный фокус системы (A) устойчив (совершенно аналогично рассматривается случай, когда сложный фокус неустойчив). В этом случае функция $\Psi(r_0)$ имеет вид:

$$\Psi(r_0) = r_0^{2k+1}(\alpha_{2k+1} + \dots),$$

и всегда можно указать столь малое $r'_0 < \rho_0$, чтобы мы имели

$$\Psi(r'_0) < 0.$$

Но всегда можно взять измененную систему (\tilde{A}) (см. (6.16)) столь близкой к системе (A), чтобы соответствующая функция $\tilde{\Psi}(r_0)$ при всех r_0 , $|r_0| < \rho_0$, была сколь угодно близка к функции $\Psi(r_0)$, так что мы имели бы

$$\tilde{\Psi}(r'_0) < 0.$$

С другой стороны, знак функции $\tilde{\Psi}(r_0)$

$$\tilde{\Psi}(r_0) = r_0(\tilde{a}_1 + \dots)$$

для всех достаточно малых r_0 (очевидно, заведомо меньших r'_0) совпадает со знаком \tilde{a}_1 .

Если взять $\tilde{a} > 0$, то $\tilde{a}_1 = e^{\frac{\tilde{a}}{b} 2\pi} - 1 > 0$ и, следовательно, заведомо можно указать столь малое $r''_0 < r'_0$, при котором

$$\tilde{\Psi}(r''_0) > 0.$$

Таким образом, мы имеем:

$$\tilde{\Psi}(r''_0) > 0, \quad \tilde{\Psi}(r'_0) < 0$$

и, следовательно, непременно существует r^*_0 ($r''_0 < r^*_0 < r'_0$) такое, что $\tilde{\Psi}(r^*_0) = 0$. Это, очевидно, означает, что через точку полупрямой $\theta = 0$, соответствующей значению $r = r^*_0$, проходит замкнутая траектория — предельный цикл — системы (\tilde{A}). Нетрудно убедиться в том, что чем меньше \tilde{a} , тем в меньшей окрестности точки O он лежит¹⁾.

Если бы система (A) была грубой, то в любой, достаточно малой окрестности O разбиения на траектории, заданные системой (A) и рассматриваемыми системами (\tilde{A}) (см. (6.16)), должны были быть тождественными. Но это, очевидно, невозможно, так как мы всегда можем взять окрестность точки O такой, чтобы в ней не лежало ни одного предельного цикла системы (A), а в силу предыдущего при достаточно малом $\tilde{a} > 0$ в этой окрестности заведомо будет лежать предельный цикл системы (\tilde{A}).

Перейдем теперь ко второму возможному для системы (A) случаю.

б) Состояние равновесия O системы (A) есть центр. При $a \neq 0$ состояние равновесия O системы (\tilde{A}) является фокусом (устойчивым или неустойчивым в зависимости от знака \tilde{a}). Следовательно, состояние равновесия O имеет различный характер у систем (A) и (\tilde{A})

¹⁾ Этот предельный цикл «рождается» из сложного состояния равновесия O системы (A).

и система (A) не может быть грубой. Таким образом, теорема доказана.

Из доказанных теорем I и II, очевидно, следует, что у грубой системы возможны только простые состояния равновесия типа 1), 2) и 3). Эти состояния равновесия — «грубые» в том смысле, что разбиения некоторой достаточно малой окрестности такого состояния равновесия на траектории исходной системы (A) и на траектории всякой достаточно близкой к ней системы (\tilde{A}) топологически тождественны и мало сдвинуты одно по отношению к другому. В частности, когда состояние равновесия O системы (A) — седло, состояние равновесия \tilde{O} системы (\tilde{A}) — тоже седло и сепаратрисы седла \tilde{O} мало сдвинуты по сравнению с сепаратрисами седла O системы (A)¹⁾.

3. Простые и сложные предельные циклы. Грубые предельные циклы. Перейдем теперь к выяснению тех условий, которым должна удовлетворять замкнутая траектория для того, чтобы она могла существовать в грубой системе. Для этого рассмотрим сначала окрестность произвольной замкнутой траектории, не обязательно являющейся траекторией грубой системы. Рассмотрение, которое при этом проводится, аналогично проведенному в случае сложного фокуса и центра. Итак, пусть L_0 — замкнутая траектория,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

— какое-нибудь соответствующее ей периодическое движение и τ — период этого движения.

Рассмотрим отрезок без контакта I , проведенный через какую-нибудь точку Q траектории L_0 , содержащий точку Q внутри. Пусть s — параметр на этом отрезке и

$$\bar{s} = f(s)$$

— функция последования на нем²⁾ (см. § 7 гл. V). Введем функцию $\Psi(s) = f(s) - s$. Функции $f(s)$ и $\Psi(s)$ являются аналитическими функциями s (см. § 7, п. 3, гл. V).

Если s_0 — значение параметра s , соответствующее точке Q отрезка I , через которую проходит замкнутая траектория L_0 , то, очевидно,

$$\Psi(s_0) = f(s_0) - s_0 = 0.$$

Если для рассматриваемой замкнутой траектории характеристический показатель h не равен нулю, то, как известно (см. § 7 гл. V), при $h < 0$, т. е. когда $\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right) < 1$ и, следовательно, $\Psi'(s_0) < 0$,

¹⁾ Подробное доказательство этих геометрически очевидных фактов мы не приводим.

²⁾ Напомним, что функция последования строилась так, что «последующие» точки соответствовали значениям t большим, чем «предыдущие».

траектория L_0 — устойчивый предельный цикл, а при $h > 0$, т. е. когда $\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right) > 1$ и, следовательно, $\Psi'(s_0) > 0$, траектория L_0 — неустойчивый предельный цикл.

В обоих этих случаях значение $s = s_0$ является простым корнем уравнения $\Psi(s) = 0$. Поэтому в случае, когда $h \neq 0$, предельный цикл называется простым.

Остановимся теперь на случае, оставленном без рассмотрения в § 7 гл. V, когда характеристический показатель $h = 0$, т. е. $\frac{d\bar{s}}{ds} = 1$ и, следовательно, $\Psi'(s_0) = 0$. В этом случае $s = s_0$ есть корень уравнения $\Psi(s) = 0$ кратности выше первой. При этом могут представиться следующие две возможности:

1) Хотя бы одна из производных функции $\Psi(s)$ не обращается в нуль при $s = s_0$, т. е. существует такое целое $k > 1$, что

$$\Psi'(s_0) = \dots = \Psi^{(k-1)}(s_0) = 0; \quad \Psi^{(k)}(s_0) \neq 0.$$

Мы будем иметь, следовательно:

$$\Psi(s) = (s - s_0)^k [\Psi^{(k)}(s_0) + (s - s_0) \Psi^{(k+1)}(s_0) + \dots].$$

В этом случае всегда существует $d > 0$ такое, что при всех отличных от s_0 значениях s , удовлетворяющих неравенству

$$|s - s_0| < d,$$

$\Psi(s)$ не обращается в нуль, т. е. часть отрезка, для точек которой $|s - s_0| < d$, пересекает только одна замкнутая траектория, именно рассматриваемая траектория L_0 . Эта замкнутая траектория L_0 называется *сложным k -кратным предельным циклом*.

Рассмотрим случай, когда k — нечетное. Предположим, что $\Psi^{(k)}(s_0) < 0$. Тогда при $s < s_0$

$$\Psi(s) > 0, \quad \text{т. е.} \quad f(s) > s,$$

а при $s > s_0$

$$\Psi(s) < 0, \quad \text{т. е.} \quad f(s) < s.$$

Следовательно, всякая последующая точка на отрезке l ближе к точке Q (в которой замкнутая траектория L_0 пересекает отрезок l), чем предыдущая. Так как по самому построению функции последования «последующая» точка соответствует значению t большему, чем предыдущая, то, принимая во внимание, что L_0 — единственная замкнутая траектория, пересекающая рассматриваемую часть отрезка без контакта l , нетрудно показать¹⁾ на основании теоремы IV § 2

¹⁾ В силу того, что в рассматриваемом случае $f'(s_0) = 1$, здесь, очевидно, нельзя провести рассуждения, приведенного в § 7 гл. V.

настоящей главы, что всякая отличная от L_0 траектория, пересекающая отрезок l достаточно близко к точке Q , при $t \rightarrow +\infty$ стремится к предельному циклу L_0 . Предельный цикл L_0 является устойчивым (нечетно-кратным) предельным циклом.

Если $\Psi^{(k)}(s_0) > 0$, то совершенно таким же рассуждением можно показать, что всякая траектория, пересекающая отрезок l достаточно близко в точке Q , при $t \rightarrow -\infty$ стремится к предельному циклу L_0 . Предельный цикл L_0 является неустойчивым (нечетно-кратным) предельным циклом.

Пусть теперь k — четное. Тогда при всех $s \neq s_0$, в зависимости от знака $\Psi^{(k)}(s_0)$, либо $\Psi(s) > 0$, т. е. $f(s) > s$ (если $\Psi^{(k)}(s_0) > 0$), либо $\Psi(s) < 0$, т. е. $f(s) < s$ (если $\Psi^{(k)}(s_0) < 0$). Нетрудно показать, что в случае, когда $\Psi^{(k)}(s_0) > 0$, все траектории, проходящие через точки отрезка l , соответствующие значениям $s < s_0$, стремятся к L_0 при $t \rightarrow +\infty$, а все траектории, проходящие через точки отрезка l , соответствующие значениям $s > s_0$, стремятся к L_0 при $t \rightarrow -\infty$, и наоборот, когда $\Psi^{(k)}(s_0) < 0$.

Очевидно, в рассматриваемом случае (четное k) предельный цикл L_0 неустойчив. Однако часто предельный цикл этого типа называют «полуустойчивым» (четно-кратным), сохраняя термин «неустойчивый» лишь для цикла, к которому все достаточно близкие траектории стремятся при $t \rightarrow -\infty$.

При $k > 1$, как в случае четного, так и в случае нечетного k , предельный цикл называется также «сложным предельным циклом».

2) Производные всех порядков от функции $\psi(s)$ при $s = s_0$ обращаются в нуль, т. е. при любом i

$$\Psi^{(i)}(s_0) = 0.$$

Тогда, очевидно, при всех рассматриваемых s , в силу того, что функция $\Psi(s)$ — аналитическая функция,

$$\Psi(s) \equiv 0;$$

т. е. функция последования имеет вид:

$$\bar{s} = s.$$

Это, очевидно, означает, что все траектории, проходящие через достаточно близкие к L_0 точки, замкнуты.

Для того чтобы сообщить изложенному большую наглядность, рассмотрим диаграмму Ламерея, т. е. рассмотрим плоскость с прямоугольными координатами \bar{s} и s и на этой плоскости — кривую, представляющую функцию последования

$$\bar{s} = f(s),$$

и прямую $\bar{s} = s$. Замкнутые траектории соответствуют значениям s , для которых

$$f(s) = s,$$

т. е. тем значениям s , при которых кривая $\bar{s} = f(s)$ имеет общую точку с прямой $\bar{s} = s$. Если эта общая точка является простым пересечением, то соответствующая замкнутая траектория есть предельный цикл, для которого $\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right) \neq 1$. Если эта общая точка есть точка соприкосновения того или другого порядка, то предельный цикл будет той или другой кратности. В частности, когда кривая $\bar{s} = f(s)$ совпадает с прямой $\bar{s} = s$, имеет место случай 2).

Мы покажем, что замкнутая траектория, являющаяся k -кратным предельным циклом (случай 1)) при $k > 1$, и замкнутая траектория, в окрестности которой все траектории замкнуты (случай 2)), не могут существовать в грубой системе.

Сделаем предварительно некоторые замечания.

Отрезок l , являющийся отрезком без контакта для траекторий системы (A) , будет также отрезком без контакта и для траекторий всякой измененной системы (\tilde{A}) , достаточно близкой к системе (A) . Кроме того, если s_1 и s_2 ($s_1 < s_2$) — значения параметра s , соответствующие отличным от концов точкам отрезка l , то на основании теоремы IV Дополнения I нетрудно показать, что при всех значениях s , $s_1 \leq s \leq s_2$ на l может быть определена соответствующая системе (\tilde{A}) функция последования:

$$\bar{s} = \tilde{f}(s).$$

На основании теоремы V Дополнения I нетрудно видеть, что эта функция $\tilde{f}(s)$ и ее производная $\tilde{f}'(s)$ сколь угодно мало отличаются соответственно от функции $f(s)$ и ее производной $f'(s)$, если система (\tilde{A}) достаточно близка к системе (A) .

Принимая сказанное во внимание, естественно ожидать, что замкнутая траектория, у которой характеристический показатель $h = 0$, т. е. в случае, когда $k > 1$, и в случае 2), не может существовать в грубой системе. Действительно, пусть R_0 — общая точка кривой $\bar{s} = f(s)$ и прямой $\bar{s} = s$, соответствующая такой замкнутой траектории. Кривая $\bar{s} = f(s)$ либо имеет в точке R_0 соприкосновение того или другого порядка с прямой $\bar{s} = s$ (случай 1)), либо совпадает с прямой $\bar{s} = s$ (случай 2)). Но в обоих этих случаях можно указать функцию $\bar{s} = \tilde{f}(s)$, сколь угодно близкую к функции $f(s)$ и с производной, сколь угодно близкой к $f'(s)$, такую, чтобы кривая $\bar{s} = \tilde{f}(s)$ в сколь угодно малой окрестности точки R_0 либо имела с прямой $\bar{s} = s$ более одной общей точки, либо (в случае, когда кривая $\bar{s} = f(s)$ имеет с прямой $\bar{s} = s$ соприкосновение четного порядка, см. рис. 313, а также в случае, когда она совпадает с прямой $\bar{s} = s$) не имела бы ни одной общей точки с этой прямой. Если, кроме того, мы покажем, что существует измененная система (\tilde{A}) , сколь угодно близкая к системе (A) , для которой такая функция $\tilde{f}(s)$ является функцией последования на отрезке l , то, очевидно, это будет означать, что

при надлежащим образом выбранных, но сколь угодно малых изменениях правых частей системы (A) рассматриваемая замкнутая траектория либо разделяется на несколько предельных циклов, либо исчезает (в случае четного k и в случае 2)). Отсюда, очевидно, будет следовать, что система (A) не может быть грубой. Таким образом, доказательство того, что в грубой системе не может существовать k -кратного предельного цикла, при $k > 1$ может быть проведено с помощью построения измененной системы (\tilde{A}), для которой функция последования $\tilde{f}(s)$ обладает нужными свойствами. Очевидно, такое доказательство (оно проводится ниже) весьма аналогично доказательству теоремы II.

Перейдем к точному его изложению. Сформулируем сначала без доказательства одну вспомогательную лемму:

Лемма. Существует определенная в области G функция

$$z = F(x, y),$$

имеющая непрерывные частные производные не менее чем до второго порядка и такая, что: 1) $F(\varphi, \psi) \equiv 0$ (т. е. функция $z = F(x, y)$ обращается в нуль в точках траектории L_0); 2) $[F'_x(\varphi, \psi)]^2 + [F'_y(\varphi, \psi)]^2 \neq 0$.

Утверждение этой леммы имеет очень простой геометрический смысл. Именно, рассмотрим в пространстве x, y, z функцию $z = F(x, y)$, обладающую указанными в лемме свойствами. Эта функция изображается гладкой поверхностью, которая проходит через траекторию L_0 , лежащую в плоскости x, y , и в силу условия 2) ни в одной точке L_0 не касается плоскости x, y^1 .

¹⁾ Доказательство существования функции $F(x, y)$, обладающей указанными в лемме свойствами, может быть, например, проведено следующим образом. Рассмотрим криволинейную систему координат, введенную в § 7, п. 3, гл. V (см. (5.55)). Кривые $v = \text{const}$ являются замкнутыми кривыми, причем, очевидно, кривая $v = 0$ — это рассматриваемая замкнутая траектория L_0 . В точках траектории L_0 , т. е. при $v = 0$ и всевозможных u , детерминант

$$D = \begin{vmatrix} \varphi'(u) - v\psi''(u), & -\psi'(u) \\ \psi'(u) + v\varphi''(u), & \varphi'(u) \end{vmatrix},$$

очевидно, не обращается в нуль. Поэтому в окрестности каждой точки траектории L_0 можно найти u как функцию x и y : $u = \Phi(x, y)$. Нетрудно убедиться в том, что функция $u = \Phi(x, y)$ — однозначная аналитическая функция, определенная в некоторой окрестности L_0 , а в точках L_0 эта функция обращается в нуль. Кроме того, нетрудно показать, что для функции $\Phi(x, y)$ выполняются условия настоящей леммы. Функция $\Phi(x, y)$ была определена только в некоторой, вообще говоря, небольшой окрестности траектории L_0 . Однако, в силу известных теорем о продолжении функции (см. Ф и х т е н г о л ь ц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Гостехиздат, 1951, Дополнение I), всегда можно указать функцию $z = F(x, y)$, определенную во всей области, в которой определена система (A), совпадающую с функцией $\Phi(x, y)$ в некоторой окрестности траектории L_0 .

Функция $F(x, y)$ с указанными в лемме свойствами поможет построить измененную систему (\tilde{A}), обладающую нужными свойствами.

Перейдем теперь к доказательству самой теоремы, устанавливающей необходимые условия для того, чтобы замкнутая траектория могла существовать в грубой системе, т. е. была «грубой замкнутой траекторией».

Теорема III. У грубой системы не может существовать замкнутых траекторий, для которых

$$h = \frac{1}{c} \int_0^{\tau} [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)] dt = 0.$$

Если для замкнутой траектории L_0 системы (A), параметрические уравнения которой

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

выполняется условие

$$h = 0,$$

то в согласии с изложенным выше либо эта замкнутая траектория является сложным k -кратным ($k > 1$) предельным циклом (случай 1)), и тогда существует окрестность L_0 , не содержащая кроме L_0 больше ни одной замкнутой траектории, либо все траектории в окрестности L_0 замкнуты. Рассмотрим сначала случай 1).

Для простоты предположим, что при выбранном на отрезке l параметре s точка пересечения этого отрезка с замкнутой траекторией L_0 соответствует значению $s = 0$. Пусть, как и выше, $\bar{s} = f(s)$ — функция последования на отрезке l и $\Psi(s) = f(s) - s$. Очевидно, $\Psi(0) = 0$; кроме того в рассматриваемом случае $\Psi'(0) = \Psi''(0) = \dots = \Psi^{(k-1)}(0)$; $\Psi^{(k)}(0) \neq 0$ (k может быть как четным, так и нечетным). Будем для определенности предполагать, что $\Psi^{(k)}(0) > 0$ (в случае $\Psi^{(k)}(0) < 0$ рассуждение полностью аналогично).

Доказательство утверждения теоремы будет дальше проводиться следующим образом: сначала рассмотрим вспомогательную измененную систему, правые части которой не являются аналитическими функциями ¹⁾, а затем рассмотрим сколь угодно близкую к ней систему, правые части которой уже являются аналитическими функциями.

Вспомогательная измененная система (правые части которой не являются аналитическими функциями), которую мы будем рассматри-

¹⁾ Такие системы нами раньше не рассматривались. Однако если правые части системы не являются аналитическими функциями, но имеют непрерывные частные производные, то для такой системы выполняется теорема I о существовании и единственности решения, а также теорема II Дополнения I. Заметим, что если бы функция $F(x, y)$, обладающая свойствами 1) и 2) леммы, была аналитической, то рассматриваемая ниже система (A_2^*) также была бы аналитической, и дальнейшие рассуждения настоящей теоремы были бы значительно упрощены. Однако точное доказательство существования аналитической функции, удовлетворяющей условиям 1) и 2) леммы, значительно более сложно, чем проводимое дальше рассуждение.

вать, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) + \lambda F(x, y) F'_x(x, y) = P^*(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) + \lambda F(x, y) F'_y(x, y) = Q^*(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

где λ — параметр, а функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы, так что правые части этой системы во всяком случае имеют непрерывные частные производные первого порядка (в силу того, что функция $F(x, y)$ согласно требованиям леммы имеет непрерывные частные производные до второго порядка); систему (6.17) мы будем называть «системой (A_λ^*) ».

Так как по самому выбору функции $F(x, y)$

$$F[\varphi(t), \psi(t)] \equiv 0,$$

то, очевидно,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

является решением также и системы (A_λ^*) , т. е. траектория L_0 является также и траекторией системы (A_λ^*) . Очевидно, при всех достаточно малых λ система (A_λ^*) будет сколь угодно близка к системе (A) . Будем рассматривать лишь столь малые значения λ ($|\lambda| < \eta$, где η — надлежащим образом выбранная постоянная), при которых отрезок l остается отрезком без контакта для системы (A_λ^*) . Пусть

$$\bar{s} = f^*(s, \lambda)$$

— функция последования, построенная для системы (A_λ^*) на отрезке l , и $\Psi^*(s, \lambda) = f^*(s, \lambda) - s$.

Функция последования $\bar{s} = f^*(s, \lambda)$ может быть найдена совершенно так же, как и в случае системы (A) . При этом, в силу того, что L_0 является траекторией как системы (A) , так и системы (A_λ^*) , мы можем воспользоваться той же системой криволинейных координат u, v (см. § 7 гл. V), что и в случае системы (A) . Пусть уравнение, аналогичное уравнению (5.56) и соответствующее системе (A_λ^*) , есть $\frac{dv}{du} = g^*(u, v, \lambda)$ и решение этого уравнения, принимающее значение s при $u=0$, есть $v = \Phi^*(u, s, \lambda)$ (напомним, что мы всегда можем предполагать отрезок l отрезком на прямой $u=0$). Тогда функция последования $f^*(s, \lambda) = \Phi^*(\tau, s, \lambda)$ (τ — период движения на замкнутой траектории L_0). Так как правые части системы (A_λ^*) , а следовательно, и функции $\Phi^*(\tau, s, \lambda)$ не являются аналитическими функциями, то функция $\Psi^*(s, \lambda) = f^*(s, \lambda) - s$ тоже не является аналитической и рассуждение, которое было проведено в § 7 гл. V (опиравшееся на тот факт, что функции $g^*(u, v, \lambda)$ и $\Phi^*(u, s, \lambda)$ могут быть разложены в ряд), здесь не может быть использовано. Однако нетрудно показать, что функция $g^*(u, v, \lambda)$ заведомо имеет непрерывные частные производные первого порядка. Отсюда в силу известных теорем следует, что функция $\Phi^*(u, s, \lambda)$ имеет непрерывную производную по s

и эта производная является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{du} \frac{\partial \Phi^*}{\partial s} = \frac{\partial g^*}{\partial v} \frac{\partial \Phi^*}{\partial s}.$$

Воспользовавшись этим уравнением, мы совершенно так же, как и в § 7, п. 3, гл. V, получаем:

$$f^{*'}(0) = e^{\int_0^{\tau} (P_x^{*'} + Q_y^{*'}) dt}$$

В силу теоремы V Дополнения I функция $\Psi^*(s, \lambda)$ и ее производная сколь угодно близки к функции $\Psi(s)$ и ее производной при достаточно малых λ . В силу того, что замкнутая траектория L_0 является траекторией и системы (A_λ^*) , мы, очевидно, имеем:

$$\Psi^*(0, \lambda) = 0.$$

Найдем выражение для $\Psi^{*'}(0, \lambda)$. Принимая во внимание выражения для $P^*(x, y, \lambda)$ и $Q^*(x, y, \lambda)$ и принимая во внимание, что по условию

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (P_x' + Q_y') dt = 0,$$

мы будем иметь:

$$f^{*'}(0, \lambda) = e^{\int_0^{\tau} (P_x^{*'} + Q_y^{*'}) dt} = e^{\lambda \int_0^{\tau} (F_x'^2 + F_y'^2) dt} > 0$$

и

$$\Psi^{*'}(0, \lambda) = e^{\lambda \int_0^{\tau} (F_x'^2 + F_y'^2) dt} - 1.$$

Из этих выражений, очевидно, следует, что замкнутая траектория L_0 является для системы (A_λ^*) простым предельным циклом, устойчивым при $\lambda < 0$ и неустойчивым при $\lambda > 0$.

По условию

$$\Psi^{(k)}(0) > 0.$$

Так как

$$\Psi(s) = \Psi^{(k)}(0) s^k + \dots,$$

то всегда можно взять такое значение $s_1 > 0$ (s_1 можно взять сколь угодно малым), при котором

$$\Psi(s_1) > 0.$$

Но при всех достаточно малых значениях λ функция $\Psi^*(s, \lambda)$ сколь угодно мало отличается от функции $\Psi(s)$, поэтому всегда можно взять

фиксированное значение λ^* (λ^* можно взять сколь угодно малым по абсолютной величине и любого знака), чтобы мы имели

$$\Psi^*(s_1, \lambda^*) > 0. \quad (6.18)$$

Но если взять $\lambda^* < 0$, то мы будем иметь:

$$\Psi^{*'}(0, \lambda^*) = e^{\lambda^* \int_0^{\tilde{s}} (F'_x + F'_y) dt} - 1 < 0.$$

Следовательно, в этом случае всегда можно подобрать такое $s_2 > 0$ ($s_2 < s_1$), чтобы мы имели

$$\Psi^*(s_2, \lambda^*) < 0. \quad (6.19)$$

Из (6.18) и (6.19) очевидно следует, что у системы (A_λ^*) кроме L_0 существует еще одна замкнутая траектория, пересекающая отрезок l при некотором значении s , лежащем между s_1 и s_2 .

Наконец, в силу того, что

$$\Psi^*(0, \lambda^*) = 0, \text{ а } \Psi^{*'}(0, \lambda^*) < 0,$$

всегда можно указать $s_3 < 0$ такое, чтобы $\Psi^*(s_3, \lambda^*) > 0$, т. е. $\Psi^*(s, \lambda)$ обращается в нуль еще раз на интервале $s_3 < s < s_2$, а система (A_λ^*) имеет еще одну замкнутую траекторию (кроме L_0), пересекающую отрезок l на указанном интервале.

Но при любом фиксированном λ^* всегда можно указать измененную систему (\tilde{A})

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{P}(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = \tilde{Q}(x, y), \quad (6.20)$$

правые части которой — аналитические функции x и y , столь близкую к системе (A_λ^*) , чтобы мы имели также

$$\tilde{\Psi}(s_3) > 0, \quad \tilde{\Psi}(s_2) < 0, \quad \tilde{\Psi}(s_1) > 0,$$

где $\tilde{\Psi}(s)$ — функция последования, аналогичная $\Psi(s)$ и построенная для системы (\tilde{A}) . А тогда непременно существуют значения \tilde{s}_1 и \tilde{s}_2 такие, что

$$\tilde{\Psi}(\tilde{s}_2) = 0 \text{ и } \tilde{\Psi}(\tilde{s}_1) = 0,$$

т. е. у системы (\tilde{A}) существует не менее двух замкнутых траекторий, пересекающих отрезок без контакта l (в точках этого отрезка, соответствующих значениям \tilde{s}_1 и \tilde{s}_2). Выбирая достаточно малые по абсолютной величине значения s и λ и систему (\tilde{A}) , достаточно близкую к системе (A_λ^*) , всегда можно добиться того, чтобы эта система (\tilde{A}) была сколь угодно близка к системе (A) и указанные замкнутые траектории этой системы лежали бы в сколь угодно малой окрестности траектории L_0 . Но отсюда, очевидно, следует, что

система (A) не может быть «грубой», и таким образом в случае I (сложного предельного цикла) утверждение теоремы доказано.

В случае II, т. е. в случае, когда все траектории замкнуты, рассматриваем ту же вспомогательную неаналитическую систему (A*). Как и выше, имеем:

$$f^{*'}(0, \lambda^*) = e^{\lambda^* \int_0^{\tau} (P_x^{*'} + Q_y^{*'}) dt}$$

Следовательно, функция $\Psi^*(s, \lambda)$ на рассматриваемом интервале значений s не равна нулю тождественно. Нетрудно видеть, что тогда у всякой системы (\tilde{A}) с аналитическими правыми частями, достаточно близкой к системе (A*), соответствующая функция $\tilde{\Psi}(s)$ тоже не будет равна нулю тождественно. А это означает, что среди траекторий системы (\tilde{A}), пересекающих рассматриваемую часть отрезка без контакта, существуют не только замкнутые траектории. Так как можно указать сколь угодно близкую к системе (A) систему (\tilde{A}), обладающую этим свойством, то, очевидно, система (A) — негрубая¹⁾.

В случае, когда предельный цикл L_0 системы (A) простой, т. е. для него $h \neq 0$ и, следовательно, $f'(0) \neq 1$ и $\Psi'(0) \neq 0$, этот предельный цикл является «грубым», т. е. может существовать в грубых системах. В этом случае точка пересечения R_0 кривой $\bar{s} = f(s)$ и прямой $\bar{s} = s$, соответствующая предельному циклу L_0 , является простой точкой пересечения, т. е. в этой точке кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ не касается прямой $\bar{s} = s$. Тогда кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$, соответствующая любой функции $\tilde{f}(s)$, достаточно близкой к $f(s)$, производная которой $\tilde{f}'(s)$ достаточно близка к $f'(s)$, будет иметь одну и только одну сколь угодно близкую к R_0 общую точку R с прямой $\bar{s} = s$ ²⁾. Отсюда, очевидно, следует, что у всякой измененной системы (\tilde{A}), достаточно близкой к системе (A), будет существовать один и только один предельный цикл L_0 , сколь угодно близкий к рассматриваемому предельному циклу L_0 системы (A). В силу того, что $\tilde{f}'(s)$ сколь угодно мало отличается от $f'(s)$, этот предельный цикл \tilde{L}_0 будет устойчив, если устойчив предельный цикл L_0 , и неустойчив, если неустойчив предельный цикл L_0 .

На основании этого нетрудно показать, кроме того, что разбиения некоторой окрестности предельного цикла L_0 на траектории системы (A)

¹⁾ В случае, когда предельный цикл четно-кратный, а также в случае II доказательство негрубости может быть очень просто проведено, если рассмотреть систему, которая используется в теореме IV настоящей главы, т. е. систему, поле которой повернуто на постоянный угол по отношению к полю системы (A).

²⁾ Нетрудно видеть, что при этом существенно требование близости не только самих функций $\tilde{f}(s)$ и $f(s)$, но и их производных $\tilde{f}'(s)$ и $f'(s)$.

и на траектории системы (\tilde{A}) мало сдвинуты одно по отношению к другому.

Отметим, что как в случае состояний равновесия, так и в случае предельных циклов требование грубости накладывает аналитическое условие на систему дифференциальных уравнений. Топологически у простых и сложных состояний равновесия и у простых и сложных предельных циклов разбиение окрестности на траектории может быть одинаково (например, у сложного нечетно-кратного предельного цикла и у простого предельного цикла).

4. Поведение сепаратрисы седел в грубых системах.

Перейдем теперь к рассмотрению особых траекторий еще одного типа, возможного в грубых системах, именно сепаратрис седел. Требование грубости накладывает ограничения также и на характер сепаратрис. Если сепаратриса седла O , стремящаяся к этому седлу при $t \rightarrow +\infty$, при $t \rightarrow -\infty$ также стремится к седлу (отличному от O или к тому же седлу O), то мы будем коротко говорить, что эта сепаратриса «идет из седла в седло».

Теорема IV. *В грубых системах не может быть сепаратрис, идущих из седла в седло.*

Для доказательства теоремы предположим противное, т. е. предположим, что у системы (A), являющейся грубой, существует сепаратриса, либо идущая из одного седла O в другое седло O' (см., например, рис. 299), либо возвращающаяся в то же седло (см. рис. 293).

Рассмотрим первый случай (случай, когда сепаратриса возвращается в то же самое седло, рассматривается совершенно аналогично). Обозначим через L сепаратрису системы (A), идущую из седла O в седло O' .

Рассмотрим измененную систему вида:

$$\frac{dx}{dt} = P - \alpha Q, \quad \frac{dy}{dt} = Q + \alpha P. \quad (6.21)$$

Будем называть эту систему системой (\tilde{A}_α). Нетрудно видеть, что система (\tilde{A}_α) имеет состояния равновесия в тех же точках, что и система (A) (и только в этих точках). Действительно, мы можем иметь одновременно

$$P - \alpha Q = 0; \quad Q + \alpha P = 0$$

лишь в случае, когда одновременно

$$P = 0 \quad \text{и} \quad Q = 0.$$

Тангенс угла φ между касательными в данной точке $M(x, y)$ к траектории системы (A) и к траектории системы (\tilde{A}_α), очевидно, будет:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{Q + \alpha P}{P - \alpha Q} - \frac{Q}{P}}{1 + \frac{Q + \alpha P}{P - \alpha Q} \frac{Q}{P}} = \alpha,$$

т. е. $\operatorname{tg} \varphi$ один и тот же во всех точках области G .

Мы будем говорить, что векторное поле, заданное системой (\tilde{A}_α) , повернуто на постоянный угол (положительный или отрицательный в зависимости от знака α) по отношению к векторному полю, заданному системой (A) .

В силу сказанного выше точки O и O' являются состояниями равновесия также и системы (\tilde{A}_α) . В силу того, что по предположению система (A) является грубой, точки O и O' должны быть седлами системы (\tilde{A}_α) , и у системы (\tilde{A}_α) должна существовать сепаратриса L_α , идущая из седла O в седло O' . Всегда можно взять столь малое $\epsilon > 0$, чтобы ϵ -окрестность L не содержала кроме O и O' больше ни одного состояния равновесия системы (A) и, следовательно, ни одной замкнутой траектории целиком (см. следствия I и II из теории индексов и § 8 гл. V), а также не содержала бы кроме L целиком ни одной сепаратрисы седел O и O' системы (A) . При всех достаточно малых α сепаратриса L_α системы (\tilde{A}_α) будет целиком лежать в этой ϵ -окрестности L . При этом сепаратрисы L и L_α могут либо иметь, либо не иметь общих точек.

Предположим сначала, что они не имеют общих точек, и рассмотрим простую замкнутую кривую C_0 , состоящую из L , L_α и седел O и O' . Эта замкнутая кривая, очевидно, целиком лежит в выбранной ϵ -окрестности L . Сепаратриса L_α системы (\tilde{A}_α) , очевидно, является «дугой без контакта» для траекторий системы (A) (так как поле системы (\tilde{A}_α) повернуто на постоянный угол по отношению к полю системы (A)), так что все траектории системы (A) пересекают L_α в одном и том же направлении. Среди пересекающих L_α траекторий системы (A) заведомо существуют траектории, отличные от сепаратрис седел O и O' . Пусть L' — такая траектория. Очевидно, в точке ее пересечения с L_α L' либо при возрастании, либо при убывании t входит внутрь C_0 . Предположим, например, что L' входит внутрь C_0 при возрастании t . При дальнейшем возрастании t она больше уже не может выйти из C_0 , так как она не может пересечь L (L , так же как и L' , является траекторией системы (A)) и не может пересечь L_α , выходя из C_0 (так как тогда она должна бы пересечь C_0 в противоположном направлении). Следовательно, при $t \rightarrow +\infty$ L' должна стремиться к предельному множеству, целиком лежащему в C_0 и, значит, в выбранной ϵ -окрестности L . Но в этой окрестности не может лежать никакое предельное множество. Действительно, по самому выбору этой окрестности в ней не лежит ни одно отличное от O и O' состояние равновесия и целиком ни одна замкнутая траектория системы (A) ; в ней не может также лежать и предельное множество типа III (см. п. 5 § 2 настоящей главы), так как нетрудно показать, что во всякое такое предельное множество должна непременно входить еще по крайней мере одна отличная от L сепаратриса седла O или O' , а в рассматриваемой ϵ -окрестности L кроме L_0 не лежит целиком больше ни одна сепаратриса.

Мы приходим, таким образом, к противоречию, и следовательно, в рассматриваемом случае теорема доказана.

В случае, когда L и L_α имеют общие точки, мы рассмотрим простую замкнутую кривую C_0 , состоящую из точки O и частей траекторий L и L_α между точкой O и ближайшей их общей точкой (или частей траекторий L и L_α между двумя последовательными общими точками), и, рассуждая совершенно аналогично предыдущему докажем утверждение леммы также и в этом случае.

5. Необходимые и достаточные условия грубости. Объединяя полученные результаты, можно сформулировать следующие необходимые условия грубости системы (A) в области G :

I. В области G могут быть только простые (грубые) состояния равновесия, т. е. такие, для которых действительные части корней характеристического уравнения отличны от нуля. Это требование может быть сформулировано еще и так: в области G не может быть состояний равновесия $x = x_0, y = y_0$:

а) для которых

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0;$$

б) для которых при $\Delta > 0$ $\sigma = [P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)] = 0$.

II. В области G могут быть только простые (грубые) предельные циклы, т. е. такие предельные циклы, для которых характеристический показатель не равен нулю. Это требование может быть сформулировано еще и так: в области G не может быть периодических движений $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ [$\varphi(t + \tau) = \varphi(t), \psi(t + \tau) = \psi(t)$], для которых

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (P'_x + Q'_y) dt = 0.$$

III. В области G не может быть сепаратрис, идущих из седла в седло.

В силу этих условий в грубой системе возможны особые траектории лишь следующих типов: простые (грубые) состояния равновесия, простые (грубые) предельные циклы и сепаратрисы седел, в одну сторону стремящиеся к узлу, фокусу или к предельному циклу или, наконец, при некотором значении t достигающие граничного цикла без контакта.

Очевидно при этом, что предельными траекториями в грубых системах могут быть только состояния равновесия и предельные циклы.

Действительно, если сепаратриса седла является предельной, то, как нетрудно видеть, она должна идти из седла в седло, что в грубых системах невозможно.

Таким образом, требование грубости запрещает сложный характер особых траекторий. Сформулированные выше условия I, II и III являются необходимыми условиями грубости данной системы.

Можно показать, что эти же условия являются *достаточными* для грубости системы. Именно, имеет место следующая основная в теории грубых систем обратная теорема¹⁾.

Теорема V. *Если система*

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

имеет в области G (ограниченной циклом без контакта C):

1) *лишь такие состояния равновесия, для которых $\Delta \neq 0$ и для которых $\sigma \neq 0$, если $\Delta > 0$;*

2) *лишь предельные циклы, для которых $h \neq 0$;*

3) *лишь такие сепаратрисы, которые не идут из седла в седло, то такая система в области G является грубой.*

Не приводя доказательств этой теоремы, сделаем все же к ней небольшое пояснение.

Если динамическая система, для которой выполняются условия 1), 2) и 3), является грубой, то малые изменения ее правых частей не будут менять топологической структуры ее разбиения на траектории, а будут лишь «мало сдвигать» все это разбиение. Но при выполнении условий 1), 2), 3), т. е. при условии, что особые траектории системы (A) являются лишь простыми предельными циклами и сепаратрисами, не идущими из седла в седло (подробное перечисление возможных видов сепаратрис см. ниже), нетрудно показать, что при малых изменениях правых частей системы (A) или, иначе говоря, при переходе к измененной системе (\tilde{A}), особые траектории не меняют своего характера и при этом лишь мало сдвигаются. Этот факт делает утверждение теоремы совершенно наглядным геометрически. Точное доказательство теоремы состоит в фактическом построении для всякой измененной системы (\tilde{A}), достаточно близкой к системе (A), такого топологического отображения области G в себя, при котором траектории системы (\tilde{A}) отображаются в траектории системы (A) и соответствующие друг другу точки находятся на сколь угодно малом расстоянии друг от друга.

6. Классификация траекторий, возможных в грубых системах. Перейдем теперь к подробной классификации траекторий, возможных в грубых системах.

При этом для определенности предположим, что все траектории системы (A) в точках цикла без контакта, являющегося границей области G, при возрастании t входят внутрь этой области. Мы полу-

¹⁾ Мы приводим это обратное предложение непосредственно после первых трех, хотя доказательство этого предложения (которое мы не даем) частично основывается на последующем изложении.

чаем 16 различных видов траекторий (на рис. 304 эти виды траекторий изображены под соответствующими номерами). В нижеследующей таблице эти виды траекторий разбиты на пять основных типов.

Особые (орбитно-неустойчивые) траектории

I. Состояние равновесия	{	фокус (или узел) устойчивый	(1)
		фокус (или узел) неустойчивый	(2)
		седло	(3)
II. Предельные циклы	{	устойчивый	(4)
		неустойчивый	(5)
III. Сепаратриса	{	сворачивающаяся с неустойчивого фокуса или узла	(6)
		сворачивающаяся с неустойчивого цикла	(7)
		входящая в область G через граничный цикл без контакта	(8)
		стремящаяся к устойчивому фокусу или узлу	(9)
		стремящаяся к устойчивому предельному циклу	(10)

Неособые (орбитно-устойчивые) траектории¹⁾

IV. Траектория, стремящаяся к устойчивому фокусу или узлу	{	сворачивающаяся с неустойчивого фокуса или узла	(11)
		сворачивающаяся с неустойчивого цикла	(12)
		входящая в область G через граничный цикл без контакта	(13)
V. Траектория, стремящаяся к устойчивому циклу	{	сворачивающаяся с неустойчивого фокуса или узла	(14)
		сворачивающаяся с неустойчивого цикла	(15)
		входящая в область G через граничный цикл без контакта	(16)

Как мы видели в § 2 настоящей главы, область G разбивается особыми (орбитно-неустойчивыми) траекториями на элементарные ячейки, заполненные неособыми (орбитно-устойчивыми) траекториями одинакового поведения. При этом все ячейки можно разбить на два класса: на ячейки, примыкающие к циклу без контакта C , ограничивающему рассматриваемую область G , и на внутренние ячейки. Принимая во внимание перечисленные в грубых системах возможные типы траекторий, нетрудно видеть, что каждая внутренняя ячейка имеет в составе своей границы один «элемент притяжения» или «сток», являющийся либо устойчивым узлом или фокусом, либо устойчивым предельным циклом, и один «элемент отталкивания» или «источник», являющийся либо неустойчивым узлом или фокусом, либо неустойчивым предельным циклом.

¹⁾ Можно показать, что в грубых системах все неособые траектории не только орбитно-устойчивы, но устойчивы по Ляпунову и при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$. Для траекторий, стремящихся при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) к состоянию равновесия, это устанавливается рассуждением, проведенным в § 3, п. 2, в сноске на стр. 414. Относительно траекторий, стремящихся при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) к предельному циклу, см. § 6 гл. V.

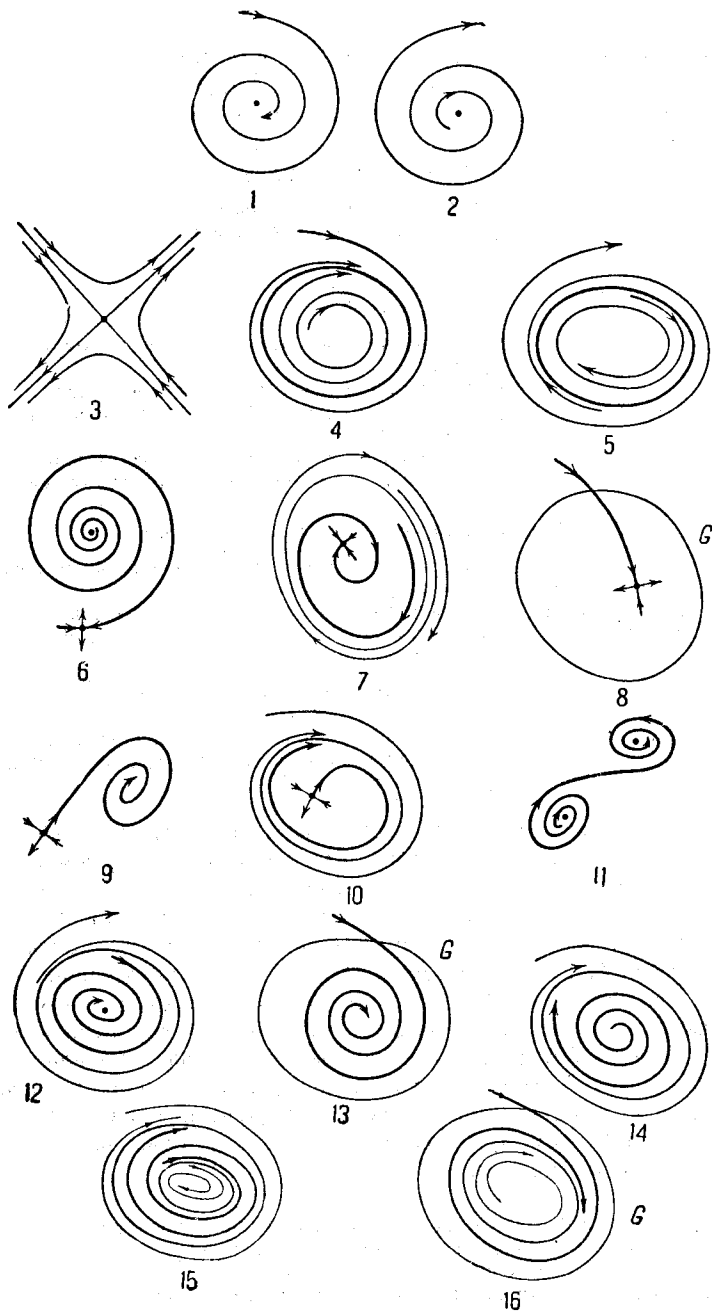


Рис. 304.

Очевидно, «элемент притяжения» или сток — это множество ω -предельных точек всякой неособой траектории данной ячейки, а элемент отталкивания или источник — множество α -предельных точек всякой неособой траектории ячейки (ср. § 3 настоящей главы, пп. 4 и 5). В каждой ячейке, примыкающей к граничному циклу, существует только один элемент притяжения — «сток». Нетрудно видеть при этом, что роль различных особых траекторий различна.

Фокусы (или узлы) служат источниками или стоками; хотя они и входят в границы ячеек, но они не играют существенной роли при разбиении фазовой плоскости на ячейки. Состояния равновесия типа седла не могут быть элементами притяжения или отталкивания; как и узлы, они входят в границу ячеек; не играя сами по себе существенной роли при разбиении фазовой плоскости на ячейки, они играют важную роль породителей сепаратрис. Сепаратрисы (усы седла) не могут служить ни источниками, ни стоками, они входят в границы ячеек и играют существенную роль при разбиении фазовой плоскости на ячейки, являясь, так сказать, «водоразделами», отделяющими друг от друга траектории различного поведения. Предельные циклы играют существенную роль при разбиении фазовой плоскости на ячейки и одновременно служат элементами притяжения (ω -предельными множествами) или отталкивания (α -предельными множествами).

Можно показать (ср. § 3 настоящей главы), что если мы знаем совокупность особых траекторий, именно, знаем взаимное расположение состояний равновесия, предельных циклов и сепаратрис и знаем направление движения по сепаратрисам и предельным циклам, а также знаем характер устойчивости элементов притяжения и отталкивания (узлов, фокусов и предельных циклов), то этих знаний нам достаточно для однозначного установления топологической структуры разбиения на траектории, т. е. для полного качественного исследования грубой динамической системы.

7. Типы ячеек, возможных в грубых системах. Выясним, какие могут быть топологические структуры разбиения на траектории отдельных ячеек в грубых системах. При этом мы будем отдельные ячейки всегда рассматривать вместе с границами. Кроме того, среди ячеек, имеющих одинаковую топологическую структуру, мы будем все же различать два типа; именно, мы будем считать ячейки принадлежащими к одному и тому же типу лишь в случае, если между ними существует топологическое отображение (переводящее траектории в траектории), *сохраняющее направление вращения*¹⁾.

¹⁾ Топологические отображения разделяются на два класса: на отображения, сохраняющие направление вращения, и отображения, меняющие направление вращения на обратное (в другой терминологии — на отображения, сохраняющие ориентацию, и на не сохраняющие ориентацию).

Простейшим примером топологического отображения, меняющего направление вращения, является зеркальное отображение. В силу сказанного в тексте, мы будем в дальнейшем две ячейки, получающиеся друг из друга зеркальным отображением, относить к различным типам.

Можно показать, что в грубых системах возможно лишь конечное число типов ячеек.

Не проводя полностью исследования возможных типов, разберем ряд простых случаев. Начнем классификацию внутренних ячеек, не примыкающих к циклу без соприкосновения; при этом мы не будем перечислять те ячейки, которые получаются из рассматриваемых путем замены t на $-t$ (при таком изменении времени меняются направления движения по «отделяющим» траекториям и устойчивость

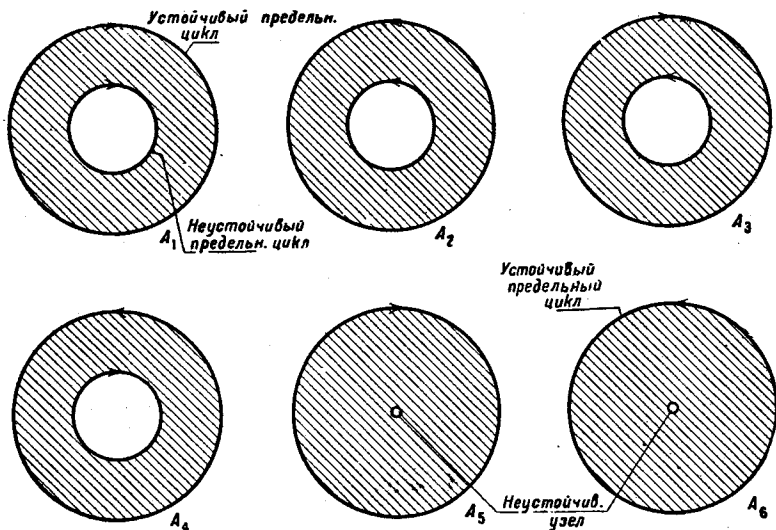


Рис. 305.

элементов притяжения и отталкивания). Возьмем какую-нибудь ячейку. Здесь могут быть следующие два случая:

1) седло не входит в границу; 2) седло входит в границу.

Рассмотрим первый случай. Если седло не входит в границу, то отсюда следует, что в границу непременно должен входить предельный цикл, так как плоскость не может разбиваться на ячейки состояниями равновесия, а особые траектории, из которых может состоять граница, суть сепаратрисы (и тогда непременно есть седло), предельные циклы и состояния равновесия. Если имеется предельный цикл, составляющий часть границы, то могут быть опять два случая:

I. Траектории рассматриваемой ячейки лежат вне (снаружи) цикла.

II. Траектории рассматриваемой ячейки лежат внутри цикла.

В первом случае (так как седла нет) должен быть еще один (внешний) предельный цикл. Так как очевидно, что в этом случае никакие другие дозволённые особые траектории не могут входить в границу, то, принимая во внимание направление вращения и устой-

чивость, мы получим в этом случае четыре различных типа областей: $Ala_1, Ala_2, Ala_3, Ala_4$ (рис. 305, случаи A_1, A_2, A_3, A_4). Во втором случае могут быть два варианта: либо опять внутри предельный цикл, — тогда мы опять возвращаемся к тем же типам, либо внутри фокус (или узел), — тогда имеем, учитывая направление вращения и устойчивость, два типа ячеек: $Allb_1$ и $Allb_2$ (рис. 305, случаи A_5, A_6).

Теперь вернемся ко второму основному случаю, когда седло входит в границу. Этот случай также придется разбить на два класса:

BI — предельный цикл не входит в границу;

BII — предельный цикл входит в границу.

Рассмотрим первый класс *BI*, когда предельных циклов нет, а в границу входит седло. Как известно, седло имеет четыре уса: два устойчивых и два неустойчивых. Предположим сначала (случай *Bla*), что в границу входят два уса одинаковой устойчивости, например два неустойчивых. Так как каждый из этих усов принадлежит границе области и не может (в силу грубости) идти в седло, то его асимптотическое поведение такое же, как у других траекторий, т. е. оба неустойчивых уса седла стремятся к устойчивому элементу, т. е. в нашем случае к устойчивому узлу (или фокусу). Мы получаем таким образом замкнутую кривую *C*, состоящую из седла, двух неустойчивых усов и устойчивого фокуса (или узла). Рассматриваемая нами ячейка должна лежать или вся вне этой замкнутой кривой, или вся внутри нее. Пусть она лежит вся внутри. Посмотрим, что еще тогда может входить в границу. Очевидно, тот устойчивый ус седла, который лежит внутри кривой *C*, также входит в границу. Он идет от неустойчивого элемента — неустойчивого узла (или фокуса), который, как и следовало ожидать, непременно лежит внутри кривой *C*. Таким образом, в границу рассматриваемой ячейки непременно входят соответственно расположенные три уса седла и три состояния равновесия. Может ли быть еще что-либо, входящее в границу? Так как мы предположили, что предельный цикл не входит в границу, поскольку граница может содержать лишь один источник и один сток, то в границу могут входить лишь седла с усами. Докажем, что этого не может быть, что граница рассматриваемой связной ячейки исчерпывается перечисленными шестью особыми элементами. Будем доказывать от противного. Предположим, что где-то внутри кривой *C* у нас имеется седло, входящее в границу. Но раз седло входит в границу, то есть и усы, входящие в границу.

Легко видеть, что если один из усов входит в границу, то непременно один из смежных с ним усов также входит в границу. Таким образом, должны быть один устойчивый и один неустойчивый ус, которые входят в границу. Так как эти усы непременно стремятся к тем же устойчивому и неустойчивому элементам, то наша ячейка разбивается на две части так, что кривая *C* уже не может входить в границу ячейки. Мы пришли к противоречию. В рассматриваемом варианте никакие другие особые элементы в границу входить не могут.

Мы еще оставили без рассмотрения другой вариант, когда рассматриваемая ячейка целиком лежит вне кривой S , которая входит в его границу. Легко показать, рассуждая совершенно аналогично предыдущему, что этот случай также приведет нас к противоречию. Таким образом, случай $B1a$ осуществляется только одним топологическим типом элементарных ячеек (см. рис. 306, случай $B1a$).

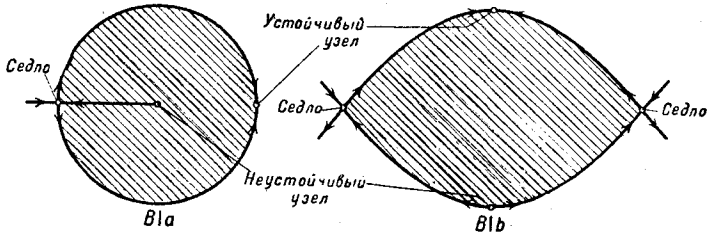


Рис. 306.

Предположим теперь (случай $B1b$), что в границу входят два рядом стоящих уса разной устойчивости: один устойчивый и один неустойчивый, а остальные два уса не входят в границу рассматриваемой ячейки. Так как усы не могут идти из седла в седло, то

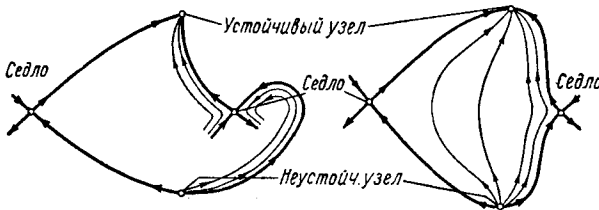


Рис. 307.

непрерывно устойчивый ус идет из неустойчивого узла (или фокуса), а неустойчивый ус идет в устойчивый узел (или фокус). Так как по предположению остальные усы рассматриваемого седла не входят в границу, то непременно в границу входит еще одно седло. Здесь, очевидно, возможны два случая поведения усов второго седла (рис. 307). Случай I быть не может, так как мы уже рассматривали тот вариант, когда два уса одинаковой устойчивости входят в границу ячейки, и показали, что тогда второе седло не входит в границу. Остается случай II. Здесь опять можно сделать два предположения: либо наша ячейка лежит целиком внутри замкнутой кривой S , образованной четырьмя усами и четырьмя состояниями равновесия, либо лежит целиком вне. Рассмотрим первое предположение: ячейка лежит целиком внутри кривой S . Покажем, что никакие другие особые траектории в границу рассматриваемой ячейки входить не могут. Действительно, единственные особые траектории, которые еще

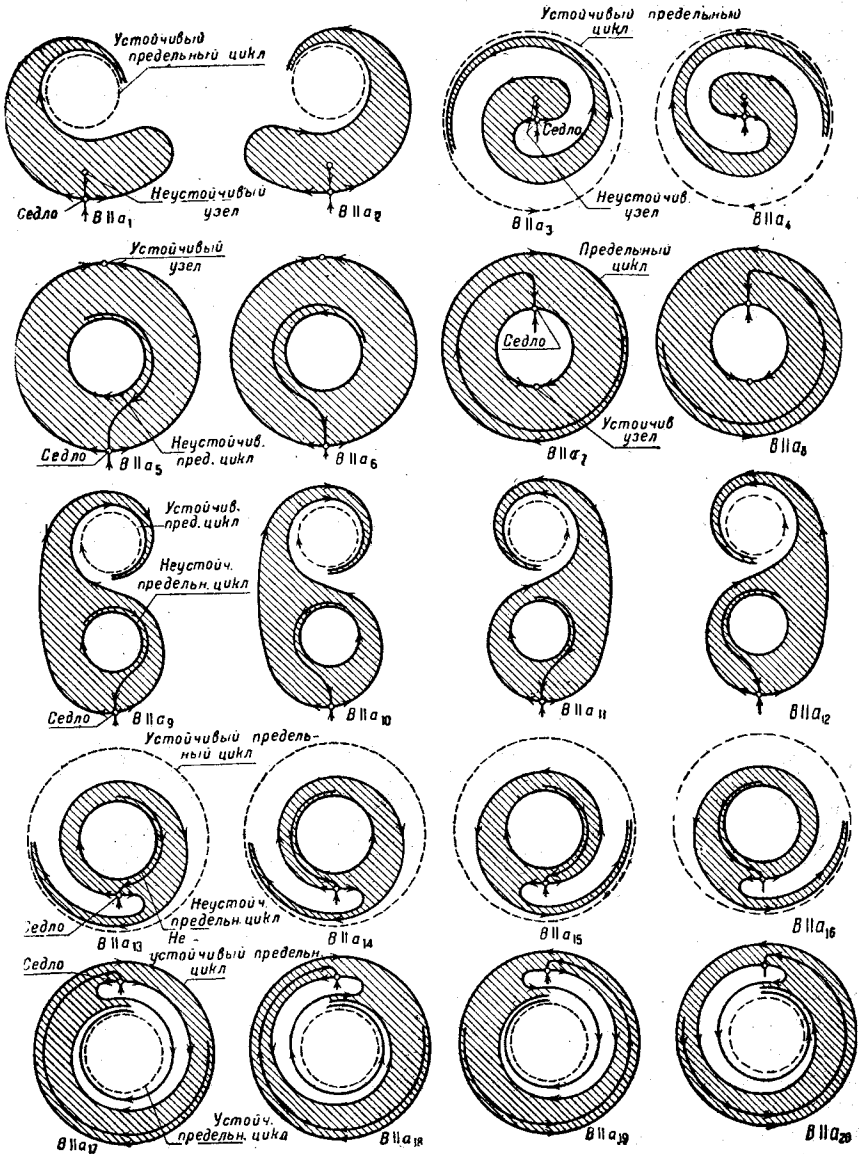


Рис. 308.

могут войти в границу, — это сепаратрисы и, следовательно, седла (предельные циклы не могут входить в границу по предположению; источник и сток уже имеются). Но если в границу войдет седло, то непременно войдут и два соседних уса. Эти усы обязательно пойдут в устойчивый и неустойчивый узлы (или фокусы) и разобьют нашу

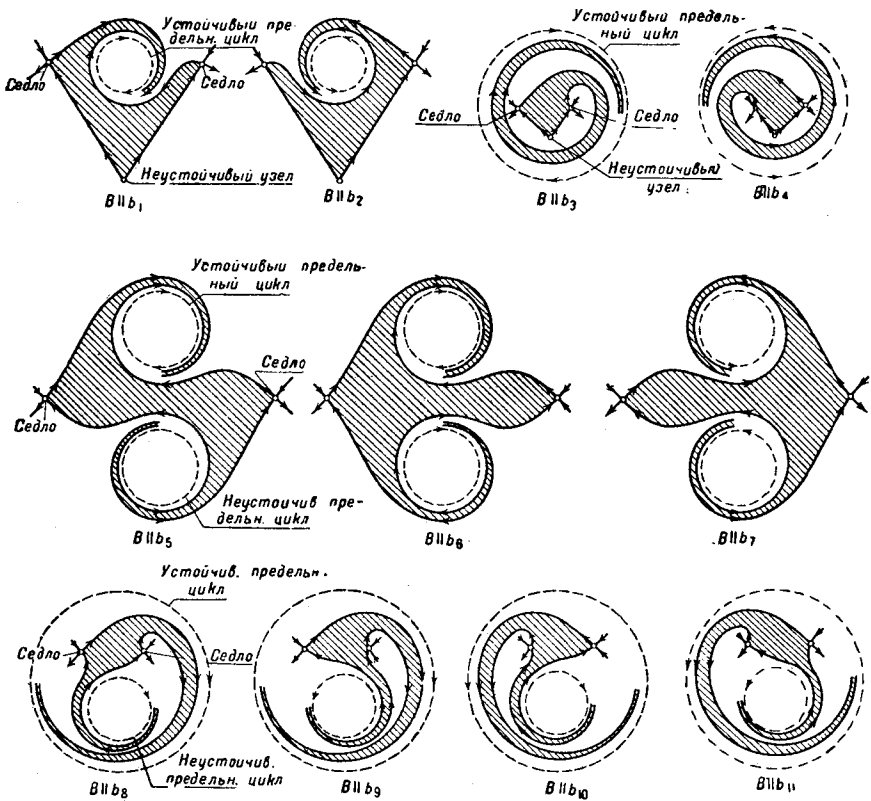


Рис. 309.

ячейку на две части таким образом, что кривая C уже не может целиком входить в границу ячейки. Мы пришли к противоречию, и следовательно, требуемое доказано. Нетрудно также опровергнуть предположение, что наша ячейка лежит целиком вне кривой C . Таким образом, случай Vlb осуществляется опять только одним топологическим типом элементарных ячеек (см. рис. 306, случай Vlb).

Мы не будем исследовать подробно возможные топологические типы для наиболее сложного случая VII , когда в границу ячейки входят и предельные циклы и седла. Возможные здесь случаи приведены на рис. 308 и 309. Заметим, что для случаев VII в известном

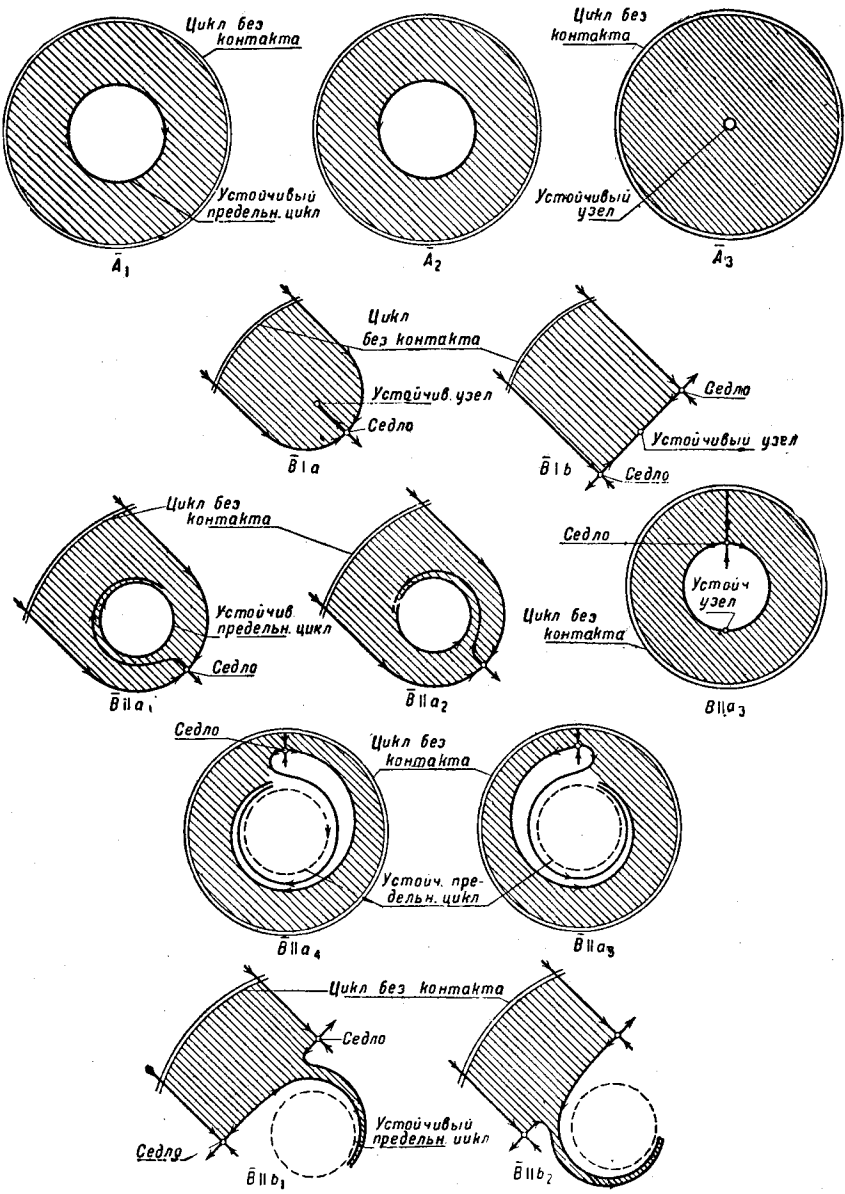


Рис. 310.

смысле противотипами служат случаи *VI*. Именно, случаи *VI* получаются из случаев *VI* путем соответствующей замены одного или двух узлов другими элементами притяжения или отталкивания — предельными циклами; количество различных типов при этом сильно возрастает вследствие того, что один цикл может располагаться внутри или вне другого и ввиду необходимости различать на циклах направление вращения. Также без специального рассмотрения мы оставим случаи ячеек, примыкающих к циклу без прикосновения. Случаи, которые могут здесь осуществляться, изображены на рис. 310.

После рассмотрения различных типов элементарных ячеек в грубых системах возникает вопрос о «законах совместного существования» элементарных ячеек различных типов. Мы не будем здесь касаться этого еще не решенного полностью вопроса. Поясним только одно понятие, которое имеет к этому вопросу некоторое отношение. Именно, иногда бывает удобно пользоваться понятием области *устойчивости в большом* данного элемента притяжения; под такой областью устойчивости в большом понимается тогда совокупность всех элементарных ячеек, имеющих рассматриваемый особый элемент своим элементом притяжения. Этим замечанием мы заканчиваем рассмотрение грубых систем ¹⁾.

§ 5. Зависимость качественной картины траекторий от параметра [10—13]

Мы уже неоднократно рассматривали случай, когда в правые части дифференциальных уравнений, соответствующих рассматриваемой динамической системе, входит некоторый параметр, и занимались вопросом об изменении качественной структуры разбиения на траектории при изменении этого параметра (см. гл. II). Сейчас мы остановимся на этом вопросе подробнее и при более общих предположениях относительно рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, чем в гл. II.

Всякая система уравнений, соответствующая реальной физической системе, содержит некоторое число параметров, границы изменения которых определяются из условий задачи. Такими параметрами могут быть, например, коэффициент взаимной индукции, сопротивление контура и т. д. Предположим, что мы дали этим параметрам некоторые фиксированные значения. Согласно сказанному в предыдущем параграфе мы должны считать, что качественная картина траекторий на фазо-

¹⁾ Отметим еще одно простое, но весьма важное свойство грубых систем: качественная структура разбиения на траектории всякой грубой системы может быть установлена путем приближенного построения всех особых траекторий (состояний равновесия, предельных циклов и сепаратрис). Точность приближения, с которой особые траектории должны быть построены, определяется некоторой величиной — «мерой грубости» [31].

вой плоскости при данных частных значениях параметров лишь в том случае отображает реальные черты физической системы, если эта качественная картина не меняется при «малых» изменениях параметров, т. е. если при данных частных значениях параметров система является грубой¹⁾. Однако при значительных изменениях параметров характер движения физической системы, вообще говоря, может сильно меняться. Так, например, при одних значениях параметров в системе могут иметь место автоколебания, а при других автоколебания могут отсутствовать. В соответствии с этим при значительных изменениях параметров будет изменяться и качественная картина траекторий, определяемая дифференциальными уравнениями, соответствующими рассматриваемой физической системе.

Нашей задачей и будет изучение изменения качественной картины траекторий на фазовой плоскости при изменении параметров. При этом для простоты мы предположим, что правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений зависят только от одного параметра λ (в случае большего числа параметров рассмотрение аналогично). Таким образом, рассматриваемая система имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, \lambda); \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Мы предположим, кроме того, что правые части $P(x, y, \lambda)$ и $Q(x, y, \lambda)$ являются аналитическими функциями x и y для значений этих переменных в некоторой области G (не зависящей от λ) и аналитическими функциями λ для значений λ в области $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — некоторые постоянные.

Основными теоремами, необходимыми для исследования изменений траекторий при изменении параметра, являются сформулированные в Дополнении I теоремы IV, V и VI. Однако, как мы уже отмечали в § 4 настоящей главы, эти теоремы отвечают лишь на вопрос о том, как при изменении параметра меняется часть траектории, соответствующая конечному промежутку времени, и непосредственно ничего не говорят о том, как будет меняться целая траектория или как будет меняться качественная картина траекторий. Вопрос о том, как может меняться качественная картина траекторий при изменении параметра, требует специального рассмотрения.

1. Бифуркационное значение параметра. Напомним введенное в § 5 гл. II определение бифуркационного значения параметра. Пусть нам дано какое-нибудь значение $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$). Если существует такое ε ($\varepsilon > 0$), что для всех значений λ , удовле-

¹⁾ Или «релятивно грубой», т. е. грубой по отношению к данной зависимости от параметра. Однако для простоты мы будем предполагать систему просто грубой.

творяющих условию $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, топологическая структура разбиения фазовой плоскости на траектории одинакова, то мы скажем, что $\lambda = \lambda_0$ есть обыкновенное значение параметра; значение $\lambda = \lambda_0$ называется *бифуркационным* значением параметра, если найдутся сколь угодно близкие к λ_0 значения параметра λ , для которых качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории отлична от такой же картины, соответствующей $\lambda = \lambda_0$. Из самого определения бифуркационного значения параметра очевидно, что для такого значения система не может быть грубой.

Качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории, как мы знаем, определяется так называемыми особыми элементами, особыми траекториями (см. § 3 настоящей главы). Поэтому, чтобы изучить зависимость качественной картины фазовых траекторий от параметра, следует изучить зависимость от параметра системы особых элементов. В этом параграфе мы рассмотрим ряд случаев зависимости особых элементов, главным образом предельных циклов, от параметра.

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ наша система является грубой, т. е. на фазовой плоскости существует цикл без прикосновения, определяющий собой область G , внутри которой все состояния равновесия грубые, т. е. таковы, что для них $\Delta \neq 0$, и при $\Delta > 0$, $\sigma \neq 0$ все предельные циклы имеют характеристические показатели, отличные от нуля, и сепаратрисы не идут из седла в седло. Очевидно, что в этом случае значение $\lambda = \lambda_0$ не может быть бифуркационным по самому определению грубых систем и по нашему предположению об аналитичности правых частей уравнений (6.22) как функций λ .

Действительно, нетрудно видеть, что если $\lambda = \lambda_0$ соответствует грубой системе, то мы всегда можем указать интервал (достаточно малый) значений λ вокруг $\lambda = \lambda_0$, чтобы при значениях λ из этого интервала система также была грубой, и при этом качественная картина траекторий была бы такой же, как и при $\lambda = \lambda_0$. Отсюда ясно, что не может быть «последнего грубого» (т. е. соответствующего грубой системе) значения λ , но может быть «первое негрубое».

Предположим для упрощения рассуждений, что при всех рассматриваемых изменениях параметра ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$) цикл без прикосновения так и остается циклом без прикосновения. Очевидно, что только те значения параметра λ могут быть бифуркационными, при которых появляются особые элементы, имеющие негрубую природу.

Укажем простейшие случаи таких негрубых образований:

1) сложные состояния равновесия (такие состояния равновесия могут либо появиться вновь, либо получиться от слияния простых точек, например узла и седла);

2) вырожденный фокус или центр;

3) двойной предельный цикл (такой цикл может либо появиться вновь, либо получиться от слияния устойчивого и неустойчивого циклов);

4) сепаратриса, идущая из седла в седло.

При дальнейшем изменении параметра система может опять сделаться грубой; сложная особая точка может или исчезнуть, или разбиться на простые; вырожденный фокус может, как мы увидим в дальнейшем, стать невырожденным, изменяя при этом устойчивость и период предельный цикл, и т. д.

2. Простейшие бифуркации состояний равновесия. Выскажем сначала несколько простых соображений, касающихся зависимости состояний равновесия от параметра. Во-первых, очевидно (мы уже говорили об этом в связи с так называемой σ , Δ -диаграммой), что при изменении параметра характер состояния равновесия может измениться лишь в том случае, если для соответствующего состояния равновесия либо Δ , либо σ обратится в нуль. Во-вторых, легко видеть, что при наших предположениях о $P(x, y, \lambda)$ и $Q(x, y, \lambda)$ индекс замкнутой кривой

$$j = \frac{1}{2\pi} \int_N \frac{PdQ - QdP}{Q^2 + P^2}$$

есть непрерывная (и даже аналитическая) функция параметра λ , если только на самой кривой N не появляются состояния равновесия; отсюда следует, что при этом условии индекс не меняется при изменении параметра, так как он является целым числом.

Отсюда вытекает, что одно состояние равновесия с индексом, не равным нулю, не может ни появиться, ни исчезнуть при изменении параметра. Если мы имеем простую особую точку — узел, то она может, например, исчезнуть лишь после предварительного слияния с седлом, при котором образуется сложная особая точка с индексом, равным нулю. Обратное, седло или узел могут, например, появиться следующим образом: сначала появляется сложная особая точка с индексом, равным нулю, которая затем разделяется на две: седло и узел¹⁾.

Отметим, что мы могли бы прийти к тем же заключениям, принимая во внимание, что состояния равновесия являются общими точками кривых (изоклин)

$$P(x, y, \lambda) = 0 \quad \text{и} \quad Q(x, y, \lambda) = 0.$$

Среди сложных особых точек наиболее «простой»²⁾ является сложная

¹⁾ В некоторых случаях бывает удобно исследовать сложные особые точки путем подходящего введения параметра таким образом, чтобы для определенного значения параметра мы получили сложную особую точку, а для соседних значений параметра эта особая точка распадалась бы на ряд простых.

²⁾ Можно внести точный смысл в неопределенные слова «наиболее простая» особая точка. Именно, если рассматривать только негрубые особые точки и среди них выделить «релятивно грубые», то такой релятивно грубой особой точкой будет особая точка седло-узел.

особая точка, образующаяся от слияния седла и узла. Эта особая точка называется «седло-узел». Можно показать¹⁾, что окрестность такой особой точки имеет характер, изображенный на рис. 311. Если у рассматриваемой системы при значении $\lambda = \lambda_0$ есть особая точка «седло-узел», а при всех достаточно близких к λ_0 значениях λ у системы нет такой точки, то, очевидно, при изменении λ от значения λ_0 особая точка седло-узел либо распадается на две: на седло и узел, либо исчезает.

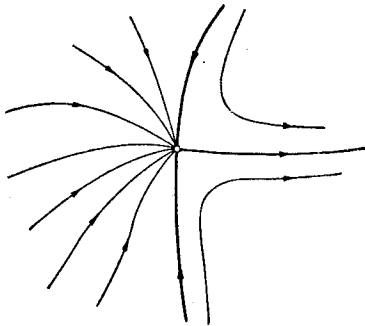


Рис. 311.

3. Появление предельных циклов из сложных предельных циклов. Рассмотрим теперь те случаи, когда при переходе через бифуркационное значение параметра могут появляться или исчезать предельные циклы. В § 4 мы уже останавливались на том, как при изменении правых частей системы дифференциальных уравнений сложные предельные циклы могут разделяться на несколько циклов или исчезать.

Вернемся снова к этому вопросу в предположении, что правые части являются функциями параметра λ . Так же как и в § 4 настоящей главы, мы используем при этом функцию последования.

Предположим, что при значении $\lambda = \lambda_0$ мы имеем отрезок без контакта l и функцию последования на нем. Опираясь на теорему VI Дополнения I, о которой мы говорили в начале этого параграфа, можно высказать следующее утверждение: *всегда можно указать такое $\eta > 0$, чтобы для всех значений λ внутри интервала $\lambda_0 - \eta < \lambda < \lambda_0 + \eta$ отрезок без контакта оставался отрезком без контакта²⁾ и на нем существовала бы функция последования*

$\bar{s} = f(s, \lambda)$ для значений $s: s_1 < s < s_2$, где s_1 и s_2 можно взять не зависящими от λ . При этом функция $f(s, \lambda)$ — аналитическая функция s и λ для значений переменных s и λ внутри указанных границ (ср. § 4 настоящей главы, п. 3).

Рассмотрим, как при изменении λ могут появляться и исчезать предельные циклы.

Рассмотрим плоскость \bar{s}, s и на ней диаграмму Ламерея, т. е. кривую $\bar{s} = f(s, \lambda)$ и прямую $\bar{s} = s$. Замкнутым траекториям (см.

¹⁾ Это требует рассмотрения, выходящего за рамки настоящей книги.

²⁾ Легко видеть, что то же самое предложение будет справедливо и в том случае, когда вместо неподвижного отрезка без контакта рассматривается «подвижный» отрезок (или дуга) без контакта и при этом функции в параметрических уравнениях этого отрезка (или дуги) являются аналитическими функциями λ .

гл. V, § 7) соответствуют значения s , для которых $f(s, \lambda) - s = 0$, т. е. общие точки кривой $\bar{s} = f(s, \lambda)$ и прямой $\bar{s} = s$. Мы видели (см. гл. V, § 7), что на основании характера поведения функции $\bar{s} = f(s, \lambda)$ вблизи ее точки пересечения с прямой $\bar{s} = s$ можно сделать заключения о поведении траекторий вблизи предельного цикла.

Предположим сначала, что при $\lambda = \lambda_0$ отрезок без контакта l в точке, соответствующей $s = s_0$, пересекает грубый предельный цикл, т. е. предельный цикл, у которого $h \neq 0$ (см. § 4 настоящей главы, п. 3). Тогда на диаграмме Ламерея кривая $\bar{s} = f(s, \lambda_0)$ будет при $s = s_0$ иметь простую точку R_0 пересечения с прямой $\bar{s} = s$, т. е. общую точку, в которой касательная к кривой $\bar{s} = f(s, \lambda_0)$ не совпадает с прямой $\bar{s} = s$, так что $f'(s_0, \lambda_0) \neq 1$. Так как функция последования — аналитическая функция λ , то кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ и ее касательная мало меняются при малых изменениях λ , и следовательно, при значениях λ , достаточно близких к λ_0 , кривая $\bar{s} = f(s, \lambda)$ также будет пересекать прямую $\bar{s} = s$ в точке R , близкой к R_0 , и не будет иметь других точек пересечения с прямой $\bar{s} = s$, достаточно близких к R (рис. 312).

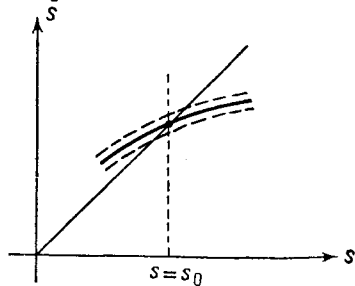


Рис. 312.

Это означает, что при всех значениях λ , достаточно близких к λ_0 , мы будем иметь один и только один (соответствующий значениям s , достаточно близким к s_0) предельный цикл, устойчивый или неустойчивый, в зависимости от того, устойчивым или неустойчивым был предельный цикл L_0 .

Предположим, что значение $\lambda = \lambda_0$ является бифуркационным и что при этом значении λ_0 у системы (6.22) существует двойной предельный цикл (см. § 4, п. 3), пересекающий отрезок без контакта l в точке, соответствующей значению $s = s_0$, где $s_1 < s_0 < s_2$. Тогда кривая, изображающая функцию последования

$$\bar{s} = f(s, \lambda_0),$$

в точке, соответствующей значению $s = s_0$, имеет простое соприкосновение с прямой $\bar{s} = s$. При малых изменениях параметра общая точка у прямой $\bar{s} = s$ и кривой $\bar{s} = f(s, \lambda)$ может либо исчезнуть, либо разделиться на две простые точки пересечения (рис. 313). Предположим, например, что при значениях $\lambda < \lambda_0$ общая точка прямой $\bar{s} = s$ и кривой $\bar{s} = f(s, \lambda)$ исчезает, а при $\lambda > \lambda_0$ разделяется на две. Тогда при изменении параметра λ от некоторого значения $\lambda_1 < \lambda_0$ ($|\lambda_1 - \lambda_0| < \eta$) до некоторого значения $\lambda_2 > \lambda_0$ у системы сначала нет предельных циклов, пересекающих отрезок без контакта l , а затем появляется один двойной («полуустойчивый») предельный цикл, кото-

рый при дальнейшем изменении параметра разделяется на два простых предельных цикла, из которых один устойчивый, другой неустойчивый¹⁾. Обратное, полуустойчивый цикл может получиться от слияния двух циклов, из которых один устойчивый, другой неустойчивый.

Аналогично можно было бы рассмотреть более сложный случай, именно случай k -кратного цикла ($k \geq 3$) при $\lambda = \lambda_0$ и его разделение на k простых циклов или на циклы меньшей кратности, но мы не будем на этом останавливаться. Укажем только, что высказанные

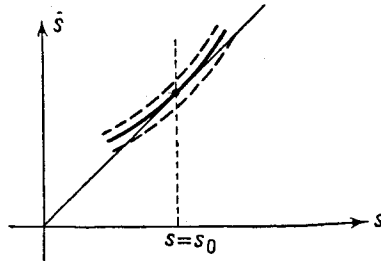


Рис. 313.

соображения могут быть также изложены в иной геометрической форме и сведены к обычной теории бифуркаций, если ввести рассмотренную выше функцию

$$\Psi(s, \lambda) = f(s, \lambda) - s.$$

Очевидно (ср. § 4), корни уравнения

$$\Psi(s, \lambda) = 0$$

при всяком данном λ соответствуют предельным циклам²⁾.

Мы не будем подробно останавливаться на этой бифуркационной диаграмме, так как она по существу не отличается от бифуркационных диаграмм, рассмотренных ранее, и совершенно аналогичная бифуркационная диаграмма будет подробно рассмотрена для случая появления предельного цикла из состояния равновесия.

4. Появление предельных циклов из сложного фокуса. Рассмотрим теперь случай появления предельного цикла из сложного фокуса (т. е. состояния равновесия, для которого $\Delta > 0$, $\sigma = 0$) или стягивание

¹⁾ Физический пример с такой бифуркацией будет рассмотрен в § 10 гл. IX (жесткое возникновение колебаний в ламповом генераторе).

²⁾ В § 4 было показано, что в случае, когда цикл k -кратный, он заведомо может быть разделен при надлежащих изменениях правой части системы не менее чем на два предельных цикла. Если при заданном λ уравнение $\Psi(s, \lambda) = 0$ обращается в тождество, то это будет означать, что все траектории, пересекающие отрезок без контакта, замкнуты. Этот исключительный случай мы сейчас не рассматриваем.

предельного цикла в такое состояние равновесия. Этому вопросу также уже касались в § 4. Остановимся на нем здесь еще раз в предположении, что правые части рассматриваемой системы зависят от параметра.

Предположим, что исходная система уравнений путем надлежащего преобразования приведена к каноническому виду, т. е. к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(\lambda)x - b_1(\lambda)y + g(x, y, \lambda), \\ \frac{dy}{dt} &= b_1(\lambda)x + a_1(\lambda)y + h(x, y, \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

так что рассматриваемое состояние равновесия лежит в начале координат. При этом $g(x, y, \lambda)$, $h(x, y, \lambda)$ — ряды, расположенные по степеням x и y , начинающиеся с членов не ниже второго порядка, а $a_1(\lambda)$ и $b_1(\lambda)$ — действительная и мнимая части корней характеристического уравнения (при этом, не нарушая общности, можно считать, что $b_1(\lambda) > 0$ при всех рассматриваемых λ). Тогда при $a_1(\lambda) < 0$ состояние равновесия O есть устойчивый фокус, а при $a_1(\lambda) > 0$ состояние равновесия O есть неустойчивый фокус; если же $a_1(\lambda) = 0$, то члены первого порядка не дают ответа на вопрос об устойчивости.

Как и в § 4, переходя к полярным координатам и заменяя систему одним уравнением, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= r \frac{a_1(\lambda)r + g(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda) \cos \theta + h(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda) \sin \theta}{b_1(\lambda)r + h(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda) \cos \theta - g(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda) \sin \theta} = \\ &= rR_1(\theta, \lambda) + r^2R_2(\theta, \lambda) + \dots \quad (6.24) \end{aligned}$$

Так как, по предположению, при рассматриваемых значениях λ $b_1(\lambda)$ не обращается в нуль, то ряд в правой части сходится при всех значениях θ и при всех рассматриваемых значениях λ ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$) для всех достаточно малых значений r , $|r| < \rho$ (ρ не зависит от θ и λ). При этом (см. § 4 настоящей главы) $R_i(\theta, \lambda)$ — периодические функции θ и, в частности, $R_1(\theta, \lambda) = \frac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)}$. Как и в § 4, будем искать решение уравнения (6.24) $r = f(\theta, r_0, \lambda)$, обращающееся в r_0 при $\theta = 0$ (очевидно, имеют смысл только $r_0 \geq 0$). Это решение (ср. § 4), в силу теоремы VI Дополнения I и следствия из этой теоремы, может быть разложено в ряд по степеням r_0 , сходящийся при всех θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, и при всех рассматриваемых значениях λ для значений r_0 , $|r_0| < \rho_0$, где ρ_0 можно взять не зависящим от λ . Таким образом,

$$r = r_0 u_1(\theta, \lambda) + r_0^2 u_2(\theta, \lambda) + \dots,$$

и $u_i(\theta, \lambda)$ вычисляются так же, как указано в § 4 настоящей главы, из рекуррентных дифференциальных уравнений вида (6.12) с той лишь разницей, что в рассматриваемом нами случае $R_i(\theta)$ зависят от λ . Рассмотрим, как и в § 4, функцию последования

на полупрямой $\theta = 0$:

$$r = f(2\pi, r_0, \lambda) = u_1(2\pi, \lambda) r_0 + \dots,$$

где

$$u_1(2\pi, \lambda) = e^{\frac{a_1}{b_1} 2\pi}.$$

Пользуясь этой функцией, мы могли бы провести геометрическое рассмотрение, аналогичное тому, которое мы провели для случая обычной функции последования. Однако мы воспользуемся сейчас иным геометрическим рассмотрением. Вводя функцию

$$\Psi(r_0, \lambda) = f(2\pi, \lambda) - r_0 = \alpha_1(\lambda) r_0 + \alpha_2(\lambda) r_0^2 + \dots$$

и рассматривая полуплоскость r_0, λ , ($r_0 \geq 0$), будем строить для этого случая обычные бифуркационные диаграммы.

Посмотрим, какие здесь могут быть возможности:

1) Предположим, что для рассматриваемых значений λ $\alpha_1(\lambda) \neq 0$, следовательно и $\alpha_1(\lambda_0) \neq 0$. Тогда для рассматриваемых значений λ кривая $\Psi(r_0, \lambda) = 0$ не имеет особых точек (в смысле дифференциальной геометрии, т.е. точек, в которых одновременно $\Psi'_r = 0$ и $\Psi'_\lambda = 0$); знак $\alpha_1(\lambda)$ не меняется, особая точка — фокус — сохраняет свою устойчивость и от нее не может отделиться (и к ней не может стянуться) предельный цикл.

2) Займемся теперь случаем, о котором мы говорили выше, когда $\alpha_1(\lambda) = \frac{\sigma}{2}$ обращается в нуль, т.е. когда среди рассматриваемых значений λ найдется такое значение $\lambda = \lambda_0$, при котором $\alpha_1(\lambda_0) = 0$; а следовательно и $\alpha_1(\lambda_0) = 0$ (фокус становится вырожденным). Кривая $\Psi(r_0, \lambda) = 0$ имеет тогда в точке $r_0 = 0$ особую точку (легко проверить, что $(\Psi'_{r_0})_{r_0=0} = 0$ и $(\Psi'_\lambda)_{r_0=0} = 0$).

Прежде чем исследовать характер бифуркационной диаграммы вокруг точки $r_0 = 0$, $\lambda = \lambda_0$, напомним (см. § 4), что если $\alpha_1(\lambda_0) = 0$, то непременно обращается в нуль и $\alpha_2(\lambda_0)$. И вообще, если $\alpha_1(\lambda_0) = \dots = \alpha_{2n-1}(\lambda_0) = 0$, то непременно и $\alpha_{2n}(\lambda_0) = 0$.

Рассмотрим функцию $\Psi(r_0, \lambda) = 0$. Для исследования особой точки $r_0 = 0$, $\lambda = \lambda_0$ найдем выражения для вторых производных $\Psi(r_0, \lambda)$ при значении $r_0 = 0$, $\lambda = \lambda_0$. Получим:

$$(\Psi''_{r_0 r_0})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} = \alpha_2(\lambda_0) = 0; \quad (\Psi''_{\lambda \lambda})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} = 0;$$

$$(\Psi''_{r_0 \lambda})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} = \left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} = 2\pi \frac{a'_1(\lambda_0)}{b_1(\lambda_0)}.$$

Рассмотрим подробнее случай, когда

$$(\Psi''_{r_0 \lambda})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} = \left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \neq 0;$$

тогда

$$(\Psi''_{r_0 r_0})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} (\Psi''_{\lambda \lambda})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} - (\Psi''_{r_0 \lambda})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0}^2 < 0$$

и точка $r_0=0$, $\lambda=\lambda_0$ будет простой двукратной точкой (узлом) для кривой $\Psi(r_0, \lambda)=0$.

В этом случае при изменении λ от значений, меньших λ_0 , до значений, больших λ_0 , $\alpha_1(\lambda)$ и $\alpha_2(\lambda)$ меняют знак, и рассматриваемый фокус меняет устойчивость.

Проще всего исследовать характер точки $r_0=0$, $\lambda=\lambda_0$, если воспользоваться тем, что кривая $\Psi(r_0, \lambda)=0$ распадается на прямую $r_0=0$ и кривую $\varphi(r_0, \lambda)=\alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)r_0 + \dots = 0$.

Для того, чтобы выяснить, как расположена кривая $\varphi(r_0, \lambda)=0$ вблизи точки $r_0=0$, $\lambda=\lambda_0$, вычислим значения $\frac{d\lambda}{dr_0}$ и $\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}$ в этой точке. Получим:

$$\left(\frac{d\lambda}{dr_0}\right)_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} = -\frac{\alpha_2(\lambda_0)}{\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}} = 0,$$

т. е. кривая $\varphi(r_0, \lambda)=0$ имеет в точке $r_0=0$, $\lambda=\lambda_0$ вертикальную касательную:

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} = -\frac{2\alpha_3(\lambda_0)}{\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}}.$$

Предположим, что $\alpha_3(\lambda_0) \neq 0$. Тогда кривая $\varphi(r_0, \lambda)=0$ вблизи точки $r_0=0$, $\lambda=\lambda_0$ расположена целиком по одну сторону от касательной.

Нетрудно видеть, что здесь могут быть четыре возможности в зависимости от знака $\alpha_1'(\lambda_0)$ и знака $\alpha_3(\lambda_0)$ (согласно сказанному выше $b_1(\lambda)$ не обращается в нуль, и мы будем считать, что $b_1(\lambda) > 0$). Приведем бифуркационные диаграммы, соответствующие этим случаям, где, как обычно, заштрихованные области соответствуют $\Psi(r_0, \lambda) > 0$.

а) $\alpha_1'(\lambda_0) > 0$, $\alpha_3(\lambda_0) < 0$;

тогда

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} > 0.$$

Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 314. В этом случае при возрастании λ фокус из устойчивого делается неустойчивым, и при этом появляется устойчивый предельный цикл (и только один).

б) $a'_1(\lambda_0) > 0, \alpha_3(\lambda_0) > 0;$

тогда

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} > 0 \text{ и } \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\lambda=\lambda_0, r_0=0} < 0.$$

Бифуркационная диаграмма имеет вид, представленный на рис. 315. При возрастании λ фокус из устойчивого делается неустойчивым, при

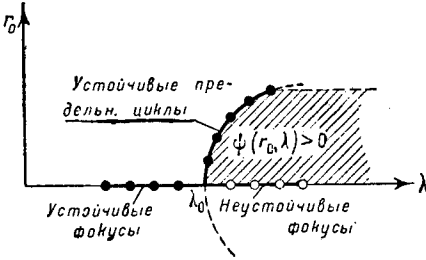


Рис. 314.

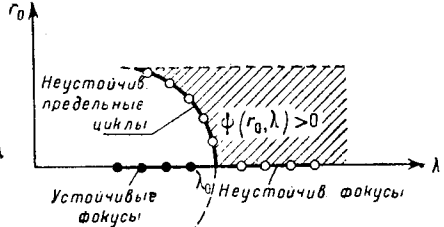


Рис. 315.

этом неустойчивый предельный цикл (только один) стягивается в фокус.

в) $a'_1(\lambda_0) < 0, \alpha_3(\lambda_0) > 0;$

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} < 0 \text{ и } \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\lambda=\lambda_0, r_0=0} > 0.$$

В этом случае неустойчивый фокус при возрастании λ делается

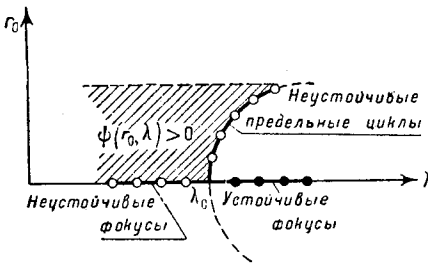


Рис. 316.

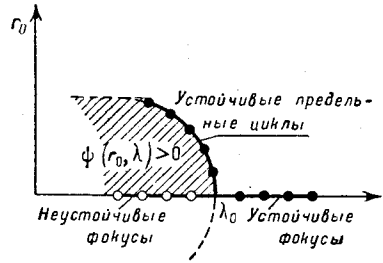


Рис. 317.

устойчивым, и появляется неустойчивый предельный цикл (рис. 316).

г) $a'_1(\lambda_0) < 0, \alpha_3(\lambda_0) < 0;$

$$\left[\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_0} < 0 \text{ и } \left[\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right]_{\lambda=\lambda_0, r_0=r_0} < 0.$$

При возрастании λ неустойчивый фокус делается устойчивым. Устойчивый предельный цикл стягивается в фокус (рис. 317).

Такие же результаты мы получили бы, если бы $\alpha_3(\lambda_0) = 0$ и первый не равный нулю коэффициент был бы $\alpha_{2k+1}(\lambda_0)$, где $k > 1$. И в этом случае всегда появляется (или исчезает) один и только один предельный цикл. Случай $\alpha'_1(\lambda_0) = 0$ мы рассматривать не будем. В этом случае, вообще говоря, при изменении λ могут появиться два, три и т. д. предельных цикла.

Прежде чем перейти к рассмотрению физического примера, заметим следующее. Как мы видели, в простейшем случае (практически наиболее интересном) для решения вопроса нам достаточно знать величины $\alpha_k(\lambda)$ только для $\lambda = \lambda_0$. Поэтому для упрощения вычислений следует писать уравнение (6.24) только для $\lambda = \lambda_0$:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{b_1(\lambda_0)} [(P_2)_0 \cos \theta + (Q_2)_0 \sin \theta] \left\{ 1 + \frac{(P_2)_0 \sin \theta - (Q_2)_0 \cos \theta}{b_1(\lambda_0) r} + \left(\frac{(P_2)_0 \sin \theta - (Q_2)_0 \cos \theta}{b_1(\lambda_0) r} \right)^2 + \dots \right\}, \quad (6.25)$$

где через $(P_2)_0$ и $(Q_2)_0$ обозначены $P_2(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda)$ и $Q_2(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$, или

$$\frac{dr}{d\theta} = R_2(\theta, \lambda_0) r^2 + R_3(\theta, \lambda_0) r^3 + \dots,$$

так как $R_1(\lambda_0, \theta) = 0$. Решение этого упрощенного уравнения опять ищем в виде ряда:

$$r = r_0 u_1 + r_0^2 u_2 + r_0^3 u_3 + \dots,$$

причем $u_1 = 1$, а для остальных $u_k(\theta, \lambda_0)$ получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_2}{d\theta} &= R_2(\theta, \lambda_0); \\ \frac{du_3}{d\theta} &= 2u_2 R_2(\theta, \lambda_0) + R_3(\theta, \lambda_0); \\ \frac{du_4}{d\theta} &= (u_2^2 + 2u_3) R_2(\theta, \lambda_0) + 3u_2 R_3(\theta, \lambda_0) + R_4(\theta, \lambda_0); \\ \frac{du_5}{d\theta} &= (2u_4 + 2u_2 u_3) R_2(\theta, \lambda_0) + (3u_2^2 + 3u_3) R_3(\theta, \lambda_0) + \\ &\quad + 4u_2 R_4(\theta, \lambda_0) + R_5(\theta, \lambda_0) \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

с начальными условиями $u_k(0, \lambda_0) = 0$ ($k = 2, 3, \dots$).

Отсюда можно найти $\alpha_3(\lambda_0)$, а если $\alpha_3(\lambda_0) = 0$, то $\alpha_5(\lambda_0)$ и т. д. Что же касается выражения для $\alpha'_1(\lambda_0)$, которое также необходимо для решения вопроса о стягивании или рождении цикла, то $\alpha_1(\lambda)$ и $b_1(\lambda)$, нужные для его вычисления, могут быть найдены из обычного уравнения, определяющего характеристические корни.

5. Физический пример. Рассмотрим для иллюстрации сказанного так называемое мягкое возбуждение автоколебаний в ламповом генераторе. Уравнение лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки при обычных идеализациях и при аппроксимации характеристики лампы полиномом третьей степени

$$i_a = i_{a0} + S_0 u + S_1 u^2 - S_2 u^3,$$

где i_a — анодный ток, u — переменная составляющая напряжения на сетке лампы, а коэффициенты i_{a0} , S_0 и S_2 положительны, имеет следующий вид (см., например, гл. IX):

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + u = (MS_0 - RC + 2MS_1 u - 3MS_2 u^2) \frac{du}{dt}.$$

Если ввести безразмерные переменные $\tau = \omega_0 t$ (где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$), $y = \frac{u}{u_0}$ (u_0 — некоторый масштаб напряжений) и $x = \frac{dy}{d\tau}$, то уравнение колебаний лампового генератора запишется в виде следующей системы двух дифференциальных уравнений первого порядка¹⁾:

$$\frac{dx}{d\tau} = -y + (\alpha + \beta y - \gamma y^2) x, \quad \frac{dy}{d\tau} = x, \quad (6.27)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega_0 (MS_0 - RC), & \beta &= 2\omega_0 MS_1 u_0, \\ \gamma &= 3\omega_0 MS_2 u_0^2 \quad (\gamma > 0). \end{aligned}$$

Будем рассматривать состояние равновесия $x=0$, $y=0$ и будем исследовать возможное рождение цикла из этого состояния равновесия при изменении коэффициента взаимной индукции обратной связи M . Характеристическое уравнение для этого состояния равновесия имеет вид:

$$v^2 + \alpha v + 1 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} a_1(M) &= \frac{\alpha}{2} = \frac{\omega_0}{2} (MS_0 - RC), \\ b_1(M) &= + \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{4} (MS_0 - RC)^2}. \end{aligned}$$

Бифуркационное значение параметра M равно

$$M_0 = \frac{RC}{S_0},$$

¹⁾ Несколько необычное обозначение координат на фазовой плоскости выбрано для того, чтобы система (6.27) при $\alpha = 0$ прямо переходила в систему вида (6.23) с $a_1 = 0$ и $b_1 = 1 > 0$.

откуда

$$a'_1(M_0) = \frac{\omega_0 S_0}{2}.$$

Перейдем теперь к вычислению $\alpha_3(M_0)$. На основании (6.25) и (6.27) имеем¹⁾:

$$R_2(\theta, M_0) = \beta_0 \cos^2 \theta \sin \theta,$$

$$R_3(\theta, M_0) = -\gamma_0 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2\beta_0 \cos^3 \theta \sin^3 \theta,$$

откуда по формулам (6.26) находим:

$$u_2(\theta, M_0) = \frac{1}{3} \beta_0 (1 - \cos^3 \theta),$$

$$u_3(2\pi, M_0) = \alpha_3(M_0) = -\frac{1}{8} \gamma_0 2\pi = -\frac{3\pi\omega_0}{4} RC \frac{S_2}{S_0}.$$

Так как по предположению $S_0 > 0$, $S_2 > 0$, то $a'_1(M_0) > 0$, $\alpha_3(M_0) < 0$; мы имеем по нашей классификации первый случай — случай а): при возрастании M фокус из устойчивого делается неустойчивым и при этом появляется устойчивый предельный цикл. Отсюда следует, что при $M > M_0$, но достаточно близких к M_0 в системе наврное возможен устойчивый автоколебательный процесс. Заметим, что если бы было $S_2 < 0$, то мы имели бы второй случай — случай б), когда при возрастании M фокус из устойчивого делается неустойчивым и при этом неустойчивый цикл стягивается в точку.

Сделаем еще два замечания: 1) если бы мы учли дальнейшие члены в разложении характеристики, пропорциональные u^4 , u^5 , u^6 и т. д., то, как легко видеть из уравнений (6.26), эти члены никак не повлияли бы на решение вопроса о рождении или исчезновении цикла, если $S_2 \neq 0$; 2) все наши выводы сделаны без всяких предположений о малости величин α , β , γ . Аналогичное рассмотрение возникновения автоколебаний в ламповом генераторе при увеличении обратной связи, гораздо более далеко идущее (изменения циклов будут прослежены не только в непосредственной близости к особой точке), будет сделано в гл. IX; однако при этом придется предъявить определенные требования малости к коэффициентам характеристики лампы, к сопротивлению и т. д.

6. Появление предельных циклов из сепаратрисы, идущей из седла в седло, и из сепаратрисы состояния равновесия седло-узел при его исчезновении. Скажем несколько слов еще о двух простейших случаях рождения предельного цикла (и соответственно исчезновения предельных циклов), именно, о рождении предельного цикла при исчезновении сложной особой точки и о рождении

¹⁾ $\beta_0 = (\beta)_{M=M_0}$, $\gamma_0 = (\gamma)_{M=M_0}$.

предельного цикла от сепаратрисы. Эти случаи представляют очень большой интерес как с точки зрения теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения физики.

Предположим, что при некотором значении параметра из рассматриваемого промежутка λ система дифференциальных уравнений имеет

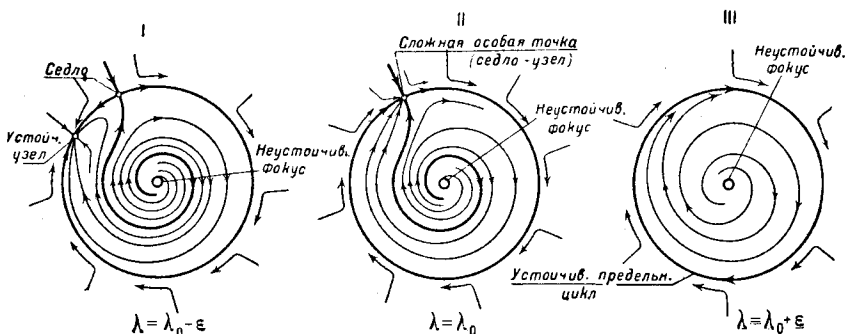


Рис. 318.

седло и две выходящие из этого седла сепаратрисы стремятся к одному и тому же узлу (рис. 318, I). Пусть кроме этого при увеличении λ седло и узел сближаются и, наконец, при некотором значении $\lambda = \lambda_0$

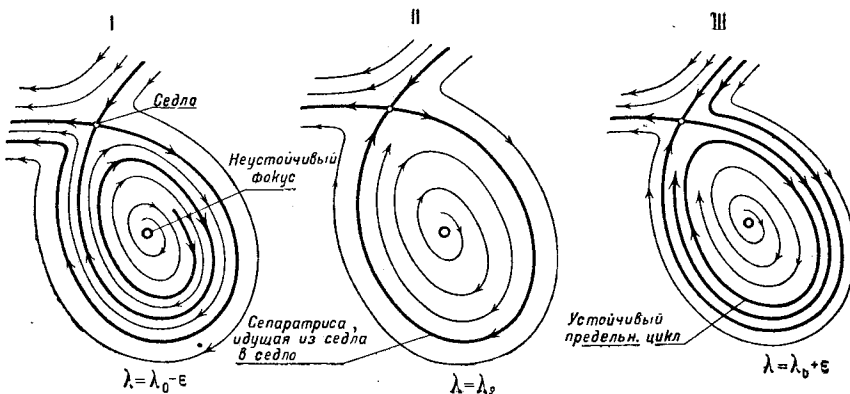


Рис. 319.

сливаются в одну сложную особую точку седло-узел (рис. 318, II). Тогда одна из сепаратрис этого седла-узла (обозначим ее через L_0), выходящая из седла-узла, будет вновь входить в него (при $t \rightarrow +\infty$) (рис. 318, II). Если при дальнейшем увеличении λ сложная особая точка седло-узел исчезает, то непременно появляется предельный цикл, лежащий при значениях λ , достаточно близких к λ_0 в сколь

угодно малой окрестности сепаратрисы L_0 (рис. 318, III)¹⁾. Очевидно также, что предельный цикл может исчезнуть, если с увеличением (или уменьшением) параметра λ , при некотором значении λ_0 на нем появляется сложная особая точка седло-узел, которая затем разделится на две.

Рассмотрим теперь случай рождения цикла от сепаратрисы седла. Предположим, что сепаратрисы седла при некотором значении λ из рассматриваемого промежутка имеют расположение, представленное на рис. 319, I, а при увеличении (или уменьшении) λ сближаются и, наконец, при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ сливаются и образуют «петлю сепаратрисы» (т. е. при $\lambda = \lambda_0$ существует сепаратриса седла O , выходящая из этого седла и вновь возвращающаяся в него) (рис. 319, II). Если при дальнейшем увеличении (или уменьшении) параметра λ сепаратрисы седла вновь разделяются так, как показано на рис. 319, III, то при этом от петли сепаратрисы отделяется («рождается») хотя бы один предельный цикл²⁾. Очевидно, что обратно предельный цикл может исчезнуть, предварительно сливаясь с петлей сепаратрисы. В обоих рассмотренных случаях рис. 319, II соответствует бифуркационному значению параметра.

¹⁾ Обозначим через x_0, y_0 координаты особой точки седло-узел, существующей по предположению при $\lambda = \lambda_0$, и составим выражение

$$\sigma_0 = P'_x(x_0, y_0, \lambda_0) + Q'_y(x_0, y_0, \lambda_0).$$

Нетрудно показать, что для особой точки седло-узел $\sigma_0 \neq 0$. Можно показать, что в случае, когда $\sigma_0 < 0$, предельный цикл, появляющийся при исчезновении особой точки седло-узел, устойчив, а в случае, когда $\sigma_0 > 0$, неустойчив.

²⁾ Обозначим при $\lambda = \lambda_0$ через x_0, y_0 координаты седла и рассмотрим выражение

$$\sigma_0 = P'_x(x_0, y_0, \lambda_0) + Q'_y(x_0, y_0, \lambda_0).$$

Это выражение может быть как не равным, так и равным нулю. Можно показать, что в случае, когда $\sigma_0 < 0$, «петля сепаратрисы» устойчива (т. е. все траектории, проходящие через достаточно близкие к петле точки, лежащие внутри петли, при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к этой петле), а в случае, когда $\sigma_0 > 0$, петля неустойчива. В случае, когда $\sigma_0 = 0$, вопрос о характере устойчивости петли не решается величиной σ_0 .

Можно также показать, что когда $\sigma_0 \neq 0$, из петли сепаратрисы рождается единственный предельный цикл, причем этот предельный цикл устойчив, если $\sigma_0 < 0$, и неустойчив, если $\sigma_0 > 0$.

ГЛАВА VII

СИСТЕМЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФАЗОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ¹⁾

§ 1. Цилиндрическая фазовая поверхность

Отображая поведение динамической системы в фазовом пространстве, мы требуем *взаимно-однозначного и непрерывного соответствия* между состояниями системы и точками фазового пространства. Значит, каждому состоянию системы должна соответствовать одна и только одна точка фазового пространства, и наоборот, каждой точке фазового пространства должно соответствовать одно и только одно состояние системы, причем близким состояниям системы должны соответствовать близкие точки фазового пространства. Это требование устанавливает известную связь между характером физической системы и основными чертами того геометрического образа, который может служить для данной системы фазовым пространством. До сих пор мы рассматривали физические системы (с одной степенью свободы), для которых фазовым пространством может служить плоскость. Однако, как мы видели в гл. II и III, существуют такие системы, для которых плоскость не может служить фазовым пространством, так как при этом не соблюдается требование взаимной однозначности.

Примером такой системы может служить обычный физический маятник. Действительно, состояние маятника определяется углом его отклонения от положения равновесия и скоростью; но при изменении угла отклонения на 2π получается совершенно такое же состояние маятника, физически никак не отличающееся от исходного. Поэтому на фазовой плоскости мы получим бесконечное число точек, соответствующих одному и тому же физическому состоянию системы (все точки, отстоящие друг от друга на $2k\pi$ по оси абсцисс). Следовательно, строго говоря, плоскость не пригодна в качестве фазовой поверхности для обычного физического маятника, так как при этом не удается соблюсти условия взаимной однозначности и непрерывности соответствия точек плоскости и состояний маятника. Правда, использование плоскости в качестве фазовой поверхности вряд ли может послужить причиной недоразумений, особенно до тех пор,

¹⁾ Глава переработана Н. А. Железцовым. §§ 1 и 4 написаны им заново.

пока мы ограничиваемся рассмотрением движений, не выходящих за пределы одного полного оборота. Но если мы рассматриваем движения, выходящие за пределы 2π , то для соблюдения требования взаимной однозначности и непрерывности мы должны отображать движения маятника на *фазовом круговом цилиндре*¹⁾. Это обстоятельство, очевидно, связано с существованием двух, качественно различных типов периодических движений маятника (колебаний около состояния равновесия и движений маятника с проворотом вокруг оси).

Аналогичная картина имеет место и для всех механических (или электромеханических) систем, положение которых вполне определяется *углом*. Так как такие системы встречаются довольно часто, то применение цилиндрической фазовой поверхности представляет большой интерес.

В настоящей главе мы рассмотрим несколько физических систем, поведение которых следует отображать на фазовом круговом цилиндре, а также покажем, как нужно применять в этом случае общие методы построения и исследования фазового портрета динамической системы.

Для того чтобы построить фазовый портрет исследуемой динамической системы, общий вид уравнения которой может быть записан в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \Phi(\vartheta, z), \quad \frac{dz}{dt} = F(\vartheta, z), \quad (7.1)$$

где ϑ и z — координаты цилиндрической фазовой поверхности, мы, так же как и в случае фазовой плоскости, должны изучить основные элементы фазового портрета: особые точки, сепаратрисы и предельные циклы, соответствующие периодическим движениям. Но на фазовом цилиндре помимо «обычных» предельных циклов, лежащих на поверхности цилиндра и охватывающих состояния равновесия, но не охватывающих самого цилиндра (такие кривые вполне аналогичны замкнутым траекториям на фазовой плоскости), может встретиться совершенно новый тип предельных циклов, охватывающих не состояния равновесия, а самый цилиндр. Очевидно, что и эти замкнутые траектории соответствуют периодическим движениям. Для построения фазового портрета на цилиндре мы должны знать также и эти замкнутые траектории, охватывающие цилиндр. Но особенно нас должны

¹⁾ По направляющей цилиндра будем откладывать угол ϑ , определяющий положение маятника, а по образующей, например, угловую скорость $z = \dot{\vartheta}$. Часто представляется удобным вместо цилиндра брать (для изображения фазовых траекторий) его развертку на плоскость ϑ, z , как мы это уже делали в § 4 и 5 гл. II. При этом, однако, следует отождествлять точки пограничных прямых развертки, соответствующих одной и той же линии разреза цилиндра (например, точки прямых $\vartheta = +\pi$ и $\vartheta = -\pi$), т. е. считать их соответствующими одним и тем же состояниям системы (отождествлять следует точки с одинаковыми z).

интересовать эти замкнутые траектории потому, что им соответствуют периодические движения и периодические решения уравнения интегральных кривых

$$\frac{dz}{d\vartheta} = \frac{F(\vartheta, z)}{\Phi(\vartheta, z)}. \quad (7.2)$$

Поскольку эти решения периодические с периодом 2π , то они удовлетворяют условию $z(\vartheta + 2\pi) = z(\vartheta)$ при любом ϑ ¹⁾. Для того чтобы обнаружить наличие таких периодических решений, можно, например, воспользоваться следующим приемом. Если существуют два частных решения уравнения (7.2) $z_1(\vartheta)$ и $z_2(\vartheta)$, для которых при некотором ϑ_0

$$z_1(\vartheta_0 + 2\pi) \geq z_1(\vartheta_0), \quad z_2(\vartheta_0 + 2\pi) \leq z_2(\vartheta_0),$$

и если между интегральными кривыми, соответствующими этим решениям, нет особых точек, то в силу непрерывной зависимости решений от начальных условий можно утверждать, что между $z_1(\vartheta)$ и $z_2(\vartheta)$ существует периодическое решение, для которого

$$z(\vartheta_0 + 2\pi) = z(\vartheta_0)$$

и, следовательно,

$$z(\vartheta + 2\pi) \equiv z(\vartheta)$$

(в общем случае, конечно, нельзя утверждать, что это периодическое решение единственно).

Отыскание самих предельных циклов, охватывающих цилиндр, определение их числа и устойчивости могут быть проведены путем построения точечного преобразования какой-либо образующей цилиндра $\vartheta = \vartheta_0$ самой в себя. Если через точки некоторого отрезка (L) образующей $\vartheta = \vartheta_0$ проходят фазовые траектории, охватывающие цилиндр (рис. 320), то эти точки имеют последующие на том же отрезке, и мы можем построить функцию последования

$$z' = f(z)$$

¹⁾ Мы считаем, что ϑ и z суть непрерывные функции времени t ; тогда угловая координата ϑ при обходе изображающей точки вокруг цилиндра будет изменяться (возрастать или убывать в зависимости от направления обхода) на 2π ; следовательно, каждой точке фазового цилиндра мы сопоставляем не одно, а счетное множество значений угловой координаты, отличающихся друг от друга на 2π . Таким образом, сохраняя непрерывность зависимости ϑ от времени t , мы вынуждены отказаться от однозначности соответствия точек фазового цилиндра и их координат.

Очевидно, функции $\Phi(\vartheta, z)$ и $F(\vartheta, z)$ — правые части уравнений движения системы (7.1) — обязательно должны быть периодическими функциями угла ϑ с периодом 2π .

²⁾ Мы, конечно, предполагаем, что условия теоремы Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения для системы уравнений (7.1) выполнены.

для интересующего нас точечного преобразования¹⁾. Неподвижные точки этого точечного преобразования z^* , т. е. точки, определяемые уравнением

$$z = f(z),$$

являются точками пересечения замкнутых фазовых траекторий (предельных циклов), охватывающих цилиндр, с образующей цилиндра $\vartheta = \vartheta_0$. Согласно теореме Кенигса предельный цикл устойчив, если

$$|f'(z^*)| < 1,$$

и неустойчив, если

$$|f'(z^*)| > 1.$$

Если известно само решение, соответствующее предельному циклу, охватывающему цилиндр, $\vartheta = \vartheta(t)$, $z = z(t)$, то устойчивость этого предельного цикла может быть определена путем вычисления его характеристического показателя

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \{ \Phi'_\vartheta [\vartheta(t), z(t)] + F'_z [\vartheta(t), z(t)] \} dt,$$

где T — период периодического движения²⁾. Именно, предельный цикл устойчив при $h < 0$ и неустойчив при $h > 0$ (доказательство этого утверждения полностью совпадает с приведенным в § 8 гл. V).

При исследовании фазового портрета динамических систем с цилиндрической фазовой поверхностью известную помощь могут оказать критерии Бендиксона и Дюлака, изложенные ранее (в §§ 9 и 11 гл. V) для случая фазовой плоскости. Нетрудно видеть, что *если условия критерия Бендиксона или критерия Дюлака выполнены в некоторой области, заключенной между двумя замкнутыми кривыми, охватывающими фазовый цилиндр, то в этой области не существует замкнутых фазовых траекторий, не охватывающих цилиндр, и не может быть более одной замкнутой фазовой траектории, охватывающей цилиндр.*

§ 2. Маятник с постоянным моментом

Цилиндрическое фазовое пространство целесообразно применять для отображения поведения ряда электромеханических систем, например синхронного электромотора, генератора переменного тока,

¹⁾ Как и в случае фазовой плоскости, вычисление функции последования наиболее просто проводится для кусочно-линейных систем. Пример такой системы приведен в § 10 гл. VIII.

²⁾ Функция $z(t)$ является периодической, т. е. $z(t + T) \equiv z(t)$, в то время как для функции $\vartheta(t)$, в силу ее непрерывности, $\vartheta(t + T) \equiv \vartheta(t) \pm 2\pi$.

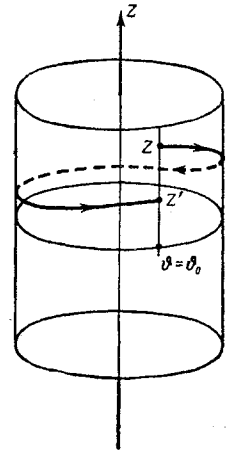


Рис. 320.

работающего в общую сеть параллельно с другими машинами, и т. д. Все эти системы приводят при определенных упрощающих предположениях к рассмотрению одной и той же математической задачи, и потому мы рассмотрим только одну из этих систем, именно обычный маятник с «линейным трением», находящийся под действием постоянного вращающего момента. Если обозначить этот постоянный момент через M_0 , то мы получим для движения маятника уравнение

$$I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + b \frac{d\vartheta}{dt} + mga \sin \vartheta = M_0,$$

где I — момент инерции маятника, а b — момент сил трения, действующих на маятник при угловой скорости, равной единице. Вводя новое независимое переменное $\tau = \sqrt{\frac{mga}{I}} t$, можно полученное уравнение привести к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\vartheta}{d\tau} + \sin \vartheta - \beta &= 0, \\ \alpha = \frac{b}{\sqrt{I m g a}} > 0 \quad \text{и} \quad \beta = \frac{M_0}{m g a} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Прежде чем переходить к исследованию этого уравнения, мы покажем, в каких случаях могут быть приведены к такому же уравнению задачи о работе синхронного мотора и о параллельной работе генераторов,

В случае синхронного мотора через ϑ можно обозначить угол между направлениями магнитных полей статора и ротора. M_0 в этом случае выражает момент, действующий на мотор со стороны нагрузки (нагрузку мы считаем постоянной). Так как момент, действующий со стороны нагрузки, стремится замедлить вращение ротора, то мы должны здесь, так же как и для маятника, написав момент в правой части со знаком плюс, считать угол ϑ положительным, когда поле ротора отстает от поля статора. Кроме постоянного момента, действующего со стороны нагрузки, на ротор действует момент со стороны сил трения и в результате электрического демпфирования. Момент этих сил можно считать пропорциональным угловой скорости. И так как эти силы препятствуют движению, то момент их можно выразить в виде члена $-b \frac{d\vartheta}{dt}$ в правой части, причем $b > 0$. Но кроме момента со стороны нагрузки и сил трения на ротор мотора действует момент, возникающий в результате взаимодействия полей статора и ротора. Этот момент есть функция угла ϑ , причем он направлен так, что стремится уменьшить угол $|\vartheta|$ (ускорить движение отстающего ротора). Следовательно, мы можем обозначить этот момент через $-f(\vartheta)$, причем f имеет тот же знак, что и ϑ , и вместе с ϑ обращается в нуль. Мы можем теперь сумму всех действующих на

ротор моментов приравнять произведению момента инерции на угловое ускорение; получим ¹⁾:

$$I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M_0 - b \frac{d\vartheta}{dt} - f(\vartheta).$$

Что касается вида функции $f(\vartheta)$, характеризующей взаимодействие полей статора и ротора, то при известных упрощающих предположениях для этого взаимодействия получается синусоидальная зависимость. Заменяя $f(\vartheta)$ через $\sin \vartheta$, мы получим уравнение, вполне аналогичное тому, которое было получено для маятника (7.3).

В случае генератора, работающего в общую сеть параллельно с другими машинами, через ϑ следует обозначить угол опережения ротора рассматриваемого генератора по отношению к роторам других (вообще говоря, значительно более мощных) машин, а через M_0 — постоянный момент со стороны двигателя, вращающего данный генератор (при таком выборе опять M_0 стремится увеличить ϑ). Демпфирующий момент по-прежнему равен $-b \frac{d\vartheta}{dt}$. Кроме того, в случае генератора, работающего в общую цепь, при наличии сдвига ϑ возникает электромеханический момент, действующий на данный генератор со стороны других, работающих с ним в параллель ²⁾. Этот момент есть функция от ϑ и стремится уменьшить $|\vartheta|$. Поэтому он должен быть равен $-f(\vartheta)$, где $f(\vartheta)$ имеет тот же знак, что и ϑ ; при известных предположениях он также может быть принят равным $\sin \vartheta$.

Для исследования уравнения (7.3) введем новую переменную $z = \frac{d\vartheta}{d\tau}$. Мы получим систему двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dz}{d\tau} = -az - \sin \vartheta + \beta; \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = z. \quad (7.4)$$

Исключая τ , можем получить одно уравнение первого порядка:

$$z \frac{dz}{d\vartheta} = -az - \sin \vartheta + \beta. \quad (7.5)$$

Исследование уравнения (7.5) мы начнем с частного случая $a = 0$ (консервативная система). Уравнение в этом случае принимает вид:

$$z \frac{dz}{d\vartheta} = \beta - \sin \vartheta. \quad (7.6)$$

¹⁾ Строго говоря, мы должны были бы рассматривать *взаимодействие* генераторов, а не только действие всех остальных генераторов на данный.

²⁾ Заметим, что для неподвижной системы отсчета уравнение движения ротора имеет вид:

$$I \frac{d^2\psi}{dt^2} = f(\omega t - \psi) - b \frac{d\psi}{dt} - M_0,$$

где ω — угловая скорость оси магнитного поля статора, а ψ — угол поворота ротора. Полагая $\vartheta = \omega t - \psi$, получим уравнение, приведенное в тексте,

После разделения переменных и интегрирования получим решение:

$$\frac{1}{2} z^2 = \cos \vartheta + \beta \vartheta + C_1 \quad \text{или} \quad z = \pm \sqrt{2(\cos \vartheta + \beta \vartheta) + C}. \quad (7.7)$$

Исследуем теперь поведение интегральных кривых (7.7), изображая их на развертке цилиндра. Прежде всего, согласно (7.6) особыми точками будут точки $(\bar{\vartheta}, 0)$, где $\bar{\vartheta}$ — корни уравнения

$$f(\vartheta, \beta) \equiv \beta - \sin \vartheta = 0. \quad (7.8)$$

Очевидно, при $\beta < 1$ имеем два положения равновесия: $\bar{\vartheta} = \vartheta_1$ и $\bar{\vartheta} = \vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$, где $\vartheta_1 = \arcsin \beta$ ($0 \leq \vartheta_1 \leq \frac{\pi}{2}$); при $\beta = 1$ эти положения равновесия сливаются ($\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$) и при $\beta > 1$ не существуют.

Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рис. 321. Там область, в которой $f(\vartheta, \beta) > 0$, заштрихована; устойчивым состояниям равновесия (центрам) соответствуют точки линии, начерченной жирно с черными точками и для которой $\bar{\vartheta} = \vartheta_1$, неустойчивым состояниям равновесия (седлам $\bar{\vartheta} = \vartheta_2$) — точки тонкой линии с кружками. Значение $\beta = 1$ является, очевидно, бифуркационным.

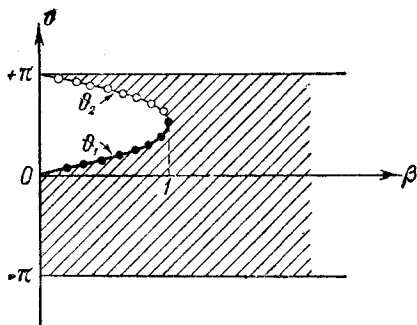


Рис. 321.

Для построения интегральных кривых воспользуемся приемом, указанным в § 3 гл. II. Построив на вспомогательной плоскости ϑ, u кривую

$$u = 2(\cos \vartheta + \beta \vartheta) \quad (7.9)$$

и расположив под ней развертку фазового цилиндра, нетрудно построить на развертке для каждого заданного β семейство интегральных кривых (7.7). Построение интегральных кривых на плоскости ϑ, z сведется к тому, что, задавая разные значения C , мы будем извлекать корень из суммы $C + u$ и откладывать его вверх и вниз по оси z . При заданном C каждому значению u , для которого $u + C > 0$, будут соответствовать две точки на плоскости ϑ, z , а для значений u , для которых $u + C < 0$, это не будет иметь места, так как значения для z будут получаться мнимые.

Построения эти дадут разные результаты при разных значениях β .

Случай $\beta = 0$, т. е. движение маятника без добавочного постоянного момента, мы уже рассматривали в § 4 гл. II. Мы там видели, что все фазовые траектории, кроме двух особых точек (центра и седла) и сепаратрис седла, суть замкнутые и соответствуют перио-

дическим движениям маятника, причем внутри сепаратрис лежат замкнутые траектории, охватывающие центр и не охватывающие цилиндр, а вне их — замкнутые траектории, охватывающие фазовый цилиндр. Последние соответствуют новому типу периодических движений, о которых мы уже говорили.

Для $\beta \neq 0$ мы получим разные картины в зависимости от того, будет ли $\beta < 1$ или $\beta > 1$. На вспомогательной плоскости мы должны построить кривую

$$y = 2 \cos \vartheta + 2\beta\vartheta.$$

При $\beta < 1$ эта кривая имеет максимум при $\vartheta = \vartheta_1 = \arcsin \beta$ ($0 \leq \vartheta_1 < < \frac{\pi}{2}$) и минимум при $\vartheta = \vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$ (при построении кривой (7.9) мы можем ограничиться значениями $-\pi < \vartheta \leq +\pi$). При $\beta = 1$ кривая $y = 2(\cos \vartheta + \beta\vartheta)$ не имеет ни максимума, ни минимума, но имеет при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ точку перегиба с горизонтальной касательной. При $\beta > 1$ кривая $y = 2(\cos \vartheta + \beta\vartheta)$ возрастает монотонно и не имеет ни экстремумов, ни точек перегиба.

Для случая $\beta < 1$ (рис. 322) мы снова получаем одну особую точку типа центра, одну особую точку типа седла и сепаратрису. На цилиндре мы получим картину, изображенную на рис. 323. Кривые,

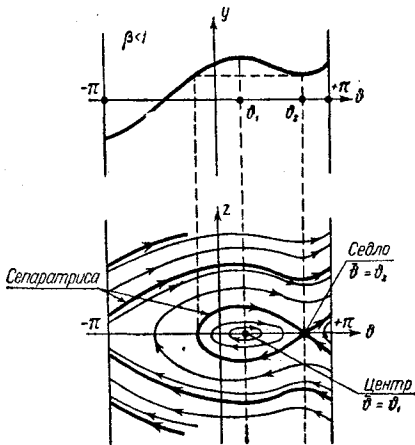


Рис. 322.

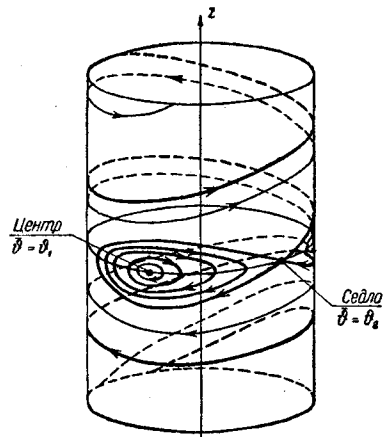


Рис. 323.

находящиеся внутри сепаратрисы, — замкнутые и соответствуют периодическим движениям. Кривые, лежащие вне сепаратрисы, не замыкаются на цилиндре, так как при увеличении ϑ на 2π z для них не приобретает прежнего значения, а с каждым оборотом возрастает (по абсолютной величине). Следовательно, периодические движения

«второго типа» в этом случае невозможны. Для $\beta = 1$ (рис. 324) мы получим одну особую точку высшего порядка. В этом случае замкнутых кривых на цилиндре (рис. 325) нет совсем. Для $\beta > 1$ особых точек совсем нет (рис. 326), нет также и замкнутых кривых

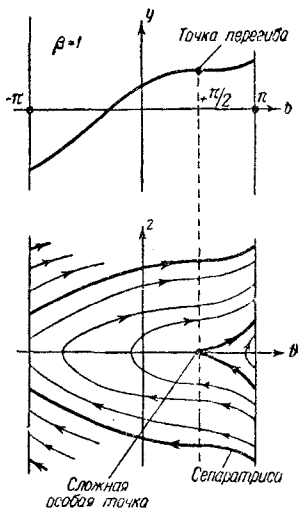


Рис. 324.

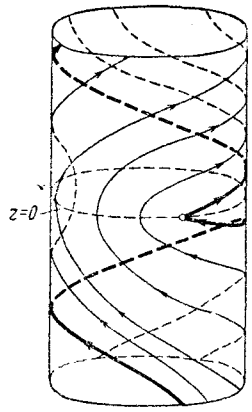


Рис. 325.

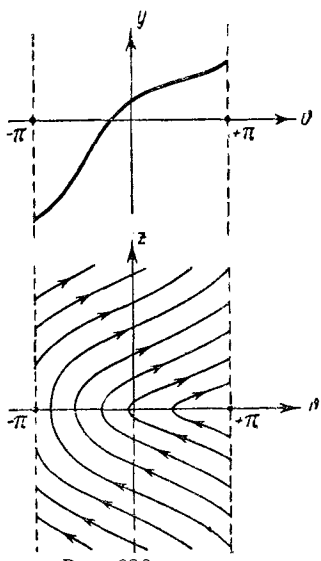


Рис. 326.

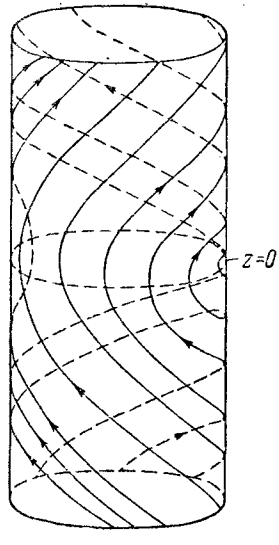


Рис. 327.

на цилиндре (рис. 327). Следовательно, при $\beta \geq 1$ невозможны периодические движения ни первого, ни второго типа. Физический смысл

полученных результатов совершенно ясен. Если постоянный момент не слишком велик, так что он ниже положение равновесия смещает менее чем на $\frac{\pi}{2}$ (т. е. постоянный момент меньше, чем наибольший момент силы тяжести), то при достаточно малых начальных отклонениях (и начальных скоростях) возможны колебания вокруг этого смещенного положения равновесия. При этом, двигаясь в сторону, противоположную внешнему моменту, маятник отдает ту же энергию, которую он получил при движении в направлении внешнего момента. Если начальное отклонение велико, то благодаря действию постоянного внешнего момента маятник пройдет через верхнее положение равновесия и дальше будет двигаться в направлении постоянного момента, причем скорость маятника после каждого оборота будет возрастать. Если же $\beta > 1$, то внешний момент превосходит наибольший момент силы тяжести. В таком случае колебания вообще невозможны, и при любых начальных условиях маятник в конце концов будет вращаться в направлении постоянного момента с монотонно возрастающей скоростью, поскольку теперь $\frac{dz}{d\tau} = \frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} > 0$ при любых ϑ .

§ 3. Маятник с постоянным моментом. Неконсервативный случай [198]

Перейдем к рассмотрению неконсервативной системы (7.4) при $\alpha > 0$. В этом случае уравнение интегральных кривых на цилиндре

$$z \frac{dz}{d\vartheta} = -\alpha z - \sin \vartheta + \beta \quad \text{или} \quad \frac{dz}{d\vartheta} = \frac{-\alpha z - \sin \vartheta + \beta}{z}$$

уже не поддается непосредственному интегрированию. Поэтому мы должны применить методы качественного интегрирования.

Прежде всего изоклина $\frac{dz}{d\vartheta} = 0$ есть сдвинутая синусоида. Ее уравнение

$$z = \frac{\beta - \sin \vartheta}{\alpha}.$$

Она пересекает ось ϑ только при $\beta < 1$ (рис. 328). При $\beta > 1$ эта изоклина не пересекает оси ϑ (рис. 329). Далее $\frac{dz}{d\vartheta} > 0$ между синусоидой и осью ϑ , т. е. в областях, заштрихованных на рис. 328 и 329. Во всей остальной области $\frac{dz}{d\vartheta} < 0$.

Координаты особых точек по-прежнему определяются уравнениями:

$$\beta - \sin \vartheta = 0, \quad z = 0.$$

Следовательно, при $\beta > 1$ особых точек нет. При $\beta < 1$ существуют две особые точки (два состояния равновесия): $\vartheta = \vartheta_1, z = 0$ и $\vartheta = \vartheta_2 = \pi - \vartheta_1, z = 0$, где, как и раньше, $\vartheta_1 = \arcsin \beta$ ($0 \leq \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$).

Выясним характер этих состояний равновесия. Положим с этой целью в уравнениях (7.4) $\vartheta = \vartheta_i + \xi$ ($i = 1, 2$) и разложим $\sin \vartheta$ в ряд по степеням ξ . Ограничиваясь первой степенью ξ , получим систему линеаризованных уравнений, описывающую поведение системы около состояния равновесия ($\vartheta_i, 0$):

$$\frac{dz}{d\tau} = -\alpha z - \xi \cos \vartheta_i,$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = z \quad (7.10)$$

с характеристическим уравнением

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \cos \vartheta_i = 0. \quad (7.11)$$

Так как $\cos \vartheta_1 > 0$, а $\cos \vartheta_2 = -\cos \vartheta_1 < 0$, то, следовательно, состояние равновесия $(\vartheta_1, 0)$ — устойчивый фокус при $\alpha^2 < 4 \cos \vartheta_1$ и устойчивый узел при $\alpha^2 > 4 \cos \vartheta_1$, а состояние равновесия $(\vartheta_2, 0)$ — всегда

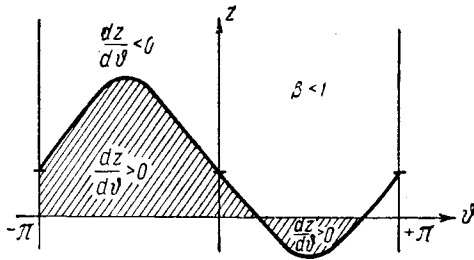


Рис. 328.

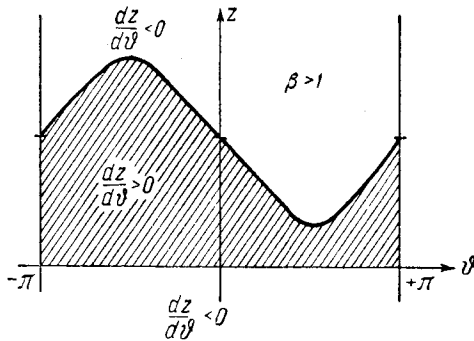


Рис. 329.

седло. При $\alpha = 0$ первое состояние равновесия превращается в центр.

Обозначим далее правые части уравнений (7.4) через F и Φ ($F = -\alpha z - \sin \vartheta + \beta$, $\Phi = z$). Тогда

$$\Phi'_\vartheta + F'_z = -\alpha < 0 \quad (7.12)$$

на всем фазовом цилиндре. Поэтому согласно критерию Бендиксона для траекторий на фазовом цилиндре (см. § 1 настоящей главы) динамическая система (7.4) не имеет на фазовом цилиндре замкнутых траекторий, не охватывающих цилиндр, и может иметь самое большее один предельный цикл, охватывающий цилиндр. Этот предельный цикл, если он существует, обязательно устойчив, ибо согласно (7.12) его характеристический показатель $h = -\alpha < 0$ и лежит целиком на верхней половине цилиндра (целиком в области $z > 0$).

Прежде всего ясно, что система (7.4) не может иметь замкнутых траекторий, охватывающих цилиндр и пересекающих линию $z=0$. В самом деле, предположив существование замкнутой траектории, пересекающей линию $z=0$ (пересечение должно иметь место по крайней мере в двух точках; рис. 330), мы приходим к заключению, что она не может охватывать цилиндр, так как при переходе через ось $z=0$ изменяется знак $\frac{d\vartheta}{d\tau}$ (напомним, что $\frac{d\vartheta}{d\tau} = z$), и поэтому существует такой интервал $\vartheta' < \vartheta < \vartheta''$, в котором рассматриваемая замкнутая траектория не проходит. Следовательно, замкнутые фазовые траектории, охватывающие цилиндр, могут лежать только или целиком в области $z < 0$ или целиком в области $z > 0$.

Далее, интегрируя уравнение (7.5), которое можно также записать в виде:

$$\frac{1}{2} \frac{d(z^2)}{d\tau} = -\alpha z - \sin \vartheta + \beta,$$

по замкнутой траектории $z = z_0(\vartheta)$, охватывающей цилиндр (мы предполагаем, что такая траектория существует), в пределах от ϑ_0 до $\vartheta_0 + 2\pi$, получим:

$$-\alpha \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 + 2\pi} z_0(\vartheta) d\vartheta + 2\pi\beta = 0,$$

ибо $z_0(\vartheta_0 + 2\pi) = z_0(\vartheta_0)$. Для предельного цикла, охватывающего цилиндр и лежащего целиком в области $z < 0$, выполнение этого равенства невозможно в силу условия $\beta > 0$. Таким образом, если предельный цикл, охватывающий цилиндр, существует, то он лежит целиком в области $z > 0$.

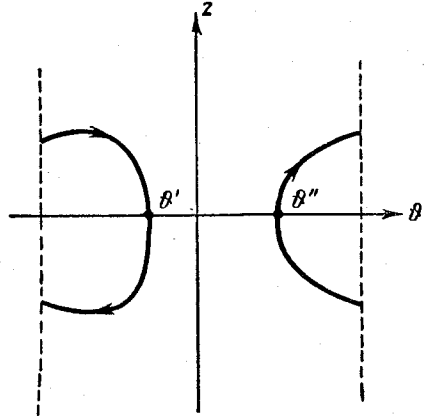


Рис. 330.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании этого предельного цикла. При этом мы будем отдельно рассматривать случаи $\beta > 1$ и $\beta < 1$. Начнем с первого из этих случаев.

1. $\beta > 1$.

Чтобы убедиться в существовании периодических решений $z(\vartheta)$, достаточно, как уже указывалось, отыскать два таких частных решения $z_1(\vartheta)$ и $z_2(\vartheta)$, чтобы для них удовлетворялись условия:

$$z_1(\vartheta + 2\pi) \leq z_1(\vartheta), \tag{A}$$

$$z_2(\vartheta + 2\pi) \geq z_2(\vartheta) \tag{B}$$

при каких-нибудь ϑ . Первое из этих решений можно найти сразу. Действительно, всякое такое решение $z_1(\vartheta)$, для которого при некотором ϑ_0 $z_1(\vartheta_0) > \frac{1+\beta}{\alpha}$, будет как раз искомым решением, ибо выше синусоиды $z = \frac{\beta - \sin \vartheta}{\alpha}$ всегда $\frac{dz}{d\vartheta} < 0$ (рис. 331) и, следовательно, $z_1(\vartheta_0) \leq z_1(\vartheta_0 - 2\pi)$, что удовлетворяет условию (A).

Для отыскания второго решения, удовлетворяющего условию (B), рассмотрим интегральную кривую, проходящую через точку A

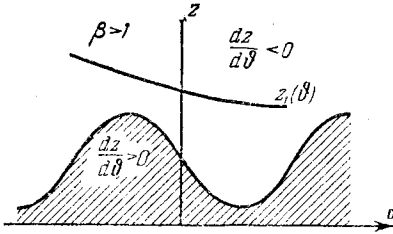


Рис. 331.

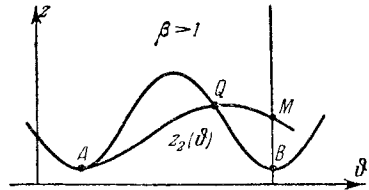


Рис. 332.

(рис. 332), с координатами $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $z = \frac{\beta - 1}{\alpha}$, т. е. через точку, в которой синусоида $z = \frac{\beta - \sin \theta}{\alpha}$ имеет минимум. Проследим ход интегральной кривой справа от точки A. Так как между синусоидой и осью θ $\frac{dz}{d\theta} > 0$, то с возрастанием θ кривая должна идти вверх и в некоторой точке Q пересечь синусоиду. В этой точке интегральная кривая имеет горизонтальную касательную, так как синусоида есть изоклина $\frac{dz}{d\theta} = 0$. Далее интегральная кривая опускается вниз и пересекает прямую $\theta = \frac{5\pi}{2}$ в точке M, лежащей не ниже точки B

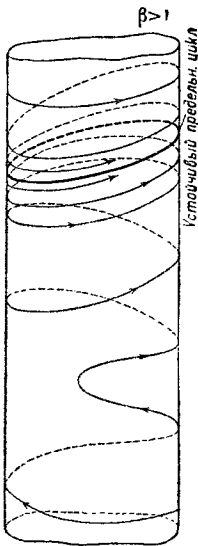


Рис. 333.

(так как синусоида есть изоклина $\frac{dz}{d\theta} = 0$, то интегральная кривая должна пересечь ее, имея горизонтальную касательную; нетрудно видеть, что это возможно только в точке B или после точки B). Следовательно, рассматриваемая нами интегральная кривая соответствует решению, для которого

$$z_2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) \geq z_2\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. удовлетворяет условию (B).

Так как особых точек в рассматриваемом случае ($\beta > 1$) нет, то между двумя решениями z_1 и z_2 в силу непрерывности должно существовать периодическое решение, для которого $z_0(\theta + 2\pi) = z_0(\theta)$. Мы уже показали, что это периодическое решение — единственное и устойчивое. Соответствующий ему предельный цикл, охватывающий цилиндр, изображен на рис. 333.

II. $0 < \beta < 1$.

Для выяснения условий существования предельного цикла, охватывающего цилиндр, при $0 < \beta < 1$ построим качественно функцию

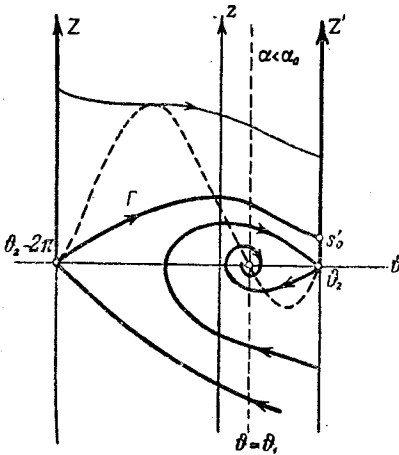


Рис. 334.

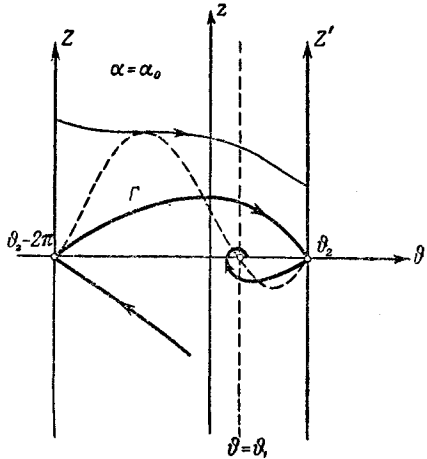


Рис. 335.

последования точечного преобразования верхней половины образующей фазового цилиндра $\vartheta = \vartheta_2$, проходящей через седло $(\vartheta_2, 0)$, самой в себя; на развертке цилиндра (рис. 334—336) это преобразование будет преобразованием полупрямой $Z: \vartheta = \vartheta_2 - 2\pi, z \geq 0$ в полупрямую $Z': \vartheta = \vartheta_2, z \geq 0$. Обозначим через s и s' ординаты точек этой образующей и их последующих, если последние существуют ($s, s' > 0$). Неподвижная точка s^* преобразования, если такая существует, будет являться точкой пересечения предельного цикла, охватывающего цилиндр, с образующей $\vartheta = \vartheta_2$. Как мы видели, этот предельный цикл может лежать только целиком в области $z > 0$. Поэтому необходимым и достаточным условием его существования является существование неподвижной точки $s^* > 0$ рассматриваемого точечного преобразования полупрямой $\vartheta = \vartheta_2, z > 0$ самой в себя, осуществляемого траекториями системы (7.4).

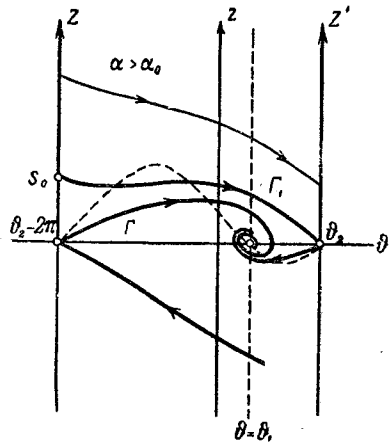


Рис. 336.

Прежде всего, так же как и в предыдущем случае, сразу можно убедиться в существовании траекторий $z = z_1(\vartheta)$, охватывающих цилиндр и удовлетворяющих условию: $z_1(\vartheta_2 - 2\pi) > z_1(\vartheta_2)$ (такими траекториями, в частности, будут те, для которых $z(\vartheta_2) > \frac{1+\beta}{\alpha}$).

Для них $s' < s$, т. е. всегда (при любых $\alpha > 0$) график интересующей нас функции последования $s' = f(s)$ при достаточно больших s лежит под биссектрисой $s' = s$ (рис. 337).

Рассмотрим теперь ход сепаратрисы Γ , выходящей из седла с положительным угловым коэффициентом (три возможных случая изображены на рис. 334—336).

В консервативном случае $\alpha = 0$ сепаратриса Γ идет целиком в верхней половине цилиндра (см. рис. 322 и 323). Поэтому при достаточно малом α , когда система близка к консервативной, заведомо будет иметь место картина, изображенная на рис. 334: сепаратриса Γ идет в верхней половине фазового цилиндра и пересекает полупрямую Z' в некоторой точке $s' = s'_0 > 0$ ¹⁾. Так как согласно (7.5) $dz/d\vartheta$ монотонно убывает с ростом

α (и притом неограниченно при $\alpha \rightarrow +\infty$), то при увеличении параметра α сепаратриса Γ (в пределах области $z > 0$) монотонно опускается вниз, вследствие чего s'_0 уменьшается и при некотором бифуркационном значении $\alpha = \alpha_0$ обращается в нуль (α_0 является некоторой функцией параметра β ; при $\alpha = \alpha_0$ сепаратриса Γ , очевидно, возвращается обратно в седло; см. рис. 335). Следовательно, при всех $\alpha < \alpha_0$ сепаратриса Γ идет так, как это показано на рис. 334, и ее начальная точка $s = 0$ имеет последующую $s'_0 > 0$. Кроме того, поскольку над сепаратрисой Γ нет особых точек уравнения (7.5), все траектории, пересекающие полупрямую Z , будут охватывать фазовый цилиндр, и соответственно все точки $s > 0$ этой полупрямой будут иметь последующие точки s' ($s' > s'_0 > 0$); иначе говоря, при $\alpha < \alpha_0$ функция последования $s' = f(s)$ существует (определена) для всех $s \geq 0$, причем $f(0) = s'_0 > 0$. В силу ее непрерывности²⁾ график функции

¹⁾ Решения уравнения (7.5) непрерывно зависят от параметра α (соответствующая общая теорема приведена в Дополнении I).

²⁾ Непрерывность функции последования следует из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий (см. Дополнение I).

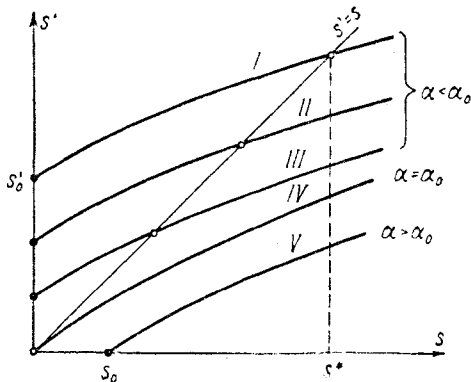


Рис. 337.

последования при $\alpha < \alpha_0$ будет обязательно пересекать биссектрису $s' = s$ (см. кривые I, II и III на рис. 337, изображающие графики функции последования при трех различных, последовательно возрастающих значениях параметра $\alpha < \alpha_0$). Эта точка пересечения и будет неподвижной точкой s^* рассматриваемого точечного преобразования, соответствующей предельному циклу, охватывающему фазовый цилиндр (неподвижная точка единственна, поскольку, как было показано, не может быть более одного предельного цикла, охватывающего цилиндр). Ясно, что координата неподвижной точки $s^* \rightarrow +0$ при $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Из тех же соображений относительно уменьшения $\frac{dz}{d\vartheta}$ при увеличении параметра α следует, что при $\alpha > \alpha_0$ сепаратриса Γ уже не выходит на образующую цилиндра $\vartheta = \vartheta_2$ (см. рис. 336) и точка $s = 0$ не имеет последующей. Но тогда другая сепаратриса седла Γ_1 , имеющая в окрестности седла отрицательный наклон ($\frac{dz}{d\vartheta} < 0$), обязательно выйдет (при движении в сторону отрицательных τ) на образующую $\vartheta = \vartheta_2$ (на полупрямую Z на рис. 336) в некоторой точке $s_0 > 0$, поскольку она не может выходить из устойчивого состояния равновесия $(\vartheta_1, 0)$. Поэтому точка $s = s_0 > 0$ будет иметь последующей точку $s' = 0$, а график функции последования (он будет непрерывной кривой при $s > s_0 > 0$) будет проходить через точку $(s_0, 0)$, лежащую под биссектрисой $s' = s_0$ (см. кривую V на рис. 337), и или не будет пересекать эту биссектрису (тогда нет неподвижных точек, нет и предельных циклов), или будет пересекать ее в четном числе (неподвижных) точек. Последнее невозможно, так как точечное преобразование $s' = f(s)$ не может иметь более одной неподвижной точки, поскольку система (7.4) не может иметь более одного предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр.

Таким образом, при $0 < \beta < 1$ мы получаем два различных случая для $\alpha < \alpha_0$ и для $\alpha > \alpha_0$.

При $\alpha < \alpha_0$ существует единственное периодическое движение системы — единственный предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр (рис. 338). С ростом α (но $\alpha < \alpha_0$) этот предельный цикл сдвигается вниз (ибо s^* убывает) и при $\alpha = \alpha_0$ сливается с петлей сепаратрисы, охватывающей (при $\alpha = \alpha_0$) цилиндр.

При $\alpha > \alpha_0$ никаких периодических движений системы не существует (рис. 339).

Оба найденных нами периодических решения второго типа, т. е. охватывающих цилиндр (первое при любом α и $\beta > 1$, второе при $\alpha < \alpha_0$ и $\beta < 1$), устойчивы, так как все соседние движения стремятся к этим периодическим движениям. Однако, в то время как в первом случае ($\beta > 1$) периодическое решение устанавливается при любых начальных условиях, во втором случае существует область начальных значений, из которых система приходит к состоянию покоя

(к устойчивому фокусу или узлу). Эта область показана штриховкой на рис. 338.

Физический смысл полученных результатов совершенно ясен. Если в системе существует трение, пропорциональное скорости, и на нее действует постоянный вращающий момент, то работа, затрачиваемая на преодоление сил трения, очевидно, растет вместе со скоростью,

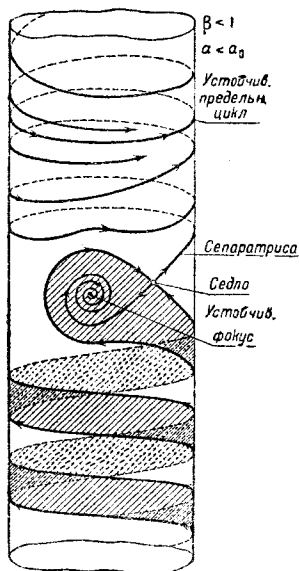


Рис. 338.

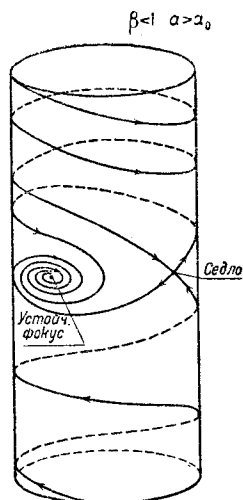


Рис. 339.

в то время как работа внешних сил остается неизменной. Поэтому, если $\beta > 1$ и, значит, постоянный момент внешних сил настолько велик, что он превосходит наибольшее значение момента силы тяжести, то он будет при любых начальных условиях раскручивать маятник до тех пор, пока не установится баланс между энергией, рассеиваемой на трение, и работой внешних сил. Наоборот, если $\beta < 1$ и, значит, момент внешних сил настолько мал, что наибольший момент силы тяжести его превосходит, то внешний момент сам по себе не в состоянии «провернуть» маятник. Тогда маятник может начать «провертываться» только при известных начальных условиях. Но это движение может превратиться в периодическое только при условии, что энергия, рассеиваемая на трение за один оборот, в конце концов будет равна работе внешних сил, создающих постоянный момент. А так как, кроме того, нужны соответствующие начальные условия, именно достаточно большая начальная скорость, то потери энергии на трение при данном α не могут быть сколь угодно малы (так могло бы быть только при условии, что маятник может дви-

гаться сколь угодно медленно). Значит, чтобы потери на трение за оборот не превосходили определенной величины (равной работе внешних сил за оборот), нужно, чтобы α было достаточно мало, меньше, чем некоторое критическое значение α_0 .

Таким образом, все наши результаты получают вполне наглядное истолкование. Конечно, в случае синхронного мотора и параллельно работающих машин это истолкование будет более сложным.

§ 4. Задача Жуковского о планирующем полете

В заключение главы рассмотрим задачу Жуковского [64] о планирующем полете планера (самолета с выключенным мотором, птицы), происходящем в некоторой вертикальной плоскости (рис. 340). Обозначим: ϑ — угол наклона траектории, v — скорость центра тяжести планера, m — масса планера, F — площадь его крыльев, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность воздуха, C_x и C_y — аэродинамические коэффициенты силы сопротивления и подъемной силы планера.

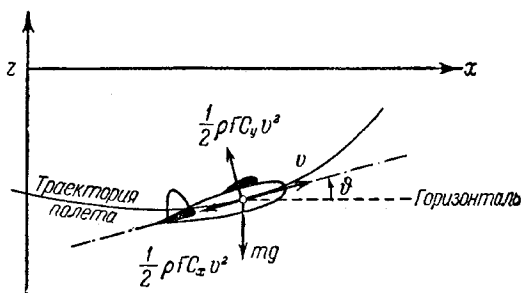


Рис. 340.

Тогда уравнения движения центра тяжести планера для тангенциальной и центростремительной компонент ускорения запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -mg \sin \vartheta - \frac{1}{2} \rho F C_x v^2, \\ mv \frac{d\vartheta}{dt} &= -mg \cos \vartheta + \frac{1}{2} \rho F C_y v^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Пусть момент инерции планера (относительно центра тяжести) настолько мал, а стабилизирующий момент сил, развиваемых хвостовым оперением, настолько велик, что можно пренебречь изменениями угла атаки планера (изменениями угла между его продольной осью и траекторией его центра тяжести) и считать его постоянным; тогда постоянными будут и коэффициенты C_x и C_y в уравнениях (7.13). Сделаем замену переменных

$$v = v_0 y,$$

где $v_0 = \sqrt{\frac{2mg}{\rho F C_y}}$ — та скорость горизонтального полета, при которой вес планера уравновешивается подъемной силой, и

$$t = \frac{v_0}{g} t_{\text{нов}},$$

мы приведем уравнения (7.13) к следующему безразмерному виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= -\sin \vartheta - ay^2 = F(\vartheta, y), \\ \dot{\vartheta} &= \frac{-\cos \vartheta + y^2}{y} = \Phi(\vartheta, y), \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

где точкой сверху обозначено дифференцирование по новому, безразмерному времени и

$$a = \frac{C_x}{C_y}$$

(т. е. равно отношению силы сопротивления планера к его подъемной силе).

Поскольку состояния $(\vartheta + 2\pi, y)$ и (ϑ, y) являются состояниями физически тождественными (правые части уравнений (7.14) являются периодическими функциями угла ϑ с периодом 2π), мы должны взять в качестве фазовой поверхности круговой цилиндр (по его образующей будем откладывать величину y , пропорциональную скорости v , а по направляющей — угол ϑ). Исключив случай полета планера «хвостом вперед», мы ограничимся рассмотрением фазовых траекторий только на верхней половине цилиндра (только при $y \geq 0$). Уравнение интегральных кривых на цилиндре, очевидно, может быть записано в виде:

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \frac{y(\sin \vartheta + ay^2)}{\cos \vartheta - y^2}. \quad (7.15)$$

Заметим, что это уравнение имеет интегральную кривую $y=0$, которая является *особой* фазовой траекторией системы (7.14) и соответствует *мгновенному опрокидыванию* планера в положение $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$, как только скорость v (или y) обращается в нуль (согласно (7.14) при $y=0$ $\dot{\vartheta} = +\infty$, если $-\frac{3\pi}{2} < \vartheta < -\frac{\pi}{2}$, и $\dot{\vartheta} = -\infty$, если $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2}$).

Появление такой *особой* фазовой траектории, такого физически невозможного мгновенного опрокидывания планера в момент полной потери скорости ($v=0$) обусловлено нашим предположением о неизменности угла атаки планера. Это предположение заведомо не выполняется при малых скоростях движения планера, поскольку при малых скоростях полета будет малым и стабилизирующий момент сил, развиваемый хвостовым оперением (обеспечивающий при больших скоростях полета почти полную неизменность угла атаки).

I. Как и в предыдущей задаче, рассмотрение начнем с консервативного случая $a=0$ (силы сопротивления отсутствуют), который был подробно рассмотрен Н. Е. Жуковским [64, 171]. Дифферен-

циальное уравнение интегральных кривых (7.15) в этом случае имеет интеграл:

$$\frac{y^3}{3} - y \cos \vartheta = C (= \text{const}) \quad (7.16)$$

и три особые точки: 1) $\vartheta = 0$, $y = +1$; 2) $\vartheta = +\frac{\pi}{2}$, $y = 0$ и 3) $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$, $y = 0$. Только первая из них является состоянием равновесия системы уравнений (7.14) при $a = 0$:

$$\dot{y} = -\sin \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = \frac{-\cos \vartheta + y^2}{y}, \quad (7.14a)$$

и соответствует режиму горизонтального полета планера с постоянной скоростью $v = v_0$. Две другие особые точки лежат на особой интегральной кривой $y = 0$, соответствующей, как мы уже говорили, мгновенному опрокидыванию планера при $v = 0$, и не являются состояниями равновесия системы (7.14a), поскольку в этих точках $\dot{y} \neq 0$.

Для построения интегральных кривых можно воспользоваться тем обстоятельством, что их уравнение (уравнение (7.16)) разрешается относительно ϑ :

$$\vartheta = \pm \arccos \eta, \quad (7.16a)$$

где

$$\eta = \frac{y^2}{3} - \frac{C}{y} \quad (|\eta| \leq 1).$$

На рис. 341 изображено семейство вспомогательных кривых $\eta = \eta(y, C)$ для $y < 0^1$, на рис. 342 и 343 — фазовые траектории на развертке цилиндра и на самом фазовом цилиндре. Значению $C = -\frac{2}{3}$ соответствует особая точка $\vartheta = 0$, $y = +1$ типа центра — состояние равновесия

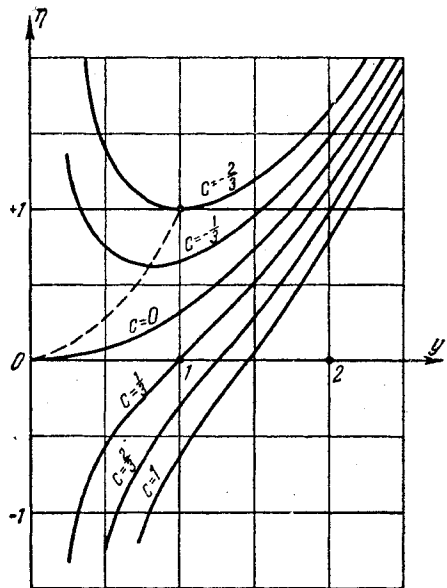


Рис. 341.

¹⁾ Кривые $\eta = \eta(y, C)$ — монотонные при $C > 0$ и имеют минимумы, лежащие на параболе $y^2 = \eta$, при $C < 0$, ибо, как нетрудно видеть,

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{2}{3}y + \frac{C}{y^2} = \frac{1}{y}(y^2 - \eta);$$

при $C < -\frac{2}{3}$ эти кривые лежат целиком над прямой $\eta = +1$.

системы уравнений (7.14а). Остальные фазовые траектории — замкнутые: фазовые траектории, для которых $-\frac{2}{3} < C < 0$, охватывают центр, но не охватывают цилиндра, а траектории с $C > 0$ охватывают фазовый цилиндр¹⁾. Первые из них соответствуют полету

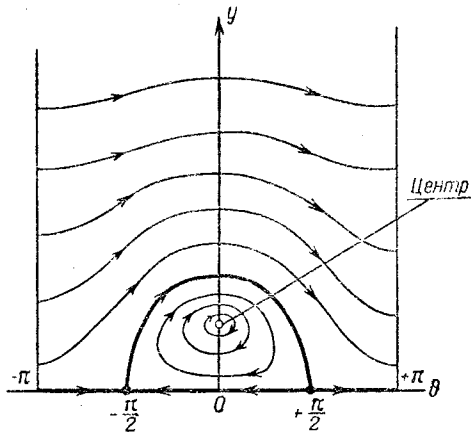


Рис. 342.

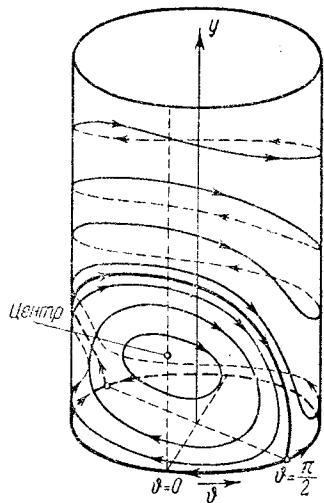


Рис. 343.

планера по «волнообразным» линиям, вторые — полету, при котором планер совершает «мертвые петли». Траектории полета планера (траектории движения его центра тяжести в вертикальной плоскости x, z) изображены на рис. 344²⁾.

¹⁾ Эти два типа замкнутых фазовых траекторий разделяются интегральной кривой $C = 0$, состоящей из окружности $y = 0$ и сепаратрис седла (уравнение последних имеет вид: $\vartheta = \pm \arccos \frac{y^2}{3}$).

²⁾ Уравнение этих траекторий симметричного полета планера в плоскости x, z (в предположении отсутствия сопротивления воздуха), которые были рассмотрены в работе Н. Е. Жуковского и в дальнейшем были названы *фугоидами*, может быть получено следующим образом. Прежде всего, заметив, что $v \sin \vartheta = \frac{dz}{dt}$, мы получим из уравнений (7.13) для случая $C_x = 0$:

$$\frac{1}{2} d(v^2) = -gz, \quad \frac{1}{2} v^2 = -gz \quad \text{или} \quad y^2 = -\frac{2gz}{v_0^2} \quad (\alpha)$$

(мы полагаем постоянную интегрирования равной нулю, т. е. отсчитываем высоту z от того уровня, которому при данных начальных условиях соответствует скорость $v = 0$). Далее, очевидно,

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta \quad \text{или} \quad dx = \frac{dz}{\operatorname{tg} \vartheta} = \frac{dz}{R(z, C)}, \quad (\beta)$$

II. Перейдем теперь к качественному рассмотрению полета планера при учете сопротивления воздуха (C_x или соответственно $a > 0$) [166]. По-прежнему имеется единственное состояние равновесия системы уравнений (7.14); его координатами, очевидно, будут:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_0 &= -\operatorname{arctg} a \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \vartheta_0 < 0\right), \\ y_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad (0 < y_0 < 1). \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Это состояние равновесия системы (7.14) соответствует полету планера по *нисходящей* прямой с постоянной скоростью $v < v_0$. Линеаризуя уравнения (7.14) в окрестности состояния равновесия (ϑ_0, y_0) , нетрудно убедиться, что последнее всегда *устойчиво* и при достаточно малых a (при $a < \sqrt{8}$) является фокусом.

Для доказательства отсутствия замкнутых интегральных кривых (кроме окружности $y=0$) воспользуемся критерием Дюлака. Взяв y в качестве множителя $B(\vartheta, y)$, мы получим для уравнений (7.14):

$$\frac{\partial}{\partial y} [yF] + \frac{\partial}{\partial \vartheta} [y\Phi] = -3ay^3 \leq 0, \quad (7.18)$$

причем равенство нулю имеет место только на окружности $y=0$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае не существует замкнутых интегральных кривых (или замкнутых контуров, состоящих из интегральных кривых), не охватывающих фазовый цилиндр, и имеется не более одной замкнутой интегральной кривой, охватывающей цилиндр. Поскольку такой замкнутой интегральной кривой, охватывающей фазовый цилиндр, является окружность $y=0$ (она, как и в консервативном случае, соответствует мгновенному опрокидыванию планера при $v=0$), можно утверждать, что система уравнений (7.14) при $a > 0$ *не имеет* на верхней половине фазового цилиндра (в области $y > 0$) *замкнутых фазовых траекторий*, как охватывающих цилиндр, так и не охватывающих его. Иначе говоря, рассматриваемая система не имеет (при наличии сил сопротивления воздуха) никаких периодических колебательных движений.

где $R(z, C)$ — функция z , которая получается, если выразить $\operatorname{tg} \vartheta$ через z при помощи соотношений (7.16а) и (а). Интегрируя уравнение (б) каким-либо приближенным методом (интеграл от правой части в элементарных функциях не выражается), мы получим зависимость x от z , графики которой изображены на рис. 344.

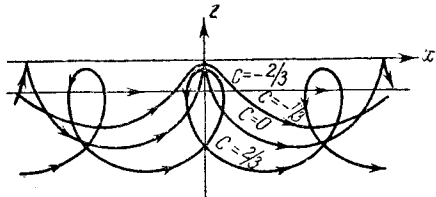


Рис. 344.

Уравнение интегральных кривых (7.15), как и в случае $a=0$, имеет кроме состояния равновесия (ϑ_0, y_0) еще две особые точки типа седла: $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ и $(\frac{\pi}{2}, 0)$, которые не являются состояниями равновесия системы уравнений (7.14). Однако теперь в отличие от случая $a=0$ сепаратриса седла $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, выходящая на верхнюю половину фазового цилиндра, уже не может входить в седло $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ¹⁾. Наконец, следует отметить, что все окружности $y = \text{const} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$ являются циклами без контакта, на которых $\dot{y} \leq 0$.

Следовательно, все фазовые траектории идут из далеких областей верхней половины цилиндра в область, заключенную между окружностями $y=0$ и $y = \frac{1}{\sqrt{a}}$ и содержащую в себе состояние равновесия (ϑ_0, y_0) . Принимая во внимание отсутствие замкнутых интегральных

кривых (кроме окружности $y=0$), мы можем утверждать, что *все фазовые траектории асимптотически приближаются к устойчивому состоянию равновесия* — к точке (ϑ_0, y_0) (к ней, в частности, приближается и сепаратриса седла $(-\frac{\pi}{2}, 0)$).

Сказанного достаточно для построения качественной картины разбиения фазового цилиндра на фазовые траектории системы (7.14) при любом $a > 0$. Это разбиение изображено на рис. 345.

Таким образом, планер при наличии сопротивления воздуха имеет единственный устойчивый равновесный режим — полет с постоянной скоростью $v = v_0 y_0$ по нисходящей прямой, составляющей с горизонтом угол ϑ_0 . Этот режим устанавливается при любых начальных условиях. Если начальная скорость планера достаточно велика (на фазовом

цилиндре мы попадаем на фазовую траекторию, охватывающую несколько раз цилиндр), то планер совершит сначала несколько

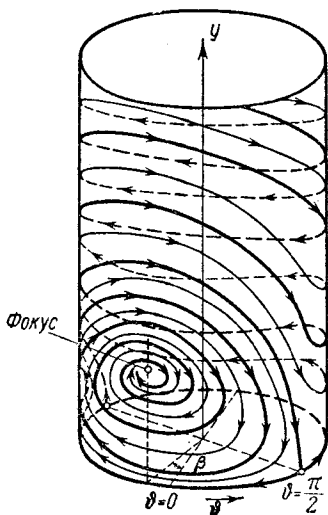


Рис. 345.

¹⁾ Если бы эта сепаратриса входила в седло $(\frac{\pi}{2}, 0)$, то тогда на фазовом цилиндре имелось бы два замкнутых контура, состоящих из интегральных кривых (из сепаратрисы седла и той или иной полуокружности $y=0$) и не охватывающих цилиндр, что невозможно, поскольку выполнены условия критерия Дюлака.

«мертвых петель» (их число определяется начальными условиями) и затем по «волнообразной» траектории будет приближаться к траектории прямолинейного полета. Такая траектория полета планера (траектория

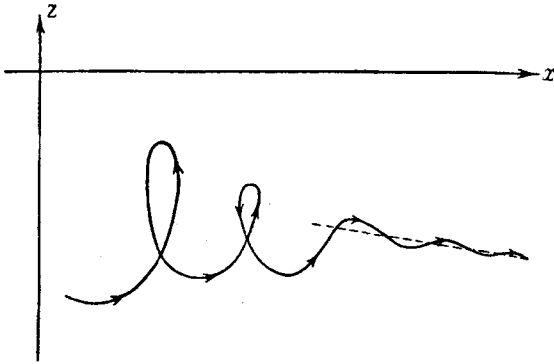


Рис. 346.

движения его центра тяжести в вертикальной плоскости x, z) приведена на рис. 346¹⁾.

На этом мы закончим краткое рассмотрение динамических систем с цилиндрической фазовой поверхностью²⁾. В некоторых задачах оказывается необходимым ввести и другие типы фазовой поверхности, отличные от плоскости и цилиндра, например тор или многолистные поверхности. Системы с фазовой поверхностью в виде тора выходят за рамки настоящей книги, а несколько систем с многолистной фазовой поверхностью будут рассмотрены в следующей главе.

¹⁾ Уравнения траекторий полета планера в плоскости x, z , в отличие от консервативного случая $a=0$, уже не может быть получено в квадратурах поскольку в рассматриваемом диссипативном случае $a > 0$ не имеет места ни интеграл (7.16), ни закон сохранения энергии (α), приведенный в примечании на стр. 500.

²⁾ Еще одна динамическая система с цилиндрической фазовой поверхностью (простейшая модель паровой машины) будет рассмотрена в следующей главе (в § 10).

ГЛАВА VIII
МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
И КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ¹⁾

§ 1. Введение

Перейдем теперь к количественному рассмотрению нелинейных динамических систем, ограничиваясь по-прежнему автономными системами второго порядка (с одной степенью свободы). Как мы уже говорили, при современном состоянии теории это количественное рассмотрение (аналитическими методами) может быть удовлетворительно проведено, в сущности, лишь для трех классов систем, имеющих, однако, значительный практический интерес. Один из этих классов составляют системы, близкие к консервативным, и в частности, практически наиболее интересные системы, близкие к гармоническому осциллятору; второй класс — это системы, совершающие разрывные колебания. Эти два класса будут рассмотрены соответственно в гл. IX и X. Наконец, третий класс составляют системы, количественное рассмотрение которых может быть проведено при помощи метода точечных преобразований²⁾. Наиболее просто этот метод применяется для так называемых *кусочно-линейных систем*, т. е. для систем с фазовым пространством, состоящим из областей, в каждой из которых динамические уравнения движения линейны. Количественному рассмотрению таких кусочно-линейных систем и будет посвящена настоящая глава.

Рассмотрение нескольких задач об автоколебаниях кусочно-линейных систем при помощи метода точечных преобразований было уже проведено в § 4—6 гл. III. В этих задачах нахождение предельных циклов и исследование их устойчивости сводились к построению некоторого точечного преобразования полупрямой самой в себя (к вычислению соответствующей функции последования), к отысканию неподвижных точек полученного точечного преобразования и исследованию их устойчивости, причем во всех рассмотренных задачах мы

¹⁾ Написано Н. А. Железцовым.

²⁾ Напомним, что основные понятия метода точечных преобразований (понятия функции последования, неподвижной точки точечного преобразования и ее устойчивости) были сформулированы в § 7 гл. V. Там же была дана и теорема Кенигса об устойчивости неподвижной точки.

получали (или могли получить) функцию последования, записанную в явном виде.

Однако в подавляющем большинстве задач трудно получить функцию последования, записанную в явном виде, но сравнительно легко можно получить ее в *параметрической форме*. Пусть, к примеру, фазовая плоскость x, y некоторой динамической системы разбивается прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$ на три области (I), (II) и (III) (рис. 347), в каждой из которых уравнения движения рассматриваемой системы линейны. Обозначим через S, S_1, S_2 и S_3 полупрямые, через которые изображающая точка переходит соответственно из области (I) в область (II), из (II) — в (III), из (III) — в (II) и, наконец, из области (II) в область (I), и через s, s_1, s_2 и s_3 — ординаты точек этих полупрямых. Фазовые траектории рассматриваемой динамической системы в «областях линейности» (I), (II) и (III) осуществляют точечные преобразования полупрямой S в S_1, S_1 в S_2, S_2 в S_3 и S_3 в S , приводя во взаимно-однозначное и непрерывное соответствие точки этих полупрямых; обозначим эти точечные преобразования соответственно через Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 . Интегрируя линейные дифференциальные уравнения движения системы в соответствующей области, мы сможем найти для каждого из этих точечных преобразований полупрямой в полупрямую *функцию соответствия*¹⁾ в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} \text{для преобразования } \Pi_1: & \quad s_1 = \varphi_1(\tau_1), \quad s = \psi_1(\tau_1); \\ \text{для преобразования } \Pi_2: & \quad s_2 = \varphi_2(\tau_2), \quad s_1 = \psi_2(\tau_2); \\ \text{для преобразования } \Pi_3: & \quad s_3 = \varphi_3(\tau_3), \quad s_2 = \psi_3(\tau_3); \\ \text{для преобразования } \Pi_4: & \quad s' = \varphi_4(\tau_4), \quad s_3 = \psi_4(\tau_4), \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

где τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4 — времена пробега изображающей точки через соответствующую область²⁾.

¹⁾ Функцию последования для точечного преобразования какой-либо линии в другую линию обычно называют *функцией соответствия*.

²⁾ Так как в области (II) дифференциальные уравнения движения системы линейны, то уравнения фазовой траектории, выходящей в эту область в точке полупрямой S с координатой s в момент $t = 0$, будут линейно зависеть от s :

$$x = sf_1(t) + f_2(t), \quad y = sf_3(t) + f_4(t).$$

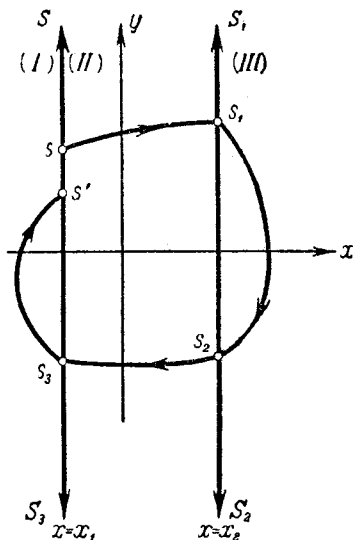


Рис. 347.

Если фазовые траектории, выходящие из некоторого отрезка полу-прямой S , возвращаются на него, пройдя по всем трем областям (пройдя через области (I) , (II) , (III) и (IV) ; см. рис. 347), то точечное преобразование Π этого отрезка полупрямой S самого в себя (с функцией последования $s' = f(s)$) получается последовательным применением преобразований Π_1 , Π_2 , Π_3 и Π_4 , т. е., как говорят, преобразование Π является произведением преобразований Π_1 , Π_2 , Π_3 и Π_4 :

$$\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4.$$

Очевидно, задача отыскания предельных циклов, проходящих по всем трем областям (т. е. через области (I) , (II) , (III) и (IV)), сводится к нахождению неподвижных точек этого «полного» точечного преобразования Π , т. е. к решению системы (обычно трансцендентных) уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\tau_1) &= \psi_2(\tau_2), & \varphi_3(\tau_3) &= \psi_4(\tau_4), \\ \varphi_2(\tau_2) &= \psi_3(\tau_3), & \varphi_4(\tau_4) &= \psi_1(\tau_1). \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Устойчивость неподвижной точки и соответствующего предельного цикла нетрудно определить, пользуясь теоремой Кенигса и заметив, что в неподвижной точке

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\varphi'_1(\bar{\tau}_1)}{\psi'_1(\bar{\tau}_1)} \cdot \frac{\varphi'_2(\bar{\tau}_2)}{\psi'_2(\bar{\tau}_2)} \cdot \frac{\varphi'_3(\bar{\tau}_3)}{\psi'_3(\bar{\tau}_3)} \cdot \frac{\varphi'_4(\bar{\tau}_4)}{\psi'_4(\bar{\tau}_4)}$$

(через $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$, $\bar{\tau}_3$ и $\bar{\tau}_4$ обозначены значения τ_1 , τ_2 , τ_3 и τ_4 для неподвижной точки, т. е. решение системы уравнений (8.2))¹⁾.

Принципиально таким путем можно получать точечные преобразования для любых кусочно-линейных динамических систем второго порядка и проводить количественное исследование последних. Однако, конечно, практические трудности в исследовании и решении системы уравнений, определяющей неподвижные точки, в выяснении устойчи-

Пусть при $t = \tau_1$ изображающая точка, двигаясь по этой траектории, придет на полупрямую S_1 в точке с ординатой s_1 ; тогда, очевидно,

$$x_2 = sf_1(\tau_1) + f_2(\tau_1), \quad s_1 = sf_3(\tau_1) + f_4(\tau_1)$$

(x_2 — абсцисса точек полупрямой S_1). Разрешая полученные соотношения относительно s и s_1 , мы и получим функцию соответствия для преобразования Π_1 :

$$s = \frac{x_2 - f_2(\tau_1)}{f_1(\tau_1)} \equiv \psi_1(\tau_1), \quad s_1 = \psi_1(\tau_1) \cdot f_3(\tau_1) + f_4(\tau_1) \equiv \varphi_1(\tau_1).$$

Точно таким же образом можно найти функции соответствия и для остальных точечных преобразований Π_2 , Π_3 и Π_4 .

¹⁾ Вообще говоря, в рассматриваемой нами динамической системе возможны и предельные циклы, проходящие только через две области, например через области (I) и (IV) . Последние, очевидно, можно найти, построив точечное преобразование $\Pi' = \Pi_2 \Pi_4$, где Π_2 — преобразование полупрямой (s) в (s_2) , осуществляемое фазовыми траекториями, лежащими целиком в области (IV) .

ности найденных неподвижных точек быстро возрастают с увеличением числа областей линейности уравнений движения (т. е. числа точечных преобразований, произведением которых является «полное» точечное преобразование). Поэтому, чтобы не усложнять изложения, мы в настоящей главе ограничимся рассмотрением лишь сравнительно простых задач об автоколебательных системах, для которых «полное» точечное преобразование является произведением не более двух точечных преобразований прямой в прямую, выражаемых в параметрической форме. В этих задачах неподвижные точки, соответствующие предельным циклам, будут определяться системами двух трансцендентных уравнений; исследование последних удобно вести при помощи диаграмм Ламерея (см. гл. III).

§ 2. Ламповый генератор

1. Уравнение колебаний. В качестве первой задачи мы рассмотрим автоколебания лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки или в цепи анода (рис. 348). Если пренебречь анодной реак-

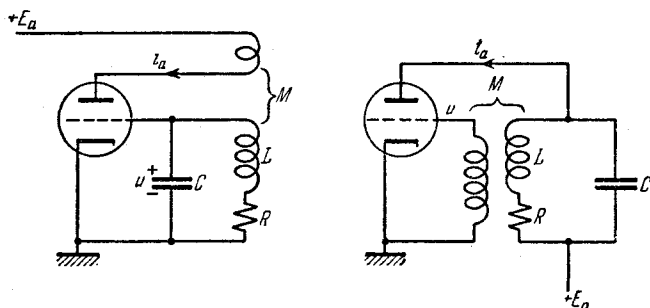


Рис. 348.

цией, сеточными токами и внутриламповыми емкостями, то, как мы видели в гл. I, § 6, уравнение колебаний такого лампового генератора может быть записано в следующем виде:

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + [RC - MS(u)] \frac{du}{dt} + u = 0 \quad (8.3)$$

В настоящем параграфе мы примем кусочно-линейную аппроксимацию характеристики лампы $i_a = i_a(u)$, изображенную на рис. 349:

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq -u_0, \\ S(u + u_0) & \text{при } u > -u_0, \end{cases} \quad (8.4)$$

¹⁾ Мы обозначаем время через t' , так как через t ниже будет обозначаться безразмерное время.

где S — крутизна восходящего участка характеристики и u_0 — абсолютная величина напряжения запирающего лампы ($u_0 > 0$). Введем безразмерные переменные $x = \frac{u}{u_0}$ и $t = \omega_0 t'$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — «томсоновская» частота колебательного контура. В этих переменных уравнение (8.3) при кусочно-линейной аппроксимации характеристики лампы (8.4) запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x < -1 \quad \ddot{x} + 2h_1 \dot{x} + x &= 0, \\ \text{при } x > -1 \quad \ddot{x} - 2h_2 \dot{x} + x &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

где

$$h_1 = \frac{\omega_0}{2} RC \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{\omega_0}{2} [MS - RC].$$

Таким образом, при такой кусочно-линейной аппроксимации характеристики лампы фазовая плоскость x, y ($y = \dot{x}$) лампового генератора разбивается прямой $x =$

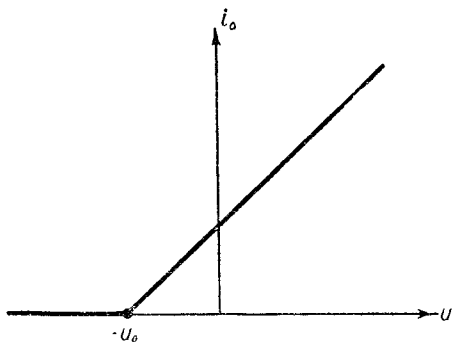


Рис. 349.

на две области (I) и (II) (рис. 350), в каждой из которых фазовые траектории определяются соответствующим линейным дифференциальным уравнением (8.5)¹⁾. Мы, очевидно, должны считать фазовые траектории непрерывными кривыми всюду и, в частности, на границе областей линейности — на прямой $x = -1$.

Единственное состояние равновесия $x = 0, y = 0$ лежит в области (II); оно устойчиво при $h_2 < 0$ (т. е. при $MS < RC$) и неустойчиво при $h_2 > 0$ (при $MS > RC$). Ниже мы будем рассматривать только последний случай — случай «самовозбуждающегося» генератора²⁾. Поскольку состояние равновесия $x = 0, y = 0$ является неустойчивым фокусом при $0 < h_2 < 1$ и неустойчивым узлом при $h_2 > 1$ и никогда

¹⁾ Ясно, что используемые нами при построении математической модели лампового генератора кусочно-линейная аппроксимация характеристики лампы и предположения об отсутствии сеточных токов и анодной реакции не могут отображать свойств реальной лампы и лампового генератора при достаточно больших положительных значениях напряжения u , когда в лампе появляются сеточные токи и анодная реакция. Поэтому некоторые свойства рассматриваемой сейчас математической модели лампового генератора (например, существование при $h_2 > 1$ траекторий, уходящих в бесконечность) не будут отображать свойств реальных ламповых генераторов.

²⁾ Если $h_2 < 0$, т. е. $MS < RS$, то, как нетрудно убедиться, все фазовые траектории будут асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаться к началу координат — устойчивому состоянию равновесия, и генератор не будет совершать автоколебаний.

не является седлом, особыми траекториями, определяющими качественно характер разбиения фазовой плоскости на фазовые траектории, будут уже известное нам состояние равновесия и предельные циклы, если последние существуют. Поэтому нашей основной задачей является отыскание предельных циклов и исследование их устойчивости.

Так как дифференциальные уравнения фазовых траекторий — уравнения колебаний генератора (8.5) — являются линейными в каждой из областей (I) и (II), то на фазовой плоскости не может быть предельных циклов, лежащих целиком только в одной области (только в области (I) или только в области (II)). Предельный цикл, если он существует, должен проходить через обе области и охватывать состояние равновесия. Следовательно, он будет пересекать границу этих двух областей — прямую $x = -1$.

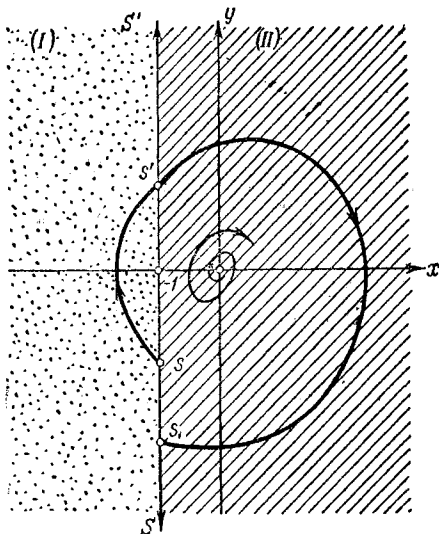


Рис. 350.

Разобьем эту прямую на две полупрямые — на полупрямую S : $x = -1$, $y = -s$ ($s > 0$), и на полупрямую S' : $x = -1$, $y = s'$ ($s' > 0$). Эти полупрямые, очевидно, являются полупрямыми *без контакта*: полупрямая S пересекается фазовыми траекториями, идущими (при возрастании t) из области (II) в область (I), а полупрямая S' — траекториями, идущими из области (I) в область (II).

Рассмотрим фазовую траекторию, выходящую из некоторой точки s полупрямой S . Эта траектория, пройдя по области (I), пересечет полупрямую S' в точке s' и затем, если $h_2 < 1$, т. е. если фазовые траектории в области (II) являются спиралями, вновь выйдет на полупрямую S в некоторой точке s_1 (рис. 350). Тем самым фазовые траектории при $0 < h_2 < 1$ осуществляют точечное преобразование полупрямой S самой в себя, ставя во взаимно-однозначное и непрерывное соответствие точки s и s_1 этой полупрямой. Неподвижная точка этого преобразования, очевидно, является точкой пересечения предельного цикла с полупрямой S .

Если же $h_2 > 1$, то состояние равновесия $x = 0$, $y = 0$, как мы уже указывали, будет неустойчивым узлом; в области (II) будут иметься две прямолинейные фазовые траектории, уходящие в бесконечность (рис. 351), и, следовательно, траектории, выходящие из

точек полупрямой s' , уже не могут приходить на полупрямую s , а будут уходить в бесконечность. Ясно, что в этом случае на фазовой плоскости x, y не существует никаких предельных циклов и все фазовые траектории уходят в бесконечность, т. е. за пределы той области, в которой принятая математическая модель лампового генератора отображает свойства реального генератора.

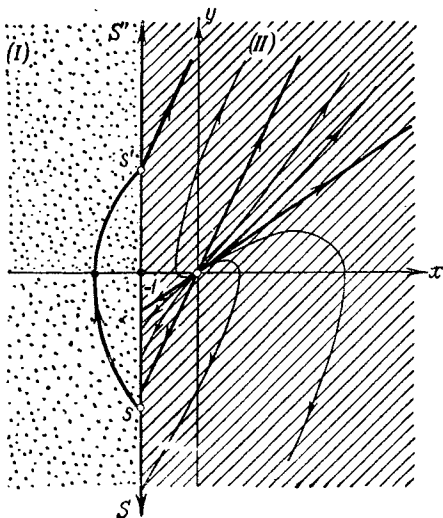


Рис. 351.

2. Точечное преобразование. Итак, рассмотрим случай $0 < h_2 < 1$. Точечное преобразование полупрямой S самой в себя (будем обозначать его через Π), очевидно, может быть представлено в виде произведения двух преобразований: преобразования Π_1 точек s полупрямой S в точки s' полупрямой S' , осуществляемое траекториями в области (I), и преобразования Π_2 точек

s' в точки s_1 полупрямой S (последнее осуществляется траекториями в области (II)). Найдем аналитические выражения для этих преобразований.

В области (I) ($x < -1$) фазовые траектории определяются первым из дифференциальных уравнений (8.5). Его решение (для траектории, проходящей при $t=0$ через точку $x=x_0, y=y_0$), как известно¹⁾, записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-h_1 t} \left\{ x_0 \cos \omega_1 t + \frac{y_0 + h_1 x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right\}, \\ y &= \dot{x} = e^{-h_1 t} \left\{ y_0 \cos \omega_1 t - \frac{x_0 + h_1 y_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

где

$$\omega_1 = + \sqrt{1 - h_1^2}.$$

Следовательно, уравнением траектории, выходящей при $t=0$ из точки s полупрямой S ($x_0 = -1, y_0 = -s$, где $s > 0$), будет:

$$\left. \begin{aligned} x &= - e^{-h_1 t} \left[\cos \omega_1 t + \frac{s + h_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right], \\ y &= \dot{x} = e^{-h_1 t} \left[-s \cos \omega_1 t + \frac{1 + h_1 s}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

¹⁾ См., например, гл. I, § 4.

Изображающая точка, двигаясь по траектории (8.7), в некоторый момент времени $t_1 = \frac{\tau_1}{\omega_1}$ придет на полупрямую S' в точке s' ($x = -1$, $y = s' > 0$) (рис. 350). Тогда

$$\begin{aligned} -1 &= -e^{-\frac{h_1 \tau_1}{\omega_1}} \left[\cos \tau_1 + \frac{s + h_1}{\omega_1} \sin \tau_1 \right], \\ s' &= e^{-\frac{h_1 \tau_1}{\omega_1}} \left[-s \cos \tau_1 + \frac{1 + sh_1}{\omega_1} \sin \tau_1 \right]. \end{aligned}$$

Разрешив эти уравнения относительно s и s' , мы получим функцию соответствия для преобразования Π_1 , записанную в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \cdot \sin^2 \tau_1}}, \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \cdot \sin^2 \tau_1}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{h_1}{\omega_1} = \frac{h_1}{\sqrt{1 - h_1^2}}$$

(при изменении h_1 от 0 до $+1$ γ_1 монотонно увеличивается от 0 до $+\infty$). Заметим, что выражение для s' получается из выражения для s заменой γ_1 на $-\gamma_1$. Дифференцируя (8.8), получим:

$$\frac{ds}{d\tau_1} = \frac{1 - e^{\gamma_1 \tau_1} (\cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \cdot \sin^2 \tau_1}} \quad \text{и} \quad \frac{ds'}{d\tau_1} = \frac{1 - e^{-\gamma_1 \tau_1} (\cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \cdot \sin^2 \tau_1}}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(\tau, \gamma) = 1 - e^{\gamma \tau} (\cos \tau - \gamma \sin \tau), \quad (8.9)$$

график которой (для фиксированного $\gamma > 0$) качественно изображен на рис. 352. Из свойств этой функции отметим следующие три:

1) $\varphi(-\tau, -\gamma) \equiv \varphi(\tau, \gamma)$;

2) $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = (1 + \gamma^2) e^{\gamma \tau} \sin \tau$;

3) при $\gamma > 0$ $\varphi(\tau, \gamma)$ обращается в нуль при некотором $\tau = \tau^0$ (γ) (причем $\pi < \tau^0 < 2\pi$) и больше нуля при $\tau < \tau^0$.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} \varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \cdot \sin^2 \tau_1}}, & \frac{ds}{d\tau_1} &= \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \tau_1}}; \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} \varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \tau_1}}, & \frac{ds'}{d\tau_1} &= \frac{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \tau_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.8a)$$

Из выражений (8.8а) и свойств функции $\varphi(\tau, \gamma)$ следует, что для получения всей совокупности значений s в интервале $0 < s < +\infty$ параметр преобразования τ_1 нужно изменять в интервале $0 < \tau_1 < \pi$, причем при изменении τ_1 от 0 до π , s и s' монотонно возрастают от 0 до $+\infty$ (при $\tau_1 \rightarrow +0$ $s, s' \rightarrow 0$; при $\tau_1 \rightarrow \pi - 0$ $s, s' \rightarrow +\infty$; при $0 < \tau_1 < \pi$ $s, s', \frac{ds}{d\tau_1}$ и $\frac{ds'}{d\tau_1}$ положительны и непрерывны¹⁾).

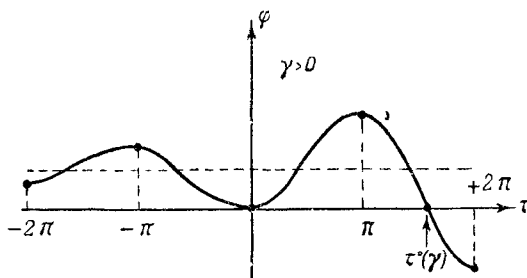


Рис. 352.

Для построения графика функции соответствия для преобразования Π_1 — функции, связывающей значения s и s' , достаточно заметить следующее:

1) при $0 < \tau < \pi$

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)} > 0$$

и монотонно возрастает от 1 при $\tau_1 \rightarrow +0$ до $e^{\gamma_1\pi}$ при $\tau_1 \rightarrow \pi - 0$, так как

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{ds'^2} &= \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left\{ \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)} \right\} \frac{1}{\frac{ds'}{d\tau_1}} = \\ &= \frac{2(1 + \gamma_1^2)^{\frac{3}{2}} \sin^3 \tau_1}{[\varphi(\tau_1, -\gamma_1)]^3} [\text{sh } \gamma_1 \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1] > 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

при $0 < \tau < \pi$;

¹⁾ Параметр преобразования τ_1 имеет смысл приведенного времени пробега изображающей точки в области (I) . Поэтому из всевозможных значений τ_1 , соответствующих заданному значению s (согласно первому соотношению (8.8)), мы должны брать *наименьшее положительное*. Таким образом, интервал изменения τ_1 должен быть интервалом наименьших положительных значений, которым соответствуют согласно (8.8) $0 < s < +\infty$. Таким интервалом и является интервал $0 < \tau_1 < \pi$.

Предельные значения s и s' при $\tau_1 \rightarrow 0$ находятся из (8.8), например, при помощи правила Лопитала.

2) при $\tau \rightarrow \pi - 0$ график функции соответствия (8.8) имеет прямолинейную асимптоту

$$s = e^{\gamma_1 \pi} s' + a, \tag{8.11}$$

где

$$a = \lim_{\tau \rightarrow \pi - 0} [s - e^{\gamma_1 \pi} s'] = -\frac{2\gamma_1(1 + e^{\gamma_1 \pi})}{\sqrt{1 + \gamma^2}} < 0;$$

3) в силу $\frac{d^2s}{ds'^2} > 0$ и $a < 0$ кривая (8.8) расположена над асимптотой (8.11). График функции соответствия (8.8) изображен на рис. 353 (сплошной линией для рассмотренного случая $0 < h_1 < 1$).

В случае $h_1 > 1$ решение уравнения (8.5) в области (I) получается из (8.7) заменой тригонометрических функций на соответствующие гиперболические и ω_1 на $\bar{\omega}_1 = \sqrt{h_1^2 - 1}$; нетрудно видеть, что и функция соответствия для преобразования Π_1 в этом случае может быть получена из (8.8) тем же путем. Таким образом, в случае $h_1 > 1$

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{e^{\bar{\gamma}_1 \tau_1} - \text{ch } \tau_1 - \bar{\gamma}_1 \text{ sh } \tau_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1} \text{ sh } \tau_1}, \\ s' &= \frac{e^{-\bar{\gamma}_1 \tau_1} - \text{ch } \tau_1 + \bar{\gamma}_1 \cdot \text{sh } \tau_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1} \text{ sh } \tau_1}, \end{aligned} \right\} (8.12)$$

где

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 - 1}}$$

(при изменении h_1 от 1 до $+\infty$ $\bar{\gamma}_1$ монотонно уменьшается от $+\infty$ до 1). Нетрудно также убедиться, что при изменении τ_1 от 0 до $+\infty$ s монотонно растет от 0 до $+\infty$, а s' — от 0 до

$$\bar{a} = \lim_{\tau_1 \rightarrow +\infty} s' = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_1 - 1}{\bar{\gamma}_1 + 1}}$$

и что график функции соответствия (8.11) имеет вид кривой, изображенной на рис. 353 пунктирной линией.

Перейдем теперь к точечному преобразованию Π_2 — преобразованию точек полупрямой S' в точки s_1 полупрямой S , осуществляемому траекториями в области (II), ограничиваясь случаем $0 < h_2 < 1$ ¹⁾.

¹⁾ Выше было показано, что при $h_2 > 1$ преобразование Π_2 не существует и все фазовые траектории уходят в бесконечность.

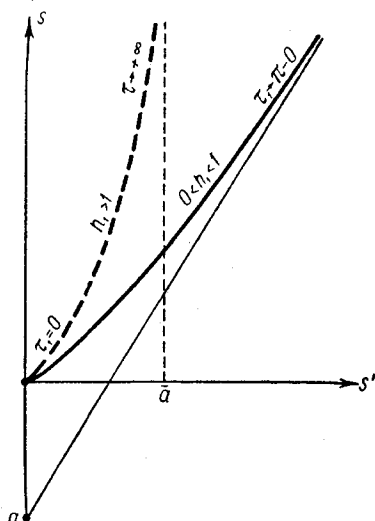


Рис. 353.

Пусть при $t=0$ изображающая точка, двигаясь по соответствующей траектории в области (II), пришла в точку s_1 полупрямой S , выйдя ранее в некоторый момент времени $t = -\frac{\tau_2}{\omega_2} < 0$ из точки s' полупрямой S' (рис. 350). Поскольку решение уравнения (8.5) в области (II), очевидно, получается из решения в области (I) заменой h_1 на $-h_2$ и ω_1 на $\omega_2 = +\sqrt{1-h_2^2}$, уравнение интересующей нас траектории (с $x = -1$, $y = -s_1 < 0$ при $t=0$ и для $-\frac{\tau_2}{\omega_2} \leq t \leq 0$) получится из (8.7), если заменить там h_1 на $-h_2$, ω_1 на ω_2 , s на s_1 и τ_1 на $-\tau_2$. Той же заменой мы получим из (8.8) функцию соответствия для преобразования Π_2 —функцию, связывающую между собой значения s' и s_1 через параметр τ_2 (приведенное время пробега изображающей точки в области (II) τ_2 , конечно, больше нуля). Таким образом, функция соответствия для преобразования Π_2 имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\frac{e^{\gamma_2 \tau_2} - \cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \tau_2}, \\ s' &= -\frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} - \cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \tau_2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

где

$$\gamma_2 = \frac{h_2}{\omega_2} = \frac{h_2}{\sqrt{1-h_2^2}}.$$

Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} \varphi(\tau_2, -\gamma_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \tau_2}, & s' &= -\frac{e^{\gamma_2 \tau_2} \varphi(\tau_2, \gamma_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \tau_2} \end{aligned} \right\} \quad (8.13a)$$

и

$$\frac{ds_1}{ds'} = \frac{\varphi(\tau_2, \gamma_2)}{\varphi(\tau_2, -\gamma_2)}.$$

Параметр преобразования τ_2 нужно изменять в таком интервале наименьших положительных величин, чтобы получить всю совокупность значений $0 < s' < +\infty$. Из свойств функции $\varphi(\tau, \gamma)$ (рис. 352) и выражений (8.13a) следует, что таким интервалом будет $\pi < \tau_2 < \tau_2^0$, где τ_2^0 —наименьший положительный корень уравнения $s' = 0$ или

$$\varphi(\tau_2, \gamma_2) = 0$$

(очевидно, $\pi < \tau_2^0 < 2\pi$). Нетрудно убедиться в следующих свойствах функции соответствия (8.13): 1) при уменьшении τ_2 от τ_2^0 до π s' монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, а s_1 —от некоторого значения s_1^0 также до $+\infty$; 2) $\frac{d^2 s_1}{ds'^2} > 0$ (для доказательства достаточно заметить в (8.10) s на s_1 , γ_1 на $-\gamma_2$ и τ_1 на $-\tau_2$ и учесть, что

$\pi < \tau_2 < \tau_2^0 < 2\pi$); следовательно, $\frac{ds_1}{ds'}$ при возрастании s' монотонно растет от 0 при $s'=0$ (при $\tau_2 = \tau_2^0$) до $e^{\gamma_2 \pi}$ при $s' \rightarrow +\infty$ (при $\tau_2 \rightarrow \pi + 0$); 3) при $\tau_2 \rightarrow \pi + 0$ кривая (8.15) имеет прямолинейную асимптоту

$$s_1 = e^{\gamma_2 \pi} s' + \frac{2\gamma_2(1 + e^{\gamma_2 \pi})}{\sqrt{1 + \gamma_2^2}}. \quad (8.14)$$

График функции последования (8.13) для точечного преобразования Π_2 изображен на рис. 354.

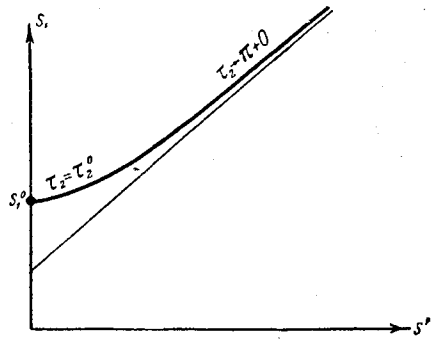


Рис. 354.

3. Неподвижная точка и ее устойчивость. Для определения неподвижных точек преобразования Π полупрямой S самой в себя нанесем на одной диаграмме (на диаграмме Ламе-рея) графики функции соответствия для преобразований Π_1 и Π_2 —

кривые (8.8) и (8.13) (рис. 355, 356 и 357). При $0 < h_2 < h_1 < 1$ (рис. 355) кривые $s = s(s')$ и $s_1 = s_1(s')$ имеют нечетное число точек пересечения, так как эти кривые непрерывны и $s_1 > s$ при $s' = 0$,

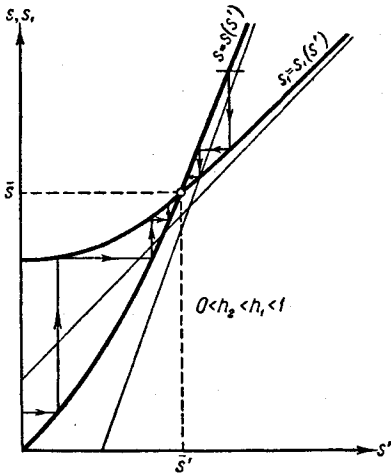


Рис. 355.

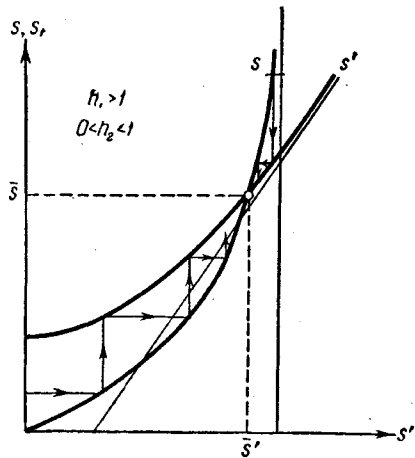


Рис. 356.

но $s_1 < s$ при $s' \rightarrow +\infty$ (поскольку $\gamma_2 < \gamma_1$, асимптота (8.14) идет более полого, чем асимптота (8.11)). Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае существует только одна точка пересечения кривых $s = s(s')$ и $s_1 = s_1(s')$ и, следовательно, только одна неподвижная точка преобразования Π и только один предельный цикл на фазовой плоскости.

В самом деле, для неподвижной точки преобразования Π (величины, относящиеся к ней, мы будем отмечать чертой сверху) согласно (8.8a) и (8.13a) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{\gamma_1 \bar{\tau}_1}}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \bar{\tau}_1}} \varphi(\bar{\tau}_1, -\gamma_1) &= -\frac{e^{-\gamma_2 \bar{\tau}_2}}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \bar{\tau}_2}} \varphi(\bar{\tau}_2, -\gamma_2), \\ \frac{e^{-\gamma_1 \bar{\tau}_1}}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \bar{\tau}_1}} \varphi(\bar{\tau}_1, \gamma_1) &= -\frac{e^{\gamma_2 \bar{\tau}_2}}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \bar{\tau}_2}} \varphi(\bar{\tau}_2, \gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right) = \left(\frac{ds_1}{ds'}\right) : \left(\frac{ds}{ds'}\right) = \frac{\varphi(\bar{\tau}_2, \gamma_2) \varphi(\bar{\tau}_1, -\gamma_1)}{\varphi(\bar{\tau}_2, -\gamma_2) \varphi(\bar{\tau}_1, \gamma_1)}$$

или согласно (8.15)

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right) = e^{2(\gamma_2 \bar{\tau}_2 - \gamma_1 \bar{\tau}_1)} > 0. \quad (8.16)$$

Допустим, что кривые $s = s(s')$ и $s_1 = s_1(s')$ имеют несколько точек пересечения. Тогда для первой из них (с наименьшим \bar{s}'), поскольку

$s_1 > s$ при малых s' , обязательно будет иметь место неравенство

$$\left(\frac{ds_1}{ds'}\right)_1 < \left(\frac{ds}{ds'}\right)_1 \quad \text{или} \quad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)_1 < 1,$$

а для второй, следующей —

$$\left(\frac{ds_1}{ds'}\right)_2 > \left(\frac{ds}{ds'}\right)_2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)_2 > 1.$$

Последнее невозможно, так как большему \bar{s}' соответствует большее $\bar{\tau}_1$ и меньшее $\bar{\tau}_2$, и следовательно, если бы вторая точка пересечения существовала, для нее согласно (8.16) выполнялось бы

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)_2 < \left(\frac{ds_1}{ds}\right)_1 < 1.$$

Таким образом, существует только одна точка пересечения кривых

$s = s(s')$ и $s_1 = s_1(s')$ — одна неподвижная точка точечного преобразования Π , причем для этой точки

$$0 < \left(\frac{ds_1}{ds}\right) < 1.$$

Следовательно, при $0 < h_2 < h_1 < 1$ на фазовой плоскости имеется единственный предельный цикл и притом устойчивый. К этому предельному циклу асимптотически приближаются при $t \rightarrow +\infty$ все фазовые траектории (рис. 358).

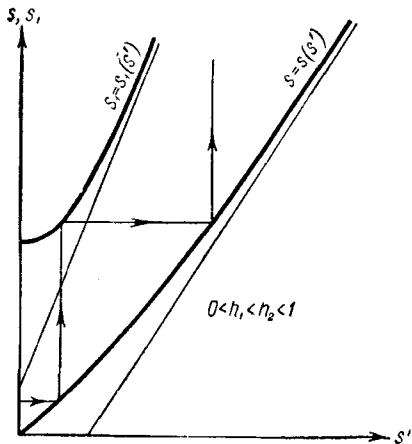


Рис. 357.

Тот же результат нетрудно получить и для случая $0 < h_2 < 1$, $h_1 > 1$ (рис. 356): и в этом случае существует единственный

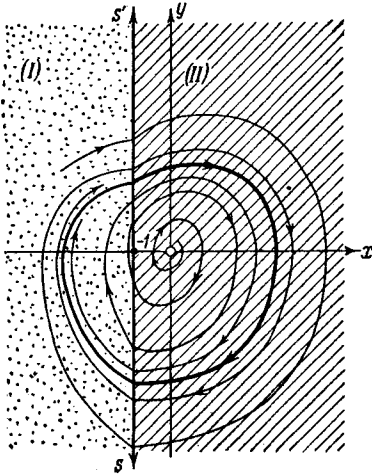


Рис. 358.

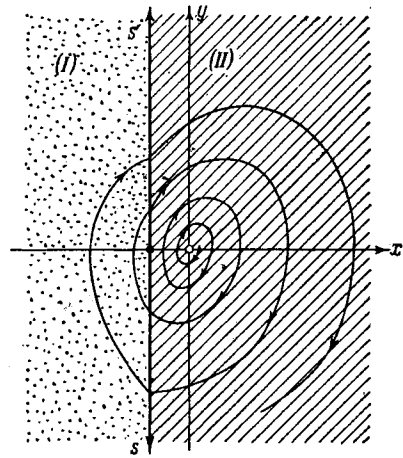


Рис. 359.

устойчивый предельный цикл, к которому асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются все остальные траектории.

Если же $0 < h_1 < h_2 < 1$, то кривые $s = s(s')$ и $s_1 = s_1(s')$ не пересекаются (рис. 357). В самом деле, если бы в этом случае существовали точки пересечения (их было бы четное число), то для первой из них (с наименьшим $|s'|$) необходимо должно быть

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)_1 = \left(\frac{ds_1}{ds'}\right)_1 : \left(\frac{ds}{ds'}\right)_1 < 1,$$

что невозможно в силу (8.16), так как $\bar{\tau}_2 > \pi > \bar{\tau}_1$ и при $h_2 > h_1$ $\gamma_2 > \gamma_1$. Итак, при $0 < h_1 < h_2 < 1$ преобразование Π полупрямой S самой в себя не имеет неподвижных точек, и следовательно, на фазовой плоскости не существует никаких предельных циклов, причем, как нетрудно убедиться, все фазовые траектории уходят в бесконечно удаленные области фазовой плоскости (рис. 359).

Ламповый генератор при сделанных предположениях имеет два существенных параметра h_1 и h_2 , и мы можем рассмотреть разбиение плоскости этих параметров на области различного качественного поведения рассматриваемой нами системы. На рис. 360 дано такое

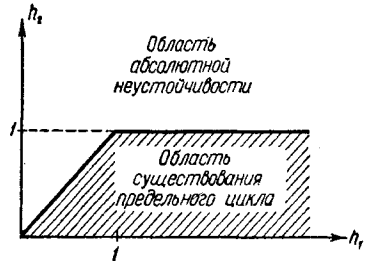


Рис. 360.

существенных параметра h_1 и h_2 , и мы можем рассмотреть разбиение плоскости этих параметров на области различного качественного поведения рассматриваемой нами системы. На рис. 360 дано такое

разбиение первого квадранта плоскости параметров h_1 и h_2 на область существования предельного цикла (единственного и устойчивого) и на область «абсолютной неустойчивости». Точкам последней области соответствуют такие значения параметров, при которых все фазовые траектории уходят в бесконечность. Очевидно, в этом случае (при $0 < h_1 < h_2 < 1$ или при $h_2 > 1$) развитая здесь теория не передает правильно свойств ламповых генераторов, ибо она была построена при пренебрежении сеточными токами и анодной реакцией, которые играют принципиальную роль при больших амплитудах колебаний.

4. Предельный цикл. Итак, при выполнении условий

$$0 < h_2 < h_1 \text{ и } h_2 < 1$$

на фазовой плоскости существует единственный предельный цикл, к которому при $t \rightarrow +\infty$ асимптотически приближаются все остальные фазовые траектории, что соответствует установлению автоколебательного режима при произвольных начальных условиях¹⁾. При $0 < h_2 < h_1 < 1$ неподвижная точка точечного преобразования Π и, следовательно, предельный цикл однозначно (единственным образом) определяется системой уравнений (8.15):

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{\gamma_1 \bar{\tau}_1} - \cos \bar{\tau}_1 - \gamma_1 \sin \bar{\tau}_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \bar{\tau}_1}} &= - \frac{e^{\gamma_2 \bar{\tau}_2} - \cos \bar{\tau}_2 - \gamma_2 \sin \bar{\tau}_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin^2 \bar{\tau}_2}}, \\ \frac{e^{-\gamma_1 \bar{\tau}_1} - \cos \bar{\tau}_1 + \gamma_1 \sin \bar{\tau}_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin^2 \bar{\tau}_1}} &= - \frac{e^{-\gamma_2 \bar{\tau}_2} - \cos \bar{\tau}_2 + \gamma_2 \sin \bar{\tau}_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin^2 \bar{\tau}_2}}, \end{aligned} \right\} (8.15a)$$

причем

$$0 < \bar{\tau}_1 < \pi < \bar{\tau}_2 < \bar{\tau}_2^0 < 2\pi.$$

Если эта система двух трансцендентных уравнений решена (а в этом и состоит основная вычислительная трудность рассматриваемой задачи), то не представит особого труда вычислить величины, характеризующие автоколебательный режим. Например, период автоколебаний будет равен

$$\tau = \frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2} \quad (8.17)$$

в единицах безразмерного времени и

$$T = \sqrt{LC} \left(\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2} \right) \quad (8.17a)$$

в обычных единицах.

Решение системы уравнений (8.15a) может быть проведено при помощи методов численного счета, изложение которых выходит за рамки настоящей книги. Поэтому мы ограничимся приближенным вычис-

¹⁾ Следовательно, рассматриваемый генератор имеет при сделанных нами предположениях так называемый «мягкий режим самовозбуждения».

лением периода и амплитуды автоколебаний для наиболее интересного, с точки зрения практических приложений, случая достаточно малых значений параметров h_1 и h_2 (т. е. для случая генератора с колебательным контуром высокой добротности и слабой обратной связью).

Обозначим через a и b предельные значения величин $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ при $h_1, h_2 \rightarrow 0$. Для вычисления этих предельных значений приведем уравнения (8.15а) к виду¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\operatorname{ch} \gamma_1 \bar{\tau}_1 - \cos \bar{\tau}_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \bar{\tau}_1}} &= - \frac{\operatorname{ch} \gamma_2 \bar{\tau}_2 - \cos \bar{\tau}_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \bar{\tau}_2}}, \\ \frac{\operatorname{sh} \gamma_1 \bar{\tau}_1 - \gamma_1 \sin \bar{\tau}_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \bar{\tau}_1}} &= - \frac{\operatorname{sh} \gamma_2 \bar{\tau}_2 - \gamma_2 \sin \bar{\tau}_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \bar{\tau}_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.156)$$

и подставим в них приближенные соотношения, справедливые для $h_1, h_2 \ll 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= h_1, \quad \gamma_2 = h_2, \\ \operatorname{ch} \gamma_1 \bar{\tau}_1 &= 1, \quad \operatorname{ch} \gamma_2 \bar{\tau}_2 = 1, \\ \operatorname{sh} \gamma_1 \bar{\tau}_1 &= h_1 a \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \gamma_2 \bar{\tau}_2 = h_2 b \quad ^2). \end{aligned}$$

Тогда уравнения (8.156) дают:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos a}{\sin a} &= - \frac{1 - \cos b}{\sin b}, \\ h_1 \frac{a - \sin a}{\sin a} &= - h_2 \frac{b - \sin b}{\sin b}, \end{aligned}$$

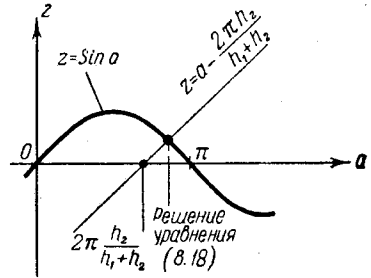


Рис. 361.

откуда получаем: $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = - \operatorname{tg} \frac{b}{2}$, т. е. $a + b = 2\pi$, и

$$a - \sin a = 2\pi \frac{h_2}{h_1 + h_2} = 2\pi \frac{MS - RC}{MS}. \quad (8.18)$$

Как нетрудно убедиться, уравнение (8.18) имеет при $h_2 < h_1$ (т. е. при $\frac{h_2}{h_1 + h_2} < \frac{1}{2}$) единственное решение $0 < a < \pi$ (графическое решение этого уравнения приведено на рис. 361). Так как при

¹⁾ Уравнения (8.156) получаются из уравнений (8.15а) путем их сложения и вычитания.

²⁾ Как нетрудно проверить, $\omega_1 = 1 + O(\gamma_1^2)$, $\omega_2 = 1 + O(\gamma_2^2)$, $h_1 = \gamma_1 + O(\gamma_1^3)$,

$$h_2 = \gamma_2 + O(\gamma_2^3), \quad \operatorname{ch} \gamma_1 \bar{\tau}_1 = 1 + O(\gamma_1^2), \quad \operatorname{ch} \gamma_2 \bar{\tau}_2 = 1 + O(\gamma_2^2),$$

$$\operatorname{sh} \gamma_1 \bar{\tau}_1 = \gamma_1 a + O(\gamma_1^3) \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \gamma_2 \bar{\tau}_2 = \gamma_2 b + O(\gamma_2^3).$$

$h_1, h_2 \ll 1$ $\omega_1=1, \omega_2=1$, период автоколебаний, очевидно, равен $\tau = a + b = 2\pi$, т. е. совпадает с периодом собственных колебаний колебательного контура генератора¹⁾. Для амплитуды автоколебаний, поскольку при

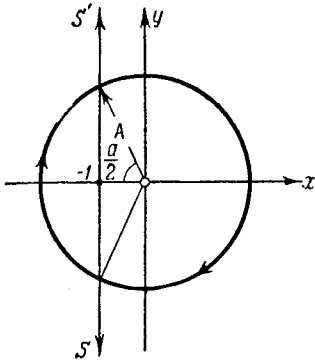


Рис. 362.

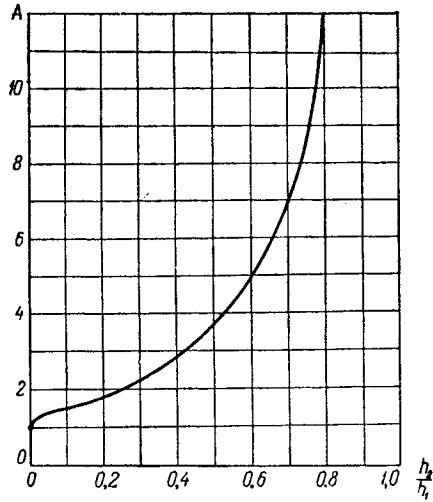


Рис. 363.

малых h_1 и h_2 предельный цикл близок к окружности, имеем (рис. 362):

$$A = \frac{1}{\cos \frac{a}{2}}. \quad (8.19)$$

Зависимость амплитуды автоколебаний A от параметров генератора, очевидно, выражается в параметрической форме соотношениями (8.18) и (8.19). На рис. 363 приведен график зависимости амплитуды A от отношения $\frac{h_2}{h_1}$. При $\frac{h_2}{h_1} \rightarrow 1$ $a \rightarrow \pi$ и, следовательно, $A \rightarrow \infty$.

¹⁾ Положив $\gamma_2 = \beta\gamma_1$, где $\beta = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} < 1$, можно искать решение системы (8.156) в виде разложений в ряды по степеням γ_1 :

$$\tilde{\tau}_1 = a + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_1^2 + \dots, \quad \tilde{\tau}_2 = b + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_1^2 + \dots$$

Подставив в уравнения (8.156) разложения в степенные ряды всех величин, зависящих от γ_1 , мы получим последовательность уравнений, определяющих коэффициенты $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$. Как нетрудно видеть, коэффициенты a и b определяются уравнениями, приведенными выше, и $a_1 = 0, b_1 = 0$. Таким образом, период автоколебаний

$$\tau = 2\pi + O(\gamma_1^2),$$

т. е. отличается от 2π (от периода собственных колебаний колебательного контура генератора) на величину порядка γ_1^2 (или h_1^2).

§ 3. Ламповый генератор (симметричный случай)

1. **Уравнения колебаний и фазовая плоскость.** Рассмотрим теперь ламповый генератор (рис. 348), предполагая, что характеристика лампы имеет насыщение и симметрична (рабочая точка лампы, соответствующая состоянию равновесия, лежит посередине восходящего участка характеристики). Именно, мы будем аппроксимировать характеристику лампы симметричной кусочно-линейной функцией:

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{при } u < -u_0, \\ S(u + u_0) & \text{при } |u| < u_0, \\ 2Su_0 & \text{при } u > u_0, \end{cases} \quad (8.20)$$

график которой изображен на рис. 364.

Как и в предыдущем параграфе, будем пренебрегать анодной реакцией лампы, сеточными токами и паразитными (в том числе и внутриламповыми) емкостями. Заменой переменных

$$x = \frac{u}{u_0}$$

$$\text{и } t = \omega_0 t' \left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right),$$

учитывая, что теперь

$$S(u) = \begin{cases} S & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

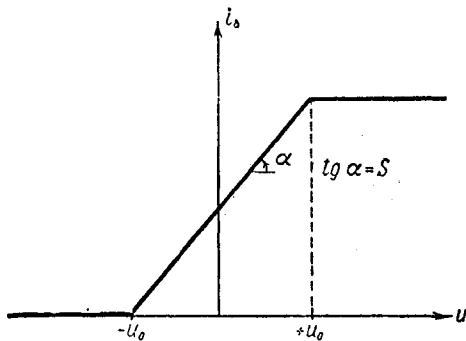


Рис. 364.

мы приведем уравнение лампового генератора (уравнение (8.3)) к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1 \dot{x} + x &= 0 & \text{при } |x| > 1, \\ \ddot{x} - 2h_2 \dot{x} + x &= 0 & \text{при } |x| < 1, \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

где, как и раньше,

$$h_1 = \frac{\omega_0}{2} RC \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{\omega_0}{2} [MS - RC].$$

Таким образом, при кусочно-линейной характеристике лампы (8.20) фазовая плоскость лампового генератора x, y , где $y = \dot{x}$, разбивается прямыми $x = -1$ и $x = +1$ на три «области линейности»: (I) $x < -1$, (II) $|x| < 1$ и (III) $x > +1$, в каждой из которых справедливо свое линейное уравнение (8.21) (рис. 365). При этом, исходя из ясных физических предпосылок (они ранее неоднократно приводились), мы будем требовать непрерывности фазовых траекторий всюду на фазовой плоскости и, в частности, на границах

«областей линейности» (на прямых $x = -1$ и $x = +1$)¹⁾. Заметим также, что уравнение (8.21) инвариантно относительно замены переменных x, y на $-x, -y$, фазовые траектории в областях (I) и (III) симметричны друг другу относительно начала координат. Такая же симметрия имеет место и для траекторий в верхней и нижней половинах полосы (II).

Динамическая система (8.21) имеет единственное состояние равновесия — начало координат $(0, 0)$, которое является узлом или фокусом, устойчивым при $h_2 < 0$ (т. е. при $MS < RC$) и неустойчивым при $h_2 > 0$ (при $MS > RC$).

Ниже мы будем рассматривать главным образом последний случай — случай самовозбуждающегося генератора, т. е. будем считать, что $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$ ²⁾.

2. Точечное преобразование. Фазовая плоскость x, y рассматриваемой системы заполнена кусками траекторий соответствующих линейных уравнений (8.21); эти куски траекторий «склеиваются» своими концами на прямых $x = -1$ и $x = +1$, образуя целые фазовые траектории. Изучение структуры разбиения на траектории такой «склеенной» фазовой плоскости может быть проведено путем рассмотрения

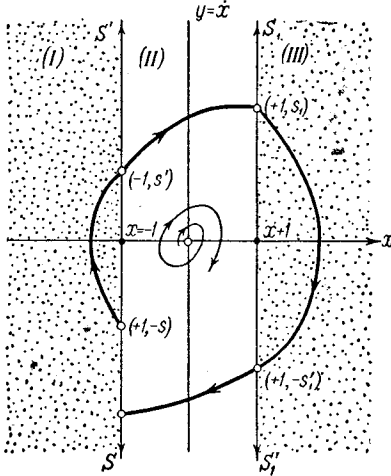


Рис. 365.

точечного преобразования полупрямой $x = -1, y < 0$ (полупрямой S) самой в себя, осуществляемого при движении изображающей точки по соответствующим кускам траекторий.

В самом деле, в рассматриваемом нами случае $h_1 > 0, h_2 > 0$ бесконечность, как нетрудно видеть, неустойчива. Также неустойчивым является и единственное состояние равновесия $(0, 0)$ (оно является неустойчивым фокусом при $0 < h_2 < 1$ и неустойчивым узлом при $h_2 > 1$). Поэтому на фазовой плоскости имеется по крайней мере один устойчивый предельный цикл (см. теорему V на стр. 409 и сноску на этой странице). Ясно, что предельные циклы должны охватывать начало координат — единственное состояние равновесия

¹⁾ На рис. 365 фазовые траектории изображены составленными из спиралей. Это, очевидно, имеет место только при $|h_1| < 1, |h_2| < 1$.

²⁾ Если $h_1 > 0$, а $h_2 < 0$, т. е. $MS < RC > 0$, то, как можно показать, все фазовые траектории будут асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаться к устойчивому состоянию равновесия $(0, 0)$; следовательно, ламповый генератор не будет совершать автоколебаний (ни при каких начальных условиях).

(см. § 8 гл. V) и, с другой стороны, не могут лежать целиком внутри полосы (II) ($|x| < 1$), так как внутри этой области уравнение (8.21) является линейным. Более того, поскольку рассматриваемая нами система не может иметь несимметричных предельных циклов¹⁾, предельные циклы будут симметричными (относительно начала координат) и, следовательно, будут проходить по всем трем областям и пересекать выбранную нами полупрямую «без контакта» — полупрямую S . Таким образом, мы найдем все предельные циклы (и тем самым будем знать структуру разбиения фазовой плоскости x, y на траектории²⁾), если мы построим точечное преобразование полупрямой S самой в себя, осуществляемое движением изображающей точки по траекториям, проходящим через все три «области линейности», и определим его неподвижные точки.

Это точечное преобразование (обозначим его через Π), очевидно, может быть представлено в виде произведения четырех преобразований Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 — точечных преобразований полупрямой S в S' , S' в S_1 , S_1 в S'_1 и, наконец, S'_1 в S , которые осуществляются траекториями соответственно в областях (I), (II), (III) и (IV) (см. рис. 365). Но преобразования

$$\Pi_3 \equiv \Pi_1 \quad \text{и} \quad \Pi_4 \equiv \Pi_2,$$

в силу указанной выше симметрии фазовых траекторий друг другу относительно начала координат. Следовательно, если ввести преобразование полупрямой S в полупрямую S_1

$$\Pi' = \Pi_1 \cdot \Pi_2, \quad \text{то} \quad \Pi = (\Pi')^2$$

(иначе говоря, «полное» преобразование Π получается двукратным применением преобразования Π' , так как преобразование $\Pi_3 \cdot \Pi_4$ — преобразование полупрямой S_1 в полупрямую S , осуществляемое траекториями в областях (III) и (IV), тождественно преобразованию Π').

Поэтому для целей изучения структуры разбиения фазовой плоскости на траектории мы можем ограничиться рассмотрением более простого преобразования Π' . Неподвижные точки этого преобразования, очевидно, являются точками пересечения симметричных предельных циклов (а иных, несимметричных предельных циклов система не имеет) с полупрямыми S и S' .

¹⁾ Допустим, что система (8.21) имеет несимметричный предельный цикл Γ_1 (он обязательно должен охватывать состояние равновесия). Тогда в силу симметрии фазовых траекторий друг другу (относительно начала координат) система (8.21) будет иметь другой предельный цикл Γ_2 , симметричный с Γ_1 и, следовательно, пересекающийся с ним. Последнее невозможно. Таким образом, рассматриваемая система может иметь только симметричные предельные циклы.

²⁾ В рассматриваемой задаче особыми траекториями, определяющими качественную структуру разбиения фазовой плоскости на траектории, являются только состояние равновесия $(0, 0)$ (узел или фокус) и предельные циклы.

Перейдем к вычислению функции соответствия для преобразования Π' . Преобразование Π_1 , очевидно, тождественно преобразованию Π_1 предыдущего параграфа (см. (8.8) и (8.12)). Таким образом, для случая $0 < h_1 < 1$ функция соответствия для преобразования Π_1 имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \tau_1}}, \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2 \sin \tau_1}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

где, как и раньше, τ_1 — параметр преобразования (приведенное время пробега изображающей точки в области (I) , причем $0 < \tau_1 < \pi$) и

$$\gamma_1 = \frac{h_1}{\omega_1} = \frac{h_1}{\sqrt{1 - h_1^2}}.$$

График функции соответствия (8.22) был приведен на рис. 353¹⁾.

Для фазовой траектории, выходящей при $t=0$ из точки s' полупрямой (s') ($x = -1$, $y = s' > 0$) и проходящей в области (II) , имеем согласно (8.21) (см. § 4 гл. I) для случая $0 < h_2 < 1$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= e^{h_2 t} \left[-\cos \omega_2 t + \frac{s' + h_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right], \\ \dot{x} = y &= e^{h_2 t} \left[s' \cos \omega_2 t + \frac{1 + s' h_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right], \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

где

$$\omega_2 = \sqrt{1 - h_2^2}.$$

Изображающая точка, находившаяся в начальный момент на полупрямой S' , попадает через некоторый интервал времени t_2 на полупрямую S_1 — этот переход и был назван преобразованием Π_2 . Параметрические выражения для этого преобразования мы получим, полагая в уравнениях (8.23), что при $t_2 = \frac{\tau_2}{\omega_2} > 0$ $x = +1$, $y = s_1 > 0$, и разрешая полученные соотношения относительно s' и s_1 :

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \tau_2}}, \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin \tau_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

¹⁾ Если $h_1 > 1$, то выражение для функции соответствия получается заменой в (8.22) тригонометрических функций на соответствующие гиперболические (см. (8.12)). График функции соответствия для этого случая изображен пунктирной линией на рис. 353.

где

$$\gamma_2 = \frac{h_2}{\omega_2} = \frac{h_2}{\sqrt{1-h_2^2}} \cdot 1).$$

Для исследования кривой (8.24) достаточно заметить следующее:

- 1) При $\tau_2 \rightarrow +0$ s' и $s_1 \rightarrow +\infty$.
- 2) $s' = 0$ при некотором $\tau_2 = \tau'_2$ ($0 < \tau'_2 < \pi$), определяемом уравнением $s'(\tau'_2) = 0$ или $1 + e^{\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 - \sin \tau_2) = 0$, причем, как нетрудно видеть, $s_1(\tau'_2) > 0$.
- 3) Дифференцируя (8.24), имеем:

$$\frac{ds_1}{d\tau_1} = - \frac{1 + e^{\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin^2 \tau_2}},$$

$$\frac{ds'}{d\tau_2} = - \frac{1 + e^{-\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2)}{\sqrt{1 + \gamma_2^2 \sin^2 \tau_2}}$$

и

$$\frac{ds_1}{ds'} = \frac{1 + e^{\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2)}{1 + e^{-\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2)}.$$

Поскольку $1 + e^{\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2) > 0$ и

$$1 + e^{-\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2) > 0$$

при $0 < \tau_2 < \tau'_2$, в этом интервале изменения τ_2 $\frac{ds'}{d\tau_2}$ и $\frac{ds_1}{d\tau_2} > 0$, а $\frac{ds_1}{ds'} > 0$, т. е. при изменении τ_2 от 0 до τ'_2 s' монотонно убывает от $+\infty$ до 0, а s_1 — от $+\infty$ до $s_1(\tau'_2) > 0$. Следовательно, интервалом наименьших положительных значений τ_2 , при прохождении которого мы переберем все точки полупрямой S' , будет $0 < \tau_2 < \tau'_2$.

4) Так как

$$\frac{d^2 s_1}{ds'^2} = \frac{2(1 + \gamma_2^2)^{3/2} \sin^3 \tau_2 (\operatorname{sh} \gamma_2 \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2)}{[1 + e^{-\gamma_2 \tau_2} (\cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2)]^3} > 0$$

при любых $0 < \tau_2 < \tau'_2$, то при увеличении s' от 0 до $+\infty$ (при

¹⁾ Если $h_2 > 1$, то функция соответствия для преобразования Π_2 получается из (8.24) заменой тригонометрических функций на соответствующие гиперболические и γ_2 на $\bar{\gamma}_2 = \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 - 1}}$, а $\sqrt{1 + \gamma_2^2}$ — на $\sqrt{\bar{\gamma}_2^2 - 1}$.

уменьшении τ_2 от τ_2' до 0) $\frac{ds_1}{ds}$ монотонно возрастает от 0 (при $s' = 0$) до $+1$ (при $s' \rightarrow +\infty$). Кривая (8.24) имеет асимптоту $s_1 = s' + \frac{4\gamma_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}}$, причем в силу $\frac{d^2s_1}{ds'^2} > 0$ эта кривая расположена над

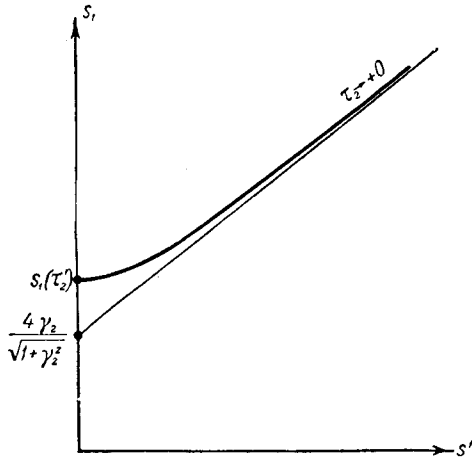


Рис. 366.

асимптотой. Указанных свойств достаточно для построения графика функции соответствия (8.24); он приведен на рис. 366¹⁾.

3. Неподвижная точка и предельный цикл. Построим кривые (8.22) и (8.24) на одной плоскости — на диаграмме Ламерея (рис. 367). Их точки пересечения, очевидно, и являются неподвижными точками преобразования $\Pi' = \Pi_1 \cdot \Pi_2$ преобразования полупрямой S в полупрямую S_1 при $0 < h_1 < 1$ и $0 < h_2 < 1$. Аналитически неподвижные точки определяются следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \tau_1} &= \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 + \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \tau_2}, \\ \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} - \cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \tau_1} &= \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} + \cos \tau_2 - \gamma_2 \sin \tau_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \tau_2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

которая получается из выражений (8.22) и (8.24), если приравнять в них s' и положить $s_1 = s$.

¹⁾ При $h_2 > 1$ график функции соответствия преобразования Π_2 имеет качественно тот же вид: при изменении s' от 0 до $+\infty$ s_1 монотонно возрастает от некоторого положительного значения до $+\infty$, а производная $\frac{ds_1}{ds'}$ — от 0 до $+1$.

Покажем, что существует *единственная* точка пересечения кривых (8.22) и (8.24). В самом деле, существование хотя бы одной точки пересечения следует из непрерывности этих кривых и из неравенств

$$s_1 - s > 0 \text{ при } s' = 0,$$

$$s_1 - s < 0 \text{ при достаточно больших } s'.$$

Далее, если бы существовало несколько точек пересечения, то для первой из них (с наименьшим s') было бы $\frac{ds_1}{ds'} < \frac{ds}{ds'}$, а для следующей $\frac{ds_1}{ds'} > \frac{ds}{ds'}$. Последнее невозможно, так как $0 < \frac{ds_1}{ds'} < 1$ и $\frac{ds}{ds'} > 1$ (при любых s'). Таким образом, существует *единственная* точка пересечения кривых (8.22) и (8.24) — *единственная неподвижная точка* преобразования Π при $0 < h_1 < 1$ и $0 < h_2 < 1$ и притом *устойчивая*, поскольку в ней $0 < \frac{ds_1}{ds} < 1$.

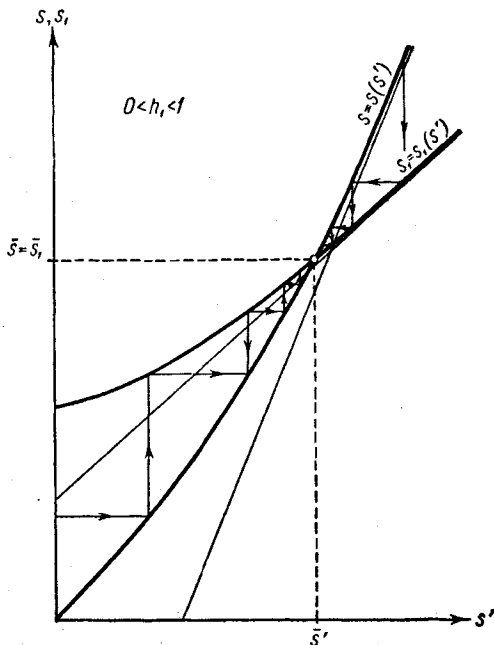


Рис. 367.

То же самое имеет место и при $0 < h_1 < 1$, но $h_2 > 1$, так как график функции $s_1 = s_1(s')$ при $h_2 > 1$ имеет тот же вид, что и при $0 < h_2 < 1$.

Диаграмма Ламерея для случая $h_1 > 1$ и любых $h_2 > 0$ изображена на рис. 368, т. е. и при этих значениях параметров h_1, h_2 имеется *единственная и устойчивая неподвижная точка* точечного преобразования Π' .

Следовательно, при любых значениях параметров системы $h_1 > 0, h_2 > 0$ на фазовой плоскости существует *единственный устойчивый предельный цикл*, к которому стремятся (при $t \rightarrow +\infty$) все фазовые траектории. Иначе говоря, генератор при сделанных нами в этом

¹⁾ Последнее неравенство вытекает из того обстоятельства, что угловые коэффициенты асимптот кривых (8.22) и (8.24) равны соответственно $e^{11\pi}$ и 1, т. е. асимптота кривой (8.22) идет круче асимптоты кривой (8.24) (относительно свойств функции соответствия преобразования Π_1 см. предыдущий параграф).

параграфе предположениях относительно характеристики и выбора рабочей точки лампы имеет *мягкий* режим возбуждения: единственный автоколебательный режим устанавливается при любых начальных условиях.

Период автоколебаний, очевидно, равен

$$\tau = 2 \left[\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2} \right]$$

(в единицах безразмерного времени), где $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ — значения параметров преобразований Π_1 и Π_2 , соответствующие неподвижной точке¹⁾.

Не проводя численного решения системы трансцендентных уравнений, определяющих неподвижную точку (системы уравнений (8.25) для $0 < h_1 < 1$, $0 < h_2 < 1$), что выходит за рамки книги, мы рассмотрим три предельных случая:

1) $h_1 \rightarrow 0$, тогда $\bar{\tau}_1 \rightarrow \pi$, $\bar{\tau}_2 \rightarrow 0$ (при этом непо-

движная точка, а вместе с ней и предельный цикл уходят в бесконечность).

2) $h_2 \rightarrow 0$, тогда $\bar{\tau}_1 \rightarrow 0$, $\bar{\tau}_2 \rightarrow \pi$; координата неподвижной точки $\bar{s} \rightarrow 0$, предельный цикл вырождается в окружность $x^2 + y^2 = 1$.

3) $h_1, h_2 \ll 1$ ($h_1, h_2 \rightarrow 0$). В этом случае (вычисления мы опускаем, поскольку они полностью аналогичны проведенным в предыдущем параграфе) $\bar{\tau}_1$ определяется уравнением

$$\bar{\tau}_1 - \sin \bar{\tau}_1 = \frac{\pi h_2}{h_1 + h_2} = \pi \frac{MS - RC}{MS} \tau.$$

$\bar{\tau}_2 = \pi - \bar{\tau}_1$, предельный цикл близок к окружности радиуса

$$A = \frac{1}{\cos \frac{\bar{\tau}_1}{2}},$$

а автоколебания близки к синусоидальным с периодом 2π (в единицах безразмерного времени).

¹⁾ При $0 < h_1 < 1$, $0 < h_2 < 1$ $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ определяются единственным образом системой уравнений (8.25), в остальных случаях — системой, получаемой из (8.25) соответствующей заменой тригонометрических функций на гиперболические.

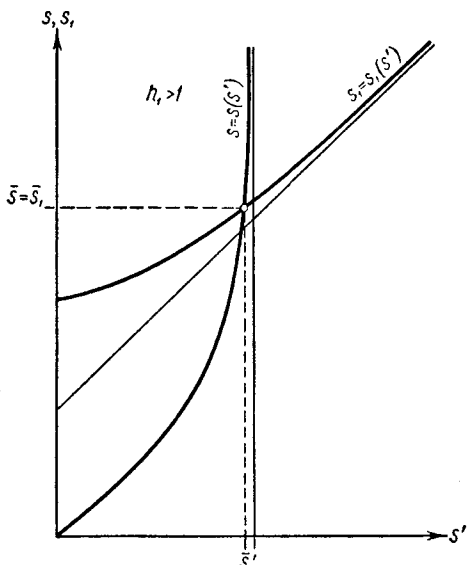


Рис. 368.

§ 4. Ламповый генератор со смещенной Г-характеристикой

В предыдущих двух параграфах мы рассмотрели примеры ламповых генераторов с *мягким* режимом возбуждения. Рассмотрим теперь *жесткий* режим возбуждения автоколебаний на примере лампового генератора с колебательным контуром в цепи анода и с так называемой смещенной Г-характеристикой лампы. Именно, мы будем аппроксимировать характеристику лампы (так же как и в § 4 гл. III) Г-характеристикой:

$$i_a = \begin{cases} I_s & \text{при } u_g > 0, \\ 0 & \text{при } u_g < 0, \end{cases}$$

но будем считать, что в состоянии равновесия схемы лампа заперта некоторым отрицательным смещением $-E_g$ (рис. 369).

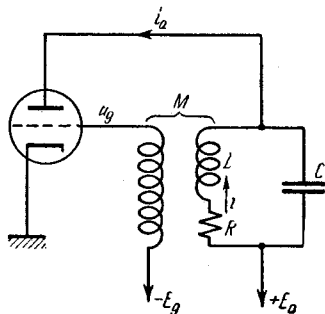


Рис. 369.

1. Уравнение колебаний. Фазовая плоскость. Уравнение колебаний рассматриваемой схемы лампового генератора (при обычных упрощающих предположениях; см., например, § 4 гл. III), как известно (см. (3.15)), записывается в виде:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = \begin{cases} I_s & \text{при } u_g > 0, \\ 0 & \text{при } u_g < 0, \end{cases}$$

где

$$u_g = -E_g - M \frac{di}{dt}.$$

Ниже мы будем полагать, что $M < 0$, ибо, как можно показать, только в этом случае генератор может совершать автоколебания. Заменой переменных

$$x = \frac{i}{I_s}, \quad t_{\text{нов}} = \omega_0 t^1,$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, мы приведем уравнение колебаний генератора к виду

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + x = \begin{cases} 1 & \text{при } \dot{x} > b, \\ 0 & \text{при } \dot{x} < b, \end{cases} \quad (8.26)$$

где $2h = \omega_0 RC$ — затухание колебательного контура и

$$b = \frac{E_g}{\omega_0 |M| I_s}. \quad (8.26a)$$

¹⁾ Ниже дифференцирование по новому, безразмерному времени будет обозначаться точкой сверху, а само безразмерное время — просто через t .

Фазовая плоскость x, y ($y = \dot{x}$) разбивается горизонтальной прямой $y = b$ на две области линейности: (I), где $y > b$, и (II), где $y < b$ (рис. 370). В каждой из этих областей имеет место свое линейное уравнение. Вдоль прямой $y = b$ происходит соединение фазовых траекторий в областях (I) и (II) (по закону непрерывности)¹). Выделим на этой прямой полупрямые $S: y = b, x = -s$, где $s > 2hb - 1$, и $S': y = b, x = s' > -2hb$.

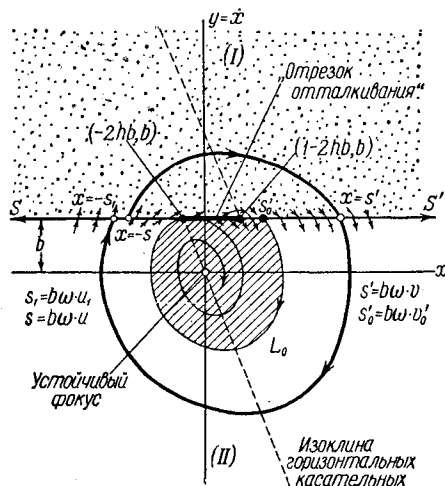


Рис. 370.

От первой из них (при $y = b + 0$) фазовые траектории отходят (при возрастающем t) в область (I), от второй (при $y = b - 0$) — в область (II). От отрезка ($y = b, -2hb < x < 1 - 2hb$), принадлежащего обоим полупрямым, траектории отходят как в область (I) (при $y = b + 0$), так и в область (II) (при $y = b - 0$). Этот отрезок мы будем называть ниже «отрезком отталкивания»²).

Рассматриваемая динамическая система (8.26) имеет единственное (и притом устойчивое) состояние равновесия — начало координат $(0, 0)$, которое является фокусом при $h < 1$ и узлом при $h > 1$. Нетрудно

видеть, что в последнем случае система не может иметь предельных циклов³), и следовательно, все траектории будут стремиться (при $t \rightarrow +\infty$) к устойчивому узлу, т. е. генератор не будет совершать никаких автоколебаний. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь случая $0 < h < 1$.

¹) Фазовые траектории должны быть непрерывны всюду и, в частности, на прямой $y = b$. Обоснование этого было изложено в § 4 гл. III.

²) Для пояснения укажем, что изоклиной горизонтальных касательных ($\frac{dy}{dx} = 0$) является прямая $y = -2hx$ в области (II) и прямая $y = 1 - 2hx$ в области (I). Слева от изоклины $\dot{y} > 0$, справа $\dot{y} < 0$.

Заметим также, что в точках «отрезка отталкивания», равно как и на всей прямой $y = b$, движение изображающей точки не определяется уравнением (8.26) и должно быть соответствующим образом доопределено. В точках прямой $y = b$ вне этого отрезка доопределение тривиально: изображающая точка покидает прямую $y = b$ по траектории, уходящей в область (I) при $x < -2hb$ или в область (II) при $x > 1 - 2hb$. Доопределение движения изображающей точки в точках «отрезка отталкивания» менее очевидно и будет сделано позже.

³) При $h > 1$ в области (II) имеются две интегральные прямые, идущие из бесконечности и проходящие через узел. Предельный цикл, если бы он существовал, должен пересекаться с этими прямыми, что невозможно.

2. Точечное преобразование. Предельные циклы, если они существуют, должны охватывать начало координат (единственное состояние равновесия) и, с другой стороны, не могут лежать целиком в области (I) (или в области (II)). Следовательно, они обязательно будут пересекать прямую $y=b$ и, в частности, выделенную нами полупрямую S . Поэтому для отыскания предельных циклов уравнения (8.26) нам достаточно рассмотреть точечное преобразование полупрямой S самой в себя, осуществляемое траекториями этого уравнения (с функцией последования $s_1=f(s)$) (см. рис. 370). Обозначим это преобразование через Π . Назовем также преобразованием Π_1 переход изображающей точки из точки $(-s, b)$ полупрямой S по соответствующей траектории в области (I) в точку (s', b) полупрямой S' и преобразованием Π_2 — переход из точки (s', b) по траектории в области (II) обратно на полупрямую S (в точку $(-s_1, b)$; рис. 370). Тогда, очевидно, «полное» преобразование

$$\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2.$$

Нетрудно получить параметрические выражения для функций соответствия преобразований Π_1 и Π_2 . Рассмотрим с этой целью траекторию, выходящую при $t=0$ в область (I) из некоторой точки $(-s, b)$ полупрямой S . Ее уравнением согласно (8.26) будет

$$\begin{aligned} x &= 1 + e^{-ht} \left[-(1+s) \cos \omega t + \frac{b-h(1+s)}{\omega} \sin \omega t \right], \\ y &= e^{-ht} \left[b \cos \omega t + \frac{1+s-hb}{\omega} \sin \omega t \right], \end{aligned}$$

где

$$\omega = \sqrt{1-h^2}.$$

Изображающая точка, двигаясь по этой траектории, обязательно (через некоторый интервал времени t_1) придет на полупрямую (S') в точку (s', b) ¹⁾. Для последней, очевидно, имеем:

$$\begin{aligned} s' &= 1 + e^{-ht_1} \left[-(1+s) \cos \omega t_1 + \frac{b-h(1+s)}{\omega} \sin \omega t_1 \right], \\ b &= e^{-ht_1} \left[b \cos \omega t_1 + \frac{1+s-hb}{\omega} \sin \omega t_1 \right]. \end{aligned}$$

Разрешая эти соотношения относительно s и s' , получим функцию соответствия для преобразования Π_1 :

$$\begin{aligned} s &= b\omega \frac{e^{\gamma\tau_1} - \cos \tau_1 + \gamma \sin \tau_1}{\sin \tau_1} - 1, \\ s' &= b\omega \frac{e^{-\gamma\tau_1} - \cos \tau_1 - \gamma \sin \tau_1}{\sin \tau_1} + 1, \end{aligned}$$

¹⁾ Очевидно, $s' > 1 - 2hb$, так как фазовые траектории в области (I) отходят от прямой $y=b$ при $x < 1 - 2hb$.

где

$$\gamma = \frac{h}{\omega} = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

и $\tau_1 = \omega t_1$ — приведенное время пробега изображающей точки в области (I). Если ввести

$$u = \frac{s}{b\omega} \quad \text{и} \quad v = \frac{s'}{b\omega},$$

то функция соответствия для преобразования Π_1 запишется в еще более простой форме:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{e^{\gamma\tau_1} - \cos \tau_1 + \gamma \sin \tau_1}{\sin \tau_1} - a, \\ v &= \frac{e^{-\gamma\tau_1} - \cos \tau_1 - \gamma \sin \tau_1}{\sin \tau_1} + a, \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

где

$$a = \frac{1}{b\omega} = \frac{\omega_0 |M| I_s}{E_g \sqrt{1-h^2}}.$$

Аналогичным путем найдем функцию соответствия для преобразования Π_2 точек $(b\omega v, b)$ полупрямой (s') в точки $(-b\omega u_1, b)$ полупрямой (s) :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{e^{-\gamma\tau_2} - \cos \tau_2 - \gamma \sin \tau_2}{\sin \tau_2}, \\ v &= -\frac{e^{\gamma\tau_2} - \cos \tau_2 + \gamma \sin \tau_2}{\sin \tau_2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

где $\tau_2 = \omega t_2$ — приведенное время пробега изображающей точки по траектории в области (II).

Исследование функции соответствия (8.27) полностью аналогично исследованию функции (8.8) (см. § 2). Нетрудно видеть, что параметр преобразования Π_1 меняется в интервале $0 < \tau_1 < \pi$, причем при изменении τ_1 от 0 до π u монотонно возрастает от $u_0 = 2\gamma - a$ до $+\infty$, а v — от $v_0 = a - 2\gamma$ также до $+\infty$ (начальные точки кривых (8.27) при различных значениях параметра a лежат, очевидно, на прямой $u + v = 0$). Далее,

$$\frac{du}{dv} = \frac{1 - e^{\gamma\tau_1} (\cos \tau_1 - \gamma \sin \tau_1)}{1 - e^{-\gamma\tau_1} (\cos \tau_1 + \gamma \sin \tau_1)} > 0$$

и

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{2(1+\gamma^2) \sin^3 \tau_1 (\operatorname{sh} \gamma\tau_1 - \gamma \sin \tau_1)}{[1 - e^{-\gamma\tau_1} (\cos \tau_1 + \gamma \sin \tau_1)]^3} > 0$$

при $0 < \tau_1 < \pi$, т. е. при изменении τ_1 от 0 до π $\frac{du}{dv}$ монотонно возрастает от $\left(\frac{du}{dv}\right)_{\tau_1=0} = 1$ до $\left(\frac{du}{dv}\right)_{\tau_1=\pi} = e^{\tau_1\pi} > 1$. Наконец, кривая (8.27) имеет асимптоту (при $\tau_1 \rightarrow \pi$) $u = e^{\tau_1\pi}v - a(1 + e^{\tau_1\pi})$. На рис. 371 изображено семейство кривых (8.27) для некоторого фиксированного значения γ и при различных значениях параметра $a \geq 0$ (кривая (8.27) для $a > 0$ получается из кривой для $a = 0$ смещением ее вправо и вниз на a).

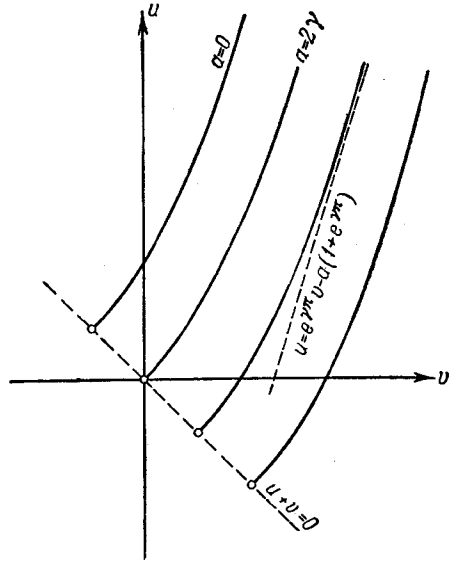


Рис. 371.

Переходя к исследованию функции соответствия (8.28), следует сразу же отметить, что изображающая точка, двигаясь по траектории (по спирали) в области (II), что соответствует преобразованию Π_2 полупрямой S' в полупрямую S , совершает более половины, но менее целого оборота вокруг устойчивого фокуса (0, 0) (радиус-вектор r изображающей точки поворачивается на угол, больший π , но меньший 2π , причем этот угол тем меньше, чем больше размеры соответствующей траектории, чем больше s' и s_1). Поэтому (см. § 4 гл. I) параметр τ_2 преобразования Π_3 заведомо будет заключен в интервале $\pi < \tau_2 < 2\pi$, причем убывающим значениям τ_2 соответствуют монотонно возрастающие значения v и u_1 (при $\tau_2 \rightarrow \pi + 0$ $v, u_1 \rightarrow +\infty$). Однако не все точки полупрямой S' преобразуются траекториями в области (II) в точки полупрямой S . Если мы проведем в области (II) фазовую траекторию L_0 , проходящую через точку $(-2hb, b)$, то она выделит такую область (на рис. 370 эта область заштрихована), что траектории, попавшие в нее, уже не могут прийти на прямую $u = b$, а будут накручиваться на устойчивый фокус. Обозначим через s'_0 абсциссу точки пересечения траектории L_0 с полупрямой S' (рис. 370); тогда, очевидно, точки полупрямой S' , для которых $-2hb < x < s'_0$, уже не преобразуются траекториями в области (II) в точки полупрямой S . Приведенное время пробега τ_2^0 для точки $s' = s'_0$ (или $v = v^0 = \frac{s'_0}{b\omega}$) определяется уравнением

$$-s_1(\tau_2^0) = -2hb \quad \text{или} \quad u_1(\tau_2^0) = 2\gamma,$$

или же, наконец,

$$1 - e^{\gamma \tau_2^0} (\cos \tau_2^0 - \gamma \sin \tau_2^0) = 0.$$

Ясно, что $\pi < \tau_2^0 < 2\pi$ (графическое решение этого уравнения приведено на рис. 372).

Таким образом, изменяя параметр преобразования τ_2 от τ_2^0 до π , мы переберем все множество точек полупрямой S' , связанных пре-

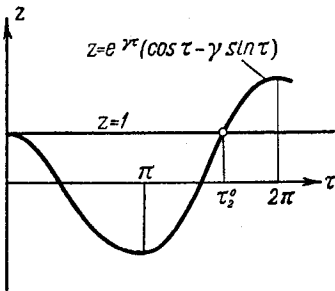


Рис. 372.

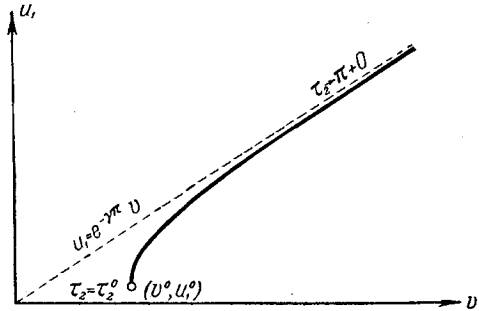


Рис. 373.

образованием Π_2 с точками полупрямой S . При этом при уменьшении τ_2 от τ_2^0 до π u_1 монотонно возрастает от $u_1^0 = 2\gamma$ до $+\infty$, v — от $v^0 = v(\tau_2^0) = -2 \frac{\text{sh } \gamma \tau_2^0}{\sin \tau_2^0} > 0$ также до $+\infty$,

$$\frac{du_1}{dv} = \frac{1 - e^{-\gamma \tau_2} (\cos \tau_2 + \gamma \sin \tau_2)}{1 - e^{\gamma \tau_2} (\cos \tau_2 - \gamma \sin \tau_2)} > 0$$

и монотонно убывает от $+\infty$ (при $\tau_2 = \tau_2^0$) до $e^{-\gamma \pi}$ (при $\tau_2 \rightarrow \pi$), поскольку при $\pi < \tau_2 < \tau_2^0$

$$\frac{d^2 u_1}{dv^2} = \frac{2(1 + \gamma^2) \sin^3 \tau_2 (\text{sh } \gamma \tau_2 - \gamma \sin \tau_2)}{[1 - e^{\gamma \tau_2} (\cos \tau_2 - \gamma \sin \tau_2)]^3} < 0.$$

При $\tau_2 \rightarrow \pi$ кривая (8.28) имеет асимптоту $u_1 = e^{-\gamma v}$. График функции соответствия (8.28) преобразования Π_2 приведен на рис. 373.

3. Неподвижные точки и предельные циклы. Для отыскания неподвижных точек преобразования $\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2$ (а следовательно, и предельных циклов), а также для исследования их устойчивости построим на одной плоскости графики функций соответствия (8.27) и (8.28) (по одной оси будем откладывать v и по другой — u и u_1) и рассмотрим полученные диаграммы Ламерея (рис. 374) при некотором фиксированном γ и различных значениях параметра $a \geq 0$.

При $a \leq 2\gamma$ кривая (8.27) заведомо не пересекается с кривой (8.28)¹⁾. Далее, кривая (8.28) от параметра a не зависит, в то время как кривая (8.27) при увеличении a смещается вправо и притом сколь угодно далеко. Поэтому при возрастании параметра a будут последовательно осуществляться случаи (а), (б), (в), (г) и (д), изображенные на рис. 374.

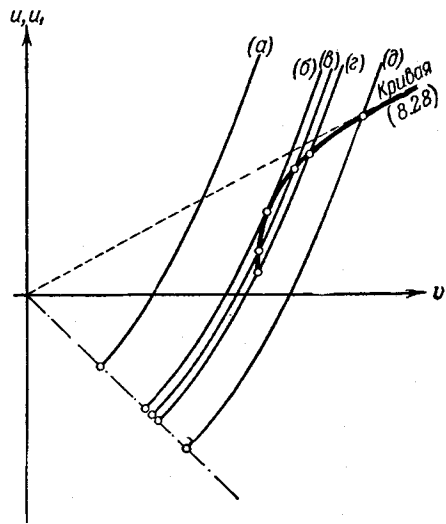


Рис. 374.

Точки пересечения кривых (8.27) и (8.28) (обозначим их координаты через \bar{u} , \bar{v} и значения τ_1 , τ_2 для них через $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$), очевидно, определяют неподвижные точки преобразования Π и, тем самым, предельные циклы рассматриваемой нами динамической системы на ее фазовой плоскости²⁾. Аналитически неподвижные точки

определяются следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{\gamma\tau_1} - \cos \tau_1}{\sin \tau_1} - a &= \frac{\cos \tau_2 - e^{-\gamma\tau_2}}{\sin \tau_2}, \\ \frac{e^{-\gamma\tau_1} - \cos \tau_1}{\sin \tau_1} + a &= \frac{\cos \tau_2 - e^{\gamma\tau_2}}{\sin \tau_2} \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

$$(0 < \bar{\tau}_1 < \pi, \pi < \bar{\tau}_2 < \tau_2^0 < 2\pi),$$

которая получается из параметрических выражений функций соответствия (8.27) и (8.28), если приравнять в них v ($v = \bar{v}$) и положить $u_1 = u$.

¹⁾ При $a \leq 2\gamma$ кривая (8.27) расположена над биссектрисой $u = u_1$, в то время как кривая (8.28) всегда лежит ниже своей асимптоты $u_1 = e^{-\gamma}u$ и, следовательно, под биссектрисой $u_1 = u$.

²⁾ Нетрудно видеть, что кривые (8.27) и (8.28) не могут иметь более двух точек пересечения. В самом деле, если бы число точек пересечения этих кривых было более двух, то для второй и третьей точек пересечения (считая в направлении возрастания \bar{v}) имели бы место неравенства:

$$\left(\frac{du_1}{d\bar{v}}\right)_{\bar{v}=\bar{v}_2} < \left(\frac{du_1}{d\bar{v}}\right)_{\bar{v}=\bar{v}_1} \quad \text{и} \quad \left(\frac{du_1}{d\bar{v}}\right)_{\bar{v}=\bar{v}_1} > \left(\frac{du_1}{d\bar{v}}\right)_{\bar{v}=\bar{v}_2},$$

что невозможно, поскольку при увеличении \bar{v} $\frac{du_1}{d\bar{v}}$ убывает, а $\frac{du_1}{d\bar{v}}$ возрастает.

Если имеются две неподвижные точки (см. случай (в) на рис. 374), то для первой из них (с меньшими $\bar{u} = \bar{u}^{(1)}$, $\bar{v} = \bar{v}_1$, \bar{c}_1 и большим \bar{c}_2)

$$\left(\frac{du_1}{du}\right)_{v=\bar{v}_1} = \left(\frac{du_1}{dv}\right)_{v=\bar{v}_1} : \left(\frac{dv}{du}\right)_{v=\bar{v}_1} > 1$$

и для второй ($\bar{u} = \bar{u}^{(2)} > \bar{u}^{(1)}$, $\bar{v} = \bar{v}_2 > \bar{v}_1$)

$$0 < \left(\frac{du_1}{dv}\right)_{v=\bar{v}_2} = \left(\frac{du_1}{dv}\right)_{v=\bar{v}_2} : \left(\frac{dv}{du}\right)_{v=\bar{v}_2} < 1,$$

т. е. первая из них является неустойчивой, а вторая — устойчивой. Если же имеется только одна неподвижная точка преобразования II (случай (д) на рис. 374), то она всегда устойчива, так как для нее выполнено условие устойчивости:

$$0 < \left(\frac{du_1}{du}\right)_{v=\bar{v}} < 1.$$

Различные возможные типы разбиения на траектории фазовой плоскости лампового генератора со смещенной Γ -характеристикой, соответствующие случаям (а), (б), (в), (г) и (д) диаграммы Ламерея (рис. 374), изображены на рис. 375—379. На рис. 380 изображена

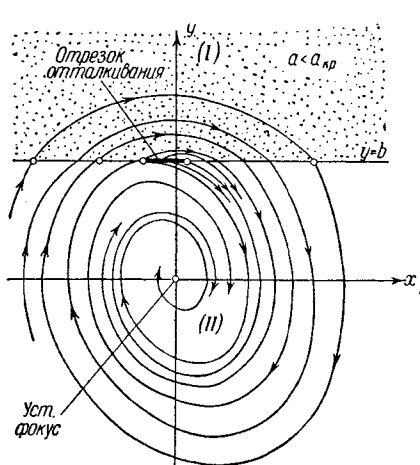


Рис. 375.

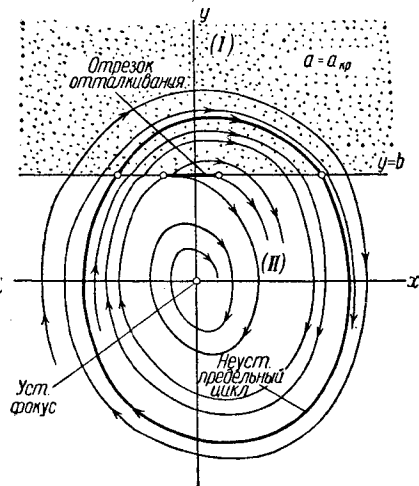


Рис. 376.

плоскость параметров генератора γ и a , разбитая на области существования указанных выше режимов генератора. Если в генераторе имеет место небольшая обратная связь — такая, что точка (γ, a) лежит в незаштрихованной области плоскости параметров (рис. 380), соответствующей случаю (а) диаграммы Ламерея, то фазовые траектории идут к устойчивому состоянию равновесия $(0,0)$, которое, следовательно,

устанавливается при любых начальных условиях (рис. 375). При некоторой критической связи (при $a = a_{кр} = f(\gamma)$) на фазовой плоскости

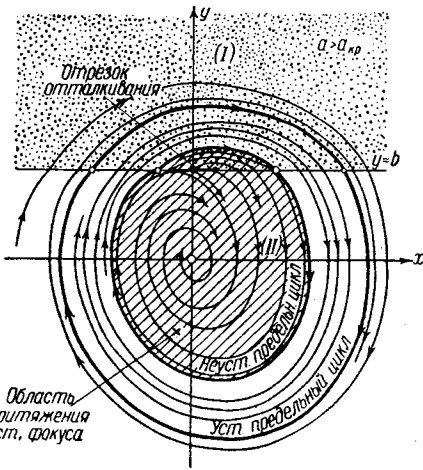


Рис. 377.

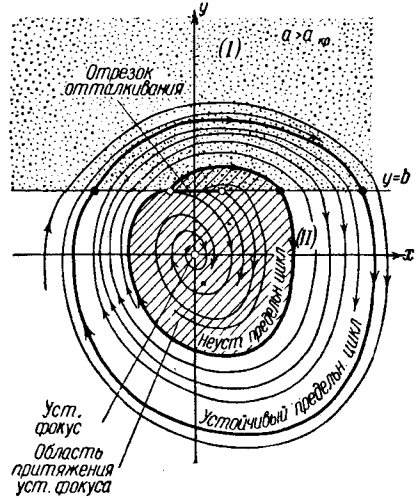


Рис. 378.

появляется полуустойчивый предельный цикл (рис. 376), который соответствует точке касания кривых на диаграмме Ламерея в случае (б) рис. 374. Этот предельный цикл при сколь угодно малом увеличении обратной связи (при сколь угодно малом увеличении параметра a) распадается на два предельных цикла, один из которых устойчив, а другой неустойчив (рис. 377). При дальнейшем увеличении параметра a размеры неустойчивого предельного цикла уменьшаются, и при некотором втором бифуркационном значении этого параметра ($a = a_{кр}^{(2)} = f_1(\gamma)$), соответствующем кривой (2) на рис. 380 и случаю (2) диаграммы Ламерея, неустойчивый предельный цикл попадает на отрезок отталкивания (рис. 378).

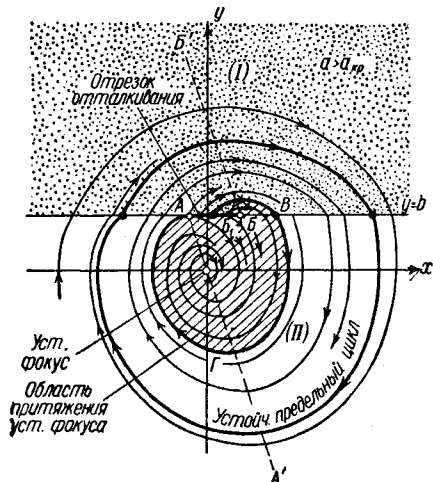


Рис. 379.

Наконец, на рис. 379 приведено разбиение фазовой плоскости на траектории для $a > f_1(\gamma)$, когда точка (γ, a) лежит

в области (д) рис. 380 и точечное преобразование имеет единственную неподвижную точку (случай (д) диаграммы Ламерея).

Таким образом, при $a < a_{кр} = f(\gamma)$ генератор не может совершать никаких автоколебаний, а при $a > a_{кр} = f(\gamma)$, соответствующих заштрихованной области на рис. 380, в генераторе имеет место жесткий режим возбуждения автоколебаний: в генераторе устанавливается периодический (автоколебательный) режим только при тех начальных условиях, которые соответствуют изображающим точкам вне неустойчивого предельного цикла (рис. 377) или вне области, заштрихованной на рис. 379¹).

Период устойчивых автоколебаний, очевидно, равен

$$\tau = \frac{1}{\omega} (\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2),$$

где $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ определяются решением системы (8.29)².

Пограничная кривая $a_{кр} = f(\gamma)$ на плоскости параметров генератора, отделяющая область невозбуждаемого генератора (область (а)) от области жесткого режима возбуждения (остальная часть первого квадранта), очевидно, определяется уравнениями (8.29) и условием, что при $a = a_{кр}$ кривые (8.27) и (8.28) касаются друг друга, т. е.

$$\left(\frac{du_1}{dv}\right)_{v=\bar{v}} = \left(\frac{dv}{du}\right)_{v=\bar{v}}$$

или

$$\frac{1 - e^{-\bar{\tau}_1} (\cos \bar{\tau}_1 - \gamma \sin \bar{\tau}_1)}{1 - e^{-\bar{\tau}_1} (\cos \bar{\tau}_1 + \gamma \sin \bar{\tau}_1)} = \frac{1 - e^{-\bar{\tau}_2} (\cos \bar{\tau}_2 + \gamma \sin \bar{\tau}_2)}{1 - e^{-\bar{\tau}_2} (\cos \bar{\tau}_2 - \gamma \sin \bar{\tau}_2)}$$

¹) Замкнутую кривую AB_1BGA на рис. 379, являющуюся границей области притяжения устойчивого фокуса (0, 0), также можно считать неустойчивым предельным циклом, если сделать следующее доопределение закона движения изображающей точки на «отрезке отталкивания» AB : изображающая точка двигается вдоль этого отрезка вправо во всех точках, кроме B_1 , где она переходит на траекторию B_1BGA . В пользу такого доопределения говорит следующее обстоятельство: на фазовой плоскости генератора с характеристикой лампы, аппроксимируемой гладкой непрерывной кривой, сколь угодно близкой к Γ -характеристике, изоклиной горизонтальных касательных будет непрерывная кривая, близкая к ломаной $A'ABB'$, а неустойчивый предельный цикл будет близок к замкнутой кривой AB_1BGA .

²) Если система имеет два решения для $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$, удовлетворяющих неравенствам $0 < \bar{\tau}_1 < \pi$, $\pi < \bar{\tau}_2 < \bar{\tau}_2^0 < 2\pi$ (случай (в) рис. 374), то, очевидно, для подсчета периода периодических колебаний генератора нужно брать большее из двух значений $\bar{\tau}_1$ (и соответственно меньшее для $\bar{\tau}_2$).

Можно показать, что эта пограничная кривая (кривая (σ) на рис. 380) проходит через начало координат плоскости параметров a , γ и что $a_{кр}$ монотонно возрастает при увеличении γ .

4. Случай малых a и γ . Найдем приближенные выражения для периода и амплитуды автоколебаний в случае достаточно малых a и γ ($a, \gamma \ll 1$). Запишем уравнения (8.29) в виде:

$$\frac{\operatorname{ch} \gamma \tau_1 - \cos \tau_1}{\sin \tau_1} = - \frac{\operatorname{ch} \gamma \tau_2 - \cos \tau_2}{\sin \tau_2}, \quad \frac{\operatorname{sh} \gamma \tau_1}{\sin \tau_1} - a = \frac{\operatorname{sh} \gamma \tau_2}{\sin \tau_2}.$$

Тогда для случая $\gamma, a \ll 1$ имеем:

$$\frac{1 - \cos \tau_1}{\sin \tau_1} = - \frac{1 - \cos \tau_2}{\sin \tau_2}, \quad \frac{\gamma \tau_1}{\sin \tau_1} - a = \frac{\gamma \tau_2}{\sin \tau_2},$$

откуда $\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 = 2\pi$ (следовательно, период автоколебаний равен приближенно 2π), а $\bar{\tau}_1$ определяется уравнением

$$\sin \bar{\tau}_1 = \frac{2\pi\gamma}{a},$$

которое имеет действительные решения (и притом два: $0 < (\bar{\tau}_1)_1 < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < (\bar{\tau}_1)_2 < \pi$) только при $\frac{2\pi\gamma}{a} < 1$; отсюда

$$a_{кр} = 2\pi\gamma.$$

Радиусы предельных циклов (они близки к окружностям), как нетрудно подсчитать, равны:

$$R = \frac{b}{\cos \frac{\bar{\tau}_1}{2}} = \frac{\sqrt{2} b}{\sqrt{1 + \cos \bar{\tau}_1}} = \frac{\sqrt{2} b}{\sqrt{1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi\gamma}{a}\right)^2}}},$$

причем устойчивому предельному циклу соответствует большее из двух решений для $\bar{\tau}_1$ ($\frac{\pi}{2} < \bar{\tau}_1 < \pi$) и знак минус в выражении для радиуса предельного цикла.

§ 5. Ламповый генератор с двухзвенной RC -цепочкой

Две схемы генератора с двухзвенной RC -цепочкой (с двойным триодом с катодным сопротивлением и с пентодом в транзитронном режиме) изображены на рис. 381¹⁾. Исследование автоколебаний в них методом изоклин было проведено в § 12 гл. V. Эти же схемы, если считать емкости C_a и C_g малыми, паразитными емкостями, являются схемами мультивибратора с одной RC -цепью (см. § 7 гл. IV).

¹⁾ Одна из емкостей C_a или C_g может отсутствовать.

Для работы обеих схем в качестве генераторов существенно, что характеристика, выражающая зависимость силы тока i от напряже-

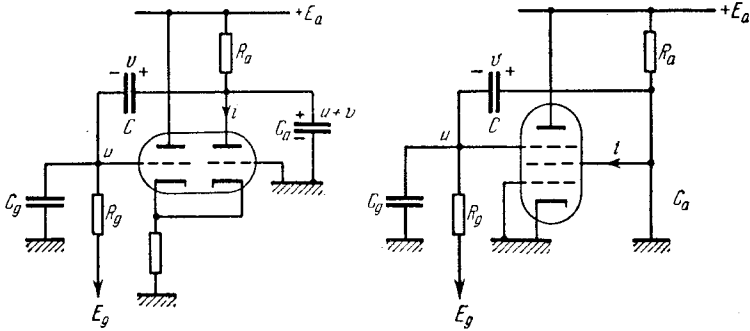


Рис. 381.

ния u на управляющем электроде лампы (или ламповой группы), имеет *падающий* участок. Ниже, как и раньше, мы будем пренебрегать анодной реакцией, т. е. будем считать, что i зависит только от u

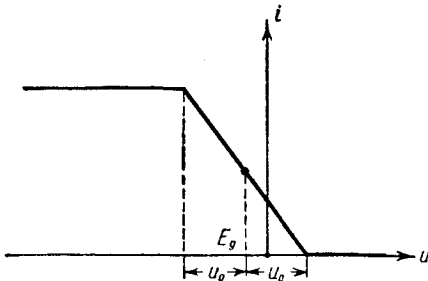


Рис. 382.

($i = i(u)$), но в отличие от § 12 гл. V, чтобы иметь возможность применить метод точечных преобразований для исследования генератора, мы будем аппроксимировать эту зависимость кусочно-линейной функцией, график которой приведен на рис. 382. При этом ради дальнейшего упрощения задачи мы будем полагать сеточное смещение E_g выбранным таким образом, чтобы ра-

бочая точка лампы, соответствующая состоянию равновесия генератора, лежала посередине падающего участка характеристики [59].

Уравнение колебаний рассматриваемого генератора с двухзвенной RC-цепочкой, как мы видели в § 12 гл. V, можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{x} &= -x - y - K\varphi(x), \\ \dot{y} &= x, \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

где x, y — переменные, связанные с напряжениями u и v соотношениями:

$$u = E_g + u_0 x,$$

$$v = E_a - E_g - R_a i(E_g) + u_0 \frac{C_g}{C} x + u_0 \left[1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right] y$$

(за u_0 взята половина «длины» падающего участка характеристики; см. рис. 382);

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S} \{ i(E_g + u_0 x) - i(E_g) \} = \begin{cases} +1 & \text{при } x < -1, \\ -x & \text{при } |x| \leq 1, \\ -1 & \text{при } x > +1 \end{cases}$$

— приведенная (безразмерная) характеристика лампы (или ламповой группы)¹⁾; точкой сверху обозначено дифференцирование по безразмерному времени

$$t = \frac{t_{\text{обыч}}}{R_a(C + C_a) + R_g(C + C_g)}$$

и

$$K = \frac{SR_a}{1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C}\right)}, \quad \mu = \frac{R_a}{R_g} \frac{\frac{C_a}{C} + \frac{C_g}{C} + \frac{C_a}{C} \frac{C_g}{C}}{\left[1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C}\right)\right]^2}$$

— безразмерные параметры ($K > 0$, а $0 < \mu < \frac{1}{4}$)²⁾.

Заметим, что система уравнений (8.30) эквивалентна уравнению

$$\mu \dot{x} + [1 + K\varphi'(x)] \dot{x} + x = 0,$$

т. е. ламповый генератор с двухзвенной RC -цепочкой при кусочно-линейной аппроксимации характеристики ламповой группы эквивалентен динамической системе, уже рассмотренной в § 3 настоящей главы. Однако, имея в виду подробное рассмотрение колебаний генератора, близких к разрывным (они имеют место при $C_a, C_g \ll C$, т. е. при $0 < \mu \ll 1$), мы проведем еще раз краткое исследование этой динамической системы, отправляясь теперь от уравнений (8.30), форма которых более удобна для указанной цели, и ограничиваясь случаем самовозбуждающегося генератора, т. е. полагая, что $K > 1$.

1. Фазовая плоскость. Точечное преобразование. Так же как и в § 3 настоящей главы, фазовая плоскость x, y рассматриваемой динамической системы (8.30) разбивается прямыми $x = +1$ и $x = -1$ на три области: (I), (II) и (III), в каждой из которых уравнения (8.30) линейны (рис. 383); при этом траектории являются непрерывными кривыми при переходе через эти границы областей линейности, равно как и на всей фазовой плоскости. Кроме того, разбиение плоскости x, y

¹⁾ Под S мы понимаем абсолютное значение крутизны падающего участка характеристики $i = i(u)$.

²⁾ Последнее неравенство связано с тем, что в двухзвенных RC -цепочках (в генераторе с выключенной лампой, т. е. с $K = 0$) все процессы являются аperiodически затухающими.

на траектории симметрично относительно начала координат — состояния равновесия (0,0) в силу соответствующей симметрии уравнений (8.30).

Качественное исследование системы (8.30) полностью аналогично исследованию системы (5.89), проведенному в § 12 гл. V. Именно,

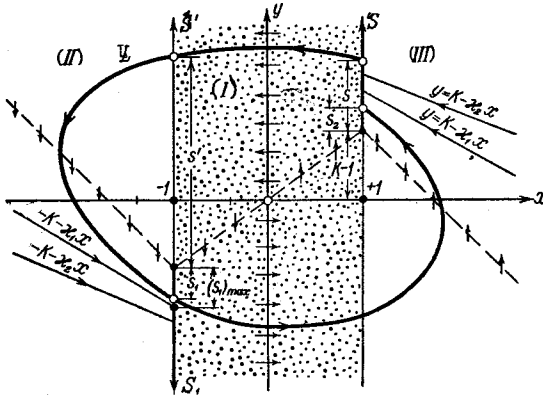


Рис. 383.

ось ординат ($x=0$) является изоклиной горизонтальных касательных (там $\dot{y}=0$), а ломаная

$$y = -x - K\varphi(x)$$

— изоклиной вертикальных касательных (на ней $\dot{x}=0$). В областях (II) и (III) имеются по две прямолинейных траектории $y = \mp K - x_{1,2}x$, где $x_{1,2}$ — величины, обратные (и по знаку, и по модулю) корням уравнения

$$\mu\lambda^2 + \lambda + 1 = 0, \tag{8.31}$$

являющегося характеристическим уравнением системы (8.30) в областях (II) и (III); поэтому x_1 и x_2 положительны.

Единственное состояние равновесия лежит в области (I) — в начале координат (0,0). Поскольку в области (I) характеристическое уравнение системы (8.30) записывается в виде:

$$\mu\lambda^2 - (K-1)\lambda + 1 = 0, \tag{8.32}$$

это состояние равновесия при $K > 1$ неустойчиво, являясь при $4\mu > (K-1)^2$ фокусом и при $4\mu < (K-1)^2$ — узлом¹⁾.

¹⁾ При $K < 1$ состояние равновесия (0, 0) устойчиво и все траектории системы асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются к нему.

Далее, так как бесконечность всегда неустойчива, то на фазовой плоскости при $K > 1$ имеется по крайней мере один (и притом устойчивый) предельный цикл, симметричный относительно начала координат. На основании результатов § 3 настоящей главы можно утверждать, что этот предельный цикл — единственный.

Для отыскания этого предельного цикла сведем задачу к точечному преобразованию. Так как предельный цикл является симметричным¹⁾, должен охватывать состояние равновесия $(0, 0)$ и в то же время не может лежать целиком в области (I) , то он должен проходить во всех трех областях линейности, пересекая, в частности, прямые $x = +1$ и $x = -1$. Исходя из этого, возьмем в качестве «отрезка без контакта» полупрямую S : $x = +1$, $y = K - 1 + s$ (где $s > 0$), через точки которой происходит переход фазовых траекторий из области (III) в область (I) , и найдем точечное преобразование Π этой полупрямой самой в себя, осуществляемое траекториями системы (8.30). Так же как и в § 3, преобразование

$$\Pi = (\Pi')^2,$$

где Π' — точечное преобразование полупрямой S в симметричную ей полупрямую S_1 ($x = -1$, $y = -(K - 1) - s_1$; $s_1 > 0$), осуществляемое траекториями системы (8.30), выходящими из точек полупрямой S . В свою очередь преобразование Π' представляется в виде произведения двух преобразований Π_1 и Π_2 — преобразований полупрямой S в полупрямую S' : $x = -1$, $y = -(K - 1) + s'$ ($s' > 0$), и полупрямой S' в полупрямую S_1 , осуществляемых траекториями соответственно в областях (I) и (II) , т. е.

$$\Pi' = \Pi_1 \cdot \Pi_2.$$

Нетрудно получить (тем же способом, что и в предыдущих параграфах) параметрические выражения для функций соответствия этих преобразований.

Для вычисления функции соответствия первого преобразования следует обратиться к дифференциальным уравнениям (8.30) в области (I) , которые удобно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mu \ddot{y} - (K - 1)\dot{y} + y &= 0, \\ x &= \dot{y}. \end{aligned} \right\} \quad (8.30a)$$

Характеристическое уравнение этой системы (уравнение (8.32)) имеет при $4\mu > (K - 1)^2$ комплексные корни $\lambda = h_1 \pm j\omega$ и при $4\mu < (K - 1)^2$ — действительные (положительные) корни $\lambda = h_1 \pm \omega_1$

¹⁾ Доказательство симметричности предельного цикла полностью совпадает с доказательством, проведенным в § 3 настоящей главы.

$(h_1 > \omega_1)$, где

$$h_1 = \frac{K-1}{2\mu} \quad \text{и} \quad \omega_1 = + \frac{1}{2\mu} \sqrt{|(K-1)^2 - 4\mu|} = + \sqrt{\left| h_1^2 - \frac{1}{\mu} \right|}.$$

Пусть $4\mu > (K-1)^2$. Тогда общее решение уравнений (8.30а) записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} y &= e^{h_1 t} \left[\frac{x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t + y_0 \left(\cos \omega_1 t - \frac{h_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right], \\ x &= e^{h_1 t} \left[x_0 \left(\cos \omega_1 t + \frac{h_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) - \frac{y_0}{\mu \omega_1} \sin \omega_1 t \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

(x_0, y_0) — координаты начальной точки при $t=0$; см. § 4 гл. I). Для траектории L , выходящей (будем считать, при $t=0$) из точки s полупрямой S , в (8.33) следует положить: $x_0 = +1$, $y_0 = K-1+s$. Пусть t_1 — время пробега изображающей точки по траектории L в области (I) (от полупрямой S до полупрямой S'). Тогда при $t=t_1 > 0$ $x = -1$ и $y = -(K-1) + s'$, т. е.

$$\begin{aligned} -(K-1) + s' &= e^{\gamma_1 \tau_1} \left[\frac{1}{\omega_1} \sin \tau_1 + (K-1+s) (\cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1) \right], \\ -1 &= e^{\gamma_1 \tau_1} \left[\cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1 - \frac{1}{\mu \omega_1} (K-1+s) \sin \tau_1 \right], \end{aligned}$$

где

$$\tau_1 = \omega_1 t_1 \quad \text{и} \quad \gamma_1 = \frac{h_1}{\omega_1} = \frac{K-1}{+ \sqrt{|(K-1)^2 - 4\mu|}}. \quad (8.34)$$

Разрешая второе из полученных соотношений относительно s , а затем первое — относительно s' , получим функцию соответствия преобразования Π_1 (при $4\mu > (K-1)^2$), связывающую s и s' , в следующем параметрическом виде:

$$\begin{aligned} s &= \frac{K-1}{2} \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} + \cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1}{\gamma_1 \sin \tau_1}, \\ s' &= \frac{K-1}{2} \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} + \cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1}{\gamma_1 \sin \tau_1}, \end{aligned} \quad (8.35)$$

так как

$$\mu \omega_1 = \mu h_1 \frac{\omega_1}{h_1} = \frac{K-1}{2\gamma_1} \cdot 1).$$

¹⁾ Выражение для s' можно получить и иначе, путем замены в выражении для s : s на $-s'$ и τ_1 на $-\tau_1$. В самом деле, пусть

$$x = x_0 f_1(t) + y_0 f_2(t), \quad y = x_0 f_3(t) + y_0 f_4(t)$$

— уравнение траектории в области (I) , проходящей через точки s и s' (x_0, y_0 — значения x, y при $t=0$), и пусть t_1 ($t_1 > 0$) — время пробега изображающей точки по этой траектории от точки s до точки s' . Возьмем за начало отсчета

Аналогично при $4\mu < (K-1)^2$, когда корни характеристического уравнения (8.32) действительные и общее решение уравнений (8.30а) получается из (8.33) заменой тригонометрических функций на соответствующие гиперболические, мы получим для функции соответствия преобразования Π_1 :

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{K-1}{2} \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} + \operatorname{ch} \tau_1 - \gamma_1 \operatorname{sh} \tau_1}{\gamma_1 \operatorname{sh} \tau_1}, \\ s' &= \frac{K-1}{2} \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} + \operatorname{ch} \tau_1 + \gamma_1 \operatorname{sh} \tau_1}{\gamma_1 \operatorname{sh} \tau_1} \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

(значения τ_1 и γ_1 по-прежнему даются выражением (8.34), но теперь $\gamma_1 > 1$).

В области (II) уравнения (8.30) могут быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} \mu \ddot{y} + \dot{y} + y &= -K, \\ x &= \dot{y}. \end{aligned} \right\} \quad (8.30б)$$

Характеристическое уравнение (8.31) для этой системы всегда (напомним, что $0 < \mu < \frac{1}{4}$) имеет действительные отрицательные корни $\lambda = -h_2 \pm \omega_2$, где

$$h_2 = \frac{1}{2\mu} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{1-4\mu}}{2\mu}$$

(причем $h_2 > \omega_2$). Следовательно, общее решение уравнений (8.30б) может быть записано в виде:

$$\left. \begin{aligned} y &= -K + e^{-h_2 t} \left[\frac{x_0}{\omega_2} \operatorname{sh} \omega_2 t + (y_0 + K) \left(\operatorname{ch} \omega_2 t + \frac{h_2}{\omega_2} \operatorname{sh} \omega_2 t \right) \right], \\ x &= e^{-h_2 t} \left[x_0 \left(\operatorname{ch} \omega_2 t - \frac{h_2}{\omega_2} \operatorname{sh} \omega_2 t \right) - \frac{y_0 + K}{\mu \omega_2} \operatorname{sh} \omega_2 t \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

времени тот момент, когда изображающая точка находилась в s ($x_0 = +1$, $y_0 = K-1+s$). Тогда при $t = t_1$ $x = -1$, т. е.

$$-1 = f_1(t_1) + (K-1+s)f_2(t_1),$$

откуда

$$s = -\frac{1+f_1(t_1)}{f_2(t_1)} - (K-1) = \Phi_1(t_1).$$

Воспользуемся произволом в выборе начала отсчета времени и возьмем теперь за момент $t=0$ тот момент, когда изображающая точка находилась в s' ($x_0 = -1$, $y_0 = -(K-1)+s'$). Тогда при $t = -t_1$ $x = +1$, что дает:

$$+1 = -f_1(-t_1) - (K-1-s')f_2(-t_1),$$

т. е.

$$s' = \frac{1+f_1(-t_1)}{f_2(-t_1)} + (K-1) = -\Phi_1(-t_1).$$

Таким образом, s' получается из выражения для s заменой t_1 на $-t_1$ (или τ_1 на $-\tau_1$) и дополнительной сменой знака.

Пусть при $t=0$ $x=x_0=-1$, $y=y_0=-(K-1)+s'$, а при $t=t_2=\frac{\tau_2}{\omega_2}>0$ $x=-1$, $y=-(K-1)-s_1$ (t_2 — время пробега изображающей точки по траектории L в области (II) от точки s' до точки s_1). Тогда второе соотношение (8.37) дает:

$$-1 = e^{-\gamma_2 \tau_2} \left[-(\operatorname{ch} \tau_2 - \gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2) - \frac{1}{\mu \omega_2} (1 + s') \operatorname{sh} \tau_2 \right],$$

где

$$\tau_2 = \omega_2 t_2 \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \frac{h_2}{\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{1-4\mu}} > 1. \quad (8.38)$$

Разрешая полученное уравнение относительно s' , используя соотношение $\mu \omega_2 = \mu h_2 \frac{\omega_2}{h_2} = \frac{1}{2\gamma_2}$ и затем заменяя в полученном выражении для s' : s' на $-s_1$ и τ_2 на $-\tau_2$, мы получим функцию соответствия для преобразования Π_2^1):

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} - \operatorname{ch} \tau_2 + \gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2}{2\gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2}, \\ s' &= \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} - \operatorname{ch} \tau_2 - \gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2}{2\gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

2. Исследование функций соответствия. Исследование функций соответствия преобразований Π_1 и Π_2 мы начнем с функции соответствия преобразования Π_1 для случая $4\mu > (K-1)^2$ ($K > 1$), когда состояние равновесия $(0, 0)$ является неустойчивым фокусом, траектории в области (I) — спиралями, раскручивающимися от фокуса, а сама функция соответствия выражается соотношениями (8.35). Так как изображающая точка, двигаясь от точки s до точки s' по дуге спиральной траектории в области (I) , совершает менее половины оборота вокруг фокуса $(0, 0)$, то параметр преобразования τ_1 — приведенное время пробега изображающей точки в области (I) — заведомо удовлетворяет неравенству $0 < \tau_1 < \pi$, причем меньшим τ_1 соответствуют большие s и s'^2). Обозначим значение τ_1 , соответствующее $s=0$, через τ_1^0 ; это пограничное значение параметра τ_1 , очевидно, определяется уравнением

$$\psi_1(\tau_1, \gamma_1) = 0,$$

где

$$\psi_1(\tau, \gamma) = 1 + e^{\gamma \tau} (\cos \tau - \gamma \sin \tau)$$

¹⁾ Доказательство указанного способа получения выражения для s_1 полностью аналогично доказательству, приведенному в примечании на стр. 544.

²⁾ Это вполне понятно, так как по траекториям с большими u изображающая точка движется быстрее: чем больше u , тем больше $|\dot{x}|$ (в силу первого уравнения (8.30)) и тем меньше $t_1(\tau_1)$; при $u \rightarrow +\infty$ $\dot{x} \rightarrow -\infty$ и $t_1 \rightarrow 0$.

(график этой функции и графическое решение уравнения для τ_1^0 приведены на рис. 384; ясно, что $0 < \tau_1^0 < \pi$). Тогда, изменяя τ_1 от τ_1^0 до 0, мы переберем все множество значений s от 0 до $+\infty$; одновременно s' будет также монотонно возрастать от некоторого положительного значения

$$s'_0 = (K - 1) \left[\frac{\text{sh } \gamma_1 \tau_1^0}{\gamma_1 \sin \tau_1^0} + 1 \right] > 2(K - 1)$$

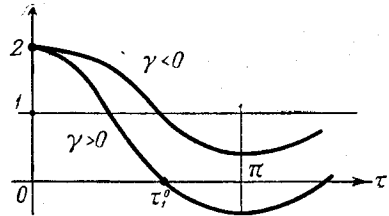


Рис. 384.

также до $+\infty$.

Дифференцируя (8.35), получим:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\tau_1} &= -\frac{K-1}{2\gamma_1} \cdot \frac{1 + e^{-\gamma_1 \tau_1} (\cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1)}{\sin^2 \tau_1} = -\frac{K-1}{2\gamma_1} \frac{\psi_1(\tau_1, -\gamma_1)}{\sin^2 \tau_1}, \\ \frac{ds'}{d\tau_1} &= -\frac{K-1}{2\gamma_1} \cdot \frac{1 + e^{\gamma_1 \tau_1} (\cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1)}{\sin^2 \tau_1} = -\frac{K-1}{2\gamma_1} \frac{\psi_1(\tau_1, \gamma_1)}{\sin^2 \tau_1}, \\ \frac{ds}{ds'} &= \frac{\psi_1(\tau_1, -\gamma_1)}{\psi_1(\tau_1, \gamma_1)} \end{aligned}$$

и

$$\frac{d^2s}{ds'^2} = -\frac{4\gamma_1(\gamma_1^2 + 1) \sin^3 \tau_1}{(K-1) [\psi_1(\tau_1, \gamma_1)]^3} \{ \text{sh } \gamma_1 \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1 \}.$$

Так как при $0 < \tau_1 < \tau_1^0$ $\psi_1(\tau_1, \gamma_1)$ и $\psi_1(\tau_1, -\gamma_1) > 0$, то в этом интервале изменения τ_1 $\frac{ds}{d\tau_1} < 0$, $\frac{ds'}{d\tau_1} < 0$, $\frac{ds}{ds'} > 0$; более того, $\frac{ds}{ds'}$ изменяется монотонно от $+\infty$ до $+1$ (при уменьшении τ_1 от τ_1^0 до 0 или при увеличении s от 0 до $+\infty$), поскольку $\frac{d^2s}{ds'^2} < 0$.

Заметим, что

$$s' - s = (K - 1) \left\{ \frac{\text{sh } \gamma_1 \tau_1}{\gamma_1 \sin \tau_1} + 1 \right\} > 2(K - 1)$$

и при $\tau_1 \rightarrow +0$ $s' - s \rightarrow 2(K - 1)$, т. е. кривая (8.35) имеет асимптоту

$$s = s' - 2(K - 1).$$

Этих сведений достаточно для построения графика функции соответствия (8.35); он приведен на рис. 385.

Аналогично, при $4\mu < (K - 1)^2$, когда функция соответствия преобразования Π_1 записывается в виде (8.36), параметр преобразо-

вания τ_1 также заключен в интервале $0 < \tau_1 < \tau_1^0$, где τ_1^0 — значение параметра τ_1 для точки $s = 0$ и определяется теперь уравнением

$$\psi_2(\tau_1, \gamma_1) \equiv \frac{1}{\gamma_1} e^{\tau_1} - \text{ch } \tau_1 - \gamma_1 \text{ sh } \tau_1 = 0$$

(график функции $\psi_2(\tau, \gamma)$ для $\gamma = \gamma_1 > 1$ и $\gamma = -\gamma_1 < -1$ приведен на рис. 386). При этом при уменьшении τ_1 от τ_1^0 до 0

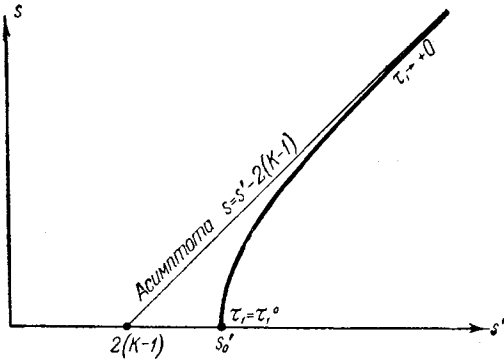


Рис. 385.

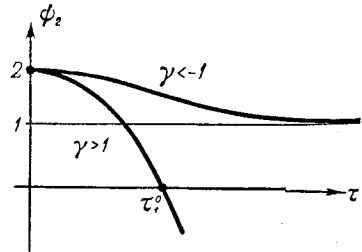


Рис. 386.

(так же как и в предыдущем случае) s монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, s' — от некоторого положительного значения

$$s'_0 = (K-1) \left\{ \frac{\text{sh } \gamma_1 \tau_1^0}{\gamma_1 \text{ sh } \tau_1^0} + 1 \right\} > 2(K-1)$$

также до $+\infty$ ¹⁾; производная $\frac{ds}{ds'} = \frac{\psi_2(\tau_1, -\gamma_1)}{\psi_2(\tau_1, \gamma_1)}$ монотонно убывает от $+\infty$ до $+1$, так как

$$\frac{d^2s}{ds'^2} = -\frac{4\gamma_1(\gamma_1^2-1)\text{sh}^3\tau_1}{(K-1)[\psi_2(\tau_1, \gamma_1)]^2} \{ \text{sh } \gamma_1 \tau_1 - \gamma_1 \text{ sh } \tau_1 \} < 0$$

при $0 < \tau_1 < \tau_1^0$. Таким образом, график функции соответствия (8.36) имеет тот же вид, что и график функции соответствия (8.35) (рис. 385).

Перейдем к рассмотрению функции соответствия преобразования Π_2 — функции (8.39). Здесь, для того чтобы перебрать все множество точек полупрямой (s'): $0 < s' < +\infty$, мы должны изменять параметр преобразования τ_2 от 0 до $+\infty$, причем (в отличие от только что рассмотренной функции соответствия преобразования Π_1) при изменении τ_2 от 0 до $+\infty$ s' монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, а s_1 — от 0 до $(s_1)_{\max} = \frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2} > 0$ ²⁾.

¹⁾ Кривая (8.36) имеет при $\tau_1 \rightarrow 0$ асимптоту $s = s' - 2(K-1)$.

²⁾ Все сказанное можно усмотреть из следующих элементарных рассуждений относительно хода траекторий в области (II). Во-первых, так как траектории пересекаться не могут, то при увеличении s' мы будем получать

Для доказательства монотонности возрастания s' и s_1 (при увеличении τ_2 от 0 до $+\infty$) достаточно вычислить производные $\frac{ds}{d\tau_2}$ и $\frac{ds_1}{d\tau_2}$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{ds_1}{d\tau_2} = \frac{\psi_3(\tau_2, -\gamma_2)}{2\gamma_2 \operatorname{sh}^2 \tau_2}, \quad \frac{ds'}{d\tau_2} = \frac{\psi_3(\tau_2, \gamma_2)}{2\gamma_2 \operatorname{sh}^2 \tau_2}, \quad \frac{ds_1}{ds'} = \frac{\psi_3(\tau_2, -\gamma_2)}{\psi_3(\tau_2, \gamma_2)}$$

и

$$\frac{d^2s_1}{ds'^2} = - \frac{4\gamma_2(\gamma_2^2 - 1) \operatorname{sh}^3 \tau_2}{[\psi_3(\tau_2, \gamma_2)]^3} \{ \operatorname{sh} \gamma_2 \tau_2 - \gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2 \},$$

где

$$\psi_3(\tau, \gamma) = 1 - e^{\tau\gamma} (\operatorname{ch} \tau - \gamma \operatorname{sh} \tau) = 2 - \psi_2(\tau, \gamma).$$

Так как $\gamma_2 > 1$ и при $|\gamma| > 1$ и $\tau > 0$ $\psi_3(\tau, \gamma) > 0^1$, то при любых $0 < \tau_2 < +\infty$

$$\frac{ds_1}{d\tau_2} > 0, \quad \frac{ds'}{d\tau_2} > 0, \quad 0 < \frac{ds_1}{ds'} < 1, \quad \frac{d^2s_1}{ds'^2} < 0$$

(при изменении τ_2 от 0 до $+\infty$ или s' от 0 до $+\infty$ $\frac{ds_1}{ds'}$ монотонно

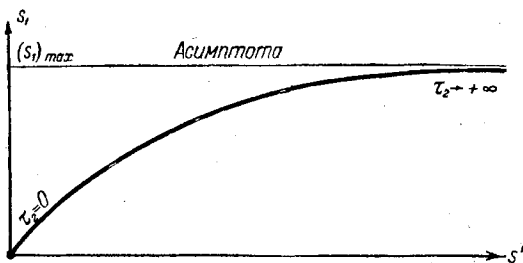


Рис. 387.

убывает от 1 до 0). На рис. 387 изображен график рассмотренной нами функции соответствия преобразования Π_2 .

3. Диаграмма Ламерея. На рис. 388 построена диаграмма Ламерея — графики функций соответствия преобразований Π_1 и Π_2 ,

также и увеличение s_1 ; при этом большим s' будут соответствовать большие длины дуг траекторий между точками s' и s_1 и, естественно, большие времена пробега t_2 (большие τ_2). Во-вторых, все траектории, выходящие в область (II) с полупрямой (s'), идут над прямолинейной траекторией $y = -K - x_1x$; поэтому $s_1 < (s_1)_{\max}$, где $(s_1)_{\max}$ — значение s_1 для точки пересечения этой прямолинейной траектории с полупрямой S_1 . Предельные значения s' и s_1 (при $\tau_2 \rightarrow 0$ и при $\tau_2 \rightarrow +\infty$) можно найти, применяя правило Лопиталья.

¹⁾ Для доказательства неравенства достаточно заметить, что $\psi_3(0, \gamma) = 0$ и при $|\gamma| > 1$ и $\tau > 0$ $\frac{\partial \psi_3}{\partial \tau_2} = (\gamma^2 - 1) e^{\tau\gamma} \operatorname{sh} \tau > 0$,

нанесенные на общей плоскости (по оси абсцисс отложено s' , по оси ординат — s и s_1). Эти графики имеют единственную точку пересечения — неподвижную точку преобразования Π' . Существование неподвижной точки вытекает из непрерывности функций соответствия и выполнения неравенств:

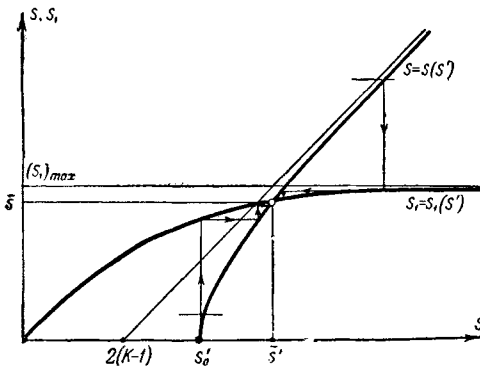


Рис. 388.

Существование неподвижной точки вытекает из непрерывности функций соответствия и выполнения неравенств: $s_1 - s > 0$ при $s' = s_0'$ и $s_1 - s < 0$ при достаточно больших s' , единственность — из неравенств $0 < \frac{ds_1}{ds'} < 1 < \frac{ds}{ds'}$, имеющих место при любых $s' \geq s_0'$ и, в частности, в неподвижной точке, которая, следовательно, является устойчивой.

Аналитически неподвижная точка преобразования Π' определяется системой трансцендентных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{K-1}{2} \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} + \cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1}{\gamma_1 \sin \tau_1} &= \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} - \operatorname{ch} \tau_2 + \gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2}{2\gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2} \\ \frac{K-1}{2} \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} + \cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1}{\gamma_1 \sin \tau_1} &= \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} - \operatorname{ch} \tau_2 - \gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2}{2\gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2} \end{aligned} \right\} (8.40)$$

при $4\mu > (K-1)^2$ и системой

$$\left. \begin{aligned} \frac{K-1}{2} \frac{e^{-\gamma_1 \tau_1} + \operatorname{ch} \tau_1 - \gamma_1 \operatorname{sh} \tau_1}{\gamma_1 \operatorname{sh} \tau_1} &= \frac{e^{-\gamma_2 \tau_2} - \operatorname{ch} \tau_2 + \gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2}{2\gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2} \\ \frac{K-1}{2} \frac{e^{\gamma_1 \tau_1} + \operatorname{ch} \tau_1 + \gamma_1 \operatorname{sh} \tau_1}{\gamma_1 \operatorname{sh} \tau_1} &= \frac{e^{\gamma_2 \tau_2} - \operatorname{ch} \tau_2 - \gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2}{2\gamma_2 \operatorname{sh} \tau_2} \end{aligned} \right\} (8.40a)$$

при $4\mu < (K-1)^2$.

Итак, точечное преобразование Π' полупрямой S в полупрямую S_1 имеет единственную и притом устойчивую неподвижную точку ($s = s_1 = \bar{s}$, $s' = \bar{s}'$). Соответственно, на фазовой плоскости имеется единственный (симметричный и устойчивый) предельный цикл, к которому стремятся при $t \rightarrow +\infty$ все фазовые траектории (рис. 389), — в схеме при $K > 1$ и при любых начальных условиях устанавливаются автоколебания¹⁾.

¹⁾ На рис. 389 изображено разбиение фазовой плоскости на траектории для случая $K > 1 + 2\sqrt{\mu}$, когда состояние равновесия является неустойчивым узлом.

Период автоколебаний, очевидно, равен

$$\tau = 2 \left(\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2} \right)$$

(в единицах безразмерного времени) и

$$T = 2 [R_a (C + C_1) + R_g C] \left(\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2} \right)$$

(в обычных единицах), где $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ ($0 < \bar{\tau}_1 < \tau_1^0$, $0 < \bar{\tau}_2 < +\infty$) — значения τ_1 и τ_2 , соответствующие неподвижной точке и определяемые

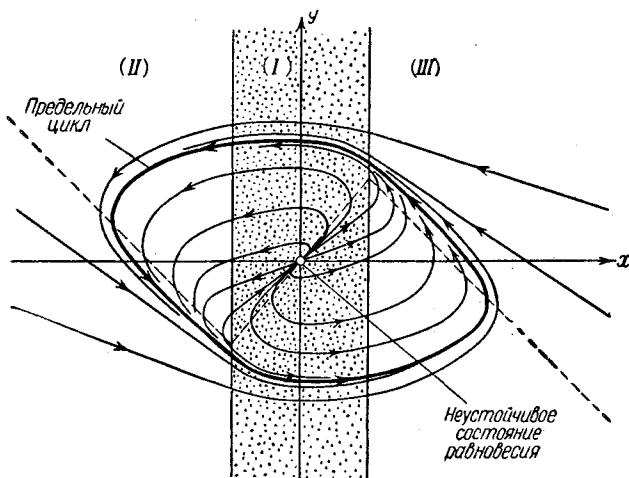


Рис. 389.

однозначно системой уравнений (8.40) при $4\mu > (K-1)^2$ и системой (8.40а) при $4\mu < (K-1)^2$.

Отметим сразу же один предельный случай. Если $K \rightarrow 1$ (но $K > 1$), то предельный цикл стремится к окружности $x^2 + y^2 = 1$, так как $\bar{\tau}_1 \rightarrow \pi$ и $\bar{\tau}_2 \rightarrow 0$, а автоколебания близки к синусоидальным с периодом $2\pi [R_a (C + C_1) + R_g (C + C_g)]$.

4. Разрывные колебания. Рассмотрим теперь другой, весьма интересный предельный случай

$$\mu \ll 1, \quad \mu \ll \frac{1}{4} (K-1)^2$$

— случай мультивибратора с одной RC-цепью (малые, паразитные емкости $C_a, C_g \ll C$), когда автоколебания в схеме носят разрывный характер. Разрывные колебания, как мы увидим в гл. X, отображаются дифференциальными уравнениями с малыми коэффициентами при

старших производных, и система (8.30) при малом μ является примером (достаточно простым, но типичным) подобных динамических систем.

Для получения разбиения фазовой плоскости x, y на траектории системы (8.30) при *достаточно малых* μ выпишем уравнение интегральных кривых

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\mu x}{x + y + K\varphi(x)} \quad (8.41)$$

и построим на плоскости x, y изоклину вертикальных касательных — кривую F

$$y = -x - K\varphi(x) \quad (8.42)$$

(на ней $\dot{x} = 0$ и $\frac{dy}{dx} = \infty$).

Из уравнений (8.30) и (8.41) следует, что при достаточно малых μ (при $\mu \rightarrow +0$) $|\dot{x}|$ быстро возрастает, а $|\frac{dy}{dx}|$ быстро убывает при удалении от изоклины F : в точках (x, y) на расстояниях порядка μ от нее \dot{x} и $\frac{dy}{dx} = O(1)$, а уже на расстояниях порядка $\sqrt{\mu}$ $\dot{x} = O(\mu^{-1/2})$ и $\frac{dy}{dx} = O(\mu^{1/2})$, т. е. $\dot{x} \rightarrow \infty$, а $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow +0$ ¹⁾. Следовательно, при достаточно малых μ фазовые траектории вне $\sqrt{\mu}$ -окрестности кривой F сколь угодно близки к горизонтальным прямым $y = \text{const}$ (там $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow +0$, по крайней мере, как $\sqrt{\mu}$), и изображающая точка двигается по ним *сколь угодно быстро* ($\dot{x} \rightarrow \infty$ как $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ или быстрее)²⁾. При этом изображающая точка двигается вправо в точках, лежащих под изоклиной F (там $-x - y - K\varphi(x) > 0$ и $\dot{x} = \frac{-x - y - K\varphi(x)}{\mu} \rightarrow +\infty$), и влево — над ней (рис. 390). Эти траектории сколь угодно быстрых, скачкообразных движений системы (в пределе мгновенных скачков) идут из бесконечности и от отрезка CA изоклины F к полупрямым F_1^+ и F_2^+ , являющимся частями изоклины F , лежащими в областях (II)

¹⁾ Здесь и ниже мы обозначаем через $O[f(\mu)]$ функции, которые ведут себя при малых μ как $f(\mu)$; запись $g(x, y, \mu) = O[f(\mu)]$ означает, что при $\mu \rightarrow +0$ отношение $\frac{g(x, y, \mu)}{f(\mu)}$ стремится к конечному пределу (вообще говоря, зависящему от x, y).

²⁾ Под ϵ -окрестностью некоторой кривой, как и раньше, понимается множество всех точек, расстояния от которых до данной кривой не превышают ϵ . Очевидно, $\sqrt{\mu}$ -окрестность кривой F стягивается к F при $\mu \rightarrow 0$.

и (III). В μ -окрестностях полупрямых F_1^+ и F_2^+ \dot{x} остается ограниченной величиной при $\mu \rightarrow +0$, т. е. в этих окрестностях лежат траектории «медленных» движений системы (движений с фазовыми скоростями, остающимися ограниченными при $\mu \rightarrow +0$)¹). Медленное

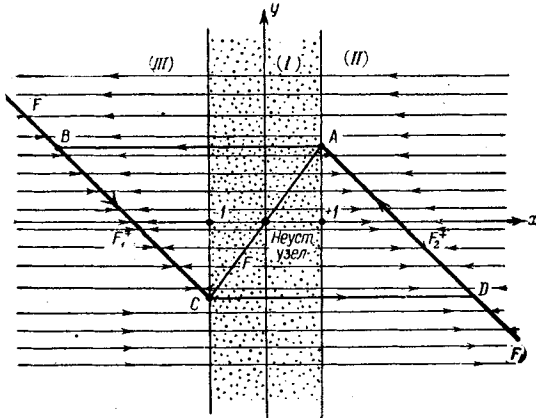


Рис. 390.

движение изображающей точки переходит в сколь угодно быстрое, скачкообразное в $\sqrt{\mu}$ -окрестностях точек A и C.

Таким образом, движение изображающей точки системы (8.30) при достаточно малых μ будет складываться из чередующихся сколь угодно быстрых, скачкообразных движений по траекториям, сколь угодно близким к горизонтальным прямым $y = \text{const}$, и «медленных» движений по траекториям, лежащим в μ -окрестностях полупрямых F_1^+ и F_2^+ . На рис. 390 изображено предельное (при $\mu \rightarrow +0$) разбиение фазовой плоскости на траектории: траектории скачкообразных движений (мгновенных скачков) изображены прямыми $y = \text{const}$, траектории «медленных» движений — полупрямыми F_1^+ и F_2^+ . Предельным циклом будет замкнутая кривая ABCDA²).

¹) Напомним, что $\dot{y} = x$ и, следовательно, остается ограниченной величиной при $\mu \rightarrow +0$ и внутри окрестности кривой F, и вне ее.

²) Приближенные (асимптотические) уравнения движения рассматриваемой системы при достаточно малых μ можно записать в виде:

$$\mu \dot{x} = -x - y_0 - K\varphi(x) \tag{A}$$

во время скачкообразного движения по траектории $y = y_0 = \text{const}$ (но вне некоторой окрестности кривой F) и

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= x \\ y &= -x - K\varphi(x) \end{aligned} \right\} \text{ или } \dot{x} [1 + K\varphi'(x)] + x = 0 \tag{B}$$

Докажем теперь строго, что кривая $ABCD$ действительно является предельным положением предельного цикла системы (8.30) при $\mu \rightarrow +0$. Доказательство проведем путем построения на фазовой плоскости такой области (ε) , которая содержала бы

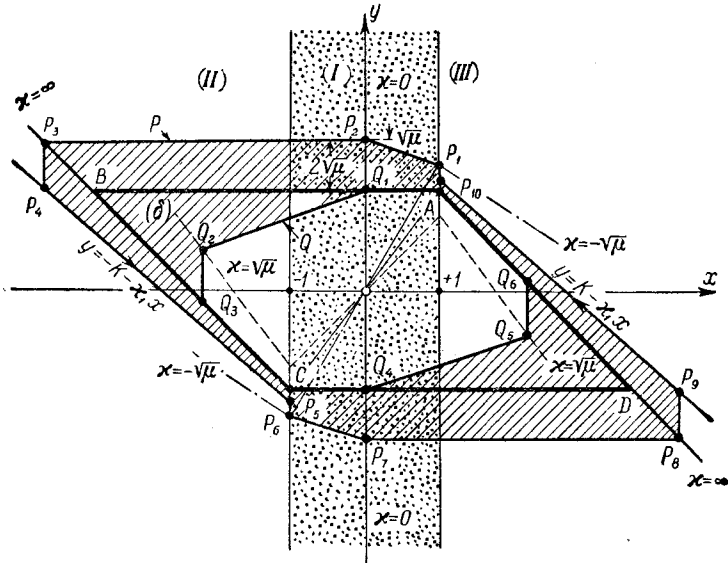


Рис. 391.

внутри себя (или на своей границе) кривую $ABCD$, стягивалась к последней при $\mu \rightarrow +0$ и из которой фазовые траектории не могли бы выходить (при возрастании t). С этой целью построим на фазовой плоскости (рис. 391) изоклины $x=0$ (ось y), $x=\infty$ (кривую F , см. рис. 390), изоклины $x=-\sqrt{\mu}$ и

во время «медленного» движения (вблизи F_1^+ и F_2^+). Уравнением (B) мы пользовались при рассмотрении мультивибратора в § 7 гл. IV, заменяя динамическое рассмотрение быстрых (при $C_a, C_g \ll C$) процессов постулатом скачка. Этот постулат (система из состояний $|x| \leq 1$ мгновенно «перепрыгивает» в состояния $|x| > 1$, причем при скачке y , т. е. напряжение на конденсаторе C , остается неизменным) теперь получается как следствие динамических уравнений (8.30) при $\mu \rightarrow +0$.

Интегрируя на участках BC и DA уравнение «медленного» движения $\dot{x} + x = 0$ (см. § 7 гл. IV), мы получим предельное выражение для периода автоколебаний: $\lim_{\mu \rightarrow +0} \tau = 2 \ln(2K - 1)$, так как для периодического движения

при $\mu \rightarrow +0$ время пробега изображающей точки в области (I) $\bar{t}_1 \rightarrow +0$ и в области (II) $\bar{t}_2 \rightarrow \ln(2K - 1)$.

$x = +\sqrt{\mu}^1$), а также замкнутые кривые P и Q , симметричные относительно начала координат и составленные из отрезков прямых следующим образом.

Построение первого контура P (контура $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}P_1$) начнем с точки $P_1(1, K-1+\sqrt{\mu})$, являющейся точкой пересечения изоклины $x = -\sqrt{\mu}$ с прямой $x = +1$. Отрезок P_1P_2 имеет угловой коэффициент, равный $-\sqrt{\mu}$, и соединяет точки P_1 и $P_2(0, K-1+2\sqrt{\mu})$. Далее проводим горизонтальный отрезок P_2P_3 до пересечения с изоклиной $x = \infty$, затем вертикальный отрезок P_3P_4 до пересечения с прямолинейной траекторией системы (8.30) в области (II):

$$y = -K - x_1x, \quad \text{где} \quad x_1 = \frac{1 + \sqrt{1-4\mu}}{2} = 1 + O(\mu);$$

P_4P_5 представляет собой отрезок этой траектории и, наконец, P_5P_6 — отрезок прямой $x = -1$, причем точка $P_6(-1, -K+1-\sqrt{\mu})$ симметрична точке P_1 и расположена ниже точки $P_5(-1, -K-x_1)$. Вторая половина контура P симметрична только что построенной ломаной.

Половина контура Q состоит из отрезка AQ_1 горизонтальной прямой $y = K-1$ (точка Q_1 лежит на оси ординат), отрезка Q_1Q_2 с угловым коэффициентом, равным $+\sqrt{\mu}$ (точка Q_2 лежит на изоклине $x = +\sqrt{\mu}$), вертикального отрезка Q_2Q_3 , проведенного до пересечения с изоклиной $x = \infty$, и из отрезка Q_3C изоклины $x = \infty$; вторая половина контура Q (ломаная $CQ_4Q_5Q_6A$) симметрична первой.

Покажем, что область (ϵ) , заключенная между контурами P и Q (на рис. 391 она заштрихована), удовлетворяет всем поставленным выше требованиям. Эта область, во-первых, содержит внутри себя (или на своей границе) кривую $ABCD$ и стягивается к ней при $\mu \rightarrow +0$, так как наибольшие расстояния кривых P и Q (границ области (ϵ)) от кривой $ABCD$ не превышают соответственно $2\sqrt{\mu}$ и $(2K-1)\sqrt{\mu}$ и, следовательно, стремятся к нулю при $\mu \rightarrow +0$. Во-вторых, фазовые траектории не могут выйти из области (ϵ) (при

¹⁾ Согласно (8.41) уравнением изоклины $\frac{dy}{dx} = x$ будет

$$x = -\frac{\mu x}{x+y+K\varphi(x)} \quad \text{или} \quad y = -\left(1 + \frac{\mu}{x}\right)x - K\varphi(x),$$

следовательно, изоклинами $x = \pm\sqrt{\mu}$ будут ломаные

$$y = -(1 \pm \sqrt{\mu})x - K\varphi(x).$$

возрастающем t), ибо на ее границах траектории либо касаются грани, либо пересекают их, входя в область (ϵ) .

Для доказательства последнего утверждения достаточно рассмотреть ход траекторий системы (8.30) на ломаных $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ и $AQ_1Q_2Q_3C$. На отрезке P_1P_2 , лежащем между изоклинами $x = -\sqrt{\mu}$ и $x = 0$ над изоклиной F , $-\sqrt{\mu} \leq \frac{dy}{dx} \leq 0$ и $\dot{x} < 0$; там траектории имеют меньший наклон, чем сам отрезок, изображающие точки двигаются влево и, следовательно, входят в область (ϵ) (исключение составляет точка P_1 , в которой траектория касается отрезка P_1P_2). На отрезке P_2P_3 $\dot{y} = x \leq 0$ (траектории идут вниз), на P_3P_4 и P_5P_6 $\dot{x} > 0$, ибо они расположены под кривой F (траектории идут вправо). Отрезок P_4P_5 сам является траекторией и поэтому не может пересекаться другими траекториями. Таким образом, траектории системы (8.30) на половине $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ контура P либо касаются этого контура, либо пересекают его, входя в область (ϵ) . То же самое (в силу симметрии траекторий) можно сказать и относительно хода траекторий на второй половине контура P .

Аналогично на AQ_1 $\dot{y} = x \geq 0$, на отрезке Q_1Q_2 , заключенном между изоклинами $x = 0$ и $x = +\sqrt{\mu}$, $0 \leq \frac{dy}{dx} \leq +\sqrt{\mu}$ и $\dot{x} < 0$, на Q_2Q_3 $\dot{x} \leq 0$ и на Q_3C $\dot{x} = 0$, но $\dot{y} < 0$. Отсюда следует, что траектории только входят в область (ϵ) и через ее внутреннюю границу Q (мы доказали это для одной половины контура $AQ_1Q_2Q_3C$, но в силу симметрии траекторий это утверждение справедливо также и для другой половины $CQ_4Q_5Q_6A$ контура Q).

Итак, фазовые траектории системы (8.39) на границах области (ϵ) — на контурах P и Q — либо касаются, либо пересекают их, входя в область (ϵ) . Так как эта область не содержит состояний равновесия, то согласно известной теореме качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка (см. теорему V § 2 гл. VI) в ней существует устойчивый предельный цикл. Тем самым мы показали, что единственный и устойчивый предельный цикл системы (8.30) находится в построенной нами области (ϵ) и, следовательно, стремится к $ABCD$ при $\mu \rightarrow +0^1$.

5. Период автоколебаний при малых μ . Асимптотическая формула для периода разрывных автоколебаний

$$\tau = 2 \ln(2K - 1), \quad (8.43)$$

найденная ранее (см., например, § 7 гл. IV), оказывается, дает довольно значительные погрешности для периода автоколебаний мульти-

¹⁾ Это же можно сформулировать несколько иначе: предельный цикл системы (8.30) находится в δ -окрестности кривой $ABCD$, где $\delta = O(\sqrt{\mu})$. Например, δ -окрестность кривой $ABCD$, где δ — наибольшее из $2\sqrt{\mu}$ и $(2K - 1)\sqrt{\mu}$, содержит внутри себя область (ϵ) и, следовательно, предельный цикл.

вибратора, если параметр μ не очень мал. Например, при $\mu = 0,05$ и $K = 2$, когда автоколебания весьма близки к разрывным¹⁾, погрешность формулы (8.43) составляет около 20%. В связи с этим представляется целесообразным провести вычисление асимптотического выражения для периода автоколебаний мультивибратора при малых μ (при $C_a, C_g \ll C$), исходя не из предельной (при $\mu \rightarrow +0$) структуры разбиения фазовой плоскости на траектории (рис. 390), а из функций соответствия (8.36), (8.39) для преобразований Π_1 и Π_2 и уравнений (8.40а), точно определяющих неподвижную точку преобразования Π' и предельный цикл при малых μ ²⁾.

Форма записи функций соответствия (8.36) и (8.39), а также уравнений (8.40а) несколько неудобна для этой цели. Перейдём поэтому в (8.36) и (8.39) от $\tau_1 = \omega_1 t_1$, $\tau_2 = \omega_2 t_2$ непосредственно к t_1 и t_2 — временам пробега изображающей точки в областях (I) и (II). Обозначим корни характеристического уравнения (8.32) (для области (I)) через λ_1 и λ'_1 :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= h_1 - \omega_1 = \frac{K-1 - \sqrt{(K-1)^2 - 4\mu}}{2\mu} = \\ &= \frac{1}{K-1} + \frac{\mu}{(K-1)^3} + 2\frac{\mu^2}{(K-1)^5} + \dots, \\ \lambda'_1 &= h_1 + \omega_1 = \frac{K-1 + \sqrt{(K-1)^2 - 4\mu}}{2\mu} = \\ &= \frac{K-1}{\mu} - \frac{1}{K-1} - \frac{\mu}{(K-1)^3} - 2\frac{\mu^2}{(K-1)^5} - \dots \end{aligned} \right\} (8.44)$$

а абсолютные значения значений корней характеристического уравнения (8.31) (для области (II)) — через λ_2 и λ'_2 :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &= h_2 - \omega_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2\mu} = 1 + \mu + 2\mu^2 + \dots, \\ \lambda'_2 &= h_2 + \omega_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\mu}}{2\mu} = \frac{1}{\mu} - 1 - \mu - 2\mu^2 - \dots \end{aligned} \right\} (8.44а)$$

Подставим $\tau_1 = \omega_1 t_1$ в выражение (8.36) для s и умножим числитель и знаменатель этого выражения на $e^{h_1 t_1}$:

$$s = \frac{K-1}{2} \frac{\omega_1}{h_1} \frac{1 + \frac{1}{2} [e^{\lambda'_1 t_1} + e^{\lambda_1 t_1}] - \frac{1}{2} \frac{h_1}{\omega_1} [e^{\lambda'_1 t_1} - e^{\lambda_1 t_1}]}{\frac{1}{2} [e^{\lambda'_1 t_1} - e^{\lambda_1 t_1}]}$$

¹⁾ При $\mu = 0,05$ и $K = 2$ автоколебания мультивибратора состоят из чередующихся «медленных» (со скоростью \dot{x} порядка единицы) и «быстрых», скачкообразных изменений x (со скоростью порядка $\frac{1}{\mu} = 20$).

²⁾ См. также [114, 52, 93, 158, 159], где проводятся вычисления асимптотических разложений для периода периодических решений некоторых дифференциальных уравнений второго порядка. В [114], например, рассмотрено уравнение, эквивалентное системе (8.30) при $K = 2$.

Заметив, что $\frac{K-1}{2h_1} = \mu$, $h_1 = \frac{1}{2}(\lambda'_1 + \lambda_1)$, $\omega_1 = \frac{1}{2}(\lambda'_1 - \lambda_1)$, мы получим следующие параметрические выражения для функции соответствия преобразования Π_1 :

$$\left. \begin{aligned} s &= \mu \frac{\lambda'_1 [1 + e^{\lambda_1 t_1}] - \lambda_1 [1 + e^{\lambda'_1 t_1}]}{e^{\lambda'_1 t_1} - e^{\lambda_1 t_1}}, \\ s' &= \mu \frac{\lambda'_1 [1 + e^{-\lambda_1 t_1}] - \lambda_1 [1 + e^{-\lambda'_1 t_1}]}{e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda'_1 t_1}} \end{aligned} \right\} \quad (8.45)$$

(s' получается из выражения для s сменой знака и заменой t_1 на $-t_1$; см. примечание на стр. 544). Тем же путем, заменяя в (8.38) t_2 на $\omega_2 t_2$ и пользуясь соотношениями:

$$\begin{aligned} \gamma_2 \omega_2 &= h_2, \quad \frac{1}{2h_2} = \mu, \quad h_2 + \omega_2 = \lambda'_2, \quad h_2 - \omega_2 = \lambda_2, \\ h_2 &= \frac{1}{2}(\lambda'_2 + \lambda_2) \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(\lambda'_2 - \lambda_2), \end{aligned}$$

получим для преобразования Π_2 :

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \mu \frac{\lambda'_2 [e^{\lambda_2 t_2} - 1] - \lambda_2 [e^{\lambda'_2 t_2} - 1]}{e^{\lambda'_2 t_2} - e^{\lambda_2 t_2}}, \\ s' &= \mu \frac{\lambda'_2 [1 - e^{-\lambda_2 t_2}] - \lambda_2 [1 - e^{-\lambda'_2 t_2}]}{e^{-\lambda_2 t_2} - e^{-\lambda'_2 t_2}} \end{aligned} \right\} \quad (8.46)$$

Из этих выражений для функций соответствия преобразований Π_1 и Π_2 уже нетрудно получить асимптотические разложения функций соответствия, а также периода автоколебаний для малых μ , пользуясь разложением в порядке величины корней λ_1 , λ_2 и λ'_1 , λ'_2 , т. е. тем, что $\lambda_1, \lambda_2 = O(1)$, а $\lambda'_1, \lambda'_2 = O\left(\frac{1}{\mu}\right)$.

Ясно, что при движении изображающей точки по какой-либо траектории, пересекающей полупрямую S (например, по предельному циклу), время ее пробега в области (I) $t_1 \rightarrow +0$ при $\mu \rightarrow +0$, а в области (II) t_2 стремится к конечному пределу ($t_2 = O(1)$)¹⁾. Но тогда $e^{-\lambda_2 t_2} = O(1)$, а $e^{-\lambda'_2 t_2} = O\left(e^{-\frac{1}{\mu}}\right)$, т. е. стремится к нулю

¹⁾ В области (I) абсцисса x изображающей точки изменяется от $+1$ до -1 со скоростью $\dot{x} \rightarrow -\infty$ при $\mu \rightarrow +0$; поэтому при $\mu \rightarrow +0$ $t_1 \rightarrow +0$; можно показать, что для ограниченных $0 < s < M$ $O(\mu) < t_1 < O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)$. В области (II) ордината y изображающей точки изменяется на конечную величину; от $y' = -(K-1) + s' > K-1$, ибо $s' > 2(K-1)$, до $y_1 = -(K-1) - s_1 < -(K-1)$ с конечной скоростью $\dot{y} = x$; отсюда следует, что $t_2 = O(1)$.

(при $\mu \rightarrow +0$) быстрее любой степени μ . Поэтому (с точностью до членов порядка $e^{-\frac{1}{\mu}}$) функция соответствия преобразования Π_2 может быть записана в виде¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \mu \lambda_2 + O\left(e^{-\frac{1}{\mu}}\right), \\ s' &= \mu [(\lambda'_2 - \lambda_2) e^{\lambda_2 t_2} - \lambda'_2] + O\left(e^{-\frac{1}{\mu}}\right). \end{aligned} \right\} \quad (8.46a)$$

С той же степенью точности для предельного цикла

$$\bar{s} = \bar{s}_1 = \mu \lambda_2 + O\left(e^{-\frac{1}{\mu}}\right). \quad (8.46b)$$

Подставив (8.46b) в первое соотношение (8.45), мы получим уравнение, определяющее \bar{t}_1 — время пробега изображающей точки по предельному циклу в области (I):

$$[\lambda_2 + \lambda_1 + O\left(e^{-\frac{1}{\mu}}\right)] e^{\lambda_1 \bar{t}_1} = (\lambda'_1 + \lambda_2) e^{\lambda_1 \bar{t}_1} + \lambda'_1 - \lambda_1. \quad (8.47)$$

Это уравнение можно решить методом последовательных приближений, используя различие в порядках величины корней λ_1 и λ'_1 . Оценим сначала порядок величины \bar{t}_1 ; так как $e^{\lambda_1 \bar{t}_1} \rightarrow 1$ при $\mu \rightarrow 0$, то для выполнения уравнения (8.47) $e^{\lambda_1 \bar{t}_1}$ должно быть величиной порядка λ'_1 , т. е. $e^{\lambda_1 \bar{t}_1} = O\left(\frac{1}{\mu}\right)$, $\lambda_1 \bar{t}_1 = O\left(\ln \frac{1}{\mu}\right)$ и $\bar{t}_1 = O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)^2$.

Подставим $e^{\lambda_1 \bar{t}_1} = 1 + O\left(\lambda_1 \bar{t}_1\right) = 1 + O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)$ в (8.47):

$$e^{\lambda_1 \bar{t}_1} = \frac{2\lambda'_1 + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda'_1 O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)}{\lambda_2 + \lambda_1} = \frac{2(K-1)^2}{\mu K} \left[1 + O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)\right],$$

¹⁾ Асимптотическое выражение (8.46a) справедливо для любых s' , больших сколь угодно малой, но фиксированной величины ($s' > a$). Первое соотношение (8.46a) показывает, что все траектории, пересекающие полупрямую (s') вне некоторой фиксированной окрестности точки $s' = 0$, и в частности все траектории, идущие из области (II), включая предельный цикл, входят в область (II)

в очень малую (порядка $e^{-\frac{1}{\mu}}$) окрестность прямой траектории $u = -K - \epsilon_1 x$.

²⁾ Таким образом, при $\mu \rightarrow +0$ $\bar{t}_1 \rightarrow +0$, но медленнее μ и быстрее μ^β ($0 < \beta < 1$), так как при любом $0 < \beta < 1$ и достаточно малых μ $O(\mu) < O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right) < O(\mu^\beta)$. Такой порядок малости \bar{t}_1 определяется тем, что предельный цикл в области (I) идет сначала в окрестности (порядка μ) точки $A(1, K-1)$ изоклины F , где $|\dot{x}| < O(1)$. Для траекторий, пересекающих полупрямую S на конечном расстоянии от точки A , $t_1 = O(\mu)$.

откуда

$$\lambda_1' \bar{t}_1 = \ln \frac{1}{\mu} + \ln \frac{2(K-1)^2}{K} + \ln \left[1 + O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right) \right],$$

и, так как

$$\ln \left[1 + O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right) \right] = O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\lambda_1'} = \mu \lambda_1 = \frac{\mu}{K-1} + O(\mu^2),$$

$$\bar{t}_1 = \frac{\mu}{K-1} \ln \frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{K-1} \ln \frac{2(K-1)^2}{K} + O\left(\mu^2 \ln \frac{1}{\mu}\right)^2. \quad (8.48)$$

Найдем теперь, пользуясь вторым соотношением (8.45), асимптотическое выражение для \bar{s}' (для координаты точки пересечения предельного цикла с полупрямой S'), с тем чтобы затем на основании (8.46а) найти \bar{t}_2 и период автоколебаний. Согласно (8.48) имеем:

$$e^{-\lambda_1' \bar{t}_1} = \frac{\mu K}{(K-1)^2} + O\left(\mu^2 \ln \frac{1}{\mu}\right),$$

$$\lambda_1' \bar{t}_1 = \frac{\mu}{(K-1)^2} \ln \frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{(K-1)^2} \ln \frac{2(K-1)^2}{K} + O\left(\mu^2 \ln \frac{1}{\mu}\right)$$

и

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1' \bar{t}_1} &= 1 + \lambda_1' \bar{t}_1 + O(\lambda_1'^2 \bar{t}_1^2) = 1 + \frac{\mu}{(K-1)^2} \ln \frac{1}{\mu} + \\ &+ \frac{\mu}{(K-1)^2} \ln \frac{2(K-1)^2}{K} + O\left(\mu^2 \ln^2 \frac{1}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Поэтому в силу второго уравнения (8.45), которое мы перепишем в виде:

$$s' = \frac{(\mu \lambda_1' - \mu \lambda_1) e^{\lambda_1' \bar{t}_1} + \mu \lambda_1' - \mu \lambda_1 e^{\lambda_1' \bar{t}_1} e^{-\lambda_1' \bar{t}_1}}{1 - e^{\lambda_1' \bar{t}_1} \cdot e^{-\lambda_1' \bar{t}_1}},$$

⁴⁾ Подставив полученное асимптотическое выражение (8.48) в правую часть уравнения (8.47), мы получим следующее приближение для \bar{t}_1 с точностью до членов порядка $\mu^3 \ln \frac{1}{\mu}$. Таким путем, методом последовательных приближений, можно получить асимптотическое разложение для \bar{t}_1 с точностью до $O\left(\mu^n \ln \frac{1}{\mu}\right)$, где n — любое целое положительное число. Однако это разложение не будет сходящимся.

получим:

$$\begin{aligned} \bar{s}' &= \left[1 + \frac{\mu K}{2(K-1)^2} \right] \left\{ \left(K-1 - \frac{2\mu}{K-1} \right) e^{\lambda_1 \bar{t}_1} + K-1 - \frac{\mu}{K-1} \right\} + \\ &+ O(\mu^2) = 2(K-1) + \frac{\mu}{K-1} \ln \frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{K-1} \left[K-3 + \ln \frac{2(K-1)^2}{K} \right] + \\ &+ O\left(\mu^2 \ln^2 \frac{1}{\mu}\right)^1. \end{aligned}$$

Тогда, используя второе уравнение (8.46а), получим:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_2 \bar{t}_2} &= \frac{\bar{s}' + \mu \lambda_2'}{\mu \lambda_2' - \mu \lambda_2} = (1 + 2\mu)(\bar{s}' + 1 - \mu) + O(\mu^2) = (2K-1) \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\mu \ln \frac{1}{\mu}}{(K-1)(2K-1)} + \mu \left[\frac{2K(2K-3)}{(K-1)(2K-1)} + \frac{\ln \frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)} \right] + \right. \\ &\left. + O\left(\mu^2 \ln^2 \frac{1}{\mu}\right) \right\}^2, \\ \lambda_2 \bar{t}_2 &= \ln(2K-1) + \frac{\mu \ln \frac{1}{\mu}}{(K-1)(2K-1)} + \mu \frac{2K(2K-3) + \ln \frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)} + \\ &+ O\left(\mu^2 \ln^2 \frac{1}{\mu}\right)^3. \end{aligned}$$

¹⁾ Погрешность числителя равна $O\left(\mu^2 \ln \frac{1}{\mu}\right)$; поэтому выражения для $\mu \lambda_1'$ и $\mu \lambda_1$ мы берем с точностью до $O(\mu^2)$, $\frac{1}{1 - e^{\lambda_1 \bar{t}_1} \cdot e^{-\lambda_1 \bar{t}_1}} = 1 + \frac{\mu K}{2(K-1)^2} + O\left(\mu^2 \ln \frac{1}{\mu}\right)$, а член $\mu \lambda_1 e^{\lambda_1 \bar{t}_1} e^{-\lambda_1 \bar{t}_1} = O\left(\mu^2 \ln \frac{1}{\mu}\right)$ вносим в остаточный член.

Из полученного асимптотического выражения для \bar{s}' следует, что точка предельного цикла с абсциссой $x = -1$ лежит на расстоянии порядка $\mu \ln \frac{1}{\mu}$ от кривой $ABCD$.

²⁾ Все члены выписываем с точностью до $O\left(\mu^2 \ln \frac{1}{\mu}\right)$. В частности,

$$\mu \lambda_2' = 1 - \mu + O(\mu^2) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\mu \lambda_2' - \mu \lambda_2} = 1 + 2\mu + O(\mu^2).$$

³⁾ Здесь удобно воспользоваться разложением

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3).$$

и, наконец,

$$\bar{t}_2 = \frac{1}{\lambda_2} (\lambda_2 \bar{t}_2) = (1 - \mu) \lambda_2 \bar{t}_2 + O(\mu^2) \quad \text{или}$$

$$\begin{aligned} \bar{t}_2 = \ln(2K - 1) + \frac{\mu \ln \frac{1}{\mu}}{(K-1)(2K-1)} + \\ + \mu \left[\frac{2K(2K-3)}{(K-1)(2K-1)} + \frac{\ln \frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)} - \ln(2K-1) \right] + O\left(\mu^2 \ln^2 \frac{1}{\mu}\right). \end{aligned} \quad (8.49)$$

Суммируя с (8.48), мы получим следующее асимптотическое выражение для периода автоколебаний мультивибратора (для периода периодического решения системы (8.39) при малых μ):

$$\begin{aligned} \tau = 2(\bar{t}_1 + \bar{t}_2) = 2 \ln(2K - 1) + \frac{4K}{(K-1)(2K-1)} \mu \ln \frac{1}{\mu} + \\ + \left[\frac{4K(2K-3)}{(K-1)(2K-1)} + \frac{4K \ln \frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)} - 2 \ln(2K-1) \right] \mu + O\left(\mu^2 \ln \frac{1}{\mu}\right). \end{aligned} \quad (8.50)$$

Старший член в этом асимптотическом разложении, как и следовало ожидать, совпадает с предельным (при $\mu \rightarrow +0$) выражением (8.43) для периода мультивибратора.

§ 6. Двухпозиционный авторулевой

В этом параграфе мы рассмотрим динамику судна, снабженного простейшей, так называемой двухпозиционной системой стабилизации курса — двухпозиционным авторулевым.

1. Постановка задачи. Пусть φ — отклонение судна от заданного курса (рис. 392). Составим упрощенное уравнение вращения судна вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести, пренебрегая боковым сносом судна при разворотах и учитывая как момент сил $M = M(\varphi)$, создаваемый рулем, так и момент сил сопротивления $-H \frac{d\varphi}{dt}$ (H — коэффициент вязкого трения). Если I — момент инерции судна относительно его вертикальной главной оси, то уравнение вращения судна имеет вид:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + H \frac{d\varphi}{dt} = M. \quad (8.51)$$

Само по себе судно не обладает устойчивостью на курсе. В самом деле, при $M=0$ (руль находится в диаметральной плоскости, т. е. в плос-

кости симметрии судна, $\psi = 0$) судно будет приходить к некоторому постоянному курсу $\varphi = \text{const}$, но последний будет зависеть от начальных условий и может быть любым. Для иллюстрации сказанного на рис. 393 приведена фазовая поверхность (развертка фазового цилиндра) судна с рулем в диаметральной плоскости: фазовые траектории составляют семейство прямых, по которым изображающая точка приближается (при $t \rightarrow +0$) к состояниям равновесия, заполняющим всю ось φ .

Устойчивость на заданном курсе может быть придана судну только рулевым, только соответствующими перемещениями руля.

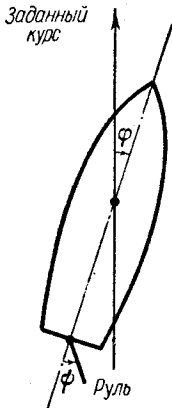


Рис. 392.

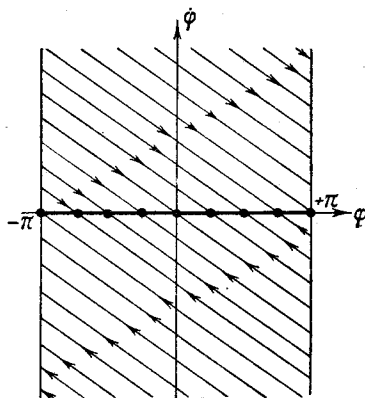


Рис. 393.

На языке разбиения фазовой поверхности на траектории задачей рулевого (безразлично, человека или системы автоматической стабилизации курса — авторулевого) является создание вместо континуума равновесных состояний одного устойчивого *состояния равновесия*, соответствующего заданному курсу ($\varphi = 0$).

Одной из простейших систем автоматической стабилизации курса является так называемый *двухпозиционный авторулевой*, при котором руль может занимать, как правило, два положения $\psi = \pm \psi_0$, создавая в каждом из них моменты сил M , равные по величине ($= M_0$), но противоположно направленные. При этом, не входя в рассмотрение динамики собственно авторулевого, мы будем считать положение руля зависящим по определенному закону от состояния судна ($M = \pm M_0$ и является функцией φ и $\frac{d\varphi}{dt}$). Простейшее двухпозиционное регулирование курса мы будем иметь тогда, когда перекладка руля с одного борта на другой совершается авторулевым при прохождении судном заданного курса (положения $\varphi = 0$). При этом мы примем, что перекладка руля совершается мгновенно. Как мы увидим дальше, такое автоматическое устройство при выполнении

некоторых требований действительно стабилизирует курс судна¹⁾. Однако естественно думать, хотя бы исходя из опыта управления рулем обычной лодки, что стабилизирующее действие устройства было бы более эффективным, если бы переключка руля совершалась не при прохождении судна через заданный курс, а несколько раньше, когда отклонение от курса уменьшается, но еще не прошло через нуль. Такое «предварение» перестановки руля обычно осуществляется на практике двумя способами: либо при помощи так называемой *коррекции по скорости*, либо путем введения так называемой *жесткой обратной связи*²⁾.

В случае коррекции по скорости применительно к рассматриваемому простейшему двухпозиционному авторулевому перестановка руля происходит не при прохождении судном заданного курса (при $\varphi = 0$), а при обращении в нуль некоторой линейной комбинации отклонения от курса и скорости изменения этого отклонения:

$$\sigma = \varphi + b \frac{d\varphi}{dt}$$

(нетрудно видеть, что при $b > 0$ перестановка руля будет совершаться с *опережением*, т. е. до прохождения судном заданного курса).

Схема такого двухпозиционного авторулевого с коррекцией по скорости (с электрической рулевой машинкой) изображена на рис. 394; там же приведена блок-схема системы: «судно + авторулевой», отображающая основные элементы системы и связи между ними. Этот авторулевой имеет два датчика: датчиком отклонения от курса φ является гирокомпас, датчиком скорости отклонения курса $\frac{d\varphi}{dt}$ — так называемый «демпфирующий гироскоп»³⁾. Эти два датчика перемещают контактирующий «усик» и контактные пластины электрозолотника так, что в соответствии со знаком величины $\sigma = \varphi + b \frac{d\varphi}{dt}$ электрозолотник через вспомогательные реле включает в нужную сторону рулевую машинку. Последняя быстро (мы будем считать, что мгновенно) переключивает руль в одно из крайних положений,

¹⁾ Очевидно, например, что для правильной работы авторулевого необходимо, чтобы при отклонении судна вправо от заданного курса (при $\varphi > 0$) руль переключивался на левый борт судна ($\psi = -\psi_0$ и $M = -M_0$) и, наоборот, при $\varphi < 0$ $\psi = +\psi_0$ и $M = +M_0$.

²⁾ Авторулевой с жесткой обратной связью будет кратко рассмотрен в п. 4 настоящего параграфа.

³⁾ Демпфирующий гироскоп представляет собой двухступенной гироскоп (вокруг вертикальной оси он может вращаться только вместе с судном), к горизонтальной оси которого приложены моменты сил пружины и сил вязкого трения специального демпфера. Поворот горизонтальной оси гироскопа (после затухания его собственных колебаний), оказывается, пропорционален скорости изменения курса судна. Название обусловлено тем, что такой гироскоп, включенный в схему авторулевого, демпфирует колебания курса судна

определяемых концевыми выключателями (как только руль приходит в крайнее положение $\psi = +\psi_0$ или $\psi = -\psi_0$, соответствующий концевой выключатель размыкает цепь реле, рулевая машинка выключается, прекращая дальнейшую перекладку руля). Очевидно, рулевая

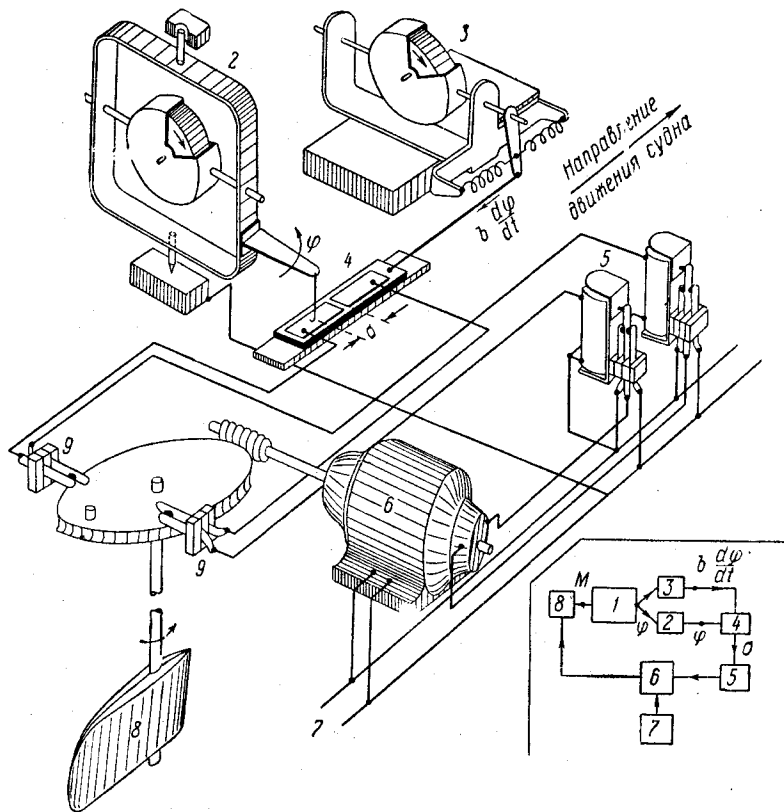


Рис. 394. Схема и блок-схема двухпозиционного авторулевого с коррекцией по скорости.

1 — судно; 2 — курсовой гироскоп (гироскопас); 3 — демифирующий гироскоп (датчик скорости); 4 — электрозолотник; 5 — реле; 6 — рулевая машинка; 7 — бортовая электрическая сеть; 8 — руль; 9 — концевые выключатели.

машинка должна быть включена так, чтобы переключать руль на левый борт ($\psi = -\psi_0$ и $M = -M_0$) при $\sigma > 0$ и на правый борт ($\psi = +\psi_0$ и $M = +M_0$) при $\sigma < 0$. Таким образом, при $\sigma \neq 0$ руль занимает одно из двух крайних положений (отсюда и название «двухпозиционный авторулевой»). Если же $\sigma = 0$ (электрозолотник находится в нейтральном положении), то рулевая машинка выключена,

и руль может занимать любое положение между крайними: $-\psi_0 \leq \psi \leq +\psi_0$, а $-M_0 \leq M \leq +M_0$ (рис. 395).

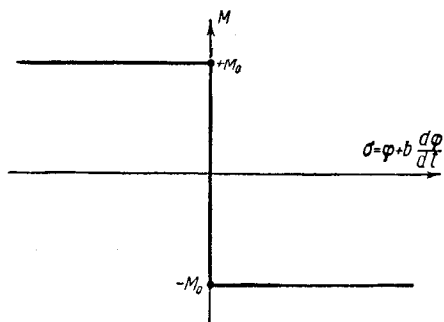


Рис. 395.

Пренебрегая зазором между контактами электрозолотника и считая перекладку руля мгновенной, мы сможем приближенно записать уравнение двухпозиционного авторулевого с коррекцией по скорости в виде:

$$M = M_0 Z \left(\varphi + b \frac{d\varphi}{dt} \right), \quad (8.52)$$

где

$$Z(\sigma) = \begin{cases} -1 & \text{при } \sigma > 0 \\ +1 & \text{при } \sigma < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad |Z(0)| \leq 1^1).$$

2. Фазовая плоскость. «Скользящий режим». После этих предварительных замечаний перейдем к рассмотрению динамики судна, снабженного двухпозиционным авторулевым со скоростной коррекцией. Прежде всего упростим уравнения (8.51) и (8.52) системы «судно + авторулевая», введя безразмерные переменные x , $t_{\text{нов}}$, z , определяемые соотношениями:

$$\varphi = Ax, \quad t_{\text{ст}} = T t_{\text{нов}}, \quad M = M_0 z,$$

где

$$A = \frac{M_0 I}{H^2} \quad \text{и} \quad T = \frac{I}{H}.$$

Эти уравнения в новых переменных получают вид:

$$\ddot{x} + x = z \quad \text{и} \quad z = Z(x + \beta \dot{x}), \quad (8.53)$$

где

$$\beta = \frac{b}{T} = b \frac{H}{I}$$

¹⁾ Мы не применяем для обозначения этой функции символ $\operatorname{sgn} \sigma$, поскольку функция $\operatorname{sgn} \sigma$ обычно определяется так, что $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

и где точкой сверху обозначено дифференцирование по новому, безразмерному времени $t_{\text{нов}}$ (оно ниже будет обозначаться через t). Далее, интересуясь только случаем малых отклонений судна от заданного курса (полагая, что $|\varphi|$ заведомо меньше π), мы будем считать фазовую поверхность x , \dot{x} изучаемой динамической системы (судно + авторулевой) обычной плоскостью.

Обозначим $\dot{x} = y$ и рассмотрим разбиение фазовой плоскости x, y на фазовые траектории. Эта фазовая плоскость делится «прямой переключений»

$$x + \beta y = 0, \quad (8.54)$$

соответствующей нейтральному положению электрозолотника, на две области (I) и (II), в каждой из которых имеет место свое линейное уравнение движения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ y &= -y - 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.55)$$

в области (I) ($x + \beta y > 0$) и

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ y &= -y + 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.55a)$$

в области (II) ($x + \beta y < 0$). Последние уравнения получаются из уравнений (8.55) заменой x, y на $-x, -y$. Поэтому траектории в областях (I) и (II) симметричны друг другу по отношению к началу координат.

На самой «прямой переключений» движение изображающей точки осталось *неопределенным*, поскольку там уравнение авторулевого (второе уравнение (8.53)) не определяет однозначно правой части уравнения движения судна (при $\sigma = 0$ координата руля может принимать любые значения $-1 \leq z \leq +1$). Поэтому для получения *полной картины* разбиения фазовой плоскости на траектории, для того чтобы каждое движение системы могло быть неограниченно прослеживаемо во времени, мы должны соответствующим образом доопределить уравнения движения рассматриваемой нами динамической системы для $x + \beta y = 0$ ¹⁾.

Рассмотрим с этой целью ход фазовых траекторий вблизи прямой (8.54). Введем приведенную координату электрозолотника

$$\xi = x + \beta y$$

и подсчитаем $\dot{\xi}$. Для области (I):

$$\dot{\xi} = \dot{x} + \beta \dot{y} = y - \beta(y + 1) = (1 - \beta)y - \beta.$$

¹⁾ Такое доопределение обычно требует некоторых дополнительных сведений о процессах в изучаемой физической системе. Оно может быть получено путем обращения к более сложной системе уравнений, отображающих детальнее особенности процессов в авторулевом, и последующего рассмотрения разумно выбранного предельного перехода (см. следующий параграф).

Изоклиной $\dot{\xi} = 0$ (геометрическим местом, где траектории параллельны «прямой переключений»), очевидно, является горизонтальная прямая

$$y = \frac{\beta}{1-\beta}.$$

Пусть $0 < \beta < 1$. В этом случае выше этой изоклины $\dot{\xi} > 0$, фазовые траектории удаляются от прямой (8.54), а ниже ее — приближаются к этой прямой. Симметричная картина имеет место в области (II). Таким образом, на «прямой переключений» (8.54) имеется отрезок

$$|y| \leq \left| \frac{\beta}{1-\beta} \right|, \quad (8.56)$$

к которому фазовые траектории *подходят с обеих сторон*. Вне этого отрезка фазовые траектории подходят к прямой (8.54) с одной

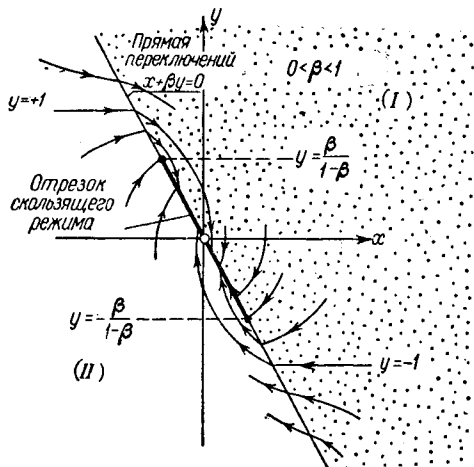


Рис. 396.

стороны и отходят с другой (рис. 396). Та же картина получается и при $\beta > 1$ (рис. 397). Теперь в области (I) траектории приближаются к прямой переключений ($\dot{\xi} < 0$), если $y > \frac{\beta}{1-\beta}$, и удаляются от нее ($\dot{\xi} > 0$), если $y < \frac{\beta}{1-\beta}$.

Такой ход фазовых траекторий в окрестности «прямой переключений» — границы областей (I) и (II) — позволяет дать следующее доопределение движения изображающей точки на этой прямой (доопределение движения системы с электрозолотником в нейтральном положении):

1) если изображающая точка приходит на «прямую переключений» вне отрезка (8.56), то она пересекает ее, переходя из области (I) в область (II) или обратно;

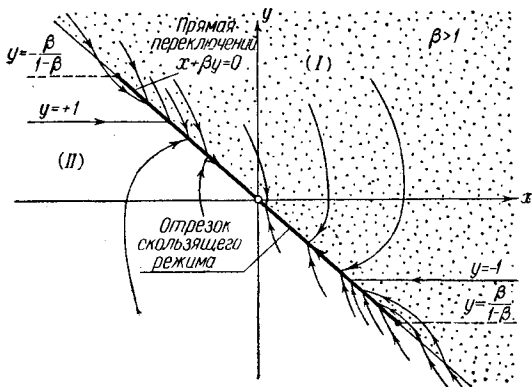


Рис. 397.

2) если изображающая точка приходит на «прямую переключений» в пределах отрезка (8.56), то дальше она движется по этому отрезку.

Закон движения системы в последнем случае получается из уравнения «прямой переключений» (8.54), если положить там $y = \dot{x}$, т. е. из уравнения

$$x + \beta \dot{x} = 0,$$

что дает

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{\beta}}. \quad (8.57)$$

Это — так называемый *скользящий режим* двухпозиционного авторулевого [98]. При работе авторулевого в этом режиме электродолотник находится в нейтральном положении и положение руля плавно изменяется от крайнего до нейтрального. Приведенная координата руля z в этом случае, очевидно, изменяется следующим образом:

$$z = \ddot{x} + \dot{x} = x_0 \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta} \right) e^{-\frac{t}{\beta}}. \quad (8.57a)$$

Для понимания механизма скользящего режима необходимо учесть дополнительно некоторые (вообще говоря, второстепенные) факторы: например, запаздывание в авторулевом или инерцию рулевой машинки, которые всегда имеются в реальных авторулевых и приводят к тому, что переключки руля происходит фактически после прохода через нуль координаты электродолотника ξ . Из-за наличия этих факторов скользящий режим состоит в частых (тем более частых, чем меньше запаздывание авторулевого или время переключки руля рулевой

машиной) переключениях электрозолотника, приводящих или к перемещению руля малыми порциями или к колебаниям руля со средним положением, близким к (8.57)¹). Идеализация скользящего режима, получаемая при нашем упрощенном рассмотрении и выражаемая приведенным выше доопределением движения системы для $x + \beta y = 0$, должна рассматриваться как предельный случай, когда указанные выше дополнительные факторы (запаздывание, конечное время, необходимое для перекладки руля) стремятся к нулю.

При наличии скользящего режима отклонение судна от заданного курса затухает аperiодически согласно (8.57) и тем быстрее, чем меньше β . Однако следует помнить, что при уменьшении β сокращается и область скользящего режима, вне которой колебания курса, как мы увидим ниже, затухают уже осцилляторно и сравнительно медленно. Поэтому как слишком малые, так и слишком большие значения параметра β , характеризующего величину скоростной коррекции, приводят к медленному установлению заданного курса.

3. Точечное преобразование. Рассмотрим теперь ход фазовых траекторий вне отрезка скользящего режима путем сведения задачи к некоторому точечному преобразованию прямой в прямую. Пусть $0 < \beta < 1$ ²). Рассмотрим для построения точечного преобразования фазовую траекторию, пересекающую «прямую переключений» (8.54) и входящую (при $t = 0$) в область (I) в некоторой точке s_0 ($-\beta s_0, s_0$); очевидно, что $s_0 > \frac{\beta}{1-\beta}$. Интегрируя (8.55), получим общее решение для области (I):

$$\left. \begin{aligned} y &= -1 + (y_0 + 1)e^{-t}, \\ x &= x_0 - t + (y_0 + 1)(1 - e^{-t}), \\ \xi &= x + \beta y = \xi_0 - t + (1 - \beta)(y_0 + 1)(1 - e^{-t}) \end{aligned} \right\} \quad (8.58)$$

(x_0, y_0, ξ_0 — значения x, y, ξ при $t = 0$). Для рассматриваемой траектории $x_0 = -\beta s_0$ и $\xi_0 = 0$; тогда при некотором $t = \tau > 0$, однозначно определяемом уравнением

$$(1 - \beta)(y_0 + 1)(1 - e^{-\tau}) - \tau = 0, \quad (8.59)$$

координата электрозолотника ξ обращается в нуль и изображающая точка возвращается на «прямую переключений» в точке s_1 ($\beta s_1, -s_1$), где

$$s_1 = 1 - (s_0 + 1)e^{-\tau}. \quad (8.59a)$$

Здесь могут представиться два случая. Если $s_1 \leq \frac{\beta}{1-\beta}$, то фазовая траектория входит в отрезок скользящего режима и дальнейшее

¹) См. следующий параграф.

²) Случай $\beta > 1$ не представляет существенного интереса из-за медленного затухания отклонения судна от заданного курса в скользящем режиме. В этом случае, как нетрудно видеть из рис. 397, скользящий режим наступает самое большое при второй перекладке руля.

движение протекает согласно (8.57). Если же $s_1 > \frac{\beta}{1-\beta}$, то траектория переходит в область (II) и вновь приходит на «прямую переключений» в некоторой точке s_2 ($-\beta s_2, s_2$) и т. д.¹⁾

Так мы получим последовательность точек пересечения рассматриваемой траектории с «прямой переключений» — последовательность точек:

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots$$

Нетрудно видеть, что в силу симметрии фазовых траекторий в областях (I) и (II) относительно начала координат каждая последующая точка s_{k+1} получается из предыдущей s_k тем же преобразованием, что и точка s_1 из точки s_0 , т. е. преобразованием с функцией последования:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= -1 + \frac{\tau}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})}, \\ s_1 &= +1 - \frac{\tau}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)}, \end{aligned} \right\} \quad (8.60)$$

получаемой из (8.59) и (8.59а). При этом точка s_k имеет последующую s_{k+1} только при условии, что $s_k > \frac{\beta}{1-\beta}$; в противном случае точка s_k не имеет последующей на полупрямой (s), так как соответствующее $|y_k|$ меньше $\frac{\beta}{1-\beta}$ и рассматриваемая фазовая траектория входит в отрезок скользящего режима.

Графики функций (8.60) изображены на рис. 398.

Для $\tau = 0$ $s_0 = \frac{\beta}{1-\beta}$

и $s_1 = -\frac{\beta}{1-\beta}$, далее при

увеличении τ s_0 и s_1 монотонно возрастают, причем при $\tau \rightarrow +\infty$ $s_0 \rightarrow +\infty$, а $s_1 \rightarrow +1$ ²⁾. Эти кривые не пересекаются (преобразование (8.60) не имеет неподвижных

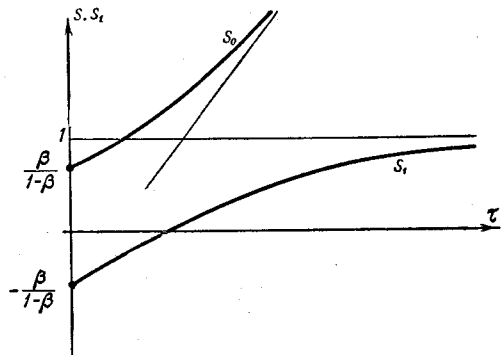


Рис. 398.

¹⁾ Нетрудно видеть, что случай $s_1 < -\frac{\beta}{1-\beta}$ невозможен.

²⁾ Действительно, при $\tau > 0$

$$\frac{ds_0}{d\tau} = \frac{e^{-\tau} [e^{\tau} - (\tau + 1)]}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})^2} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{ds_1}{d\tau} = \frac{e^{\tau} [\tau - (1-e^{-\tau})]}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)^2} > 0.$$

точек), так как

$$s_1 - s_0 = -2 \left[\frac{\frac{\tau}{2}}{(1-\beta) \operatorname{th} \frac{\tau}{2}} - 1 \right] < 0.$$

ибо $\beta < 1$ и $\frac{\tau}{2} > \operatorname{th} \frac{\tau}{2}$. Таким образом, каждая последующая точка пересечения данной фазовой траектории с «прямой переключений» лежит ближе к началу координат, чем предыдущая, и после конечного числа колебаний авторулевой входит в скользящий режим.

Число колебаний судна (число переключений руля) до входа в скользящий режим, очевидно, зависит от начальных условий и от величины параметра β . Если $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$, то при любых τ (т. е. при любых s_0) $s_1 < 1 < \frac{\beta}{1-\beta}$ и, следовательно, самое большее после одного пересечения прямой (8.54) фазовая траектория входит в отрезок скользящего режима.

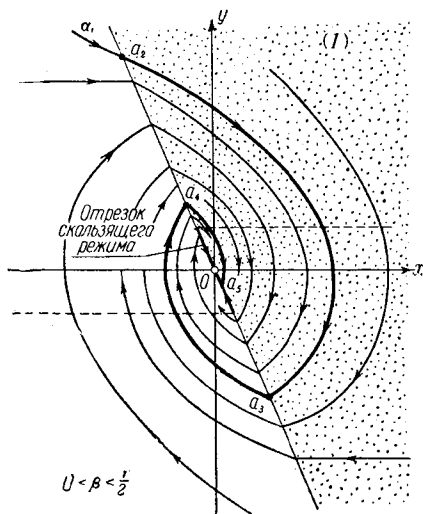


Рис. 399.

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 O$ на рис. 399. При любых начальных условиях авторулевой приходит в скользящий режим, после чего происходит аperiodическое установление заданного курса. При этом чем меньше β , тем меньше отрезок скользящего режима и тем дольше система совершает колебания, прежде чем начнется скользящий режим. При $\beta = 0$ (скоростная коррекция отсутствует совсем) скользящего режима не существует

отрезок скользящего режима. Та же картина, как мы видели, имеет место и при $\beta > 1$. Учитывая, что увеличение β уменьшает скорость аperiodического затухания отклонения судна от заданного курса в скользящем режиме авторулевого, можно, по-видимому, считать нецелесообразным применение авторулевого с большой коррекцией по скорости, — не только с $\beta > 1$, но и с $\beta > \frac{1}{2}$. На рис. 399 приведено разбиение фазовой плоскости на траектории для случая $\beta < \frac{1}{2}$ и на рис. 400 — осциллограмма колебаний курса судна с двухпозиционным авторулевым, соответствующая фазовой траектории

вообще, и весь процесс колебаний курса судна является осцилляторным и сравнительно медленно затухающим (на рис. 401 для иллюстрации сказанного изображена фазовая плоскость системы при $\beta = 0$).

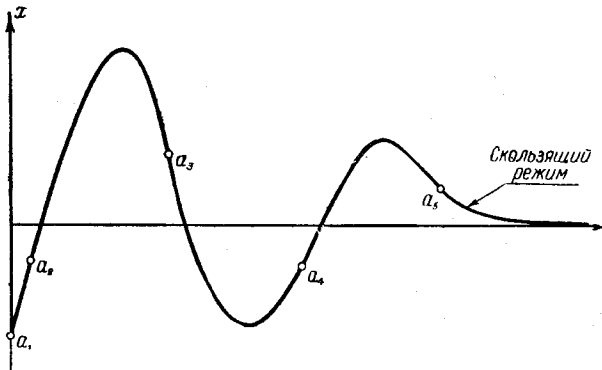


Рис. 400.

Заметим, что рассматриваемая система: судно + двухпозиционный авто-рулевой (при сделанных выше упрощающих предположениях), приходит в автоколебательный режим при $\beta < 0$, т. е. при неправильном включении демпфирующего гироскопа, приводящем к переключке руля после прохождения судном заданного курса.

Рассмотрение структуры разбиения фазовой плоскости на траектории в этом случае также может быть сведено к преобразованию точек пересечения траекторий с «прямой переключений» (функция последования по-преж-

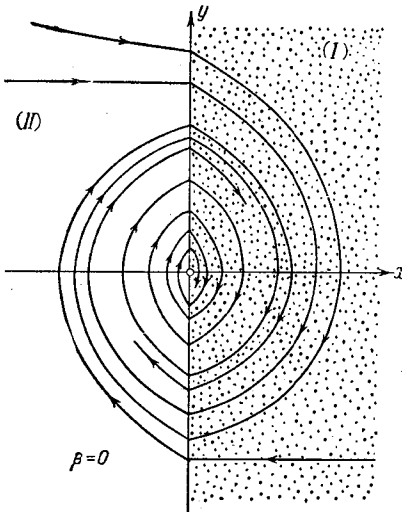


Рис. 401.

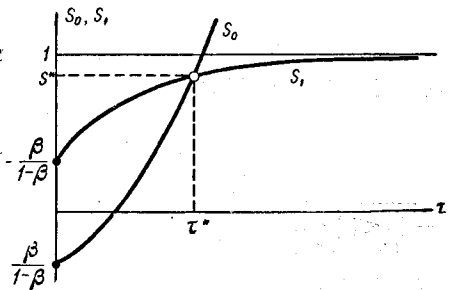


Рис. 402.

нему будет записываться в виде (8.60)). Диаграмма Ламерея для случая $\beta < 0$ изображена на рис. 402. Точечное преобразование (8.60) при $\beta < 0$ имеет единственную и устойчивую неподвижную точку, которой на фазовой плоскости

(рис. 403) соответствует устойчивый и симметричный предельный цикл. Период автоколебаний определяется из уравнений (8.60), если положить в них

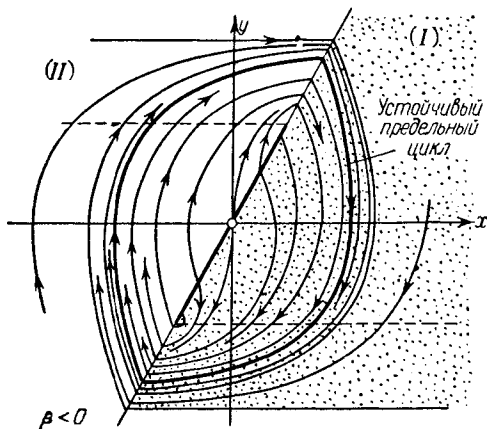


Рис. 403.

$s_1 = s_0$, или из уравнения

$$1 - \beta = \frac{\tau^*}{2} \operatorname{cth} \frac{\tau^*}{2}.$$

Нетрудно показать, что амплитуда и период автоколебаний курса судна стремятся к нулю, когда $\beta \rightarrow 0$.

4. Авторулевой с жесткой обратной связью. Рассмотрим теперь кратко второй способ осуществления опережения перекладки руля (перекладки его до прохождения судна через заданный курс), также применяемый в практике автоматического регулирования и состоящий во введении в схему авторулевого *жесткой обратной связи*. Схема такого авторулевого и блок-схема системы «судно + авторулевой» приведены на рис. 404. При наличии жесткой обратной связи рулевая машинка управляется электрозолотником, координата которого

$$\sigma^* = \varphi + B\psi$$

(ψ — угол поворота руля относительно диаметральной плоскости судна); при $\sigma^* > 0$ руль переложен на левый борт (в положение $\psi = -\psi_0$), при $\sigma^* < 0$ — на правый борт (в положение $\psi = +\psi_0$). При $\sigma^* = 0$ (электрозолотник — в нейтральном положении) рулевая машинка выключена и руль может занимать любое положение $-\psi_0 \leq \psi \leq +\psi_0$ ¹⁾.

Пренебрегая, как и ранее, временем перекладки руля и считая момент сил M , развиваемый рулем, пропорциональным углу поворота руля ψ :

$$M = \frac{M_0}{\psi_0} \psi,$$

¹⁾ Нетрудно видеть, что опережение перекладки руля получается только при $B > 0$.

мы сможем приближенно записать уравнение авторулевого с жесткой обратной связью в виде¹⁾:

$$M = + M_0 Z \left(\varphi + B \psi_0 \frac{M}{M_0} \right).$$

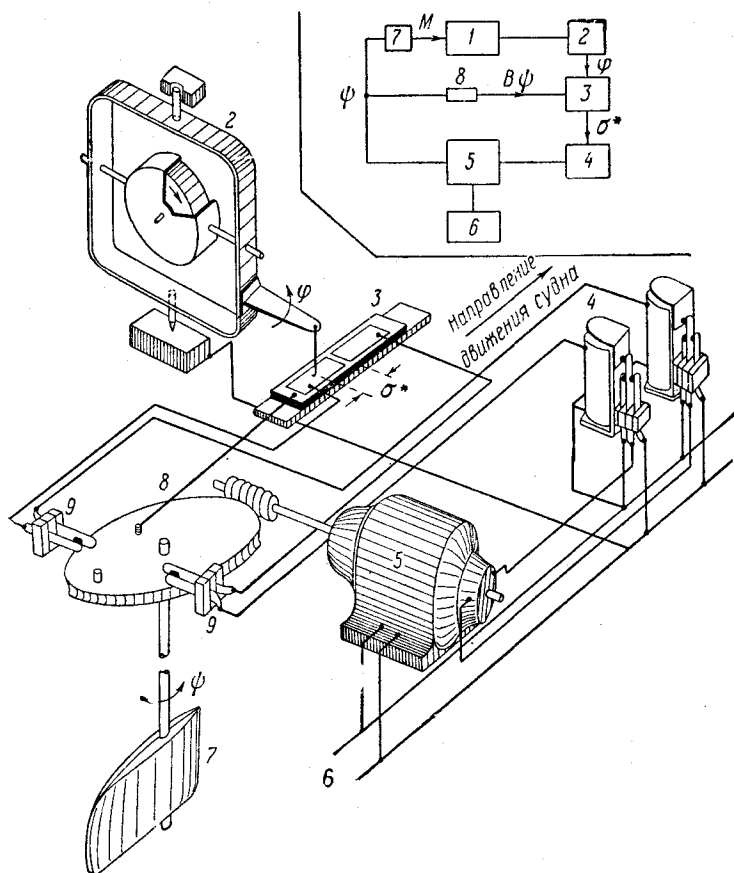


Рис. 404. Схема и блок-схема двухпозиционного авторулевого с жесткой обратной связью.

1 — судно; 2 — курсовой гироскоп (гироскопас); 3 — электрозолотник; 4 — реле; 5 — рулевая машинка; 6 — бортовая электрическая сеть; 7 — руль; 8 — рычаг жесткой обратной связи; 9 — концевые выключатели.

Тогда в переменных

$$x = \frac{H^2}{M_0 l} \varphi, \quad t_{\text{нов}} = \frac{H}{l} t_{\text{ст}} \quad \text{и} \quad z = \frac{M}{M_0} = \frac{\psi}{\psi_0}$$

¹⁾ Определение функции $Z(\sigma^*)$ см. в п. 1 настоящего параграфа.

уравнения движения судна с двухпозиционным авторулевым с жесткой обратной связью запишутся следующим образом:

$$\ddot{x} + \dot{x} = z, \quad z = Z(x + \beta^* z), \quad (8.61)$$

где $\beta^* = V\psi_0$ — приведенный коэффициент обратной связи.

Фазовая плоскость системы x, y , где $y = \dot{x}$, разбивается прямыми $x = +\beta^*$ и $x = -\beta^*$ на три области: (I), (II) и (III) (рис. 405). Об-

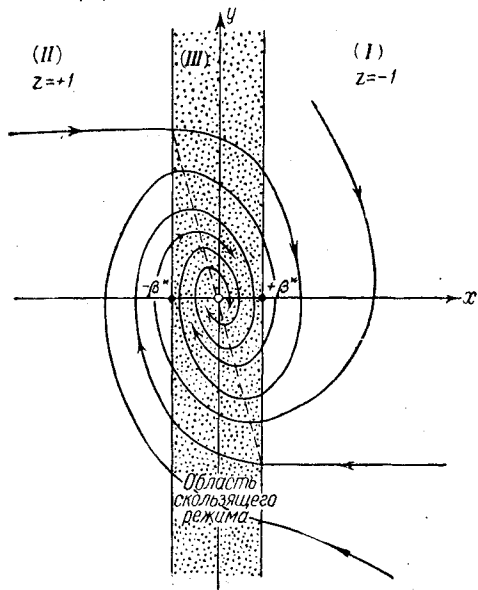


Рис. 405.

ластью, в которой $z = -1$ (руль переложен в крайнее левое положение) и, следовательно, $\xi^* = x - \beta^* \geq 0$, очевидно, является область (I): $x > \beta^*$. В этой области уравнения системы будут уравнения (8.55). Областью, где $z = +1$ (руль переложен в крайнее правое положение) и $\xi^* = x + \beta^* \leq 0$, является область (II): $x < -\beta^*$. В полосе $-\beta^* < x < +\beta^*$ (в области (III)) z не может равняться ни $+1$, ни -1 (руль не может занимать ни одного из крайних положений); поэтому там $\xi^* = x + \beta^* z \equiv 0$, — электрозолотник находится в нейтральном положении в то время, как руль плавно

перемещается, занимая промежуточные положения:

$$z = -\frac{x}{\beta^*}. \quad (8.62)$$

Это — также скользящий режим, который теперь (при наличии жесткой обратной связи) имеет место не на отрезке некоторой прямой, а на целой полосе $-\beta^* < x < +\beta^*$ фазовой плоскости. Поэтому, в отличие от авторулевого со скоростной коррекцией, в авторулеве с жесткой обратной связью скользящий режим возникает при каждой перекладке руля или, иначе говоря, все перемещения руля совершаются авторулевым, работающим в скользящем режиме.

В реальном двухпозиционном авторулеве с жесткой обратной связью скользящий режим состоит в частых включениях и выключениях рулевой машинки, приводящих к перемещению руля малыми порциями, — по закону, близкому к (8.62). Происходит это следующим образом. При изменении курса электрозолотник включает в нуж-

ную сторону рулевую машинку. Последняя перемещает руль и одновременно через жесткую обратную связь — контактные пластины электрозолотника, что приведет к выключению рулевой машинки через небольшой промежуток времени. Затем дальнейшее изменение курса вызовет новое кратковременное включение рулевой машинки и т. д. Частота включений и выключений рулевой машинки определяется запаздыванием срабатывания авторулевого (включая релейное устройство) и инерционностью самой рулевой машинки, т. е. теми факторами, которые действуют в любом реальном авторулевом и которыми мы пренебрегали в настоящем параграфе. Эта частота тем больше, чем меньше указанные факторы. Наша идеализация скользящего режима, выразившаяся в доопределении (8.62) уравнений авторулевого, получается как предельная при стремлении к нулю запаздывания авторулевого и инерционности рулевой машинки.

Заметим, что доопределение скользящего режима (8.62) можно получить и предельным переходом от непрерывной характеристики авторулевого, изображенной на рис. 406. Для такой характеристики при $|\xi^*| < \epsilon$, где $\xi^* = x + \beta^*z$,

$$z = \frac{\xi^*}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}(x + \beta^*z), \quad \text{т. е.} \quad z = -\frac{x}{\beta^* - \epsilon},$$

откуда в пределе при $\epsilon \rightarrow 0$ получим (8.62).

Изменения курса корабля во время скользящего режима авторулевого (в области (III) на фазовой плоскости) в силу первого уравнения (8.61) и уравнения (8.62) описываются линейным уравнением

$$\ddot{x} + \dot{x} + \frac{x}{\beta^*} = 0, \quad (8.62a)$$

т. е. эти изменения курса будут всегда затухающими, причем затухание будет осцилляторным при $\beta^* < 4$ и аperiodическим при $\beta^* > 4$ (наибольшая скорость затухания будет, очевидно, при $\beta^* = 4$).

На рис. 405 изображено разбиение на траектории фазовой плоскости системы судно + двухпозиционный авторулевой с жесткой обратной связью. Можно показать, например, путем сведения задачи к некоторому точечному преобразованию прямой в прямую, что все траектории при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к устойчивому состоянию равновесия $x = 0$. Это означает, что судно при любых начальных условиях будет выходить на заданный курс, причем на последнем этапе

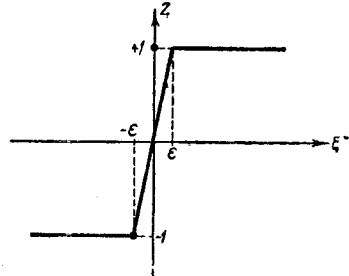


Рис. 406.

это установление курса происходит при работе авторулевого в скользящем режиме.

Б. Другие системы автоматического регулирования. В заключение параграфа отметим, что к рассмотренным здесь динамическим системам приводятся при соответствующих предположениях и многие другие системы автоматического регулирования и управления.

Для примера рассмотрим систему непрямого регулирования скорости двигателя с сервомотором «постоянной скорости» без «мертвой

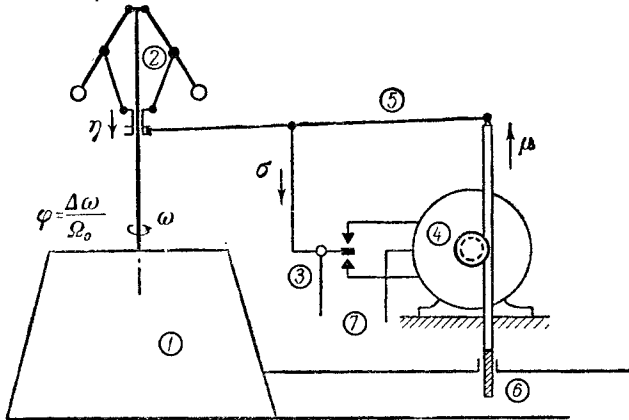


Рис. 407. Схема системы непрямого регулирования двигателя.

1 — объект регулирования (двигатель); 2 — чувствительный элемент (центробежный измеритель скорости двигателя); 3 — электророзыгрыш (переключатель направления вращения сервомотора); 4 — сервомотор (электрический реверсивный мотор); 5 — рычаг жесткой обратной связи; 6 — клапан, управляющий мощностью двигателя и управляемый сервомотором; 7 — сеть питания сервомотора.

зоны» и с идеальным чувствительным элементом (т. е. мы будем пренебрегать массой и трением в измерителе скорости вращения двигателя)¹⁾. Схема такой системы авторегулирования приведена на рис. 407. Ее уравнения движения (для состояний объекта регулирования, близких к некоторому равновесному $\omega = \Omega$) можно записать в следующем, принятом в теории автоматического регулирования виде²⁾:

линеаризованное уравнение объекта регулирования (с положительным саморегулированием)

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi = \mu;$$

¹⁾ Регулирование скорости двигателя взято лишь для большей определенности: рассматриваемый здесь объект регулирования может быть заменен на любой другой с $1/2$ степени свободы и с положительным саморегулированием. Точно так же электрический сервомотор может быть заменен на любой другой.

²⁾ См., например, [120, 99, 1].

уравнение (идеального) чувствительного элемента

$$\delta\eta + \varphi = 0;$$

уравнение обратной связи

$$\sigma = \eta - \gamma\mu;$$

уравнение сервомотора «постоянной скорости» (без «мертвой зоны»)

$$\frac{d\mu}{dt} = \begin{cases} +\frac{1}{T_s} & \text{при } \sigma > 0, \\ -\frac{1}{T_s} & \text{при } \sigma < 0. \end{cases}$$

Здесь φ — относительное изменение скорости двигателя, η — относительное изменение выходной координаты чувствительного элемента (относительное перемещение муфты центробежного измерителя), σ — относительное перемещение золотника сервомотора, μ — относительное перемещение клапана, управляющего объектом регулирования (относительное перемещение дросселя двигателя), T_a и k — так называемые время пуска и коэффициент саморегулирования двигателя, δ — коэффициент неравномерности чувствительного элемента, γ — коэффициент жесткой обратной связи и T_s — время сервомотора (все коэффициенты уравнений положительны). Подставив последнее уравнение в первое, а первое и второе — в третье, получим:

$$T_a T_s \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k T_s \frac{d\varphi}{dt} = \begin{cases} +1 & \text{при } \sigma > 0, \\ -1 & \text{при } \sigma < 0 \end{cases}$$

и

$$\sigma = -\left(\frac{1}{\delta} + \gamma k\right)\varphi - \gamma T_a \frac{d\varphi}{dt}.$$

Если теперь ввести новые переменные x , ξ и новое, безразмерное время $t_{\text{нов}}$, связанные со старыми переменными соотношениями:

$$t = \frac{T_a}{k} t_{\text{нов}}, \quad \varphi = \frac{T_a}{k^2 T_s} x \quad \text{и} \quad \sigma = -\frac{T_a \left(\frac{1}{\delta} + \gamma k\right)}{k^2 T_s} \xi,$$

то уравнения рассматриваемой системы непрямого регулирования приводятся к виду:

$$\ddot{x} + \dot{x} = \begin{cases} -1 & \text{при } \xi > 0, \\ +1 & \text{при } \xi < 0, \end{cases}$$

где

$$\xi = x + \beta \dot{x} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\gamma k}{\frac{1}{\delta} + \gamma k},$$

т. е. к системе уравнений (8.53).

¹⁾ Очевидно, для рассматриваемой системы $0 < \beta < 1$.

§ 7. Двухпозиционный авторулевой с запаздыванием

Как мы говорили в предыдущем параграфе, для раскрытия механизма скользящего режима двухпозиционного авторулевого необходим учет тех или иных факторов, действующих в реальном авторулевом и приводящих к запаздыванию перекладки руля — к перекладке руля *после* прохождения через нуль координаты электрозолотника σ . Среди этих факторов были указаны запаздывание срабатывания авторулевого и инерционность рулевой машинки (малое, но конечное время перекладки руля). В настоящем параграфе мы рассмотрим динамику судна с авторулевым при приближенном (и раздельном) учете этих факторов, ограничиваясь случаем двухпозиционного авторулевого со скоростной коррекцией¹⁾.

В качестве первой причины, вызывающей запаздывание перекладки руля, мы рассмотрим так называемое «*пространственное запаздывание*» электрозолотника. Именно, мы предположим, что перекладка руля с одного борта судна на другой совершается (по-прежнему

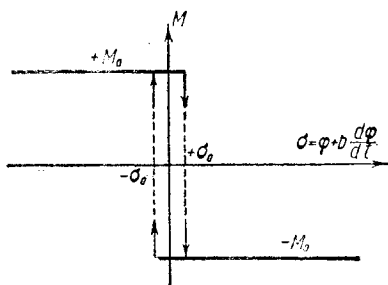


Рис. 408.

мгновенно) не при обращении в нуль координаты электрозолотника σ , а при $\sigma = \pm \sigma_0$, если σ увеличивается (руль перекадывается в положение $\psi = -\psi_0$), и при $\sigma = -\sigma_0$, если σ уменьшается (руль перекадывается в положение $\psi = +\psi_0$). Соответствующая характеристика авторулевого приведена на рис. 408. Такое пространственное запаздывание может быть обусловлено, например, наличием люфта в электрозолотнике

(люфтом, равным $2\sigma_0$, в тяге, соединяющей демпфирующий гироскоп с контактными пластинами электрозолотника; см. рис. 409). Такая постановка задачи приведет к рассмотрению динамической системы с двулистной фазовой поверхностью.

Другой причиной запаздывания перекладки руля является конечная (не бесконечно большая) скорость изменения положения руля (угла ψ) при перекладке руля рулевой машинкой. Можно было бы предположить, что перекладка руля начинается непосредственно после обращения в нуль координаты электрозолотника σ , но происходит не мгновенно, а с некоторой постоянной скоростью $\dot{\psi} = -A \operatorname{sgn} \sigma$ ($A = \text{const}$) и до тех пор, пока руль не достигнет крайнего поло-

¹⁾ Рассмотрение механизма скользящего режима двухпозиционного авторулевого с жесткой обратной связью требует перехода к динамическим системам с $1\frac{1}{2}$ степенями свободы; рассмотрение таких систем выходит за рамки настоящей книги.

жения $\psi = \pm \psi_0$ или σ не обратится в нуль вновь (в первом случае продолжительность перекладки руля равна $\frac{2\psi_0}{A}$)¹⁾. Однако такая динамическая система: судно + авторулевой с рулевой машинкой «постоянной скорости» будет иметь $1\frac{1}{2}$ степени свободы (фазовое

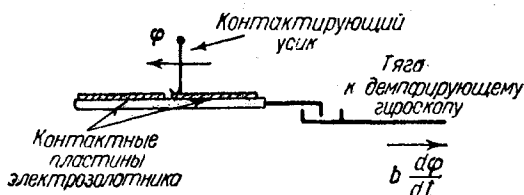


Рис. 409.

пространство будет трехмерным), а ее рассмотрение не будет сводиться к рассмотрению точечного преобразования прямой в прямую.

Поэтому мы заменим такое довольно подробное и детальное рассмотрение самого процесса перекладки руля упрощенным предположением, что перекладка руля совершается мгновенно, но спустя некоторый постоянный промежуток времени Δ после обращения в нуль координаты электроизолятника σ (в Δ входит составной частью время срабатывания релейного устройства, управляющего работой рулевой машинки)²⁾. Тогда мы получим кусочно-линейную систему второго порядка с *временным запаздыванием*, движение которой описывается дифференциально-разностным уравнением второго порядка; рассмотрение динамики такой системы (для некоторого, основного класса движений) может быть сведено к рассмотрению точечного преобразования прямой в саму себя.

1. Авторулевой с пространственным запаздыванием. Перейдем теперь к рассмотрению динамики системы «судно + двухпозиционный авторулевой» со скоростной коррекцией при учете пространственного запаздывания в электроизоляльнике. Характеристика такого авторулевого была изображена на рис. 408; авторулевой держит руль в положении $\psi = +\psi_0$ ($M = +M_0$) при $\sigma < \sigma_0$ и в положении $\psi = -\psi_0$ ($M = -M_0$) при $\sigma > -\sigma_0$, переключая руль мгновенно из одного крайнего

¹⁾ В такой постановке задачи считается, что ψ достигает постоянного значения $\pm A$ сразу же (мгновенно) после включения рулевой машинки и значения, равного нулю, после ее выключения, т. е. пренебрегают моментом инерции рулевой машинки и массой всех частей рулевого устройства, приводимых в движение рулевой машинкой.

²⁾ Такое запаздывание на некоторый постоянный промежуток времени обычно называют *временным* в отличие от *пространственного* запаздывания, когда запаздывание срабатывания релейной системы определяется не интервалом времени, а перемещением изображающей точки в фазовом пространстве на некоторое, постоянное расстояние (изменим $|\sigma|$ на σ_0 в нашей задаче об авторулевом).

положения в другое только при $\sigma = \pm \sigma_0$, когда σ увеличивается, и при $\sigma = -\sigma_0$, когда σ уменьшается. При $-\sigma_0 < \sigma < +\sigma_0$ положение руля уже не определяется однозначно координатой электрозолотника σ (может быть как $\psi = +\psi_0$, так и $\psi = -\psi_0$), а определяется *предшествующими состояниями* системы: руль остается в том же положении, которое он занимал в непосредственно предшествующие моменты времени. Эта неоднозначность характеристики авторулевого (неоднозначность момента сил руля M как функции координаты электрозолотника $\sigma = \varphi + b \frac{d\varphi}{dt}$), очевидно, приводит к тому, что в качестве фазовой поверхности системы мы не можем взять плоскость $\varphi, \frac{d\varphi}{dt}$. Фазовая поверхность будет *двулистная*, состоящая из двух листов (I) и (II), представляющих соответственно множества состояний

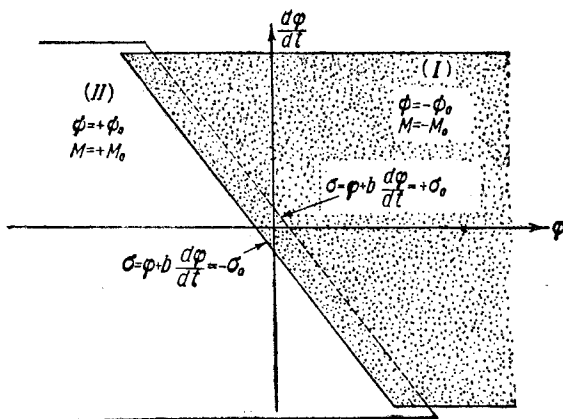


Рис. 410.

системы с рулем в левом и правом крайних положениях и перекрывающихся друг с другом в пределах «зоны неоднозначности»: $|\sigma| < \sigma_0$ (рис. 410). При этом в соответствии с принятой характеристикой авторулевого мы должны считать, что переход изображающей точки с листа (I) на лист (II) происходит только на границе листа (I), а обратный переход — только на границе листа (II)¹⁾.

Введем (так же как в предыдущем параграфе) новые переменные x, ξ, z и новое, безразмерное время $t_{\text{нов}}$, связанные со старыми переменными соотношениями:

$$\varphi = \frac{M_0 I}{H^2} x, \quad \sigma = \frac{M_0 I}{H^2} \xi, \quad M = \pm M_0 z \quad \text{и} \quad t = \frac{I}{H} t_{\text{нов}}.$$

¹⁾ См. также § 6 гл. III, где были рассмотрены две динамические системы с двулистными фазовыми поверхностями.

Тогда уравнения движения рассматриваемой динамической системы приведутся к виду, аналогичному (8.53):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -y + z, \\ z &= Z^*(\xi) = \begin{cases} -1 & \text{при } \xi > -\frac{\alpha}{2}, \\ +1 & \text{при } \xi < +\frac{\alpha}{2} \end{cases} \\ \xi &= x + \beta y, \quad \alpha = \frac{2H^2}{M_0 I} \sigma_0, \quad \beta = \frac{bH^2}{I}. \end{aligned} \right\} \quad (8.63)$$

На листе (I), соответствующем множеству состояний системы с рулем в левом крайнем положении ($\psi = -\psi_0$) и представляющем собой полуплоскость

$$\xi = x + \beta y > -\frac{\alpha}{2},$$

$M = -M_0$, т. е. $z = -1$, и следовательно, уравнения движения системы запишутся в виде (8.55), а их решением будут соотноше-

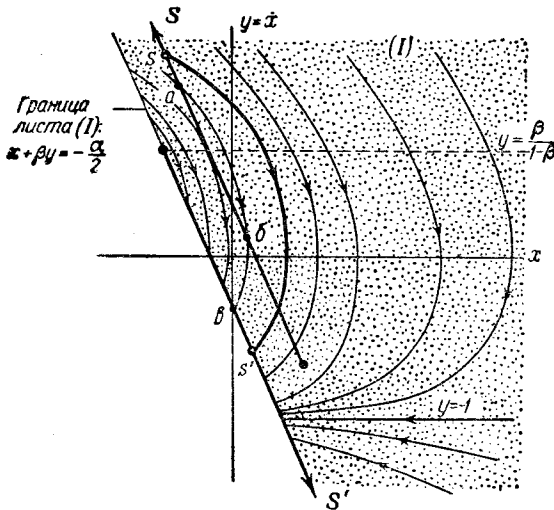


Рис. 411.

ния (8.58). Разбиение этого листа на фазовые траектории изображено на рис. 411 (для определенности взят случай $0 < \beta < \frac{1}{2}$). Как

¹⁾ При $|\xi| < \frac{\alpha}{2}$ $z = +1$ или -1 , сохраняя то значение, которое было в предшествующие моменты времени.

нетрудно видеть, на листе (*I*) нет состояний равновесия, и все траектории выходят на его границу

$$\xi = x + \beta y = -\frac{\alpha}{2}$$

и затем переходят на лист (*II*). Отметим, что траектории на листе (*II*) симметричны траекториям на листе (*I*) по отношению к началу координат. Эта симметричность является непосредственным следствием уравнений (8.63), точнее, их инвариантности относительно замены переменных x, y на $-x, -y$.

Построим на листе (*I*) (рис. 411) полупрямую S' :

$$x + \beta y = -\frac{\alpha}{2}, \quad \xi = (1 - \beta)y - \beta \leq 0,$$

через которую изображающие точки переходят на лист (*II*), и симметричную ей полупрямую S :

$$x + \beta y = +\frac{\alpha}{2}, \quad (1 - \beta)y + \beta \geq 0$$

— полупрямую перехода траекторий с листа (*II*) на лист (*I*); выберем координаты: $s = y$ на полупрямой S и $s = -y$ на полупрямой S' (симметричным точкам на этих полупрямых соответствуют одинаковые значения координаты s), и рассмотрим точечное преобразование Π полупрямой S в полупрямую S' :

$$s' = \Pi(s),$$

осуществляемое траекториями на листе (*I*)¹⁾. В свою очередь точки полупрямой S' преобразуются в точки полупрямой S траекториями на листе (*II*), причем в силу указанной выше симметрии траекторий на листах (*I*) и (*II*) это преобразование будет тождественным с преобразованием Π . Таким образом, это преобразование Π определяет в последовательности значений

$$s, s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots$$

для точек пересечения каждой заданной фазовой траектории с полупрямыми S и S' (с «полупрямыми переключений») каждое последующее значение s_{k+1} по предыдущему s_k :

$$s_{k+1} = \Pi(s_k),$$

что, очевидно, позволяет свести рассмотрение структуры разбиения

¹⁾ Ясно, что каждая точка s полупрямой S имеет последующую точку s' на полупрямой S' . Это преобразование будет однозначным и непрерывным; однако взаимной однозначностью преобразование Π не обладает, так как полупрямая S не является полупрямой без контакта (в ее точке $s = y = \frac{\beta}{1-\beta}$, $\xi = 0$, т. е. фазовые траектории касаются этой полупрямой). Например, точки a и b полупрямой S на рис. 411, принадлежащие одной и той же траектории, преобразуются преобразованием Π в одну точку v полупрямой S' .

двulistной фазовой поверхности на траектории к исследованию этого точечного преобразования.

Подставив в (8.58) $\xi_0 = +\frac{\alpha}{2}$ и $y_0 = s$ и обозначив время пробега изображающей точки по траектории на листе (l) от полупрямой S до полупрямой S' через τ (при $t = \tau > 0$ $\xi = -\frac{\alpha}{2}$ и $y = -s'$), мы получим соотношения:

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{2} &= +\frac{\alpha}{2} - \tau + (1 - \beta)(s + 1)(1 - e^{-\tau}), \\ -s' &= -1 + (s + 1)e^{-\tau}, \end{aligned}$$

после разрешения которых относительно s и s' мы получим функцию соответствия преобразования Π в следующей параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} s &= -1 + \frac{\tau - \alpha}{(1 - \beta)(1 - e^{-\tau})}, \\ s' &= +1 - \frac{\tau - \alpha}{(1 - \beta)(e^{\tau} - 1)}. \end{aligned} \right\} (8.64)$$

Для построения диаграммы Ламе-рея введем вспомогательные функции:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(\tau) &= \frac{\tau - \alpha}{1 - e^{-\tau}}, \\ \Psi_2(\tau) &= \frac{\tau - \alpha}{e^{\tau} - 1} = \Psi_1(\tau) e^{-\tau}. \end{aligned} \right\} (8.65)$$

Графики этих функций (для $\tau > 0$) приведены на рис. 412. Первая из них — монотонно возрастающая функция, вторая имеет максимум при значении $\tau = \tau_1$, определяемом условием ¹⁾

$$\Psi_1'(\tau_1) = 1;$$

при $\tau \rightarrow 0$ Ψ_1 и $\Psi_2 \rightarrow -\infty$; при $\tau \rightarrow +\infty$ $\Psi_1 \rightarrow \tau - \alpha$, а $\Psi_2 \rightarrow +0$.

Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} s &= -1 + \frac{\Psi_1(\tau)}{1 - \beta}, & s' &= +1 - \frac{\Psi_2(\tau)}{1 - \beta}, \\ \frac{ds}{d\tau} &= \frac{\Psi_1'(\tau)}{1 - \beta}, & \frac{ds'}{d\tau} &= -\frac{\Psi_2'(\tau)}{1 - \beta} \quad \text{и} \quad \frac{ds'}{ds} = -\frac{\Psi_2'(\tau)}{\Psi_1'(\tau)}, \end{aligned} \right\} (8.64a)$$

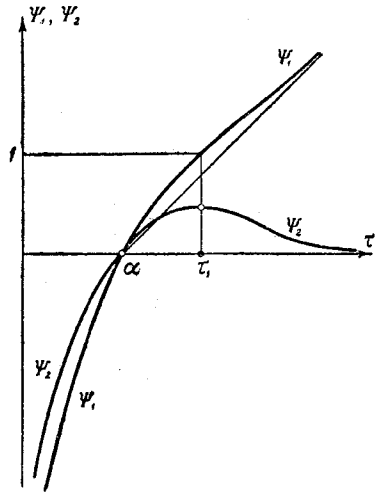


Рис. 412.

¹⁾ В самом деле, $\frac{d\Psi_1}{d\tau} = \frac{1 - e^{-\tau} - (\tau - \alpha)e^{-\tau}}{[1 - e^{-\tau}]^2} = \frac{e^{-\tau}[\alpha + e^{\tau} - \tau - 1]}{[1 - e^{-\tau}]^2} > 0$ при $\tau > 0$ и $\alpha > 0$; $\frac{d\Psi_2}{d\tau} = \frac{e^{\tau} - 1 - (\tau - \alpha)e^{\tau}}{(e^{\tau} - 1)^2} = \frac{1 - \Psi_1(\tau)}{e^{\tau} - 1}$, т. е. функция $\Psi_2(\tau)$ достигает максимума, когда Ψ_1 обращается в единицу (при $\tau < \tau_1$ $\Psi_2' > 0$ и при $\tau > \tau_1$ $\Psi_2' < 0$). Ясно, что $\tau_1 > \alpha$.

причем начальной точке $s = s_0 = -\frac{\beta}{1-\beta}$ полупрямой S соответствует значение $\tau = \tau_0$, определяемое уравнением¹⁾

$$\Psi_1(\tau_0) = 1 - 2\beta.$$

Пусть $0 < \beta < 1$. В этом случае на полупрямой S $s = y \geq s_0 = -\frac{\beta}{1-\beta}$, поэтому точкам этой полупрямой соответствуют значения параметра преобразования $\tau \geq \tau_0$ (при $\beta < 1$ $\frac{ds}{d\tau} > 0$). Используя графики функций Ψ_1 и Ψ_2 и соотношения (8.64а), нетрудно построить диаграмму Ламерея; она для случая $0 < \beta < 1$ построена на рис. 413.

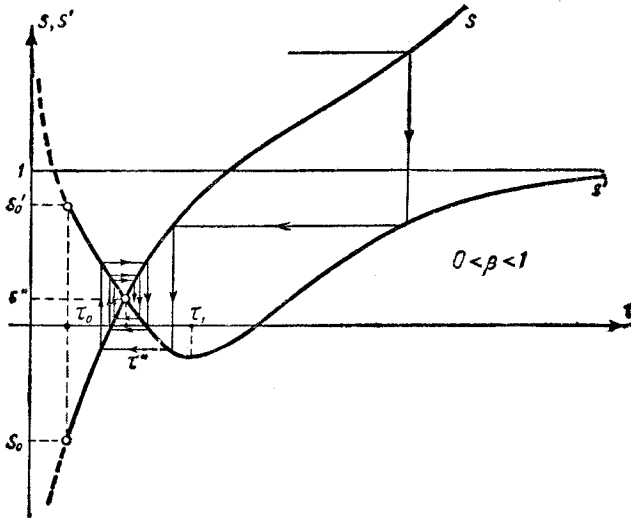


Рис. 413.

Нетрудно видеть, что кривые (8.64) имеют единственную точку пересечения, а следовательно, преобразование Π имеет *единственную неподвижную точку* ($s = s' = s^*$, $\tau = \tau^*$). Это непосредственно следует из того, что разность

$$s - s' = -2 + \frac{1}{1-\beta} [\Psi_1(\tau) + \Psi_2(\tau)] = -2 + \frac{\tau - \alpha}{1-\beta} \operatorname{cth} \frac{\tau}{2}$$

является непрерывной и монотонно возрастающей функцией τ , так как $\beta < 1$ и при α , $\tau > 0$

$$\frac{d}{d\tau} [\Psi_1(\tau) + \Psi_2(\tau)] = \frac{d}{d\tau} \left[(\tau - \alpha) \operatorname{cth} \frac{\tau}{2} \right] = \frac{\alpha + \operatorname{sh} \tau - \tau}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2}} > 0, \quad (8.65a)$$

¹⁾ τ_0 и τ_1 определяются указанными выше уравнениями однозначно в силу монотонности функции $\Psi_1(\tau)$. Очевидно, $\tau_0 < \tau_1$.

причем эта разность стремится к $+\infty$, когда $\tau \rightarrow +\infty$, а при $\tau = \tau_0$ равняется

$$s_0 - s'_0 = -2 + \frac{1}{1-\beta} (1 - 2\beta) (1 + e^{-\tau_0}) = -\frac{1 - e^{-\tau_0} + 2\beta e^{-\tau_0}}{1-\beta} < 0.$$

Значение параметра $\tau = \tau^*$ для неподвижной точки преобразования П, очевидно, однозначно определяется уравнением

$$-2 + \frac{\tau^* - \alpha}{1-\beta} \operatorname{cth} \frac{\tau^*}{2} = 0$$

или

$$\tau^* - 2(1-\beta) \operatorname{th} \frac{\tau^*}{2} = \alpha, \quad (8.66)$$

а координата s^* неподвижной точки — соотношением

$$s^* = -1 + \frac{\tau^* - \alpha}{(1-\beta)(1 - e^{-\tau^*})}$$

или, поскольку $\frac{\tau^* - \alpha}{1-\beta} = 2 \operatorname{th} \frac{\tau^*}{2} = 2 \frac{1 - e^{-\tau^*}}{1 + e^{-\tau^*}}$,

$$s^* = -1 + \frac{2}{1 + e^{-\tau^*}} = \frac{1 - e^{-\tau^*}}{1 + e^{-\tau^*}} = \operatorname{th} \frac{\tau^*}{2}. \quad (8.66a)$$

Заметим, что при малых α (при малой ширине «зоны неопределенности» характеристики авторулевого, т. е. при малом запаздывании) τ^* и s^* также малы; именно, с точностью до членов порядка α^3

$$\tau^* = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{и} \quad s^* = \frac{\alpha}{2\beta}. \quad (8.66б)$$

Эта неподвижная точка ($s = s' = s^*$, $\tau = \tau^*$) является *устойчивой*, так как условие ее устойчивости

$$\left| \frac{ds'}{d\tau} \right| < \left| \frac{ds}{d\tau} \right| \quad \text{при} \quad \tau = \tau^*$$

в силу (8.64a) сводится к неравенству

$$\frac{d\Psi_1}{d\tau} > \left| \frac{d\Psi_2}{d\tau} \right| \quad \text{при} \quad \tau = \tau^*,$$

выполняемому всегда. В самом деле, если $\tau^* > \tau_1$, то при $\tau = \tau^*$ $\frac{d\Psi_2}{d\tau} < 0$ и условие устойчивости неподвижной точки эквивалентно неравенству

$$\frac{d}{d\tau} (\Psi_1 + \Psi_2) > 0 \quad \text{при} \quad \tau = \tau^*,$$

справедливость которого была доказана выше для любых $\tau > 0$ (см. (8.65а)). Если же $\tau^* < \tau_1$, то при $\tau = \tau^* \frac{d\Psi_2}{d\tau} > 0$, в силу чего условие устойчивости принимает вид:

$$\frac{d}{d\tau}(\Psi_1 - \Psi_2) > 0 \quad \text{при } \tau = \tau^*$$

и также всегда выполняется, так как

$$\Psi_1 - \Psi_2 = \tau - \alpha \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\tau}(\Psi_1 - \Psi_2) = 1.$$

Итак, при $0 < \beta < 1$ точечное преобразование Π имеет *единственную* и притом *устойчивую неподвижную точку*, которая, как нетрудно видеть, является предельной точкой для последовательностей:

$$s, s_1, s_2, \dots$$

с любыми начальными точками s .

То же самое имеет место и при $\beta \geq 1$. При $\beta = 1$ полупрямые S и S' превращаются в прямые $x + \beta y = \frac{\alpha}{2}$ и $x + \beta y = -\frac{\alpha}{2}$, причем в силу (8.58) время пробега изображающей точки от прямой S до прямой S' не зависит от s и равно $\tau = \alpha$. В этом случае функция последования преобразования Π получается в явном виде:

$$s' = 1 - (s + 1)e^{-\alpha},$$

а само точечное преобразование Π имеет единственную и устойчивую неподвижную точку $s^* = \text{th } \frac{\alpha}{2}$.

При $\beta > 1$ в точках полупрямой S : $s = y \leq -\frac{\beta}{1-\beta} = s_0$, но, поскольку $\frac{ds}{d\tau} < 0$ при $\beta > 1$, точкам этой полупрямой соответствуют по-прежнему значения $\tau \geq \tau_0$. Диаграмма Ламерея для этого случая изображена на рис. 414. Существование неподвижной точки вытекает из непрерывности функций (8.64) и из неравенств: $s - s' > 0$ при $\tau = \tau_0$ и $s - s' < 0$ ($s - s' \rightarrow -\infty$) при $\tau \rightarrow +\infty$, единственность — из монотонности убывания $s - s'$ при изменении τ от τ_0 до $+\infty$. Доказательство устойчивости неподвижной точки при $\beta > 1$ ничем не отличается от доказательства, проведенного выше для случая $0 < \beta < 1$.

Таким образом, при любом положительном значении параметра β на фазовой поверхности рассматриваемой динамической системы имеется единственный и притом устойчивый и симметричный предельный цикл, к которому стремятся (при $t \rightarrow +\infty$) все фазовые траектории (рис. 415). Иначе говоря, судно с рассматриваемым авторулевым при любых начальных условиях приходит в автоколебательный режим —

в режим незатухающих периодических колебаний около заданного курса ($\varphi = 0$ или $x = 0$). Амплитуда и период этих колебаний тем

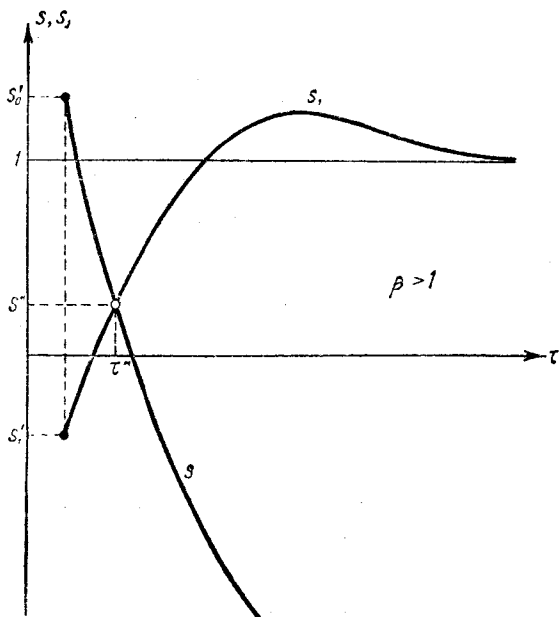


Рис. 414.

меньше, чем меньше запаздывание авторулевого и чем больше коррекция по скорости¹⁾. Одна из осциллограмм колебаний курса судна,

¹⁾ Уравнение той части предельного цикла, которая расположена на листе (I), согласно (8.58) ($y_0 = s^*$, $x_0 = \frac{\alpha}{2} - \beta s^*$) записывается в виде:

$$y = -1 + (1 + s^*)e^{-t}, \quad x = \frac{\alpha}{2} - \beta s^* - t + (1 + s^*)(1 - e^{-t}).$$

Обозначим через \bar{t} интервал времени, через который изображающая точка пересечет ось абсцисс, а отклонение от курса достигнет своего наибольшего, амплитудного значения. Очевидно,

$$e^{\bar{t}} = 1 + s^*, \quad \text{т. е. } \bar{t} = \ln(1 + s^*),$$

и следовательно, амплитуда автоколебаний курса

$$\bar{x} = \frac{\alpha}{2} + (1 - \beta)s^* - \ln(1 + s^*).$$

Для малых s^* (для $\alpha \ll \beta$) согласно (8.666) имеем: $\bar{x} = \frac{s^{*2}}{2} = \frac{\alpha^2}{8\beta^2}$.

Период автоколебаний (в единицах безразмерного времени) равен $2\tau^*$, т. е. при $\alpha \ll \beta$ равен $\frac{2\alpha}{\beta}$.

соответствующая траектории A на рис. 415, приведена на рис. 416 (точками на кривой отмечены моменты переключения авторулевого —

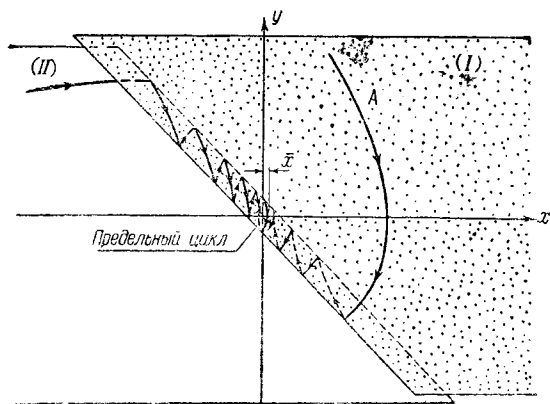


Рис. 415.

моментами времени, в которые происходят переключки руля из одного крайнего положения в другое).

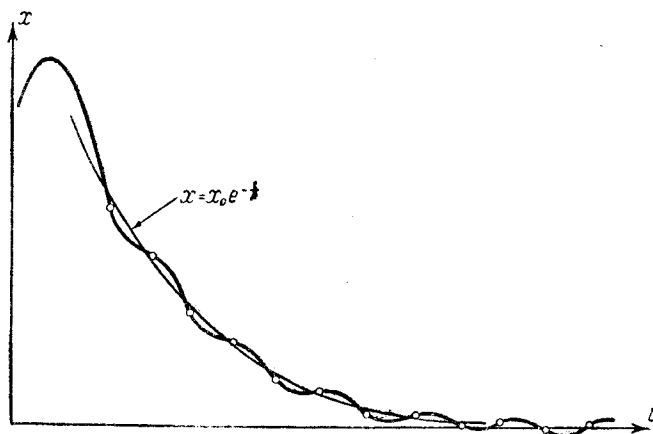


Рис. 416.

Траектории, выходящие на «прямые переключений» $x + \beta y = \pm \frac{\alpha}{2}$ в точках с $|y| < \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$, идут в дальнейшем между этими прямыми, т. е. в δ -окрестности прямой $x + \beta y = 0$, где $\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}}$. Эти

зигзагообразные траектории, очевидно, и соответствуют *скользящему режиму* авторулевого, когда авторулевой, не выходя за пределы «зоны неоднозначности», производит частые перекладки руля попеременно то в одно, то в другое крайнее положение (через интервалы времени Δt порядка $\frac{\alpha}{\beta}$)¹⁾. Во время скользящего режима $y = \dot{x} = -\frac{x}{\beta} + O(\alpha)$ и, следовательно, при уменьшении зоны запаздывания авторулевого (при $\alpha \rightarrow 0$, когда интервалы времени Δt , через которые происходят перекладки руля, стремятся к нулю) зигзагообразные траектории стремятся к прямой $x + \beta y = 0$, $x \rightarrow x_0 e^{-t/\beta}$, а размеры предельного цикла и амплитуда автоколебаний курса стремятся к нулю. Таким образом, в пределе при $\alpha \rightarrow 0$ мы получаем то доопределение скользящего режима, которое было дано (в виде постулата) в предыдущем параграфе.

2. Авторулевой с временным запаздыванием. Качественно такие же результаты получаются и при рассмотрении динамической модели судна с двухпозиционным авторулевым, когда запаздывание срабатывания авторулевого идеализируется как временное запаздывание, т. е. предполагается, что авторулевой переключает руль через некоторый постоянный промежуток времени Δ после прохождения через нуль координаты электрозолотника σ .

В тех же переменных, которые мы использовали в предыдущем разделе параграфа, уравнения движения судна с двухпозиционным авторулевым, имеющим временное запаздывание, очевидно, запишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -y + z, \end{aligned} \right\} \quad (8.67)$$

где

$$z(t) = Z[\xi(t - \theta)] = \begin{cases} -1 & \text{при } \xi(t - \theta) \geq 0, \\ +1 & \text{при } \xi(t - \theta) < 0, \end{cases}$$

$\xi = x + \beta y$ и $\theta = \frac{H}{T} \Delta$ — приведенное время запаздывания. Теперь, в отличие от ранее рассмотренных динамических систем, уравнения движения судна с авторулевым являются уже не дифференциальными, а *дифференциально-разностными*: скорости изменения переменных x , y (в частности, угловое ускорение судна) в момент времени t определяются не только значением y в этот момент времени, но и

¹⁾ Изменение y в промежутки времени между переключениями авторулевого является величиной порядка $\frac{\alpha}{\beta}$, а $|\dot{y}|$ — величиной порядка единицы; отсюда промежутки времени Δt между переключениями авторулевого имеют порядок величины $\frac{\alpha}{\beta}$.

значением координаты электрозолотника ξ в другой, более ранний момент $t' = t - \theta$. Вследствие этого движение системы при $t > t^*$ не определяется однозначно заданием x, y в момент времени t^* , а требует для своего полного и однозначного определения задания функции $x(t)$ на отрезке времени $t^* - \theta \leq t \leq t^*$. Иначе говоря, состояние рассматриваемой системы в любой момент времени t^* определяется заданием функции $x(t)$ на отрезке времени $t^* - \theta \leq t \leq t^*$ (или, что то же самое, заданием x, y в момент времени t^* и кусочно-постоянной функцией $Z[\xi(t)]$ для $t^* - \theta < t \leq t^*$); соответственно фазовым пространством системы будет не какая-либо поверхность, а функциональное пространство¹⁾.

В связи с этим, чтобы упростить задачу исследования динамики системы и свести ее к изучению точечного преобразования прямой в прямую, нам придется в дальнейшем ограничиться рассмотрением только некоторого частного класса движений системы, которым мы сможем сопоставить траектории на некоторой двулистной поверхности, выделенной из полного (функционального) фазового пространства. Обозначим через K_0 множество состояний (в произвольные моменты времени t^*), удовлетворяющих условию, чтобы при $t^* - \theta < t \leq t^*$ координата электрозолотника ξ не обращалась в нуль, и будем рассматривать ниже только те движения системы, которые начинаются из этих состояний. Состояния типа K_0 (т. е. принадлежащие к множеству K_0) в любые моменты времени однозначно задаются значениями x и y в те же моменты времени, и мы будем поэтому отображать их (взаимно однозначно и непрерывно) точками (x, y) на плоскости x, y , из которой исключена прямая $\xi = x + \beta y = 0$ (на плоскости K_0)²⁾.

¹⁾ Это функциональное пространство, очевидно, может быть рассматриваемо как пространство «с бесконечным числом измерений», так как функция $x(t)$ (или $Z[\xi(t)]$) на отрезке $t^* - \theta \leq t \leq t^*$ может быть задана бесконечным счетным множеством коэффициентов разложения этой функции в ряд Фурье.

²⁾ Задавая x, y (вне прямой $x + \beta y = 0$) при $t = t^*$, мы задаем в тот же момент времени и координату $\xi \neq 0$. Тот же знак ξ имело и при $t^* - \theta < t \leq t^*$ (в силу принадлежности состояния к множеству K_0), определяя $Z[\xi(t)]$ для $t^* - \theta < t \leq t^*$ (или, иначе, $z(t)$ для $t^* < t \leq t^* + \theta$), равное $+1$ или -1 в зависимости от знака ξ . Поэтому, задавая x, y при $t = t^*$, мы полностью и однозначно определяем движение системы при $t > t^*$, т. е. полностью и однозначно определяем состояние системы типа K_0 в момент времени t^* .

Если в общем случае состояния системы задавать значениями x, y в момент t^* и коэффициентами Фурье $\{a_n, b_n\}$ для функции $Z[\xi(t)]$ на отрезке

$$t^* - \theta \leq t \leq t^* \left(Z[\xi(t)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{\theta} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{\theta} \text{ при } t^* - \theta < t < t^* \right),$$

то множество состояний K_0 является подпространством: $a_n = b_n = 0$ при $n = 1, 2, \dots$ и $\frac{a_0}{2} = -\operatorname{sgn}(x + \beta y)$.

Заметим также, что выделение этого двумерного множества состояний K_0 , через которые система проходит при движениях некоторого типа, из полного

Пусть для определенности точки (x_0, y_0) , отображающие начальные состояния типа K_0 (при $t=0$), лежат на полуплоскости K'_0 : $x + \beta y > 0$, т. е. пусть начальные значения координаты электродолотника $\xi_0 = \xi(0) = x_0 + \beta y_0 > 0$. Тогда в силу определения множества состояний K_0 $\xi > 0$ и при $-\theta < t \leq 0$; следовательно, по крайней мере при $0 < t \leq \theta$, $z = -1$, и движения системы будут описываться дифференциальными уравнениями (8.55):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -y - 1. \end{aligned}$$

Эти уравнения будут справедливы и далее, до тех пор, пока не произойдет перекладка руля и z не изменит своего значения с -1 на $+1$; если обозначить через $t_1 = t_1(x_0, y_0)$ момент времени, в который ξ обращается в нуль при движении, начинающемся при $t=0$ из состояния (x_0, y_0) , то уравнения (8.55), очевидно, будут описывать движения системы при $0 < t < (t_1 + \theta^1)$. При этом до тех пор, пока ξ не обратится в нуль, т. е. при $0 < t < t_1$, система будет проходить через состояния, принадлежащие множеству K_0 , и мы можем сопоставить этим движениям системы движения изображающей точки (x, y) по фазовым траекториям (8.58) уравнения (8.55) на полуплоскости K'_0 . Однако состояния системы при $t_1 < t < t_1 + \theta$ этому множеству уже не принадлежат, поскольку при $t = t_1$ $\xi = 0$. Поэтому мы будем изображать эти состояния точками некоторой дополнительной полосы K'_1 , «пришитой» к полуплоскости K'_0 и наложенной на полуплоскость K''_0 : $x + \beta y < 0$ (рис. 417)²⁾. Эта дополнительная полоса K'_1 вместе с полуплоскостью K'_0 образуют лист (I) фазовой поверхности, соответствующей множеству

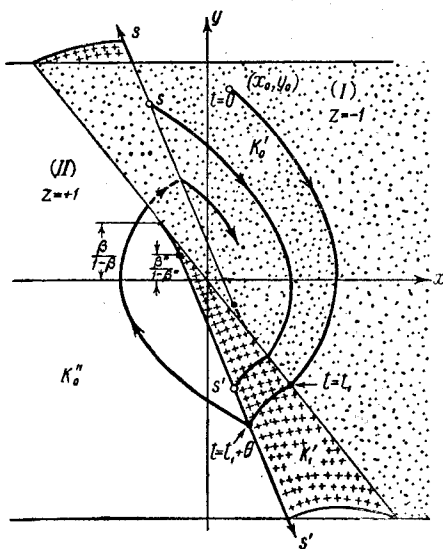


Рис. 417.

(функционального) пространства возможно только в силу того, что рассматриваемая нами система с временным запаздыванием является *релейной* ($\xi(t-\theta)$ является аргументом только кусочно-постоянной функции Z , полностью определяемой знаком ξ).

¹⁾ Из общего решения (8.58) уравнения (8.55) следует, что при любых (x_0, y_0) существует такой единственный момент времени $t_1 = t_1(x_0, y_0)$, что при $t = t_1$ $\xi = 0$ и при $t > t_1$ $\xi < 0$.

²⁾ Рис. 417 дан для случая $0 < \beta < 1$ и не слишком больших θ .

состояний, через которые проходит система при движениях, начинающихся из состояний типа K_0 (с $\xi_0 > 0$) и определяемых уравнениями (8.55).

При $t = t_1 + \theta$ (т. е. через интервал времени θ после обращения ξ в нуль) произойдет переключка руля, координата руля z становится равной $+1$, а состояния системы вновь принадлежат множеству K_0 (соответствующие изображающие точки лежат на линии S' на полуплоскости K_0''). В дальнейшем, пока $z = +1$ и, следовательно, справедливы дифференциальные уравнения (8.55а):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -y + 1,\end{aligned}$$

система при своих движениях проходит через состояния, которым соответствуют точки листа (II) фазовой поверхности, симметричного листу (I) и составленного из полуплоскости K_0'' : $x + \beta y < 0$ и дополнительной полосы K_1'' . Через θ единиц времени после обращения координаты электрозолотника ξ в нуль и смены ее знака с отрицательного на положительный на линии S , являющейся границей листа (II), координата руля z вновь станет равной -1 , изображающая точка переходит на лист (I) и затем движется по нему, пока не дойдет до линии S' — границы листа (I), и т. д.

Таким образом, если начальное состояние системы (при $t = 0$) принадлежало множеству K_0 , то в дальнейшем (при $t > 0$) система при своем движении будет проходить только через состояния, которые принадлежат множеству $K = K_0 + K_1' + K_1''$ и которым (взаимно однозначно и непрерывно) соответствуют точки двулистной фазовой поверхности K , изображенной на рис. 417. Каждому такому движению системы (также взаимно однозначно и непрерывно) соответствует фазовая траектория на фазовой поверхности K^1). Ясно, что в силу симметрии уравнений (8.55) и (8.55а), определяющих движения системы соответственно на листах (I) и (II), разбиения листов (I) и (II) на фазовые траектории также будут симметричными друг другу (относительно начала координат). Поэтому задача изучения динамики системы «судно + авторулевой с временным запаздыванием», если ограничиться рассмотрением только тех движений, которые начинаются из состояний типа K_0 , сводится к исследованию точечного преобразования линии S в линию S' , осуществляемого траекториями (8.58) на листе (I)²⁾.

¹⁾ При таких движениях системы интервалы времени между переключками руля $\Delta t > \theta$. Эти движения, как уже указывалось, являются частным классом движений рассматриваемой релейной системы с временным запаздыванием и представляют наибольший интерес с точки зрения практических приложений. Было бы интересным выяснение вопроса о том, какие другие движения (движения, начинающиеся из состояний, не принадлежащих множеству K_0) переходят при возрастании t в движения рассматриваемого нами класса.

²⁾ Координаты s и s' на линиях S и S' должны быть выбраны так, чтобы симметричным точкам этих линий соответствовали равные значения s и s' .

Найдем уравнения линий S и S' — линий перехода фазовых траекторий с листа (II) на лист (I) и с листа (I) на лист (II). Для определения линии S' — границы листа (I) — заметим, что ξ обращается в нуль, изменяя свой знак с положительного на отрицательный, только в точках полупрямой

$$\xi = x + \beta y = 0, \quad \dot{\xi} = \dot{x} + \beta \dot{y} = (1 - \beta)y - \beta < 0,$$

т. е. в точках

$$x = -\beta u, \quad y = u,$$

где

$$u < \frac{\beta}{1-\beta} \quad \text{при } \beta < 1 \quad \text{и} \quad u > \frac{\beta}{1-\beta} \quad \text{при } \beta > 1.$$

Так как граница S' листа (I) соответствует множеству состояний, в которые приходит система через интервал времени θ после обращения ξ в нуль, то мы получим уравнения этой линии из общего решения (8.58), если возьмем там за начальные точки точки полупрямой: $\xi = 0$, $\dot{\xi} < 0$ ($x_0 = -\beta u$, $y_0 = u$), и положим $t = \theta$:

$$\begin{aligned} y &= -1 + (u + 1)e^{-\theta}, \\ x &= -\beta u - \theta + (u + 1)(1 - e^{-\theta}), \end{aligned}$$

т. е. линия S' является полупрямой:

$$x + \beta^* y = -\frac{\alpha^*}{2},$$

где

$$\beta^* = \beta e^\theta - (e^\theta - 1), \quad \frac{\alpha^*}{2} = (\beta - 1)(e^\theta - 1) + \theta \quad (8.68)$$

с начальной точкой (она соответствует $u = \frac{\beta}{1-\beta}$)

$$y_{\text{нач}} = -1 + \frac{1}{1-\beta} e^{-\theta} = \frac{\beta^*}{1-\beta^*}.$$

Полупрямая S симметрична полупрямой S' : ее уравнением будет

$$x + \beta^* y = +\frac{\alpha^*}{2}$$

и начальной точкой — точка с $y = -\frac{\beta^*}{1-\beta^*}$ (на полупрямой S $y > -\frac{\beta^*}{1-\beta^*}$, если $\beta^* < 1$, и $y < \frac{\beta^*}{\beta^*-1}$, если $\beta^* > 1$). Вид

двулистной фазовой поверхности рассматриваемой системы в зависимости от знаков α^* и β^* приведен на рис. 418—421¹⁾.

Если $\beta < 1$, но время запаздывания θ не слишком велико (т. е. если $\beta < 1 - e^{-\theta}$) или если $\beta > 1$, то $\alpha^* > 0$, $\beta^* > 0$ и изучаемая нами в этом

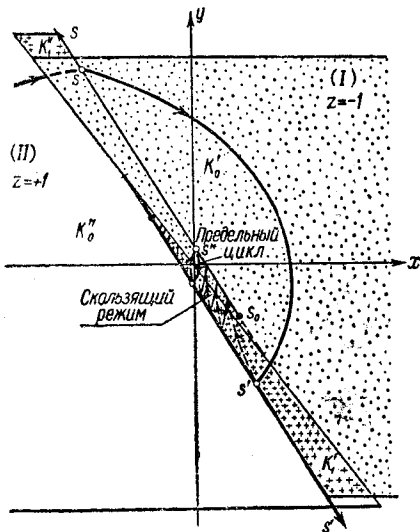


Рис. 418.

разделе система судно + двухпозиционный авторулевой с временным запаздыванием (и с коррекцией по скорости) имеет ту же динамику (те же движения), что и судно с авторулевым, обладающим некоторыми эквивалентными пространственным запаздыванием α^* и коррекцией по скорости β^* . Этот случай полностью сводится к рассмотренному в первом разделе параграфа: все движения системы (начинающиеся из состояний типа K_0) приводят к установлению автоколебаний курса, амплитуда и период которых тем меньше, чем меньше запаздывание θ и чем больше скоростная коррекция β . При малых временах запаздывания θ на фазовой поверхности

имеются зигзагообразные фазовые траектории, идущие между близко расположенными полупрямыми S и S' и соответствующие работе авторулевого в скользящем режиме с частыми (тем более частыми, чем меньше θ) переключками руля авторулевым с одного борта судна на другой (рис. 418 и 419)²⁾.

¹⁾ Заметим, что $\beta^* - \beta = (\beta - 1)(e^{\theta} - 1)$; поэтому $\beta^* > \beta$ при $\beta > 1$ и $\beta^* < \beta$ при $\beta < 1$. При этом при $\beta > 1$ $\alpha^* > 0$, в то время как при $\beta < 1$ и α^* и β^* могут быть отрицательными величинами, если θ достаточно велико. Именно, $\beta^* < 0$ при $\beta < 1 - e^{-\theta}$ и $\alpha^* < 0$ при $\beta < 1 - \frac{\theta}{e^{\theta} - 1}$; при увеличении θ сначала становится отрицательным β^* , а затем α^* , так что если $\alpha^* \leq 0$, то заведомо $\beta^* < 0$.

²⁾ При малых θ $\beta^* \approx \beta - (\beta - 1)\theta \approx \beta$ и $\frac{\alpha^*}{2} = \beta\theta$, поэтому период автоколебаний (с точностью до членов порядка θ^2) $2\tau^* = 2 \frac{\alpha^*}{\beta^*} \approx 4\theta$. Тот же порядок величины имеют интервалы времени Δt между переключками руля авторулевым в скользящем режиме. Амплитуда автоколебаний курса при малых θ , очевидно, равна $\bar{x} \approx \frac{\alpha^{*2}}{8\beta^{*2}} = \frac{\theta^2}{2}$ (см. примечание на стр. 589).

При больших θ (при $1 - \frac{\theta}{e^{\theta} - 1} \leq \beta < 1 - e^{-\theta}$) $\alpha^* \geq 0$, но $\beta^* < 0$, т. е. такое временное запаздывание авторулевого эквивалентно

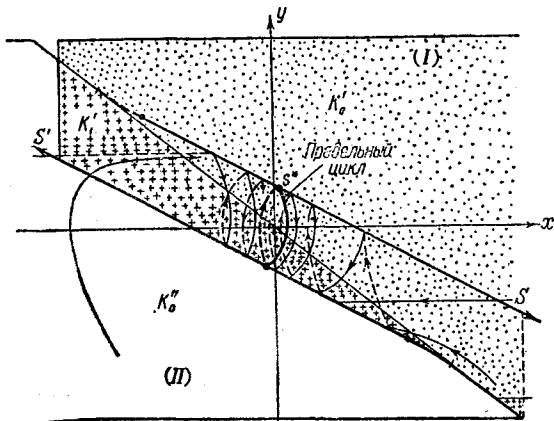


Рис. 419.

некоторому пространственному запаздыванию α^* , но при наличии скоростной коррекции неправильного знака (при наличии «запаздывающей»,

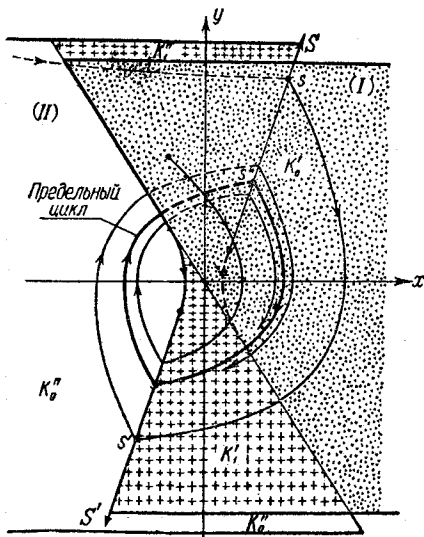


Рис. 420.

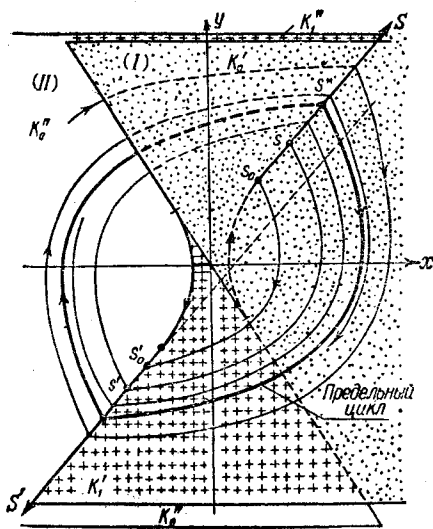


Рис. 421.

а не опережающей, как раньше, коррекции по скорости $\beta^* < 0$). Рассмотрение этого случая ничем не отличается от рассмотрения, проведенного в предыдущем разделе параграфа: будет иметь место та же

диаграмма Ламерея (рис. 413), но с $\tau_0 > \tau_1$, что исключает возможность существования скользящего режима; все траектории будут стремиться (при $t \rightarrow +\infty$) к единственному и устойчивому предельному циклу (рис. 420).

В заключение параграфа рассмотрим кратко последний случай: $\beta < 1 - \frac{\theta}{e^\theta - 1}$, когда и α^* и β^* являются отрицательными величинами. Фазовая поверхность для этого случая изображена на рис. 421. Теперь временное запаздывание авторулевого оказывается эквивалентным пространственному опережению (ибо $\alpha^* < 0$) при наличии «запаздывающей» скоростной коррекции $\beta^* < 0$. Выберем $s = y$ и $s' = -y$ в качестве координат на полупрямых S и S' (s и $s' > s_0 = -\frac{\beta^*}{1 - \beta^*}$). Тогда для функции соответствия точечного преобразования полупрямой S в полупрямую S' , осуществляемого траекториями на листе (I) , будут по-прежнему справедливы параметрические выражения (8.64), если заменить в них коэффициенты α и β на отрицательные величины α^* и β^* :

$$\left. \begin{aligned} s &= -1 + \frac{\tau - \alpha^*}{(1 - \beta^*)(1 - e^{-\tau})}, \\ s' &= +1 - \frac{\tau - \alpha^*}{(1 - \beta^*)(e^\tau - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.69)$$

В отличие от случая $\alpha > 0$, рассмотренного в первом разделе параграфа, теперь (при $\alpha = \alpha^* < 0$) функция $\Psi_1(\tau)$ (см. (8.65)) имеет при

$\tau = \tau'_1$, определяемом уравнением $\alpha^* + e^\tau - \tau - 1 = 0$, минимум, равный $e^{\tau'_1} > 1$, в силу чего $\Psi_2(\tau)$ является монотонно убывающей функцией τ . Далее, при $\tau \rightarrow +0$ Ψ_1 и $\Psi_2 \rightarrow +\infty$, при $\tau \rightarrow +\infty$ $\Psi_1 \rightarrow +\infty$, а $\Psi_2 \rightarrow +0$ (рис. 422).

В связи с этим каждому значению $s > s_0 = -\frac{\beta^*}{1 - \beta^*}$ соответствуют согласно первому соотношению (8.69) два значения параметра τ , одно из которых больше, а другое меньше, чем τ'_1 ¹⁾. Это, очевидно, обусловлено тем, что все фазовые траектории, выходящие из точек полупрямой S , прежде чем придти на полупрямую S' , сначала

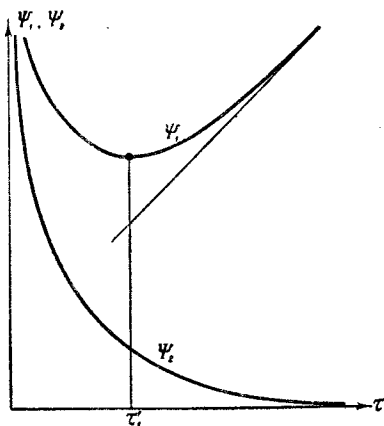


Рис. 422.

пересекают ее продолжение, т. е. пересекают прямую $x + \beta^* y = -\frac{\alpha^*}{2}$ в точках с $y > \frac{\beta^*}{1 - \beta^*}$ (вне полупрямой S'). Поэтому вре-

¹⁾ Нетрудно показать, что в силу (8.68) $s_0 = -\frac{\beta^*}{1 - \beta^*} > s_{\min} = (s)_{\tau = \tau'_1}$.

менем пробега τ изображающей точки по траектории от точки s полупрямой S до точки s' полупрямой S' будет являться большее из двух значений параметра τ , соответствующих в силу (8.69) заданному значению s , т. е. в выражениях (8.69) мы должны полагать, что $\tau > \tau'_2$. Обозначим через τ_0 то значение τ , которое соответствует начальной точке s_0 полупрямой S^1). Тогда, так как при $\tau > \tau'_1$ $\frac{d\Psi_1}{d\tau} > 0$ и $\frac{ds}{d\tau} > 0$, точкам полупрямой S : $s > s_0$ соответствуют значения параметра $\tau > \tau_0 > \tau'_1$, причем при изменении τ от τ_0 до $+\infty$ s монотонно возрастает от $s_0 = \frac{-\beta^*}{1-\beta^*}$ до $+\infty$.

Диаграмма Ламерея для рассматриваемого случая $\beta < 1 - \frac{\theta}{e^{\theta}-1}$ изображена на рис. 423. Нетрудно показать, что точечное преобразо-

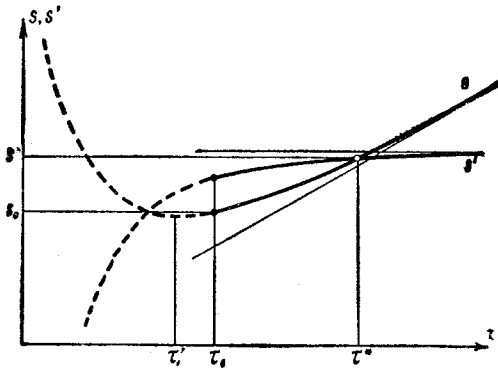


Рис. 423.

вание полупрямой S в полупрямую S' и в этом случае имеет единственную и устойчивую неподвижную точку²⁾). Этой неподвижной точке на фазовой поверхности соответствует единственный и устойчивый предельный цикл, к которому (при $t \rightarrow +\infty$) стремятся все фазовые траектории (рис. 421).

§ 8. Релейная система автоматического регулирования (с мертвой зоной и пространственным запаздыванием)

В предыдущих двух параграфах мы рассмотрели на примере автоколебательной системы автоматического регулирования двухпозиционного типа, в которой при любых начальных условиях устанавливаются автоколебания, обусловленные запаздыванием регулятора. В настоящем

¹⁾ τ_0 , как и раньше, определяется уравнением $\Psi_1(\tau_0) = 1 - 2\beta^*$, но теперь под τ_0 следует понимать больший корень этого уравнения $\tau_0 > \tau'_1$.

²⁾ Доказательство существования, единственности и устойчивости неподвижной точки точечного преобразования полупрямой S в полупрямую S' полностью аналогично доказательству, проведенному в первом разделе настоящего параграфа.

параграфе мы займемся изучением динамики несколько более сложной релейной системы автоматического регулирования второго порядка, в состав которой входит безинерционное звено релейного типа с симметричной характеристикой, изображенной на рис. 424 [122, 102]¹⁾. Выходная координата релейного звена U может принимать одно из

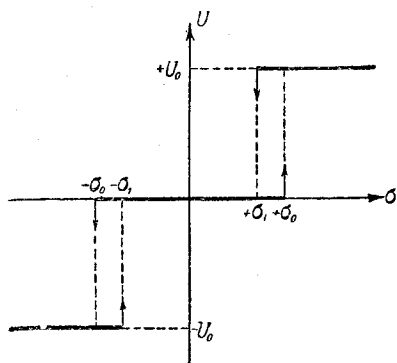


Рис. 424.

трех возможных значений: $+U_0$, 0 или $-U_0$, в зависимости от значения входной координаты σ и от состояния звена в предшествующие моменты времени. Если звено в предшествующий момент времени было «выключено» ($U=0$, что возможно только при $|\sigma| < \sigma_0$), то оно останется «выключенным» до тех пор, пока входная координата звена σ не выйдет в процессе своего изменения за пределы «мертвой зоны»: $|\sigma| < \sigma_0$. При достижении границы мертвой зоны это звено «включится» в ту или иную сторону, т. е. U изменится мгновенно (скачком)

от 0 до $+U_0$ при $\sigma = +\sigma_0$ и до $-U_0$ при $\sigma = -\sigma_0$. Звено, будучи «включенным», останется в этом состоянии не только вне мертвой зоны, но и внутри некоторой части последней: состояние звена $U = +U_0$ сохранится при $\sigma > \sigma_1$ и $U = -U_0$ при $\sigma < -\sigma_1$ ($|\sigma_1| \leq \sigma_0$). Только при $\sigma = \pm \sigma_1$ «включенное» ранее звено «выключится». В частности, при $-\sigma_0 < \sigma < -\sigma_1$ и при $\sigma_1 < \sigma < \sigma_0$ состояние звена (его выходная координата U) определяется исключительно его предшествующим состоянием — тем, было ли звено «включенным» или «выключенным» в предшествующий момент времени. Такое звено (с характеристикой, приведенной на рис. 424) обычно характеризуется тремя параметрами: абсолютным значением выходной координаты U_0 «включенного» звена, шириной мертвой зоны σ_0 и так называемым коэффициентом возврата релейного звена $\lambda = \sigma_1/\sigma_0$ ($-1 \leq \lambda \leq 1$)²⁾.

Таким образом, рассматриваемое релейное звено системы автоматического регулирования имеет как *пространственное запаздывание* (т. е. «гистерезисную» характеристику с двумя зонами неоднозначности), так и *мертвую зону* (зону нечувствительности). Именно, в виде таких релейных звеньев могут быть идеализированы обычные

¹⁾ Обычно релейным называют безинерционное звено, выходная координата которого может принимать только некоторые дискретные значения. Систему называют релейной, если она состоит из релейных и линейных звеньев.

²⁾ Для характеристики авторулевого с пространственным запаздыванием, рассмотренной в предыдущем параграфе, $\sigma_1 = -\sigma_0$, т. е. $\lambda = -1$.

электромагнитные реле (или группы реле), различные электрические контактные устройства, а также сервомоторы «постоянной скорости» при учете мертвой зоны и люфта в золотнике¹⁾.

Ниже мы увидим, что, как и в случае только что рассмотренной системы: «судно + авторулевой», пространственное запаздывание релейного звена является причиной возможных в системе автоколебаний. Однако теперь, в отличие от системы с регулятором без мертвой зоны, автоколебания могут быть подавлены введением достаточно сильной жесткой обратной связи или коррекции по скорости.

1. Уравнения движения некоторых релейных систем. Рассмотрим релейную следящую систему, блок-схема которой приведена на рис. 425. Сервомотор этой системы (электромотор с постоянным,

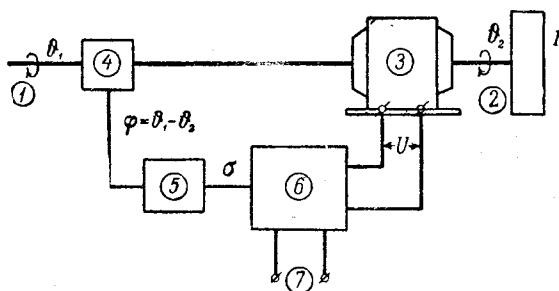


Рис. 425. Блок-схема релейной следящей системы.

1 — «ось заводки»; 2 — «ось отработки»; 3 — электрический сервомотор; 4 — дифференциал (датчик ошибки); 5 — преобразующее (дифференцирующее) звено; 6 — релейное звено (группа реле, управляющая сервомотором); 7 — сеть питания сервомотора.

независимым возбуждением) управляется релейным звеном (группой реле) с ранее рассмотренной характеристикой (рис. 424). Напряжение U на якоре мотора является выходной координатой этого релейного звена, управляемого в свою очередь ошибкой системы $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ и ее производной. Пусть входная координата релейного звена $\sigma = \varphi + B \frac{d\varphi}{dt}$, I — момент инерции оси отработки следящей системы (совместно с сервомотором), $k \frac{d\theta_2}{dt}$ — противоэлектродвижущая сила якоря мотора, i — сила тока в якоре, Ai — момент сил, развиваемый мотором, и R — сопротивление цепи якоря²⁾. Тогда уравнения движения

¹⁾ В обычных электромагнитных реле сила притяжения якоря к сердечнику увеличивается при уменьшении зазора между ними. Поэтому подтягивание якоря реле к сердечнику происходит при больших токах, чем обратный переход. Электрические контактные устройства также обладают «гистерезисными» характеристиками из-за образования дуги при размыкании контактов.

²⁾ Мы полагаем, что когда релейная группа находится в нейтральном положении (напряжение на якоре мотора $U = 0$), якорь мотора замыкается на сопротивление «динамического торможения», подобранного так, чтобы полное сопротивление цепи якоря было одинаковым при всех трех положениях релейной группы.

оси обработки следящей системы и колебаний тока в цепи якоря мотора, очевидно, запишутся в следующем виде:

$$I \frac{d^2 \delta_2}{dt^2} = A l, \quad R l = U - k \frac{d \delta_2}{dt}$$

или

$$I \frac{d^2 \delta_2}{dt^2} + \frac{A k}{R} \frac{d \delta_2}{dt} = \frac{A}{R} U^1).$$

Рассмотрим частный случай движения следящей системы — движение при неподвижной оси заводки (при $\delta_1 = \text{const}$). Для этого случая уравнения движения принимают вид:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{A k}{R} \frac{d \varphi}{dt} = - \frac{A}{R} U,$$

$$\sigma = \varphi + B \frac{d \varphi}{dt},$$

или в безразмерной форме

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} &= -u(\xi), \\ \xi &= x + \beta \dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (8.70)$$

В уравнениях (8.70)

$$x = \frac{A k^2}{I R U_0} \varphi, \quad \xi = \frac{A k^2}{I R U_0} \sigma, \quad u = \frac{U}{U_0}$$

— новые безразмерные переменные, точкой сверху обозначено дифференцирование по безразмерному времени

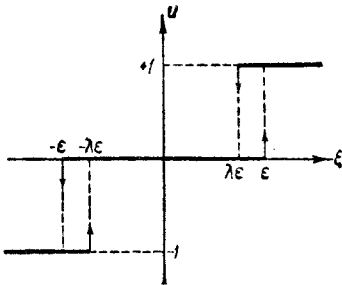


Рис. 426.

$$t_{\text{нов}} = \frac{A k}{I R} t_{\text{ст}},$$

$u = u(\xi)$ — приведенная характеристика реле, изображенная на рис. 426, с приведенной мертвой зоной

$$\epsilon = \frac{A k^2 \sigma_0}{I R U_0}$$

и $\beta = \frac{A k}{I R} B$ — приведенный (безразмерный) коэффициент управления по скорости ошибки.

¹⁾ Мы не учитываем сил трения, действующих на ось обработки следящей системы. Заметим, что учет сил вязкого трения не изменит вида уравнений движений системы, а лишь увеличит коэффициент при $\frac{d \delta_2}{dt}$.

К уравнениям (8.70) приводятся при соответствующих предположениях и уравнения системы непрямого регулирования с сервомотором «постоянной скорости» и с жесткой обратной связью (рис. 427; см. также рис. 407). Если учесть люфт и мертвую зону в золотнике

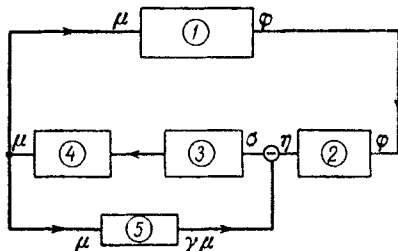


Рис. 427. Блок-схема релейной системы непрямого регулирования.

1 — объект регулирования; 2 — чувствительный элемент; 3 — релейное звено (золотник сервомотора); 4 — сервомотор «постоянной скорости»; 5 — жесткая обратная связь.

сервомотора «постоянной скорости», то уравнение последнего запишется следующим образом:

$$\frac{d\mu}{dt} = \begin{cases} +\frac{1}{T_s} & \text{при } \sigma > \lambda\sigma_0, \\ 0 & \text{при } |\sigma| < \sigma_0, \\ -\frac{1}{T_s} & \text{при } \sigma < -\lambda\sigma_0, \end{cases}$$

где σ_0 и λ — ширина мертвой зоны и коэффициент возврата релейного звена — золотника сервомотора (характеристика такого сервомотора совпадает с приведенной на рис. 424, если заменить там U на $\frac{d\mu}{dt}$ и U_0 на $\frac{1}{T_s}$)¹⁾. Уравнения остальных линейных звеньев (объекта регулирования с положительным саморегулированием, идеального чувствительного элемента и жесткой обратной связи) запишутся так же, как и в п. 5 § 6 настоящей главы:

$$\begin{aligned} T_a \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi &= \mu, \\ \delta\eta + \varphi &= 0, \\ \sigma &= \eta - \gamma\mu. \end{aligned}$$

¹⁾ Если обозначить через l и Δ зазор между контактами электрозолотника (рис. 407) и люфт в золотниковом устройстве, измеренные в тех же относительных единицах, что и σ , то

$$\sigma_0 = \frac{l + \Delta}{2} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{l - \Delta}{l + \Delta}.$$

Эти уравнения системы непрямого регулирования заменой переменных

$$\varphi = \frac{T_a}{k^2 T_s} x, \quad \sigma = -\frac{T_a \left(\frac{1}{\delta} + \gamma k \right)}{k^2 T_s} \xi, \quad T_s \frac{d\mu}{dt} = -u \quad \text{и} \quad t_{ст} = \frac{T_a}{k} t_{нов}$$

приводятся к уравнениям (8.70), причем безразмерные ширина мертвой зоны и коэффициент обратной связи равны соответственно

$$\varepsilon = \frac{k^2 T_s \sigma_0}{T_a \left(\frac{1}{\delta} + \gamma k \right)} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\gamma k}{\frac{1}{\delta} + \gamma k} \quad (0 < \beta < 1).$$

2. Фазовая поверхность. Итак, обе рассмотренные релейные системы автоматического регулирования приводятся к одной и той же динамической системе, описываемой уравнениями (8.70). Для упрощения изучения движений этой динамической системы мы будем пользоваться ниже переменными $y = \dot{x}$ и ξ . В этих переменных уравнения

движения системы могут быть записаны в виде следующих дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= -y - u(\xi), \\ \dot{\xi} &= (1 - \beta)y - \beta u(\xi). \end{aligned} \right\} (8.71)$$

Из-за наличия двух зон неоднозначности характеристики релейного звена $u = u(\xi)$ фазовой поверхностью системы будет *трехлистая* поверхность, изображенная на рис. 428 и состоящая из полосы (I) и состоящая из полосы (I): $|\xi| < \varepsilon$, в точках которой $u = 0$ (релейное звено — в нейтральном положении), и частично наложенных на нее полуплоскостей (II): $\xi > \lambda\varepsilon$ и (III): $\xi < -\lambda\varepsilon$, соответствующих включенным состояниям релейного

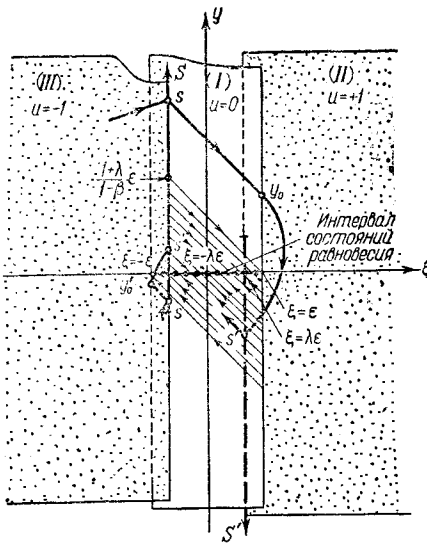


Рис. 428.

звена (на полуплоскости (II) $u = +1$ и на полуплоскости (III) $u = -1$). Переход изображающей точки с полосы (I) на полуплоскости (II) и (III) происходит только на ее границах, т. е. при $\xi = \pm \varepsilon$, а обратный переход — только на границах полуплоскостей (соответственно при $\xi = +\lambda\varepsilon$ и при $\xi = -\lambda\varepsilon$), причем при переходах изображающей точки с одного листа фазовой поверхности на другой ее координаты ξ, y изменяются непрерывно.

Сразу же отметим симметрию фазовых траекторий друг другу относительно начала координат, что является следствием симметрии характеристики релейного звена $u = u(\xi)$.

На полосе (I) $u = 0$ (релейное звено — в нейтральном положении) и уравнения движения (8.71) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= -y, \\ \dot{\xi} &= (1 - \beta)y \\ \frac{dy}{d\xi} &= -\frac{1}{1 - \beta} \end{aligned} \right\} \quad (8.71a)$$

или

Поэтому все точки оси абсцисс в пределах этой полосы ($|\xi| < \varepsilon$, $y = 0$, $u = 0$) являются *состояниями равновесия* и притом *устой-*

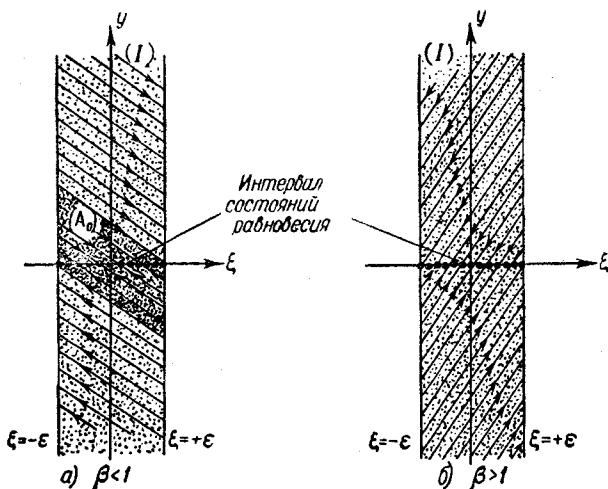


Рис. 429.

чивыми, так как изображающие точки двигаются на полосе (I) по фазовым траекториям — прямым

$$\xi + (1 - \beta)y = \text{const}$$

по направлению к оси абсцисс (рис. 429). К этим состояниям равновесия, очевидно, асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются все траектории, точки которых удовлетворяют неравенству

$$|\xi + (1 - \beta)y| < \varepsilon.$$

На полуплоскости (II), соответствующей включенному состоянию релейного звена $u = +1$, уравнения движения системы записываются

в форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} + y &= -1, \\ \dot{\xi} &= (1 - \beta)y - \beta. \end{aligned} \right\} \quad (8.716)$$

Там нет состояний равновесия и все фазовые траектории (или, точнее, их продолжения за границей листа (II)) асимптотически приближаются к фазовой прямой $y = -1$, $\xi = -t + \text{const}$. Изображающая точка, попав на лист (II), обязательно выйдет по соответствующей траектории на его границу $\xi = \pm \lambda \epsilon$ и перейдет на полосу (I). На рис. 430 изображено разбиение листа (II) фазовой поверхности на фазовые траектории (для случая $\beta < 1$). Фазовые траектории на листе (III) (там $u = -1$), очевидно, в силу симметрии уравнений (8.71) симметричны с той же что рассмотренными траекториями на листе (II).

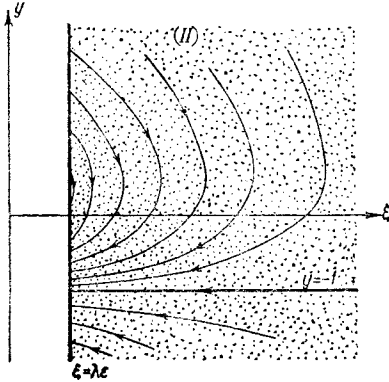


Рис. 430.

Поскольку характер движений рассматриваемой нами релейной системы существенным

образом зависит от знака разности $\beta - 1$, мы рассмотрим отдельно два случая: $\beta < 1$ и $\beta > 1$ ¹⁾.

3. Точечное преобразование при $\beta < 1$. Начнем изучение динамики релейной системы, изучение разбиения ее фазовой поверхности на траектории, с наиболее интересного случая $\beta < 1$. Разбиения на траектории полосы (I) и листа (II) в отдельности были приведены на рис. 429, а и 430. Очевидно, имеются два типа фазовых траекторий, два типа движений системы. Траектории, начинающиеся в точках полосы (I), удовлетворяющих неравенству $|\xi + (1 - \beta)y| < \epsilon$, асимптотически приближаются к состояниям равновесия системы, *не выходя за пределы полосы (I)*. Им соответствуют движения системы с всегда выключенным релейным звеном, приводящие к установлению того или иного равновесного состояния. Все остальные траектории переходят с листа на лист (но обязательно проходят по полосе (I)) и соответствуют движениям системы с переключениями релейного звена.

¹⁾ В пограничном случае $\beta = 1$ фазовые траектории в полосе (I) — вертикальные прямые, по которым изображающие точки асимптотически приближаются к состояниям равновесия: $|\xi| < \epsilon$, $y = 0$, $u = 0$. Траектории, начинающиеся на листах (II) и (III), обязательно приходят на границы этих листов и затем приближаются (при $t \rightarrow +\infty$) к состояниям равновесия: $\xi = \pm \lambda \epsilon$, $y = 0$, $u = 0$. Таким образом, при $\beta = 1$ все движения системы являются затухающими, приводящими к установлению равновесных состояний.

Изучение траекторий второго типа (траекторий, проходящих по различным листам фазовой поверхности), в частности определение предельных траекторий, к которым они стремятся при возрастающем t , мы сведем, как и в ранее рассмотренных задачах, к исследованию некоторого точечного преобразования прямой в прямую. С этой целью построим на фазовой поверхности (рис. 428) две полупрямые без контакта S : $\xi = -\lambda\varepsilon$, $y > -\frac{\beta}{1-\beta}$ и S' : $\xi = +\lambda\varepsilon$, $y < \frac{\beta}{1-\beta}$, через точки которых траектории переходят соответственно с листов (III) и (II) на полосу (I)¹⁾. На этих полупрямых введем координату $s=y$ (на полупрямой S) и $s=-y$ (на S') с таким расчетом, чтобы симметричным точкам полупрямых соответствовали одинаковые значения координаты s (очевидно, $s > -\frac{\beta}{1-\beta}$). С построенными полупрямыми S и S' будут пересекаться все траектории системы, кроме тех, которые стремятся к состояниям равновесия, оставаясь в пределах полосы (I). Поэтому изучение поведения каждой такой траектории можно свести к изучению последовательности ее точек пересечения с этими полупрямыми, в которой каждая последующая точка s' , если она существует, однозначно определяется предыдущей точкой s :

$$s' = \Pi(s).$$

Так как фазовый портрет системы, т. е. фазовая поверхность в целом, и разбиение ее на траектории симметричны относительно начала координат, то траектории, проходящие через симметричные точки s полупрямых S и S' , также симметричны, и следовательно, их последующие точки пересечения с этими полупрямыми будут иметь одинаковые координаты s' . Сказанное, очевидно, позволяет нам не различать между собой полупрямые S и S' (позволяет отождествить симметричные точки этих полупрямых) и пользоваться *единым точечным преобразованием* $s' = \Pi(s)$ независимо от того, с какой из полупрямых (с S или с S') пересекалась рассматриваемая траектория.

Для вычисления функции последования этого точечного преобразования рассмотрим произвольную фазовую траекторию, которая переходит на полосу (I) с листа (III) — для определенности в точке s полупрямой S (рис. 428). В пределах полосы (I) этой траекторией будет прямая

$$\xi + (1 - \beta)y = -\lambda\varepsilon + (1 - \beta)s. \quad (8.72)$$

¹⁾ В силу второго уравнения (8.71) на полупрямой S :

$$\dot{\xi} = (1 - \beta)y + \beta > 0$$

и на полупрямой S' :

$$\dot{\xi} = (1 - \beta)y - \beta < 0.$$

Поэтому при $|\lambda s + (1 - \beta)s| < \varepsilon$, т. е. при

$$-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon < s < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon, \quad (8.72a)$$

изображающая точка, не выходя за пределы полосы (I), будет асимптотически приближаться к соответствующему состоянию равновесия, а рассматриваемая нами траектория не имеет последующих точек пересечения с полупрямыми S' и S .

При

$$s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \quad (8.72б)$$

изображающая точка выйдет на правую границу полосы (I) в точке

$$\xi = +\varepsilon, \quad y = y_0 = s - \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \geq 0,$$

затем будет двигаться в пределах листа (II) по траектории, определяемой дифференциальными уравнениями (8.71б) и начальными условиями: при $t=0$ $\xi = +\varepsilon$, $y = y_0$, — по траектории

$$\begin{aligned} y &= -1 + (1 + y_0)e^{-t}, \\ \xi &= \varepsilon - t + (1 - \beta)(1 + y_0)(1 - e^{-t}), \end{aligned}$$

и обязательно выйдет на границу этого листа — на полупрямую S' ¹. Обозначим через τ время пробега изображающей точки по листу (II). Тогда при $t = \tau > 0$ $\xi = +\lambda\varepsilon$, $y = -s'$, что дает после использования соотношения $s = y_0 + \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ следующее параметрическое выражение для функции последования:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \quad s &= -1 + \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon + \frac{\tau - (1-\lambda)\varepsilon}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})}, \\ s' &= +1 - \frac{\tau - (1-\lambda)\varepsilon}{(1-\beta)(e^\tau - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.73a)$$

Наконец, при

$$s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon, \quad (8.72в)$$

что возможно только при $\beta > (1-\lambda)\varepsilon$, изображающая точка, двигаясь по траектории (8.72), выйдет на левую границу полосы (I) в точке с ординатой

$$y'_0 = s + \frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon \leq 0$$

¹) Мы выбираем за начало отсчета тот момент времени, когда изображающая точка находилась на правой границе полосы (I), т. е. на прямой $\xi = +\varepsilon$. Здесь и ниже под t понимается безразмерное, новое время $t_{\text{нов}}$.

и затем после движения на полуплоскости (III) вернется через некоторый промежуток времени τ обратно на полупрямую S (в точке s'). Нетрудно видеть, что в этом случае функция последования выражается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta} \varepsilon \quad s &= +1 - \frac{1-\lambda}{1-\beta} \varepsilon - \frac{\tau - (1-\lambda)\varepsilon}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})}, \\ s' &= +1 - \frac{\tau - (1-\lambda)\varepsilon}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.73 \text{ б})$$

Соотношения (8.73а) и (8.73б) полностью определяют интересующее нас точечное преобразование $s' = \Pi(s)$ полупрямых S и S' друг в друга или самих в себя, осуществляемое фазовыми траекториями системы: по координате предыдущей точки s вне интервала (8.72а) однозначно определяется параметр преобразования τ , который в свою очередь также однозначно определяет координату последующей точки s' (зависимости τ от s и s' от τ выражаются функциями не только однозначными, но и непрерывными; будем обозначать их в дальнейшем через $\tau = f(s)$ и $s' = g(\tau)$).

4. Диаграмма Ламерея. Перейдем к исследованию полученных параметрических выражений (8.73а) и (8.73б) для функции последования $s' = \Pi(s)$, используя введенные в предыдущем параграфе вспомогательные функции $\Psi_1(\tau)$ и $\Psi_2(\tau)$ (см. (8.65) и рис. 412). Если положить в (8.65) $\alpha = (1-\lambda)\varepsilon \geq 0$ (напомним, что коэффициент возврата релейного звена $-1 \leq \lambda \leq +1$), то функцию последования $s' = \Pi(s)$ можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} s &= \left\{ \begin{array}{l} -1 + \frac{1+\lambda}{1-\beta} \varepsilon + \frac{\Psi_1(\tau)}{1-\beta} \quad \text{при } s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta} \varepsilon, \\ +1 - \frac{1-\lambda}{1-\beta} \varepsilon - \frac{\Psi_1(\tau)}{1-\beta} \quad \text{при } s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta} \varepsilon, \end{array} \right\} \\ s' &= 1 - \frac{\Psi_2(\tau)}{1-\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (8.73)$$

Обозначим через τ_0 то значение τ , которое соответствует значениям $s = \frac{1+\lambda}{1-\beta} \varepsilon$ и $s = -\frac{1-\lambda}{1-\beta} \varepsilon$; оно, очевидно, однозначно определяется уравнением

$$\Psi_1(\tau_0) = 1 - \beta \quad (8.74)$$

или

$$(1-\beta)(1-e^{-\tau_0}) = \tau_0 - (1-\lambda)\varepsilon$$

и в свою очередь однозначно определяет начальное (при $\tau = \tau_0$) значение координаты последующей точки

$$(s')_{\tau=\tau_0} = s'_0 = 1 - e^{-\tau_0} = \frac{\tau_0 - (1-\lambda)\varepsilon}{1-\beta}. \quad (8.74а)$$

При этом $(1-\lambda)\varepsilon < \tau_0 < \tau_1$, где τ_1 — значение параметра τ , при

котором функция Ψ_2 достигает максимума¹⁾. Тогда, поскольку Ψ_1 является монотонно возрастающей функцией τ , для получения значений

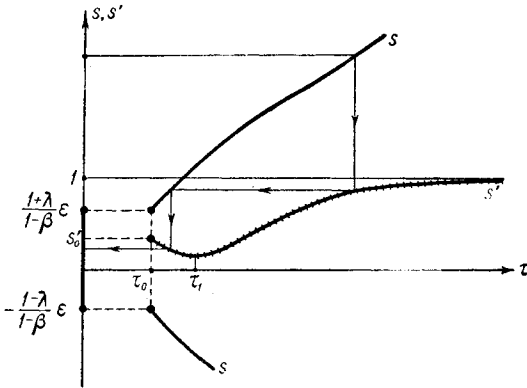


Рис. 431.

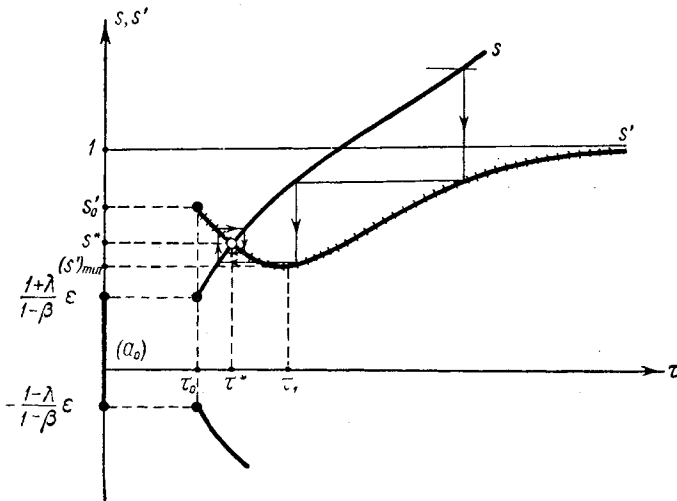


Рис. 432.

$s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon$ и $s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta} \epsilon$ параметр преобразования τ следует, очевидно, изменять в пределах $\tau_0 \leq \tau < +\infty$.

¹⁾ Как и в предыдущем параграфе, τ_1 однозначно определяется уравнением $\Psi_1(\tau_1) = 1$ и является монотонно возрастающей функцией величины $x = (1-\lambda)\epsilon$ (при малых α $\tau_1 = \sqrt{2\alpha}$). Соответствующее минимальное значение

$$(s')_{\min} = 1 - \frac{e^{-\tau_1}}{1-\beta} > -\frac{\beta}{1-\beta}.$$

Построим диаграмму Ламерея (рис. 431—433), откладывая по оси абсцисс параметр преобразования τ , а по оси ординат — координаты s и s' предыдущих и последующих точек пересечения траекторий

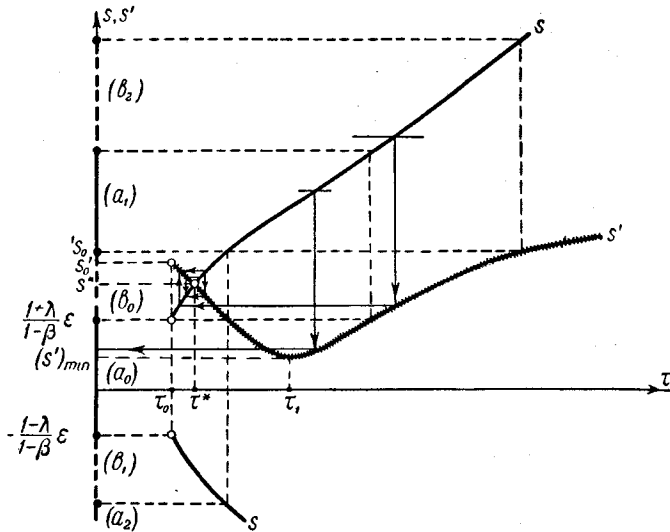


Рис. 433.

с полупрямыми S и S' . Прежде всего заметим, что в силу неравенств $\frac{d\Psi_1}{d\tau} > \left| \frac{d\Psi_2}{d\tau} \right|$ и $\beta < 1$

$$\left| \frac{ds'}{d\tau} \right| < \left| \frac{ds}{d\tau} \right| \quad (8.75)$$

при любых $\tau \geq \tau_0$. Далее, из соотношений (8.73) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \text{при } s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta} \epsilon \quad s' - s = \frac{\tau}{1-\beta} \geq \frac{\tau_0}{1-\beta} > 0; \\ \text{при } s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon \quad s' - s = 2 - \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon - \frac{1}{1-\beta} [\Psi_1 + \Psi_2] \end{aligned} \right\}$$

и монотонно убывает от $s'_0 - \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon$ до $-\infty$ при изменении τ от τ_0 до $+\infty$, так как $\frac{d}{d\tau} [\Psi_1 + \Psi_2] > 0$ и при $\tau \rightarrow +\infty$ $s' \rightarrow +1$, а $s \rightarrow +\infty$. Поэтому точечное преобразование $s' = \Pi(s)$ не может иметь неподвижных точек на той части полупрямой S , которая удовлетворяет условию $s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta} \epsilon$. Неподвижная точка существует

¹⁾ Это следует из неравенств: $\frac{d\Psi_1}{d\tau} > 0$, $\frac{d}{d\tau} [\Psi_1 + \Psi_2] > 0$ и $\frac{d}{d\tau} [\Psi_1 - \Psi_2] > 0$, доказанных в предыдущем параграфе для любых $\tau > 0$.

(и притом единственная) только на полупрямой $s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon$ и при условии, что $s'_0 \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon$. Таким образом, в зависимости от знака выражения $s'_0 - \frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon$ возможны два типа диаграмм Ламерея.

При $s'_0 < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon$ кривые $\tau = f(s)$ и $s' = g(\tau)$, определяемые соотношениями (8.73), нигде (при $\tau \geq \tau_0$) не пересекаются (рис. 431), и

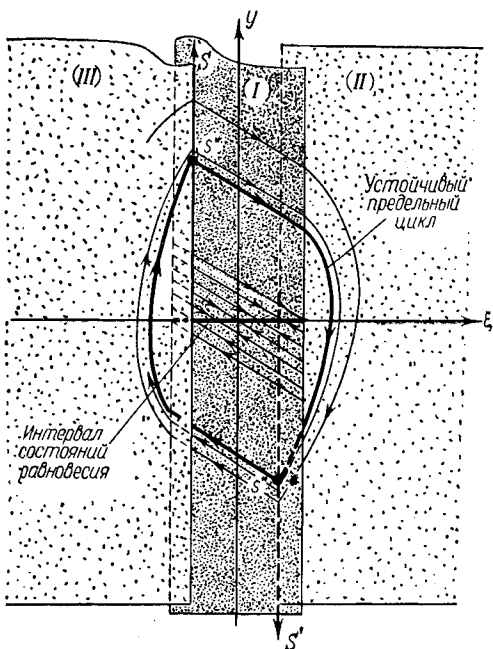


Рис. 434.

точечное преобразование $s' = \Pi(s)$ не имеет неподвижных точек. Нетрудно видеть, что в этом случае каждая последующая точка s' лежит ближе к интервалу (8.72а), чем предыдущая s^1 . Поэтому любая траектория после конечного числа пересечений с полупрямыми S и S' будет иметь точку пересечения с координатой

$$-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\epsilon < s < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon \quad (8.72a)$$

и затем, не выходя за пределы полосы (I), будет асимптотически приближаться к тому или иному состоянию равновесия. Иначе говоря, в рассматриваемом случае имеет место *абсолютная устойчивость* системы, т. е. установление при любых начальных условиях какого-либо равновесного состояния.

Иная диаграмма Ламерея получается при $s'_0 > \frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon$ (рис. 432 и 433). Теперь кривые $\tau = f(s)$ и $s' = g(\tau)$ имеют единственную точку

1) Если ввести расстояние точки s до интервала (8.72а)

$$R = \begin{cases} -s - \frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon & \text{при } s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon, \\ 0 & \text{при } -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\epsilon < s < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\epsilon, \\ -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\epsilon - s & \text{при } s \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\epsilon, \end{cases}$$

то расстояние до этого интервала последующей точки $R' < R$ и притом на конечную величину.

пересечения, а точечное преобразование $s' = \Pi(s)$ имеет *единственную неподвижную и притом устойчивую точку* $s^* > \frac{1+\lambda}{1-\beta} \varepsilon$, которая соответствует *симметричному предельному циклу* на фазовой поверхности (рис. 434)¹⁾. Значение параметра преобразования τ^* , соответствующее неподвижной точке s^* , определяется уравнением $s' = s$ или

$$[\tau^* - (1 - \lambda) \varepsilon] \operatorname{cth} \frac{\tau^*}{2} = 2(1 - \beta) - (1 + \lambda) \varepsilon^2. \quad (8.76)$$

Определим теперь, в какой области пространства параметров системы $\beta, \varepsilon, \lambda$ ($0 < \beta < 1, \varepsilon > 0, -1 \leq \lambda \leq +1$) условие существования предельного цикла

$$s'_0 = \frac{\tau_0 - (1 - \lambda) \varepsilon}{1 - \beta} > \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \varepsilon$$

или

$$\tau_0 > 2\varepsilon \quad (8.77)$$

выполнено. Очевидно, в пограничном случае (т. е. на поверхности в пространстве параметров $\beta, \varepsilon, \lambda$, отделяющей область существования симметричного предельного цикла от области «абсолютной устойчивости»)

$$\tau_0 = 2\varepsilon,$$

следовательно, согласно (8.74) уравнением этой пограничной поверхности в пространстве параметров будет:

$$(1 - \beta)(1 - e^{-2\varepsilon}) = 2\varepsilon - (1 - \lambda)\varepsilon = (1 + \lambda)\varepsilon$$

или

$$\frac{1 + \lambda}{1 - \beta} = \frac{1 - e^{-2\varepsilon}}{\varepsilon}. \quad (8.77a)$$

На рис. 435 изображена плоскость параметров $\varepsilon, \frac{1 + \lambda}{1 - \beta}$ и на ней построена кривая (8.77a). Так как согласно того же уравнения (8.74) τ_0 возрастает при уменьшении β (и при фиксированных значениях

¹⁾ Существование неподвижной точки $s^* > \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \varepsilon$ вытекает из непрерывности кривых $\tau = f(s)$ и $s' = g(\tau)$ и различных знаков разности $s' - s$ при $\tau = \tau_0$ и при $\tau \rightarrow +\infty$, единственность — из монотонности зависимости $s' - s$ от τ , устойчивость — из неравенства (8.75). Заметим, что симметричный предельный цикл имеет по одной точке пересечения с каждой из полупрямых S и S' .

²⁾ Так как $\tau^* > \tau_0 > (1 - \lambda)\varepsilon$, то неподвижной точки s^* заведомо не существует, если $(1 + \lambda)\varepsilon > 2(1 - \beta)$.

параметров ϵ и λ)¹⁾, то мы можем, очевидно, утверждать, что под кривой (8.77а) на рис. 435 условие (8.77) выполнено, т. е. там лежит область существования предельного цикла, а над ней — область «абсолютной устойчивости».

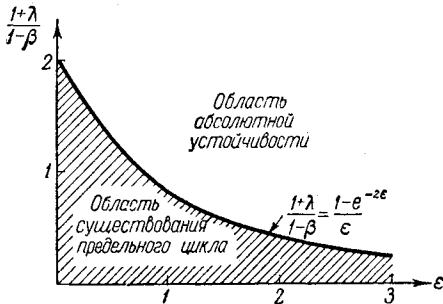


Рис. 435.

5. Структура разбиения фазовой поверхности на траектории. Рассмотрим более подробно случай

$$\frac{1 + \lambda}{1 - \beta} < \frac{1 - e^{-2\epsilon}}{\epsilon}, \quad (8.776)$$

когда на фазовой поверхности кроме интервала устойчивых состояний равновесия на полосе (I) ($|\xi| < \epsilon, y = 0, n = 0$) существует еще и симметричный устойчивый предельный цикл (рис. 434). И интервал состояний равновесия, и предельный цикл имеют на фазовой поверхности свои *области притяжения* — области, состоящие из точек траекторий, асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближающихся соответственно к состояниям равновесия или к предельному циклу.

В связи с этим встает вопрос, исчерпывается ли фазовая поверхность этими двумя областями притяжения, т. е. не имеется ли, кроме двух указанных устойчивых режимов, других, также устойчивых режимов, к которым система могла бы приходиться при соответствующих начальных условиях? Отрицать существование каких-либо других устойчивых режимов, отличных от состояний равновесия и симметричных автоколебаний, без более детального исследования точечного преобразования мы в данном случае не можем. В рассматриваемой динамической системе двузначность функции $s = s(\tau)$ и наличие нисходящего участка кривой $s' = g(\tau)$ (при $\tau_0 \leq \tau < \tau_1$) содержит в себе, например, возможность существования сложного и, вообще говоря, несимметричного периодического режима, определяемого неподвижной точкой не преобразования $s' = \Pi(s)$, а кратного ему преобразования

$$s' = \Pi \{ \Pi \{ \Pi \{ \dots \Pi (s) \} \dots \} \} = \Pi^n (s).$$

На диаграмме Ламерея такому сложному периодическому режиму соответствовала бы не точка пересечения кривых $\tau = f(s)$ и $s' = g(\tau)$, а некоторый замкнутый контур, составленный из чередующихся верти-

¹⁾ Дифференцируя (8.74) по β при фиксированных ϵ и λ , имеем:

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial \beta} = - \frac{1 - e^{-\tau_0}}{1 - (1 - \beta) e^{-\tau_0}} < 0.$$

кальных и горизонтальных отрезков с вершинами на этих кривых. Поэтому для выяснения всех типов движений рассматриваемой релейной системы нельзя ограничиться нахождением состояний равновесия и неподвижных точек преобразования $s' = \Pi(s)$ и исследованием их устойчивости, а необходимо провести более детальное изучение структуры разбиения фазовой поверхности на траектории и, в частности, более детальное изучение структуры областей притяжения интервала состояний равновесия и симметричного предельного цикла.

К области притяжения интервала состояний равновесия при любых условиях принадлежит область $A_0: |\xi + (1 - \beta)y| < \varepsilon$ на полосе (I) (рис. 429, а), которой на полупрямых S и S' соответствует интервал $-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon < s < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ (будем обозначать его ниже через (a_0)). Используя обратное преобразование (преобразование s' в s)¹⁾, мы сможем по этому интервалу найти другие интервалы $(a_1), (a_2), \dots$, точки которых преобразуются фазовыми траекториями (или, иначе говоря, преобразованием $s' = \Pi(s)$) в точки интервала (a_0) , и тем самым разобраться в структуре области притяжения интервала состояний равновесия. Здесь в зависимости от соотношения между $(s')_{\min} = (s')_{\tau=\tau_1}$ и $\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ возможны два случая.

Пусть $(s')_{\min} \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$. Диаграмма Ламерея для этого случая изображена на рис. 432 (для определенности взят случай $\tau^* < \tau_1$). Как видно, все траектории, пересекающие полупрямые S и S' вне интервала (a_0) , имеют последующие точки пересечения с этими полупрямыми $s' \geq (s')_{\min} \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$, т. е. также вне интервала (a_0) , и будут асимптотически приближаться к симметричному предельному циклу. Для доказательства последнего утверждения рассмотрим последовательность точек пересечения какой-либо траектории с полупрямыми S и S'

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots,$$

где $s_{k+1} = \Pi(s_k)$, с начальной точкой s_0 вне интервала (a_0) . Очевидно, эта последовательность будет бесконечной, все $s_k \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ (при $k \geq 1$)²⁾ и для них в силу (8.75) справедливо неравенство:

$$|s_{k+1} - s^*| < |s_k - s^*|. \quad (8.78)$$

¹⁾ Заметим, что это обратное преобразование является многозначным, так как каждому значению $s' \geq (s')_{\min}$ соответствует одно или два значения τ , а каждому значению τ — два значения s , одно из которых больше $\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$, а другое меньше $-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$.

²⁾ s_0 может быть меньше $-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$.

Следовательно, любые такие последовательности s_0, s_1, s_2, \dots имеют своей предельной точкой неподвижную точку s^* , а соответствующие фазовые траектории асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются к симметричному предельному циклу. Таким образом, в рассматриваемом случае область притяжения интервала состояний равновесия состоит из области A_0 и небольших сегментных областей на листах (II) и (III), а вся остальная часть фазовой поверхности представляет собой область притяжения простого симметричного цикла (рис. 436).

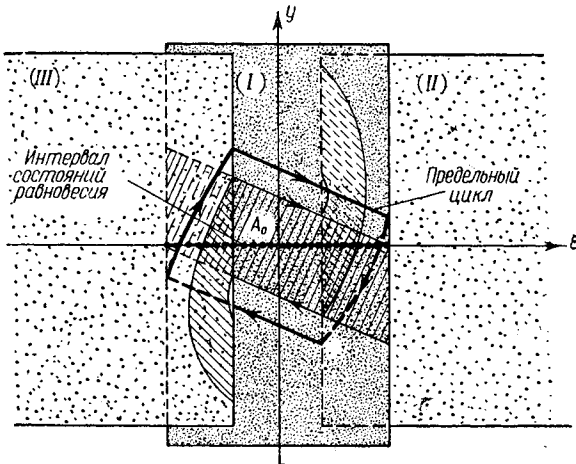


Рис. 436.

Иная, более сложная структура областей притяжения интервала состояний равновесия и предельного цикла получается при

$$(s')_{\min} < \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \varepsilon^1).$$

Ради краткости мы рассмотрим подробно только случай $-\frac{1 - \lambda}{1 - \beta} \varepsilon < (s')_{\min} < \frac{1 + \lambda}{1 - \beta} \varepsilon$, когда диаграмма Ламерея имеет вид, изображенный на рис. 433 (такое же рассмотрение и с теми же выводами может быть проведено и при $(s')_{\min} \leq -\frac{1 - \lambda}{1 - \beta} \varepsilon$). Теперь всегда $\tau^* < \tau_1$, а последующие точки пересечения фазовых траекторий с полупрямыми S и S' могут попадать не только вне интервала (a_0) , но и на него.

1) Нетрудно убедиться, что это неравенство имеет место при

$$\frac{1 + \lambda}{1 - \beta} < \frac{1 - \frac{e^{-\beta}}{1 - \beta} e^{-2\alpha}}{\varepsilon}.$$

Обозначим через s_0 координату точки на полупрямой $s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon$, преобразующуюся преобразованием $s' = \Pi(s)$ с меньшим значением параметра τ в точку $\frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon$, и через (b_0) — отрезок $\frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon \leq s \leq s_0$ ¹⁾. Очевидно, последовательность точек пересечения любой траектории с полупрямыми S и S' :

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$$

с начальной точкой s_0 на отрезке (b_0) будет бесконечной (причем все точки s_k будут принадлежать этому отрезку) и будет иметь своей предельной точкой неподвижную точку s^* , так как для этой последовательности справедливо неравенство (8.78). Таким образом, отрезок (b_0) является «отрезком притяжения» неподвижной точки s^* , а все траектории, пересекающие полупрямые S и S' в точках

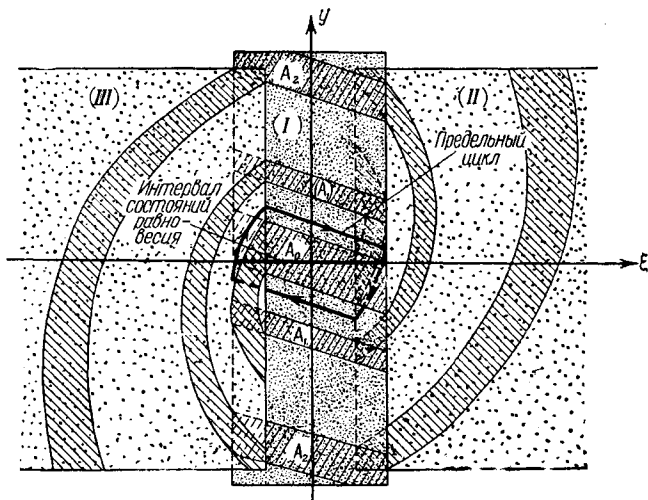


Рис. 437.

отрезка (b_0) , стремятся при $t \rightarrow +\infty$ к симметричному предельному циклу. Точки этих траекторий и образуют область притяжения предельного цикла — незаштрихованную область на рис. 437.

Далее, совершая преобразование, обратное преобразованию $s' = \Pi(s)$, т. е. определяя по заданным точкам s' те точки s , которые

¹⁾ На полупрямой $s \geq \frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon$ имеются две точки, последующей которых является точка $\frac{1+\lambda}{1-\beta} \epsilon$. Под точкой s_0 понимается та точка из этих двух, которой соответствует меньшее значение параметра τ . Очевидно, $s_0 > s'_0$ в силу неравенства (8.75), а отрезок (b_0) содержит неподвижную точку s^* .

имеют своими последующими эти точки s' , мы, отправляясь от интервала (a_0) и (b_0) , разобьем полупрямую $s \geq -\frac{\beta}{1-\beta}$ на конечное число интервалов $(a_1), (a_2), \dots, (a_m)$ и отрезков $(b_0), (b_1), \dots, (b_m)$, точки которых преобразуются фазовыми траекториями соответственно в точки интервала (a_0) и отрезка (b_0) (рис. 433)¹⁾. При этом, поскольку интервал (a_0) и отрезок (b_0) имеют общую граничную точку (точку $s = \frac{1+\lambda}{1-\beta} \varepsilon$), указанные выше интервалы и отрезки будут чередоваться, примыкая друг к другу²⁾. Поэтому мы можем утверждать, что всякая точка s полупрямой $(s) (s \geq -\frac{\beta}{1-\beta} \varepsilon)$ преобразуется после конечного числа преобразований $s' = \Pi(s)$ в точку, принадлежащую либо интервалу (a_0) , либо отрезку (b_0) , а соответствующая фазовая траектория будет асимптотически приближаться или к одному из состояний равновесия или к симметричному предельному циклу в зависимости от того, где (на интервале (a_i) или на отрезке (b_j)) находилась первая точка пересечения этой траектории с полупрямой S (или S').

Такое же построение интервалов (a_i) и отрезков (b_j) и с теми же результатами может быть выполнено и при

$$(s')_{\min} \leq -\frac{1-\lambda}{1-\beta} \varepsilon.$$

Следовательно, мы можем считать доказанным, что при выполнении условия существования простого симметричного предельного цикла (т. е. условия (8.77б)) фазовая поверхность рассматриваемой релейной системы состоит только из областей притяжения интервала состояний равновесия и указанного предельного цикла. Иначе говоря, мы доказали, что в системе не существует никаких других устойчивых стационарных режимов, кроме состояний равновесия и автоколебательного режима, соответствующего простому симметричному предельному циклу. Таким образом, система будет приходить к тому или иному состоянию равновесия или в ней будет устанавливаться автоколебательный процесс в зависимости от начальных условий — в зависимости от того, в какой области притяжения находилась изображающая точка в начальный момент времени. Поэтому при выполнении условия (8.77б)

¹⁾ Построение интервалов (a_i) и отрезков (b_j) нужно проводить только на полупрямой $s \geq -\frac{\beta}{1-\beta}$, так как только точки этой полупрямой преобразуются преобразованием $s' = \Pi(s)$ в точки полупрямой S' . Далее, так как $(s')_{\min} \leq s < 1$, то число интервалов (a_i) и отрезков (b_j) будет конечным, причем последний из них будет включать в себя точки со сколь угодно большими s .

²⁾ Именно, граничные точки каждого интервала (a_i) являются конечными точками соседних отрезков (b_j) , а конечные точки каждого отрезка (b_j) являются в свою очередь граничными точками соседних интервалов (a_i) .

изучаемая нами релейная система имеет *жесткий режим* возбуждения автоколебаний.

Интересно отметить, что граница, разделяющая области притяжения предельного цикла и интервала состояний равновесия, не является неустойчивым предельным циклом, как это было в ранее рассмотренных динамических системах с плоской фазовой поверхностью. Этой границей являются фазовые траектории, проходящие через пограничные точки интервала состояний равновесия. Такая сравнительно необычная структура разбиения на траектории фазовой поверхности рассматриваемой сейчас системы обусловлена, конечно, многолистно-стью этой поверхности.

6. Динамика системы при сильной коррекции по скорости. Нам остается рассмотреть движение системы при $\beta > 1$ ¹⁾. Разбиение на траектории полосы (I) (реле выключено) для этого случая было изображено на рис. 429. По-прежнему на этой полосе изображающие точки двигаются по прямолинейным фазовым траекториям

$$\xi + (1 - \beta)y = \text{const}$$

по направлению к оси абсцисс, но теперь, в отличие от уже рассмотренного случая $\beta < 1$,

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{1}{\beta - 1} > 0.$$

Обозначим, как и раньше, через S и S' те части границ листов (III) и (II), через точки которых изображающая точка переходит на полосу (I), и через s — координаты точек этих полупрямых ($y = +s$ на полупрямой S : $\xi = -\lambda\varepsilon$, $y < \frac{\beta}{\beta - 1}$ и $y = -s$ на полупрямой S' : $\xi = +\lambda\varepsilon$, $y > \frac{\beta}{\beta - 1}$). Тем же способом, что и при $\beta < 1$, нетрудно получить следующие уравнения точечного преобразования полупрямых S и S' самих в себя, осуществляемого фазовыми траекториями системы:

$$s = \begin{cases} -1 - \frac{1 + \lambda}{\beta - 1} \varepsilon - \frac{\tau - (1 - \lambda) \varepsilon}{(\beta - 1)(1 - e^{-\tau})} & \text{при } s \leq -\frac{1 + \lambda}{\beta - 1} \varepsilon, \\ 1 + \frac{1 - \lambda}{\beta - 1} \varepsilon + \frac{\tau - (1 - \lambda) \varepsilon}{(\beta - 1)(1 - e^{-\tau})} & \text{при } s \geq \frac{1 - \lambda}{\beta - 1} \varepsilon, \end{cases} \quad (8.79)$$

$$s' = 1 + \frac{\tau - (1 - \lambda) \varepsilon}{(\beta - 1)(e^{\tau} - 1)}$$

(здесь s — координата исходной точки полупрямой S или S' , s' — координата последующей точки на тех же полупрямых). Точки полу-

¹⁾ Напомним, что этот случай может быть реализован только в следящей системе (рис. 425), так как в релейной системе автоматического регулирования (в системе непрямого регулирования с сервомотором «постоянной скорости» и с жесткой обратной связью; рис. 427) коэффициент $\beta < 1$.

прямых S и S' с координатами $-\frac{1+\lambda}{\beta-1}\epsilon < s < \frac{1-\lambda}{\beta-1}\epsilon$, очевидно, преобразуются фазовыми траекториями, не выходящими за пределы полосы (I), в точки интервала состояний равновесия на этой полосе. Заметим также, что параметр преобразования τ в параметрических выражениях (8.79) — время пробега изображающей точки на листе (II) или на листе (III) — может принимать значения $\tau_0 < \tau < +\infty$, где τ_0 , как и раньше, — корень уравнения (8.74).

Диаграмма Ламерея для рассматриваемого случая $\beta > 1$ приведена на рис. 438. Кривая для s нигде не пересекается с кривой для s' , —

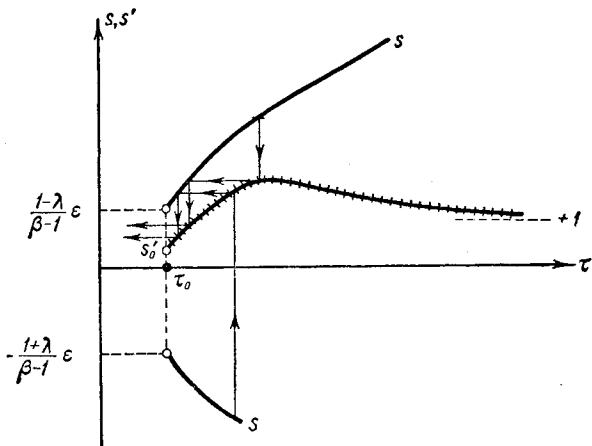


Рис. 438.

преобразование (8.79) не имеет неподвижных точек, и следовательно, на фазовой поверхности нет предельных циклов¹⁾. Так как

$$\frac{ds'}{d\tau} < \frac{ds}{d\tau} \quad \text{при} \quad s \geq \frac{1-\lambda}{\beta-1}\epsilon,$$

то при любых начальных условиях релейная система придет к одному

¹⁾ В самом деле, при $s \geq \frac{1-\lambda}{\beta-1}\epsilon$ $s - s' = \frac{\tau}{\beta-1} \geq \frac{\tau_0}{\beta-1}$ (отсюда также следует, что $\frac{ds}{d\tau} - \frac{ds'}{d\tau} = \frac{1}{\beta-1} > 0$);

$$\text{при} \quad s \leq -\frac{1+\lambda}{\beta-1}\epsilon \quad s - s' = -\frac{1+\lambda}{\beta-1}\epsilon - 2 - \frac{1}{\beta-1} \{ \Psi_1 + \Psi_2 \},$$

т. е. согласно (8.65а) является монотонно убывающей функцией, и поскольку $(s)_{\tau=\tau_0} - (s')_{\tau=\tau_0} = -\frac{1}{1-\lambda} \left\{ 2(1 - e^{-\tau_0}) + \frac{1+\lambda}{\beta-1} \tau_0 \right\} < 0$, кривая для s нигде не пересекается с кривой для s' также и при $s \leq -\frac{1+\lambda}{\beta-1}\epsilon$.

из состояний равновесия, так как все «лестницы Ламерея» (см. рис. 438) приводят после конечного числа ступеней на интервал

$$-\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon < s < \frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon,$$

точки которого, как было указано, преобразуются в точки интервала состояний равновесия. Разбиение фазовой поверхности системы на траектории при $\beta > 1$ изображено на рис. 439.

Подводя итог проведенному рассмотрению, мы можем утверждать, что в изученной релейной системе гистерезисные особенности характеристики реле являются причиной автоколебаний. Однако последние

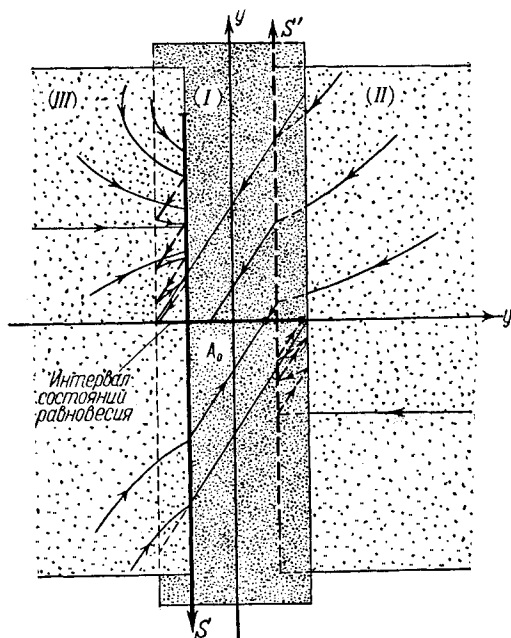


Рис. 439.

могут быть подавлены введением достаточно сильной обратной связи (или достаточно сильной скоростной коррекции), причем величина обратной связи (или скоростной коррекции), необходимая для подавления автоколебаний, тем меньше, чем больше мертвая зона реле.

§ 9. Осциллятор с квадратичным трением

Рассмотрим еще раз осциллятор с квадратичным трением, колебания которого описываются уравнением

$$2\ddot{x} + \dot{x}^2 \operatorname{sgn} \dot{x} + x = 0$$

или системой уравнений

$$\dot{x} = y, \quad 2\dot{y} = -x - y^2 \operatorname{sgn} y \quad (8.80)$$

(см. § 1 гл. III), и покажем путем построения соответствующего точечного преобразования прямой в прямую, что все его фазовые траектории (на фазовой плоскости x, y), скручиваясь, асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ приближаются к началу координат $(0, 0)$, которое является, таким образом, состоянием равновесия типа устойчивого фокуса¹⁾. Рассматриваемая система является системой *кусочно-консервативной* (а не кусочно-линейной) и интересна с точки зрения теории точечных преобразований своеобразной формой получаемой функции соответствия, а также тем, что устойчивость неподвижной точки, соответствующей состоянию равновесия, не может быть выяснена с помощью теоремы Кенигса.

Напомним основные результаты рассмотрения такого осциллятора, проведенного в § 1 гл. III. На верхней части фазовой плоскости x, y , где $y > 0$ и уравнения колебаний имеют вид:

$$\dot{x} = y, \quad 2\dot{y} = -x - y^2,$$

фазовыми траекториями являются кривые:

$$(y^2 + x - 1)e^x = C \quad (8.81)$$

(C — постоянная интегрирования, причем $C \geq -1$); парабола $y^2 = 1 - x$, соответствующая значению $C = 0$, является сепаратрисой, разделяющей траектории, идущие из бесконечности (для них $C > 0$), и траектории, начинающиеся в точках оси абсцисс слева от начала координат (для последних $-1 < C < 0$); значению $C = -1$ соответствует изолированная особая точка $(0, 0)$ — состояние равновесия системы. При этом все траектории на верхней полуплоскости выходят на ось абсцисс справа от начала координат (рис. 440).

Так как уравнения (8.80) не меняют своего вида при замене переменных x, y на $-x, -y$, то траектории в нижней части фазовой плоскости ($y < 0$) симметричны относительно начала координат с траекториями на верхней полуплоскости. В частности, все траектории на нижней полуплоскости выходят на ось абсцисс слева от начала координат.

¹⁾ Из уравнений (8.80) следует, что единственным состоянием равновесия системы является точка $(0, 0)$. Заметим, что вопрос о характере (об устойчивости) этого состояния равновесия не может быть решен путем линеаризации уравнений (8.80) в окрестности точки $(0, 0)$. Действительно, отбрасывая в уравнениях (8.80) для их линеаризации член $y^2 \operatorname{sgn} y$ — единственный член второго порядка малости (по сравнению с x и y), мы получим уравнение гармонического осциллятора с особой точкой $(0, 0)$ типа *центра*, т. е. как раз тот случай, когда вопрос о характере состояния равновесия исходной нелинейной системы не может быть решен путем исследования соответствующих линеаризованных уравнений.

Эти свойства фазовых траекторий уравнений (8.80), очевидно, позволяют свести задачу рассмотрения хода траекторий к исследованию последовательности точек пересечения некоторой, произвольной

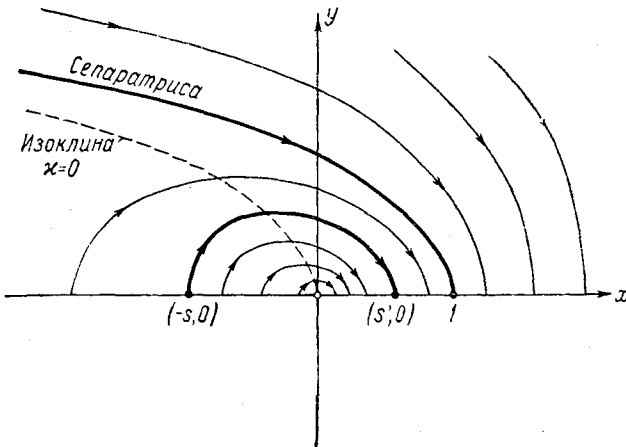


Рис. 440.

фазовой траектории с осью абсцисс (рис. 441), — к исследованию точечного преобразования положительной и отрицательной части оси

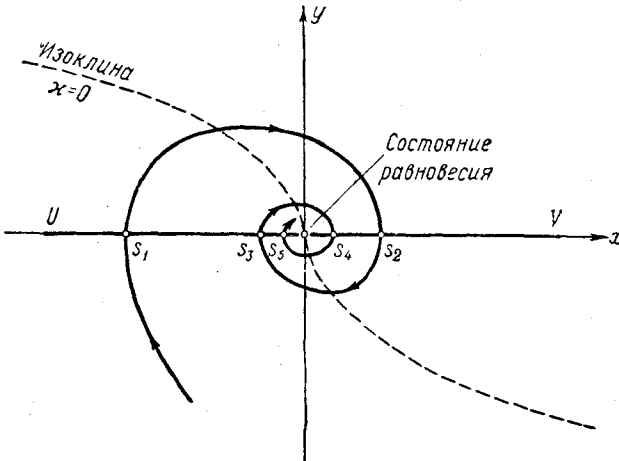


Рис. 441.

абсцисс (полупрямых U и V на рис. 441) друг в друга, осуществляемого траекториями уравнений (8.80). Введем в качестве координаты на положительной и отрицательной полуосях x (на полупрямых

мых U и V) расстояние s до начала координат ($s > 0$). Тогда симметричным точкам на оси абсцисс будут соответствовать одинаковые s и точечное преобразование отрицательной полуоси x (полупрямой U) в положительную полуось x (в полупрямую V) будет тождественным. (будет иметь ту же функцию соответствия) с точечным преобразованием полупрямой V в полупрямую U . Поэтому в последовательности точек пересечения некоторой, произвольной фазовой траектории с осью абсцисс:

$$s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots$$

каждая последующая точка определяется по предыдущей *единым* точечным преобразованием, *единой* функцией соответствия

$$s_{k+1} = f(s_k),$$

независимо от того, на какой из полупрямых (на U или на V) лежит предыдущая точка.

Для вычисления функции соответствия этого точечного преобразования рассмотрим фазовую траекторию в верхней полуплоскости x, y , начинающуюся в точке $(-s, 0)$ полупрямой U и вновь выходящую на ось абсцисс (на полупрямую V) в точке $(s', 0)$ (рис. 441); здесь s — координата точки на полупрямой U , s' — координата ее последующей на полупрямой V (при этом $s > 0$, а $0 < s' < 1$). Согласно (8.81) координаты этих точек будут связаны уравнением

$$-(s+1)e^{-s} = (s'-1)e^{s'} \quad (=C), \quad (8.82)$$

причем $-1 < C < 0$. Так как $\frac{d}{ds'}[(s'-1)e^{s'}] = s'e^{s'} > 0$, то это уравнение определяет *однозначную* и *непрерывную* функцию соответствия $s' = f(s)$. Для того чтобы найти неподвижные точки рассматриваемого точечного преобразования, введем параметр $\xi = -C$ ($0 < \xi < 1$). Тогда уравнение (8.82) можно записать в параметрической форме — в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (1+s)e^{-s} &= \xi, \\ (1-s')e^{s'} &= \xi, \end{aligned} \right\} \quad (8.82a)$$

выражающих (правда, по-прежнему в неявной форме) s и s' — координаты исходной точки и ее последующей — через параметр ξ :

$$s = \varphi(\xi), \quad s' = \psi(\xi),$$

где φ и ψ , как нетрудно видеть, однозначные и непрерывно дифференцируемые функции. Построим на общей диаграмме (на диаграмме Ламерея) графики этих двух функций (рис. 442). Очевидно,

эти кривые пересекаются в точке $s = s' = 0, \xi = 1$, т. е. точка $\bar{s} = 0$ является неподвижной точкой точечного преобразования; этой неподвижной точке соответствует состояние равновесия системы. Так как

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = -se^{-s} < 0,$$

$$\frac{d\bar{s}}{ds'} = -s'e^{s'} < 0$$

и, следовательно, при одинаковых s и s'

$$\frac{d\bar{s}}{ds} > \frac{d\bar{s}}{ds'},$$

то кривая $s = \varphi(\xi)$ идет правее кривой $s' = \psi(\xi)$, т. е. при каждом $0 < \xi < 1$

$$s' = \psi(\xi) < s = \varphi(\xi).$$

Таким образом, неподвижная точка $\bar{s} = 0$ рассматриваемого точечного преобразования является *единственной*; кроме того, точка $\bar{s} = 0$ *устойчива*, поскольку любая последовательность точек:

$$s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots,$$

где $s_{k+1} = f(s_k)$, сходится к ней (см. «лестницу» Ламерея, построенную на рис. 442)¹⁾. Соответственно любая фазовая траектория

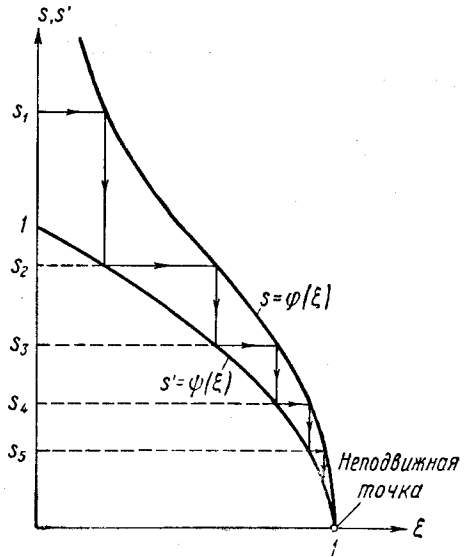


Рис. 442.

¹⁾ Так как $f'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} f'(s) = 1$, то для аналитического доказательства

устойчивости неподвижной точки $s = 0$ мы не можем воспользоваться теоремой Кенигса. Можно дать следующее простое доказательство устойчивости этой неподвижной точки, опираясь на ее единственность. Рассмотрим какую-либо последовательность чисел:

$$s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots,$$

где $s_{k+1} = f(s_k)$ — последовательность координат точек пересечения некоторой фазовой траектории с осью абсцисс. Любая такая последовательность является монотонно убывающей последовательностью положительных чисел; поэтому рассматриваемая последовательность имеет предел. Допустим, что он равен $a > 0$. Тогда $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = a$ и $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{k+1} = a$, но $s_{k+1} = f(s_k)$, где $f(s)$ — непрерывная функция (при всех $s > 0$), поэтому согласно теореме о пределе непрерывной функции

$$a = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(s_k) = f(a),$$

асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближается к состоянию равновесия $(0, 0)$, при этом число ее пересечений с осью абсцисс неограниченно возрастает. Следовательно, все траектории системы уравнений (8.80) имеют вид спиралей, скручивающихся к состоянию равновесия $(0, 0)$, в силу чего последнее является *устойчивым фокусом*.

§ 10. Паровая машина

В заключение главы рассмотрим пример *автосвращательной* системы — простейшую динамическую модель (с одной степенью свободы и с *цилиндрической* фазовой поверхностью) парового двигателя, схема которого приведена на рис. 443.

Как известно, паровая машина является системой с «обратной связью»: золотник машины, связанный с ее главным валом через экс-

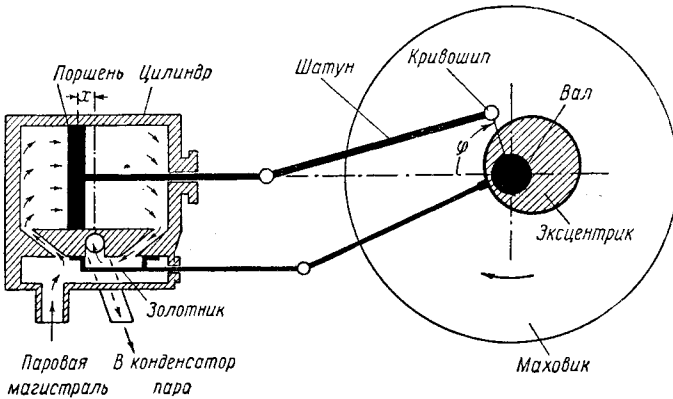


Рис. 443.

центрик, управляет поступлением пара в цилиндр (в его левую или правую полость в зависимости от положения вала) и позволяет тем самым получать от *постоянного* источника энергии (от паровой магистрали с *постоянным* давлением пара P_0) такое *переменное*

т. е. точка $s = a$ также является неподвижной точкой преобразования, что невозможно в силу единственности неподвижной точки $\bar{s} = 0$. Таким образом, любая последовательность

$$s_1, s_2, \dots, s_k, \dots \rightarrow 0,$$

т. е. единственная неподвижная точка $\bar{s} = 0$ является устойчивой.

воздействие на поршень, которое поддерживает колебательное движение поршня и вращательное движение вала (маховика) машины, несмотря на наличие сил сопротивления (в частности, сил, действующих на машину со стороны ее нагрузки)¹⁾. Сила f давления пара на поршень (при заданном давлении пара в паровой магистрали) зависит от положения золотника, который (в зависимости от своего положения) соединяет одну или другую полость цилиндра с паровой магистралью или с конденсатором пара или же перекрывает паропроводящий канал полости, и от положения поршня, поскольку давление пара в полости цилиндра зависит от объема этой полости, если ее канал перекрыт золотником. Ради упрощения задачи будем пренебрегать зависимостью силы f от других величин, например от скорости движения поршня машины²⁾. Так как положения поршня, вала и золотника машины *однозначно* определяются углом поворота вала φ (но не определяются однозначно, например, координатой поршня x), то, во-первых, сила f будет некоторой *однозначной* и периодической (с периодом, равным 2π) функцией угла φ (график этой функции

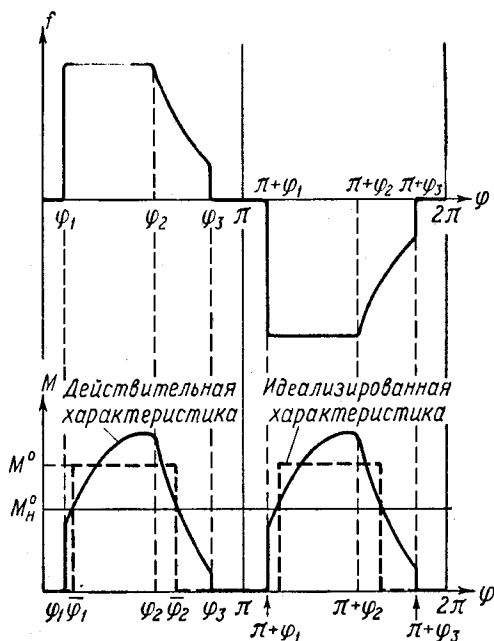


Рис. 444.

качественно изображен на рис. 444) и, во-вторых, состояние полученной динамической модели паровой машины (с одной, механической степенью свободы) будет *однозначно* определяться заданием угла

¹⁾ Для получения переменной силы давления пара на поршень, поддерживающей вращение вала машины, эксцентрик золотника должен быть повернут на угол около 90° относительно кривошипа шатуна по направлению вращения вала.

²⁾ Строго говоря, сила f давления пара на поршень зависит и от скорости движения поршня, так как при больших скоростях движения поршня будут иметь место большие объемные расходы пара и меньшие давления пара в полости цилиндра из-за увеличенного перепада давления на окнах и каналах парораспределительного устройства (золотника), которые обладают некоторым, отличным от нуля гидравлическим сопротивлением. Однако эта зависимость обычно невелика, и ею мы будем пренебрегать.

поворота φ и угловой скорости $\frac{d\varphi}{dt}$ вала. Соответственно фазовая поверхность этой модели будет цилиндрической¹⁾.

Уравнение вращения вала машины (при сделанных предположениях) запишется в следующем виде:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M - M_n, \quad (8.83)$$

где I — момент инерции машины (главным образом маховика) и ее нагрузки, приведенный к оси вала (ниже будем считать, что I не зависит от φ , т. е. является постоянным), M — момент сил, действующих на вал со стороны поршня машины («движущий момент») и M_n — момент сил сопротивления, преодолеваемых машиной, включая момент сил, действующих на вал со стороны нагрузки машины. Момент сил M связан с силой давления пара на поршень f соотношением

$$M = f(\varphi) A \sin \varphi$$

(для простоты взят случай, когда расстояние A между осями вала и кривошипа шатуна мало по сравнению с длиной шатуна); поэтому движущий момент M также является *однозначной* и периодической функцией угла φ , но уже с периодом, равным π (рис. 444). Для дальнейшего существенно, что движущий момент $M \geq 0$ (при всех φ) достигает максимума M_{\max} при углах φ , близких к $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, и обращается в нуль вблизи «мертвых точек» $\varphi = 0, \pi, 2\pi$. Момент сил сопротивления M_n при заданной нагрузке можно считать в большинстве случаев зависящим только от угловой скорости вращения вала $\frac{d\varphi}{dt}$.

¹⁾ Поясним график зависимости силы f от угла φ (рис. 444). При $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, когда с паровой магистралью соединена левая полость цилиндра, давление пара в полости постоянно ($= P_0$), т. е. постоянна и сила давления пара на поршень f . Доступ пара в левую полость прекращается при некотором $\varphi = \varphi_2$, поэтому при дальнейшем увеличении φ давление пара и сила f уменьшаются, поскольку объем левой полости цилиндра увеличивается, а масса пара в ней остается постоянной. Наконец, при $\varphi = \varphi_3$ левая полость соединяется с конденсатором пара и сила f обращается в нуль (правая полость цилиндра соединена с конденсатором пара при всех $0 < \varphi < \pi$). При $\pi < \varphi < 2\pi$ протекают такие же процессы с той лишь разницей, что теперь левая полость цилиндра соединена с конденсатором пара, а пар из паровой магистрали поступает (при $\pi + \varphi_1 < \varphi < \pi + \varphi_2$) в правую полость. Ясно, что в силу симметричности парораспределительного устройства машины функция $f = f(\varphi)$ удовлетворяет условию $f(\pi + \varphi) \equiv -f(\varphi)$.

Мы принимаем функцию $f(\varphi)$ как эмпирически данную. Ее вывод и исследование составляют задачу не теории колебаний, а термодинамики.

Заметим также, что, поскольку угол φ , положение золотника и, следовательно, сила f не являются однозначными функциями координаты поршня x плоскость $x, \frac{dx}{dt}$ не может быть взята в качестве фазовой поверхности рассматриваемой динамической системы.

1. Машина, работающая на «постоянную» нагрузку. Предположим, что нагрузка машины создается силами «постоянного» трения, подчиняющихся закону Кулона (см. § 2, гл. III), т. е. что

$$\begin{aligned} \text{при } \frac{d\varphi}{dt} \neq 0 \quad M_n &= M_n^0 \operatorname{sgn} \frac{d\varphi}{dt}, \\ \text{при } \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} M_n = M, \quad \text{если } M \leq M_n^0, \\ M_n = M_n^0, \quad \text{если } M \geq M_n^0, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (8.84)$$

где M_n^0 — максимальный момент сил трения покоя, причем $M_n^0 < M_{\max}^1$. При такой нагрузке машина будет иметь устойчивые состояния равновесия, расположенные вблизи «мертвых точек». Действительно, обозначив через $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ те углы поворота вала, при которых движущий момент $M = M_n^0$ (см. рис. 444), мы получим, что при $0 < \varphi < \bar{\varphi}_1$, при $\bar{\varphi}_2 < \varphi < \pi + \bar{\varphi}_1$ и при $\pi + \bar{\varphi}_2 < \varphi < 2\pi$ $M(\varphi) < M_n^0$; поэтому все состояния $(\varphi^*, 0)$, где φ^* — любой угол в одном из трех указанных интервалов, являются состояниями равновесия, поскольку в них согласно (8.84) $M_n = M(\varphi^*)$, так как $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, и следовательно, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ (в устойчивости этих состояний равновесия мы убедимся ниже).

Это обстоятельство подсказывает следующую простейшую идеализацию характеристики движущего момента машины $M = M(\varphi)$, значительно упрощающую рассмотрение динамики паровой машины и в то же время сохраняющую указанные выше состояния равновесия. Эта идеализация состоит в замене действительной характеристики движущего момента паровой машины следующей разрывной кусочно-постоянной функцией:

$$M = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \varphi < \bar{\varphi}_1, \quad \bar{\varphi}_2 \leq \varphi < \pi + \bar{\varphi}_1, \\ & \pi + \bar{\varphi}_2 \leq \varphi < 2\pi, \\ M_0 & \text{при } \bar{\varphi}_1 \leq \varphi < \bar{\varphi}_2, \quad \pi + \bar{\varphi}_1 \leq \varphi < \pi + \bar{\varphi}_2; \end{cases} \quad (8.85)$$

график этой разрывной функции изображен на нижней половине рис. 444 пунктирной линией. «Амплитуду» идеализированного движущего момента M_0 ($M_0 = \text{const}$) мы выберем так, чтобы за каждые пол-оборота вала работа момента (8.85) равнялась работе паровой машины, т. е.

$$M_0 = \frac{1}{\Theta} \int_0^\pi M(\varphi) d\varphi > M_n^0,$$

где $\Theta = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1$ — так называемый «угол отсечки» пара и $M(\varphi)$ — характеристика движущего момента паровой машины. Такой выбор M_0

¹⁾ Нетрудно видеть, что при $M_n^0 > M_{\max}$ вал машины или не вращается или остановится через конечный интервал времени, зависящий от начальных условий. Ниже этот мало интересный случай не рассматривается.

обеспечит наилучшее энергетическое соответствие паровой машины и ее динамической модели.

Легко видеть сразу, что движение будет происходить с увеличивающейся угловой скоростью (машина пойдет «в разнос»), если $M_0 > \frac{\pi}{\Theta} M_n^0$, так как в этом случае за каждые пол-оборота работа движущего момента ($= M_0 \Theta$) будет больше работы сил «постоянного» трения нагрузки ($= M_n^0 \cdot \pi$). Если $M_0 = \frac{\pi}{\Theta} M_n^0$, то рассматриваемая модель будет «квазиконсервативной»: она будет иметь континуум периодических движений с $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ (этим движениям будут соответствовать замкнутые фазовые траектории, охватывающие фазовый цилиндр в области $\frac{d\varphi}{dt} > 0$). Наконец, при $M_0 < \frac{\pi}{\Theta} M_n^0$ все движения будут затухающими, т. е. машина будет останавливаться при любых начальных условиях. Очевидна негрубость квазиконсервативного случая: машина пойдет «в разнос» или будет останавливаться при любом, сколь угодно малом нарушении равенства $M_0 = \frac{\pi}{\Theta} M_n^0$ из-за изменения «амплитуды» движущего момента M_0 или максимального момента нагрузки M_n^0 .

Полученные результаты отображают, в известной мере, свойства реальных паровых машин, которые, как известно, обладают весьма небольшим саморегулированием, т. е. значительно изменяют скорость вращения вала при сравнительно небольших изменениях нагрузки или давления пара в паровой магистрали (именно поэтому паровые машины обычно снабжаются регуляторами скорости вращения вала!).

Таким образом, паровая машина, работающая на «постоянную» нагрузку, не является (при сделанных выше предположениях) автовращательной системой. Тем не менее, имея в виду изучение других, автовращательных динамических моделей паровой машины, мы все же проведем краткий анализ разбиения на траектории фазового цилиндра рассматриваемой сейчас динамической системы.

Введем новые переменные:

$$\vartheta = \varphi - \bar{\varphi}_1 \quad \text{и} \quad t_{\text{нов}} = \sqrt{\frac{M_n^0}{I}} t;$$

тогда уравнение (8.83) для рассматриваемого случая постоянной нагрузки запишется в следующем безразмерном виде¹⁾:

$$\dot{\vartheta} = z, \quad \dot{z} = \lambda \Phi(\vartheta) - \Psi(z, \vartheta), \quad (8.83a)$$

где

$$\lambda = \frac{M_0}{M_n^0} > 1 \quad (\text{так как } M_0 > M_n^0)$$

¹⁾ Здесь и ниже точкой сверху обозначено дифференцирование по новому, безразмерному времени $t_{\text{нов}}$.

и

$$\Phi(\vartheta) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \vartheta < \Theta \text{ и при } \pi \leq \vartheta < \pi + \Theta, \\ 0 & \text{при } \Theta \leq \vartheta < \pi \text{ и при } \pi + \Theta \leq \vartheta < 2\pi \end{cases} \quad (8.85a)$$

(здесь $\Theta = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1$ — введенный ранее «угол отсечки» пара);

$$\Psi(z, \vartheta) = \begin{cases} \operatorname{sgn} z & \text{при } z \neq 0 \text{ и любых } \vartheta, \\ 1 & \text{при } z = 0 \text{ и } 0 \leq \vartheta < \Theta \text{ или } \pi \leq \vartheta < \pi + \Theta, \\ 0 & \text{при } z = 0 \text{ и } \Theta \leq \vartheta < \pi \text{ или } \pi + \Theta \leq \vartheta < 2\pi \end{cases} \quad (8.84a)$$

— приведенные идеализированные характеристики движущего момента машины и момента «постоянной» нагрузки (рис. 445).

Отметим некоторые особенности разбиения фазового цилиндра ϑ , z на траектории уравнений (8.83а): 1) на окружности $z=0$ имеет-

ся два «отрезка покоя» $\Theta \leq \vartheta < \pi$ и $\pi + \Theta \leq \vartheta < 2\pi$, состоящих из устойчивых состояний равновесия (в точках «отрезков покоя» $\dot{\vartheta} = 0$,

$\dot{z} = 0$, а траектории как на верхней, так и на нижней половине фазового цилиндра подходят при возрастании t к этим точкам, поскольку при указанных значениях ϑ $\dot{z} = -1$ при $z > 0$ и $\dot{z} = +1$ при $z < 0$); 2) на нижней

половине фазового цилиндра (при $z < 0$ и любых ϑ) $\dot{z} > 0$, поэтому там все траектории идут к окружности $z=0$, т. е. или идут к состояниям равновесия на «отрезках покоя» или же переходят на верхнюю половину цилиндра (на окружности $z=0$ $\dot{z} = 0$ при $\Theta \leq \vartheta < \pi$,

$\pi + \Theta \leq \vartheta < 2\pi$, т. е. на «отрезках покоя», и $\dot{z} = \lambda - 1 > 0$ при $0 \leq \vartheta < \Theta$, $\pi \leq \vartheta < \pi + \Theta$, т. е. вне «отрезков покоя»); 3) нет фазовых траекторий, переходящих (при возрастании t) с верхней половины фазового цилиндра на нижнюю.

Траектории на верхней половине фазового цилиндра ($z > 0$) определяют два точечных преобразования: точечное преобразование Π , преобразующее точки полупрямой U ($\vartheta = 0$, $z = u > 0$) в точки полупрямой U' ($\vartheta = \pi$, $z = u' > 0$), и точечное преобразование Π' полупрямой U' в полупрямую $\vartheta = 2\pi$, $z > 0$, т. е. в полупрямую U .

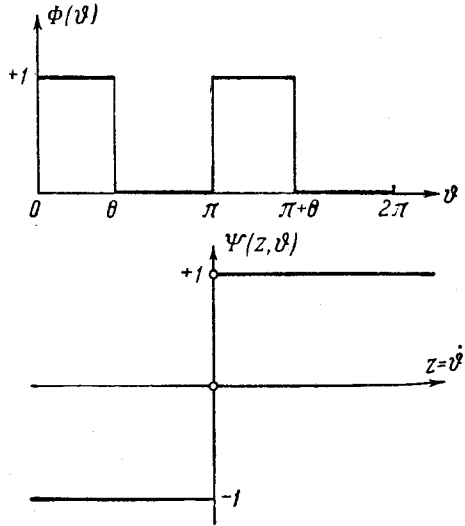


Рис. 445.

Так как движущий момент и, следовательно, правые части уравнений (8.83) являются периодическими функциями угла ϑ с периодом, равным π (а не 2π), то разбиения на траектории половин фазового цилиндра $0 \leq \vartheta < \pi$ и $\pi \leq \vartheta < 2\pi$ будут тождественными друг другу, в силу чего будут совпадать и точечные преобразования

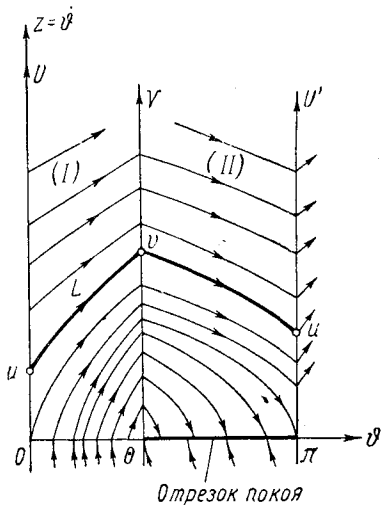


Рис. 446.

(рис. 446). В области (I): $0 \leq \vartheta < \Theta$, $z > 0$ уравнения движения (8.83а) имеют вид:

$$\dot{\vartheta} = z, \quad \dot{z} = \lambda - 1,$$

откуда

$$\frac{dz}{d\vartheta} = \frac{\lambda - 1}{z}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим, что траекториями в области (I) являются дуги парабол:

$$z^2 - 2(\lambda - 1)\vartheta = \text{const.} \quad (8.86a)$$

Аналогично в области (II): $\Theta \leq \vartheta < \pi$, $z > 0$, где

$$\dot{\vartheta} = z, \quad \dot{z} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{dz}{d\vartheta} = -\frac{1}{z},$$

¹⁾ Последовательность точек u_1, u_2, \dots может быть, вообще говоря, конечной, так как возможен такой случай, когда на полупрямой U имеется отрезок, точки которого преобразуются фазовыми траекториями не в точки полупрямой U' , а в точки «отрезка покоя» (точки этого отрезка на полупрямой U не будут иметь последующих на полупрямой U').

Π и Π' ($\Pi \equiv \Pi'$). Поэтому в последовательности точек пересечения какой-либо, произвольно выбранной траектории с полупрямыми U и U' :

$$u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots$$

каждая последующая точка определяется по предыдущей одним и тем же точечным преобразованием (например, преобразованием Π), независимо от того, на какой из полупрямых лежит эта точка:

$$u_{k+1} = \Pi(u_k)^1.$$

Для вычисления функции соответствия точечного преобразования Π построим на части фазового цилиндра: $0 \leq \vartheta < \pi$, $z > 0$ фазовые траектории уравнений (8.83а), определяющие это преобразование

траекториями являются дуги других парабол:

$$z^2 + 2\vartheta = \text{const.} \quad (8.866)$$

Пусть L — траектория уравнений (8.83а), начинающаяся в некоторой точке u полупрямой U (т. е. в точке $\vartheta=0$, $z=u>0$). Ее уравнением при $0 \leq \vartheta < \Theta$ будет:

$$z^2 = u^2 + 2(\lambda - 1)\vartheta,$$

поэтому она выйдет на границу области (I) — на полупрямую V ($\vartheta = \Theta$, $z = v > 0$) в точке с ординатой v , определяемой соотношением

$$v^2 = u^2 + 2(\lambda - 1)\Theta.$$

В области (II) уравнением траектории L будет:

$$z^2 = v^2 - 2(\vartheta - \Theta),$$

и следовательно, для точки пересечения траектории L с полупрямой U' :

$$u'^2 = v^2 - 2(\pi - \Theta)^1)$$

или

$$u'^2 = u^2 + 2(\lambda\Theta - \pi).$$

Это соотношение и определяет (в явном виде) функцию соответствия для точечного преобразования Π точек полупрямой U (с ординатами u) в точки полупрямой U' (с ординатами u')²⁾.

Диаграммы Ламерея в трех возможных случаях: а) $\lambda\Theta > \pi$, б) $\lambda\Theta = \pi$ и в) $\lambda\Theta < \pi$, изображены на рис. 447—449 (по осям отложены u^2 и u'^2 , тогда графики функции соответствия будут прямыми линиями). При $\lambda\Theta > \pi$ $u'^2 > u^2$ (рис. 447), поэтому последовательность ординат точек пересечения любой траектории с полупрямыми U и U' является неограниченно возрастающей и фазовые траектории, охватывая цилиндр, уходят в бесконечность (т. е. машина идет «в разнос»). При $\lambda\Theta = \pi$ $u'^2 \equiv u^2$ (рис. 448) и все точки полупрямой U (или U') являются неподвижными точками преобразования Π . Следовательно, в этом случае система является «квазиконсервативной»: через каждую точку полупрямой U проходит замкнутая

¹⁾ Траектория, выходящая из точки (Θ, v) , приходит на полупрямую U' только при $v \geq \sqrt{2(\pi - \Theta)}$. В этом случае точка v полупрямой V имеет последующую на полупрямой U' . Если же $v < \sqrt{2(\pi - \Theta)}$, то траектория, выходящая из точки (Θ, v) , придет на «отрезок покоя» $\Theta \leq \vartheta < \pi$, $z = 0$ и точка v полупрямой V не будет иметь последующей на полупрямой U' .

²⁾ При $\lambda\Theta \geq \pi$ все точки полупрямой U имеют последующие на полупрямой U' ; если же $\lambda\Theta < \pi$, то последующие на U' имеют только те точки полупрямой U , для которых

$$u^2 \geq 2(\pi - \lambda\Theta).$$

траектория, охватывающая цилиндр (машина может работать с любой средней скоростью вращения вала; значение последней определяется

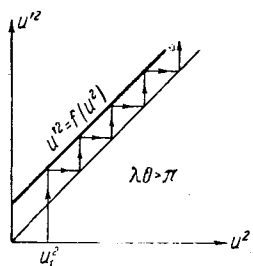


Рис. 447.

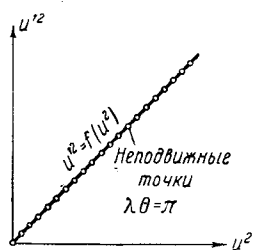


Рис. 448.

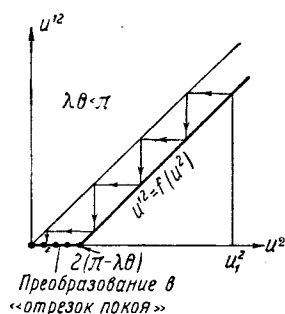


Рис. 449.

начальными условиями). Заметим, что как при $\lambda\theta > \pi$, так и при $\lambda\theta = \pi$ на фазовом цилиндре существуют «отрезки покоя» с некоторой

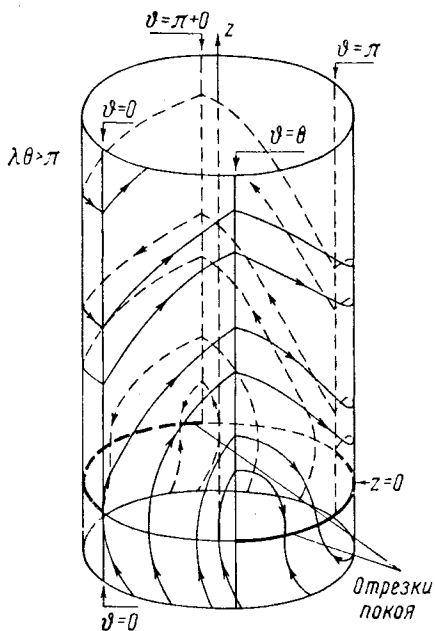


Рис. 450.

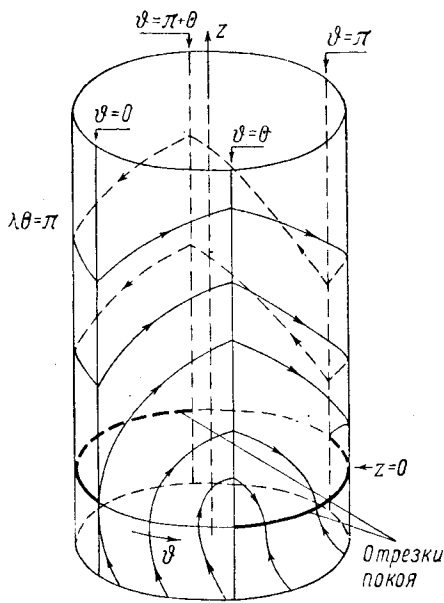


Рис. 451.

областью притяжения, т. е. и в этих случаях можно задать такие начальные условия, при которых машина остановится. Наконец, при $\lambda\theta < \pi$ (рис. 449), когда $u^2 < u_i^2$, все последовательности точек

пересечения траекторий с полупрямыми U и U' являются монотонно убывающими и *конечными*. Действительно, если обозначить через u_1 ординату первой точки пересечения некоторой траектории с полупрямыми U и U' , то для n -й точки пересечения, где $n = E\left[\frac{u_1^2}{2(\pi - \lambda\theta)}\right] + 1^1$, ордината $u_n < \sqrt{2(\pi - \lambda\theta)}$, т. е. эта точка не будет иметь последующей в точечном преобразовании Π , а соответствующая траектория, не пересекая более полупрямых U и U' , придет к одной из точек «отрезка покоя». Таким образом, в случае $\lambda\theta < \pi$ все траектории входят в «отрезки покоя», т. е. машина останавливается при любых начальных условиях. Разбиения на траектории фазового цилиндра ϑ, z для этих трех случаев изображены на рис. 450—452. Так как $\lambda = \frac{M_0}{M_H}$, то полученные результаты, очевидно, совпадают с результатами приведенного выше энергетического рассмотрения.

Таким образом, паровая машина не может работать устойчиво на «постоянную» нагрузку: она или останавливается или идет «в разнос». Для получения устойчивого режима работы машины на «постоянную» нагрузку, при котором вал машины вращается с некоторой заданной средней угловой скоростью, не зависящей от начальных условий, т. е. для получения устойчивого автовращательного режима паровая машина должна быть снабжена регулятором скорости вращения вала.

2. Паровая машина, работающая на «постоянную» нагрузку и снабженная регулятором. Рассмотрим динамику паровой машины, работающей на «постоянную» нагрузку и снабженной регулятором скорости вращения вала. Одна из наиболее распространенных схем регулирования паровой машины состоит в следующем: с валом машины связывают датчик угловой скорости вращения вала (тахометр),

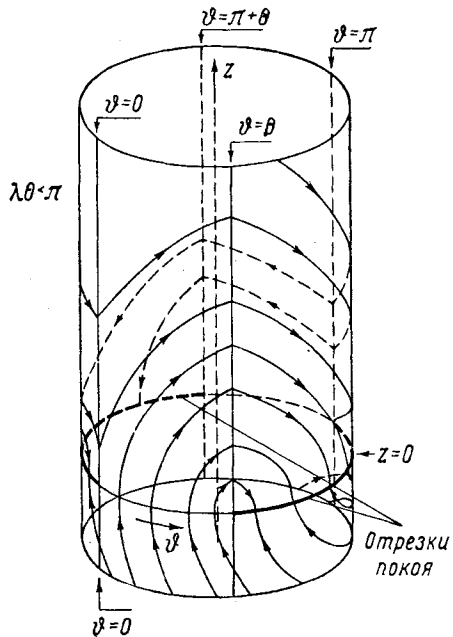


Рис. 452.

¹⁾ Через $E(x)$ обозначена целая часть x , т. е. $E(x) = l$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) при $l \leq x < l + 1$.

который управляет (или непосредственно или через соответствующую сервосистему) золотником машины, уменьшая «угол отсечки» пара, а следовательно, и работу движущего момента при увеличении скорости вращения вала машины. Считая этот регулятор «безинерционным», т. е. срабатывающим мгновенно, мы будем полагать теперь, что «угол отсечки» Θ не является постоянной величиной, а является некоторой (для простоты — *линейной*) функцией скорости вращения вала $\dot{\vartheta} = z$:

$$\Theta = \Theta_0 - kz,$$

где $k > 0$ — коэффициент передачи регулятора, а Θ_0 — «угол отсечки» при $\dot{\vartheta} = 0$. Остальные предположения относительно движущего момента и момента нагрузки оставим прежними.

Разбиение на траектории фазового цилиндра ϑ, z такой динамической модели паровой машины с регулятором во многом сходно

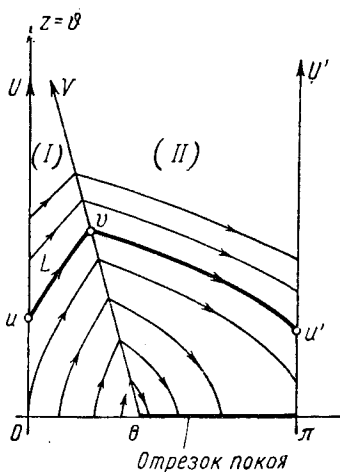


Рис. 453.

с только что рассмотренным разбиением: на окружности $z = 0$ имеется два «отрезка покоя» $\Theta_0 \leq \vartheta < \pi$ и $\pi + \Theta_0 \leq \vartheta < 2\pi$, которые состоят из устойчивых состояний равновесия, все траектории на нижней половине цилиндра идут к «отрезкам покоя» или же переходят на верхнюю половину цилиндра, а изучение хода траекторий на верхней половине фазового цилиндра (при $z > 0$) по-прежнему сводится к построению и исследованию точечного преобразования полупрямой U ($\vartheta = 0, z = u > 0$) в полупрямую U' ($\vartheta = \pi, z = u' > 0$), осуществляемого этими траекториями. Как и в предыдущем случае, траекториями на верхней половине фазового цилиндра являются параболы (8.86а) в области (I), где движущий момент $M = M_0$, т. е.

$\Phi(\vartheta) = 1$, и параболы (8.86б) в области (II), где движущий момент $M = 0$. Но теперь границей областей (I) и (II) является не образующая $\vartheta = \Theta = \text{const}$, а наклонный отрезок V ($\vartheta = \Theta_0 - kz, 0 < z \leq \frac{\Theta_0}{k}$) (рис. 453), и это обстоятельство существенным образом изменяет функцию соответствия интересующего нас точечного преобразования.

Для вычисления функции соответствия рассмотрим траекторию L , выходящую из некоторой произвольной точки u полупрямой U . Если $u < \frac{\Theta_0}{k}$, то траектория L сначала пойдет в области (I) ($0 < \vartheta < \Theta_0 - kz$,

$0 < z < \frac{\Theta_0}{k}$), ее уравнением будет:

$$z^2 = u^2 + 2(\lambda - 1)\vartheta,$$

поэтому она выйдет на границу области (I) на отрезок V в точке, ордината которой v определяется уравнением

$$v^2 = u^2 + 2(\lambda - 1)(\Theta_0 - kv). \quad (8.87a)$$

Далее траектория L идет в области (II), ее уравнением будет:

$$z^2 = v^2 - 2(\vartheta - \Theta_0 + kv),$$

и следовательно, она придет на полупрямую U' в точке с ординатой u' , даваемой соотношением

$$u'^2 = v^2 - 2(\pi - \Theta_0 + kv). \quad (8.87б)$$

Полученные соотношения (8.87a) и (8.87б) и определяют (в параметрической форме — через параметр v) функцию соответствия точечного преобразования полупрямой U в полупрямую U' для $u < \frac{\Theta_0}{k}$:

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= v^2 - 2(\lambda - 1)(\Theta_0 - kv), \\ u'^2 &= v^2 - 2(\pi - \Theta_0 + kv). \end{aligned} \right\} \quad (8.87)$$

Конечно, в точки полупрямой U' преобразуются только те точки полупрямой U, для которых $u'^2 = v^2 - 2(\pi - \Theta_0 + kv) \geq 0$, т. е.

$$v \geq v_0 = k + \sqrt{k^2 + 2(\pi - \Theta_0)} > k;$$

точки полупрямой U, которым соответствуют $v < v_0$, преобразуются в точки «отрезка покоя».

Если же $u \geq \frac{\Theta_0}{k}$, то траектория L сразу выходит в область (II), ее уравнением будет:

$$z^2 = u^2 - 2\vartheta,$$

и следовательно, ордината u' точки пересечения этой траектории с полупрямой U' (или, иначе говоря, функция соответствия для $u \geq \frac{\Theta_0}{k}$) определяется уравнением

$$u'^2 = u^2 - 2\pi.$$

Ясно, что при $u \geq \frac{\Theta_0}{k}$ неподвижных точек рассматриваемого точечного преобразования не существует, и каждая точка полупрямых U и U' с координатой $u \geq \frac{\Theta_0}{k}$ после конечного числа преобразований

преобразуется в точку с координатой $u < \frac{\Theta_0}{k}$. Поэтому ниже при построении диаграммы Ламерея можно ограничиться интервалом изменения u от 0 до $\frac{\Theta_0}{k}$.

Кривые (8.87) являются гиперболами и в интересующем нас квадранте диаграммы Ламерея ($u, u' > 0, v > 0$) эти гиперболы или не имеют точек пересечения (рис. 454) или же пересекаются в одной

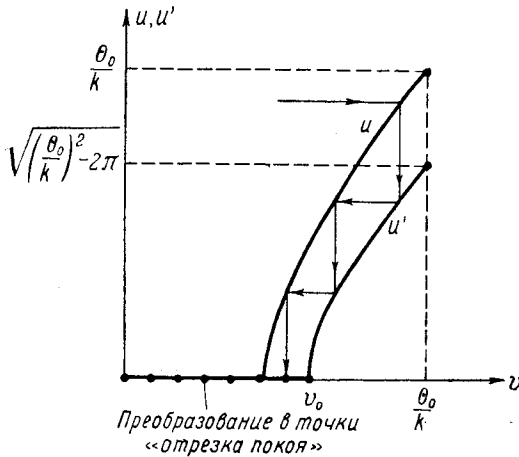


Рис. 454.

точке, соответствующей неподвижной точке \bar{u} точечного преобразования (рис. 455). Для неподвижной точки ($u = u' = \bar{u}, v = \bar{v}$) имеем:

$$\bar{v}^2 - 2(\lambda - 1)(\Theta_0 - k\bar{v}) = \bar{v}^2 - 2(\pi - \Theta_0 + k\bar{v}),$$

т. е.

$$\Theta_0 - k\bar{v} = \frac{\pi}{\lambda} \quad \text{или} \quad \bar{v} = \frac{1}{k} \left(\Theta_0 - \frac{\pi}{\lambda} \right);$$

этому значению \bar{v} соответствует:

$$\bar{u}^2 = \bar{v}^2 - 2(\lambda - 1)(\Theta_0 - k\bar{v}) = \frac{1}{k^2} \left(\Theta_0 - \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 - 2(\lambda - 1) \frac{\pi}{\lambda}.$$

Так как для неподвижной точки, если она существует, $\bar{v} > 0$ и $\bar{u}^2 > 0$, то условием ее существования будет выполнение неравенств:

$$\lambda \Theta_0 > \pi \quad \text{и} \quad k^2 < \frac{(\lambda \Theta_0 - \pi)^2}{2\pi\lambda(\lambda - 1)}. \quad (8.88)$$

Эта неподвижная точка устойчива, поскольку в ней (в силу очевид-

ных неравенств: $\bar{v} > v_0 > k > 0$)

$$\frac{du'}{dv} = 2\bar{v} - 2k > 0, \quad \frac{du}{dv} = 2\bar{v} + 2k(\lambda - 1) > \frac{du'}{dv}$$

и, следовательно,

$$0 < \frac{du'}{du} < 1^1).$$

Таким образом, если условия (8.88) не выполнены, то диаграмма Ламеря имеет вид, изображенный на рис. 454, и все траектории на

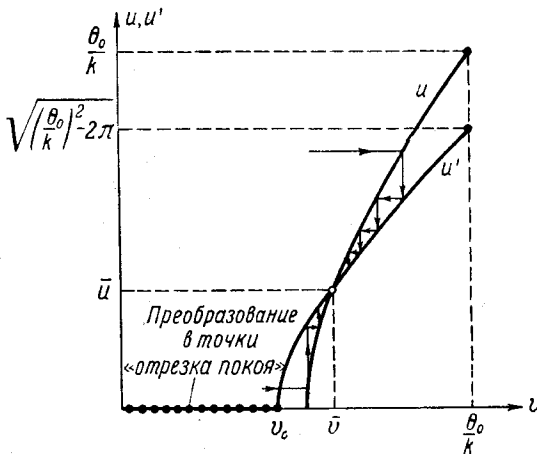


Рис. 455.

фазовом цилиндре ϑ, z машины идут в точки «отрезков покоя» (рис. 456), т. е. машина останавливается при любых начальных условиях.

Если же условия (8.88) выполнены, то все последовательности точек пересечения траекторий с полупрямыми U и U' сходятся к единственной и устойчивой неподвижной точке \bar{u} (рис. 455). Это, очевидно, означает, что на фазовом цилиндре существует единственный и устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр и соответствующий поэтому *автовращательному режиму* работы машины, и к этому предельному циклу асимптотически приближаются все траектории, пересекающие полупрямую U или U' хотя бы один раз

¹⁾ В случае $k < 0$, т. е. в случае неправильного включения регулятора, неподвижная точка также будет существовать, если выполнены условия (8.88), но будет обязательно неустойчивой, так как при $k < 0$.

$$0 < \frac{du}{dv} < \frac{du'}{dv} \quad \text{или} \quad \frac{du'}{du} > 1.$$

(рис. 457)¹). Кроме того, на фазовом цилиндре имеются и траектории, входящие в «отрезки покоя» (эти траектории не пересекают полупрямых U и U'). Поэтому при выполнении условий (8.88) мы

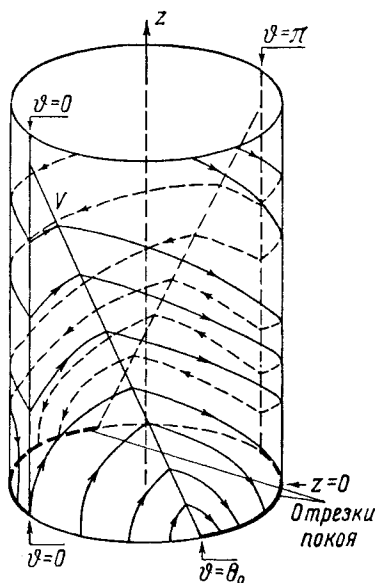


Рис. 456.

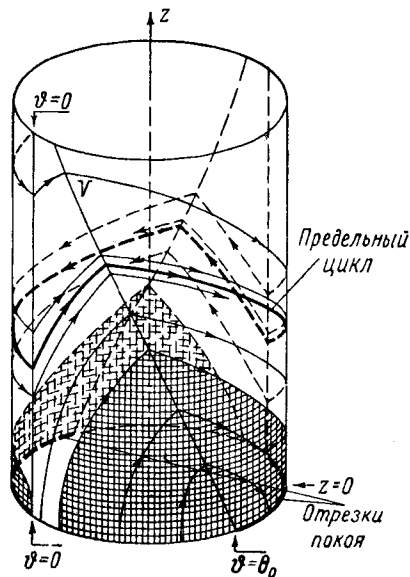


Рис. 457.

имеем дело с *жестким режимом* возбуждения автовращательного режима работы машины: в машине будет устанавливаться автовращательный режим (с определенным, не зависящим от начальных условий периодом вращения главного вала машины), если начальные условия выбраны так, что изображающая точка при $t=0$ находится вне областей притяжения «отрезков покоя» (области притяжения «отрезков покоя» состоят из точек траекторий, входящих в «отрезки покоя», и их границами являются траектории, приходящие в точки $(\theta, 0)$ и $(\pi + \theta_0, 0)$; эти области на рис. 457 заштрихованы).

¹) Период автовращательного движения можно вычислить следующим образом. Согласно второму уравнению (8.83) $\dot{z} = \lambda - 1$ в области (I) и $\dot{z} = -1$ в области (II). Поэтому время пробега изображающей точки, двигающейся по предельному циклу, в области (I) равно $\tau_1 = \frac{\bar{v} - \bar{u}}{\lambda - 1}$ и в области (II) $\tau_2 = \bar{v} - \bar{u}$, т. е. период вращения вала машины (в единицах безразмерного времени) равен:

$$\tau = 2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{2\lambda}{\lambda - 1} (\bar{v} - \bar{u}) =$$

$$= \frac{2\lambda}{\lambda - 1} \left[\frac{1}{k} \left(\theta_0 - \frac{\pi}{\lambda} \right) - \sqrt{\frac{1}{k^2} \left(\theta_0 - \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 - 2(\lambda - 1) \frac{\pi}{\lambda}} \right].$$

Итак, надлежаще выбранный регулятор скорости вращения вала стабилизирует работу паровой машины: при наличии такого регулятора становится возможной устойчивая работа паровой машины на «постоянную» нагрузку. Аналогичное стабилизирующее действие на работу паровой машины оказывает и нагрузка, момент сил которой возрастает с увеличением скорости вращения вала. Такая нагрузка делает невозможным неограниченное нарастание скорости вращения вала, поскольку при таком нарастании имело бы место также неограниченное нарастание работы (за каждый оборот вала) сил, действующих на машину со стороны нагрузки. Поэтому паровая машина будет работать устойчиво на нагрузку, возрастающую с увеличением скорости вращения вала, и без всякого регулятора.

3. Машина, работающая на нагрузку, зависящую от скорости. Рассмотрим динамику паровой машины в предположении, что ее нагрузка создается силами сухого и вязкого трения, т. е. что момент сил нагрузки

$$M_{\text{н}} = \begin{cases} M_{\text{н}}^0 \operatorname{sgn} \frac{d\varphi}{dt} + H \frac{d\varphi}{dt} & \text{при } \frac{d\varphi}{dt} \neq 0, \\ M, & \text{если } \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{и } M \leq M_{\text{н}}^0, \\ M_{\text{н}}^0, & \text{если } \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \text{но } M > M_{\text{н}}^0, \end{cases}$$

где $M_{\text{н}}^0$ — максимальный момент трения покоя, а H — коэффициент характеризующий возрастание момента сил нагрузки с увеличением скорости вращения вала ($H > 0$). На нагрузку такого характера работает, например, паровая машина парохода.

При такой нагрузке уравнения вращения главного вала машины (в переменных, введенных в п. 1 настоящего параграфа), очевидно запишутся в следующем виде:

$$\ddot{\vartheta} = z, \quad \dot{z} = \lambda \Phi(\vartheta) - \Psi(z, \vartheta) - hz, \quad (8.89)$$

где $\Phi(\vartheta)$ и $\Psi(z, \vartheta)$ — функции, определенные соотношениями (8.85а) и (8.84а),

$$\lambda = \frac{M}{M_{\text{н}}^0} > 1 \quad \text{и} \quad h = \frac{H}{\sqrt{M_{\text{н}}^0 I}} > 0,$$

причем «угол отсечки» пара Θ снова считается постоянным.

Разбиение полосы $0 \leq \vartheta < \pi$ фазового цилиндра ϑ, z системы на траектории уравнений (8.89) изображено на рис. 458; разбиение на траектории полосы $\pi \leq \vartheta < 2\pi$ цилиндра тождественно совпадает с разбиением полосы $0 \leq \vartheta < \pi$, поскольку правая часть второго уравнения (8.89) является периодической функцией угла поворота вала машины ϑ с периодом, равным π . Как и раньше, на окружности $z = 0$ фазового цилиндра имеются два «отрезка покоя» $\Theta \leq \vartheta < \pi$

и $\pi + \Theta \leq \vartheta < 2\pi$, состоящие из устойчивых состояний равновесия; траектории на нижней половине фазового цилиндра или входят

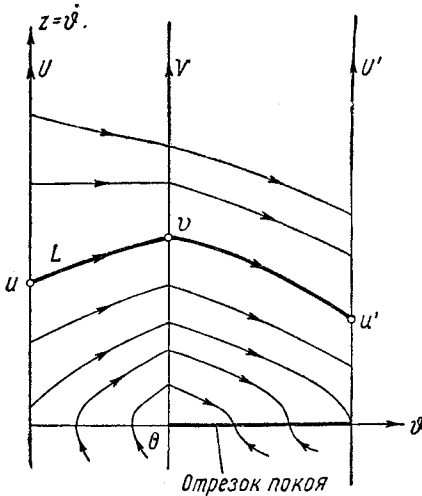


Рис. 458.

в «отрезки покоя» или же переходят на верхнюю половину цилиндра; кроме того, на фазовом цилиндре системы нет траекторий, переходящих с его верхней половины на нижнюю. Поэтому, как и в п. 1 настоящего параграфа, изучение динамики паровой машины, работающей на нагрузку, возрастающую с увеличением скорости вращения вала машины (и, в частности, задача нахождения ее периодических движений), сводится к рассмотрению точечного преобразования полупрямой U ($\vartheta = 0, z = u > 0$) в полупрямую U' ($\vartheta = \pi, z = u' > 0$), осуществляемого траекториями системы на верхней половине фазового цилиндра.

Для вычисления функции соответствия этого точечного преобразования рассмотрим траекторию L , проходящую через некоторую произвольную точку u полупрямой U (рис. 458). Интегрируя уравнения (8.89) в области (I) : $0 \leq \vartheta < \Theta, z > 0$, получим уравнения этой траектории в области (I) :

$$z = a + (u - a)e^{-ht},$$

$$\vartheta = at + \frac{1}{h}(u - a)(1 - e^{-ht}),$$

где

$$a = \frac{\lambda - 1}{h} > 0.$$

Эта траектория обязательно пересечет правую границу области (I) — полупрямую V ($\vartheta = \Theta, z = v > 0$), так как в области (I) $\dot{\vartheta} = z > 0$ и $\dot{z} > 0$ на дуге $0 \leq \vartheta < \Theta$ окружности $z = 0$. Если обозначить время пробега изображающей точки по траектории L в области (I) через $t_1 = \frac{\tau_1}{h}$, то это время пробега и ордината v точки пересечения траектории L с полупрямой V , очевидно, определяются следующей системой уравнений:

$$\Theta = \frac{a}{h} \tau_1 + \frac{1}{h}(u - a)(1 - e^{-\tau_1}),$$

$$v = a + (u - a)e^{-\tau_1}.$$

Разрешая полученные уравнения относительно u и v , мы получим (в параметрической форме) функцию соответствия для точечного преобразования Π_1 полупрямой U в полупрямую V , осуществляемого траекториями в области (I) :

$$u = a \left[1 + \frac{\alpha - \tau_1}{1 - e^{-\tau_1}} \right], \quad v = a \left[1 + \frac{\alpha - \tau_1}{e^{\tau_1} - 1} \right], \quad (8.90)$$

где

$$\alpha = \frac{h\theta}{a} = \frac{h^2\theta}{\lambda - 1}.$$

Точке $u = 0$ полупрямой U соответствуют значение параметра τ_1 , равное τ_1^0 и определяемое уравнением

$$\tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0} = \alpha \quad (8.90a)$$

(очевидно, $\tau_1^0 > \alpha$), и последующая точка на полупрямой V с ординатой

$$v = v_0' = a(1 - e^{-\tau_1^0}) = a(\tau_1^0 - \alpha) \quad (8.90b)$$

(ясно, что $0 < v_0' < a$). Далее, поскольку

$$\frac{du}{d\tau_1} = a \frac{-(1 - e^{-\tau_1}) - (\alpha - \tau_1) e^{-\tau_1}}{(1 - e^{-\tau_1})^2} = -\frac{v}{1 - e^{-\tau_1}} < 0,$$

$$\frac{dv}{d\tau_1} = a \frac{-(e^{\tau_1} - 1) - (\alpha - \tau_1) e^{\tau_1}}{(e^{\tau_1} - 1)^2} = -\frac{u}{e^{\tau_1} - 1} < 0$$

и

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{d\tau_1} : \frac{dv}{d\tau_1} = \frac{v}{u} e^{\tau_1} > 0, \quad (8.90b)$$

u и v являются монотонно убывающими функциями параметра τ_1 ; поэтому множеству значений координаты u от 0 до $+\infty$ соответствуют множества значений параметра τ_1 от τ_1^0 до 0 и координат последующих точек v от v_0' до $+\infty$. Заметим также, что $\frac{du}{dv} = +\infty$ при $u = 0$ (и $v = v_0'$), $u - v = a(\alpha - \tau_1)$, в силу чего $u = v = a$ при $\tau_1 = \alpha$ (эти точки принадлежат прямолинейной траектории $z = a$ в области (I)), $u < v < a$ при $\alpha < \tau_1 < \tau_1^0$, $u > v > a$ при $0 < \tau_1 < \alpha$ и $u \rightarrow v + a\alpha$ при $\tau_1 \rightarrow +0$ ($u, v \rightarrow +\infty$). График функции соответствия (8.90) преобразования Π_1 изображен на рис. 459.

После пересечения с полупрямой V фазовая траектория L переходит в область (II) : $\theta \leq \vartheta < \pi$, $z > 0$, где ее уравнениями будут:

$$z = -b + (v + b) e^{-ht},$$

$$\vartheta = \theta - bt + \frac{1}{h} (v + b) (1 - e^{-ht})$$

($b = \frac{1}{h}$; кроме того, мы выбрали новое начало отсчета времени так, чтобы $\vartheta = \Theta$ и $z = v$ при $t = 0$). Если траектория L пересекает полупрямую U' , то ордината этой точки пересечения определится из следующей системы уравнений:

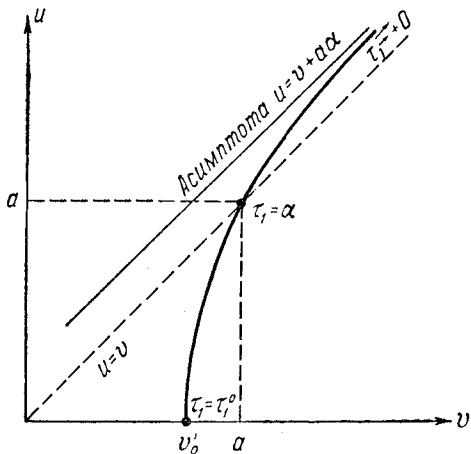


Рис. 459.

$$\begin{aligned} \pi &= \Theta - \frac{b}{h} \tau_2 + \\ &+ \frac{1}{h} (v + b) (1 - e^{-\tau_2}), \\ u' &= -b + (v + b) e^{-\tau_2}; \end{aligned}$$

здесь $\tau_2 = ht_2$, где t_2 — время пробега изображающей точки по траектории L в области (II) от полупрямой V до полупрямой U' . Разрешая эти уравнения относительно u' и v , мы получим (также в параметрической форме) функцию соответствия точечного преобразования Π_2 полупрямой V в полупрямую U' , осуществляемого траекториями

в области (II):

$$u' = b \left[-1 + \frac{\beta + \tau_2}{e^{\tau_2} - 1} \right], \quad v = b \left[-1 + \frac{\beta + \tau_2}{1 - e^{-\tau_2}} \right], \quad (8.91)$$

где

$$\beta = \frac{h(\pi - \Theta)}{b} = h^2(\pi - \Theta).$$

Обозначим через τ_2^0 значение τ_2 , соответствующее $u' = 0$ и определяемое поэтому уравнением

$$e^{\tau_2^0} - 1 - \tau_2^0 = \beta; \quad (8.91a)$$

этому значению параметра $\tau_2 = \tau_2^0$ соответствует точка полупрямой V с ординатой

$$v = v_0'' = b(e^{\tau_2^0} - 1) = b(\beta + \tau_2^0). \quad (8.91b)$$

Очевидно, что только точки $v \geq v_0''$ полупрямой V преобразуются траекториями в области (II) в точки полупрямой U' ($u' \geq 0$). Точки полупрямой V с ординатами $0 < v < v_0''$ преобразуются в точки «отрезка покоя», так как траектории, выходящие из этих точек полупрямой V , входят в «отрезок покоя», не пересекая полупрямой U' .

Дифференцируя (8.91), получим:

$$\frac{du'}{d\tau_2} = -\frac{v}{e^{\tau_2} - 1} < 0, \quad \frac{dv}{d\tau_2} = -\frac{u}{1 - e^{-\tau_2}} < 0$$

и

$$\frac{du'}{dv} = \frac{v}{u'} e^{-\tau_2} > 0, \tag{8.91в}$$

т. е. u и v являются монотонно убывающими функциями параметра τ_2 , и, следовательно, множеству точек полупрямой $V: v \geq v_0''$, преобразующихся траекториями в области (II) в точки полупрямой U' , соответствует множество значений параметра преобразования τ_2 : $0 < \tau_2 \leq \tau_2^0$. Так как $u' - v = -b(\beta + \tau_2)$, то $u' < v - b\beta$ при всех $0 < \tau_2 \leq \tau_2^0$ (при $\tau_2 \rightarrow +0$ $u' \rightarrow v - b\beta$, причем $u', v \rightarrow +\infty$). График функции соответствия (8.91) точечного преобразования Π_2 приведен на рис. 460.

Интересующее нас «полное» точечное преобразование Π полупрямой U в полупрямую U' является произведением найденных преобразований Π_1 и Π_2 :

$$\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2.$$

Неподвижная точка этого преобразования ($u' = u = \bar{u}, v = \bar{v}, \tau_1 = \bar{\tau}_1, \tau_2 = \bar{\tau}_2$), соответствующая предельному циклу, охватывающему фазовый цилиндр (т. е. соответствующая авторотационному режиму работы паровой машины), очевидно, определяется следующей системой трансцендентных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a \left[1 + \frac{\alpha - \bar{\tau}_1}{1 - e^{-\bar{\tau}_1}} \right] &= b \left[-1 + \frac{\beta + \bar{\tau}_2}{e^{\bar{\tau}_2} - 1} \right], \\ a \left[1 + \frac{\alpha - \bar{\tau}_1}{e^{\bar{\tau}_1} - 1} \right] &= b \left[-1 + \frac{\beta + \bar{\tau}_2}{1 - e^{-\bar{\tau}_2}} \right] \end{aligned} \right\} \tag{8.92}$$

(ясно, что $\alpha < \bar{\tau}_1 \leq \tau_1^0$ и $0 < \bar{\tau}_2 \leq \tau_2^0$). Согласно (8.90в) и (8.91в), для нее

$$0 < \frac{du'}{du} = \frac{dv'}{dv} = \frac{du}{dv} = e^{-(\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2)} < 1; \tag{8.92а}$$

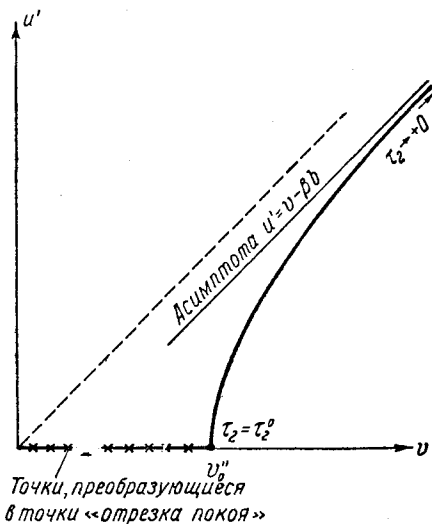


Рис. 460.

следовательно, неподвижная точка, если она существует, является устойчивой и единственной¹⁾.

В зависимости от значений параметров системы h, λ, Θ возможны два качественно различных случая. Если параметры системы таковы, что $v'_0 < v''_0$, то неподвижных точек преобразования Π не существует (рис. 461)²⁾, все последовательности точек пересечения траекторий

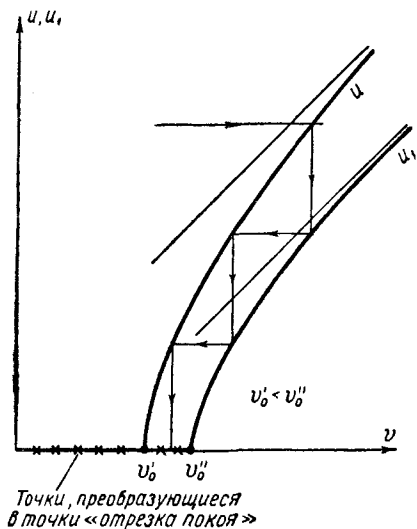


Рис. 461.

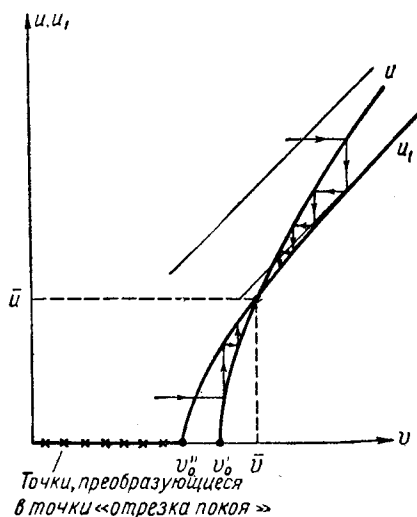


Рис. 462.

системы с полупрямыми U и U' конечны, причем последние точки этих последовательностей преобразуются в точки «отрезков покоя». Следовательно, в этом случае все траектории системы входят в «отрезки покоя», т. е. паровая машина останавливается при любых начальных условиях.

¹⁾ Устойчивость неподвижной точки непосредственно следует из теоремы Кенигса, ее единственность — из того обстоятельства, что если бы преобразование Π имело несколько неподвижных точек, то по крайней мере для одной из них (в силу непрерывности u и u' — функций v и их производных $\frac{du}{dv}$ и $\frac{du'}{dv}$) имело бы место неравенство

$$\frac{du'}{dv} > \frac{du}{dv} > 0,$$

невозможное согласно (8.92a).

²⁾ Так как при $v'_0 < v''_0$ $u' < v$ как при $v = v''_0$, так и при $v \rightarrow +\infty$, то графики функций соответствия (8.90) и (8.91), построенные на общей диаграмме (на диаграмме Ламерея), или не пересекаются совсем (тогда неподвижных точек преобразования Π не существует) или же имеют четное число точек пересечения (т. е. имеется четное число неподвижных точек преобразования Π). Последнее согласно доказанному выше невозможно.

Если же $v'_0 > v''_0$, то точечное преобразование Π имеет единственную и устойчивую неподвижную точку, к которой сходятся все последовательности точек пересечения траекторий с полупрямыми U и U' (рис. 462)¹⁾. Поэтому на фазовом цилиндре существует единственный и устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр, и к этому предельному циклу асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются все траектории, пересекающие полупрямые U и U' . Так как, кроме того, имеются устойчивые состояния равновесия, составляющие «отрезки покоя» на фазовом цилиндре, то имеет место жесткое установление автовращательного режима работы паровой машины. Разбиение фазового цилиндра для этого случая изображено на рис. 463. Период установившегося автовращательного движения вала машины, очевидно, равен (в единицах безразмерного времени)

$$\tau = 2(\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2),$$

где $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ — корни системы уравнений (8.92), определяющей неподвижную точку преобразования Π .

Таким образом, условие существования автовращательного режима работы паровой машины сводится к неравенству

$$v'_0 > v''_0$$

или согласно (8.906) и (8.916)

$$(\lambda - 1)(1 - e^{-\tau_0}) > e^{\tau_0} - 1. \tag{8.93}$$

Рассматриваемая нами динамическая модель паровой машины имеет три независимых параметра: λ , Θ и h , которые характеризуют соответственно движущий момент паровой машины, «угол отсечки» пара

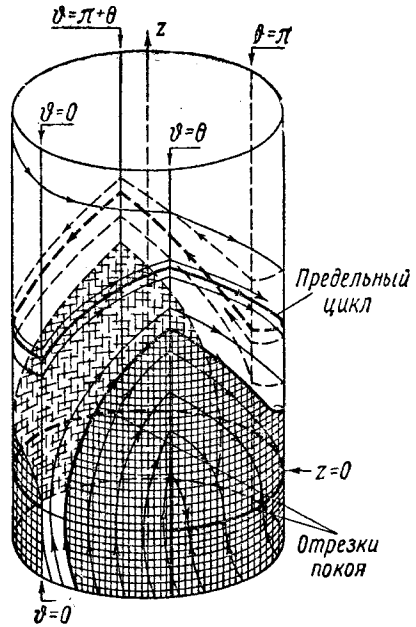


Рис. 463.

¹⁾ Так как теперь $u' > u$ при $v = v'_0$, но по-прежнему $u' < u$ при $v \rightarrow +\infty$, то в силу непрерывности функций соответствия (8.90) и (8.91) существует по крайней мере одна точка пересечения графиков этих функций, построенных на общей диаграмме (см. рис. 462), т. е. существует по крайней мере одна неподвижная точка преобразования Π . Выше на основании неравенства (8.92а) были доказаны устойчивость и единственность этой неподвижной точки.

и коэффициент вязкого трения нагрузки и через которые выражаются введенные выше параметры a , α , b и β :

$$a = \frac{\lambda - 1}{h}, \quad \alpha = \frac{h^2 \Theta}{\lambda - 1}, \quad b = \frac{1}{h}, \quad \beta = h^2 (\pi - \Theta).$$

Сообразно с этим можно взять трехмерное пространство параметров λ , Θ , h (точнее, его часть $\lambda > 1$, $0 < \Theta < \pi$, $h > 0$) и рассмотреть его разбиение на область существования автовращательного режима работы машины (с жестким установлением), в которой выполнено условие (8.93), и на область остановки машины при любых начальных условиях, в которой условие (8.93) уже не выполняется.

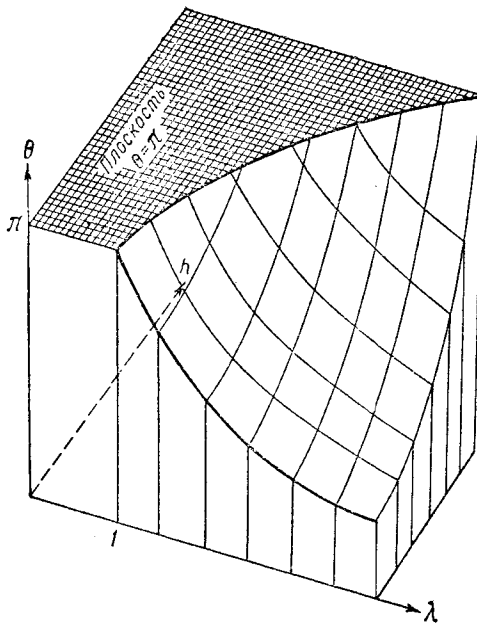


Рис. 464

Уравнения пограничной поверхности, разделяющей эти области, запишутся в виде:

$$(\lambda - 1)(1 - e^{-\tau_1^0}) = e^{\tau_2^0} - 1$$

и уравнений (8.90а) и (8.91а):

$$\frac{h^2(\tau)}{\lambda - 1} = \tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0}, \quad h^2(\pi - \Theta) = e^{\tau_2^0} - 1 - \tau_2^0,$$

или в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} \lambda - 1 &= \frac{e^{\tau_2^0} - 1}{1 - e^{-\tau_1^0}}, \\ \frac{\pi}{\Theta} &= 1 + \frac{1}{\lambda - 1} \frac{e^{\tau_2^0} - 1 - \tau_2^0}{\tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0}}, \\ h^2 &= \frac{1}{\pi} [e^{\tau_2^0} - 1 - \tau_2^0 + (\lambda - 1)(\tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0})]. \end{aligned} \right\} (8.94)$$

Уравнения (8.94) позволяют сравнительно просто построить сечения пограничной поверхности плоскостями $\lambda = \text{const}$ ¹⁾. Эта пограничная поверхность изображена на рис. 464. Так как при увеличении параметра Θ (остальные параметры λ и h фиксированы) возрастают α и τ_1^0 , а β и τ_2^0 уменьшаются, то в области над пограничной поверхностью условие (8.93) будет выполнено, т. е. над пограничной поверхностью лежит область существования автовращательного режима работы паровой машины.

¹⁾ Если задаться некоторым значением параметра $\lambda > 1$ и серией значений τ_1^0 , то первое уравнение (8.94) определит соответствующую серию значений τ_2^0 , а два остальных уравнения — соответствующие значения Θ и h , т. е. координаты точек кривой, являющейся сечением пограничной поверхности выбранной плоскостью $\lambda = \text{const}$.

ГЛАВА IX
**НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ, БЛИЗКИЕ К ГАРМОНИЧЕСКОМУ
 ОСЦИЛЛЯТОРУ** ¹⁾

§ 1. Введение

Перейдем теперь к изложению количественных методов рассмотрения автономных динамических систем (с одной степенью свободы), близких к консервативным системам. При этом мы ограничимся наиболее простым случаем, именно системами, близкими к линейной консервативной системе (к гармоническому осциллятору). Уравнения движения таких систем могут быть написаны в виде уравнения второго порядка ²⁾:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) \quad (9.1)$$

¹⁾ §§ 1 и 3 переработаны Н. А. Железцовым; п. 2 § 3, § 4 и п. 1 § 7 написаны им заново.

²⁾ Уравнение системы, близкой к гармоническому осциллятору, в обычных переменных имеет вид:

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + \omega_0^2 v = \mu F\left(v, \frac{dv}{d\tau}, \mu\right), \quad (\alpha)$$

где τ — время, ω_0 — циклическая частота, v — зависимое переменное, например напряжение или ток, μ — так называемый малый параметр, который мы будем предполагать не имеющим размерности и который определяет близость рассматриваемой системы к линейной консервативной. Вводя безразмерное независимое переменное $t = \omega_0 \tau$ и безразмерное зависимое переменное $x = \frac{v}{v_0}$, где v_0 — некоторая определенная физическая величина, имеющая такую же размерность, как и v (например, напряжение насыщения или ток насыщения), получим уравнение (α) в виде:

$$\ddot{x} + x = \mu \frac{1}{v_0 \omega_0^2} F(v_0 x, v_0 \omega_0 \dot{x}; \mu)$$

или, обозначая

$$\frac{1}{v_0 \omega_0^2} F(v_0 x, v_0 \omega_0 \dot{x}; \mu) = f(x, \dot{x}; \mu),$$

в виде:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}; \mu). \quad (\beta)$$

Заметим, что часто преобразование уравнения системы, близкой к линейной

или, если ввести $y = \dot{x}$, в виде двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu f(x, y). \quad (9.2)$$

Здесь μ — безразмерный положительный параметр, который мы в дальнейшем будем полагать достаточно малым. Величина этого параметра при заданной функции $f(x, y)$ определяет степень близости рассматриваемой системы к гармоническому осциллятору.

Типичным примером систем, близких к гармоническому осциллятору, является (конечно, при определенных условиях) ламповый генератор с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 465, а) или

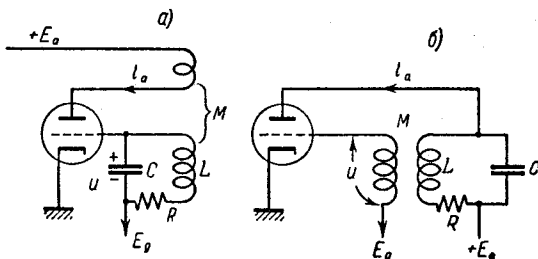


Рис. 465.

в цепи анода (рис. 465, б) и с фиксированным смещением. Уравнение колебаний такого генератора (при пренебрежении анодной реакцией, сеточными токами и паразитными параметрами, в частности внутриламповыми емкостями и емкостями монтажа), как известно, записывается в виде:

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + [RC - MS(E_g + u)] \frac{du}{dt} + u = 0^1).$$

консервативной, к виду (β), весьма удобному для теоретического исследования, можно провести иным путем: например, можно ввести малый параметр и одновременно привести уравнения к безразмерному виду и т. д.

Теория для простоты рассуждений приводится в тексте для частного случая, когда в уравнении (β) $f(x, \dot{x}; \mu)$ не зависит от μ . Если $f(x, \dot{x}; \mu)$ — многочлен μ , коэффициенты которого в свою очередь полиномы по x и \dot{x} , то формулы, относящиеся к первому приближению для уравнений (9.2), напримр формулы (9.13а) и (9.14а), сохраняют свою силу и для уравнения (β), если только $f(\xi, \eta)$ заменить через $f(\xi, \eta; 0)$.

¹⁾ Для лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки это уравнение было получено в § 6 гл. I (см. уравнение (1.36)). К этому же уравнению приводятся и уравнения колебаний генератора с контуром в цепи анода (рис. 465, б):

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_a(E_g + u), \quad u = -M \frac{di}{dt}$$

(см. § 4 гл. III) путем дифференцирования первого из них и подстановки

$$\frac{di}{dt} = -\frac{u}{M}.$$

Это уравнение заменой переменных $t_{\text{нов}} = \omega_0 t_{\text{ст}}$, $x = \frac{u}{u_0}$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и u_0 — некоторое постоянное напряжение (новые переменные $t_{\text{нов}}$ и x являются безразмерными), преобразуются в уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu [-1 + \alpha s(x)] \dot{x}, \quad (9.3)$$

в котором $\mu = \omega_0 RC$ — затухание колебательного контура, $\alpha = \frac{MS_0}{RC}$ ($S_0 = S(E_g)$ — крутизна характеристики лампы в рабочей точке) и $s(x) = \frac{S(E_g + u_0 x)}{S_0}$ — приведенная, безразмерная крутизна лампы ($s(x)$ имеет величину порядка единицы). Очевидно, уравнение (9.3) близко к уравнению гармонического осциллятора при

$$\mu \ll 1, \quad \mu \alpha = \omega_0 MS_0 \ll 1,$$

т. е. мы можем рассматривать ламповый генератор как систему, близкую к гармоническому осциллятору, если затухание колебательного контура и обратная связь в генераторе являются достаточно малыми величинами¹⁾.

Для решения уравнений вида (9.1) с достаточно малыми μ разработан ряд асимптотических (приближенных) методов, из которых в настоящей главе будут изложены два: метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля [186]) и метод Пуанкаре [184, 185]. Первый из них дает возможность найти асимптотические решения

¹⁾ Если же затухание колебательного контура генератора $\omega_0 RC$ не мало, то приведение уравнения колебаний генератора к виду (9.1) должно быть сделано иначе. Введем $S_1(x) = S(E_g + u_0 x) - S_0 = S_1^0 \varphi(x)$ — отклонение крутизны характеристики от ее значения в состоянии равновесия, обусловленное, конечно, нелинейностью характеристики лампы (под S_1^0 мы можем понимать значение $S_1(x_0)$ при каком-либо фиксированном значении x_0 , определяющее порядок величины значений $S_1(x)$ в интересующем нас интервале значений x). Тогда уравнение лампового генератора можно записать в виде:

$$\ddot{x} + x = \omega_0 [-RC + MS_0 + MS_1^0 \varphi(x)] \dot{x}.$$

Это уравнение будет близким к уравнению гармонического осциллятора при других условиях, а именно при

$$\omega_0 |MS_0 - RC| \ll 1 \quad \text{и} \quad \omega_0 MS_1^0 \ll 1,$$

т. е. вблизи границы самовозбуждения генератора и при малой нелинейности характеристики лампы. Обозначив $\mu = \omega_0 (MS_0 - RC)$ и $\beta = \frac{MS_1^0}{MS_0 - RC}$, мы приведем уравнение генератора к виду:

$$\ddot{x} + x = \mu [1 + \beta \varphi(x)] \dot{x},$$

т. е. к виду (9.1).

уравнения (9.1) (тем более точные, чем меньше параметр μ) как для периодических движений, так и для процессов установления периодических движений или состояний равновесия. Второй (метод Пуанкаре) позволяет найти периодические решения уравнения (9.1) в виде рядов по степеням параметра μ (т. е. принципиально с любой степенью точности, если только эти ряды сходятся)¹⁾.

§ 2. Метод Ван-дер-Поля

Чтобы исследовать систему уравнений (9.2) при достаточно малых значениях параметра μ , можно воспользоваться следующим приближенным методом исследования нелинейных систем, который будем называть «методом медленно меняющихся амплитуд» или методом Ван-дер-Поля [186, 187, 190, 35, 36]. Именно, вместо уравнений (9.2) можно рассматривать другие, составленные по определенному рецепту, вспомогательные, так называемые *укороченные уравнения* Ван-дер-Поля, которые позволяют сравнительно просто получить приближенные решения исходных уравнений (тем более точные, чем меньше значение параметра μ). В частности, задача отыскания периодических решений уравнений (9.2) (задача отыскания предельных циклов на фазовой плоскости x, y) сводится к несравненно более простой задаче нахождения состояний равновесия укороченных уравнений. Следует отметить, что метод Ван-дер-Поля является адекватным методом исследования нелинейных систем, в том смысле, что этот метод учитывает специфику нелинейных систем, их характерные черты, так как укороченные уравнения, так же как и исходные уравнения, являются нелинейными.

Перейдем к составлению укороченных уравнений для интересующей нас системы (9.2).

Прежде всего заметим, что при $\mu = 0$ система (9.2) превращается в уравнения обычного гармонического осциллятора; их решения, как известно (см., например, §§ 1 и 2 гл. 1), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t + b \sin t, \\ y &= -a \sin t + b \cos t \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

¹⁾ Метод Ван-дер-Поля и метод Пуанкаре пригодны и для решения неавтономных уравнений вида:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t),$$

где μ — достаточно малый положительный параметр, а также обобщаются на системы (и автономные, и неавтономные), близкие к консервативным системам с любым числом степеней свободы [107, 41].

Другие методы, разработанные для исследования динамических систем, близких к консервативным системам (например, методы «средней крутизны» [18, 136, 178, 73, 74], гармонического баланса [78, 79, 46, 47, 2] и др. [118]), предполагают близость колебаний к синусоидальным и по существу дела являются видоизмененными формами методов, излагаемых в настоящей главе.

или

$$\left. \begin{aligned} x &= K \cos(t + \vartheta), \\ y &= -K \sin(t + \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

(a и b или K и ϑ — постоянные интегрирования), а фазовыми траекториями являются окружности с центром в начале координат, по которым изображающие точки двигаются с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$.

Будем искать решения уравнений (9.2) при достаточно малых μ ($0 < \mu \ll 1$) в том же виде (9.4) или (9.5), но, разумеется, считая теперь a и b (или K и ϑ) не константами, а некоторыми, пока неизвестными функциями времени

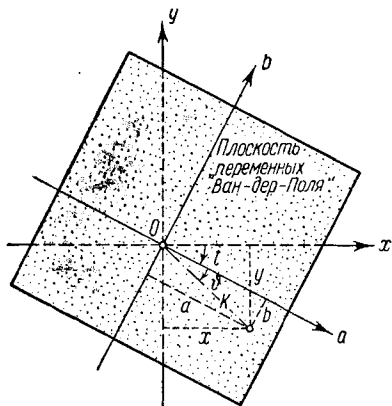


Рис. 466.

они, как увидим ниже, будут *медленно меняющимися* функциями времени). Эта замена переменных x, y на a, b (или K, ϑ) — на «переменные Ван-дер-Поля» — геометрически может быть интерпретирована как переход с фазовой плоскости x, y на другую плоскость (на плоскость переменных Ван-дер-Поля), вращающуюся по часовой стрелке относительно плоскости x, y (вокруг начала координат) с постоянной угловой скоростью

$$\omega = 1; \text{ на этой вращающейся плоскости } a \text{ и } b \text{ являются прямоугольными координатами, } K \text{ и } \vartheta \text{ — полярными (рис. 466); согласно (9.4) и (9.5) } a, b \text{ и } K, \vartheta \text{ связаны между собой соотношениями:} \quad (9.6)$$

$$a = K \cos \vartheta, \quad b = -K \sin \vartheta^1.$$

В переменных a, b уравнения (9.2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} \cos t + \frac{db}{dt} \sin t &= 0, \\ -\frac{da}{dt} \sin t + \frac{db}{dt} \cos t &= \mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \end{aligned}$$

¹ В силу (9.6) положительным направлением отсчета полярного угла ϑ является направление по ходу часовой стрелки.

Заметим также, что при $\mu = 0$ изображающая точка, двигаясь по фазовой плоскости x, y по круговым фазовым траекториям, остается неподвижной относительно вращающейся плоскости, т. е. при $\mu = 0$ каждая точка плоскости переменных Ван-дер-Поля является состоянием равновесия.

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \sin t, \\ \frac{db}{dt} &= \mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \cos t. \end{aligned} \right\} (9.7)$$

Рассматривая правые части полученных уравнений как функции трех переменных a , b и t (эти функции — периодические по t с периодом 2π) и разворачивая их в ряды Фурье по t (коэффициенты Фурье являются функциями a и b), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \left\{ \frac{\varphi_0(a, b)}{2} + \varphi_1(a, b) \cos t + \bar{\varphi}_1(a, b) \sin t + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2(a, b) \cos 2t + \bar{\varphi}_2(a, b) \sin 2t + \dots \right\}, \\ \frac{db}{dt} &= \mu \left\{ \frac{\psi_0(a, b)}{2} + \psi_1(a, b) \cos t + \bar{\psi}_1(a, b) \sin t + \right. \\ &\quad \left. + \psi_2(a, b) \cos 2t + \bar{\psi}_2(a, b) \sin 2t + \dots \right\}, \end{aligned} \right\} (9.7a)$$

где $\varphi_i(a, b)$, $\bar{\varphi}_i(a, b)$, $\psi_i(a, b)$ и $\bar{\psi}_i(a, b)$ — соответствующие коэффициенты Фурье функций

$$-\mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \sin t$$

и

$$+\mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \cos t$$

(при фиксированных a и b).

Уравнения (9.7) (или (9.7a)) — это наша система (9.2), преобразованная к другим, медленно меняющимся переменным a , b ($\frac{da}{dt}$ и $\frac{db}{dt}$ являются величинами порядка μ). Так как формулы преобразования переменных (9.4) содержали явно время, то новая система уравнений неавтономна, хотя исходная система была автономной. От этой системы уравнений (9.7a) в медленно меняющихся переменных мы перейдем к приближенным, укороченным уравнениям Ван-дер-Поля:

$$\frac{da}{dt} = \mu \frac{\varphi_0(a, b)}{2}, \quad \frac{db}{dt} = \mu \frac{\psi_0(a, b)}{2}, \quad (9.8)$$

отбрасывая в правых частях все «осциллирующие» члены или, иначе говоря, производя *усреднение* правых частей уравнений (9.7) (или (9.7a)) *по явно входящему времени*.

Решения полученной системы укороченных уравнений (9.8) аппроксимируют при достаточно малых значениях параметра μ решения «полной» системы (9.7), эквивалентной, как уже указывалось,

исходной системе (9.2). Поэтому если мы найдем решения укороченных уравнений $a = a_0(t)$, $b = b_0(t)$, то с помощью формул преобразования переменных (9.4) мы получим приближенные (но тем более точные, чем меньше значение параметра μ) решения системы (9.2):

$$\left. \begin{aligned} x_0(t) &= a_0(t) \cos t + b_0(t) \sin t, \\ y_0(t) &= -a_0(t) \sin t + b_0(t) \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

В частности, состояния равновесия укороченных уравнений $a_0(t) \equiv \text{const}$, $b_0(t) \equiv \text{const}$ соответствуют (приближенно) синусоидальным периодическим решениям уравнений (9.2) с периодом 2π .

Отложив до следующего параграфа доказательство аппроксимирующих свойств укороченных уравнений, займемся сейчас их исследованием (построением их фазовых траекторий на плоскости a, b). Система укороченных уравнений (9.7), как и первоначальная система (9.2), является автономной и может быть исследована обычными методами. Особенно просто это исследование проводится в полярных координатах K, ϑ , в которых укороченные уравнения имеют разделяющиеся переменные.

Для вывода укороченных уравнений в полярных координатах сделаем в исходных уравнениях (9.2) замену переменных x, y на полярные переменные Ван-дер-Поля K, ϑ согласно (9.5)¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} \cos(t + \vartheta) - K \frac{d\vartheta}{dt} \sin(t + \vartheta) &= 0, \\ -\frac{dK}{dt} \sin(t + \vartheta) - K \frac{d\vartheta}{dt} \cos(t + \vartheta) &= \mu f[K \cos(t + \vartheta), -K \sin(t + \vartheta)] \end{aligned}$$

или, разрешив относительно $\frac{dK}{dt}$ и $\frac{d\vartheta}{dt}$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -\mu f[K \cos(t + \vartheta), -K \sin(t + \vartheta)] \sin(t + \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{\mu}{K} f[K \cos(t + \vartheta), -K \sin(t + \vartheta)] \cos(t + \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

Усредняя правые части полученных уравнений рассматриваемой динамической системы по явно входящему в них времени t (или, что то же самое, по $u = t + \vartheta$, поскольку время t входит в правые части только в комбинации $t + \vartheta$), получим следующие укороченные уравнения для K и ϑ :

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \mu \Psi(K), \quad (9.11)$$

¹⁾ Укороченные уравнения в переменных K, ϑ , конечно, можно получить и из укороченных уравнений (9.8) заменой переменных (9.6).

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[K \cos u, -K \sin u] \sin u \, du, \\ \Psi(K) &= -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f[K \cos u, -K \sin u] \cos u \, du \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

— средние значения по u периодических (с периодом 2π) функций

$$-f[K \cos u, -K \sin u] \sin u \quad \text{и} \quad -\frac{1}{K} f[K \cos u, -K \sin u] \cos u,$$

зависящие только от K^1).

Проведем исследование системы укороченных уравнений и построение их фазовых траекторий на плоскости переменных Ван-дер-Поля.

Начнем с первого из уравнений (9.11), которое мы сможем исследовать независимо от второго:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K); \quad (9.11a)$$

качественная картина уравнения такого типа, как мы видели, полностью определяется расположением и характером состояний равновесия на соответствующей фазовой прямой.

¹⁾ В самом деле, правые части укороченных уравнений для K и ϑ — свободные члены в разложениях Фурье по явно входящему времени t правых частей уравнений (9.9) — соответственно равны:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[K \cos(\xi + \vartheta), -K \sin(\xi + \vartheta)] \sin(\xi + \vartheta) \, d\xi$$

и

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f[K \cos(\xi + \vartheta), -K \sin(\xi + \vartheta)] \cos(\xi + \vartheta) \, d\xi$$

(интегрирование ведется при фиксированных значениях K и ϑ), откуда, полагая $u = \xi + \vartheta$ и используя периодичность подинтегральных функций по u (период равен 2π), получим (9.12).

Заметим, что для неавтономных систем вида $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t)$ укороченные уравнения получаются тем же способом, путем преобразования к медленно меняющемуся переменным и последующего усреднения правых частей полученных уравнений по времени t , явно входящему в них. Укороченные уравнения получатся также автономными, но с неразделяющимися переменными и в полярных координатах K, ϑ .

Координаты этих состояний равновесия суть корни уравнения

$$\Phi(K) = 0 \quad (9.13)$$

или

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du = 0. \quad (9.13a)$$

Состояние равновесия $K = K_i$ будет устойчивым, если

$$\Phi'(K_i) < 0 \quad (9.14)$$

или если¹⁾

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y(K_i \cos u, -K_i \sin u) \, du < 0, \quad (9.14a)$$

и неустойчивым, если

$$\Phi'(K_i) > 0.$$

Остальные движения, как мы знаем, являются либо асимптотическими к состояниям равновесия как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$, либо асимптотическими к состоянию равновесия для $t \rightarrow +\infty$ и уходящими в бесконечность для $t \rightarrow -\infty$ и т. д.

¹⁾ Действительно,

$$\begin{aligned} \Phi'(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_x \cos u \sin u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \sin^2 u \, du = \\ &= -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} [f'_x K \sin u + f'_y K \cos u] \cos u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \, du = \\ &= \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} \frac{d}{du} \{f \cos u\} \, du + \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f \sin u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \, du = \\ &= \frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f \sin u \, du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y \, du, \end{aligned}$$

откуда в силу (9.13)

$$\Phi'(K_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_y(K_i \cos u, -K_i \sin u) \, du.$$

Для этих движений, как всегда в таких случаях, могут быть найдены и аналитические выражения¹⁾.

Действительно, из (9.11a) имеем:

$$\mu(t - t_0) = \int_{K_0}^K \frac{dK}{\Phi(K)},$$

где K_0 — значение K при $t = t_0$, откуда, разрешая это уравнение относительно K , имеем:

$$K = K\{\mu(t - t_0)\}.$$

Теперь перейдем ко второму из уравнений (9.11):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu\Psi(K). \quad (9.11б)$$

Здесь следует различать два случая. В первом случае, довольно

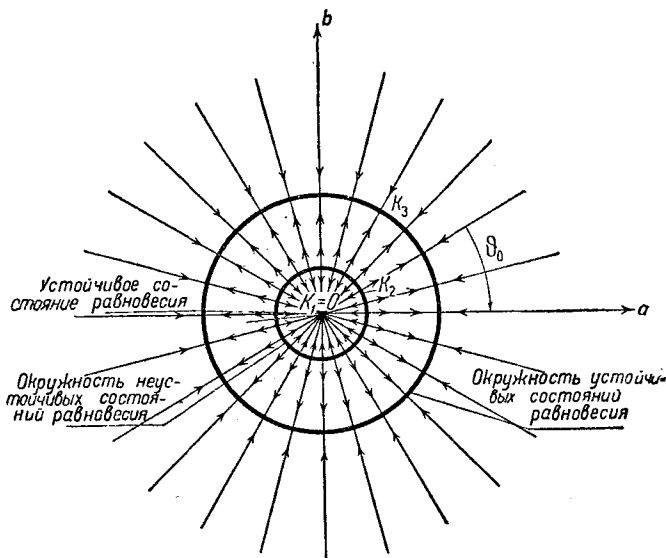


Рис. 467.

часто встречающемся на практике,

$$\Psi(K) \equiv 0$$

или

$$\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du \equiv 0.$$

¹⁾ Мы сейчас не рассматриваем вопроса о том, можно ли фактически вычислить те интегралы, которые содержат эти аналитические выражения.

В этом случае второе уравнение интегрируется сразу:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \vartheta = \text{const} = \vartheta_0,$$

и мы можем сразу представить себе картину фазовых траекторий на плоскости переменных Ван-дер-Поля. Все интегральные кривые суть прямые, проходящие через начало координат и наклоненные под всевозможными углами $\vartheta = \text{const}$. Движение вдоль каждой из этих прямых происходит одинаково и определяется уравнением (9.11а). Корни уравнения (9.13) $K = K_i$ дают радиусы окружностей, каждая точка которых является состоянием равновесия укороченной системы. Примерная картина разбиения на траектории плоскости переменных Ван-дер-Поля

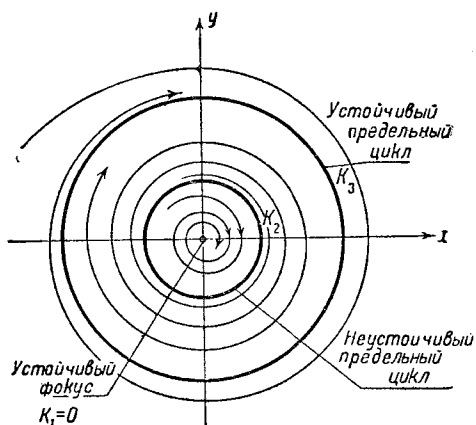


Рис. 468.

Движение изображающей точки по какому-нибудь циклу, имеющему радиус K_i , следует закону:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t + b \sin t = K_i \cos(t + \vartheta_0), \\ y &= -a \sin t + b \cos t = -K_i \sin(t + \vartheta_0), \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

где ϑ_0 произвольно. Произвольность начальной фазы ϑ_0 для периодических движений по данному предельному циклу на плоскости x, y соответствует тому обстоятельству, что состояния равновесия укороченных уравнений образуют на плоскости a, b целые окружности.

Сразу видно, что предельный цикл будет орбитно устойчив, если соответствующие состояния равновесия на плоскости a, b будут устойчивы, и наоборот. Остальные траектории, представляющие собою на плоскости a, b отрезки прямых, преобразуются на плоскости x, y

(плоскости a, b) в частном случае трех состояний равновесия укороченного уравнения (9.11а) изображена на рис. 467.

Если мы перейдем теперь от вращающейся плоскости a, b к неподвижной фазовой плоскости x, y с помощью формул преобразования (9.4) или (9.5), то, как нетрудно видеть, окружностям, состоящим из состояний равновесия на плоскости a, b , будут соответствовать на плоскости x, y круговые предельные циклы, имеющие те же радиусы K_i (рис. 468).

в спирали, вообще говоря, накручивающиеся на предельные циклы либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$.

Перейдем теперь ко второму случаю, когда $\Psi(K) \neq 0$. Пусть уравнение $\Psi(K) = 0$ имеет несколько корней и пусть эти корни будут $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_m$. Мы предположим, что ни одно из чисел $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_m$ не совпадает с числами K_1, K_2, \dots, K_n , о которых у нас уже была речь.

Тогда, возвращаясь к уравнениям (9.11), легко сделать заключение, что состояниям равновесия уравнения (9.11а) на фазовой плоскости a, b соответствуют круговые предельные циклы, опять-таки с радиусами K_1, K_2, \dots, K_n . Движение изображающей точки на плоскости a, b по какому-нибудь предельному циклу радиуса K_j подчиняется уравнениям:

$$K = K_j = \text{const}, \quad \dot{\vartheta} = \mu \Psi(K_j)t + \vartheta_0$$

или

$$a = K_j \cos \{ \mu \Psi(K_j)t + \vartheta_0 \}, \quad b = -K_j \sin \{ \mu \Psi(K_j)t + \vartheta_0 \}.$$

Устойчивость или неустойчивость рассматриваемого предельного цикла определяется устойчивостью или неустойчивостью соот-

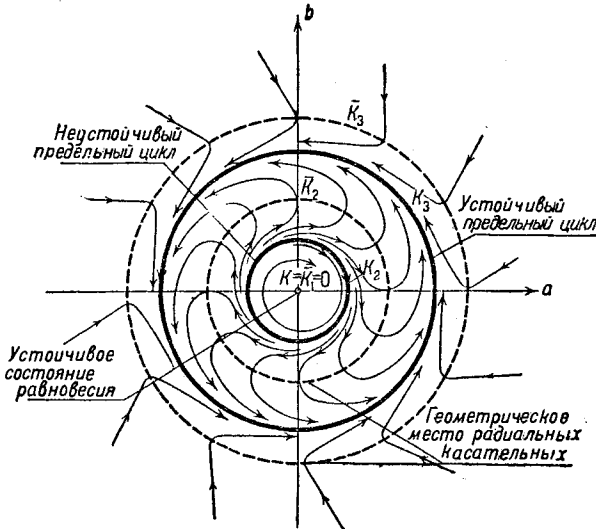


Рис. 469.

ветствующего состояния равновесия для уравнения (9.11а), а направление вращения — знаком $\Psi(K_j)$.

Остальные кривые суть спирали, накручивающиеся на предельные циклы (или на состояние равновесия) либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$ (рис. 469). Если мы теперь в этом втором случае перейдем

к неподвижной системе координат, то получим картину, совершенно аналогичную той, которая была на этой плоскости в первом случае. Мы будем опять иметь ряд предельных циклов с радиусами K_1, K_2, \dots, K_n . Движение по какому-нибудь из этих предельных циклов, для которого $K=K_j$, дается уравнениями ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} x &= K_j \cos \{ [1 + \mu \Psi(K_j)] t + \vartheta_0 \}, \\ y &= -K_j \sin \{ [1 + \mu \Psi(K_j)] t + \vartheta_0 \}. \end{aligned} \right\} \quad (9.15a)$$

Этот случай отличается от первого случая лишь тем, что здесь мы имеем определенную поправку на частоту $\Delta\omega = \mu\Psi(K_j)$, которая в первом приближении по μ соответствует поправке на период $\tau = -2\pi\mu\Psi(K_j)$ (т. е. относительной поправке $\frac{\tau}{2\pi} = -\mu\Psi(K_j)$).

Остальные траектории — опять спирали, вообще говоря, медленно накручивающиеся на предельные циклы или на состояние равновесия $x=0, y=0$, если последнее существует и устойчиво.

Мы истолковали результаты исследования укороченных уравнений (уравнений (9.8) или, что все равно, уравнений (9.11)) на основной фазовой плоскости x, y . Теперь возникает вопрос, в какой мере эти результаты отражают свойства решений исходных уравнений (9.2)?

Можно доказать (и в этом, вообще говоря, и заключается обоснование метода Ван-дер-Поля), что то разбиение фазовой плоскости x, y на траектории, которое мы только что получили с помощью решений укороченных уравнений, аппроксимирует при достаточно малых μ картину фазовых траекторий исходной системы уравнений (9.2). Это высказывание можно сделать более точным. Именно, что касается предельных циклов, то мы докажем, что при достаточно малых μ уравнения (9.2) действительно имеют предельные циклы (если уравнение $\Phi(K)=0$ имеет простые корни K_i), которые близки к окружностям с радиусами K_i (тем ближе, чем меньше μ), и не имеют других предельных циклов; эти предельные циклы, соответствующие периодическим, близким к синусоидальным движениям, устойчивы, если $\Phi'(K_i) < 0$ ²⁾.

Что же касается решений, соответствующих процессам установления, то мы, следуя Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси [90], докажем, что решения укороченных уравнений сколь угодно мало отличаются от решений исходных уравнений (9.2) (при одинаковых

¹⁾ Заметим, что для этого решения $\frac{dx}{dt}$ равняется y лишь с точностью до величин порядка μ .

²⁾ В § 5 этой главы, когда будет идти речь о методе Пуанкаре, мы получим выражение для периода автоколебаний в виде ряда по степеням параметра μ , причем коэффициентом члена, пропорционального μ , является $-2\pi\Psi(K_i)$.

начальных условиях) в течение сколь угодно большого промежутка времени $\frac{D}{\mu}$ (D — положительное, сколь угодно большое число), если параметр μ достаточно мал.

§ 3. Обоснование метода Ван-дер-Поля

1. Обоснование метода Ван-дер-Поля для процессов установления [90, 149]. Для доказательства последнего утверждения, приведенного в конце предыдущего параграфа, относительно аппроксимирующих свойств выражения (9.9), полученного с помощью решения укороченных уравнений, нам, очевидно, достаточно доказать следующее предложение:

Пусть $a = a(t)$, $b = b(t)$ — решение «полной» системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \left\{ \frac{\varphi_0(a, b)}{2} + \sum_j [\varphi_j(a, b) \cos jt + \bar{\varphi}_j(a, b) \sin jt] \right\}, \\ \frac{db}{dt} &= \mu \left\{ \frac{\psi_0(a, b)}{2} + \sum_j [\psi_j(a, b) \cos jt + \bar{\psi}_j(a, b) \sin jt] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9.7a)$$

и $a = a_0(t)$, $b = b_0(t)$ — решение системы укороченных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu \frac{\varphi_0(a, b)}{2}, \\ \frac{db}{dt} &= \mu \frac{\psi_0(a, b)}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям: при $t = t_0$ $a(t_0) = a_0(t_0)$, $b(t_0) = b_0(t_0)$; тогда по заданным положительным ε и D (ε может быть сколь угодно малым, D — сколь угодно большим) всегда можно найти такое достаточно малое μ , чтобы

$$|a(t) - a_0(t)| < \varepsilon, \quad |b(t) - b_0(t)| < \varepsilon$$

или

$$t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{D}{\mu}.$$

Прежде всего заметим, что укороченные уравнения (9.8) преобразованием времени $\tau = \mu t$ (здесь τ — так называемое «медленное» время) приводятся к виду:

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varphi_0(a, b)}{2}, \quad \frac{db}{d\tau} = \frac{\psi_0(a, b)}{2};$$

поэтому их решение зависит только от «медленного» времени τ и от начальных условий при некотором $\tau = \tau_0$. Следовательно, задавая начальные значения $a_0(t_0)$, $b_0(t_0)$ и промежуток «медленного» времени D , мы тем самым задаем на плоскости a, b некоторую конечную и

не зависящую от μ дугу фазовой траектории $a = a_0(t)$, $b = b_0(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{D}{\mu}$) укороченных уравнений. Таким образом, наше предложение утверждает, что решение укороченных уравнений обладает указанными выше аппроксимирующими свойствами на любой заданной дуге фазовой траектории укороченных уравнений (на конечных интервалах изменения переменных a и b).

Для сокращения выкладок мы докажем сформулированное выше предложение для случая одного уравнения первого порядка:

$$\frac{da}{dt} = \mu F(a, t), \quad (9.16)$$

для которого укороченное уравнение имеет вид:

$$\frac{da}{dt} = \mu f(a). \quad (9.17)$$

Здесь $F(a, t)$ — функция периодическая по явно входящему t (с периодом 2π), а

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a, \xi) d\xi$$

— ее среднее значение по t (при любых фиксированных a). Заметим, что функцию $F(a, t)$ можно представить в виде:

$$F(a, t) = f(a) + \varphi(a, t), \quad (9.18)$$

где, очевидно, $\varphi(a, t)$ — функция, периодическая по t (с периодом 2π) и имеющая среднее значение (также по t при любых фиксированных a), равное нулю; таким образом, при любых a и t

$$\int_t^{t+2\pi} \varphi(a, \xi) d\xi \equiv 0. \quad (9.19)$$

Доказательство для интересующего нас случая системы второго порядка (9.7а) (или для системы уравнений любого порядка, записанной в медленно меняющихся переменных) не отличается по идее от доказательства, которое будет проведено ниже.

Будем рассматривать решение $a = a(t)$ «полного» уравнения (9.16) и решение $a = a_0(t)$ укороченного уравнения (9.17), удовлетворяющие одному и тому же начальному условию:

$$\text{при } t = t_0 \quad a(t_0) = a_0(t_0) = \eta.$$

Мы будем предполагать ниже, что на некотором интервале изменения a

$$|a - \eta| < A \quad (9.20)$$

и при любых t функции $f(a)$ и $F(a, t)$ (или $f(a)$ и $\varphi(a, t)$) непрерывны, ограничены и, кроме того, удовлетворяют условиям Липшица, т. е. существуют положительные числа M, P, Q и B такие, что при любых a, a', a'' в интервале (9.20) и любых t выполняются неравенства ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} |f(a)| < M, \quad |\varphi(a, t)| < P, \\ |\varphi(a'', t) - \varphi(a', t)| < Q|a'' - a'|, \\ |F(a'', t) - F(a', t)| < B|a'' - a'|. \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

Заметим, что последние два неравенства (9.21) заведомо выполнены, если в интервале (9.20) функции $f(a)$ и $F(a, t)$ имеют непрерывные и ограниченные производные по a , в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях функций.

Нам нужно доказать, что по любым заданным положительным числам ε и D (ε сколь угодно мало) всегда можно подобрать такое достаточно малое μ , чтобы для всех t , удовлетворяющих условию

$$0 \leq \mu(t - t_0) \leq D,$$

выполнялось неравенство

$$|a(t) - a_0(t)| < \varepsilon.$$

На число D накладывается только одно ограничение: D должно быть таким, чтобы решение $a_0(t)$ при любых μ и при всех значениях t , удовлетворяющих неравенству $0 \leq \mu(t - t_0) \leq D$, не выходило за пределы выбранного ранее интервала (9.20), т. е. чтобы

$$|a_0(t) - \eta| < A \quad (9.22)$$

при

$$0 \leq \mu(t - t_0) \leq D.$$

Такое D всегда можно выбрать, так как решение $a_0(t)$ есть функция только $\mu(t - t_0)$. Заметим, что и здесь, задавая начальное значение η и промежуток «медленного» времени D , мы задаем на траектории $a = a_0(t)$ укороченного уравнения некоторый отрезок конечной длины; таким образом, мы хотим доказать, что решение $a_0(t)$ аппроксимирует (при достаточно малых μ) решение $a(t)$ на всем этом отрезке траектории укороченного уравнения, т. е. при конечных изменениях переменного a .

Для доказательства нашего предложения будем искать решение уравнения (9.16) методом последовательных приближений, взяв

¹⁾ Каких-либо ограничений на значения ε накладывать не нужно вследствие непрерывности и периодичности по t функции $\varphi(a, t)$.

за нулевое приближение $a_0(t)$. Первое приближение мы найдем, подставляя $a_0(t)$ в правую часть уравнения (9.16) и интегрируя:

$$a_1(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^t F[a_0(t), t] dt. \quad (9.23)$$

Точно так же мы найдем второе приближение:

$$a_2(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^t F[a_1(t), t] dt, \quad (9.24)$$

и вообще n -ым приближением будет:

$$a_n(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^t F[a_{n-1}(t), t] dt. \quad (9.25)$$

Как известно, при выполнении условий (9.21) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t)$ существует и является единственным решением $a(t)$ уравнения (9.16), удовлетворяющим начальному условию: $a(t_0) = \eta$ ¹⁾.

Будем теперь последовательно оценивать разности $a_n - a_0$. Для первого приближения будем иметь:

$$a_1(t) = \eta + \mu \int_{t_0}^t F[a_0(t), t] dt = \eta + \mu \int_{t_0}^t f[a_0(t)] dt + \mu \int_{t_0}^t \varphi[a_0(t), t] dt.$$

Но

$$\eta + \mu \int_{t_0}^t f[a_0(t)] dt \equiv a_0(t),$$

поэтому

$$a_1(t) - a_0(t) = \mu \int_{t_0}^t \varphi[a_0(t), t] dt.$$

Покажем ограниченность интеграла, стоящего в правой части полученного выражения. Обозначим через N целую часть отношения $\frac{t-t_0}{2\pi}$, т. е. число периодов подинтегральной функции (по явно входящему t), целиком укладывающихся на отрезке интегрирования $[t_0, t]$.

¹⁾ Метод последовательных приближений и доказательство того, что функции $a_n(t)$ стремятся при $n \rightarrow \infty$ к решению уравнения (9.16), можно найти, например, в [113].

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \varphi [a_0(t), t] dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)} \varphi [a_0(t), t] dt + \int_{t_0+2\pi N}^t \varphi [a_0(t), t] dt = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)} \left\{ \varphi [a_0(t), t] - \varphi [a_0(t_0+2\pi k), t] \right\} dt + \\ & \qquad \qquad \qquad + \int_{t_0+2\pi N}^t \varphi [a_0(t), t] dt \end{aligned}$$

в силу (9.19). Используя неравенства (9.21) и теорему Лагранжа о конечных приращениях функций, имеем:

$$\begin{aligned} |\varphi [a_0(t), t] - \varphi [a_0(t_0+2\pi k), t]| &< Q |a_0(t) - a_0(t_0+2\pi k)| < \\ &< \mu MQ |t - (t_0+2\pi k)|, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)} \left\{ \varphi [a_0(t), t] - \varphi [a_0(t_0+2\pi k), t] \right\} dt \right| &< \\ &< \mu MQ \int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)} [t - (t_0+2\pi k)] dt = 2\pi^2 \mu MQ, \end{aligned}$$

а

$$\left| \int_{t_0}^t \varphi [a_0(t), t] dt \right| < 2\pi^2 MQD + 2\pi P,$$

так как $\mu N \leq D$ и $\left| \int_{t_0+2\pi N}^t \varphi [a_0(t), t] dt \right| < 2\pi P$.

Таким образом,

$$|a_1(t) - a_0(t)| < \mu S, \quad (9.26)$$

где

$$S = 2\pi^2 MQD + 2\pi P,$$

т. е. эта разность является величиной порядка μ .

Для того чтобы оценить $a_2(t) - a_0(t)$, заметим, что

$$|a_2(t) - a_0(t)| \leq |a_2 - a_1| + |a_1 - a_0|.$$

Но

$$a_2 - a_1 = \mu \int_{t_0}^t [F(a_1, t) - F(a_0, t)] dt;$$

пользуясь последним из неравенств (9.21), имеем:

$$|a_2(t) - a_1(t)| < \mu B \int_{t_0}^t |a_1 - a_0| dt < \mu^2 BS |t - t_0| \leq \mu BSD;$$

следовательно, мы будем иметь:

$$|a_2(t) - a_0(t)| < \mu S (1 + BD). \quad (9.27)$$

Далее,

$$|a_3(t) - a_0(t)| \leq |a_3 - a_2| + |a_2 - a_1| + |a_1 - a_0|.$$

Но

$$\begin{aligned} |a_3 - a_2| &= \mu \left| \int_{t_0}^t [F(a_2, t) - F(a_1, t)] dt \right| < \mu B \int_{t_0}^t |a_2 - a_1| dt < \\ &< \mu^3 B^2 S \frac{|t - t_0|^2}{1.2} \leq \mu S \frac{(BD)^2}{1.2}, \end{aligned}$$

откуда

$$|a_3 - a_0| < \mu S \left[1 + BD + \frac{(BD)^2}{1.2} \right]. \quad (9.28)$$

Продолжая дальше таким же образом, получим:

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n-1}| &< \mu S \frac{(BD)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |a_n - a_0| &< \mu S \left[1 + BD + \frac{(BD)^2}{1.2} + \dots + \frac{(BD)^{n-1}}{(n-1)!} \right] < \mu S e^{BD}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t)$ есть решение уравнения (9.16), то мы будем иметь:

$$|a - a_0| \leq \mu S e^{BD}. \quad (9.30)$$

Однако все те оценки, которые мы делали, например использование неравенства (9.21), законны только до тех пор, пока мы можем ручаться, что все функции $a_j(t)$ находятся внутри указанных нами границ, т. е. до тех пор, пока

$$|a_j(t) - \eta| < A \quad (9.31)$$

при

$$0 \leq \mu(t - t_0) \leq D.$$

Посмотрим, выполняется ли это. Очевидно, в силу неравенства (9.22) существует такое число α ($\alpha > 0$)¹⁾, что

$$|a_0(t) - \eta| \leq A - \alpha \quad (9.32)$$

¹⁾ Величина α определена, коль скоро задано D и выбрано A . Выбор μ не отражается на α .

при любых t , удовлетворяющих условию

$$0 \leq \mu(t - t_0) \leq D.$$

Переходя к $a_1(t)$, на основании (9.26) имеем (для тех же значений t)

$$|a_1(t) - \eta| \leq |a_1 - a_0| + |a_0 - \eta| < |\mu S + A - \alpha|,$$

откуда следует, что для выполнения неравенства (9.31) для $a_1(t)$ достаточно, чтобы $\mu S < \alpha$.

Далее,

$$|a_2(t) - \eta| \leq |a_2 - a_0| + |a_0 - \eta| < |\mu S(1 + BD) + A - \alpha|,$$

т. е. для того, чтобы $|a_2 - \eta|$ было меньше A , достаточно взять $\mu S(1 + BD) < \alpha$.

Продолжая таким же образом дальше, нетрудно видеть, что все приведенные оценки законны, если $\mu S e^{BD} < \alpha$.

Очевидно, что сколь бы мало ни было ϵ , мы всегда можем указать такое μ , чтобы мы имели:

$$\mu S e^{BD} < \alpha \quad (9.33)$$

и

$$|a(t) - a_0(t)| < \mu S e^{BD} < \epsilon$$

для всех t , удовлетворяющих неравенству $\mu(t - t_0) \leq D$. С этой целью нам достаточно выбрать μ меньше наименьшего из чисел

$$\frac{\alpha}{S e^{BD}}, \frac{\epsilon}{S e^{BD}}.$$

Этим наше предложение доказано.

Совершенно так же и при аналогичных предположениях относительно свойств правых частей уравнений доказывается теорема, сформулированная в начале параграфа для системы второго порядка (9.7а). Сделав переход от медленно меняющихся переменных a, b к переменным x, y , мы, очевидно, сможем утверждать следующее:

Пусть в некоторой области A (например, внутри круга некоторого радиуса R с центром в начале координат) функция $f(x, y)$ в уравнениях

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu f(x, y) \quad (9.2)$$

непрерывна, ограничена и удовлетворяет условиям Липшица (или имеет непрерывные и ограниченные производные по x и y)¹⁾; пусть приближенное решение

$$\left. \begin{aligned} x_0(t) &= a_0(t) \cos t + b_0(t) \sin t = K_0(t) \cos[t + \vartheta_0(t)], \\ y_0(t) &= -a_0(t) \sin t + b_0(t) \cos t = -K_0(t) \sin[t + \vartheta_0(t)] \end{aligned} \right\} (9.9)$$

¹⁾ Эти условия, очевидно, обеспечат непрерывность и ограниченность правых частей уравнений, преобразованных к медленно меняющимся переменным (уравнений (9.7) или (9.10)), а также выполнение для них условий Липшица.

($a_0(t)$, $b_0(t)$ или $K_0(t)$, $\theta_0(t)$ — решения укороченных уравнений (9.8) или соответственно (9.11)) и решение $x=x(t)$, $y=y(t)$ системы уравнений (9.2) удовлетворяют одним и тем же начальным условиям:

$$\text{при } t=t_0 \quad x(t_0)=x_0(t_0), \quad y(t_0)=y_0(t_0);$$

тогда по любым заданным положительным ε и D^1) всегда можно найти такое достаточно малое μ , чтобы

$$|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon, \quad |y(t) - y_0(t)| < \varepsilon$$

при всех t , удовлетворяющих условию

$$0 \leq \mu(t - t_0) \leq D$$

(т. е. при конечных изменениях медленно меняющихся переменных a , b или K , θ).

2. Обоснование метода Ван-дер-Поля для установившихся колебаний. Докажем теперь, что, если уравнение $\Phi(K)=0$ имеет простой корень K_i ($\Phi'(K_i) \neq 0$), то по любому заданному положительному, сколь угодно малому числу ε всегда можно найти такое достаточно малое значение параметра μ , чтобы система (9.2) имела предельный цикл, лежащий в ε -окрестности окружности $x^2 + y^2 = K_i^2$, причем этот предельный цикл устойчив, если $\Phi'(K_i) < 0$, и неустойчив, если $\Phi'(K_i) > 0$.

Для доказательства этого утверждения мы будем предполагать ниже, что функция $\Phi(K)$ имеет непрерывную производную (по крайней мере в некоторой окрестности корня K_i). Это заведомо имеет место, если функция $f(x, y)$ в уравнениях (9.2) имеет непрерывные производные (см. формулу (9.14a) и относящееся к ней примечание).

Предположим для определенности, что для рассматриваемого простого корня K_i уравнения $\Phi(K)=0$ $\Phi'(K_i) < 0$ ²⁾. Тогда $K=K_i$ является устойчивым состоянием равновесия первого укороченного уравнения:

$$\frac{dK}{dt} = \mu\Phi(K), \quad (9.11a)$$

а на фазовой плоскости x, y имеется устойчивый предельный цикл укороченных уравнений — окружность радиуса K_i . Возьмем произвольную, достаточно малую ε -окрестность этой окружности (рис. 470), такую, чтобы в ней, т. е. при $K_i - \varepsilon \leq K \leq K_i + \varepsilon$,

$$\Phi'(K) \leq -\beta, \quad (9.34)$$

¹⁾ ε может быть сколь угодно малым, D должно быть таким, чтобы при $0 \leq \mu(t - t_0) \leq D$ приближенное решение (9.9) не выходило за пределы области A .

²⁾ Доказательство для случая $\Phi'(K_i) > 0$ сводится к проводимому ниже заменой t на $-t$. Случай $\Phi'(K_i) = 0$ невозможен, так как K_i является простым корнем уравнения $\Phi(K) = 0$.

где β — некоторое положительное число; это всегда можно сделать так как $\Phi'(K)$ — непрерывная функция и $\Phi'(K_i) < 0$.

Рассмотрим на фазовой плоскости x, y траекторию Γ :

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

уравнений (9.2) и траекторию Γ_0 :

$$\left. \begin{aligned} x_0(t) &= K_0(t) \cos [t + \vartheta_0(t)], \\ y_0(t) &= -K_0(t) \sin [t + \vartheta_0(t)] \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

укороченных уравнений, проходящие (пусть при $t=0$) через одну и ту же точку $A(0, K_i + \varepsilon)$ (здесь, как и раньше, $K_0(t), \vartheta_0(t)$ — решение укороченных уравнений (9.11)). Траектория Γ_0 является спиралью, скручивающейся к окружности $x^2 + y^2 = K_i^2$ при $t \rightarrow +\infty$, так как в силу (9.34) при $K_i \leq K \leq K_i + \varepsilon$

$$\Phi(K) \leq -\beta(K - K_i) < 0 \quad (9.34a)$$

и, следовательно, $K_0(t)$ монотонно убывает, стремясь к K_i при $t \rightarrow +\infty$. Выберем такой промежуток медленного времени D , чтобы при $t = \frac{D}{\mu}$ $K_0(t) - K_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$ и за проме-

жуток времени $\frac{D}{\mu}$ траектория Γ_0 делала более одного оборота вокруг начала координат¹⁾.

Согласно теореме, сформулированной в п. 1 настоящего параграфа, существует такое $\mu = \mu(\varepsilon, D)$, при котором изображающая

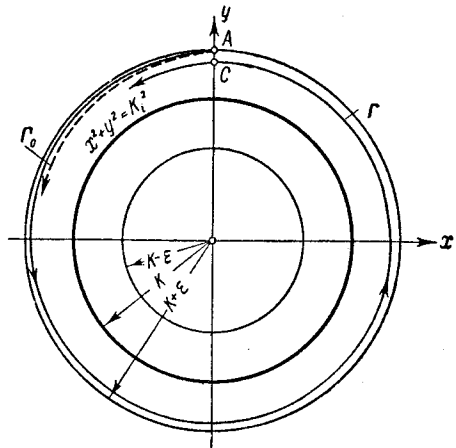


Рис. 470.

¹⁾ Согласно (9.34a) при $K_i \leq K \leq K_i + \varepsilon$

$$\frac{dK}{dt} = \mu\Phi(K) \leq -\mu\beta(K - K_i),$$

т. е. для траектории Γ_0 имеем:

$$0 < K_0(t) - K_i \leq \varepsilon e^{-\mu\beta t}.$$

Поэтому за необходимый нам промежуток медленного времени D можно взять $D = \frac{1}{\beta} \ln 2$. Число оборотов спирали Γ_0 за этот промежуток времени может быть сделано любым за счет выбора достаточно малого μ .

точка $[x(t), y(t)]$ не выходит за пределы $\frac{\epsilon}{2}$ -окрестности точки $[x_0(t), y_0(t)]$ на всем промежутке времени $0 \leq t \leq \frac{D}{\mu}$. Возьмем это значение параметра μ в системе уравнений (9.2). При этом значении μ точка $\left[x\left(\frac{D}{\mu}\right), y\left(\frac{D}{\mu}\right)\right]$ траектории Γ будет, очевидно, находиться *внутри* заданной нами ϵ -окрестности окружности $x^2 + y^2 = K_i^2$, а сама траектория Γ сделает более одного оборота вокруг начала координат за промежуток времени $0 \leq t \leq \frac{D}{\mu}$. Так как Γ является фазовой траекторией автономной системы (9.2) и не может в силу этого самопересекаться, то, следовательно, первая точка ее пересечения с осью y (при $t > 0$) — точка C — будет иметь ординату

$$y_C < K_i + \epsilon.$$

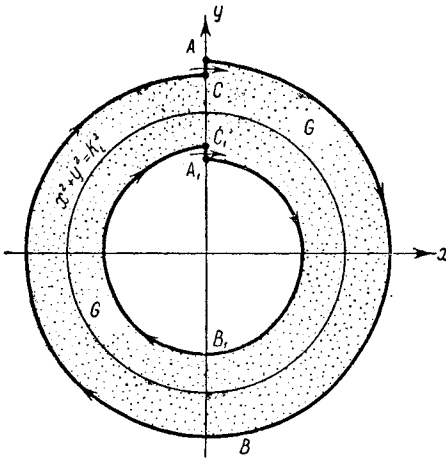


Рис. 471.

Поэтому через замкнутую кривую $ABCA$ (рис. 471), составленную из дуги ABC траектории Γ и отрезка CA оси y , фазовые траектории системы (9.2) *могут только входить* (при возрастании t) в область, заключенную внутри этой кривой ¹⁾.

Совершенно так же можно построить другую замкнутую кривую $A_1B_1C_1A_1$, состоящую из дуги $A_1B_1C_1$ траектории системы (9.2), проходящей через

точку $A_1(0, -K_i - \epsilon)$, и из отрезка C_1A_1 оси y ; через эту кривую фазовые траектории системы (9.2) могут только выходить (также при возрастании t) в область, лежащую вне ее.

Таким образом, мы построили на фазовой плоскости x, y кольцевую область G , ограниченную кривыми $ABCA$ и $A_1B_1C_1A_1$ (рис. 471), из которой *траектории* системы (9.2) *не могут выходить* (при увеличении t). Так как в этой области нет состояний равновесия системы (9.2) ²⁾, то согласно теореме качественной теории диффе-

¹⁾ Траектории системы (9.2) не могут пересекать дугу ABC траектории Γ той же системы уравнений, а на отрезке CA оси y $\dot{x} = y > 0$.

²⁾ Единственное состояние равновесия системы (9.2) при достаточно малом μ лежит на оси x вблизи начала координат; его абсцисса определяется уравнением

$$-x + \mu f(x, 0) = 0.$$

ренциальных уравнений второго порядка (см. гл. VI, § 2) в этой области, т. е. в ϵ -окрестности окружности $x^2 + y^2 = K_i^2$, имеется устойчивый предельный цикл системы (9.2) с выбранным выше значением параметра μ .

Доказательство существования неустойчивого предельного цикла системы (9.2) при достаточно малом μ , лежащего в окрестности окружности $x^2 + y^2 = K_i^2$, где K_i — корень уравнения $\Phi(K) = 0$, причем $\Phi'(K_i) > 0$, сводится к тому только что проведенному заменой t на $-t$. Таким образом, предложение, сформулированное в начале настоящего раздела § 2, доказано ¹⁾.

В заключение параграфа докажем, что при достаточно малых μ система уравнений (9.2) не имеет предельных циклов, лежащих *вне* малых окрестностей окружностей $x^2 + y^2 = K_i^2$. Другими словами, докажем, что, определяя корни K_i уравнения $\Phi(K) = 0$ (пусть они все простые), мы тем самым найдем *все* предельные циклы системы уравнений (9.2) с достаточно малыми значениями параметра μ . Точнее, докажем следующее:

Пусть $\Phi(K) \neq 0$ при $0 < R_1 \leq K \leq R_2$; тогда существуют такие достаточно малые значения параметра μ :

$$0 < \mu \leq \mu_0,$$

при которых система уравнений (9.2) не имеет предельных циклов в кольцевой области R:

$$R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2.$$

Положим для определенности, что $\Phi(K) > 0$ при $R_1 \leq K \leq R_2$. Тогда в силу непрерывности функции $\Phi(K)$ (что заведомо имеет место, так как $f(x, y)$ — непрерывная функция) существуют такие положительные числа ϵ и Φ_0 , что при $R_1 \leq K \leq R_2 + \epsilon$

$$\Phi(K) > \Phi_0 > 0. \quad (9.35)$$

Рассмотрим на плоскости x, y траекторию γ :

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

системы (9.2) и траекторию γ_0 :

$$\left. \begin{aligned} x_0(t) &= K_0(t) \cos [t + \vartheta_0(t)], \\ y_0(t) &= -K_0(t) \sin [t + \vartheta_0(t)] \end{aligned} \right\}$$

укороченных уравнений, начинающиеся (пусть при $t=0$) в какой-либо точке окружности $x^2 + y^2 = R_1^2$ (рис. 472). Для решения

¹⁾ Для доказательства этого предложения мы использовали теорему о существовании предельного цикла, справедливую только для автономных систем второго порядка. Доказательство аналогичного утверждения для систем с любым числом степеней свободы содержится в работах Н. Н. Боголюбова [35, 36].

$K=K_0(t)$ первого укороченного уравнения на отрезке $R_1 \leq K \leq R_2 + \varepsilon$, очевидно, имеем:

$$\frac{dK}{dt} > \mu \Phi_0 > 0,$$

т. е. для траектории γ_0 на том же промежутке изменения $K_0(t)$ (и при $t > 0$):

$$K_0(t) > R_1 + \mu \Phi_0 t.$$

Следовательно,

$$\text{при } t = \frac{R_2 + \varepsilon - R_1}{\mu \Phi_0} = \frac{D}{\mu} \quad K_0\left(\frac{D}{\mu}\right) > R_2 + \varepsilon,$$

т. е. траектория γ_0 за промежуток времени $0 \leq t \leq \frac{D}{\mu}$ пересечет кольцевую область R и выйдет за окружность $x^2 + y^2 = (R_2 + \varepsilon)^2$.

Но согласно теореме, доказанной в первом разделе настоящего параграфа, существует такое $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon, D)$, что при любом заданном

$0 < \mu \leq \mu_0$ и при любых $0 \leq t \leq \frac{D}{\mu}$ изображающая точка

$[x(t), y(t)]$ системы (9.2), двигаясь по траектории γ , не выйдет из ε -окрестности точки $[x_0(t), y_0(t)]$. Следовательно, за промежуток времени $0 \leq t \leq \frac{D}{\mu}$ не только кривая γ_0 , но и траектория γ системы (9.2) пересекут область R и выйдут за ее границу.

Так как кольцевая область R не содержит состояний равновесия системы (9.2) (при достаточно малых μ), то в ней могут быть только такие замкнутые фазовые траектории (предельные циклы) системы

(9.2), которые охватывают окружность $x^2 + y^2 = R_1^2$. Но система (9.2) не может иметь и таких предельных циклов, так как если бы такой цикл существовал, то он пересекался бы с траекторией γ той же системы уравнений (9.2), что невозможно ¹⁾.

Таким образом, мы доказали, что при достаточно малых μ система уравнений (9.2) имеет предельные циклы, близкие к окружностям

¹⁾ Доказательство для случая $\Phi(K) < 0$ при $R_1 \leq K \leq R_2$ полностью аналогично изложенному выше, только в этом случае начальную точку траекторий γ и γ_0 нужно брать на окружности $x^2 + y^2 = R_2^2$.

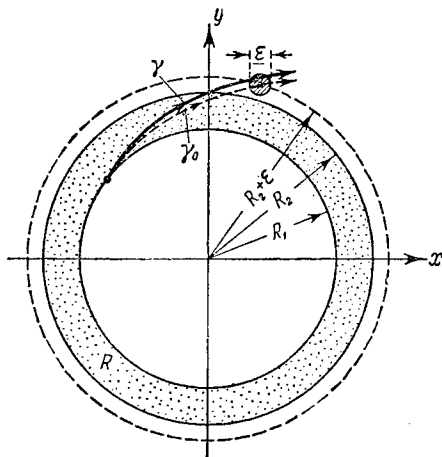


Рис. 472.

$x^2 + y^2 = K_i^2$, где K_i — корни уравнения $\Phi(K) = 0$, и не имеет других предельных циклов¹⁾.

На этом мы закончим изложение обоснования метода Ван-дер-Поля и перейдем к рассмотрению с помощью этого метода некоторых автоколебательных систем.

§ 4. Применение метода Ван-дер-Поля

Рассмотрим при помощи метода Ван-дер-Поля колебания лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки или в цепи анода (рис. 465), пренебрегая, как обычно, анодной реакцией и точечными токами.

Пусть затухание колебательного контура

$$\omega_0 RC \ll 1.$$

Тогда уравнение лампового генератора приводится (см. § 1 настоящей главы) к следующему уравнению, близкому к уравнению гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + x = \mu [-1 + \alpha s(x)] \dot{x}, \quad (9.3)$$

где $x = \frac{u}{u_0}$ (u_0 — некоторый масштаб напряжений), $\mu = \omega_0 RC \ll 1$, $\alpha = \frac{MS_0}{RC}$ — коэффициент возбуждения генератора и $s(x) = \frac{S(E_g + u_0 x)}{S_0}$ — приведенная, безразмерная крутизна характеристики лампы генератора.

Укороченные уравнения (8.11) для этого уравнения, очевидно, запишутся в виде:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K), \quad \frac{d\delta}{dt} = \mu \Psi(K),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(K) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [-1 + \alpha s(K \cos \xi)] K \sin^2 \xi d\xi = \\ &= \frac{K}{\pi} \int_0^{\pi} [-1 + \alpha s(K \cos \xi)] \sin^2 \xi d\xi \end{aligned}$$

¹⁾ Мы доказали это для случая *грубой* системы (9.2), когда все корни уравнения $\Phi(K) = 0$ простые.

в силу четности подинтегральной функции и

$$\Psi(K) = \frac{1}{2\pi K} \int_{-\pi}^{+\pi} [-1 + \alpha s(K \cos \xi)] K \sin \xi \cos \xi d\xi \equiv 0 \quad (9.36)$$

в силу нечетности подинтегральной функции.

Таким образом, при любых характеристиках лампы $\Psi(K) \equiv 0$ и период автоколебаний (с точностью до членов порядка μ^2) совпадает с периодом собственных колебаний колебательного контура генератора (при $R=0$).

1. Ламповый генератор при мягком режиме. Аппроксимируем характеристику лампы полиномом третьей степени:

$$i_a = f(E_g + u) = i_{a0} + S_0 u + S_1 u^2 - S_2 u^3; \quad (9.37)$$

тогда крутизна характеристики

$$S(E_g + u) = \frac{di_a}{du_g} = S_0 + 2S_1 u - 3S_2 u^2.$$

Положим $u = u_0 x$. Выбрав масштаб напряжений u_0 так, чтобы коэффициент при x^2 обратился в единицу: $u_0 = \sqrt{\frac{S_0}{3S_2}}$, мы приведем безразмерную крутизну $s(x)$ к виду:

$$s(x) = 1 + \beta_1 x - x^2,$$

где

$$\beta_1 = \frac{2S_1}{S} u_0.$$

Если характеристика лампы симметричная и аппроксимируется

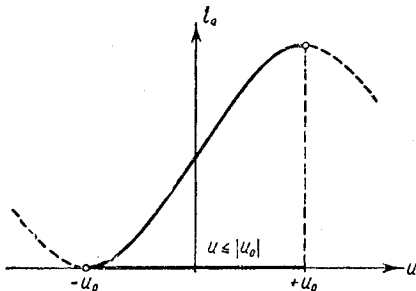


Рис. 473.

полиномом $i_a = i_{a0} + S_0 u - S_2 u^3$ (рис. 473), то напряжение u_0 имеет физический смысл «напряжения насыщения» характеристики: при $u = \pm u_0$ $S_0 = 0$. Очевидно, такой полином аппроксимирует свойства реальной характеристики только при $|u| \leq u_0$, т. е. при $|x| \leq 1$.

Итак, при аппроксимации характеристики лампы полиномом (9.37) уравнение лампового генератора (при $\omega_0 RC \ll 1$) приводится к следующему уравнению:

$$\ddot{x} + x = \mu [-1 + \alpha (1 + \beta_1 x - x^2)] \dot{x}, \quad (9.38)$$

¹⁾ Крутизна характеристики в состоянии равновесия $S_0 > 0$; мы будем полагать также, что и $S_2 > 0$. Последнее обеспечит уменьшение крутизны $S(E_g + u)$ при возрастании $|u|$ (когда $|u|$ достаточно велико), являющееся характерным для реальных ламп.

для которого в согласии с (9.11) и (9.12) укороченные уравнения в полярных переменных Ван-дер-Поля K, ϑ запишутся в виде ¹⁾:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \frac{K}{2} \left[\alpha - 1 - \alpha \frac{K^2}{4} \right], \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0. \quad (9.39)$$

Радиусы предельных циклов на плоскости x, y (в нулевом приближении) даются уравнением

$$\Phi(K) \equiv \frac{K}{2} \left[\alpha - 1 - \alpha \frac{K^2}{4} \right] = 0. \quad (9.40)$$

Здесь возможны два случая. Если $\alpha < 1$, т. е. $MS_0 < RC$ (условия самовозбуждения генератора не выполнены), то уравнение (9.40) имеет единственный действительный корень $K=0$, соответствующий состоянию равновесия $(0, 0)$ лампового генератора. Это состояние равновесия устойчиво, так как при $\alpha < 1$

$$\Phi'(0) = \frac{\alpha - 1}{2} < 0.$$

Все остальные траектории, как нетрудно видеть, суть спирали, асимптотически приближающиеся к состоянию равновесия в начале координат при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, при $\alpha < 1$ мы имеем на фазовой плоскости x, y картину, характерную для затухающих колебаний (рис. 474, а), — при любых начальных условиях колебания в генераторе затухают и устанавливается равновесное состояние.

При $\alpha > 1$ (т. е. при $MS_0 > RC$), когда условие самовозбуждения генератора выполняется, уравнение (9.40) имеет два интересных для нас корня:

$$K = 0 \text{ и } K = 2\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} = K_0.$$

¹⁾ Функция $\Phi(K)$ — правая часть первого укороченного уравнения — может быть получена усреднением по ξ функции

$$[-1 + \alpha(1 + \beta_1 K \cos \xi - K^2 \cos^2 \xi)] K \sin^2 \xi,$$

т. е.

$$\Phi(K) = K [(\alpha - 1) \overline{\sin^2 \xi} + \alpha \beta_1 \overline{K \cos \xi \sin^2 \xi} - \alpha K^2 \overline{\cos^2 \xi \sin^2 \xi}]$$

(здесь и ниже чертой сверху будут обозначаться средние значения по ξ соответствующих функций).

Так как

$$\overline{\sin^2 \xi} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\cos \xi \sin^2 \xi} = \overline{\sin \xi \cos^2 \xi} = 0, \quad \overline{\cos^2 \xi \sin^2 \xi} = \frac{1}{4} \overline{\sin^2 2\xi} = \frac{1}{8},$$

то

$$\Phi(K) = \frac{K}{2} \left[\alpha - 1 - \frac{\alpha}{4} K^2 \right].$$

Первый из них соответствует неустойчивому состоянию равновесия (0, 0), так как теперь

$$\Phi'(0) = \frac{\alpha - 1}{2} > 0.$$

Второй корень соответствует предельному циклу радиуса

$$K_0 = 2 \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} = 2 \sqrt{\frac{MS_0 - RC}{MS_0}}, \quad (9.41)$$

и притом устойчивому, так как

$$\Phi'(K_0) = -\frac{\alpha K_0^2}{4} < 0.$$

Остальные траектории разбиваются на два класса: на траектории

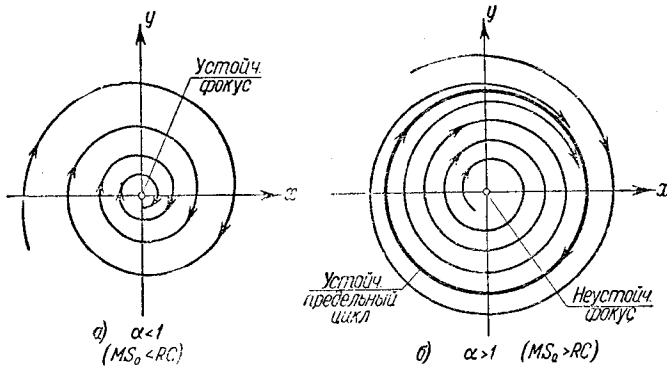


Рис. 474.

наматывающиеся снаружи на предельный цикл при $t \rightarrow +\infty$ и уходящие в бесконечность при $t \rightarrow -\infty$, и на траектории, наматывающиеся изнутри на предельный цикл при $t \rightarrow +\infty$ и стремящиеся к состоянию равновесия при $t \rightarrow -\infty$. Мы имеем картину, характерную для простейшей автоколебательной системы, работающей в *мягком* режиме (рис. 474, б), — при любых начальных условиях изображающая точка асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближается к устойчивому предельному циклу, что соответствует установлению в генераторе периодических, близких к синусоидальным, колебаний (автоколебаний).

Амплитуда автоколебаний дается радиусом предельного цикла K_0 и в размерных единицах, очевидно, равна

$$U_0 = u_0 K_0 = 2 \sqrt{\frac{MS_0 - RC}{3MS_0}};$$

период автоколебаний (с точностью до членов порядка μ^2) равен 2π (в безразмерных единицах), поскольку $\Psi(K) \equiv 0$, или в обычных единицах

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Если, начиная с некоторого значения параметра $\alpha > 1$, мы будем его непрерывно уменьшать (например, уменьшая коэффициент обратной связи M), то радиус предельного цикла будет также непрерывно уменьшаться, стремясь к нулю при $\alpha \rightarrow 1$. При $\alpha = 1$ предельный цикл исчезнет, сольется с неустойчивым фокусом, передав фокусу свою устойчивость; мы видим, что $\alpha = 1$ является бифуркационным значением параметра α ¹⁾. Если изменять α непрерывно от значения $\alpha < 1$ до значения $\alpha > 1$, то при переходе α через $\alpha = 1$ возникнут автоколебания, амплитуда которых, начиная с нуля, будет непрерывно увеличиваться²⁾. При обратном изменении α амплитуда колебаний постепенно и непрерывно уменьшается, доходит до нуля, автоколебания исчезают и генератор начинает вести себя как затухающий осциллятор (рис. 475). Такой характер возникновения колебаний носит название *мягкого возникновения автоколебаний* (в данном случае при изменении параметра α) в отличие от жесткого возникновения автоколебаний, когда сразу возникают колебания конечной амплитуды, несмотря на то, что мы непрерывно и медленно меняем параметр.



Рис. 475.

Найдем теперь, пользуясь укороченными уравнениями, приближенные аналитические выражения, дающие процессы установления колебаний (мы будем полагать, что $\alpha > 1$). Интегрируя уравнения (9.39), находим³⁾:

$$K = \frac{K_0}{\sqrt{1 + Ce^{-\mu(\alpha-1)t}}}, \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$$

¹⁾ Теория бифуркации для рассматриваемого случая в общем виде дана в § 10 этой главы.

²⁾ При этом предполагается, что изменения параметра совершаются достаточно медленно.

³⁾ Первое из уравнений (9.39) подстановкой $z = K^{-2}$ приводится к линейному уравнению:

$$\frac{dz}{dt} + \mu(\alpha - 1)z = \frac{\mu\alpha}{4},$$

откуда

$$K^{-2} = K_0^{-2} + Ce^{-\mu(\alpha-1)t}.$$

(здесь C — произвольная постоянная, определяемая начальным значением K , например при $t = 0$; нетрудно видеть, что $-1 < C \leq +\infty$). Отсюда после перехода к переменным x, y получим¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{K_0 \cos(t + \vartheta_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-\mu(\alpha-1)t}}}, \\ y(t) &= -\frac{K_0 \sin(t + \vartheta_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-\mu(\alpha-1)t}}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.42)$$

Можно сказать, что это — приближенное выражение общего интеграла уравнений (9.38), так как здесь две произвольные постоянные: C и ϑ_0 (заметим, что $C = 0$ соответствует предельному циклу и $C = \infty$ — состоянию равновесия). Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство: выражение (9.37), принятое нами для характеристики, содержало квадратичный член, который, однако, совершенно не входит в выражение нулевого приближения общего решения (его влияние будет сказываться только в следующих приближениях). Это — весьма общее положение, относящееся не только к квадратичному, но и к любым четным членам характеристики. Если мы аппроксимируем характеристику в виде любого многочлена, четные члены не оказывают никакого влияния на нулевое приближение. Происходит это вследствие того, что разложение четных степеней синусов и косинусов содержит только синусы и косинусы четных кратных углов, и поэтому в их разложении не содержится основной (резонансной) частоты.

2. Ламповый генератор при аппроксимации характеристики лампы полиномом пятой степени. Рассмотрим снова тот же ламповый генератор, но возьмем другое, более точное аппроксимирующее выражение для характеристики лампы, а именно положим:

$$i_a = i_{a0} + S_0 u + S_1 u^2 + S_2 u^3 + S_3 u^4 - S_4 u^5. \quad (9.43)$$

Тогда для крутизны характеристики имеем:

$$S(E_g + u) = \frac{di_a}{du} = S_0 + 2S_1 u + 3S_2 u^2 + 4S_3 u^3 - 5S_4 u^4 \text{ } ^2).$$

Положив $u = u_0 x$, где $u_0 = \sqrt[4]{\frac{S_0}{5S_4}}$, получим для приведенной кру-

¹⁾ Очевидно, автоколебания устанавливаются тем медленнее, чем меньше $\mu(\alpha - 1) = \omega_0(MS_0 - RC)$, т. е. чем ближе генератор к порогу самовозбуждения.

²⁾ $S_0, S_4 > 0$, знаки остальных коэффициентов могут быть любыми. Условие $S_4 > 0$ обеспечивает уменьшение крутизны S при увеличении $|u|$ (при достаточно больших $|u|$), что, как мы увидим ниже, необходимо для существования устойчивых автоколебаний. Коэффициенты $i_{a0}, S_0, S_1, S_2, S_3$ и S_4 при заданной характеристике лампы, очевидно, зависят от сеточного смещения E_g .

тизны:

$$s(x) = \frac{S(E_g + u_0 x)}{S_0} = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 - x^4, \quad (9.43)$$

что даст возможность записать уравнение лампового генератора в виде

$$\ddot{x} + x = \mu [-1 + \alpha (1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 - x^4)] \dot{x}. \quad (9.44)$$

Согласно (9.11) и (9.12) укороченные уравнения записываются в форме:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \Phi(K), \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (9.45)$$

где

$$\Phi(K) = \frac{\alpha K}{2} \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} + \frac{\beta K^2}{4} - \frac{K^4}{8} \right]^2.$$

Уравнение $\Phi(K) = 0$ всегда имеет корень $K = 0$. Это означает, что начало координат всегда является состоянием равновесия. Так как

$$\Phi'(0) = \frac{\alpha - 1}{2},$$

то это состояние равновесия устойчиво при $\alpha < 1$ и неустойчиво при $\alpha > 1$ (при $MS_0 > RC$, когда генератор самовозбуждается). Остальные корни уравнения $\Phi(K) = 0$, отличные от нуля и являющиеся радиусами предельных циклов, очевидно, являются корнями биквадратного уравнения:

$$\frac{K^4}{8} - \frac{\beta K^2}{4} - \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 0, \quad (9.46)$$

которое не может иметь более двух положительных корней.

$$1) \beta_1 = \frac{2S_1 u_0}{S_0}, \quad \beta_2 = \frac{3S_2 u_0^2}{S_0} \quad \text{и} \quad \beta_3 = \frac{4S_3 u_0^3}{S_0}.$$

$$2) \Phi(K) = K \left[(\alpha - 1) \overline{\sin^2 \xi} + \alpha \beta_1 K \overline{\cos \xi \sin^2 \xi} + \right. \\ \left. + \alpha \beta_2 K^2 \overline{\cos^2 \xi \sin^2 \xi} + \alpha \beta_3 K^3 \overline{\cos^3 \xi \sin^2 \xi} - \alpha K^4 \overline{\cos^4 \xi \sin^2 \xi} \right],$$

откуда, заметив, что $\overline{\sin^2 \xi} = \frac{1}{2}$, $\overline{\cos \xi \sin^2 \xi} = \overline{\sin \xi \cos^2 \xi} = 0$,

$$\overline{\cos^2 \xi \sin^2 \xi} = \frac{1}{8}, \quad \overline{\cos^3 \xi \sin^2 \xi} = \overline{\sin^3 \xi \cos^2 \xi} = 0,$$

$$\overline{\cos^4 \xi \sin^2 \xi} = \overline{\sin^4 \xi \cos^2 \xi} = \frac{1}{2} \left[\overline{\cos^4 \xi \sin^2 \xi} + \overline{\sin^4 \xi \cos^2 \xi} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \overline{\cos^2 \xi \sin^2 \xi} = \frac{1}{16},$$

получим (9.45).

Для графического решения этого уравнения построим диаграмму (рис. 476), на которой по оси абсцисс будем откладывать $\gamma = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$, а по оси ординат $\rho = K_i^2$ (квадраты радиусов предельных циклов). На этой диаграмме кривая, определяемая уравнением (9.46):

$$\gamma = \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{K_1^2}{8} - \frac{\beta K_2^2}{4} = \frac{\rho^2}{8} - \frac{\beta \rho}{4}, \quad (9.46a)$$

как нетрудно видеть, является параболой с осью, параллельной оси γ . В зависимости от знака коэффициента β (или, что то же самое, от знака коэффициента S_2 в выражении (9.43)), мы имеем два случая.

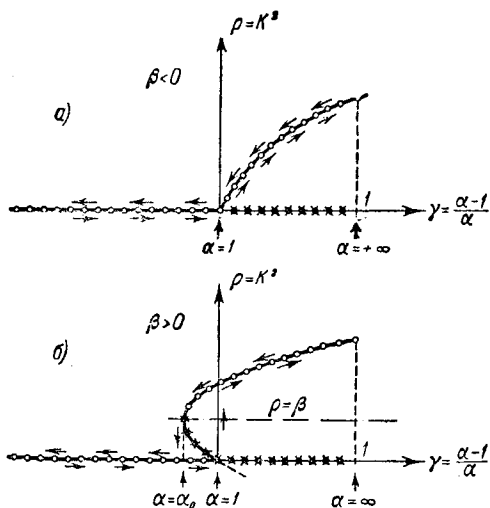


Рис. 476.

Если $\beta < 0$ (рис. 476, а), то γ является монотонно возрастающей функцией ρ (при $\rho > 0$), и уравнение (9.46) не имеет положительных корней при $\gamma < 0$ (т. е. при $\alpha < 1$) и имеет единственный положительный корень K_1 при $\gamma > 0$ (при $\alpha > 1$). Если же $\beta > 0$ (рис. 476, б), то парабола (9.46а) пересекает ось ρ в двух точках: в точке $\rho = 0$ и в точке $\rho = 2\beta$; в точке, которой $\rho = \beta$, $\gamma = -\frac{\beta^2}{8}$, парабола имеет вертикальную касательную и вся парабола расположена справа от

этой касательной. Следовательно, при $\beta > 0$ уравнение (9.46) не имеет положительных корней при $\gamma < -\frac{\beta^2}{8}$ (т. е. при $\alpha < \alpha_0 = \frac{1}{1 + \beta^2/8}$), имеет два положительных корня K_1 и K_2 при $-\frac{\beta^2}{8} < \gamma < 0$ (при $\alpha_0 < \alpha < 1$) и, наконец, один положительный корень при $\gamma > 0$ (при $\alpha > 1$).

Так как для корней K_i уравнения (9.46)

$$\Phi'(K_i) = -\frac{\alpha K_i^2}{2}(K_i^2 - \beta), \quad (9.47)$$

то при $\beta < 0$ единственный предельный цикл, существующий только при $\alpha > 1$, устойчив. Таким образом, при $\beta < 0$ мы получим разбиения фазовой плоскости x, y на траектории, качественно такие

же, как и в случае аппроксимации характеристики лампы полиномом третьей степени (рис. 451), и характерные для *мягкого возникновения колебаний* (при изменении параметра α).

Иная картина получается при $\beta > 0$ (т. е. при $S_2 > 0$). Теперь устойчивым является только тот предельный цикл, радиус которого

$$K_i > \sqrt{\beta},$$

т. е. вся часть параболы (9.46а), расположенная над ее осью $\rho = \beta$ (она отмечена на рис. 476, б светлыми кружками), соответствует

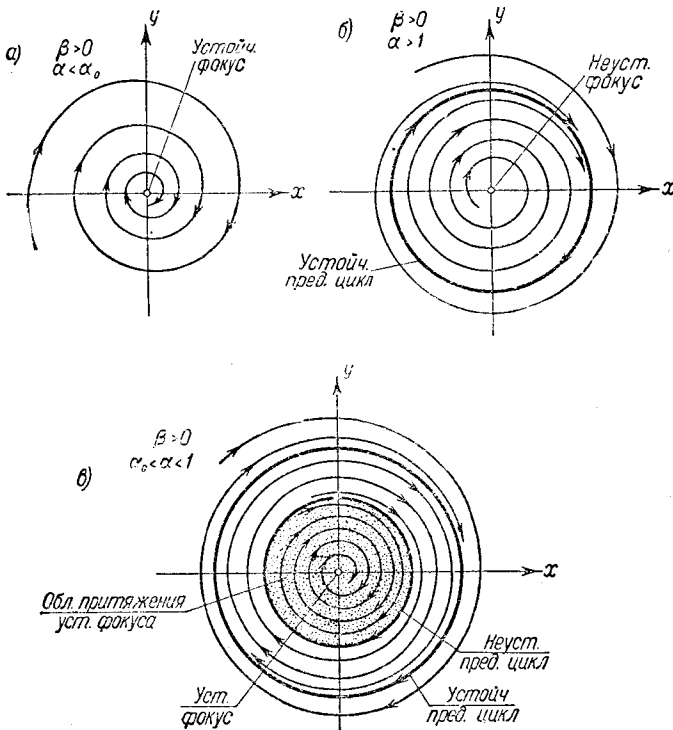


Рис. 477.

устойчивым предельным циклом, а дуга параболы, заключенная между осью параболы и осью абсцисс, — неустойчивым предельным циклом. Таким образом, при $\beta > 0$ мы имеем в зависимости от значения параметра α три качественно различных разбиения фазовой плоскости x, y на траектории (рис. 477).

При $\alpha < \alpha_0$ (рис. 477, а) все траектории асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ приближаются к состоянию равновесия — к устойчивому

фокусу (0, 0), т. е. генератор не возбуждается, любые его колебания являются затухающими. При $\alpha > 1$ (рис. 477, б) состояние равновесия неустойчиво и все траектории стремятся (при $t \rightarrow +\infty$) к единственному устойчивому предельному циклу; в этом случае имеет место *мягкий режим*: автоколебания устанавливаются при любых начальных условиях.

Наконец, при $\alpha_0 < \alpha < 1$ (рис. 477, в) устойчивое состояние равновесия (0, 0) и устойчивый предельный цикл радиуса K_2 разделены неустойчивым предельным циклом радиуса K_1 . Поэтому траектории, начинающиеся внутри неустойчивого предельного цикла, будут идти к состоянию равновесия и только траектории, которые начинаются *вне* неустойчивого предельного цикла, будут наматываться на устойчивый предельный цикл¹⁾.

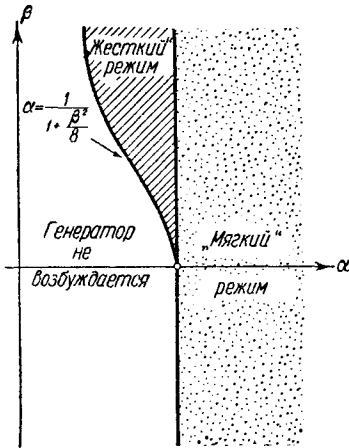


Рис. 478.

Другими словами, в генераторе в зависимости от начальных условий будет устанавливаться или состояние равновесия или автоколебания с амплитудой K_2 , т. е. мы имеем дело с автоколебательной системой в *жестком режиме* (для возникновения автоколебаний в генераторе системе нужно дать некоторый «толчок»: необходимо, чтобы в начальный момент времени $x_0^2 + y_0^2 > K_1^2$).

На рис. 478 изображена плоскость параметров α , β , разбитая на области различных режимов генератора.

Посмотрим теперь, как при $\beta > 0$, когда при $\alpha_0 < \alpha < 1$ имеет место жесткий режим, будет изменяться амплитуда автоколебаний при непрерывных и достаточно медленных изменениях параметра α . Если вначале генератор не возбужден, например α имеет некоторое значение, меньшее α_0 , то при медленном и непрерывном возрастании параметра α изображающая точка системы будет находиться в состоянии равновесия (точнее, вблизи состояния равновесия и тем ближе к нему, чем медленнее изменяется параметр α) до тех пор, пока это состояние равновесия не потеряет устойчивости (при $\alpha = 1$). Но при $\alpha = 1$ уже существует устойчивый предельный цикл конечного радиуса $K = \sqrt{2\beta}$, поэтому при увеличении параметра $\alpha = \frac{MS_0}{RC}$

¹⁾ Неустойчивый предельный цикл не соответствует, конечно, автоколебательным процессам, существующим в генераторе. Он является границей, разделяющей «области притяжения» устойчивого автоколебательного режима и устойчивого состояния равновесия.

в тот момент, когда α станет равным единице, возбуждаются автоколебания конечной амплитуды ¹⁾. При дальнейшем увеличении α амплитуда автоколебаний непрерывно и монотонно растет (при $\alpha \rightarrow +\infty$ $\gamma \rightarrow 1$ и $K \rightarrow \beta^2 + \sqrt{\beta^2 + 8}$).

При убывании параметра α изображающая точка будет находиться на устойчивом предельном цикле (точнее, вблизи него и тем ближе, чем медленнее изменяется α) до тех пор, пока α не станет равным α_0 . При переходе α через это бифуркационное значение устойчивый предельный цикл, слившись с неустойчивым предельным циклом,

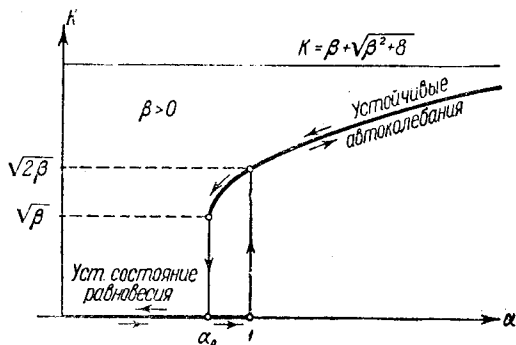


Рис. 479.

пропадает, автоколебания срываются (при амплитуде, равной $\sqrt{\beta}$) и система переходит в состояние равновесия.

Мы видим, что возникновение и исчезновение автоколебаний происходят, в отличие от случая мягкого установления (при $\beta < 0$), при разных значениях коэффициента возбуждения генератора $\alpha = \frac{MS_0}{RC}$ (при $\alpha = 1$ и при $\alpha = \alpha_0$), причем автоколебания появляются и прекращаются с различными и в обоих случаях конечными амплитудами. В общем получается типичная картина так называемого *жесткого установления* автоколебаний (рис. 479)²⁾.

¹⁾ Конечно, автоколебания устанавливаются не мгновенно. Скорость их установления тем меньше, чем меньше μ .

²⁾ Мы употребляем термины «мягкий» и «жесткий» режимы в двух смыслах. Во-первых, мы говорим о мягком или жестком *режиме* автоколебательной системы при *заданных значениях ее параметров* в зависимости от того, при всех или не при всех начальных условиях устанавливается автоколебательный процесс. Во-вторых, мы говорим о мягком или жестком *возбуждении* (установлении) автоколебаний в зависимости от характера изменения амплитуды автоколебаний при медленном и непрерывном *изменении* того или иного *параметра* системы. Ясно, что для жесткого возникновения автоколебаний необходимо, чтобы при некоторых значениях этого параметра система находилась в жестком режиме.

Таким образом, аппроксимируя характеристику лампы полиномом пятой степени, мы в зависимости от знака коэффициента S_2 получим или мягкое (при $S_2 < 0$) или жесткое (при $S_2 > 0$) возникновение автоколебаний в генераторе (при изменении его параметра α). Так как

$$S_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 S}{du_g^2} \right]_{u_g = E_g},$$

то интервалы сеточных смещений E_g , в которых имеют место соответственно мягкое и жесткое возбуждения, можно определить следующим образом. Построим по заданной аппроксимированной характеристике $i_a = f(u_g)$ (рис. 480) кривую зависимости крутизны харак-

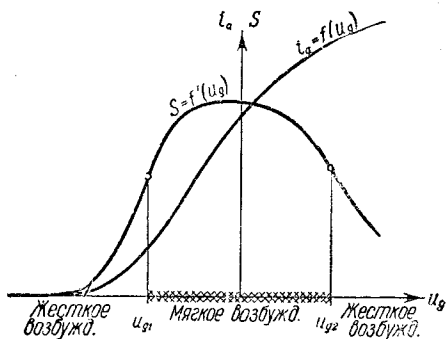


Рис. 480.

теристики $S = f'(u_g)$ от u_g и отметим на этой кривой точки перегиба u_{g1} и u_{g2} . Тогда при $u_{g1} < E_g < u_{g2}$ $\left(\frac{d^2 S}{du_g^2} \right)_{u_g = E_g} < 0$, и при этих сеточных смещениях будем иметь мягкое возбуждение автоколебаний. Наоборот, вне этого интервала (при $E_g < u_{g1}$ или при $E_g > u_{g2}$) $\left(\frac{d^2 S}{du_g^2} \right)_{u_g = E_g} > 0$, и в генераторе будет жесткое возбуждение колебаний.

Заметим в заключение, что уравнения (9.45) можно проинтегрировать подобно тому, как мы это сделали в случае аппроксимации характеристики лампы полиномом третьей степени, и получить решения, количественно характеризующие процессы установления. К вопросу о мягком и жестком возникновении автоколебаний в ламповом генераторе (при изменении его параметров) мы еще вернемся в дальнейшем (в § 10 настоящей главы) в связи с теорией бифуркаций автоколебательных систем.

3. Автоколебания лампового генератора с двухзвенной RC-цепочкой. Приведем уравнения колебаний лампового генератора с двухзвенной RC-цепочкой (рис. 481, а):

$$C \frac{dv}{dt} = \frac{u - E_g}{R}, \quad \frac{E_a - (u + v)}{R_a} = i(u) + C \frac{dv}{dt} + C_a \frac{d(u + v)}{dt}$$

(см. также § 12 гл. V и § 5 гл. VIII) исключением v к одному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$R_a R_g C C_a \frac{d^2 u}{dt^2} + R_g C \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) + R_a S(u) \right] \frac{du}{dt} + u = E_g$$

или после введения новых, безразмерных переменных

$$t_{\text{нов}} = \frac{t}{\sqrt{R_a R_g C C_a}} \quad \text{и} \quad x = \frac{u - E_g}{u_0}$$

(u_0 — некоторый масштаб напряжения) к уравнению вида:

$$\dot{x} + x = -\sqrt{\frac{R_g C}{R_a C_a}} \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) + R_a S(E_g + u_0 x) \right] x, \quad (9.48)$$

где $S(u) = \frac{di}{du}$ — крутизна характеристики ламповой группы $i = i(u)$. Так как характеристика ламповой группы $i = i(u)$ — падающая

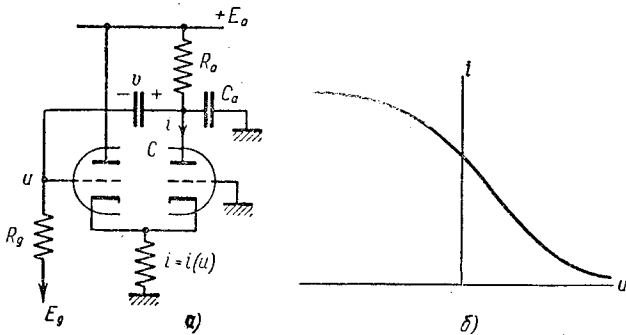


Рис. 481.

рис. 481, б), то $S(u) < 0$ и для самовозбуждения генератора (для неустойчивости единственного состояния равновесия: $x = 0$, $\dot{x} = 0$ или $u = E_g$, $v = E_a - E_g - R_a i(E_g)$) необходимо, чтобы

$$R_a S_0 > 1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right), \quad (9.49)$$

где $S_0 = -S(E_g)$ — абсолютное значение крутизны характеристики ламповой группы в состоянии равновесия.

Пусть это условие выполнено и генератор самовозбуждается. Для определения амплитуды автоколебаний аппроксимируем характеристику ламповой группы $i = i(u)$ полиномом третьей степени. Тогда

$$S(E_g + u_0 x) = -S_0 + S_1 x + S_2 x^2 \quad ^1),$$

¹⁾ При заданном u_0 коэффициенты S_0, S_1, S_2 , имеющие размерность, обратную размерности сопротивления, зависят от E_g . Так как характеристика ламповой группы падающая, то $S_0 > 0$; для того чтобы существовали автоколебания, мы будем полагать, что и $S_2 > 0$.

и уравнение колебаний генератора (9.48) запишется в следующем виде:

$$\ddot{x} + x = \sqrt{\frac{R_g C}{R_a C_a}} \left\{ R_a S_0 - \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right] - R_a S_1 x - R_a S_2 x^2 \right\} \dot{x}.$$

Это уравнение близко к уравнению гармонического осциллятора, а колебания генератора близки к гармоническим только при выполнении условий:

$$R_a S_0 - \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right] \ll 1, \quad R_a |S_1| \ll 1, \quad R_a S_2 \ll 1,$$

т. е. когда генератор близок к порогу самовозбуждения, а нелинейность характеристики мала.

Введем малый параметр

$$\mu = \sqrt{\frac{R_g C}{R_a C_a}} \left\{ R_a S_0 - \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right] \right\}$$

($0 < \mu \ll 1$) и обозначим

$$\sqrt{\frac{R_g C}{R_a C_a}} R_a S_1 = \mu \alpha_1, \quad \sqrt{\frac{R_g C}{R_a C_a}} R_a S_2 = \mu \alpha_2$$

(α_1 и α_2 — величины порядка единицы). Тогда уравнение колебаний генератора с двухзвенной RC -цепочкой приведет к следующему виду, пригодному для применения метода Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + x = \mu [1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2] \dot{x}. \quad (9.50)$$

Укороченными уравнениями для него, очевидно, будут:

$$\frac{dK}{dt} = \mu \frac{K}{2} \left(1 - \frac{\alpha_2 K^2}{4} \right), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

Приравнявая нулю функцию

$$\Phi(K) = \frac{K}{2} \left(1 - \frac{\alpha_2 K^2}{4} \right),$$

получим, что система уравнений (9.50) имеет состояние равновесия ($x=0$, $\dot{x}=0$), соответствующее корню $K=0$, и предельный цикл радиуса

$$K_0 = 2 \sqrt{\frac{1}{\alpha_2}} = 2 \sqrt{\frac{R_a S_0 - \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right]}{R_a S_2}}. \quad (9.51)$$

Состояние равновесия неустойчиво, так как

$$\Phi'(0) = \frac{1}{2} > 0^1),$$

¹⁾ Не следует забывать, что мы рассматриваем случай самовозбуждающегося генератора, когда $R_a S_0 > 1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right)$.

а предельный цикл устойчив, поскольку

$$\Phi'(K_0) = -\frac{\alpha_2}{4} K_0^2 = -1 < 0.$$

Таким образом, будет иметь место мягкий режим: автоколебания, близкие к синусоидальным, с амплитудой K_0 устанавливаются при любых начальных условиях ¹⁾. Их период (в обычных единицах и с точностью до членов порядка μ^2), очевидно, равен

$$T = 2\pi \sqrt{R_a R_g C C_a}.$$

§ 5. Метод Пуанкаре

Мы рассмотрим здесь метод интегрирования нелинейных уравнений, данный Пуанкаре в его работах по небесной механике [184, 185]. Этот метод, несмотря на существенные ограничения, накладываемые и на выбор уравнения и на поставленные задачи, все же охватывает очень многие важные случаи и дает ответ на ряд существенных для практики вопросов.

Мы будем предполагать, что наше нелинейное уравнение (или система уравнений) зависит от некоторого параметра μ и при определенном значении $\mu = \mu_0$ (например, при $\mu = 0$) обращается в уравнение или систему уравнений, решение которых нам хорошо известно, например, в линейное уравнение или систему линейных уравнений.

Мы изучим нелинейное уравнение для значений μ , мало отличающихся от μ_0 . Далее мы будем рассматривать только периодические решения нелинейного уравнения (это ограничение также лежит в существе метода). Для определенности мы предположим, что наша система при $\mu = 0$ обращается в линейную с постоянными коэффициентами. Ход рассуждений является, однако, вполне общим, применимым и при других предположениях.

Итак, мы будем рассматривать систему нелинейных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \mu f_1(x, y, \mu); \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + \mu f_2(x, y, \mu), \quad (9.52)$$

где a, b, c, d и μ — константы; считаем, что μ достаточно мало. Далее будем считать, что f_1 и f_2 являются голоморфными функциями x, y и μ , т. е. что их можно разложить в сходящиеся

¹⁾ Если аппроксимировать характеристику ламповой группы $i = i(u)$ полиномом пятой степени, то получаются как мягкий, так и жесткий режимы возбуждения автоколебаний в зависимости от знака коэффициента при x^2 в выражении для крутизны характеристики.

степенные ряды по x , y , μ (по крайней мере при малых значениях переменных).

Рассматривая нелинейные члены как результат малого искажения линейной системы (получающейся при $\mu = 0$), мы поставим своей задачей изучить, для каких исходных периодических решений линейной системы существуют периодические же (хотя бы и с другим периодом) решения нелинейной системы, обращающиеся в исходные при $\mu = 0$, и при каких условиях (т. е. при каких f_1 и f_2) эти периодические решения нелинейной системы будут устойчивыми.

Рассмотрим сначала случай $\mu = 0$. Уравнения переходят в

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \quad (9.53)$$

Исключение y приводит к уравнению

$$\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x = 0. \quad (9.53a)$$

Необходимая предпосылка дальнейших рассмотрений состоит в том, что полученная линейная система (9.53) или уравнение (9.53a) должна сама иметь периодические решения.

Это значит, что характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

должно иметь чисто мнимые корни, т. е. должно быть

$$(a + d) = 0, \quad \left| \begin{array}{c} a & b \\ c & d \end{array} \right| > 0. \quad (9.54)$$

Тогда

$$\lambda_1 = +j\sqrt{ad - bc}, \quad \lambda_2 = -j\sqrt{ad - bc},$$

или, если ввести обозначение $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \omega_1 = +\sqrt{ad - bc}$, то можно сказать, что решение уравнения (9.53a) имеет вполне определенную частоту ω_1 , определяемую самим уравнением. Фаза же и амплитуда периодического решения не задаются системой и определяются начальными условиями. Произвольность фазы очевидна: время не входит явно в (9.53a), и поэтому начинать отсчет можно с любого момента t_0 (но разность фаз между x и y и отношение амплитуд x и y вполне определены системой: достаточно подставить значение для x во второе из уравнений (9.53)).

Итак, мы убедились, что если выполнены условия (9.54), то наша система (9.53) имеет бесчисленное множество периодических решений, отличающихся одно от другого амплитудой и фазой. Эти решения имеют вид:

$$x = K \cos(\omega_1 t + \chi); \quad y = kK \sin(\omega_1 t + \chi + \chi'),$$

где k и χ' определяются через коэффициенты уравнений (9.53), а K и χ произвольны. В общем виде

$$x = \varphi_0(t, \chi, K); \quad y = \psi_0(t, \chi, K),$$

где φ_0 и ψ_0 — периодические функции t с периодом $\frac{2\pi}{\omega_1}$, χ и K — произвольные постоянные. Такой общий вид будут иметь решения, если при $\mu = 0$ наша система становится нелинейной, но консервативной, соответствующей случаю центра.

Так как отсчет времени можно начинать с произвольного момента, то без всякого ограничения общности можно считать $\chi = 0$, и тогда решение нашей линейной системы может быть написано в виде:

$$x = x_0(t, K) = K \cos \omega_1 t; \quad y = y_0(t, K) = kK \sin(\omega_1 t + \chi'). \quad (9.55)$$

1. Идея метода Пуанкаре. Прежде чем перейти к систематическому изложению теории Пуанкаре, мы приведем вкратце основную идею и одновременно точно сформулируем математическую задачу. Такое введение поможет легче разобраться в дальнейшем изложении. Пусть нам известно решение уравнений (9.52) при $\mu = 0$, т. е., другими словами, решение уравнений (9.53). Пусть это решение будет $x = x_0(t, K)$; $y = y_0(t, K)$. При $t = 0$ имеем: $x = x_0(0, K)$, $y = y_0(0, K)$, где K — «амплитуда». Слово «амплитуда» мы ставим в кавычках, имея в виду, что уравнения, получающиеся при $\mu = 0$, вообще говоря, могут быть и нелинейными, но консервативными. (В дальнейшем, однако, мы будем считать, что при $\mu = 0$ уравнения превращаются в линейные.) Рассмотрим теперь решения уравнений (9.52) при $\mu \neq 0$. Пусть это будут: $x = x(t, \mu, K)$, $y = y(t, \mu, K)$, принимающие значения $x = x_0(0, K) + \beta_1$, $y = y_0(0, K) + \beta_2$ при $t = 0$; β_1 и β_2 — некоторые достаточно малые величины. Пуанкаре ищет эти решения в виде степенных рядов по β_1 , β_2 и μ и доказывает их сходимость при достаточно малых значениях β_1 , β_2 и μ , равномерную внутри любого заданного конечного интервала времени $0 < t < t_1$ (этого доказательства сходимости мы не приводим). Коэффициенты этих степенных рядов суть функции времени. Эти функции можно вычислить, приравнявая коэффициенты при равных степенях β_1 , β_2 и μ в выражениях, получившихся после подстановки в уравнения (9.52) вышеупомянутых степенных рядов. Для определения этих функций получатся линейные уравнения с определенными начальными значениями. Итак, для x и y мы получаем некоторые выражения:

$$x = x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K), \quad y = y(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K). \quad (9.56)$$

Посмотрим теперь, при каких условиях эти решения будут периодическими. Пусть период решений уравнений нулевого приближения (эти уравнения по нашему предположению линейны) будет T . Период решений нелинейных уравнений будет, вообще говоря, другой, но так как мы ищем решения, мало отличающиеся от решений

линейных уравнений, то и период искоемых решений должен быть близок к T . Поэтому мы можем положить, что новый период есть $T + \tau$, где τ — некоторая небольшая «поправка на период». Очевидно, что для того, чтобы решения (9.56) были периодическими с периодом $T + \tau$, нужно, чтобы x и y при $t=0$ и при $t=T + \tau$ имели одинаковые значения. Действительно, если мы получим в момент $t=T + \tau$ те же значения переменных x и y , как и в момент $t=0$, то в силу теоремы Коши и автономности системы с момента $t=T + \tau$ мы получим повторение того, что происходило, начиная с $t=0$, т. е. наши решения действительно будут периодическими с периодом $T + \tau$. Итак, условия периодичности сводятся к соотношениям:

$$\begin{aligned} x(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - x(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0, \\ y(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - y(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0, \end{aligned}$$

которые, ввиду того, что T есть заданная величина, можно переписать так:

$$\Phi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0, \quad \Psi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0. \quad (9.57)$$

Мы получили таким образом два уравнения с тремя неизвестными τ , β_1 , β_2 , но ввиду того, что уравнения автономны и фаза произвольна, мы можем одно из β зафиксировать, например положить β_2 равным нулю. Тогда мы получим одно вполне определенное периодическое решение; после того как это периодическое решение будет найдено, прибавляя к нему произвольную фазу, мы снова восстановим потерянную произвольность.

Так как при $\mu=0$ мы должны получить периодические решения с периодом T , т. е. без поправки на период, то очевидно, что при $\mu=0$ и $\tau=0$ удовлетворяется условие периодичности и функции Φ и Ψ обращаются в нуль. Следовательно, μ есть общий множитель, и уравнения (9.57) можно переписать так:

$$\mu \Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0, \quad \mu \Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0$$

и условия существования периодических решений системы (9.52) будут иметь вид:

$$\Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0, \quad \Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0.$$

Для того чтобы при $\mu=0$ $\beta_1 = \tau = 0$, нужно, чтобы эти уравнения не содержали свободных членов. Приравнявая нулю эти свободные члены, мы получим вполне определенные значения для амплитуды K и первого приближения поправки на частоту $\left(\frac{\tau}{\mu}\right)_{\mu \rightarrow 0}$. Следовательно, в рассматриваемом случае могут существовать периодические решения, но не со всякими значениями K , а только с вполне определенными. В соот-

ветствии с этим одна из основных задач может быть сформулирована следующим образом: при $\mu = 0$ мы имеем бесчисленное множество периодических решений с произвольными амплитудами, но при $\mu \neq 0$ только вблизи некоторых вполне определенных амплитуд сохраняются периодические решения. Требуется найти значения этих амплитуд. При этом для решения вопроса о форме автоколебаний мы часто можем ограничиться линейным приближением, и знание нелинейности нам нужно только для того, чтобы определить величину амплитуды этих колебаний. Из условий для амплитуд, в случае если в уравнение движения входят какие-либо параметры, можно установить условия бифуркации между периодическими решениями, а также между периодическими решениями и положениями равновесия. Вторая часть задачи состоит в определении поправки на период τ . Во многих практически интересных случаях оказывается, что она в первом приближении равна нулю, т. е. что $\left(\frac{\tau}{\mu}\right)_{\mu \rightarrow 0} \rightarrow 0$. Тогда, если все-таки оказывается нужным определить поправку на период, необходимо обратиться к следующим приближениям. Ввиду важности этого вопроса для теории колебаний мы этот вопрос затронем в дальнейшем.

2. Метод Пуанкаре для систем, близких к линейным. Теперь мы переходим к систематическому изложению метода Пуанкаре. Мы рассмотрим одно дифференциальное уравнение второго порядка специального вида, особенно интересное с точки зрения теории колебаний и ее практических применений, а именно, уравнение системы, близкой к гармоническому осциллятору:

$$\ddot{y} + y = \mu f(y, \dot{y}), \quad (9.2)$$

где μ — произвольный положительный параметр, который можно выбрать достаточно малым; $f(y, \dot{y})$ — функция, разлагаемая в ряд по степеням y и \dot{y} . При $\mu = 0$ уравнение (9.2) имеет решение:

$$y = K \cos t. \quad (9.58)$$

Общим решением уравнения (9.2) при $\mu = 0$ будет, конечно, $y = K \cos(t + \delta)$, но вследствие автономности рассматриваемой системы мы можем δ дать вполне определенное значение, в частности положить его равным нулю. Если мы затем найдем близкое к нему решение при $\mu \neq 0$, то в этом решении можно затем снова положить фазу произвольной. Как сказано, не при всех значениях K будут существовать периодические решения уравнения (9.2), близкие к (9.58). Наша задача заключается в том, чтобы найти, при каких значениях K существуют такие периодические решения уравнения (9.2).

Поясним нашу задачу с точки зрения представлений на фазовой плоскости. Так как уравнение (9.2) не зависит явно от времени,

то фазовые траектории образуют систему непересекающихся кривых на плоскости y, \dot{y} . При $\mu = 0$ уравнение (9.2) имеет решение:

$$y = K \cos t = \varphi_0(t), \quad (9.59)$$

где K — произвольная амплитуда (фазу мы не выписали по известным уже соображениям, но также и она остается произвольной). Решения при $\mu = 0$, если рассматривать эти решения на фазовой плоскости y, \dot{y} , представляют собой семейство concentрических окружностей.

Решение (9.59) мы назовем порождающим решением. Для $\mu \neq 0$ мы будем искать такие периодические решения, которые при $\mu \rightarrow 0$ стремились бы к порождающим решениям $y = \varphi_0(t)$. Мы увидим, что не для всех значений K такие периодические решения существуют. Наша задача будет заключаться в том, чтобы найти K тех порождающих решений $\varphi_0(t)$, в области которых возникают периодические решения уравнения (9.2) при $\mu \neq 0$, а также определить изменение периода по сравнению с порождающим решением. Таким образом, с точки зрения фазовой плоскости y, \dot{y} мы можем первую часть нашей задачи сформулировать так: при $\mu = 0$ интегральные кривые представляют собой семейство окружностей; при $\mu \neq 0$ окружности превращаются в спирали, и только некоторые из интегральных кривых остаются замкнутыми, т. е. превращаются в предельные циклы. Требуется определить значение K для тех окружностей, вблизи которых возникают предельные циклы.

Как мы уже упоминали, существует доказательство того, что решения уравнения (9.2) можно представить в виде степенных рядов, составленных по степеням μ , и разностей начальных значений $\beta_1 = y(0) - \varphi_0(0)$ и $\beta_2 = \dot{y}(0) - \dot{\varphi}_0(0)$, абсолютно и равномерно сходящихся для достаточно малых значений μ , β_1 , β_2 на любом заданном конечном промежутке времени $[0, t_1]$. Следовательно, можем написать:

$$y = \varphi_0(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + F\mu^2 + \dots, \quad (9.60)$$

где A, B, C, D, E, F, \dots — какие-то, пока неизвестные, функции времени. Для определения этих функций мы поступим следующим образом. Продифференцировав ряд (9.60) по времени сначала один раз, а затем второй, мы получим выражения для \dot{y} и \ddot{y} также в виде рядов:

$$\dot{y} = \dot{\varphi}_0(t) + \dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dot{D}\beta_1\mu + \dot{E}\beta_2\mu + \dot{F}\mu^2 + \dots, \quad (9.61)$$

$$\ddot{y} = \ddot{\varphi}_0(t) + \ddot{A}\beta_1 + \ddot{B}\beta_2 + \ddot{C}\mu + \ddot{D}\beta_1\mu + \ddot{E}\beta_2\mu + \ddot{F}\mu^2 + \dots \quad (9.62)$$

Так как мы рассматриваем значения y и \dot{y} , близкие соответственно к значениям $\varphi_0(t)$ и $\dot{\varphi}_0(t)$, то функцию $f(y, \dot{y})$ мы можем разложить в ряд Тейлора вблизи значений $\varphi_0(t)$ и $\dot{\varphi}_0(t)$. Применяя

для аргументов y и \dot{y} опять выражения в виде рядов (9.60) и (9.61), мы получим ряд Тейлора для функции $f(y, \dot{y})$ в таком виде:

$$\begin{aligned} f(y, \dot{y}) = & f[\varphi_0(t), \dot{\varphi}_0(t)] + \\ & + f'_y[\varphi_0(t), \dot{\varphi}_0(t)] [A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_{1\mu} + E\beta_{2\mu} + F\mu^2 + \dots] + \\ & + f''_{yy}[\varphi_0, \dot{\varphi}_0] [\dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dots] + \frac{1}{2} f''_{yy}[\varphi_0, \dot{\varphi}_0] [A\beta_1 + B\beta_2 + \\ & + C\mu + \dots]^2 + f''_{yy}[\varphi_0, \dot{\varphi}_0] [A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + \dots] [\dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \\ & + \dot{C}\mu + \dots] + \frac{1}{2} f''_{yy}[\varphi_0, \dot{\varphi}_0] [\dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dots]^2 + \dots \quad (9.63) \end{aligned}$$

Подставляя выражения для y , \dot{y} и $f(y, \dot{y})$ в исходное уравнение (9.2) и приравнявая нулю сумму коэффициентов при членах, подобных относительно β_1 , β_2 и μ , мы получим систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с периодической правой частью. Число этих уравнений зависит от того, до какого порядка малости мы будем вести разложение рядов. Если при разложении и подстановке ограничимся только членами не выше второго порядка малости, то мы получим шесть уравнений, определяющих шесть функций A , B , C , D , E , F :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A} + A &= 0, & \ddot{D} + D &= f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)A + f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)\dot{A}, \\ \ddot{B} + B &= 0, & \ddot{E} + E &= f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)B + f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)\dot{B}, \\ \ddot{C} + C &= f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0), & \ddot{F} + F &= f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)C + f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)\dot{C}. \end{aligned} \right\} \quad (9.64)$$

Кроме уравнений (9.64) мы еще должны знать начальные условия, которым подчиняются функции A , B , C , D , E , F . Сопоставляя выражения

$$\beta_1 = y(0) - \varphi_0(0) \quad \text{и} \quad \beta_2 = \dot{y}(0) - \dot{\varphi}_0(0) \quad (9.65)$$

с выражениями для y и \dot{y} (9.60) и (9.61), мы можем найти значения A , B , C , D , E , F и \dot{A} , \dot{B} , \dot{C} , \dot{D} , \dot{E} , \dot{F} при $t=0$. Мы получим:

$$\left. \begin{aligned} A(0) &= 1, & \dot{A}(0) &= 0, & B(0) &= 0, & \dot{B}(0) &= 1, \\ C(0) &= \dot{C}(0) = D(0) = \dot{D}(0) = E(0) = \\ &= \dot{E}(0) = F(0) = \dot{F}(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.66)$$

Первые два из уравнений (9.64) при начальных условиях (9.66) имеют решения:

$$A = \cos t, \quad B = \sin t.$$

Чтобы найти остальные функции C , D , E , F , определяемые уравнениями (9.64) и начальными условиями (9.66), нужно знать в общем

виде решение уравнения $\ddot{x} + x = \Phi(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x = \dot{x} = 0$ при $t = 0$. Это решение, как известно, имеет вид:

$$x = \int_0^t \Phi(u) \sin(t-u) du, \quad \dot{x} = \int_0^t \Phi(u) \cos(t-u) du.$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= \cos t, & \dot{A}(t) &= -\sin t, \\ B(t) &= \sin t, & \dot{B}(t) &= \cos t, \\ C(t) &= \int_0^t [f] \sin(t-u) du, & \dot{C}(t) &= \int_0^t [f] \cos(t-u) du, \\ D(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \cos u - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin u \right\} \sin(t-u) du, \\ \dot{D}(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \cos u - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin u \right\} \cos(t-u) du, \\ E(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin u + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \cos u \right\} \sin(t-u) du, \\ \dot{E}(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin u + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \cos u \right\} \cos(t-u) du, \\ F(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \dot{C}(u) \right\} \sin(t-u) du, \\ \dot{F}(t) &= \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \dot{C}(u) \right\} \cos(t-u) du. \end{aligned} \right\} (9.67)$$

Здесь и ниже выражения f , $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$, взятые в квадратные скобки, обозначают, что в эти выражения вместо u и \dot{u} подставлены соответственно

$$\varphi_0(u) = K \cos u \quad \text{и} \quad \dot{\varphi}_0(u) = -K \sin u.$$

Так как нам понадобятся значения этих функций при $t = 2\pi^1$,

¹⁾ Напомним, что мы ввели для времени новый масштаб, приняв за единицу времени $\frac{T}{2\pi}$, где T — период собственных колебаний системы. Вследствие этого время у нас стало безразмерным и длительность одного периода колебаний выражается безразмерной величиной 2π .

ТО МЫ ИХ СЕЙЧАС ВЫПИШЕМ:

$$\begin{aligned}
 A(2\pi) &= 1, & \dot{A}(2\pi) &= 0, \\
 B(2\pi) &= 0, & \dot{B}(2\pi) &= 1, \\
 C(2\pi) &= -\int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du, \\
 \dot{C}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du, \\
 D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin 2u + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin^2 u \right\} du, \\
 \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \cos^2 u - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin 2u \right\} du, \\
 E(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ -\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin^2 u - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin 2u \right\} du, \\
 \dot{E}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin 2u + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \cos^2 u \right\} du, \\
 F(2\pi) &= -\int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \dot{C}(u) \right\} \sin u \, du, \\
 \dot{F}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \dot{C}(u) \right\} \cos u \, du.
 \end{aligned} \tag{9.68}$$

Последние выражения для $D(2\pi)$, $\dot{D}(2\pi)$, $E(2\pi)$, $\dot{E}(2\pi)$ можно несколько упростить. Используя тождества:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{K} \frac{d}{du} \{ [f] \cos u \} &= -\frac{[f]}{K} \sin u - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin 2u - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \cos^2 u, \\
 \frac{1}{K} \frac{d}{du} \{ [f] \sin u \} &= \frac{[f]}{K} \cos u - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin^2 u - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] \sin 2u,
 \end{aligned}$$

можно привести их к такому виду:

$$\begin{aligned}
 D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] du - \frac{C(2\pi)}{K}, \\
 \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] du - \frac{\dot{C}(2\pi)}{K}, \\
 E(2\pi) &= -\frac{1}{K} \dot{C}(2\pi), & \dot{E}(2\pi) &= \frac{1}{K} C(2\pi).
 \end{aligned} \tag{9.68a}$$

В частности при $C(2\pi) = 0$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] du, & \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] du - \frac{\dot{C}(2\pi)}{K}, \\ E(2\pi) &= -\frac{1}{K} \dot{C}(2\pi), & \dot{E}(2\pi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.68б)$$

Наконец, если $C(2\pi) = \dot{C}(2\pi) = 0$, то

$$\left. \begin{aligned} D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] du, & \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] d\mu, \\ E(2\pi) &= 0, & \dot{E}(2\pi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.68в)$$

Заметим, что в последних формулах (9.68в) величинам $D(2\pi)$ и $\dot{D}(2\pi)$ можно дать простую интерпретацию: это — постоянные члены в разложении в ряд Фурье функции $\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]$ и соответственно $\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]$, помноженные на 2π . Величины же $C(2\pi)$ и $\dot{C}(2\pi)$ суть коэффициенты при $\sin t$ и $\cos t$ разложения в ряд Фурье функции $f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$, помноженные на 2π . Если функция $f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ есть многочлен, то эти величины можно вычислить непосредственно по тригонометрическим формулам (см. Дополнение III).

Перейдем теперь к отысканию периодических решений среди решений (9.60) уравнения (9.2) при $\mu \neq 0$. Пусть период некоторого периодического решения равен $2\pi + \tau$, где τ — малая поправка на период (при $\mu \rightarrow 0$ $\tau \rightarrow 0$). Тогда, приравнявая $y(2\pi + \tau)$ и $y(2\pi)$ соответственно $y(0) = \varphi_0(0) + \beta_1$ и $\dot{y}(0) = \dot{\varphi}_0(0) + \beta_2$, мы получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} y(2\pi + \tau) - y(0) &\equiv \psi_1(\beta_1, \beta_2, \tau, \mu) = 0, \\ \dot{y}(2\pi + \tau) - \dot{y}(0) &\equiv \psi_2(\beta_1, \beta_2, \tau, \mu) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.69)$$

определяющие это периодическое решение. Это — два уравнения с тремя неизвестными β_1 , β_2 и τ , причем β_1 и β_2 — произвольные постоянные нашей задачи. Нас интересуют периодические решения, но если мы определим какое-нибудь одно периодическое решение, то их будет существовать бесконечное множество, отличающихся друг от друга на произвольную фазу. Поэтому, как уже указывалось, по существу задачи одно из β должно остаться совершенно произвольным. Можно, например, не нарушая общности, одно из них положить равным нулю. Если при этом уравнения (9.69) можно разрешить относительно τ и другого β таким образом, что при $\mu = 0$ $\tau = \beta = 0$, то наша задача решена. Если этого не удастся сделать, то в запасе остается еще один вариант, а именно, положить равным

нулю другое β . Мы сейчас убедимся, что в нашей задаче предположение $\beta_2 = 0$ приводит к положительным результатам. Если бы мы исходили из решения $\varphi_0 = K \sin t$, т. е. полагали, что в порождающем решении $\delta = -\frac{\pi}{2}$ (a не нуль), то пришлось бы воспользоваться вторым вариантом, т. е. положить $\beta_1 = 0$.

Составим уравнения (9.69) сначала в общем виде, не полагая β_2 равным нулю. Для этого мы должны прежде всего составить выражения $y(2\pi + \tau)$ и $\dot{y}(2\pi + \tau)$. Поскольку τ мало по сравнению с 2π , мы можем разложить y и \dot{y} в ряды вблизи значения 2π .

Ограничиваясь членами первого и второго порядка малости, мы получим:

$$\begin{aligned} y(2\pi + \tau) &= y(2\pi) + \tau \dot{y}(2\pi) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{y}(2\pi) + \dots, \\ \dot{y}(2\pi + \tau) &= \dot{y}(2\pi) + \tau \ddot{y}(2\pi) + \frac{\tau^2}{2} \dddot{y}(2\pi) + \dots \end{aligned}$$

Значения $y(2\pi)$, $\dot{y}(2\pi)$, $\ddot{y}(2\pi)$ и т. д. мы можем определить, пользуясь их выражениями при помощи рядов (9.60) — (9.62), подставляя вместо функций A , B , C и т. д. их значения при $t = 2\pi$, т. е. $A(2\pi)$, $B(2\pi)$ и т. д.

Отбрасывая члены более чем второго порядка малости (следует учесть, что порядок малости τ не ниже μ), получим:

$$\begin{aligned} y(2\pi + \tau) &= \varphi_0(2\pi) + A(2\pi)\beta_1 + B(2\pi)\beta_2 + C(2\pi)\mu + D(2\pi)\beta_1\mu + \\ &+ E(2\pi)\beta_2\mu + F(2\pi)\mu^2 + \tau\dot{\varphi}_0(2\pi) + \tau\dot{A}(2\pi)\beta_1 + \tau\dot{B}(2\pi)\beta_2 + \\ &+ \tau\dot{C}(2\pi)\mu + \frac{\tau^2}{2}\ddot{\varphi}_0(2\pi) + \dots, \\ \dot{y}(2\pi + \tau) &= \dot{\varphi}_0(2\pi) + \dot{A}(2\pi)\beta_1 + \dot{B}(2\pi)\beta_2 + \dot{C}(2\pi)\mu + \dot{D}(2\pi)\beta_1\mu + \\ &+ \dot{E}(2\pi)\beta_2\mu + \dot{F}(2\pi)\mu^2 + \tau\ddot{\varphi}_0(2\pi) + \tau\dot{A}(2\pi)\beta_1 + \tau\dot{B}(2\pi)\beta_2 + \\ &+ \tau\dot{C}(2\pi)\mu + \frac{\tau^2}{2}\ddot{\ddot{\varphi}}_0(2\pi) + \dots \end{aligned}$$

Подставляя в эти выражения значения φ_0 , A и B и их производных при $t = 2\pi$ и составляя уравнения (9.69), получим:

$$\left. \begin{aligned} y(2\pi + \tau) - y(0) &= -K\frac{\tau^2}{2} + \tau\beta_2 + C(2\pi)\mu + \dot{C}(2\pi)\tau\mu + \\ &+ D(2\pi)\beta_1\mu + E(2\pi)\beta_2\mu + F(2\pi)\mu^2 = 0, \\ \dot{y}(2\pi + \tau) - \dot{y}(0) &= -K\tau - \tau\beta_1 + \dot{C}(2\pi)\mu + \dot{C}(2\pi)\tau\mu + \\ &+ \dot{D}(2\pi)\beta_1\mu + \dot{E}(2\pi)\beta_2\mu + \dot{F}(2\pi)\mu^2 = 0. \end{aligned} \right\} (9.70)$$

Из этих двух уравнений можно определить как функции параметра μ поправку на период τ и одно из двух β (в нашем случае β_1), если

другому β (β_2) приписано какое-либо определенное значение (например, 0). Подставим разложения этих величин в степенные ряды¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \mu\tau_1 + \mu^2\tau_2 + \dots, \\ \beta_1 &= \mu\beta_{11} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.71)$$

в уравнения (9.70) и приравняем нулю суммы членов порядка μ :

$$C(2\pi) = 0, \quad -K\tau_1 + \dot{C}(2\pi) = 0.$$

Первое из этих уравнений

$$C(2\pi) = - \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du = 0, \quad (9.72)$$

или по (9.12)

$$\Phi(K) = 0,$$

определяет радиусы K_i тех окружностей, вблизи которых при малых μ имеются предельные циклы. Второе уравнение определяет поправку на период первого приближения:

$$\tau_1 = \frac{\dot{C}(2\pi)}{K_i} = \frac{1}{K_i} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du, \quad (9.73)$$

или по (9.12)

$$\tau_1 = -2\pi\Psi(K_i).$$

Заметим, что приравнивание нулю $C(2\pi)$ эквивалентно приравниванию нулю коэффициента Фурье при $\sin t$ в разложении функции $f(K \cos t, -K \sin t)$.

Приравнивая нулю суммы членов порядка μ^2 в уравнениях (9.70), получим уравнения²⁾:

$$\left. \begin{aligned} K \frac{\tau_1^2}{2} + D(2\pi)\beta_{11} + F(2\pi) &= 0, \\ -K\tau_2 + \dot{C}(2\pi)\tau_1 + [\dot{D}(2\pi) - \tau_1]\beta_{11} + \dot{F}(2\pi) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.74)$$

которые определяют β_{11} и поправку на период второго порядка τ_2 , если только $D(2\pi) \neq 0$.

¹⁾ В разложениях τ и β_1 в ряды по степеням μ свободные члены должны отсутствовать, так как $\tau \rightarrow 0$ и $\beta_1 \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$. Если задано $\beta_2 \neq 0$, то оно должно быть величиной порядка μ .

²⁾ Нетрудно видеть, что из этих уравнений β_2 выпадает, так как коэффициенты при β_2

$$\tau_1 + E(2\pi) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{E}(2\pi) = 0,$$

поскольку K является корнем уравнения (9.72).

Рассмотрим более подробно интересный с точки зрения практических приложений случай:

$$\dot{C}(2\pi) = 0,$$

когда $\tau_1 = 0$ и поправка на период τ является, вообще говоря, величиной порядка μ^2 . В этом частном случае уравнения (9.74) записываются в виде:

$$\begin{aligned} D(2\pi)\beta_{11} + F(2\pi) &= 0, \\ -K\tau_2 + \dot{D}(2\pi)\beta_{11} + F(2\pi) &= 0 \end{aligned}$$

и дают (при $D(2\pi) \neq 0$):

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} &= -\frac{F(2\pi)}{D(2\pi)}, \\ \tau_2 &= \frac{D(2\pi)\dot{F}(2\pi) - \dot{D}(2\pi)F(2\pi)}{D(2\pi)K}. \end{aligned} \right\} \quad (9.75)$$

Подставляя найденные нами функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $\beta_1 = \beta_{11}\mu + \dots$ в выражение (9.60) для y и возвращаясь снова к произвольному началу отсчета времени (для чего достаточно заменить t на $t + \delta$), мы сможем записать решение нашего уравнения (9.2) (с точностью до величин порядка μ) в виде:

$$\begin{aligned} y = K \cos(t + \delta) + \mu \left\{ \int_0^{t+\delta} f[\varphi_0(u), \dot{\varphi}_0(u)] \sin(t + \delta - u) du - \right. \\ \left. - \frac{F(2\pi)}{D(2\pi)} \cos(t + \delta) \right\} + O(\mu^2), \quad (9.76) \end{aligned}$$

где K — корень уравнения (9.72).

Сделаем одно замечание по поводу полученного приближенного выражения (9.76) для решения (9.60). Первое приближение (9.76), так же как и нулевое приближение (9.59), имеет период 2π , в то время как решение (9.59) должно иметь период, несколько отличный от 2π (и равный $2\pi + \mu^2\tau_2 + \dots$). Последнее обеспечивается тем, что выражение (9.60) есть разложение по степеням μ такого ряда Фурье, у которого не только «амплитуда», но и период зависят от μ .

Действительно, рассмотрим ряд Фурье

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(\mu) \cos k\omega(\mu)t + B_k(\mu) \sin k\omega(\mu)t]$$

и разложим его в ряд по степеням μ ; разложение это имеет вид:

$$\begin{aligned} y = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(0) \cos k\omega(0)t + B_k(0) \sin k\omega(0)t] + \\ + \mu \sum_{k=0}^{\infty} [A'_k(0) \cos k\omega(0)t + B'_k(0) \sin k\omega(0)t - \\ - A_k(0)\omega'(0)kt \sin k\omega(0)t + B_k(0)\omega'(0)kt \cos k\omega(0)t] + \mu^2 \sum \dots \end{aligned}$$

Несмотря на то, что тригонометрические функции входят только с периодом $\frac{2\pi}{\omega(0)}$, y есть периодическая функция с периодом, не равным $\frac{2\pi}{\omega(0)}$, если $\mu \neq 0$. Это изменение периода получается вследствие того, что в разложение входят вековые члены, т. е. члены, содержащие t в нетригонометрическом виде. Подобным же образом и в решении (9.76), начиная со следующего приближения, начнут появляться вековые члены, которые не нарушат периодичности функции y , а лишь немного изменят ее период ¹⁾. Можно написать полученное периодическое решение и без вековых членов, если писать сразу все тригонометрические функции с правильными периодами, для чего нужно в аргументы всех тригонометрических функций ввести поправку на частоту. Вследствие малости ее можно считать равной поправке на период, деленной на 2π и взятой с обратным знаком. После этого решение принимает вид:

$$y = K \cos \left[\left(1 - \frac{\tau_2 \mu^2}{2\pi} + \dots \right) t + \sigma \right] + \\ + \mu \left\{ \int_0^t \left\{ f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \sin \left[\left(1 - \frac{\tau_2 \mu^2}{2\pi} + \dots \right) t + \delta - u \right] du - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{F(2\pi)}{D(2\pi)} \cos \left[\left(1 - \frac{\tau_2 \mu^2}{2\pi} + \dots \right) t + \delta \right] \right\} + \dots \right. \quad (9.77)$$

Наконец, заметим, что в силу общей теории (см. гл. V, § 8) условие устойчивости рассматриваемого периодического решения $y(t)$ имеет вид:

$$\int_0^{2\pi} f'_y [y(t), \dot{y}(t)] dt < 0$$

или, ограничиваясь первым членом разложения $y(t)$ по μ :

$$2\pi \Phi'(K_i) = \int_0^{2\pi} f'_y [\varphi_0(t), \dot{\varphi}_0(t)] dt < 0. \quad (9.78)$$

Выражению, стоящему в правой части последнего неравенства,

¹⁾ Напомним, что мы рассматриваем случай $\dot{C}(2\pi) = 0$, когда функция $C(t)$ является периодической с периодом 2π .

Если же $\dot{C}(2\pi) \neq 0$, то, несмотря на условие $C(2\pi) = 0$, функция $C(t)$ не будет периодической и уже в первом приближении для y (в члене $\mu C(t)$) появятся вековые члены, не нарушающие периодичности функции $y(t)$, но изменяющие ее период на величину порядка μ .

нетрудно дать простую интерпретацию: это постоянный член (умноженный на 2π) в разложении в ряд Фурье функции

$$f'_j(K_i \cos t, -K_i \sin t),$$

где K_i — соответствующий корень уравнения (9.72).

§ 6. Применение метода Пуанкаре

1. Ламповый генератор с мягким режимом. Для иллюстрации метода Пуанкаре мы исследуем уравнение, к которому приводит рассмотрение обыкновенного лампового генератора (рис. 465) при мягком установлении автоколебаний. Как мы убедились, в этом случае можно ограничиться кубической характеристикой лампы (9.37). Для разнообразия мы не будем считать сейчас малым затухание колебательного контура $\omega_0 RC$ (как и раньше, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$). Тогда уравнение колебаний генератора

$$\ddot{x} + x = \{ \omega_0(MS_0 - RC) + 2\omega_0 MS_1 u_0 x - 3\omega_0 MS_2 u_0^2 x^2 \} \dot{x},$$

где $x = \frac{u}{u_0}$ (u_0 — некоторый масштаб напряжения) и точкой сверху обозначено дифференцирование по безразмерному времени $t_{нов} = \omega_0 t_{ст}$, близко к уравнению гармонического осциллятора только при выполнении условий

$$\omega_0 |MS_0 - RC| \ll 1, \quad 2\omega_0 M |S_1| u_0 \ll 1 \quad \text{и} \quad 3\omega_0 MS_2 u_0^2 \ll 1,$$

т. е. вблизи границы самовозбуждения генератора и при малой нелинейности характеристики лампы.

Обозначив

$$\omega_0(MS_0 - RC) = \mu\alpha', \quad 2\omega_0 MS_1 u_0 = \mu\beta'$$

и

$$3\omega_0 MS_2 u_0^2 = \mu\gamma', \quad (9.79)$$

где μ — малый параметр ($0 < \mu \ll 1$), а α' , β' и γ' — величины порядка единицы, мы приведем уравнение колебаний генератора к следующему виду:

$$\ddot{x} + x = \mu(\alpha' + \beta'x - \gamma'x^2)\dot{x}. \quad (9.80)$$

Это уравнение как раз такого типа, для которого нами был развит метод Пуанкаре. Поэтому мы дальше можем действовать по шаблону. В нулевом приближении периодические решения уравнения (9.80) имеют вид:

$$\varphi_0(t) = K \cos t, \quad \dot{\varphi}_0(t) = -K \sin t, \quad (9.81)$$

причем K определяется из уравнения

$$C(2\pi) = - \int_0^{2\pi} (\alpha' + \beta' K \cos u - \gamma' K^2 \cos^2 u) (-K \sin u) \sin u \, du = \\ = \pi K \left(\alpha' - \frac{\gamma'}{4} K^2 \right) = 0,$$

т. е.

$$K^2 = 4 \frac{\alpha'}{\gamma'}. \quad (9.81a)$$

Легко убедиться, что $\dot{C}(2\pi) = 0$, т. е. что в первом приближении нет поправки на период автоколебаний. Далее,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\beta' - 2\gamma'x) \dot{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \dot{\alpha}' + \beta'x - \gamma'x^2$$

и, следовательно,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = (\beta' - 2\gamma'K \cos u) (-K \sin u), \\ \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] = \alpha' + \beta'K \cos u - \gamma'K^2 \cos^2 u.$$

Интегрируя эти выражения в пределах от 0 до 2π , имеем (см. (9.68в)):

$$D(2\pi) = 2\pi \left(\alpha' - \frac{\gamma'}{2} K^2 \right) = -2\pi\alpha', \quad \dot{D}(2\pi) = 0,$$

поэтому поправка на период (см. (9.75))

$$\tau = \mu^2 \tau_2 = \frac{\dot{F}(2\pi)}{K}.$$

Для нахождения поправки на период, а также для написания периодического решения с точностью до членов порядка μ нам нужно вычислить функцию $C(t)$ и выражения $F(2\pi)$ и $\dot{F}(2\pi)$. Эти вычисления дают:

$$C(t) = \int_0^t (\alpha' + \beta' K \cos u - \gamma' K^2 \cos^2 u) (-K \sin u) \sin(t-u) \, du = \\ = -\frac{\beta' K^2}{6} (2 \sin t - \sin 2t) + \frac{\gamma' K^3}{32} (3 \sin t - \sin 3t),$$

$$\dot{F}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] \dot{C}(u) \right\} \cos u \, du = \\ = \frac{\pi}{12} \beta'^2 K^3 + \frac{\pi}{128} \gamma'^2 K^5 = \pi \alpha' K \left(\frac{\beta'^2}{3\gamma'} + \frac{\alpha'}{8} \right),$$

а

$$F(2\pi) = - \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] \dot{C}(u) \right\} \sin u \, du = 0,$$

так как выражение под интегралом — функция периодическая (с периодом 2π) и нечетная.

Таким образом, поправка на период

$$\tau = \mu^2 \pi \alpha' \left(\frac{\beta'^2}{3\gamma'} + \frac{\alpha'}{8} \right)^1, \quad (9.82)$$

а периодическое решение в виде (9.76), т. е. без вековых членов, с точностью до членов порядка μ^2 может быть записано так ²⁾:

$$\begin{aligned} x(t) = & 2 \sqrt{\frac{\alpha'}{\gamma'}} \cos \left[\left(1 - \frac{\tau}{2\pi} \right) t + \delta \right] + \\ & + \mu \left\{ \left(-\frac{4\alpha'\beta'}{3\gamma'} + \frac{3\alpha'}{4} \sqrt{\frac{\alpha'}{\gamma'}} \right) \sin \left[\left(1 - \frac{\tau}{2\pi} \right) t + \delta \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2\alpha'\beta'}{3\gamma'} \sin 2 \left[\left(1 - \frac{\tau}{2\pi} \right) t + \delta \right] - \frac{\alpha'}{4} \sqrt{\frac{\alpha'}{\gamma'}} \sin 3 \left[\left(1 - \frac{\tau}{2\pi} \right) t + \delta \right] \right\} + \\ & + O(\mu^2). \quad (9.82a) \end{aligned}$$

В большинстве случаев для практики главный интерес представляет только выражение для амплитуды (9.81a). Второе приближение мы вычислили для того, чтобы, с одной стороны, показать, как производить вычисление, с другой — чтобы подчеркнуть, что решение принципиально содержит вышние гармоники, которыми при линейном рассмотрении всегда пренебрегают.

Выясним теперь, устойчиво ли найденное нами периодическое движение. Чтобы движение было устойчивым, нужно, чтобы постоянный коэффициент Фурье функции, которая является множителем при \dot{x} в правой части уравнения (9.80) и в которую подставлено синусоидальное решение, оказался меньше нуля, т. е. чтобы $\alpha' - \frac{3\gamma'K^2}{2} < 0$ или $K^2 > \frac{2\alpha'}{3\gamma'}$. Но, как мы нашли, квадрат амплитуды нулевого приближения $K^2 = \frac{4\alpha'}{3\gamma'}$. Следовательно, условие устойчивости всегда выполняется (так как $\alpha' > 0$, $\gamma' > 0$), и значит, найденное нами периодическое решение всегда устойчиво.

2. Значение малого параметра μ . Дифференциальное уравнение всякой динамической системы содержит ряд параметров, имеющих определенный физический смысл (например, L , R , C , S и т. д.).

¹⁾ В частности, для симметричной кубической характеристики, для которой $\beta = 0$, поправка на период

$$\tau = \frac{\pi \mu^2 \alpha'^2}{8} = \frac{\pi}{8} \left[\omega_0 (MS_0 - RC) \right]^2.$$

²⁾ Как видим, четный член характеристики не играет роли, лишь пока мы ограничиваемся нулевым приближением, но входит как в поправку на период, так и в первое приближение (9.82a) для периодического решения $x(t)$.

Обычно бывает целесообразно вместо этих параметров ввести новые, так называемые «безразмерные» параметры (точно так же часто бывает целесообразно вводить безразмерные переменные), представляющие собой некоторые определенные комбинации «размерных» физических параметров. Желательно для упрощения математического исследования свести число этих безразмерных параметров к наименьшему числу независимых. Если один из этих параметров может быть выбран таким образом, чтобы при значении параметра, равном нулю, система превращалась в линейный гармонический осциллятор, то этот параметр может служить с математической точки зрения тем малым параметром μ , по которому производятся разложения в ряды в теории Пуанкаре и малостью которого приходится распорядиться при обосновании метода Ван-дер-Поля.

Пуанкаре доказал, что ряды, представляющие периодическое решение, в его теории обладают отличным от нуля радиусом сходимости μ_0 , так что для всех $\mu \leq \mu_0$ эти ряды сходятся абсолютно и равномерно. Это значит, что в таком случае для всех $\mu \leq \mu_0$ существует периодическое решение, представляемое суммами соответствующих рядов¹⁾.

Однако о характере решения, например о близости решения к синусоидальному, эта сходимостъ еще ничего не говорит; на основании теории Пуанкаре мы можем лишь утверждать, что в этом случае всегда можно выбрать столь малое μ , чтобы решение было сколь угодно близко к синусоидальному.

Обычно при рассмотрении физических задач мы пользуемся нулевым приближением ($x = K \cos t$, $\Phi(K) = 0$); иногда кроме нулевого приближения нас интересует так называемая первая поправка на частоту (пропорциональная μ или μ^2) и выражение второго члена (пропорционального μ) в разложении периодического решения. Поэтому нас в первую очередь интересуют такие вопросы: насколько амплитуда нулевого приближения отличается (при заданном μ) от амплитуды основного тона точного решения, насколько первая поправка на частоту отличается от истинной поправки на частоту, насколько истинная несинусоидальность (определенная, например, при помощи так называемого клирфактора) отличается от несинусоидальности, присущей первому приближению, и т. д. Если мы при этом зададимся, исходя из физической сущности задачи, допустимой погрешностью (например, выраженной в процентах), то это даст нам теоретическую возможность определить верхнюю границу для μ , исходя из соображений о физической пригодности нулевого приближения, первого приближения и т. д. Так как, с другой стороны, μ есть определенная комбинация физических параметров, то в реаль-

¹⁾ Заметим, что расхожимостъ рядов по μ для $\mu > \mu_0$ еще, вообще говоря, ничего не говорит о несуществовании периодического решения для $\mu > \mu_0$.

ной системе μ имеет совершенно определенное значение, и мы не можем по произволу считать его сколь угодно малым, не теряя физического смысла задачи. Пусть, например, по самому физическому смыслу поставленной задачи $\mu \leq \mu_1$. Тогда возникают следующие два вопроса: во-первых, будет ли μ_1 таким значением, при котором сходятся ряды Пуанкаре, и, во-вторых, будет ли μ_1 таким значением, при котором нулевое или первое приближение дает требуемую точность. При отрицательном ответе на первый вопрос мы должны отказаться от использования метода Пуанкаре; при отрицательном ответе на второй вопрос, если на первый вопрос ответ положительный, возникает необходимость пользоваться дальнейшими приближениями. Однако ответы на эти вопросы при современном положении теории затруднительны и перед теорией стоит задача выработать для ответа на них достаточно эффективные методы ¹⁾.

§ 7. Ламповый генератор в случае ломаных характеристик

При рассмотрении лампового генератора мы представляли характеристики лампы в виде полиномов. Наряду с полиномами бывает целесообразно представлять характеристики и в виде иных аналитических выражений. Рассмотрение таких более общих типов характеристик интересно уже потому, что можно проверить, какие полученные свойства автоколебательных систем специфичны для полиномов и какие специфичны для существа задачи.

Далее, в наших рассуждениях мы предполагали, что $f(x, \dot{x})$ — голоморфная функция x и \dot{x} . Однако иногда бывает весьма выгодно пользоваться так называемыми ломаными характеристиками (например, характеристика твердого трения, Γ -характеристика генератора и т. д.), которые, очевидно, суть функции не голоморфные. В этом случае целесообразно поступать так: рассматривать не голоморфную функцию как предел некоторой голоморфной; провести вычисление всех нужных интегралов (определяющих амплитуды, устойчивость и т. д.), перейдя к пределу (что обычно упрощает выкладки), а результаты истолковать не для ломаных характеристик (что, вообще говоря, было бы неверно), а для близких к ним голоморфных.

¹⁾ Грубая оценка μ_0 может быть сделана по Пуанкаре. Однако эта оценка весьма груба и часто не имеет практического значения.

Физики иногда, для грубой оценки погрешности нулевого приближения, поступают следующим нестрогим образом: вычисляют численную величину выражения $\mu \max \{ f(K_i \cos u, -K_i \sin u) \}$ для значений параметров, соответствующих физическим условиям задачи, и для интересующей нас амплитуды нулевого приближения K_i . Если эта величина равна, например, $1/10$, то считают, что амплитуда нулевого приближения дает амплитуду основного тона с точностью порядка 10% и т. д. Легко видеть, что и эта оценка для многих случаев не имеет практического значения. Аналогичный прием см. у А. Н. Крылова [77], стр. 44.

1. Ламповый генератор в случае Γ -характеристики. Рассмотрим в качестве первого примера автоколебания лампового генератора с колебательным контуром в цепи анода при аппроксимации характеристики лампы Γ -характеристикой (см. также § 3 гл. III). Уравнение колебаний в таком генераторе (3.15) после введения безразмерных переменных

$$x = \frac{i}{i_0} \quad \text{и} \quad t_{\text{нов}} = \omega_0 t_{\text{ст}}$$

(i_0 — некоторый масштаб тока, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) приводится к виду:

$$\ddot{x} + x = -\omega_0 RC \dot{x} + \begin{cases} \frac{I_s}{i_0} & \text{при } \dot{x} > 0, \\ 0 & \text{при } \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Оно близко к уравнению гармонического осциллятора при выполнении двух условий:

$$\omega_0 RC \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{I_s}{i_0} \ll 1,$$

т. е. при малом затухании колебательного контура и при малом токе насыщения I_s характеристики лампы (мы будем считать ниже, что эти условия выполняются). Введем $\mu = \omega_0 RC \ll 1$ и $\beta = \frac{I_s}{\omega_0 RC i_0}$ — величину порядка единицы. Тогда уравнение колебаний приводится к виду:

$$\ddot{x} + x = \mu [-\dot{x} + \beta \cdot 1(\dot{x})]^1, \quad (9.83)$$

пригодному для применения метода малого параметра (например, метода Ван-дер-Поля).

Так как

$$\begin{aligned} \Phi(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [+K \sin u + \beta \cdot 1(-K \sin u)] \sin u \, du = \\ &= -\frac{K}{2} - \beta \int_{\pi}^{2\pi} \sin u \, du = -\frac{K}{2} + \frac{\beta}{\pi}, \end{aligned}$$

а

$$\Psi(K) = -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} [K \sin u + \beta \cdot 1(-K \sin u)] \cos u \, du \equiv 0,$$

¹⁾ Как и раньше,

$$1(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z > 0, \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

то в нулевом приближении амплитуда автоколебаний

$$K = \frac{2\beta}{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{I_s}{\omega_0 RC}, \quad (9.84)$$

а период автоколебаний равен $2\pi^1$). Эти автоколебания устойчивы, так как

$$\Phi'(K) = -\frac{1}{2} < 0.$$

2. Ламповый генератор в случае ломаных характеристик без насыщения. Рассмотрим теперь, также с помощью метода малого параметра, автоколебания генератора, характеристика лампы которого не имеет насыщения и изображается в виде двух прямолинейных отрезков: горизонтального и наклонного (рис. 482), т. е. крутизна характеристики

$$S(u_g) = \begin{cases} S & \text{при } u_g > u_{g0}, \\ 0 & \text{при } u_g < u_{g0} \end{cases}$$

(u_{g0} — напряжение запирания лампы). Как мы видели в § 2 гл. VIII, в случае такой ограниченной с одной стороны характеристики при известных условиях возможны устойчивые автоколебания.

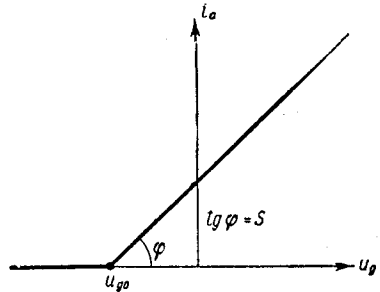


Рис. 482.

Ламповый генератор (например, с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 465, а)) при такой кусочно-линейной характеристике лампы близок к гармоническому осциллятору только при малом затухании колебательного контура и при слабой обратной связи. Уравнение для напряжения на конденсаторе («безразмерного») будет иметь вид (см. § 1 настоящей главы):

$$\ddot{x} + x = \mu [-1 + \alpha s(x)] \dot{x}, \quad (9.3)$$

¹⁾ В обычных единицах период равен $2\pi\sqrt{LC}$, а амплитуда колебаний тока в колебательном контуре

$$I = I_0 K = \frac{2}{\pi} \frac{I_s}{\omega_0 RC}$$

в полном согласии с результатами § 3 гл. III (для случая $\mu = \omega_0 RC \ll 1$).

где

$$x = \frac{u}{u_0} = \frac{u_g - E_g}{u_0} \quad (u_0 \text{ — некоторый масштаб напряжения}),$$

$$\mu = \omega_0 RC \quad (0 < \mu \ll 1),$$

$$\alpha = \frac{MS}{RC} \quad (\alpha \text{ является величиной порядка единицы}),$$

$$s(x) = \frac{S(E_g + u_0 x)}{S} = 1(x - b) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > b, \\ 0 & \text{при } x < b, \end{cases}$$

$b = \frac{u_{g0} - E_g}{u_0}$ — приведенное напряжение запираания лампы и дифференцирование ведется по безразмерному времени $t' = \omega_0 t$ ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$).

Очевидно, при $b > 0$, т. е. при $E_g < u_{g0}$, самовозбуждения нет,

а при $b < 0$ (при $E_g > u_{g0}$) $\begin{cases} \text{самовозбуждения нет, если } \alpha < 1; \\ \text{самовозбуждение есть, если } \alpha > 1. \end{cases}$

В качестве периодического решения (в нулевом приближении) можно взять:

$$x = \varphi_0(t) = K \cos t.$$

K мы будем считать положительным; так как фаза произвольна, то это не нарушает общности. Амплитуда автоколебаний K определится из условия, что $S(2\pi) = 0$, или иначе

$$\begin{aligned} S(2\pi) &= K \int_0^{2\pi} [-1 + \alpha \cdot 1(K \cos u - b)] \sin^2 u \, du = \\ &= K [-\pi + 2\alpha \int_0^{\xi} \sin^2 u \, du] = 0, \end{aligned} \quad (9.85)$$

где ξ есть то значение u , при котором $K \cos u - b = 0$, т. е.

$$\xi = \arccos \frac{b}{K} \quad (0 < \xi < \pi)^1).$$

Амплитуда автоколебаний K не входит явно в уравнение (9.85), но она не произвольна, а определяется из соотношения

$$K = \frac{b}{\cos \xi}, \quad (9.85a)$$

¹⁾ Только при $-\xi < u < \xi$ $K \cos u - b > 0$ и $1(K \cos u - b) = 1$; ξ существует только при $K \geq |b|$. Так как K положительно, то $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ при $b > 0$ и $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$ при $b < 0$.

где ξ в свою очередь определено уравнением (9.85). Последнее после проведения интегрирования принимает такой вид:

$$-2\pi + \alpha(2\xi - \sin 2\xi) = 0 \quad (9.85б)$$

или

$$\alpha = \frac{2\pi}{2\xi - \sin 2\xi}. \quad (9.85в)$$

Соотношения (9.85а) и (9.85в) дают зависимость амплитуды K от параметра генератора α , выраженную в параметрической форме (через вспомогательный параметр ξ : $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ при $b > 0$ и $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$ при $b < 0$).

Так как знаменатель выражения (9.85в) является монотонно возрастающей функцией ξ ¹⁾, причем $0 < 2\xi - \sin 2\xi < \pi$ при $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ и $\pi < 2\xi - \sin 2\xi < 2\pi$ при $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$, то согласно (9.85в) $\alpha > 2$ при $b > 0$ (т. е. при $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$) и $1 < \alpha < 2$ при $b < 0$, когда $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$. Таким образом, каждое значение параметра α :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &> 2 \text{ при } b > 0, \\ 1 < \alpha < 2 \text{ при } b < 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.86)$$

однозначно определяет ξ (с помощью уравнения (9.85б)) и, следовательно, амплитуду автоколебаний K . Если же неравенства (9.86) не выполнены, то уравнение (9.85б) не имеет решения, а исходное уравнение (9.3) не имеет периодических решений. Итак, только при выполнении условий (9.86) существует предельный цикл, и притом единственный.

Перейдем к исследованию устойчивости найденного периодического решения. Как известно, условие устойчивости заключается в том, чтобы постоянный член Фурье разложения функции

$$f'_x(K \cos t, -K \sin t) = -1 + \alpha \cdot 1(K \cos t - b)$$

был меньше нуля, т. е. чтобы

$$-2\pi + 2\alpha \int_0^{\xi} dt < 0,$$

или, используя (9.85б):

$$2\pi\xi - 2\pi = \sin 2\xi < 0. \quad (9.87)$$

Это условие выполнено при $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$, т. е. при $b < 0$, и не выполнено при $b > 0$, когда $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$.

¹⁾ В самом деле, $\frac{d}{d\xi}(2\xi - \sin 2\xi) = 2(1 - \cos 2\xi) \geq 0$.

Таким образом, при $b < 0$, т. е. при $E_g > u_{g0}$, мы в зависимости от значения параметра $\alpha = \frac{MS}{RC}$ имеем три качественно различных

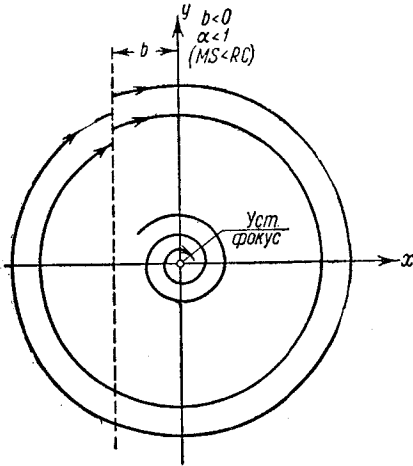


Рис. 483.

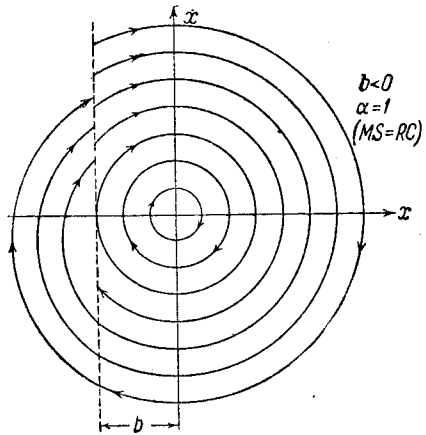


Рис. 484.

разбиения фазовой плоскости на траектории (рис. 483 — 486): при $\alpha < 1$ все траектории идут при $t \rightarrow +\infty$ к устойчивому состоянию

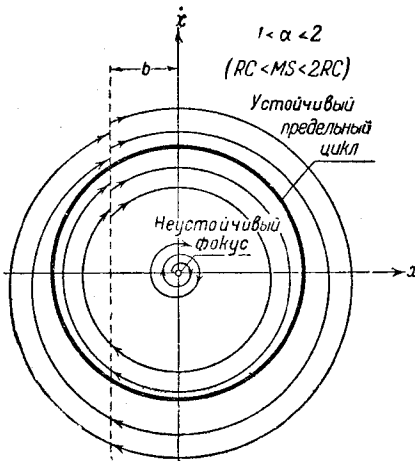


Рис. 485.

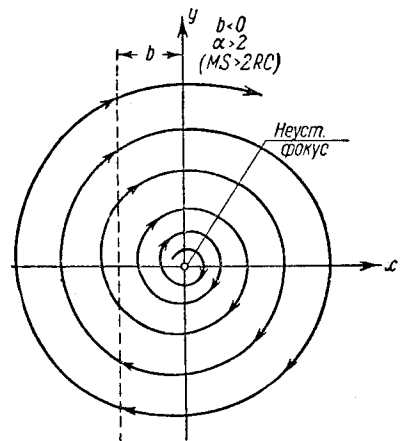


Рис. 486.

равновесия (рис. 483); при $1 < \alpha < 2$ существует устойчивый предельный цикл, к которому при $t \rightarrow +\infty$ стремятся все траектории (рис. 485); радиус этого предельного цикла $K \rightarrow +\infty$ при $\alpha \rightarrow 2$

(т. е. предельный цикл уходит в бесконечность при $\alpha = 2$), и при $\alpha > 2$ все траектории уходят в бесконечность (рис. 486). Минимальная величина K равна $|b|$ и соответствует $\xi = \pi$ (т. е. $\alpha = 1$). Поэтому при переходе α через значение $\alpha = 1$ сразу появляется предельный цикл конечных размеров. В момент появления предельного цикла (т. е. при $\alpha = 1$ или при $MS = RC$) возможны периодические колебания с любыми амплитудами $K < |b|$, т. е.

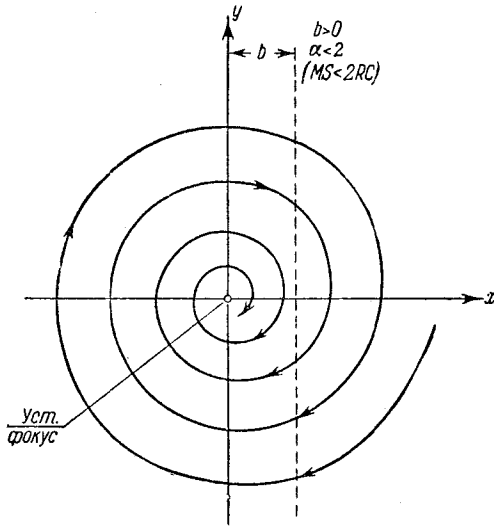


Рис. 487.

в этом случае генератор имеет состояние равновесия типа центра (рис. 484).

При $b > 0$ (при $E_g < u_{g0}$) состояние равновесия всегда устойчиво (устойчивый фокус). К этому состоянию равновесия приближаются все траектории, если $\alpha < 2$ (рис. 487). Если же $\alpha > 2$, то существует неустойчивый предельный цикл (его радиус тем меньше, чем больше α), вне которого траектории уходят в бесконечность (рис. 488) ¹⁾.

Уход фазовых траекторий в бесконечность при $\alpha > 2$ (при $MS > 2RC$), очевидно, означает неудовлетворительность использованной нами идеализированной характеристики лампы (мы пренебрегали

¹⁾ Как нетрудно убедиться, все полученные результаты находятся в полном согласии с результатами § 2 гл. VIII для случая $h_1, h_2 \ll 1$, когда колебания генератора близки к синусоидальным.

сеточными токами и анодной реакцией, которые заведомо играют существенную роль при больших положительных напряжениях на

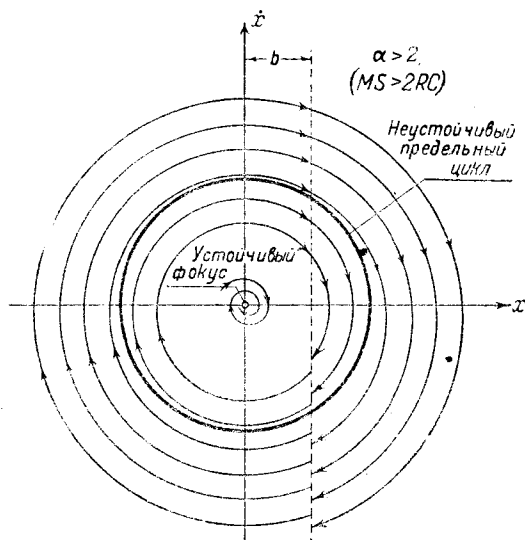


Рис. 488.

сетке лампы, получающихся при достаточно большой обратной связи).

§ 8. Влияние сеточного тока на работу лампового генератора

Рассматривая различные ламповые схемы, мы всегда предполагали, что в цепи сетки лампы ток отсутствует. Это предположение существенно упрощает задачу, и вместе с тем довольно часто можно считать, что оно с достаточной точностью оправдывается на опыте. Однако в других случаях, также имеющих практический интерес, во время работы генератора в цепи сетки течет ток, имеющий значительную величину. Поэтому интересно проследить, какое влияние на работу лампового генератора может оказывать ток в цепи сетки. Однако учет сеточных токов, вообще говоря, очень существенно усложняет задачу, именно, приводит к повышению порядка дифференциального уравнения, описывающего данную ламповую схему. Поэтому, ограничив свою задачу рассмотрением схем, описываемых одним дифференциальным уравнением второго порядка, мы лишены возможности поставить вопрос об учете сеточного тока в общем виде (в частности, в схемах генераторов с автоматическим смещением в цепи сетки). Но в некоторых частных случаях оказывается возможным ввести в рассмотрение сеточный ток, не повышая при этом

порядка уравнений, описывающих систему. Так, например, оказывается возможным учесть влияние сеточного тока в ламповом генераторе с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 489).

При рассмотрении мы будем пренебрегать реакцией анода и сделаем простейшее предположение относительно формы характеристик анодного и сеточного токов. Именно, мы будем считать, что как анодный, так и сеточный токи могут быть заданы в виде полиномов третьей степени от напряжения на сетке u_g .

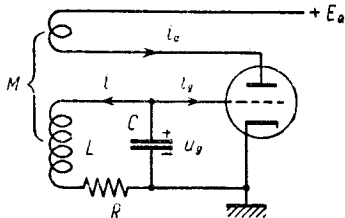


Рис. 489.

Применяя обозначения, приведенные на рис. 489, и пользуясь законами Кирхгофа, получим:

$$C \frac{du_g}{dt} + i + i_g = 0, \quad L \frac{di}{dt} + Ri = u_g - M \frac{di_a}{dt},$$

откуда, исключая ток i в колебательном контуре, имеем:

$$LC \frac{d^2 u_g}{dt^2} + RC \frac{du_g}{dt} - M \frac{di_a}{dt} + L \frac{di_g}{dt} + u_g + Ri_g = 0. \quad (9.88)$$

Очевидно, генератор имеет единственное состояние равновесия $u_g = u_g^0$, определяемое уравнением

$$u_g^0 + Ri_g(u_g^0) = 0$$

(графическое решение этого уравнения приведено на рис. 490).

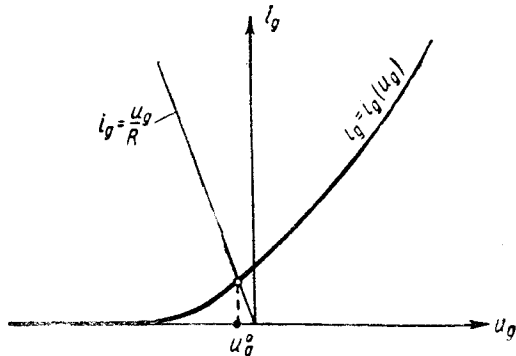


Рис. 490.

Введем переменную составляющую сеточного напряжения

$$u = u_g - u_g^0.$$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} i_a &= i_{a0} + S_1 u + S_2 u^2 - S_3 u^3, \\ i_g &= i_{g0} + p_1 u + p_2 u^2 + p_3 u^3, \end{aligned} \right\} \quad (9.89)$$

тогда уравнение колебаний в генераторе запишется в виде:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left[\frac{R}{L} - \frac{MS_1}{LC} + \frac{p_1}{C} \right] \frac{du}{dt} + \frac{1 + Rp_1}{LC} u - \left[\frac{MS_2}{LC} - \frac{p_2}{C} \right] \frac{d(u^2)}{dt} + \\ + \left[\frac{MS_3}{LC} + \frac{p_3}{C} \right] \frac{d(u^3)}{dt} + \frac{Rp_2}{LC} u^2 + \frac{Rp_3}{LC} u^3 = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\left[\frac{R}{L} - \frac{MS_1}{LC} + \frac{p_1}{C} \right] = -\alpha_1; \quad \frac{MS_2}{LC} - \frac{p_2}{C} = \beta_1; \quad \frac{MS_3}{LC} + \frac{p_3}{C} = \gamma_1; \\ \frac{1}{LC} = \omega_0^2; \quad \omega_0^2 (1 + Rp_1) = \omega_1^2; \quad \frac{Rp_2}{LC} = n; \quad \frac{Rp_3}{LC} = m.$$

При соответствующих предположениях о малости коэффициентов это уравнение легко может быть приведено к виду: $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$ (x — безразмерная переменная и μ — малый параметр), для которого нами были развиты теории Ван-дер-Поля и Пуанкаре и получены общие формулы для амплитуд периодических решений, для поправки к частоте в первом приближении и т. д.

Однако мы сейчас не будем пользоваться этими общими формулами, а покажем, как можно в таких случаях с минимумом вычислений получить нужный результат; само собой разумеется, что тот же результат может быть получен и из общих формул. Введем «расстройку» a^2 , т. е. разность между квадратом действительной частоты Ω^2 и ω_1^2 :

$$a^2 = \Omega^2 - \omega_1^2.$$

Величины α_1 , β_1 , γ_1 , m , n , a^2 мы предположим достаточно малыми (порядка малости μ) по сравнению с частотой ω_0 . Теперь уравнение движения принимает вид:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \Omega^2 u = \alpha_1 \frac{du}{dt} + \beta_1 \frac{d(u^2)}{dt} - \gamma_1 \frac{d(u^3)}{dt} - nu^2 - mu^3 + a^2 u. \quad (9.88a)$$

Чтобы определить амплитуду и поправку на частоту, положим $u = K \sin \Omega t$ и уничтожим в правой части резонансные члены. Получим два уравнения для определения K^2 и a^2 :

$$K\alpha_1\Omega - \frac{\gamma_1 K^3 \Omega^3}{4} = 0, \\ -m \frac{3}{4} K^3 + a^2 K = 0,$$

откуда имеем:

$$K^2 = \frac{\alpha_1}{\frac{3}{4} \gamma_1}, \quad a^2 = \frac{3}{4} K m^2 = \frac{\alpha_1 m}{\gamma_1}. \quad (9.90)$$

Следовательно, частота равна:

$$\Omega^2 = \frac{1}{LC} + \frac{Rp_1}{LC} + \frac{ma_1}{\gamma_1}.$$

Мы видим, что в рассматриваемой схеме при учете сеточного тока получается поправка на частоту уже в первом приближении ¹⁾. Чтобы процесс $u = K \sin \Omega t$ был устойчив, нужно, чтобы постоянный член ряда Фурье, изображающего производную правой части уравнения (9.88a) по u , был меньше нуля, т. е. чтобы постоянный член разложения в ряд Фурье выражения $\alpha_1 + 2\beta_1 u - 3\gamma_1 u^2$ был меньше нуля. Из этого условия получаем:

$$\alpha_1 - \frac{3}{2} \gamma_1 K^2 < 0$$

или

$$K^2 > \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\frac{3}{4} \gamma_1},$$

что в силу (9.90) всегда имеет место; следовательно, найденное нами периодическое движение всегда устойчиво.

Наконец, условие самовозбуждения схемы есть $\alpha_1 > 0$ или

$$\frac{R}{L} + \frac{p_1}{C} - \frac{MS_1}{LC} < 0,$$

т. е. с точки зрения условий самовозбуждения ток в цепи сетки действует как некоторая добавочная нагрузка на контур, ухудшающая условия самовозбуждения.

§ 9. Теория бифуркаций в случае автоколебательной системы, близкой к линейной консервативной системе [89]

Мы рассматриваем по-прежнему автоколебательную систему с одной степенью свободы, близкую к линейной консервативной системе, и полагаем, что поведение этой автоколебательной системы существенно зависит от какого-нибудь параметра, которому мы можем придавать различные фиксированные значения. Уравнение движения системы в таком случае может быть записано в виде:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}; \lambda), \quad (9.91)$$

¹⁾ При нашем рассмотрении мы не считали сопротивление колебательного контура R малой величиной, но считали малыми (порядка μ) коэффициенты α_1 , β_1 , γ_1 , m и n , т. е. полагали, что генератор близок к порогу самовозбуждения, а нелинейности характеристик анодного и сеточного токов малы.

Если же считать малым также и сопротивление контура R ($\omega_0 RC$ полагать величиной порядка μ), то поправка на период и при наличии сеточных токов будет величиной порядка μ^2 .

где x — координата системы (например, смещение, напряжение и т. д.), μ — малый параметр, который характеризует степень близости рассматриваемой автоколебательной системы к линейной консервативной системе, λ — тот параметр (например, коэффициент взаимной индукции и т. д.), влиянием изменений которого на рассматриваемую систему мы интересуемся, $f(x, \dot{x}; \lambda)$ — нелинейная функция, определяемая физической природой сопротивлений и устройств, доставляющих энергию системе. Перейдем к исследованию уравнения (9.91), предполагая μ достаточно малым.

Пользуясь методами малого параметра (методом Ван-дер-Поля или методом Пуанкаре), мы показали, что при $\mu \neq 0$, но достаточно малом на плоскости останутся, вообще говоря, только изолированные замкнутые кривые, близкие к окружностям, радиусы которых K определяются уравнением

$$\Phi(K; \lambda) = 0, \quad (9.92)$$

где

$$\Phi(K; \lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u; \lambda) \sin u \, du.$$

Остальные интегральные кривые не будут замкнутыми — это будут спирали, мало отличающиеся от окружностей, если μ достаточно мало. Как мы видели, периодические движения, соответствующие изолированным замкнутым интегральным кривым — предельным циклам Пуанкаре, — будут устойчивы (и орбитно и по Ляпунову), если выполнено неравенство

$$\Phi'_K(K; \lambda) < 0. \quad (9.93)$$

Таким образом, условия (9.92) и (9.93) представляют полную аналогию с условиями, которые мы имели для состояния равновесия консервативной системы (гл. II, § 5), только вместо координат особых точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s$ мы должны рассматривать K_1, K_2, \dots, K_s — амплитуды стационарных движений, к которым относятся как предельные циклы, близкие в этом случае к кругам, так и особая точка $K=0$.

Итак, для зависимости стационарных движений от параметра мы действительно получаем ту же самую картину, которую мы имели в гл. II, § 5 для зависимости состояний равновесия от параметра. Мы здесь получаем снова «линейные ряды», теперь уже не состояний равновесия, а стационарных движений, которые сохраняют свою устойчивость или неустойчивость до слияния с другими линейными рядами, т. е. до точек бифуркации. «Линейные ряды» стационарных движений задаются уравнением (9.92). Их устойчивость может быть определена так же, как и в § 5 гл. II: на плоскости λ, K отмечается область, где $\Phi(K; \lambda) > 0$; тогда линейный

ряд, расположенный *над* этой областью, соответствует устойчивым стационарным движениям, а ряд, расположенный *под* областью $\Phi(K; \lambda) > 0$, — неустойчивым стационарным движениям (периодическим движениям или состояниям равновесия).

Как мы увидим дальше, точки бифуркации имеют важное физическое значение: это те значения параметра, при которых происходят качественные изменения происходящих в системе процессов, например возникновение колебаний, срыв колебаний и т. п.

Стационарные движения, о которых мы сейчас говорили, подобно состояниям равновесия консервативных систем образуют замкнутую систему элементов, между которыми происходит «обмен устойчивостью».

Прежде чем перейти к рассмотрению какого-либо конкретного примера с точки зрения теории бифуркаций, заметим, что в ряде задач исследование зависимости характера движения системы от параметра λ удобно проводить не на плоскости λ, K , а на плоскости λ, ρ , где

$$\rho = K^2$$

— квадрат амплитуды стационарного движения, если вместо функции $\Phi(K; \lambda)$ рассматривать функцию

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\rho; \lambda) &= 2\sqrt{\rho} \Phi(\sqrt{\rho}; \lambda) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{\rho} \cos u, -\sqrt{\rho} \sin u; \lambda) \sqrt{\rho} \sin u \, du; \end{aligned} \quad (9.94)$$

тогда линейные ряды стационарных движений определяются уравнением

$$\bar{\Phi}(\rho; \lambda) = 0, \quad (9.92a)$$

а их устойчивость — условием

$$\bar{\Phi}'_p(\rho; \lambda) < 0^1). \quad (9.93a)$$

§ 10. Применение теории бифуркаций к исследованию режимов лампового генератора [14]

Рассмотрим в виде примера случай мягкого и жесткого возбуждения лампового генератора. Возьмем, чтобы не повторяться, ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода (рис. 465, б; см. стр. 651) при обычных упрощающих предположениях, т. е.

¹⁾ Такое исследование зависимости стационарных движений от параметра λ путем построения «бифуркационной диаграммы» на плоскости λ, ρ целесообразно проводить, в частности, при $f(x, \dot{x}, \lambda) = F(x, \lambda)\dot{x}$ или при $f(x, \dot{x}, \lambda) = F_1(\dot{x}, \lambda)$, где $F(x, \lambda)$, $F_1(\dot{x}, \lambda)$ — полиномы (соответственно по x и \dot{x}).

пренебрегая сеточным током и анодной реакцией. Уравнение тока в колебательном контуре может быть записано в виде:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_a. \quad (9.95)$$

Здесь $i_a = \varphi(u_g)$ — анодный ток, зависящий только от сеточного напряжения $u_g = E_g + u$, где $u = M \frac{di}{dt}$ — э. д. с. взаимоиנדукции.

Характеристику лампы мы аппроксимируем степенным рядом; ограничиваясь — этого будет достаточно для нашей цели — членами до 5-й степени включительно, можно положить (см. § 4 этой главы):

$$i_a = \varphi(E_g + u) = i_{a0} + S_0 u + S_1 u^2 + S_2 u^3 + S_3 u^4 - S_4 u^5 \quad ^1).$$

Введем новые, безразмерные переменные

$$t_{\text{нов}} = \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad x = \frac{M}{\Phi_0} (i - i_{a0}),$$

где Φ_0 — некоторая неизменная для данной схемы величина, имеющая размерность магнитного потока (величина $I_0 = \Phi_0/M$ является масштабом тока). Выбрав за малый параметр $\mu = \omega_0 MS_0$, мы приведем уравнение колебаний (9.95) к требуемому виду:

$$\ddot{x} + x = \mu [\alpha \dot{x} + \beta (\dot{x})^2 + \gamma (\dot{x})^3 + \delta (\dot{x})^4 - \varepsilon (\dot{x})^5], \quad (9.95a)$$

где

$$\alpha = \frac{MS_0 - RC}{MS_0}, \quad \beta = \frac{\omega_0 \Phi_0 S_1}{S_0}, \quad \gamma = \frac{\omega_0^2 \Phi_0^2 S_2}{S_0}, \quad \delta = \frac{\omega_0^3 \Phi_0^3 S_3}{S_0}, \\ \varepsilon = \frac{\omega_0^4 \Phi_0^4 S_4}{S_0}$$

— также безразмерные параметры, но уже не малые, а порядка единицы ²⁾.

В соответствии с (9.92a) и (9.93a) мы можем записать условия для амплитуд и устойчивости (с точностью до положительного множителя) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Phi}(\rho, \lambda) &\equiv (MS_0 - RC)\rho + \frac{3}{4} MS_0 \gamma \rho^3 - \frac{5}{8} MS_0 \varepsilon \rho^5 = 0, \\ \overline{\Phi}'_p(\rho, \lambda) &\equiv (MS_0 - RC) + \frac{3}{2} MS_0 \gamma \rho - \frac{15}{8} MS_0 \varepsilon \rho^3 < 0. \end{aligned} \right\} (9.96)$$

¹⁾ В этом полиноме мы будем считать, как и в § 4 этой главы, что $S_0 > 0$ и что коэффициент при старшем нечетном члене является отрицательным, так как только при выполнении этих условий будут существовать устойчивые автоколебания.

²⁾ Для разнообразия, в отличие от § 4 настоящей главы, мы взяли за зависимую переменную x величину, пропорциональную переменной составляющей силы тока в колебательном контуре, а не переменной составляющей сеточного напряжения. Заметим, что один из коэффициентов β , γ , δ или ε может быть сделан равным любому заданному числу (например, единице) путем выбора масштаба Φ_0 .

Пусть параметром, влиянием изменения которого на рассматриваемую систему мы интересуемся, будет коэффициент взаимной индукции M . Следовательно, нам нужно построить бифуркационные диаграммы M, ρ для мягкого и для жесткого случая возникновения колебаний. Мы ограничимся рассмотрением области $M > 0$, соответствующей нормальному для лампового генератора направлению витков в катушке обратной связи. Не следует также забывать, что физический смысл имеют лишь значения $\rho \geq 0$, так как лишь они соответствуют действительным амплитудам стационарных решений.

Чтобы упростить выкладки, мы будем каждый раз выбирать возможно более простую математическую идеализацию, делая те или иные предположения относительно коэффициентов ряда, представляющего характеристику лампы ¹⁾.

1. Мягкое возникновение колебаний. Как известно, мягкое возникновение колебаний получается при $S_2 < 0$ (см. § 4 этой главы), причем наличие в этом случае члена 5-й степени в выражении для характеристики лампы не приводит к появлению каких-либо новых качественных особенностей в поведении системы. Поэтому, положив $S_2 < 0$, $S_4 = 0$ (т. е. $\gamma < 0$, $\epsilon = 0$), мы сможем, максимально упростив выкладки, отобразить существенные черты мягкого возникновения колебаний. Вводя обозначение: $\frac{3}{4} S_0 \gamma = \frac{3}{4} \omega_0^2 \Phi_0^2 S_2 = -a$ ($a > 0$), запишем $\bar{\Phi}(\rho, M)$ в виде:

$$\bar{\Phi}(\rho, M) = \{MS_0 - RC - aM\rho\} \rho. \quad (9.97)$$

Отсюда видно, что на плоскости M, ρ кривая $\bar{\Phi}(\rho, M) = 0$ распадается на прямую $\rho = 0$ и гиперболу:

$$MS_0 - RC - aM\rho = 0.$$

Выделив на плоскости M, ρ область $\bar{\Phi}(\rho, M) > 0$, мы сможем, пользуясь общими правилами, изложенными в гл. II, § 5, наметить устойчивые (светлые кружки) и неустойчивые (черные кружки) части линейных рядов (рис. 491).

Бифуркационным значением параметра M служит значение $M_1 = \frac{RC}{S_0}$, где пересекаются линейные ряды, соответствующие вышеупомянутым прямой и гиперболе. Прямая устойчива до значения

¹⁾ Мы еще раз обращаем внимание читателя на то, что в выражениях (9.96) входят лишь те коэффициенты ряда, изображающего характеристику, которые стоят при нечетных степенях. Остальные коэффициенты, не влияя, таким образом, в первом приближении на величину амплитуд и на устойчивость стационарных режимов, могут играть существенную роль при действии внешней силы (например, в случае детектирования, резонанса n -го рода).

параметра $M = M_1$, затем после смены устойчивости в точке бифуркационной устойчивой становится гипербола.

Теперь перейдем от бифуркационной диаграммы M, ρ к фазовой плоскости x, \dot{x} и будем исследовать эту фазовую плоскость при различных M . На фазовой плоскости для $M < M_1$ мы имеем только одно устойчивое стационарное состояние — устойчивый фокус (рис. 492). Где бы ни находилась изображающая точка, она, двигаясь по одной из спиралей, в конце концов окажется в ближайшем соседстве с устойчивой особой точкой.

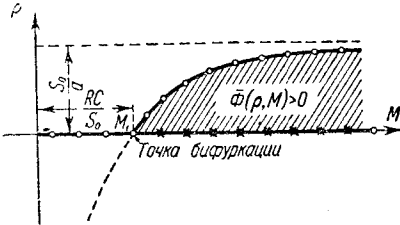


Рис. 491.

При переходе M через бифуркационное значение $M = M_1$ от

особой точки отделяется устойчивый предельный цикл (рис. 493). Изображающая точка, находившаяся раньше в состоянии равновесия, перейдет теперь на предельный цикл, так как при $M > M_1$ состояние равновесия неустойчиво ¹⁾. На физическом языке это значит, что

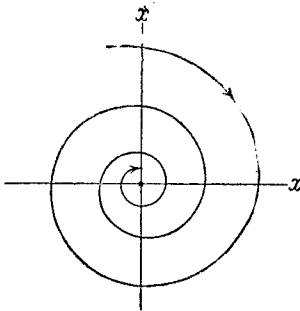


Рис. 492.

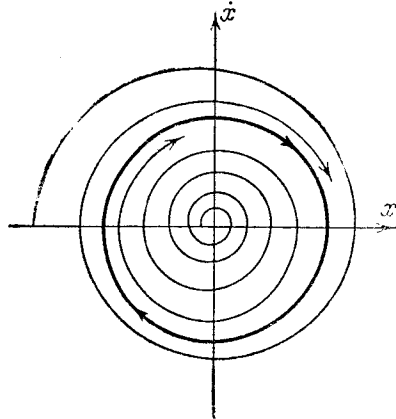


Рис. 493.

в системе происходят колебания и имеет место самовозбуждение. При увеличении M радиус предельного цикла увеличивается и стремится к асимптотическому значению, соответствующему $\rho = \frac{S_0}{a}$.

¹⁾ Мы будем предполагать, что изменения параметра M достаточно медленны. Так как всякое движение в автоколебательных системах приближается к стационарному, то при достаточно медленных изменениях параметра мы можем считать, что изображающая точка находится в окрестности стационарных движений.

При уменьшении M система ведет себя обратимо, предельный цикл сжимается, изображающая точка двигается по предельному циклу и при $M = M_1$, когда предельный цикл сожмется в точку, изображающая точка снова вернется в начало координат, которое в этот момент превращается в устойчивый фокус.

Прибор, измеряющий амплитуду колебаний генератора K , при изменении M покажет плавный («мягкий») переход с постепенно (без скачков) меняющейся амплитудой от состояния покоя к стационарным колебаниям, и обратно (рис. 494).

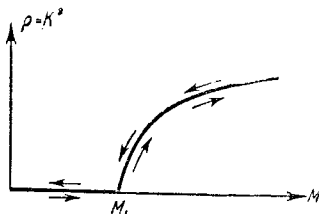


Рис. 494.

2. Жесткое возникновение колебаний. Предположения $S_2 > 0$ и $S_4 > 0$ отображают, как мы уже видели, существенные черты жесткого возникновения колебаний. Вводя обозначения:

$$\frac{3}{4} S_0 \gamma = a \quad (a > 0), \quad \frac{5}{8} S_0 \varepsilon = b \quad (b > 0),$$

получим:

$$\bar{\Phi}(\rho, M) = \{MS_0 - RC + aM\rho - bM\rho^3\} \rho. \quad (9.98)$$

На плоскости M, ρ бифуркационная диаграмма распадается на прямую $\rho = 0$ и кривую третьего порядка

$$MS_0 - RC + aM\rho - bM\rho^3 = 0.$$

На рис. 495 указано примерное расположение этих кривых, указаны области, где $\bar{\Phi}(\rho, M) > 0$, и намечены устойчивые (светлые кружки) и неустойчивые (черные кружки) части линейных рядов.

Для $M > 0$ существуют два бифуркационных значения параметра:

$$M_0 = \frac{RC}{S_0 + \frac{a^2}{4b}} \quad \text{и} \quad M_1 = \frac{RC}{S_0}.$$

M_0 соответствует слиянию двух линейных рядов ¹⁾, M_1 — пересечению двух линейных рядов.

Перейдем теперь к фазовой плоскости. Для $0 < M < M_1$ на нашей фазовой плоскости имеется, так же как и в предыдущем случае, только одно стационарное движение — устойчивый фокус в начале

¹⁾ Соответствующая точка бифуркации на плоскости M, ρ отвечает так называемому «предельному» стационарному движению.

координат (рис. 492). При переходе M через бифуркационное значение параметра M_0 у нас сразу появляется пара предельных циклов, имеющих конечный радиус (рис. 496). Один из этих циклов — больший — устойчивый; меньший — неустойчивый; характер особой точки в начале координат при этом не меняется, она остается устойчивой.

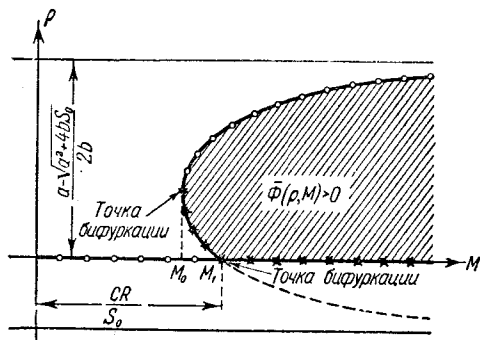


Рис. 495.

При дальнейшем увеличении M устойчивый цикл растет, а неустойчивый уменьшается (рис. 497), и при $M = M_1$ неустойчивый цикл исчезает, слившись с особой точкой, которая при $M = M_1$ становится уже неустойчивой (рис. 498).

Устойчивый цикл при увеличении M монотонно растет, и его радиус асимптотически стремится к значению, соответствующему

$$\rho = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bS_0}}{2b}.$$

Что же отметит прибор, измеряющий амплитуду колебаний генератора K ? Для того, чтобы это выяснить, проследим поведение изображающей точки, находившейся при малых M вблизи состояния равновесия. Очевидно, что изображающая точка будет находиться вблизи состояния равновесия до тех пор, пока это состояние равновесия не сделается неустойчивым, т. е. вплоть до $M = M_1$; то, что при $M = M_0$ появилась пара предельных циклов (из них один устойчивый), это «не касается» нашей изображающей точки, так как устойчивый характер состояния равновесия при этом не изменяется.

При $M > M_1$ особая точка уже неустойчива; изображающая точка «срывается» при переходе M через $M = M_1$, затем двигается так, как ей «ведут» интегральные кривые, и, значит, приходит к устойчивому предельному циклу и уже не покидает его при дальнейшем

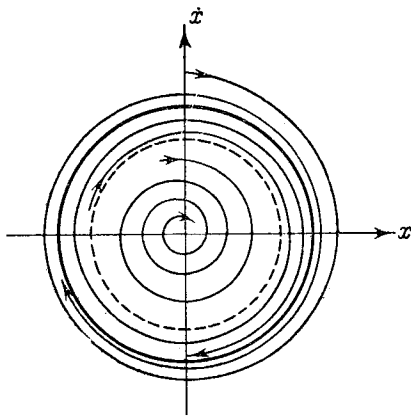


Рис. 496.

увеличении M . При уменьшении параметра M получится иная картина. При уменьшении M изображающая точка останется на предельном цикле вплоть до $M = M_0$, когда устойчивый цикл сольется с неустойчивым и исчезнет; изображающая точка не будет реагировать на то

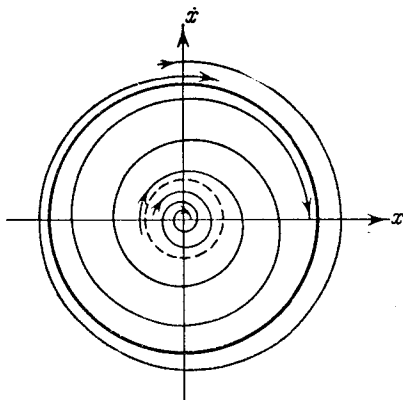


Рис. 497.

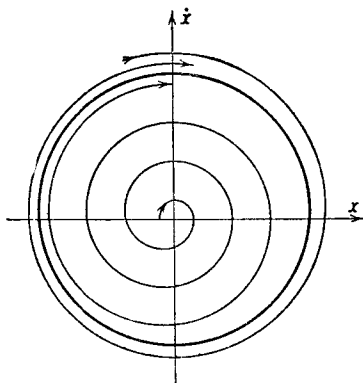


Рис. 498.

обстоятельство, что при $M = M_1$ состояние равновесия делается устойчивым, так как это не изменяет характера того предельного цикла, по которому она двигается. При переходе M через значение $M = M_0$ изображающая точка, следуя интегральным кривым, перейдет к состоянию равновесия и останется там при дальнейшем уменьшении.

Прибор, измеряющий амплитуду колебаний тока в колебательном контуре (или напряжения на сетке), обнаружит скачки — резкое («жесткое») изменение амплитуды для $M = M_1$ при увеличении M и для $M = M_0$ при уменьшении M . Мы видим, что явление протекает иначе при увеличении, чем при уменьшении M ; мы имеем дело с процессом, носящим необратимый «гистерезисный» характер (рис. 499).

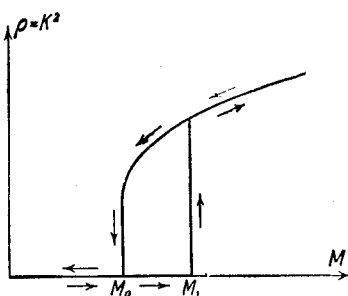


Рис. 499.

Мы получили, таким образом, бифуркационные диаграммы для мягкого и жесткого возникновения колебаний, принимая за параметр, влиянием изменений которого на рассматриваемую систему мы интересуемся, коэффициент взаимной индукции M . Аналогичные диаграммы мы могли бы получить и для других параметров, характеризующих нашу систему.

На рис. 500 и 501 приведены бифуркационные диаграммы R, ρ , где R — омическое сопротивление, опять для случая мягкого и же-

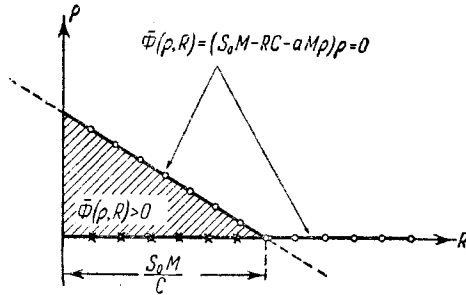


Рис. 500.

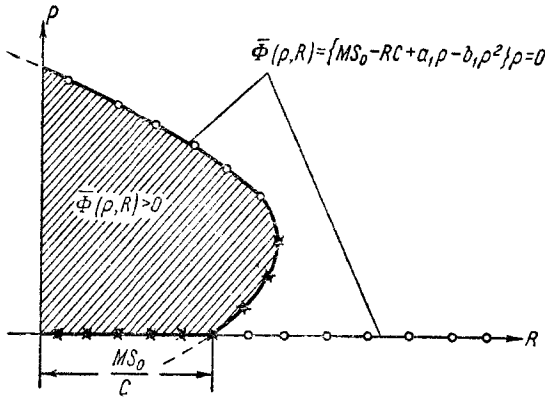


Рис. 501.

стого режима; соответствующие соотношения легко могут быть получены из выражений (9.97) и (9.98).

ГЛАВА X РАЗРЫВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ¹⁾

§ 1. Введение

Как уже неоднократно указывалось, при рассмотрении всякой реальной физической системы мы неизбежно должны идеализировать эту систему, должны выбрать из всего многообразия свойств и качеств этой системы основные, определяющие, существенные для рассматриваемого круга вопросов и построить упрощенную динамическую (математическую) модель, уравнения движения которой отображают с той или иной степенью точности поведение реальной системы. Но, отбрасывая те или иные свойства системы, применяя ту или иную идеализацию, мы всегда рискуем тем, что можем отбросить как раз существенные для рассматриваемого вопроса обстоятельства и что сделанные упрощающие допущения как раз не дадут возможности правильно ответить на поставленные вопросы. Мы не можем построить никакой теории, пока не идеализируем свойств рассматриваемой системы, но, с другой стороны, мы не можем решить вопрос о «законности» допущенной идеализации, пока не получим каких-либо результатов из нашего теоретического рассмотрения и не сопоставим этих результатов с экспериментальными данными.

Одним из методов идеализации, всегда применяемым при построении упрощенной (идеализированной) динамической модели реальной физической системы, является пренебрежение так называемыми «малыми» или «паразитными» параметрами системы. Так, например, рассматривая колебания в RC -контуре (рис. 502) с помощью уравнения

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad (10.1)$$

мы пренебрегали, в частности, малой, паразитной индуктивностью L_0 . Как мы видели в § 5 гл. I, этот параметр L_0 , если он действительно мал (если $L_0 \ll CR^2$), не является существенным. При

¹⁾ В гл. X Н. А. Железцовым написаны § 1, п. 2 § 2, §§ 3—5, 7, п. 4 § 8, §§ 9—11, п. 2 § 12, § 13 и существенно переработаны §§ 6, 8, 12.

колебаниях, начинающихся из состояний, совместных с уравнением (10.1), это уравнение удовлетворительно и правильно отображает весь процесс изменения токов и напряжений в RC -контуре и учет малой индуктивности L_0 , т. е. переход к «более точному» уравнению второго порядка

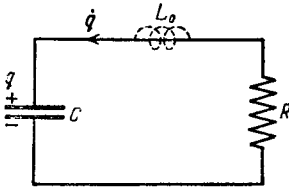


Рис. 502.

$$L_0 \ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad (10.1a)$$

не внесет ничего нового, давая лишь малые поправки к решению уравнения (10.1), тем меньшие, чем меньше L_0/CR^2 ¹⁾.

Аналогично, пренебрегая малыми паразитными параметрами, мы сможем с достаточной степенью точности рассмотреть явления в контуре, состоящем из сопротивления R и индуктивности L , исходя из уравнения

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0, \quad (10.2)$$

если только эти паразитные параметры малы. Учет, например, малой собственной емкости C_0 катушки индуктивности (рис. 503), что приведет к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$C_0 RL \frac{d^2 i}{dt^2} + L \frac{di}{dt} + Ri = 0, \quad (10.2a)$$

не изменит существенно результатов нашего рассмотрения, если только емкость C_0 достаточно мала (нужно, чтобы $C_0 \ll L/R^2$).

¹⁾ Здесь, как и всюду в книге, мы будем рассматривать только те движения системы, которые начинаются из состояний, удовлетворяющих уравнениям принятой динамической модели. В рассматриваемом сейчас случае уравнения (10.1) мы можем задать произвольно в начальный момент времени (например, при $t=0$) только одну из величин, характеризующих состояние RC -контура (если задано q_0 , то в силу уравнения (10.1) $(\dot{q})_0 = -\frac{q_0}{RC}$,

$(\ddot{q})_0 = \frac{q_0}{(RC)^2}$, ...). Если же нас интересуют процессы в RC -контуре при начальных условиях, не удовлетворяющих уравнению (10.1) (например, при $q_0 \neq 0$ и $\dot{q}_0 = 0$), то рассмотрение таких процессов не может быть проведено полностью с помощью уравнения (10.1), а требует применения уравнения (10.1a), составленного с учетом паразитной индуктивности L_0 . Как мы видели в § 5 гл. I, на начальном этапе (длительность которого имеет порядок величины L_0/R) $R\dot{q} + q/C$ и, следовательно, $L_0\ddot{q}$ не малы, что приводит при малых L_0 к быстрому изменению тока \dot{q} до величины, близкой к $-q_0/RC$. Далее, даже и в этом случае явления удовлетворительно отображаются уравнением (10.1). Уравнение (10.1a) или соответствующим образом сформулированный постулат скачка тока необходимы для рассмотрения движения только на начальном этапе, когда состояния системы «находятся в конфликте» с уравнением (10.1).

Точно так же при исследовании работы лампового генератора с индуктивной обратной связью мы пренебрегали всеми малыми параметрами, в частности паразитными емкостями и индуктивностями монтажа, междуэлектродными емкостями лампы. Учет тех или иных малых паразитных параметров привел бы (кроме значительного усложнения задачи) лишь к малым изменениям в условиях самовозбуждения генератора и выражениях, определяющих амплитуду и период автоколебаний, и т. д.

Так мы поступали всякий раз при построении динамической модели физической колебательной системы, пренебрегая малыми, паразитными параметрами и рассчитывая на то, что неучтенные малые параметры играют тем меньшую роль, чем меньше их величины. Мы вынуждены это делать хотя бы из-за того, что невозможно учесть все малые параметры.

В рассмотренных выше примерах, равно как и во всех задачах, разобранных нами ранее ¹⁾, такое пренебрежение малыми, паразитными параметрами, наряду с другими упрощающими предположениями давало возможность построить такие динамические модели (такие системы дифференциальных уравнений), которые позволяли проследить за поведением колебательных систем при $0 < t < +\infty$ (конечно, при условии, что начальные состояния (при $t=0$) не противоречили уравнениям использованных динамических моделей). При этом результаты рассмотрения находились в качественном и удовлетворительном количественном согласии с экспериментальными данными.

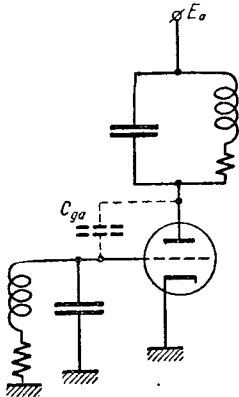


Рис. 504.

Однако далеко не всегда допустимо отбрасывать все малые параметры, так как среди них могут оказаться параметры, существенные для процессов в рассматриваемой колебательной системе. Например, при рассмотрении генератора, схема которого приведена на рис. 504, нельзя пренебречь малой паразитной, так называемой проходной емкостью лампы C_{ga} , так как только через нее осуществляется обратная связь анодного колебательного контура с сеточным, необходимая для возбуждения автоколебаний. Поэтому, пренебрегая малой емкостью C_{ga} , мы не сможем объяснить даже самовозбуждение схемы.

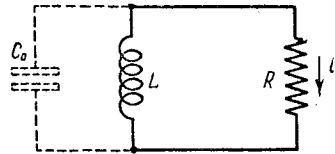


Рис. 503.

¹⁾ За исключением мультивибратора с одним RC -звеном (§ 8 гл. IV).

В качестве второго примера рассмотрим процесс, происходящий после включения постоянной э. д. с. в контур, состоящий из последовательно соединенных сопротивления R , индуктивности L и большой емкости C (рис. 505). Пусть начальный заряд на конденсаторе (при $t=0$) $q_0=0$, тогда уравнение для силы тока i в контуре мы сможем записать в виде:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = E. \quad (10.3)$$

Посмотрим, нельзя ли в этом уравнении пренебречь членом

$$\frac{1}{C} \int_0^t i dt,$$

отображающим напряжение на конденсаторе, на том основании, что

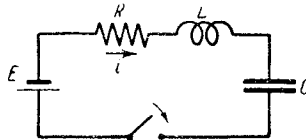


Рис. 505.

$\frac{1}{C}$ «мало» (поскольку C «велико»). Отбрасывая этот член, мы получим уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E, \quad (10.3a)$$

которое, однако, правильно отображает процесс изменения силы тока только в начальной стадии (в течение промежутка времени порядка RC)¹⁾. Действительно, согласно упрощенному уравнению (10.3a) в контуре при $t \rightarrow +\infty$ должна устанавливаться сила тока, равная E/R , в то время как на самом деле и в согласии с уравнением (10.3) сначала (за промежуток времени порядка L/R) сила тока достигает значения, близкого к E/R , а затем по мере увеличения напряжения на конденсаторе начинает уменьшаться и медленно (как $e^{-\frac{t}{RC}}$) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 506). Таким образом, несмотря на то, что член

$$\frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

¹⁾ Мы считаем, что начальное состояние цепи удовлетворяет уравнению (10.3a); пусть, например, $(i)_0 = 0$, а $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{E}{L}$.

имеет «малый» коэффициент $\frac{1}{C}$ и сначала мал по сравнению с другими членами уравнения (10.3), им пренебрегать нельзя, если мы хотим проследить весь процесс установления тока в контуре, так как рассматриваемый контур через промежуток времени порядка RC

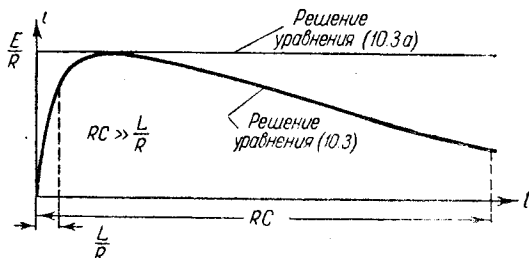


Рис. 506.

обязательно придет в такие состояния, в которых этот член будет уже сравним с э. д. с., включенной в контур.

Наконец, существуют такие колебательные системы, построение теории которых вообще невозможно без учета некоторых малых (паразитных) параметров, так как последние являются существенными для процессов в этих системах. Примерами таких систем могут служить мультивибратор с одним RC -звеном и другие колебательные системы, совершающие так

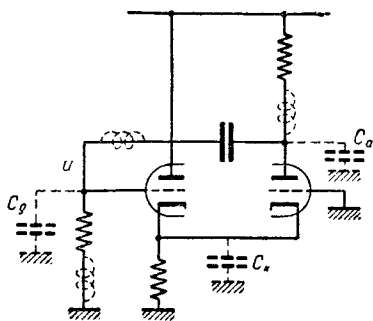


Рис. 507.

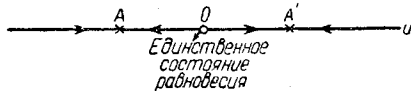


Рис. 508.

называемые *разрывные колебания*, т. е. такие колебания, при которых сравнительно медленные изменения состояния системы чередуются с весьма быстрыми, «скачкообразными» (мультивибратор является типичным примером генератора разрывных колебаний).

При рассмотрении в § 8 гл. IV мультивибратора с одним RC -звеном (рис. 507) мы пренебрегали всеми паразитными параметрами (в том числе паразитными емкостями). Полученная в результате этого динамическая модель первого порядка (ее фазовая прямая приведена на рис. 508) оказалась «дефектной», «вырожденной» в том смысле, что она не дала возможности проследить за поведением системы во все моменты времени после задания ее начального

состояния (совместного, конечно, с уравнением этой модели). Оказывается, при любых начальных условиях уравнение динамической модели первого порядка «приводит» систему в одно из состояний, изображаемых на рис. 508 «точками стыка фазовых траекторий» A и A' , которые не являются состояниями равновесия и из которых согласно этому уравнению нет выходящих фазовых траекторий.

Поскольку все «большие» параметры мультивибратора были учтены, причину построения такой неудачной, «дефектной» модели, очевидно, следует искать в том, что мы, пренебрегая всеми паразитными параметрами схемы, пренебрегли среди них и какими-то параметрами, существенными (несмотря на их «малость») для колебательных процессов в мультивибраторе. Такими существенными паразитными параметрами, определяющими (наряду с емкостью C , сопротивлениями R_a и R_g и характеристикой ламповой группы) закономерности колебаний в мультивибраторе, являются, в частности, малые паразитные емкости C_a , C_g или C_k , всегда имеющиеся в схеме (они изображены на рис. 507 пунктиром). Эти емкости играют определяющую роль во время быстрых, «скачкообразных» изменений сеточных напряжений u , которые, как известно, являются характерными для колебаний мультивибратора. При учете паразитных емкостей C_a и C_g или C_k (эти емкости в реальных схемах мультивибратора обычно значительно меньше емкости C) мы приходим к вполне «доброкачественной» модели второго порядка, т. е. к такой модели, которая позволяет проследить неограниченно во времени за поведением мультивибратора и объяснить, в частности, периодическое повторение скачков сеточного напряжения u (см. § 5 гл. VIII и § 12 гл. V)¹⁾. Существенно при этом, что при колебаниях мультивибратор периодически приходит в такие состояния, в которых члены дифференциальных уравнений с малыми паразитными емкостями в качестве их коэффициентов не являются малыми по сравнению с другими членами этих уравнений (несмотря на малость паразитных емкостей по сравнению с емкостью C). Именно поэтому нельзя пренебрегать паразитными емкостями при построении динамической модели мультивибратора при рассмотрении его колебаний²⁾.

¹⁾ Не все паразитные параметры являются существенными для колебательных процессов в мультивибраторе. Если мы, к примеру, учтем одну из паразитных индуктивностей, указанных пунктиром на рис. 507, и не будем учитывать паразитных емкостей, то мы получим динамическую модель второго порядка, но по-прежнему «дефектную», «вырожденную», т. е. недостаточную даже для качественного объяснения работы мультивибратора (см. § 8 этой главы).

²⁾ В § 8 гл. IV мы рассмотрели автоколебания мультивибратора, пользуясь «дефектной» моделью первого порядка, дополненной постулатом скачка сеточного напряжения u . Этот постулат скачка, по сути дела, является косвенной формой учета существенных паразитных параметров и получается как следствие динамики «доброкачественной» модели второго порядка, построенной с учетом хотя бы одной из указанных выше паразитных емкостей (см. § 4 этой главы, а также § 5 гл. VIII).

Все сказанное о мультивибраторе с одним RC -звеном относится в равной мере и ко всем другим системам, совершающим разрывные колебания. В этих системах, так же как и в мультивибраторе, сам характер колебаний обусловлен существенностью некоторых малых паразитных параметров на определенных этапах колебательного процесса. Поэтому рассмотрение систем с разрывными колебаниями, что является целью настоящей главы, невозможно без учета в той или иной форме по крайней мере некоторых существенных паразитных параметров этих систем.

Прежде чем переходить к изложению приближенных методов рассмотрения систем с разрывными колебаниями (в § 3) и к рассмотрению конкретных примеров таких систем (в последующих параграфах), мы поставим перед собой более частную задачу: попытаемся выяснить влияние малых параметров (членов дифференциальных уравнений с малыми коэффициентами) на устойчивость состояний равновесия.

§ 2. Малые параметры и устойчивость состояний равновесия [127]

Поскольку мы ограничиваемся сейчас рассмотрением вопроса об устойчивости состояний равновесия, мы можем пользоваться линейным приближением. Пусть вблизи состояния равновесия поведение системы (при пренебрежении малыми, паразитными параметрами) может быть описано линеаризованным уравнением n -го порядка:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0. \quad (10.4)$$

При подстановке частного решения $x = Ae^{\lambda t}$ мы получим для λ характеристическое уравнение n -й степени:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (10.5)$$

Как известно, устойчивость состояния равновесия определяется знаками действительных частей корней этого уравнения; именно, состояние равновесия устойчиво, если все n корней отрицательны или имеют отрицательные действительные части.

Пусть введение в рассмотрение нового малого (например, паразитного) параметра приводит к повышению на единицу порядка дифференциального уравнения системы (другие случаи, когда порядок уравнения повышается сразу больше, чем на единицу, могут быть

рассмотрены аналогичным образом)¹⁾. Это повышение порядка в линеаризованном уравнении (10.4) может произойти двумя путями —

прибавлением либо малого члена $\mu \frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}$, либо малого члена $\mu \int_0^t x dt$,

где μ — достаточно малый коэффициент. В первом случае характеристическое уравнение примет вид:

$$\mu \lambda^{n+1} + a_0' \lambda^n + a_1' \lambda^{n-1} + \dots + a_n' = 0, \quad (10.6)$$

а во втором

$$a_0' \lambda^{n+1} + a_1' \lambda^n + \dots + a_n' \lambda + \mu = 0. \quad (10.7)$$

В новых уравнениях вместо коэффициентов a_i появятся, вообще говоря, другие коэффициенты a_i' , так как учет малого параметра может привести не только к появлению новых членов, но и к небольшим изменениям старых, причем, очевидно, при $\mu \rightarrow 0$ $a_i' \rightarrow a_i$. Оба эти уравнения имеют по $n+1$ корней. Из них n корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ в силу малости коэффициента μ близки по величине к n корням исходного характеристического уравнения и, в частности, имеют те же знаки действительных частей²⁾. Следовательно, изменения, происшедшие с этими n корнями, не могут изменить устойчивости состояния равновесия. Это может сделать только новый корень λ_{n+1} . Чтобы решить вопрос о влиянии этого корня, рассмотрим оба случая отдельно.

¹⁾ Введение в рассмотрение малого параметра, не повышающего порядка уравнения системы, не представляет для нас какого-либо интереса (оно не может изменить устойчивость состояния равновесия), если исходная система (без учета этого малого параметра) была грубой.

Заметим, что понятие о «грубости» автономной системы, определяемой, например, двумя дифференциальными уравнениями 1-го порядка, может быть естественным образом обобщено на случай, когда малые добавочные члены содержат первые производные, т. е. когда «измененная» система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) + p_1 \left(x, y; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right); \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) + q_1 \left(x, y; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned}$$

Если же малые добавочные члены содержат производные высших порядков, то вся данная постановка задачи о «грубости» системы нарушается, так как для измененной системы мы имеем фазовое пространство большого числа измерений. Как мы увидим дальше, в этом последнем случае мы не можем распорядиться (без особых специальных ограничений) малостью добавочных членов хотя бы в том отношении, чтобы они не влияли на устойчивость состояния равновесия.

²⁾ Мы предполагаем, что исходная система «груба» и что, следовательно, действительные части всех корней исходного характеристического уравнения отличны от нуля.

Начнем с первого случая. Известно, что при $\mu \rightarrow 0$ $\lambda_{n+1} \rightarrow \infty$, поэтому если μ достаточно мало, то для вычисления λ_{n+1} мы можем в уравнении (10.6) отбросить все члены степени ниже n ; тогда получим следующее асимптотическое выражение для λ_{n+1} при малых μ :

$$\lambda_{n+1} \approx -\frac{a_0}{\mu}. \quad (10.8)$$

Во втором случае мы можем характеристическое уравнение (10.7) переписать так:

$$\lambda [a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n] + \mu = 0.$$

При $\mu \rightarrow 0$ $\lambda_{n+1} \rightarrow 0$; поэтому при малых μ , пренебрегая высшими степенями λ_{n+1} , мы получим во втором случае такое асимптотическое выражение для λ_{n+1} :

$$\lambda_{n+1} \approx -\frac{\mu}{a_n}. \quad (10.9)$$

Теперь легко установить, какое влияние на устойчивость состояний равновесия может иметь введение нового малого члена в том и другом случаях. Поведение системы вблизи состояния равновесия определяется уравнением

$$x = be^{\lambda_{n+1}t} + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}. \quad (10.10)$$

Если среди n «старых» корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ есть хоть один с действительной частью, большей нуля, то состояние равновесия неустойчиво и новый корень λ_{n+1} не может ничего изменить в характере этого состояния — оно все равно будет неустойчиво. Если же все n корней (или их действительные части) отрицательны, то устойчивость состояния равновесия решается знаком корня λ_{n+1} . Если этот корень отрицателен, то ничего нового он не вносит. Если же он положителен, то состояние равновесия оказывается неустойчивым и, значит, при переходе от исходной системы к дополненной происходит потеря устойчивости. Но знак λ_{n+1} зависит, с одной стороны, от знака μ и, с другой, от знака коэффициента a_0 или a_n исходного уравнения. Если выбрать $a_0 > 0$, то a_n должно быть положительно, чтобы состояние равновесия в исходной системе было устойчиво¹⁾. Следовательно, потеря устойчивости может произойти в том случае, если стоящий при вновь введенном малом члене коэффициент μ отрицателен. Как мы увидим, такие случаи могут быть в реальных системах. Это значит, что состояние равновесия, которое без учета паразитного параметра кажется нам устойчивым, в силу

¹⁾ Это требование сразу получается из так называемых условий Раута — Гурвица. См., например, [95, 99].

наличия этого параметра в действительности оказывается неустойчивым и реальная система в таком состоянии находиться не может. Совершенно очевидно, насколько важно было бы уметь отличать эти состояния равновесия, кажущиеся нам устойчивыми, от состояний равновесия действительно устойчивых, т. е. таких, в которых реальная система может находиться как угодно долго.

Несмотря на отсутствие каких-либо общих методов, мы все же можем указать прием, с помощью которого во многих случаях можно «разоблачить» такие состояния равновесия, которые только кажутся устойчивыми, а в действительности неустойчивы. Этот прием заключается в том, чтобы последовательно вводить в уравнение различные малые паразитные параметры и определять знаки, с которыми они входят в уравнение. Если мы обнаружим хоть один такой паразитный параметр, который входит со знаком минус, то есть основания опасаться, что состояние равновесия в действительности неустойчиво. Мы говорим только «есть основания», так как возможно, что другой паразитный параметр входит в этот же член уравнения со знаком плюс, и тогда знак коэффициента зависит от соотношения между величинами паразитных параметров, а величин паразитных параметров мы обычно не знаем. Кроме того, мы никогда не сможем рассмотреть влияние всех без исключения паразитных параметров. Поэтому, строго говоря, мы никогда не можем быть уверены в том, что состояние равновесия, которое с точки зрения нашей теории кажется устойчивым, действительно устойчиво. Решить этот вопрос окончательно не в состоянии никакая теория, ответ на него может дать только опыт. Но все же при теоретическом рассмотрении всегда нужно иметь в виду, что существует опасность принять неустойчивое состояние равновесия за устойчивое.

Чтобы показать, насколько велика эта опасность и насколько легко в некоторых случаях ее избежать и «разоблачить» состояния равновесия, кажущиеся устойчивыми, мы рассмотрим несколько конкретных примеров. В наших примерах мы ограничимся только такими случаями, которые могут быть рассмотрены до конца в рамках теории нелинейных уравнений второго порядка. Следовательно, мы будем рассматривать такие системы, которые при учете малых членов описываются дифференциальным уравнением второго порядка, а при отбрасывании этих членов приводят к уравнению первого порядка. При этом мы начнем рассмотрение с уравнения второго порядка, а затем, предполагая один из параметров малым и отбрасывая соответствующий член уравнения, рассмотрим соответствующие уравнения первого порядка.

1. Схема с вольтовой дугой. В качестве первого примера мы рассмотрим уже знакомую нам схему вольтовой дуги, питаемой постоянным током (рис. 509). Кроме батареи и дуги, в этой цепи присутствуют сопротивление R , самоиндукция L и емкость C (само собой разумеется, что уже и в таком виде рассматриваемая схема

представляет собой результат идеализации). Как и раньше, обозначим характеристику дуги, т. е. зависимость напряжения на дуге v от силы тока через нее i , через $v = \psi(i)$ (рис. 510).

Повторим и дополним те выводы, которые были сделаны нами раньше (см. § 5 гл. V) при рассмотрении этой схемы.

Уравнения для рассматриваемой схемы мы получили в виде:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= u - \psi(i), \\ C \frac{du}{dt} &= \frac{E - u}{R} - i. \end{aligned} \right\} (10.11)$$

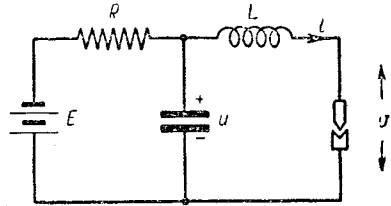


Рис. 509.

Состояния равновесия этой системы (I, U) определяются, очевидно, из условия

$$\psi(i) = E - Ri$$

и соответствуют точкам пересечения характеристики дуги $u = \psi(i)$ и «нагрузочной» прямой $u = E - Ri$; этих точек пересечения может

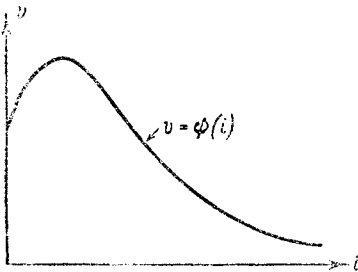


Рис. 510.

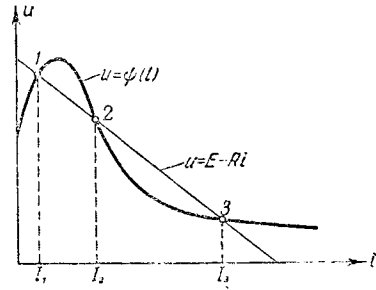


Рис. 511.

быть либо одна, либо три (рис. 511). Ниже мы будем рассматривать наиболее интересный случай трех состояний равновесия. Линеаризуем уравнения (10.11) в малой окрестности состояния равновесия (I, U), мы получим для переменных составляющих силы тока $\xi = i - I$ и напряжения на конденсаторе $\eta = u - U$ следующую систему линейных уравнений:

$$L \frac{d\xi}{dt} = \eta - \psi'(I)\xi, \quad CR \frac{d\eta}{dt} = -\eta - R\xi$$

с характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} L\lambda + \psi'(I) & -1 \\ R & CR\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$LCR \cdot \lambda^2 + [L + CR\psi'(I)]\lambda + R + \psi'(I) = 0. \quad (10.12)$$

Очевидно, характер состояния равновесия (I, U) зависит от знака и величины $\psi'(I)$, т. е. от «дифференциального сопротивления» дуги при равновесном значении силы тока $i = I$. Пусть состояние равновесия, отмеченное цифрой 1 на рис. 511, лежит на поднимающемся участке характеристики дуги. Тогда оно устойчиво (так как $\psi'(I_1) > 0$ и оба корня уравнения (10.12) или их действительные части отрицательны); это либо устойчивый фокус, либо устойчивый узел в зависимости от соотношений между L , C , R и $\psi'(I_1)$. В точке 2 $\psi'(I_2)$ отрицательно и, как видно из диаграммы, по абсолютной величине больше, чем R . Следовательно, $R + \psi'(I_2) < 0$, и особая точка 2 есть седло. Соответствующее ей состояние равновесия всегда неустойчиво. Наконец, в точке 3 хотя $\psi'(I_3) < 0$, но, как видно из диаграммы, по абсолютной величине $\psi'(I_3)$ меньше, чем R , и, значит, $R + \psi'(I_3) > 0$, т. е. особая точка, отмеченная цифрой 3, также может быть либо фокусом, либо узлом¹⁾. Эта особая точка неустойчива, если $|\psi'(I_3)| > \frac{L}{CR}$, в противном случае она устойчива. Так как $\psi'(I_3)$ есть величина сравнительно малая (характеристика хотя и падающая, но пологая), то при малых L состояние равновесия 3 всегда неустойчиво; наоборот, при малых C это же самое состояние равновесия всегда устойчиво. Вообще же переход от устойчивого к неустойчивому состоянию равновесия в этой точке происходит при каком-то определенном «критическом» значении изменяемого параметра (этим изменяемым параметром может быть любой: R , L или C). Итак, при наличии трех состояний равновесия мы можем иметь в смысле их устойчивости одну из двух комбинаций, изображенных на рис. 512 и 513²⁾.

Посмотрим теперь, изменится ли и как именно характер этих состояний равновесия, если одним из двух параметров, L или C , мы пренебрегаем. Пренебрегая емкостью, мы получим схему, приведенную на рис. 514; пренебрегая индуктивностью — схему на рис. 515, поведение каждой из которых мы попытаемся отобразить соответствующим уравнением первого порядка (первую из этих схем мы уже рассматривали в § 6 гл. IV). Значения i и u , соответствующие состояниям равновесия во всех трех случаях, именно: в общем слу-

¹⁾ Мы считаем для определенности, что характеристика дуги на большом участке является падающей. Следовательно, для всех не слишком малых R и не слишком больших E всегда $\psi'(I_3) < 0$. Если точка 3 лежит в поднимающейся части характеристики, то $\psi'(I_3) > 0$ и точка 3 всегда устойчива.

²⁾ На рисунках точки 1 и 3 изображены в виде узлов. Но эти точки могут быть и фокусами; в отношении же устойчивости картина останется неизменной.

чае $L \neq 0$, $C \neq 0$ и в частных случаях $C=0$, $L \neq 0$ и $C \neq 0$, $L=0$, очевидно, остаются одними и теми же.

При переходе к случаю $C=0$ ничего не изменяется в смысле устойчивости этих состояний равновесия: состояния 1 и 3 остаются

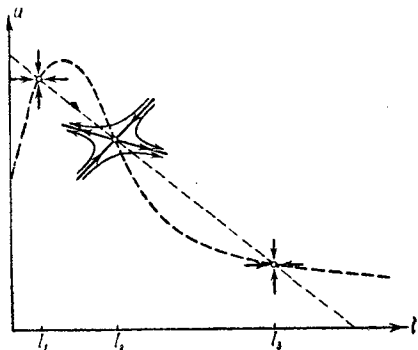


Рис. 512.

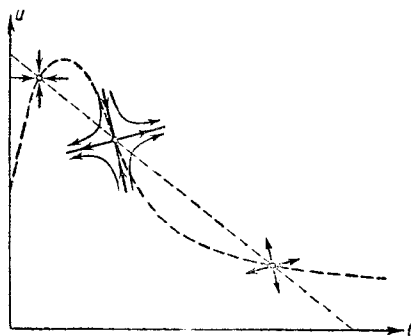


Рис. 513.

устойчивыми, а состояние 2 неустойчивым (как и при малых, но отличных от нуля C), т. е. малая емкость C в схеме не является существенной для устойчивости всех трех состояний равновесия.

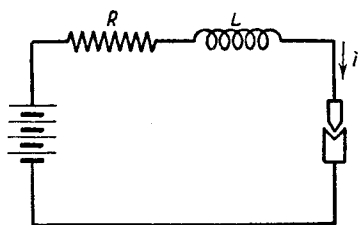


Рис. 514.

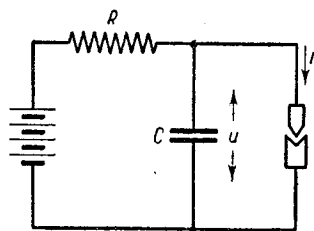


Рис. 515.

В самом деле, при $C \rightarrow +0$ характеристическое уравнение (10.12) имеет своими корнями

$$\lambda_1 = -\frac{R + \psi'}{L} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{CR} \rightarrow -\infty,$$

т. е. корень λ_2 , обусловленный наличием в схеме малой емкости, всегда отрицателен, вследствие чего устойчивость состояния равновесия полностью определяется знаком λ_1 , являющегося корнем характеристического уравнения схемы без емкости: $L\lambda + R + \psi' = 0$.

Иная картина получается при пренебрежении индуктивностью L (даже сколь угодно малой). Характеристическое уравнение для

состояния равновесия схемы без индуктивности (при $L = 0$)

$$CR\psi'\lambda + R + \psi' = 0 \quad (10.12a)$$

имеет единственный корень

$$\lambda = -\frac{R + \psi'}{CR\psi'},$$

который отрицателен для состояний равновесия 1 и 2 и положителен для состояния равновесия 3¹⁾. Иначе говоря, при пренебрежении индуктивностью (при $L = 0$) состояния равновесия 1 и 2 оказываются устойчивыми, а состояние 3 — неустойчивым.

Но характеристическое уравнение (10.12) при малой индуктивности (точнее, при $L \rightarrow +0$) имеет корнями

$$\lambda_1 = -\frac{R + \psi'}{CR\psi'}$$

и

$$\lambda_2 = -\frac{\psi'}{L} \rightarrow \infty,$$

первый из которых совпадает с корнем характеристического уравнения (10.12a). Для первого состояния равновесия $\psi'(I_1) > 0$, $\lambda_2 \rightarrow -\infty$ и $\lambda_1 < 0$; это состояние равновесия является устойчивым и при малых L . Для него, следовательно, малая индуктивность L не является существенным параметром. Но для второго и третьего состояний равновесия $\psi' < 0$ и $\lambda_2 \rightarrow +\infty$, т. е. система будет уходить «быстрым» движением от этих состояний равновесия, которые, таким образом, являются неустойчивыми при сколь угодно малых L . Поэтому рассмотрение поведения схемы с вольтовой дугой вблизи состояний равновесия 2 и 3 (на падающем участке характеристики дуги) требует обязательного учета индуктивности L , сколь бы мала она ни была. В частности, состояние равновесия 2, которое было «устойчивым» при $L = 0$ (при пренебрежении индуктивностью), является на самом деле неустойчивым из-за наличия в схеме малой паразитной индуктивности. Такая потеря устойчивости будет происходить при исчезновении в характеристическом уравнении $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ (где $a > 0$) члена второй степени ($a \rightarrow 0$) всякий раз, когда не только свободный член c , но и коэффициент b при члене первой степени отрицательны. Этот случай можно для краткости назвать «отрицательным седлом» в отличие от «положительного седла», для которого только свободный член $c < 0$, а коэффициент $b > 0$. Следовательно, если a обращается в нуль, то «положительное седло» сохраняет свою неустойчивость, а «отрицательное седло» превращается в устойчивое состояние равновесия.

¹⁾ Для состояния равновесия 2 и $\psi' < 0$, и $R + \psi' < 0$, поэтому $\lambda < 0$.

Нетрудно убедиться в том, что только что рассмотренный нами случай, когда состояние равновесия в дополненной системе превращается в седло, является единственным возможным случаем (для рассматриваемого класса задач) потери устойчивости в результате учета малых параметров. Действительно, состояние равновесия в исходной системе должно быть устойчиво, т. е. единственный корень должен быть отрицателен. При переходе к уравнению второго порядка для потери устойчивости должен появиться второй, положительный корень и, следовательно, два корня будут разных знаков, а в таком случае состояние равновесия представляет собой седло.

Можно утверждать и обратное, именно, что при вырождении системы только особая точка типа седла может из неустойчивой превратиться в устойчивую. Это происходит тогда, когда из двух корней при вырождении исчезает положительный корень. С точки зрения изображения движения на фазовой плоскости это значит, что вследствие появившейся в результате вырождения связи между координатой и скоростью представляющая точка может двигаться только по той единственной сепаратрисе, по которой происходит движение по направлению к седлу. Ясно, что пока мы рассматриваем только это движение, седло «кажется» нам устойчивой особой точкой. В действительности достаточно какого угодно малого отклонения представляющей точки в сторону от сепаратрисы, чтобы в конце концов представляющая точка навсегда ушла из области, близкой к состоянию равновесия. Но в реальной системе начальные условия никогда не могут быть заданы абсолютно точно, хотя бы вследствие наличия флуктуаций. Значит, реальная система вследствие наличия самоиндукции и неизбежных отклонений в начальных условиях не сможет находиться в таком состоянии равновесия сколько-нибудь длительное время. Только оба эти обстоятельства вместе — наличие малой самоиндукции и неизбежные отклонения в начальных условиях — приводят к тому, что система уходит из состояния равновесия, которое нам казалась устойчивым.

Рассмотренное нами состояние равновесия как раз является таким, которое без надлежащей проверки мы легко могли бы принять за устойчивое. Так оно и случилось с Фридендером [151, 152], который случай вольтовой дуги в схеме без самоиндукции привел как пример того, что на фазовой кривой могут рядом находиться два устойчивых состояния равновесия, причем за одно из устойчивых состояний он принимал седло, которое только «кажется» устойчивым.

2. Самовозбуждение мультивибратора. В качестве второго примера, иллюстрирующего влияние малых паразитных параметров на характер состояний равновесия, мы рассмотрим самовозбуждение обычного мультивибратора с одним RC -звеном, учитывая две малые паразитные индуктивности L_a и L (рис. 516). Пренебрегая сеточными токами и считая анодный ток правого триода i_a функцией только напряжения u на сетке левого триода: $i_a = \varphi(u)$, мы получим для

рассматриваемой схемы следующие уравнения колебаний:

$$i_1 = i + i_a; \quad i = C \frac{dV}{dt} = \frac{u}{R_g};$$

$$L_a \frac{di_1}{dt} + R_a i_1 = E_a - \left[u + L \frac{di}{dt} + V \right],$$

или после простых преобразований:

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{L_a}{R_g} + L_a \varphi'(u) + \frac{L}{R_g} \right] \frac{du}{dt} = \\ & = E_a - R_a \varphi(u) - \left(1 + \frac{R_a}{R_g} \right) u - V, \\ & CR_g \frac{dV}{dt} = u. \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Единственное состояние равновесия в этой схеме определяется условиями:

$$u_0 = 0, \quad V_0 = E_a - R_a \varphi(0).$$

Разлагаем характеристику ламповой группы в ряд по степеням u :

$$i_a = \varphi(u) = \varphi(0) - Su + \dots,$$

где $S = -\varphi'(0) > 0$, так как характеристика ламповой группы $i_a = \varphi(u)$, как известно, является падающей (с отрицательной

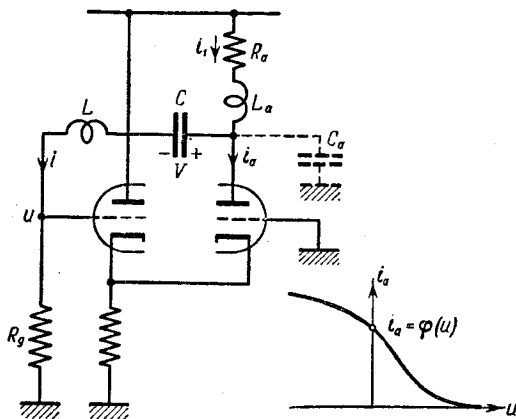


Рис. 516.

крутизной). Ограничиваясь линейным приближением, мы получим следующие линейные уравнения для малых колебаний вблизи состояния равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{du}{dt} &= -\rho u - R_g v, \\ CR_g \frac{dv}{dt} &= u, \end{aligned} \right\} \quad (10.13a)$$

где

$$\rho = R_g + R_a(1 - SR_g), \quad \mu = L + L_a(1 - SR_g) \quad \text{и} \quad v = V - V_0.$$

Характеристическое уравнение линейной системы уравнений (10.13а), очевидно, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \mu\lambda + \rho & R_g \\ -1 & CR_g\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\mu\lambda^2 + \rho\lambda + \frac{1}{C} = 0, \tag{10.14}$$

что дает следующие условия устойчивости состояния равновесия (отсутствия самовозбуждения):

$$\mu > 0, \quad \rho > 0.$$

При $\mu < 0$ особая точка $(0, V_0)$ есть седло, а при $\mu > 0$ эта же особая точка может быть либо узлом, либо фокусом и неустойчива при $\rho < 0$. Полная диаграмма разбиения плоскости параметров μ, ρ на области существования того или иного типа особой точки (состояния равновесия) приведена на рис. 517.

Если бы мы пренебрегли паразитными индуктивностями L_a и L , т. е. положили $\mu = 0$, то получили бы (после линеаризации) следующее уравнение первого порядка:

$$\rho C \frac{du}{dt} + u = 0,$$

и устойчивость состояния равновесия $u = 0$ зависела

бы только от знака параметра ρ ; именно, при $\rho > 0$ это состояние равновесия было бы устойчивым. Но «устойчивость» состояния равновесия системы первого порядка (при $\rho > 0$) и в этом случае обусловлена «нашей наивностью». Однако, как мы сейчас увидим, «не быть наивным» в этом случае еще труднее, чем в предшествующем.

Допустим сначала, что в анодной цепи имеется паразитная индуктивность L_a , а в цепи с емкостью ее нет, т. е. положим, что $L = 0$.

Кроме того, положим, что $1 < SR_g < 1 + \frac{R_g}{R_a}$, т. е. что $0 < \rho < R_g$.

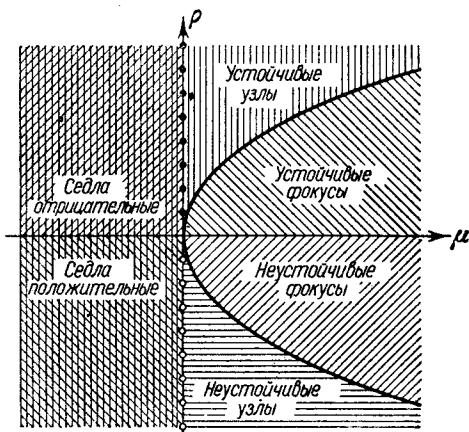


Рис. 517.

Тогда состояние равновесия, с точки зрения наших обычных критериев устойчивое при $L_a = 0$, сразу теряет свою устойчивость при каком угодно малом L_a и превращается в седло. И при каких угодно малых отклонениях от устойчивого уса седла (а такие малые отклонения в реальной системе всегда неизбежны) представляющая точка в конце концов уйдет как угодно далеко от этого состояния равновесия. Поэтому в реальной системе такое состояние равновесия неустойчиво.

Но ведь самоиндукцией, хотя бы малой, обладает и цепь с емкостью, т. е. в реальной системе $L \neq 0$. Однако, учитывая L , мы не только не нарушим условий устойчивости, которым удовлетворяет состояние равновесия вырожденной системы при $L_a = 0$ и $\rho > 0$, но даже можем вернуть «устойчивость» тому состоянию равновесия, которое оказалось неустойчивым в силу наличия паразитной самоиндукции L_a . Действительно, если L достаточно велико, так что $\mu = L + L_a(1 - SR_g) > 0$, несмотря на то, что $SR_g > 1$, то состояние равновесия, которое было неустойчивым при $L_a \neq 0$ и $L = 0$ (седло), становится устойчивым при появлении достаточно большого L . Таким образом, мы видим на конкретном примере, что не только самый факт наличия того или иного паразитного параметра может влиять на устойчивость состояния равновесия, но и соотношение между паразитными параметрами может оказать решающее влияние на результат рассмотрения вопроса об устойчивости данного состояния равновесия. Но если мы можем быть уверены в самом факте существования паразитных параметров, то мы обычно ничего не можем сказать об их величине и тем более о соотношении между различными паразитными параметрами. Поэтому из того результата, к которому мы пришли выше относительно влияния L_a и L , мы должны в сущности вывести такое заключение. Есть область, в которой мы для вырожденной системы вообще ничего не можем сказать об устойчивости состояния равновесия, в нашем примере — это область значений ρ , ограниченная пределами $r > \rho > 0$. Так как в этой области $SR_g > 1$, то решение вопроса об устойчивости состояний равновесия зависит от не поддающихся учету факторов — величин паразитных параметров. Поэтому, рассматривая вырожденную систему и указывая для нее условие возбуждения, т. е. условие неустойчивости $\rho < 0$, мы должны иметь в виду существование также и области «неопределенных» состояний равновесия, простирающейся от $\rho = r$ до $\rho = 0$. Вполне возможно, что так называемое «паразитное самовозбуждение» в схемах, появляющееся и исчезающее без всякого заметного изменения параметров схемы, во многих случаях обусловлено именно малыми изменениями величин малых параметров в таких областях «неопределенных» состояний равновесия.

Аналогичный результат получается и при учете малых паразитных индуктивности L_a и емкости C_a в анодной цепи (емкость C_a изоб-

ражена на рис. 516 пунктиром). В этом случае характеристическое уравнение получается третьей степени и имеет вид:

$$\lambda^3 C_a L_a R_g + \lambda^2 [L_a (1 - SR_g) + C_a R_a R_g] + \lambda [R_a (1 - SR_g) + R_g] + \frac{1}{C} = 0$$

(здесь учтено, что $C_a \ll C$). Условие устойчивости состояния равновесия при малых L_a и C_a запишется в виде:

$$R_a (1 - SR_g) + R_g > 0 \text{ и } L_a (1 - SR_g) + C_a R_a R_g > 0.$$

Следовательно, самовозбуждение схемы опять возможно и при $1 < SR_g < 1 + \frac{R_g}{R_a}$, именно, если паразитная индуктивность L_a достаточно велика:

$$L_a > \frac{C_a R_a R_g}{SR_g - 1} > C_a R_a^2.$$

Заметим, что при обычных значениях параметров мультивибратора ($C_a \approx 10 \text{ нкф}$, $R_a \approx 10^3 \div 10^4 \text{ ом}$) величина $C_a R_a^2 \approx 10 \div 10^3$ микрогенри, т. е. значительно больше обычно встречающихся паразитных индуктивностей анодной цепи. Поэтому такой мультивибратор будет возбуждаться только при $SR_g > 1 + \frac{R_a}{R_g}$.

Заметим в заключение параграфа, что в том случае, когда под влиянием какого-либо малого параметра состояние равновесия системы является неустойчивым, скорость ухода системы из этого кажущегося устойчивым состоянием в двух возможных случаях совершенно различна. Именно, в первом случае (практически наиболее интересном), когда малый параметр входит коэффициентом при старшей производной, новый корень характеристического уравнения $\lambda_{n+1} = -\frac{a_0}{\mu}$, т. е. величина корня, а значит и скорость ухода системы от состояния равновесия, тем больше, чем меньше параметр μ (в пределе при $\mu \rightarrow +0$ получаем уход мгновенным скачком).

Наоборот, во втором случае, когда малый параметр входит коэффициентом при интеграле, уход системы от состояния равновесия происходит медленным, «ползущим» движением (скорость ухода тем меньше, чем меньше параметр μ).

§ 3. Малые паразитные параметры и разрывные колебания

Все сказанное ранее относительно роли малых (паразитных) параметров в тех или иных колебательных системах можно перевести на язык фазовых представлений. Во всякой реальной системе, учитывая все новые и новые паразитные параметры, мы будем вводить

все большее и большее число степеней свободы данной системы. Вместе с тем все большим и большим становится число измерений фазового пространства, в котором мы сможем отображать поведение рассматриваемой системы (точнее, ее упрощенной динамической модели). Но так как при этом быстро возрастает и сложность математического рассмотрения поставленной задачи, то при изучении всякой колебательной системы мы не можем неограниченно вводить в рассмотрение эти новые степени свободы и должны ограничиться некоторым, обычно небольшим, числом независимых переменных, характеризующих состояние системы, выбирая их и связи между ними (уравнения) так, чтобы отобразить (качественно и в какой-то мере количественно) колебательные процессы в системе. Таким образом, при рассмотрении колебательной системы как дискретной мы считаем, что она обладает конечным, обычно небольшим, числом степеней свободы и, следовательно, ее состояния могут быть отображены в некотором фазовом пространстве с небольшим числом измерений.

Пусть движение динамической модели, полученной для рассматриваемой колебательной системы при учете некоторых малых (паразитных) параметров, отображается системой дифференциальных уравнений n -го порядка:

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{x}_i &= F_i(x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_{n'}), \\ \dot{y}_j &= G_j(x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_{n'}) \end{aligned} \right\}$$

($i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, n'$; $n = n' + s$), или в сокращенной (векторной) форме:

$$\mu \dot{x} = F(x; y), \quad \dot{y} = G(x; y), \quad (10.15)$$

где μ — малый положительный параметр, обращающийся в нуль вместе с учтенными паразитными параметрами системы¹⁾. Положив $\mu = 0$, т. е. пренебрегая этими паразитными параметрами, мы приходим к еще более упрощенной динамической модели (порядка n'):

$$F(x; y) = 0, \quad \dot{y} = G(x; y), \quad (10.16)$$

множество состояний которой составляет образ с меньшим числом измерений n' ($n' < n$) и соответствует в «полном» фазовом пространстве x, y некоторому подпространству F , определяемому уравнением:

$$F(x; y) = 0.$$

¹⁾ Мы рассматриваем наиболее интересный случай, когда при учете новых малых (паразитных) параметров эти параметры появляются в уравнениях движения системы в виде малых коэффициентов при старших производных. Именно с этим случаем мы будем иметь дело при изучении систем, совершающих разрывные колебания.

Ниже мы будем считать функции $F(x; y)$ и $G(x; y)$ ограниченными и дифференцируемыми во всей интересующей нас области изменения переменных x, y . Функции F и G могут, вообще говоря, зависеть и от μ , тогда мы будем полагать, что они стремятся к конечным пределам при $\mu \rightarrow +0$.

Очевидно, вопрос о том, являются ли учтенные малые паразитные параметры существенными для процессов в данной колебательной системе, иначе говоря, вопрос о том, можно ли изучать процессы в системе, пренебрегая этими параметрами, на языке фазовых представлений может быть сформулирован следующим образом.

В каких случаях движение изображающей точки системы (10.15) (в «полном» n -мерном фазовом пространстве x, y) при достаточно малых значениях положительного параметра μ , т. е. при достаточно малых значениях учтенных паразитных параметров, и в течение интересующих нас интервалов времени (обычно при $0 < t < +\infty$) будет происходить в малой окрестности подпространства F и, следовательно, может быть удовлетворительно заменено движением изображающей точки в пределах самого подпространства F — образа с меньшим (n') числом измерений?

1. Разбиение «полного» фазового пространства на траектории. Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим в общих чертах разбиение «полного» фазового пространства x, y на траектории системы (10.15) при достаточно малых значениях положительного параметра μ [61]. Прежде всего рассмотрим область фазового пространства, которая лежит вне малой $O(\mu^a)$ -окрестности подпространства F ($0 < a < 1$), стягивающейся к F при $\mu \rightarrow +0$ ¹⁾. В этой области

$$|F(x; y)| \geq O(\mu^a) \quad \text{и} \quad |\dot{x}| \geq O(\mu^{a-1});$$

поэтому в ней при достаточно малых μ имеют место «быстрые» движения изображающей точки, — тем более быстрые, чем меньше значение μ , т. е. чем меньше значения паразитных параметров (при $\mu \rightarrow +0 \quad \dot{x} \rightarrow \infty$); эта область в дальнейшем будет называться *областью «быстрых» движений*²⁾. Так как в области «быстрых» движений $\dot{y} = G(x; y)$ остаются ограниченными при $\mu \rightarrow +0$, а

$$\left| \frac{dy_j}{dx_i} \right| = \mu \left| \frac{G_j(x; y)}{F_j(x; y)} \right| \leq O(\mu^{1-a}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow +0,$$

то при быстрых изменениях переменных x на конечные величины (за малые промежутки времени $\Delta t \leq O(\mu^{1-a})$) переменные y

¹⁾ Под $O(g(\mu))$ -окрестностью подпространства F мы будем понимать множество всех точек, расстояния которых до подпространства F не превышают некоторой величины порядка $g(\mu)$; в рассматриваемом случае $g(\mu) = \mu^a$ ($0 < a < 1$).

²⁾ Областью «быстрых» движений является также и область, лежащая вне малой $O(\mu \ln \frac{1}{\mu})$ -окрестности подпространства F , так как в области вне такой окрестности $|F(x; y)| \geq O(\mu \ln \frac{1}{\mu})$ и $|\dot{x}| \geq O(\ln \frac{1}{\mu}) \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$.

изменяются лишь на малые величины порядка не более $\mu^{1-\alpha}$, т. е. фазовые траектории в области «быстрых» движений (траектории «быстрых» движений) лежат вблизи s -мерных подпространств:

$$y = \text{const.}$$

Поэтому при достаточно малых μ мы можем с некоторой степенью точности рассматривать движения изображающей точки в этой области (за малые интервалы времени $\Delta t \leq O(\mu^{1-\alpha})$) как *мгновенные скачки*, при которых переменные x изменяются «быстро», скачкообразно, а переменные y остаются неизменными. Соответственно, приближенные (но тем более точные, чем меньше μ) дифференциальные уравнения движения системы в области «быстрых» движений можно записать в следующем виде:

$$y \equiv y^0 = \text{const}, \quad \dot{x} = \frac{1}{\mu} F(x; y^0). \quad (10.17)$$

Таким образом, уравнения упрощенной модели (10.16), составленные при пренебрежении паразитными параметрами, здесь заведомо не пригодны для описания поведения системы. Эти уравнения (10.16) могут отображать законы движения системы (конечно, приближенно при достаточно малых μ) только в пределах малой $O(\mu)$ -окрестности n' -мерного подпространства F , где $|F(x; y)| \leq O(\mu)$ и где, следовательно, скорости изменения состояния системы (т. е. и \dot{x} , и \dot{y}) остаются конечными при сколь угодно малых μ (при $\mu \rightarrow +0$).

2. Условие несущественности малых (паразитных) параметров. В зависимости от того, как идут фазовые траектории «быстрых» движений вблизи n' -мерного подпространства F , возможны два основных случая.

А) Прежде всего возможно, что все траектории «быстрых» движений идут (при возрастании t) внутрь некоторой малой окрестности подпространства F . Тогда изображающая точка, помещенная в начальный момент времени внутрь этой окрестности, будет в дальнейшем двигаться в ее пределах, т. е. вблизи n' -мерного подпространства F , поскольку нет траекторий, выходящих из этой окрестности. При этом движение изображающей точки будет сравнительно медленным (с ограниченными при $\mu \rightarrow +0$ скоростями \dot{x} и \dot{y}) и будет подчиняться (с некоторой степенью точности, но тем точнее, чем меньше μ) уравнениям (10.16) [119, 42]; эти движения изображающей точки, для которых \dot{x} и \dot{y} остаются ограниченными в течение конечных (не стремящихся к нулю) интервалов времени при $\mu \rightarrow +0$, будем называть ниже ради краткости «медленными», а малую $O(\mu)$ -окрестность подпространства F , в которой они имеют место, областью «медленных» движений (в противоположность области «быстрых» движений). Таким образом, паразитные параметры, учтенные при составлении «полных» уравнений (10.15), в этом случае не явля-

ются существенными для процессов в рассматриваемой системе, начинающихся из состояний, совместных с уравнениями (10.16), при условии, конечно, что эти параметры достаточно малы.

Если же в начальный момент времени изображающая точка не находилась вблизи подпространства F , то она по соответствующей траектории «быстрого» движения придет внутрь области «медленных» движений и в дальнейшем будет двигаться в этой области. Иначе говоря, упрощенные уравнения (10.16), составленные при пренебрежении паразитными параметрами системы, вступят в силу по прошествии некоторого малого интервала времени Δt . Длительность этого интервала времени, очевидно, будет тем меньше, чем меньше начальное расстояние изображающей точки от подпространства F и чем меньше значение параметра μ (т. е. чем меньше паразитные параметры системы), причем $\Delta t \rightarrow +0$ при $\mu \rightarrow +0$ (можно показать [42], что $\Delta t \leq O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)$). В этом случае мы можем совсем отказаться от детального рассмотрения «быстрых» движений системы на начальном этапе с помощью уравнений (10.15) или приближенных уравнений (10.17) и постулировать, что представляющая точка и начальный момент времени сразу, скачком переходит в соответствующую точку n' -мерного подпространства F . Такой подход особенно целесообразен, если условия неизменности переменных y при скачке переменных x позволяют однозначно определить место, куда должна прийти изображающая точка в результате скачка. Если же последнее не выполняется, то для определения конечной точки скачка (по заданной начальной) требуется, по крайней мере, качественное рассмотрение хода фазовых траекторий «быстрых» движений (хотя бы при помощи приближенных дифференциальных уравнений (10.17)) или же привлечение дополнительных соображений.

Для получения аналитических выражений для условий несущественности малых (паразитных) параметров, учтенных при составлении уравнений (10.15), заметим, что точки n' -мерного подпространства $F(x; y) = 0$ являются состояниями равновесия для приближенных уравнений «быстрых» движений (10.17) и поэтому поведение траекторий «быстрых» движений вблизи подпространства F (например, на расстояниях порядка μ^a ($0 < a < 1$) от этого подпространства) полностью определяется характером (устойчивостью) этих состояний равновесия. Введем новое, «быстрое» время

$$t' = \frac{t}{\mu}$$

(напомним еще раз, что параметр $\mu > 0$); тогда приближенные дифференциальные уравнения «быстрых» движений (10.17) запишутся в виде:

$$\frac{dx}{dt'} = F(x; y), \quad y \equiv \text{const.}$$

Линеаризуя эти уравнения в окрестности точки $(\bar{x}; y)$ подпространства F , получим систему уравнений первого приближения:

$$\frac{dx_i}{dt'} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

где $\xi_i = x_i - \bar{x}_i$, с характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \lambda & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial F_s}{\partial x_1} & \frac{\partial F_s}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_s}{\partial x_s} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (10.18)$$

Если все s корней характеристического уравнения (10.18) имеют отрицательные действительные части при любых x, y , удовлетворяющих уравнениям $F(x; y) = 0$, то точки подпространства F являются устойчивыми состояниями равновесия для приближенных уравнений «быстрых» движений (10.17) и все траектории «быстрых» движений вблизи подпространства F входят при возрастании t в малую окрестность последнего. Следовательно, в этом (и только в этом) случае *малые паразитные параметры, учтенные при составлении уравнений (10.15), не являются существенными, по крайней мере, для процессов, начинающихся из состояний, совместных с приближенными уравнениями «медленных» движений (10.16)*¹⁾. Таким образом, условия несущественности малых (паразитных) параметров могут быть сформулированы, например, в виде условий Раута — Гурвица [95, 99] для уравнения (10.18).

Отметим два частных случая, которые понадобятся нам в дальнейшем:

1) если в «полной» системе уравнений (10.15) имеется только одно уравнение с малым коэффициентом при производной (т. е. если $s = 1$), то уравнение (10.18) будет уравнением первой степени

$$F'_x(x; y) - \lambda = 0$$

и условие несущественности малого параметра сводится к неравенству

$$F'_x(x; y) < 0, \quad (10.19)$$

выполняемому во всех точках подпространства $F(x; y) = 0$;

¹⁾ Строгое доказательство сформулированного условия несущественности малых параметров в уравнениях (10.15) читатель может найти в работах И. С. Градштейна и А. Н. Тихонова [49, 50, 119].

2) если в системе (10.15) имеются два уравнения с малыми коэффициентами при производных (т. е. если $s=2$), то характеристическое уравнение (10.18) примет вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) \lambda + \frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (x_1, x_2)} = 0,$$

а условием несущественности малых параметров будет выполнение (во всех точках подпространства F) двух неравенств:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} < 0 \text{ и } D = \frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} > 0. \quad (10.19a)$$

Нетрудно видеть, что сформулированное условие несущественности малых паразитных параметров (10.19) выполняется, в частности, для рассмотренных выше RC - и RL -контуров (рис. 502 и 503) по отношению к паразитной индуктивности L_0 (в RC -контуре) и к паразитной емкости C_0 (в RL -контуре). Рассмотрим для примера еще раз RC -контур (рис. 502) с малой паразитной индуктивностью L_0 . После введения безразмерного времени

$t' = \frac{t}{RC}$ мы приведем уравнение (10.1a) к виду (10.15):

$$\mu \frac{di}{dt'} = -q - i = F(q, i), \quad \frac{dq}{dt'} = i,$$

где $\mu = \frac{L_0}{CR^2}$ — малый положительный параметр (если паразитная индуктивность $L_0 \ll CR^2$). Следовательно, условие несущественности малой паразитной индуктивности L_0 : $F'_i < 0$, выполняется во всех точках фазовой прямой $q + i = 0$ упрощенной системы (с $\mu = 0$), поскольку $F'_i = -1 < 0$.

При малых L_0 (т. е. при $L_0 \ll CR^2$) вне линии $q + i = 0$ происходят «скачки» силы тока i при почти неизменном заряде q конденсатора, причем все траектории «быстрых» движений на фазовой плоскости q, i идут в малую окрестность прямой $q + i = 0$, которая является (на плоскости q, i) фазовой линией RC -контурa при пренебрежении малой паразитной индуктивностью L_0 (рис. 518).

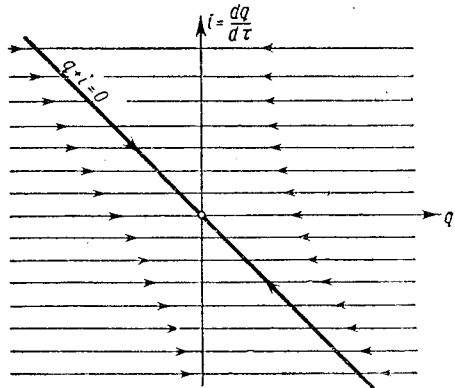


Рис. 518.

Б) Возможен и другой случай, когда условие несущественности малых паразитных параметров не выполняется, по крайней мере, на

некоторой части n' -мерного подпространства F ; будем обозначать ее ниже, ради краткости, через F^- . Тогда среди корней λ характеристического уравнения (10.18), соответствующих точкам подпространства F^- , имеются корни с положительными действительными частями, сами точки подпространства F^- являются неустойчивыми состояниями равновесия для приближенных уравнений «быстрых» движений (10.17) и в «полном» фазовом пространстве x, u имеются траектории «быстрых» движений, уходящие из малой окрестности подпространства F^- (например, из $O(\mu^a)$ -окрестности, где $0 < a < 1$). Тогда изображающая точка не будет оставаться вблизи этой части F^- n' -мерного подпространства F и будет выходить в область «быстрых» движений (в область «скачков» переменных x), где, как мы уже указывали, уравнения (10.16), составленные при пренебрежении паразитными параметрами, совершенно не отображают законов движения системы. Следовательно, в этом случае существуют такие движения системы, которые начинаются из состояний, совместных с уравнениями (10.16), т. е. из состояний, принадлежащих n' -мерному подпространству F , и в то же время не могут быть рассмотрены с помощью уравнений (10.16), т. е. без учета паразитных параметров, сколь бы малы они ни были. Таким образом, в рассматриваемом случае сколь угодно малые паразитные параметры, учтенные при составлении «полных» уравнений (10.15), являются *существенными* для процессов в изучаемой физической системе.

Рассмотрим для примера еще раз при малых C и при малых L схему с вольтовой дугой (рис. 509), колебания которой описываются при учете и емкости C и индуктивности L уравнениями (10.11) (см. § 2, п. 1 этой главы). Малая

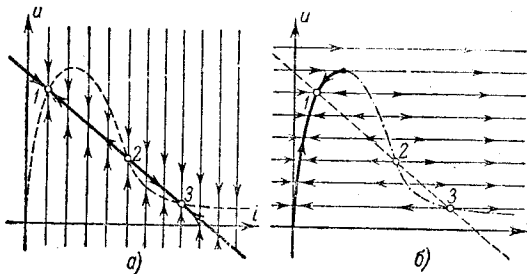


Рис. 519.

емкость C в схеме вообще не является существенной, так как всюду на фазовой линии схемы с $C = 0$, т. е. на прямой

$$F = \frac{E - u}{R} - l = 0,$$

выполнено условие несущественности малой емкости C :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{1}{R} < 0,$$

Разбиение фазовой плоскости i, u на траектории для предельного случая $C \rightarrow +0$ дано на рис. 519, а: все траектории «быстрых» движений («скачков» напряжения u при $i = \text{const}$) идут на фазовую прямую $u = E - Ri$ системы без емкости.

Однако малая индуктивность уже является параметром, существенным для процессов в схеме. В самом деле, фазовой линией схемы без индуктивности является (на плоскости i, u) характеристика дуги — линия $u = \psi(i)$, и условие несущественности сколь угодно малой индуктивности оказывается невыполненным на всем падающем участке этой характеристики, так как там

$$\frac{\partial}{\partial i} [u - \psi(i)] = -\psi'(i) > 0.$$

Состояния схемы на этом участке неустойчивы по отношению к «быстрым» движениям (к скачкам силы тока i при неизменном напряжении u , если $L \rightarrow +0$), т. е. траектории «быстрых» движений отходят от этого падающего участка характеристики дуги (рис. 519, б). Таким образом, индуктивность L (даже сколь угодно малая) является параметром, существенным для колебательных процессов в схеме с вольтовой дугой, и без ее учета (или без учета параметров, ей эквивалентных, например инерционности дугового разряда) рассмотрение поведения схемы не может дать результатов, хотя бы качественно совпадающих с экспериментальными данными.

3. Разрывные колебания [61, 94, 105, 114, 158, 159]. Весьма интересным, особенно для теории систем с разрывными колебаниями, является тот случай, когда n' -мерный образ $F: F(x, y) = 0$ — фазовое пространство «вырожденной» модели системы, построенной при пренебрежении всеми паразитными параметрами, распадается на две части: на часть F^+ , в точках которой условие несущественности тех или иных малых (паразитных) параметров выполняется (все корни характеристического уравнения (10.18) имеют отрицательные действительные части), и на часть F^- , где это условие не выполнено. Тогда *только малая $O(\mu)$ -окрестность подпространства F^+* (в «полном» n -мерном фазовом пространстве x, y) является *областью «медленных» движений изображающей точки*: только там скорости изменения состояния системы (т. е. \dot{x} и \dot{y}) остаются ограниченными в течение конечных интервалов времени при $\mu \rightarrow +0$. Поэтому, если рассматриваемые паразитные параметры достаточно малы (т. е. если $\mu \ll 1$), мы можем пользоваться для описания «медленного» движения изображающей точки вблизи F^+ приближенными уравнениями «медленных» движений системы — уравнениями (10.16), совпадающими с уравнениями «вырожденной» системы, а само движение можем считать происходящим (также приближенно) в пределах этой части F^+ подпространства $F(x, y) = 0$.

Прежде чем переходить к рассмотрению разрывных колебаний, сделаем одно замечание о границе подпространств F^+ и F^- (мы будем обозначать ее через γ). Координаты x, y точек подпространства F являются параметрами характеристического уравнения (10.18), в силу чего корни λ этого уравнения зависят (и притом непрерывно) от координат x, y . Так как в точках подпространства F^+ уравнение (10.18) не имеет ни одного корня с положительной действительной

частью, то при переходе точки $(x; y)$ через границу γ из подпространства F^+ в подпространство F^- среди корней характеристического уравнения (10.18) появляется или один действительный положительный корень или же одна пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью (появление при переходе через границу γ более двух корней с положительной действительной частью является случаем особенным, «негрубым» и реализуется только при специальном подборе функций $F(x; y)$).

Ниже мы будем рассматривать только первый случай. Тогда характеристическое уравнение (10.18) для точек граничной поверхности γ будет иметь один нулевой корень (остальные $s-1$ корней имеют отрицательные действительные части), вследствие чего свободный член этого уравнения

$$D(x; y) = \frac{\partial (F_1, F_2, \dots, F_s)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_s)}$$

равен нулю, т. е. граница γ подпространств F^+ и F^- принадлежит $n'-1$ -мерной поверхности:

$$F_i(x; y) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, s), \quad D(x; y) = 0. \quad (10.20)$$

Дифференцируя уравнения $F_i(x; y) = 0$ по t и используя уравнения (10.16), мы получим (для «медленных» движений):

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \sum_{k=1}^{n'} \frac{\partial F_i}{\partial y_k} G_k = 0$$

или, разрешая относительно \dot{x}_j ,

$$\dot{x}_j = \frac{D_j(x; y)}{D(x; y)},$$

где $D_j(x; y)$ — детерминант, образованный из якобиана $D(x; y)$ заменой элементов столбца с номером j на $-\sum_{k=1}^{n'} \frac{\partial F_i}{\partial y_k} G_k$. Таким образом, точки граничной поверхности γ , на которой $D(x; y)$ обращается в нуль, являются для уравнений «вырожденной» модели (для уравнений (10.16)) точками бесконечно больших скоростей изменения переменных x и точками стыка траекторий этих уравнений, так как при переходе через поверхность γ $D(x; y)$, а следовательно и все \dot{x} , изменяют знак¹⁾.

¹⁾ Если при переходе точки $(x; y)$ из F^+ в F^- среди корней характеристического уравнения появляется пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью (это возможно только при $s \geq 2$), то для точек границы между F^+ и F^- уравнение (10.18) имеет пару чисто мнимых корней, отличающихся друг от друга знаками; в этом случае, как известно, обращается в нуль предпоследний детерминант Гурвица Δ_{s-1} , составленный

Предположим теперь, что в силу динамики «вырожденной» модели, т. е. в силу уравнений (10.16), изображающая точка, двигаясь в пространстве F^+ , придет на граничную поверхность γ . Тогда изображающая точка не сможет двигаться далее в подпространстве F (точнее, вблизи F при малых μ), — она «срывается» в область «быстрых» движений, где переменные x изменяются при малых μ «быстро» (сколь угодно быстро при $\mu \rightarrow +0$) по закону, приближенно отображаемому системой уравнений (10.17), но не уравнениями (10.16).

Пусть в s -мерном подпространстве $u = \text{const}$, включая бесконечно удаленные точки, нет других «элементов притяжения» (ω -предельных траекторий), кроме устойчивых состояний равновесия, принадлежащих, как мы видели, подпространству F^+ . Тогда траектории «быстрых» движений «быстро» (т. е. через интервалы времени $\Delta t \leq O(\mu \cdot \ln \frac{1}{\mu}) \rightarrow +0$ при $\mu \rightarrow +0$) возвращаются снова в область «медленных» движений — в малую $O(\mu)$ -окрестность подпространства F^+ и в «полном» фазовом пространстве существуют траектории, проходящие через области «медленных» и «быстрых» движений. В пределе, при $\mu \rightarrow +0$, каждая такая траектория будет состоять из чередующихся кусков двух типов: из отрезков траекторий «медленных» движений, лежащих в n' -мерном подпространстве F^+ и проходимых изображающей точкой в соответствии с уравнениями (10.16) за конечные интервалы времени, и из отрезков траекторий «быстрых» движений, каждый из которых лежит в s -мерном подпространстве $u = \text{const}$ и пробегается в соответствии с уравнениями (10.17) мгновенно. «Медленное» движение системы переходит в «быстрое» на граничной поверхности γ :

$$F(x; y) = 0, \quad D(x; y) = 0,$$

причем ниже мы будем полагать, что из каждой точки этой поверхности в область «быстрых» движений выходит единственная траектория уравнений (10.17) с соответствующими значениями переменных y , т. е. единственная траектория «быстрого» движения системы¹⁾.

из коэффициентов уравнения (10.18). Таким образом, в этом случае граница между подпространствами F^+ и F^- будет принадлежать другой $n' - 1$ -мерной поверхности:

$$F(x; y) = 0, \quad \Delta_{s-1} = 0.$$

Точки этой границы, очевидно, не являются для уравнений «вырожденной» модели (для уравнений (10.16)) ни точками бесконечно больших скоростей изменения переменных x , ни точками стыка фазовых траекторий.

¹⁾ Для приближенных уравнений (10.17) точки граничной поверхности γ являются сложными особыми точками: для них один корень характеристического уравнения (10.18) равен нулю, а остальные корни имеют отрицательные действительные части. В основном случае (в случае «первой степени негрубости») эти точки аналогичны особым точкам типа седло-узел на фазовой плоскости и из каждой из них (или, точнее, из сколь угодно малой окрестности каждой из них) выходит единственная траектория уравнений (10.17).

Это даст нам возможность однозначного построения фазовых траекторий системы в «полном» фазовом пространстве с помощью более простых, приближенных уравнений (10.16) и (10.17). При этом можно доказать, что *траектории системы уравнений (10.15) при достаточно малых значениях положительного параметра μ действительно идут вблизи траекторий, построенных при помощи приближенных уравнений (10.16) и (10.17) указанным выше способом*¹⁾.

Рассмотренные выше траектории и являются математическими образами *разрывных колебаний*, к которым близки колебания в изучаемых системах при достаточно малых значениях паразитных параметров. Среди этих траекторий возможны и замкнутые траектории — *разрывные предельные циклы*, которые, очевидно, соответствуют периодическим разрывным колебаниям (*разрывным автоколебаниям*).

Таким образом, исследование разрывных колебаний (точнее, колебаний, близких к разрывным при достаточно малых значениях паразитных параметров системы, т. е. при $0 < \mu \ll 1$) можно проводить, и тем точнее, чем меньше μ , при помощи приближенных уравнений «медленных» движений системы

$$F(x; y) = 0, \quad \dot{y} = G(x; y) \quad (10.16)$$

в области «медленных» движений, т. е. в той части F^+ подпространства $F(x; y) = 0$, в которой выполнено условие несущественности учтенных паразитных параметров, и при помощи приближенных уравнений кратковременных «быстрых» движений (мгновенных скачков переменных x)

$$y = \text{const}, \quad \mu \dot{x} = F(x; y) \quad (10.17)$$

в остальной части «полного» фазового пространства x, y .

Сделаем одно небольшое замечание по поводу так называемых «условий скачка». Так как при мгновенном скачке переменных x (при $\mu \rightarrow +0$) переменные y не изменяются и так как и начальная точка скачка (x^-, y^-) (точка граничной поверхности γ) и конечная точка скачка (x^+, y^+) лежат в одном и том же подпространстве F , то их координаты, очевидно, связаны между собой следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} F(x^-, y^-) = 0, \quad D(x^-, y^-) = 0, \\ y^+ = y^-, \quad F(x^+, y^+) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

которые обычно и называются условиями скачка. Во многих задачах мы знаем заранее (например, на основании тех или иных экспери-

¹⁾ Доказательство этого утверждения (см., например, [105]) выходит за рамки настоящей книги. Для периодических движений систем второго порядка доказательство будет дано в § 4 этой главы.

ментальных данных), что «быстрые» движения системы «быстро» переходят снова в «медленные», а уравнений (10.21) достаточно для однозначного определения той точки (x^+, y^+) области «медленного» движения, куда изображающая точка придет в результате мгновенного скачка из заданной точки (x^-, y^-) . В таких задачах мы можем заменить детальное рассмотрение хода траекторий «быстрых» движений (траекторий приближенных уравнений (10.17)) введением постулата скачка: указанием точек n' -мерного фазового пространства «вырожденной» системы, где «медленные» движения системы невозможны и откуда, следовательно, начинаются скачки изображающей точки (т. е. указанием области F^- и ее границы γ), и указанием «закона скачка»

$$y^+ = y^-, \quad F(x^-, y^-) = 0, \quad F(x^+, y^+) = 0,$$

позволяющего однозначно определить конечную точку скачка по заданной начальной¹⁾. Этим приемом мы будем часто пользоваться при рассмотрении разрывных колебаний в конкретных физических системах.

Обычно условия неизменности переменных y при мгновенном скачке переменных x имеют ясный физический смысл и могут быть получены без составления уравнений движения системы с учетом тех или иных существенных паразитных параметров. Например, в электрических системах эти условия обычно имеют смысл неизменности при мгновенных скачках состояния системы — напряжений на конденсаторах или силы тока в индуктивностях схемы — и легко получаются из дополнительного предположения об ограниченности токов и напряжений в электрических системах. Однако определение (теоретическое, без обращения к экспериментальным данным) множества точек фазового пространства, из которых начинаются скачки, а также выяснения вопроса, являются ли «быстрые» движения кратковременными и переходят ли они снова в «медленные» движения, требует составления дифференциальных уравнений системы с учетом хотя бы некоторых малых (паразитных) параметров, существенных во время «быстрых» движений системы, требует обращения к уравнению (10.17).

Рассмотрение дифференциальных уравнений скачков (10.17) особенно необходимо в тех задачах о разрывных колебаниях, в которых условия скачка (10.21) допускают несколько конечных точек скачка (такова, например, задача о разрывных колебаниях связанных мультивибраторов [37]). В таких задачах рассмотрение хода траекторий скачков на основании приближенных уравнений (10.17) снимает эту неоднозначность без введения каких-либо дополнительных (и часто весьма искусственных) предположений и гипотез.

¹⁾ Напомним, что начальные точки скачков — точки граничной поверхности γ — в рассматриваемом нами случае являются точками стыка фазовых траекторий уравнений (10.16).

В заключение параграфа остановимся кратко на том случае, когда приближенные уравнения (10.17) (при $y = \text{const}$) имеют ω -предельные траектории, отличные от устойчивых состояний равновесия, имеют, например, устойчивое периодическое или квазипериодическое решение

$$x = x^* \left(\frac{t}{\mu}, y \right) \quad (10.22)$$

(переменные y в этом решении, как и в уравнениях (10.17), рассматриваются как постоянные параметры); очевидно, этот случай может иметь место только при $s \geq 2$, т. е. при условии, что малый параметр при производных имеется не менее чем в двух уравнениях системы (10.15). Теперь в отличие от случая разрывных колебаний, рассмотренного выше, «быстрые» движения системы существуют не кратковременно, а в течение конечных, не стремящихся к нулю при $\mu \rightarrow +0$ интервалов времени t или даже сколько угодно долго. Поэтому утверждение, что переменные y не изменяются (или, точнее, изменяются мало) за время «быстрого» движения системы, уже не является правильным. Для получения (приближенного) закона изменения переменных y во время «быстрого» периодического (или квазипериодического) движения (10.22) подставим это решение уравнений (10.17) во вторые уравнения (10.15); тогда получим:

$$\dot{y} = G \left[x^* \left(\frac{t}{\mu}, y \right); y \right] \quad (10.23)$$

или после введения «быстрого» времени $t' = \frac{t}{\mu}$:

$$\frac{dy}{dt'} = \mu G [x^*(t', y); y]. \quad (10.23a)$$

Так как переменные y являются медленно меняющимися функциями «быстрого» времени t' $\left[\frac{dy}{dt'} = O(\mu) \right]$, то для приближенного решения полученной неавтономной системы уравнений (10.23a) можно применить «метод усреднения», использованный нами в методе Ван-дер-Поля (см. § 2 и 3 гл. IX). Именно, решение уравнений (10.23a) при малых μ близко к решению «укороченных» уравнений, получаемых путем усреднения правых частей по явно входящему времени:

$$\frac{dy}{dt'} = \mu \bar{G}(y) \quad (10.24)$$

или

$$\dot{y} = \bar{G}(y), \quad (10.24a)$$

где $\bar{G}(y)$ — усредненные по t' функции $G[x^*(t', y); y]$ или, что то же самое, постоянные составляющие разложений Фурье этих функций по явно входящему t' . Интегрируя эти «укороченные» уравнения, мы и получим приближенный (но тем более точный, чем меньше μ) закон изменения переменных y :

$$y = y^*(t),$$

и уточненный закон изменения переменных x :

$$x = x^* \left[\frac{t}{\mu}, y^*(t) \right] \quad (10.22a)$$

во время «быстрого» движения системы («медленное» изменение переменных y во время «быстрого» движения может привести, в частности, к его прекращению).

«Быстрые» движения, продолжающиеся конечные (или бесконечно большие) интервалы времени t , очевидно, отображают высокочастотное (в частности,

паразитное) возбуждение тех или иных систем. Они могут получаться также и в том случае, когда при переходе точки $(x; y)$ из подпространства F^+ в подпространство F^- среди корней характеристического уравнения (10.18) появляется пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью (см. примечание на стр. 754). Примером такой системы может служить ламповый генератор с автоматическим смещением, в котором при больших постоянных времени цепи автоматического смещения получается прерывистая генерация [48, 53, 57, 109].

Затем, что рассмотренный сейчас метод, очевидно, включает в себя как частный случай приближенный метод изучения разрывных колебаний, изложенный выше.

§ 4. Разрывные колебания в системах второго порядка

Для иллюстрации сказанного в § 3 рассмотрим более подробно разрывные колебания в динамической системе, движение которой описывается двумя дифференциальными уравнениями первого порядка вида:

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{x} &= F(x, y), \\ \dot{y} &= G(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (10.15a)$$

где $F(x, y)$ и $G(x, y)$ — однозначные непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные, а μ — малый положительный параметр (в такой системе, как указывалось выше, «быстрые» движения, продолжающиеся конечные или бесконечно большие интервалы времени, невозможны). Ниже мы будем считать, что фазовой поверхностью рассматриваемой системы является обычная (декартова) плоскость x, y .

Фазовым пространством «вырожденной» системы (с $\mu = 0$) будет непрерывная линия F , определяемая на плоскости x, y уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Только в ее малой окрестности (с размерами порядка μ) фазовая скорость изображающей точки будет ограниченной при $\mu \rightarrow +0$. Наоборот, вне малой окрестности линии F $\dot{x} \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$ (а \dot{y} остается ограниченной) и $\frac{dy}{dx} = \mu \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \rightarrow 0^1$, т. е. там фазовые траектории системы близки при малых μ к прямым $y = \text{const}$ и по ним изображающая точка двигается с большими скоростями изменения x . Приближенными (тем более точными, чем меньше μ)

¹⁾ Например, вне $\sqrt{\mu}$ -окрестности линии F $|\dot{x}| \geq O\left(\mu^{-\frac{1}{2}}\right) \rightarrow \infty$ и $\left|\frac{dy}{dx}\right| \leq O\left(\mu^{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow +0$.

уравнениями этих «быстрых» движений системы по траектории, близкой к прямой $y \equiv y^0 = \text{const}$, будут:

$$y \equiv y^0 = \text{const}, \quad \mu \dot{x} = F(x, y^0) \quad (10.17a)$$

(эти уравнения отображают динамику «быстрых» движений системы только в области «быстрых» движений, т. е. только вне малой окрестности линии F). Для этих приближенных уравнений точки пересечения прямой $y \equiv y^0 = \text{const}$ и линии F являются особыми точками (устойчивыми, если $F'_x < 0$, и неустойчивыми, если $F'_x > 0$) и определяют поэтому разбиение прямой $y \equiv y^0 = \text{const}$ на траектории уравнения (10.17a). Если при достаточно больших $|x|$ знак функции $F(x, y)$ противоположен знаку x , то траектории «быстрых» движений идут из бесконечности и от участков F^- линии $F(x, y) = 0$, на которых $F'_x(x, y) > 0$, к тем участкам F^+ той же линии, на которых $F'_x(x, y) < 0$. Поэтому «медленные» движения системы (с ограниченными \dot{x} и \dot{y} в течение конечных интервалов времени при $\mu \rightarrow +0$) будут происходить только в малых окрестностях (с размерами порядка μ) участков F^+ :

$$F(x, y) = 0, \quad F'_x(x, y) < 0$$

и будут приближенно отображаться уравнениями:

$$F(x, y) = 0, \quad \dot{y} = G(x, y), \quad (10.16a)$$

т. е. уравнениями «вырожденной» системы (с $\mu = 0$).

В предельном случае $\mu \rightarrow +0$ мы получим следующее разбиение плоскости x, y на траектории: вся плоскость (вне линии F) заполнена траекториями «быстрых», скачкообразных движений системы — траекториями $y = \text{const}$, идущими к линии F^+ (согласно уравнению (10.17a) изображающая точка «скачет» вправо, т. е. $\dot{x} \rightarrow +\infty$, в области $F(x, y) > 0$ и влево, т. е. $\dot{x} \rightarrow -\infty$, в области $F(x, y) < 0$), а сама линия F^+ является траекториями «медленных» движений, вдоль которых изображающая точка движется с ограниченной фазовой скоростью (с ограниченными \dot{x} и \dot{y} и в соответствии с уравнением (10.16a)).

Пусть на линии F имеются как участки F^+ (на них $F'_x(x, y) < 0$), так и участки F^- (на последних $F'_x(x, y) > 0$). Обозначим через γ граничные точки этих участков линии F ; в этих точках, очевидно,

$$F'_x(x, y) = 0$$

и касательная к линии F горизонтальна¹⁾. Если изображающая точка системы, «медленно» двигаясь по траектории F^+ , приходит в одну

¹⁾ Здесь и ниже мы считаем, что в точках γ $F'_y(x, y) \neq 0$, т. е. что эти точки не являются особыми точками кривой F .

Дифференцируя $F(x, y) = 0$ по t и используя дифференциальное уравнение (10.16a), мы получим, что во время «медленного» движения $F'_x \dot{x} + F'_y \dot{y} = 0$,

из точек γ , то далее она выходит в область «быстрых» движений и двигается («быстро», скачком) по выходящей из этой точки траектории «быстрого» движения $y = \text{const}$ до выходящей из этой точки траектории «медленного» движения F^+ . В этом случае в системе будут происходить разрывные колебания, т. е. колебания, состоящие из чередующихся «медленных» (с ограниченными \dot{x} и \dot{y} при $\mu \rightarrow +0$) и «быстрых», скачкообразных (с $\dot{x} \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$) движений.

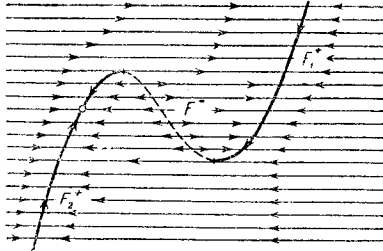


Рис. 520.

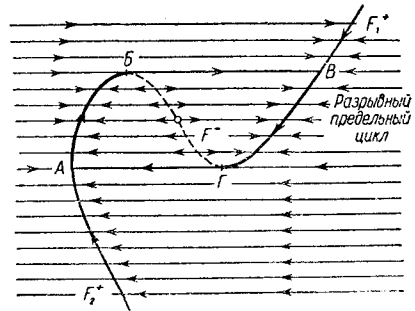


Рис. 521.

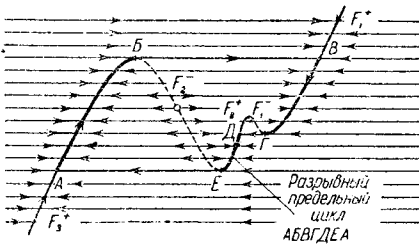


Рис. 522.

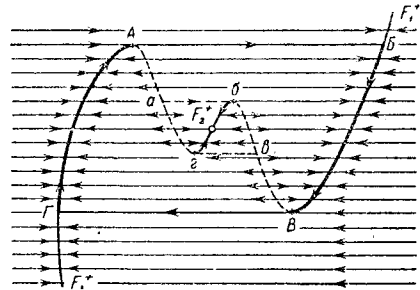


Рис. 523.

Несколько примеров разбиений фазовой плоскости системы уравнений (10.15а) на траектории в предельном случае $\mu \rightarrow +0$ приведено на рис. 520—523. На рис. 520 изображен тот случай, когда на линии «медленных» движений (на линии F_2^+) имеется устойчивое состояние равновесия системы, которое и устанавливается после

т. е. $\dot{x} = -\frac{F_2^+ y}{F_2^+ x}$. Поэтому для уравнений «вырожденной» модели (для уравнений (10.16а)) точки γ являются точками, в которых \dot{x} обращается в бесконечность и которые являются точками стыка траекторий (при переходе через эти точки \dot{x} изменит знак). Последнее справедливо и в тех случаях, когда $F_2^+(x, y)$ имеет разрыв непрерывности в точках γ , что обычно получается при кусочно-линейных уравнениях системы.

нескольких колебаний. Фазовые портреты, изображенные на рис. 521, 522 и 523, содержат *разрывные предельные циклы*, т. е. такие замкнутые кривые, которые состоят из кусков траекторий «медленных» движений (на линии F^+) и кусков траекторий «быстрых» движений (скачков) $y = \text{const}$, пробегаясь изображающей точкой (в соответствии с уравнениями (10.16а) и (10.17а)) периодически и соответствуют поэтому периодическим разрывным колебаниям системы (разрывным автоколебаниям).

На рис. 523 изображено разбиение фазовой плоскости на траектории для случая жесткого режима возбуждения разрывных автоколебаний, когда на фазовой плоскости наряду с (устойчивым) разрывным предельным циклом $AB\Gamma A$ имеется еще и устойчивое состояние равновесия (на участке F_2^+ линии «медленных» движений). Замкнутая линия $ab\gamma a$ является неустойчивым предельным циклом и делит фазовую плоскость на области «притяжения» состояния равновесия и предельного цикла $AB\Gamma A$. Именно, в системе установится состояние равновесия, если изображающая точка находилась в начальный момент времени в области, лежащей внутри кривой $ab\gamma a$; если же в начальный момент времени изображающая точка находилась вне этой области, то она придет на разрывный предельный цикл $AB\Gamma A$, т. е. в системе установятся разрывные автоколебания.

Пусть на фазовой плоскости x, y системы уравнений

$$\mu \dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y), \quad (10.15a)$$

где, как и раньше, $F(x, y)$, $G(x, y)$ — однозначные непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные, и μ — малый положительный параметр, имеется (в предельном случае $\mu \rightarrow +0$) разрывный предельный цикл $C_0: A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_m B_m A_1$, состоящий из чередующихся m отрезков траекторий «медленных» движений (на линии F^+): $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_m B_m$, и m отрезков траекторий «быстрых» движений ($y = \text{const}$): $B_1 A_2, B_2 A_3, \dots, B_{m-1} A_m, B_m A_1$. В силу определения разрывного предельного цикла на каждом из его участков «медленного» движения $A_k B_k$ (за исключением точки B_k):

$$F(x, y) = 0, \quad F'_x(x, y) < 0, \quad G(x, y) \neq 0,$$

причем знак функции $G(x, y) = \dot{y}$ на участке $A_k B_k$ таков, что изображающая точка движется из точки A_k в точку B_k , и на каждом из отрезков траекторий «быстрых» движений $B_{k-1} A_k$ (точки B_{k-1} и A_k исключаются)

$$F(x, y) \neq 0$$

(знак $F(x, y) = \mu \dot{x}$ на интервале $B_{k-1} A_k$ таков, что изображающая точка «перепрыгивает» из точки B_{k-1} в точку A_k). В точках B_k (т. е. в точках перехода «медленных» движений изображающей точки в «быстрые», скачкообразные)

$$F(x, y) = 0, \quad F'_x(x, y) = 0, \quad G(x, y) \neq 0;$$

мы будем полагать дополнительно, что в них $F'_y(x, y)$ и $F''_{xx}(x, y)$ отличны от нуля. Тогда в каждой точке B_k касательная к линии $F(x, y) = 0$ горизонтальна, а переменная y (в точках кривой F) имеет максимальное или минимальное значение.

В точке B_k ордината y достигает максимума, если $G(x, y) > 0$ на $A_k B_k$, и минимума, если на $A_k B_k$ $G(x, y) < 0$. Поэтому знак $\frac{F''_{xx}}{F'_y}$ в точке B_k совпадает со знаком функции $G(x, y)$ на отрезке $A_k B_k$. Далее, так как знак \dot{x} не изменяется при переходе изображающей точки через точку B_k (при переходе «медленного» ее движения в «быстрое»), $\dot{x} = -\frac{F'_y G}{F'_x}$ и $F'_x < 0$ во время движения изображающей точки по участку $A_k B_k$ разрывного предельного цикла и $\dot{x} = \frac{F}{\mu}$ во время движения по участку $B_k A_{k+1}$, то знак $F'_y G$ в точке B_k совпадает со знаком функции $F(x, y)$ на последующем интервале «быстрого» движения $B_k A_{k+1}$.

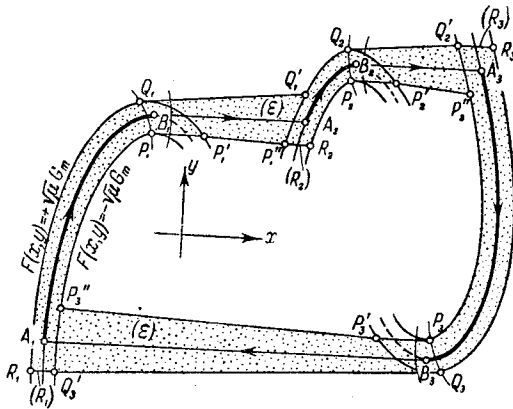


Рис. 524.

Таким образом, знаки F''_{xx} и $F'_y G$ в точке B_k совпадают со знаком функции $F(x, y)$ на интервале $B_k A_{k+1}$; знак функции $G(x, y)$ в точке B_k , разумеется, совпадает со знаком этой функции на отрезке $A_k B_k$.

Для примера на рис. 524 изображен разрывный предельный цикл $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 A_1$, для которого $G(x, y) > 0$ (т. е. $\dot{y} > 0$) на участке «медленного» движения $A_1 B_1$, $F(x, y) > 0$ (т. е. $\dot{x} \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow +0$) на участке «быстрого» движения $B_1 A_2$, $G(x, y) > 0$ на $A_2 B_2$, $F(x, y) > 0$ на $B_2 A_3$, $G(x, y) < 0$ на $A_3 B_3$, $F(x, y) < 0$ на $B_3 A_1$, $F''_{xx} > 0$, $F'_y > 0$ в точке B_1 , $F''_{xx} > 0$, $F'_y > 0$ в точке B_2 и $F''_{xx} < 0$, $F'_y > 0$ в точке B_3 .

Докажем при сделанных предположениях относительно системы уравнений (10.15а), что *в достаточно малой окрестности разрывного предельного цикла C_0 (эта окрестность может быть выбрана сколь угодно малой) лежит единственный и устойчивый предельный цикл системы (10.15а), если только положительный параметр μ достаточно мал.* Иначе говоря, докажем, что *каждый разрывный предельный цикл является предельным положением только одного и притом устойчивого предельного цикла системы (10.15а) при $\mu \rightarrow +0$ [60]¹⁾.*

Первый этап доказательства сформулированной теоремы, существенной для теории разрывных колебаний в системах второго порядка, будет состоять, как и в § 5 гл. VIII, в построении по заданному достаточно малому $\mu > 0$ замкнутой двусвязной области (ε) со следующими свойствами: 1) в области (ε) нет состояний равновесия системы (10.15а); 2) разрывный предельный цикл C_0 лежит внутри этой области, причем область (ε) стягивается к C_0 при $\mu \rightarrow +0$, и 3) траектории системы (10.15а) при заданном значении параметра μ входят (при возрастании t) в область (ε). Очевидно, эта область (согласно теореме V § 2 гл. VI) будет содержать внутри себя по крайней мере один устойчивый предельный цикл системы уравнений (10.15а) при заданном значении параметра μ .

Прежде всего выделим на плоскости x, y некоторую ограниченную односвязную замкнутую область D , которая содержит внутри себя разрывный предельный цикл C_0 и в которой функции $F(x, y)$, $G(x, y)$ и их производные (до нужного нам порядка) непрерывны и, следовательно, ограничены. Ниже мы будем полагать μ выбранным настолько малым, чтобы строящаяся нами область (ε) лежала целиком внутри области D .

Для построения области (ε) проведем на плоскости x, y (в области D) линии

$$F(x, y) = +\sqrt{\mu} G_m \text{ и } F(x, y) = -\sqrt{\mu} G_m,$$

где G_m — наибольшее абсолютное значение функции $G(x, y)$ в области D , и притом такие, что в (открытой) области (α), заключенной между ними и содержащей линию $F(x, y) = 0$,

$$|F(x, y)| < \sqrt{\mu} G_m,$$

а в остальной части области D

$$|F(x, y)| \geq \sqrt{\mu} G_m^2.$$

¹⁾ Эта теорема для частного вида уравнений (10.15а) (для $G(x, y) = x$, $F(x, y) = G(x) - y$) доказана в [196].

²⁾ Заметим, что линия $F(x, y) = +\sqrt{\mu} G_m$ лежит слева от участков «медленных» движений $A_k B_k$ разрывного предельного цикла C_0 , а линия $F(x, y) = -\sqrt{\mu} G_m$ — справа от них, так как на участках $A_k B_k$ $F(x, y) = 0$ и $F'_x(x, y) < 0$.

Проведем также линии

$$\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \pm \sqrt{\mu},$$

на которых угловой коэффициент касательной к кривой $F(x, y) = \text{const}$ обращается в $\pm \sqrt{\mu}$ и которые выделяют в области (α) такие (открытые) области (β_k) , заключенные между ними и содержащие точки B_k , что в областях (β_k)

$$\left| \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \right| < \sqrt{\mu}$$

и в остальной части области (α)

$$\left| \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \right| \geq \sqrt{\mu}.$$

Линии с указанными свойствами можно построить (по крайней мере в пределах области D), выбрав достаточно малое значение параметра μ . При этом область (α) будет лежать внутри некоторой $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности линии $F(x, y) = 0$, а области (β_k) — внутри некоторых $O(\sqrt{\mu})$ -окрестностей точек B_k ¹⁾. Отметим, наконец, точки P_k и Q_k — точки пересечения (в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестностях точек B_k) линии $F'_x(x, y) = -\sqrt{\mu} |F'_y(x, y)|$, являющейся одной из границ областей (β_k) , с линиями $F(x, y) = \pm \sqrt{\mu} G_m$, причем точкой P_k мы будем называть ту из двух точек пересечения, которая имеет меньшую ординату, если $G(x, y) > 0$ на отрезке $A_k B_k$, и большую ординату, если $G(x, y) < 0$ на том же отрезке.

Построение границ области (ε) в малой $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности участка $B_k A_{k+1} B_{k+1}$ разрывного предельного цикла мы проведем сначала для случая, изображенного на рис. 525, когда $G(x, y) > 0$ на отрезках $A_k B_k$ и $A_{k+1} B_{k+1}$ и $F(x, y) > 0$ на интервале $B_k A_{k+1}$ (затем мы укажем, как это построение проводится в других случаях).

¹⁾ Мы пользуемся здесь следующей простой леммой: пусть в некоторой ограниченной области A имеется линия $\Phi(x, y) = 0$, в точках которой существуют непрерывные производные Φ'_x и Φ'_y , не обращающиеся одновременно в нуль; тогда имеется такое положительное число δ_0 , что при любом $0 < \delta \leq \delta_0$: 1) в области A существуют линии $\Phi(x, y) = +\delta$ и $\Phi(x, y) = -\delta$, лежащие в некоторой $O(\delta)$ -окрестности линии $\Phi(x, y) = 0$, и 2) в открытой области, заключенной между этими линиями и содержащей линию $\Phi(x, y) = 0$, $|\Phi(x, y)| < \delta$, а в остальной части области A $|\Phi(x, y)| \geq \delta$. Очевидно, функции $F(x, y)$

в области D и $\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ в области (α) удовлетворяют условиям этой леммы.

1) Проведем горизонтальный прямолинейный отрезок $P_k P'_k$ из точки P_k в точку P'_k , лежащую на линии $F(x, y) = +\sqrt{\mu} G_m$ в области $F'_x(x, y) > 0$ и в $O\left(\mu^{\frac{1}{4}}\right)$ -окрестности точки B_k ¹⁾. Так как в точ-

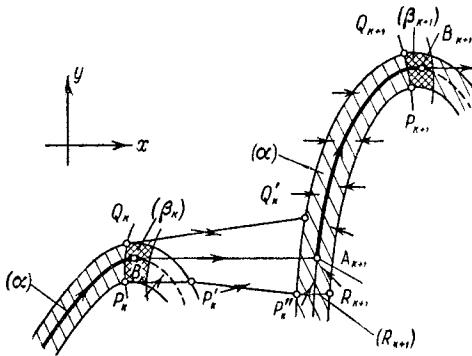


Рис. 525.

ке B_k функция $G(x, y) > 0$ и непрерывна, а отрезок $P_k P'_k$ лежит в некоторой $O\left(\mu^{\frac{1}{4}}\right)$ -окрестности этой точки, то путем выбора достаточно малого значения параметра μ мы всегда сможем добиться, чтобы на построенном отрезке $P_k P'_k$ функция $G(x, y)$ была также положительной. Тогда при выбранном достаточно малом μ траектории системы (10.15а), пересекающие этот отрезок, будут проходить через него снизу вверх ($\dot{y} > 0$ на отрезке $P_k P'_k$).

2) Проведем отрезок прямой $P'_k P''_k$ с угловым коэффициентом $-\sqrt{\mu}$ и отрезок прямой $Q_k Q'_k$ с угловым коэффициентом $+\sqrt{\mu}$ из точек P'_k и Q_k вправо до пересечения с левой границей области (а) в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки A_{k+1} . Если μ выбрать достаточно малым, то оба отрезка будут лежать вне области (а); поэтому на них

$$F(x, y) \geq \sqrt{\mu} G_m \geq \sqrt{\mu} |G(x, y)|$$

1) Такая точка P'_k существует в $O\left(\mu^{\frac{1}{4}}\right)$ -окрестности точки B_k , так как в точке $B_k F''_{xx} \neq 0$. Действительно, разложим функцию $F = F(x, y)$ в степенной ряд в окрестности точки $B_k(x_k^*, y_k^*)$:

$$F = F'_y \eta + F''_{xx} \xi^2 + 2F''_{xy} \xi \eta + F''_{yy} \eta^2 + \dots,$$

где $\xi = x - x_k^*$, $\eta = y - y_k^*$ и $F'_y, F''_{xx}, F''_{xy}, \dots$ — значения соответствующих производных в точке B_k . Так как точки P_k и P'_k имеют одинаковые ординаты, а точка P'_k лежит в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки B_k , то для точки P'_k $|\eta| \leq O(\sqrt{\mu})$, а ее абсцисса ξ определяется уравнением

$$F''_{xx} \xi^2 + b\xi + c + \dots = 0,$$

где b и c — величины порядка $\sqrt{\mu}$. Так как $F''_{xx} \neq 0$ в точке B_k , то $|\xi| = O\left(\mu^{\frac{1}{4}}\right)$, т. е. точка P'_k действительно лежит в $O\left(\mu^{\frac{1}{4}}\right)$ -окрестности точки B_k .

$(F(x, y) > 0$ на отрезках $P'_k P''_k$ и $Q_k Q'_k$, так как эти отрезки лежат в малой $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности интервала $B_k A_{k+1}$, на котором непрерывная функция $F(x, y) > 0$). Рассматривая пересечение фазовых траекторий системы (10.15а) с прямыми $\sqrt{\mu} x \pm y = \text{const}$ (на двух из этих прямых лежат построенные нами отрезки $P'_k P''_k$ и $Q_k Q'_k$), нетрудно видеть, что при выбранном малом μ траектории системы (10.15а), пересекающие отрезки $P'_k P''_k$ и $Q_k Q'_k$, входят (при возрастании t) внутрь полосы, заключенной между этими отрезками и содержащей участок $B_k A_{k+1}$ разрывного предельного цикла. Это следует из того, что при движении изображающей точки по траектории системы (10.15а)

$$\frac{d}{dt} (\sqrt{\mu} x \pm y) = \frac{F(x, y)}{\sqrt{\mu}} \pm G(x, y) \geq 0$$

в точках отрезков $P'_k P''_k$ и $Q_k Q'_k$ в силу приведенного выше неравенства.

3) Пересечем область (α) (в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки A_{k+1}) горизонтальным отрезком (R_{k+1}) , проведенным из точки P''_k в точку R_{k+1} правой границы области (α) . Так как этот отрезок лежит в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки A_{k+1} , в которой непрерывная функция $G(x, y) > 0$, то при достаточно малых μ $G(x, y)$ положительна и на отрезке (R_{k+1}) ; тогда траектории системы (10.15а), пересекающие этот отрезок, проходят через него снизу вверх.

4) Соединим точки Q'_k и R_{k+1} с точками P_{k+1} и Q_{k+1} дугами линий $F(x, y) = \pm \sqrt{\mu} G_m$, лежащими вне областей (β_i) . На них

$$-F'_x(x, y) \geq \sqrt{\mu} |F'_y(x, y)|;$$

поэтому при движении изображающей точки по траекториям системы (10.15а)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{F(x, y)\}^2 &= F \{F'_x \dot{x} + F'_y \dot{y}\} = \\ &= \frac{F^2}{\mu} F'_x + F'_y F G = G_m^2 \left\{ F'_x + \sqrt{\mu} F'_y \frac{G}{G_m} \right\} \leq 0 \end{aligned}$$

в точках этих дуг, т. е. фазовые траектории системы (10.15а), пересекающие эти дуги, входят (при возрастании t) внутрь области (α) .

Построенные нами линии, соединяющие точки P_k и Q_k с точками P_{k+1} и Q_{k+1} , ограничивают полосу — часть области (ϵ) , которая лежит в некоторой $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности участка $B_k A_{k+1} B_{k+1}$ разрывного предельного цикла, содержит этот участок и в которую фазовые траектории системы (10.15а) входят (при возрастании t). Аналогичным образом производится построение границ области (ϵ) в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестностях участков разрывного предельного цикла и при знаках функций $F(x, y)$ и $G(x, y)$, отличных от принятых на рис. 525. Именно, построение участков $P_k P'_k P''_k$ и $Q_k Q'_k$ границ области (ϵ) сводится к изложенному заменой переменной x на $-x$, если $F(x, y) < 0$

на интервале $B_k A_{k+1}$, и y на $-y$, если $G(x, y) < 0$ на отрезке $A_k B_k$; горизонтальный отрезок (R_{k+1}) , пересекающий область (α) в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки A_{k+1} , проводится через нижнюю из точек P_k'' и Q_k' , если $G(x, y) > 0$ на отрезке $A_{k+1} B_{k+1}$, и через верхнюю из них, если $G(x, y) < 0$ на $A_{k+1} B_{k+1}$; затем верхняя из точек P_k'' и Q_k' , если $G(x, y) > 0$ на $A_{k+1} B_{k+1}$, или нижняя из них, если $G(x, y) < 0$ на $A_{k+1} B_{k+1}$, и точка R_{k+1} (т. е. правая точка отрезка (R_{k+1}) , если $F(x, y) > 0$ на интервале $B_k A_{k+1}$, или левая точка этого отрезка, если $F(x, y) < 0$ на $B_k A_{k+1}$) соединяются дугами линий $F(x, y) = \pm \sqrt{\mu} G_m$ с точками P_{k+1} и Q_{k+1} .

Построив указанным способом границы области (ϵ) около каждого из участков разрывного предельного цикла C_0 , мы получим двусвязную область (ϵ) , которая содержит внутри себя разрывный предельный цикл, лежит в некоторой его $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности и в которую фазовые траектории системы (10.15а) входят при возрастании времени t (для примера область (ϵ) построена на рис. 524). При достаточно малых μ эта область не будет содержать и состояний равновесия системы (10.15а), т. е. таких точек, в которых одновременно $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$, поскольку таких точек нет на разрывном предельном цикле, а функции $F(x, y)$ и $G(x, y)$ суть функции непрерывные. Тогда (при достаточно малых μ) построенная область (ϵ) будет содержать внутри себя по крайней мере один устойчивый предельный цикл системы (10.15а).

Докажем теперь, что всякий предельный цикл C системы (10.15а), лежащий в построенной области (ϵ) , является при достаточно малых μ устойчивым; тем самым мы докажем, что при достаточно малых μ в области (ϵ) существует только один предельный цикл системы (10.15а), так как если бы там существовало несколько предельных циклов, то среди них обязательно были бы неустойчивые. С этой целью рассмотрим характеристический показатель предельного цикла C — интеграл

$$I = \int_C \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt,$$

взятый по предельному циклу, и покажем, что $I < 0$ при достаточно малых μ (условие $I < 0$ является, как известно, достаточным условием устойчивости предельного цикла C ; см. § 7 гл. V). Разобьем предельный цикл C точками C_k — точками его пересечения с границей области (α) в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестностях точек A_k — на участки $C_k C_{k+1}$. Тогда

$$I = \sum I_k,$$

где

$$I_k = \int_{C_k C_{k+1}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt$$

— интеграл, взятый по участку $C_k C_{k+1}$ предельного цикла C . Для определения знака интеграла I_k (при достаточно малых μ) разобьем дополнительно участок $C_k C_{k+1}$ предельного цикла на три участка точками его пересечения с линией $F'_x(x, y) = -\mu(G'_y)_m$, где $(G'_y)_m$ — наибольшее абсолютное значение функции $G'_y(x, y)$ в области D , и с границей области (α) в малой окрестности точки B_k (рис. 526). Первая из них — точка $C_k^{(1)}$ — лежит в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точ-

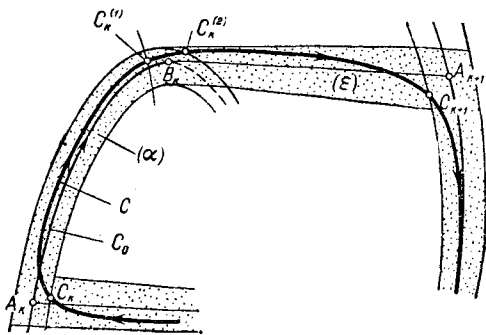


Рис. 526.

ки B_k , вторая — $C_k^{(2)}$ — в $O(\mu^{\frac{1}{4}})$ -окрестности той же точки ¹⁾. Соответственно,

$$I_k = I_k^{(1)} + I_k^{(2)} + I_k^{(3)},$$

где

$$I_k^{(1)} = \int_{C_k C_k^{(1)}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \int_{y_k}^{y_k^{(1)}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} \frac{dy}{G},$$

$$I_k^{(2)} = \int_{C_k^{(1)} C_k^{(2)}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \int_{y_k^{(1)}}^{y_k^{(2)}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} \frac{dy}{G},$$

$$I_k^{(3)} = \int_{C_k^{(2)} C_{k+1}^{(1)}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \int_{x_k^{(2)}}^{x_{k+1}^{(1)}} \left\{ F'_x + \mu G'_y \right\} \frac{dx}{F}$$

¹⁾ Линия $F'_x(x, y) = -\mu(G'_y)_m$ лежит в $O(\mu)$ -окрестности линии $F'_x(x, y) = 0$, отрезок которой в пределах области (α) заключен в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки $B_k(x_k^*, y_k^*)$. Поэтому и точка $C_k^{(1)}$ лежит в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки B_k , т. е. $|y_k^{(1)} - y_k^*| \leq O(\sqrt{\mu})$, где $y_k^{(1)}$ — ордината точки $C_k^{(1)}$. Для точки $C_k^{(2)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$ имеем: $|y_k^{(2)} - y_k^*| \leq O(\sqrt{\mu})$ и следовательно, $|x_k^{(2)} - x_k^*| \leq O(\mu^{\frac{1}{4}})$ (доказательство последнего неравенства аналогично приведенному в примечании на стр. 766).

(здесь $x_k, y_k, x_k^{(1)}, y_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_k^{(2)}$ и x_{k+1}, y_{k+1} — координаты точек $C_k, C_k^{(1)}, C_k^{(2)}$ и C_{k+1}).

Так как при достаточно малых μ на участке $C_k C_k^{(1)}$ предельного цикла $F'_x(x, y) < -\mu(G'_y)_m \leq -\mu |G'_y(x, y)|$ и $|G(x, y)| > a$ (a — некоторое положительное число), то $I_k^{(1)} < 0$, причем, поскольку на этом участке можно выделить отрезок, на котором $F'_x(x, y) < -b$ (b — некоторое положительное число), то

$$I_k^{(1)} = O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

На участке $C_k^{(1)} C_k^{(2)}$, лежащем внутри некоторой $O\left(\mu^{\frac{1}{4}}\right)$ -окрестности точки B_k , $|x - x_k^*| \leq O\left(\mu^{\frac{1}{4}}\right)$, $|y - y_k^*| \leq O\left(\mu^{\frac{1}{2}}\right)$, $|F'_x(x, y)| \leq O\left(\mu^{\frac{1}{4}}\right)$, поскольку в точке B_k $F'_{xx} \neq 0$, $|G(x, y)| > a$; поэтому согласно теореме о среднем

$$|I_k^{(2)}| \leq O\left(\mu^{-\frac{3}{4}}\right) |y_k^{(2)} - y_k^{(1)}| \leq O\left(\mu^{-\frac{1}{4}}\right),$$

так как

$$|y_k^{(2)} - y_k^{(1)}| \leq O(\sqrt{\mu}).$$

Наконец, на участке $C_k^{(2)} C_{k+1}$, лежащем вне области (α) , $|F(x, y)| \geq \sqrt{\mu} G_m$, в силу чего

$$|I_k^{(3)}| \leq O\left(\mu^{-\frac{1}{2}}\right)^1.$$

Таким образом, интеграл $I_k = \int_{C_k C_{k+1}} \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt$ равен сумме

отрицательной величины $I_k^{(1)}$ порядка $\frac{1}{\mu}$ и величин $I_k^{(2)}$ и $I_k^{(3)}$, которые если и стремятся к бесконечности при $\mu \rightarrow +0$, то медленнее, чем $\frac{1}{\mu}$; поэтому при достаточно малых μ $I_k < 0$ на всех участках $C_k C_{k+1}$, следовательно, и характеристический показатель предельного цикла C

$$I = \int_C \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \sum I_k < 0,$$

т. е. предельный цикл C , лежащий в области (α) , является устойчивым. Как уже указывалось выше, мы доказали одновременно и единственность предельного цикла системы (10. 15а), лежащего в области

¹⁾ Нетрудно получить более точную оценку: $|I_k^{(3)}| \leq O(\ln \mu)$.

(ϵ), т. е. в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности разрывного предельного цикла C_0 . В итоге сформулированная выше теорема полностью доказана.

Доказанная теорема, очевидно, позволяет использовать разрывный предельный цикл системы

$$\mu \dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y) \quad (10.15a)$$

в качестве исходного (нулевого) приближения для вычисления тех или иных характеристик автоколебаний в системе (10.15a) при небольших значениях параметра μ . Так, например, период автоколебаний (в нулевом приближении, т. е. при $\mu \rightarrow +0$)

$$T_0 = \int_{C_0} \frac{dy}{G} = \sum_{A_k B_k} \int_{A_k}^{B_k} \frac{dy}{G}.$$

При более детальном рассмотрении [93, 94, 158, 159] хода фазовых траекторий системы (10.15a) вблизи разрывного предельного цикла можно получить асимптотические разложения уравнения предельного цикла, периода автоколебаний и т. д. В частности, для периода автоколебаний получается выражение вида

$$T = T_0 + A\mu^{\frac{2}{3}} + B\mu \ln \frac{1}{\mu} + C\mu + O(\mu^{\frac{4}{3}}),$$

где A , B и C — числа, определяемые значениями функций $F(x, y)$ и $G(x, y)$ на разрывном предельном цикле¹⁾.

Ниже мы займемся рассмотрением разрывных автоколебаний в конкретных колебательных системах, «медленные» и «быстрые» движения которых отображаются (при соответствующих упрощающих предположениях) уравнениями (10.16) и (10.17) не выше второго порядка.

§ 5. Мультивибратор с одним RC-звеном

Рассмотрим еще раз уже знакомую нам автоколебательную систему, совершающую при известных условиях разрывные автоколебания, — мультивибратор с одним RC-звеном (рис. 527)²⁾. Как мы уже видели в § 8 гл. IV, модель мультивибратора, построенная при пренебрежении

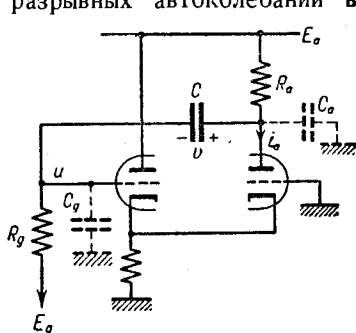


Рис. 527.

¹⁾ Заметим, что коэффициент A зависит от кривизны линии $F(x, y) = 0$ в точках B_k . В частности, когда радиусы кривизны этой линии во всех точках B_k стремятся к нулю, т. е. линия F стремится к линии с изломами в точках B_k , коэффициент $A \rightarrow 0$ и поправка на период становится величиной порядка $\mu \ln \frac{1}{\mu}$ (см., например, § 5 гл. VIII).

²⁾ См. также § 8 гл. IV, § 12 гл. V и § 5 гл. VIII.

всеми паразитными параметрами, оказалась «вырожденной», «дефектной» в том смысле, что она без дополнительных предположений (без постулата скачка) не позволяла проследить за колебаниями мультивибратора, не объясняла даже качественных особенностей колебаний мультивибратора. Это произошло из-за того, что среди отброшенных малых паразитных параметров имеются существенные для колебательных процессов в мультивибраторе. К числу таких существенных параметров относятся малые паразитные емкости C_a и C_g , всегда имеющиеся в реальной схеме (это малые паразитные емкости монтажа и внутриламповые емкости).

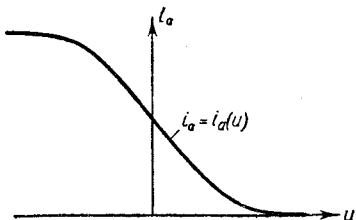


Рис. 528.

1. Уравнения колебаний.

Составим уравнения колебаний мультивибратора, учитывая эти малые паразитные емкости (но считая, что $C_a \ll C$ и $C_g \ll C$)¹⁾. Пренебрегая сеточными токами и анодной реакцией, считая характеристику ламповой группы $i_a = i_a(u)$ (рис. 528) заданной, мы получим на основании законов Кирхгофа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_a - (u + v)}{R_a} &= C \frac{dv}{dt} + C_a \frac{d(u + v)}{dt} + i_a(u), \\ C \frac{dv}{dt} &= \frac{u - E_g}{R_g} + C_g \frac{du}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

Очевидно, мультивибратор имеет единственное состояние равновесия:

$$u = E_g, \quad v = v_0 = E_a - R_a i_a(E_g) - E_g.$$

Введем для упрощения выкладок новые, безразмерные переменные $x, y, t_{\text{нов}}$, связанные со старыми переменными u, v, t соотношениями:

$$u = E_g + u_0 x; \quad v = v_0 + \alpha u_0 x + \beta u_0 y; \quad t_{\text{нов}} = T_0 t,$$

где u_0, T_0 — некоторые масштабы напряжения и времени, α и β — некоторые коэффициенты. Подставляя новые переменные во второе уравнение (10.25), получим:

$$\alpha u_0 \frac{CR_g}{T_0} \dot{x} + \beta u_0 \frac{CR_g}{T_0} \dot{y} = u_0 x + \frac{C_g R_g}{T_0} u_0 \dot{x}$$

(точкой сверху обозначено дифференцирование по новому, безразмерному времени), или, выбрав

$$\alpha = \frac{C_g}{C} \quad \text{и} \quad \beta CR_g = T_0,$$

имеем:

$$\dot{y} = x.$$

¹⁾ Для построения «доброкачественной» модели мультивибратора, позволяющей рассмотреть (и качественно, и количественно) колебания мультивибратора, достаточно, вообще говоря, учесть хотя бы одну из этих паразитных емкостей,

Аналогично первое уравнение (10.25) в новых переменных запишется в виде:

$$\frac{R_a(C + C_a)}{T_0} (\alpha u_0 \dot{x} + \beta u_0 \dot{y}) + \frac{R_a C_a}{T_0} u_0 \dot{x} = \\ = -u_0 x - \alpha u_0 x - \beta u_0 y - R_a [i_a(E_g + u_0 x) - i_a(E_g)]$$

или

$$\frac{\alpha R_a(C + C_a) + R_a C_a}{T_0} \dot{x} = -x \left[1 + \frac{C_g}{C_a} + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right] - \\ - \beta y - \frac{R_a}{u_0} [i_a(E_g + u_0 x) - i_a(E_g)].$$

Выбрав

$$\beta = 1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right)$$

и, следовательно,

$$T_0 = (C + C_a) R_a + (C + C_g) R_g,$$

мы приведем уравнения (10.25) к виду, характерному для систем с разрывными колебаниями:

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{x} = F(x, y) &\equiv -x - y - K \cdot \varphi(x), \\ \dot{y} &= x, \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

где

$$\mu = \frac{R_a}{R_g} \frac{\frac{C_a + C_g}{C} + \frac{C_a C_g}{C^2}}{\left[1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right) \right]^2}$$

— малый положительный параметр, характеризующий малость паразитных емкостей (при $C_a \ll C$ и $C_g \ll C$ параметр $\mu \ll 1$),

$$K = \frac{S R_a}{1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C} \right)}$$

— коэффициент передачи схемы, S — абсолютная величина крутизны характеристики ламповой группы в состоянии равновесия:

$$S = - \left(\frac{di_a}{du} \right)_{u=E_g}$$

и

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S} [i_a(E_g + u_0 x) - i_a(E_g)]$$

— приведенная, безразмерная характеристика ламповой группы (очевидно, $\varphi'(x) \leq 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = -1$). При $C_a \ll C$ и $C_g \ll C$ переменные $x = \frac{u - E_g}{u_0}$ и $y \approx \frac{v - v_0}{\beta u_0}$ пропорциональны соответственно

переменным составляющим напряжения u на сетке левого триода и напряжения v на конденсаторе C ;

$$\mu \approx \frac{R_a}{R_g} \frac{C_a + \frac{C_g}{C}}{1 + \frac{R_a}{R_g}}, \quad K \approx \frac{SR_a}{1 + \frac{R_a}{R_g}};$$

масштаб времени

$$T_0 \approx C(R_a + R_g).$$

Заметим также, что масштаб напряжений u_0 остался произвольным; его можно выбрать так, чтобы упростить выражение для $\varphi(x)$.

Ниже для упрощения рассмотрения мы будем рассматривать только симметричный случай, т. е. будем считать характеристику ламповой группы $i_a = i_a(u)$ и сеточное смещение E_g такими, что приведенная характеристика $\varphi(x)$ является нечетной функцией x ($\varphi(-x) \equiv -\varphi(x)$), причём $|\varphi'(x)|$ монотонно убывает при увеличении $|x|$ (тогда $-1 \leq \varphi'(x) \leq 0$).

2. Фазовая плоскость x, y при $\mu \rightarrow +0$. Скачки напряжения u . Рассмотрим разбиение фазовой плоскости x, y на траектории для случая малого μ , точнее, для предельного случая $\mu \rightarrow +0$. Прежде всего выделим на фазовой плоскости кривую F :

$$F(x, y) \equiv -x - y - K \cdot \varphi(x) = 0$$

или

$$y = -x - K \cdot \varphi(x), \quad (10.27)$$

которая является фазовой линией «вырожденной» модели мульти-вibrатора (т. е. модели с $C_a = C_g = 0$ или с $\mu = 0$). Из уравнений (10.26) следует, что при $\mu \rightarrow +0$ фазовая скорость \dot{x} остается конечной только в малой $O(\mu)$ -окрестности линии F и что вне малой окрестности этой кривой (с размерами, например, порядка $\sqrt{\mu}$) имеют место «быстрые» движения изображающей точки (при $\mu \rightarrow +0$ $\dot{x} \rightarrow +\infty$ под кривой F и $\dot{x} \rightarrow -\infty$ над ней), в то время как $\dot{y} = x$ всюду остается конечной. Вследствие этого фазовые траектории «быстрых» движений близки к горизонтальным прямым $y = \text{const}$, т. е. при «скачках» сеточного напряжения u напряжение v на конденсаторе C можно считать неизменным. Приближенное уравнение «быстрого» движения («скачка») изображающей точки по траектории, близкой к прямой $y \equiv y^0 = \text{const}$, мы получим из первого уравнения (10.26), заменив в нем y на приближенное значение y^0 :

$$\mu \dot{x} = -y^0 - x - K \cdot \varphi(x). \quad (10.28)$$

В зависимости от величины коэффициента передачи K возможны два случая.

При $K < 1$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1 - K \cdot \varphi'(x) < 0$$

на всей фазовой линии «вырожденной» системы, поэтому все траектории «быстрых» движений идут к этой линии F (рис. 529, а). Следовательно, если начальное состояние мультивибратора отображалось точкой в малой окрестности кривой F , то изображающая точка будет в дальнейшем двигаться, не выходя из этой окрестности (точнее, вблизи линии F)¹⁾.

Соответственно колебания мультивибратора при $K < 1$ и достаточно малом значении параметра μ (т. е. при $C_a \ll C$ и $C_g \ll C$) отображаются (тем более точно, чем меньше μ) уравнением «медленных» движений, которое получается при пренебрежении паразитными емкостями или, иначе говоря, подстановкой уравнения фазовой линии F модели первого порядка (с $\mu = 0$) — уравнения (10.27) — во второе уравнение (10.26):

$$[1 + K\varphi'(x)] \dot{x} + x = 0. \quad (10.29)$$

В этом случае (т. е. при $K < 1$) малые паразитные емкости, если они действительно малы, не играют существенной роли в колебательных процессах мультивибратора и ими можно пренебречь. Оче-

видно, при любых начальных условиях устанавливается состояние равновесия $x = 0, y = 0$ (или $u = E_g, v = v_0$), так как при $K < 1$ $1 + K\varphi'(x) > 0$ для всех x и, следовательно, согласно уравнению (10.29) $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Иная картина получается при $K > 1$. В этом случае, как нетрудно видеть, состояние равновесия $(0, 0)$ неустойчиво как при учете паразитных параметров (при $\mu > 0$), так и при пренебрежении ими (при $\mu = 0$). Теперь на фазовой линии F «вырожденной» модели имеется отрезок $-x' \leq x \leq +x'$ ($x' > 0$ — единственный корень уравнения $1 + K\varphi'(x) = 0$), на котором условие несущественности малых паразитных емкостей не выполняется: на этом отрезке

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1 - K\varphi'(x) \geq 0.$$

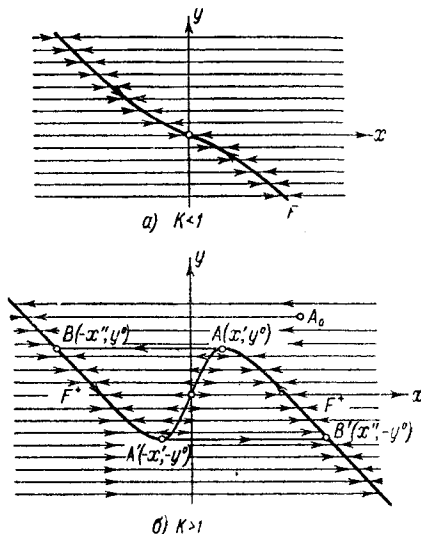


Рис. 529.

¹⁾ Если же начальное состояние мультивибратора отображалось точкой вне малой окрестности кривой F , то изображающая точка, совершив «скачок» по соответствующей траектории «быстрого» движения в малую окрестность линии F , в дальнейшем будет двигаться вблизи фазовой линии F . В пределе, при $\mu \rightarrow +0$, это «медленное» движение будет происходить по самой линии F .

Фазовые траектории «быстрых» движений отходят от этого отрезка фазовой линии «вырожденной системы», содержащего, между прочим, и состояние равновесия $(0, 0)$ (рис. 529, б). Таким образом, при малых паразитных емкостях (при $\mu \ll 1$ или, точнее, в пределе при $\mu \rightarrow +0$) мультивибратор уходит «скачком» из всех состояний с $|x| \leq x'$, причем при «скачке» скачкообразно изменяется переменное x , т. е. напряжение u на сетке левого триода, при неизменном значении переменного y , т. е. при неизменном напряжении v на конденсаторе C мультивибратора. Так из динамики модели мультивибратора, построенной при учете сколь угодно малых паразитных емкостей C_a и C_g , существенных для колебательных процессов в мультивибраторе (при $K > 1$), получается постулат скачка, использованный нами в § 8 гл. IV.

Как нетрудно видеть, все траектории «быстрых» движений идут в малые окрестности тех частей F^+ фазовой линии F «вырожденной» модели, на которых выполняется условие несущественности паразитных емкостей:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1 - K \cdot \varphi'(x) < 0,$$

т. е. к участкам кривой F : $|x| > x'$, имеющим отрицательный наклон ¹⁾. Только в малых $O(\mu)$ -окрестностях этих участков имеют место «медленные» (с конечными скоростями изменения x при $\mu \rightarrow +0$) движения изображающей точки вблизи линии F , подчиняющиеся приближенно (но тем точнее, чем меньше μ) уравнению (10.29). В пределе, при $\mu \rightarrow +0$, эти траектории «медленных» движений стремятся к рассматриваемым участкам линии F с $|x| > x'$. Таким образом получается разбиение фазовой плоскости мультивибратора на траектории, изображенное на рис. 529, б для предельного случая $\mu \rightarrow +0$. К этому разбиению близки разбиения фазовой плоскости на траектории при достаточно малых μ .

Так как на участках кривой F с $|x| > x'$ $1 + K\varphi'(x) > 0$, то там $|x|$ с течением времени уменьшается, и изображающая точка в силу динамики «вырожденной» модели (в силу уравнения (10.29)) придет в одну из точек A или A' (с $x = \pm x'$, $y = \pm y^0 = \pm [x' + K\varphi(x')]$), откуда «скачком» по траектории «быстрого» движения $y = \text{const}$ «перепрыгнет» соответственно в точку B ($-x''$, y^0) или в точку B' (x'' , $-y^0$), после чего снова начнется «медленное» движение и т. д. Для нахождения конечной точки скачка в рассматриваемой нами задаче нет необходимости прибегать к исследованию уравнения «быстрых» движений (10.28), — она однозначно определяется по начальной точке «скачка»

¹⁾ На линии $F(x, y) = 0$ $F'_x + F'_y \left(\frac{dy}{dx} \right)_{F=0} = 0$, т. е. $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{F=0} = -\frac{F'_x}{F'_y} = +F'_x$ в силу $F'_y = -1$.

условием неизменности значения переменной y (т. е. напряжения ϑ на конденсаторе C) во время скачка, что дает в силу (10.27) следующее уравнение для определения абсцисс конечных точек скачка:

$$x'' + K \cdot \varphi(x'') = -\{x' + K\varphi'(x')\}. \quad (10.30)$$

Очевидно, замкнутая кривая $ABA'B'A$ (рис. 529, б) является предельным циклом, устанавливающимся при любых начальных условиях.

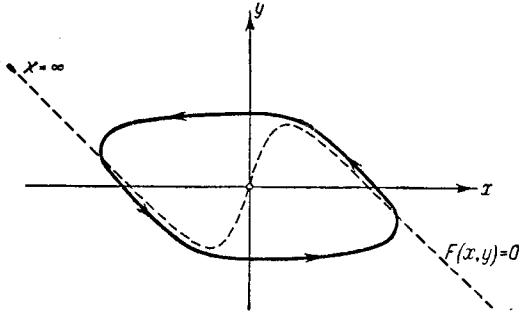


Рис. 530.

Этот предельный цикл является математическим образом «разрывных» автоколебаний мультивибратора, при которых «медленные» движения (с конечными скоростями изменения сеточного напряжения u или x) периодически чередуются с «быстрыми», «скачкообразными» (с $\dot{x} \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$).

Можно показать, что при малых μ на фазовой плоскости также существует предельный цикл (рис. 530), близкий к циклу $ABA'B'A$, т. е. сдвигающийся к нему при $\mu \rightarrow +0$ (см. предыдущий параграф). Осциллограммы колебаний переменных x и y , соответствующих фазовой траектории, начинающейся в точке A_0 (рис. 529, б), качественно изображены на рис. 531: колебания переменной x , т. е. сеточного напряжения u , носят «разрывный» характер; колебания переменной y , т. е. напряжения ϑ на конденсаторе C , непрерывны и имеют «пилообразную» форму.

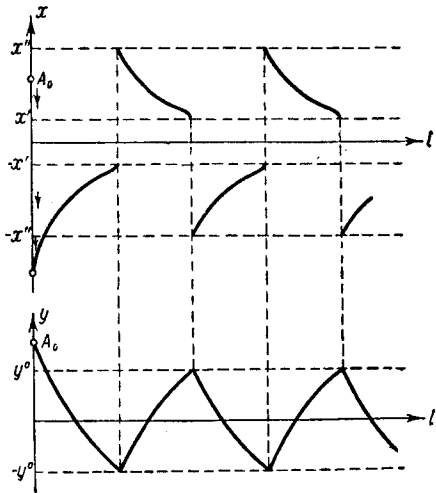


Рис. 531.

Период автоколебаний (при $\mu \rightarrow +0$ или, иначе говоря, его приближенное значение при малых μ) мы, очевидно, получим, если вычислим времена пробега изображающей точки по участкам $B'A$

и BA' «медленного» движения на предельном цикле (длительностью скачков мы пренебрегаем). На траекториях «медленных» движений F^+

$$dt_{\text{нов}} = - \frac{1 + K\varphi'(x)}{x} dx,$$

поэтому период автоколебаний (он равен в рассматриваемом симметричном случае удвоенному времени движения изображающей точки по участку $B'A$)

$$\tau = 2 \int_{x'}^{x''} \frac{1 + K\varphi'(x)}{x} dx$$

в единицах безразмерного времени, или

$$T = T_0 \cdot \tau = 2C(R_a + R_g) \int_{x'}^{x''} \frac{1 + K\varphi'(x)}{x} dx$$

в обычных единицах.

Вычислим период автоколебаний мультивибратора, взяв некоторые конкретные выражения для характеристики ламповой группы.

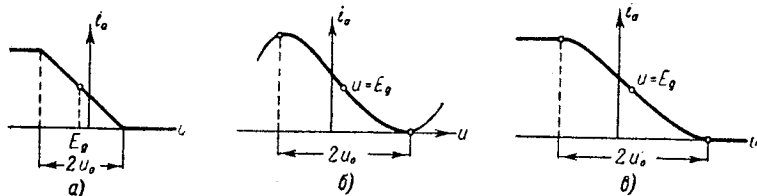


Рис. 532.

Для кусочно-линейной характеристики ламповой группы (рис. 532,а)

$$\varphi(x) = \begin{cases} +1 & \text{при } x < -1, \\ -x & \text{при } |x| < 1, \\ -1 & \text{при } x > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > 1, \\ -1 & \text{при } |x| < 1, \end{cases}$$

если выбрать за масштаб напряжения u_0 половину «длины» падающего участка характеристики (в силу этого $x' = 1$), $x'' = 2K - 1$ и в согласии с результатами § 8 гл. IV и § 5 гл. VIII²⁾ период ав-

¹⁾ В случае кусочно-линейной характеристики начальными точками скачков изображающей точки после медленных движений являются точки излома характеристики $x = \pm 1$, так как условие несущественности паразитных емкостей не выполняется при всех $|x| < 1$ (там $F'_x = K - 1 > 0$) и выполняется только при $|x| > 1$, где $F'_x = -1 < 0$.

²⁾ Это выражение является старшим членом в асимптотическом разложении периода автоколебаний, полученного в п. 6 § 5 гл. VIII; см. (8.60).

токолебаний

$$T = 2C(R_a + R_g) \ln(2K - 1).$$

Для характеристики, аппроксимируемой полиномом третьей степени (рис. 532, б), имеем:

$$\varphi(x) = -x + \frac{x^3}{3} \quad \text{и} \quad \varphi'(x) = x^2 - 1,$$

если под масштабом u_0 понимать половину разности напряжений, при которых крутизна характеристики обращается в нуль. Абсциссы начальных точек скачков при разрывных автоколебаниях найдем из уравнения

$$1 + K(x^2 - 1) = 0, \quad \text{т. е.} \quad x' = \sqrt{\frac{K-1}{K}}.$$

Тогда согласно (10.26) абсциссы конечных точек скачков $\pm x''$ определяются уравнением

$$\begin{aligned} x'' + K\left(-x'' + \frac{x''^3}{3}\right) &= -\left\{x' + K\left(-x' + \frac{x'^3}{3}\right)\right\} = \\ &= \frac{2}{3}(K-1) \sqrt{\frac{K-1}{K}}, \end{aligned}$$

которое, как нетрудно убедиться, имеет единственное действительное решение для x'' :

$$x'' = 2 \sqrt{\frac{K-1}{K}}.$$

Поэтому

$$\tau = 2 \int_{x'}^{x''} \left[Kx - \frac{K-1}{x} \right] dx = (3 - 2 \ln 2)(K-1) \approx 1,6(K-1)$$

и

$$T \approx 1,6 C(R_a + R_g)(K-1)^2.$$

Вычислим, наконец, период автоколебаний мультивибратора для характеристики, падающий участок которой представлен полиномом третьей степени (рис. 532, в), — для характеристики, принятой нами в § 12 гл. V при рассмотрении колебаний генератора с двухзвенной RC -цепочкой и мультивибратора с одним RC -звеном. Для этой характеристики, если взять в качестве масштаба напряжения u_0 половину

¹⁾ А. А. Дородницыным [52] было получено асимптотическое разложение для периода автоколебаний мультивибратора при кубической характеристике, которое в наших обозначениях записывается в виде:

$$\begin{aligned} \tau &= 1,614(K-1) + 7,014(K-1) \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{\mu^3} - \frac{11}{9} \frac{\mu}{K-1} \ln \frac{1}{\mu} - \\ &\quad - \frac{\mu}{K-1} \left\{ \frac{22}{9} \ln(K-1) - 0,087 \right\} + \dots \end{aligned}$$

Полученное сейчас выражение $\tau \approx 1,6(K-1)$ является старшим членом в этом разложении.

«длины» падающего участка характеристики, имеем:

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\frac{2}{3} & \text{при } x < -1, \\ -x + \frac{x^3}{3} & \text{при } |x| \leq 1, \\ -\frac{2}{3} & \text{при } x \geq 1; \end{cases} \quad \varphi'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geq 1, \\ x^2 - 1 & \text{при } |x| \leq 1; \end{cases}$$

$x' = \sqrt{\frac{K-1}{K}}$ (как и в предыдущем примере), а x'' определяется уравнением

$$x'' - \frac{2}{3}K = -\{x' + K\varphi(x')\} = \frac{2}{3}(K-1) \sqrt{\frac{K-1}{K}},$$

т. е.

$$x'' = \frac{2}{3} \left\{ (K-1) \sqrt{\frac{K-1}{K}} + K \right\}^1.$$

Тогда

$$\tau = 2 \int_1^1 \left\{ Kx - \frac{K-1}{x} \right\} dx + 2 \int_1^{x''} \frac{dx}{x} = 1 - (K-1) \ln \frac{K}{K-1} + \\ + 2 \ln \frac{2}{3} \left[(K-1) \sqrt{\frac{K-1}{K}} + K \right]$$

и

$$T = C(R_a - R_g) \left\{ 1 - (K-1) \ln \frac{K}{K-1} + \right. \\ \left. + 2 \ln \frac{2}{3} \left[(K-1) \sqrt{\frac{K-1}{K}} + K \right] \right\}.$$

§ 6. Механические разрывные колебания

Рассмотрим механические колебания, которые могут при известных условиях совершать тела, испытывающие большое трение, но обладающие малой массой [69]. Для конкретности будем считать, что речь идет о тормозном устройстве, схематически изображенном на рис. 533²⁾. Для этого устройства имеем следующее уравнение движения:

$$J\ddot{\varphi} = -k\varphi + M(\Omega - \omega)$$

¹⁾ Мы предполагали здесь, что $x'' > 1$; это выполняется, как нетрудно видеть, при $K > 4/3$. Если же $1 < K < 4/3$, то при автоколебаниях мульти-вibratorа ламповая группа будет работать только на падающем участке характеристики, вследствие чего период автоколебаний будет выражаться формулой, полученной в предыдущем примере.

²⁾ Заметим, что это устройство представляет собой (конечно, сильно схематизированную) модель обычных тормозных устройств и зажима Прони, применяемого для измерения мощности. Поэтому все сказанное ниже относительно колебаний в такой системе, по-видимому, может служить упрощенной теорией вибрации тормозов и колебаний зажима Прони, часто наблюдаемых на практике.

или эквивалентную систему двух уравнений первого порядка:

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad J\dot{\omega} = -k\varphi + M(\Omega - \omega), \quad (10.31)$$

где φ — угол поворота тормозной колодки (относительно положения, в котором момент силы пружин равен нулю), J — момент инерции тормозной колодки, k — коэффициент упругости системы, Ω — угловая скорость вала (мы будем полагать ниже, что $\Omega = \text{const}$) и $M(\Omega - \omega)$ — функция, выражающая зависимость момента силы сухого трения от относительной скорости $\Omega - \omega$ (рис. 534).

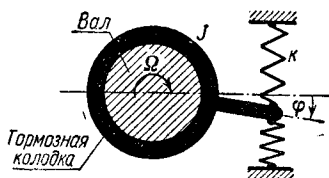


Рис. 533.

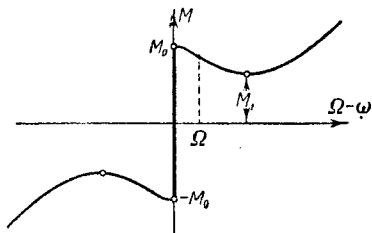


Рис. 534.

Строго говоря, момент сил трения M является функцией не только относительной скорости $\Omega - \omega$, но и угла φ ; именно, при $\Omega - \omega = 0$

$$M = \begin{cases} M_0 & \text{при } k\varphi > M_0, \\ k\varphi & \text{при } |k\varphi| \leq M_0, \\ -M_0 & \text{при } k\varphi < -M_0, \end{cases}$$

где M_0 — максимальная величина момента силы трения покоя (т. е. момент силы трения при отсутствии движения колодки относительно вала уравнивает момент сил пружин $-k\varphi$, если последний не превышает по абсолютной величине момент силы трения покоя M_0). Ниже мы будем считать, что характеристика трения имеет падающие участки, где момент силы трения M убывает с увеличением относительной скорости $\Omega - \omega$. Только при наличии в характеристике трения таких падающих участков мы сможем объяснить появление автоколебаний в рассматриваемой нами механической системе.

Рассматриваемая нами система имеет единственное состояние равновесия:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \omega = 0,$$

причем угол φ_0 при равновесии, очевидно, определяется условием

$$k\varphi_0 = M(\Omega).$$

Это состояние равновесия неустойчиво (система самовозбуждается и в ней будут устанавливаться автоколебания), если

$$M'(\Omega) < 0$$

(см. также § 6 гл. I); это условие мы будем считать в дальнейшем выполненным. Если $-M'(\Omega) \ll \sqrt{kJ}$ и нелинейность характеристики трения (в интересующем нас интервале скоростей) невелика, то автоколебания системы будут близки к синусоидальным (их можно считать, пользуясь методами Ван-дер-Поля или Пуанкаре, изложенными в предыдущей главе).

Мы рассмотрим сейчас другой предельный случай, когда тормозная колодка имеет *малый* момент инерции

$$J \ll \frac{[M'(\Omega)]^2}{k},$$

вследствие чего, как мы увидим, автоколебания будут *релаксационными*, т. е. сильно отличающимися от синусоидальных. В этом случае колебательный процесс отчетливо распадается на два чередующихся и существенно различающихся друг от друга типа движений.

1) В состояниях, в которых момент-силы пружин уравновешен (или почти уравновешен) моментом силы трения, система будет иметь сравнительно небольшие ускорения $\dot{\omega}$, несмотря на малый момент инерции J , что приведет при движениях через эти состояния к *сравнительно медленным изменениям скорости* ω . В этой области член $J\dot{\omega}$ мал:

$$J|\dot{\omega}| \ll k|\varphi| \approx |M(\Omega - \omega)|,$$

и им можно пренебречь. Поэтому эти состояния, в которых ω изменяется сравнительно медленно, изображаются на фазовой плоскости φ, ω точками, лежащими в малой окрестности линии F :

$$F(\varphi, \omega) \equiv -k\varphi + M(\Omega - \omega) = 0,$$

являющейся, очевидно, фазовой линией «вырожденной» системы (с $J=0$); эта окрестность стягивается к F , когда J уменьшается, стремясь к нулю.

2) В состояниях, в которых моменты силы трения и силы пружин не уравновешивают друг друга, ускорения $\dot{\omega}$ очень велики, поскольку момент инерции колодки J достаточно мал. Этим состояниям, в которых *скорость ω изменяется очень быстро*, на фазовой плоскости φ, ω соответствуют точки, лежащие вне некоторой малой окрестности той же линии F , также стягивающейся к F при $J \rightarrow +0$. В этой области быстрых изменений скорости ω при $J \rightarrow +0$ $\dot{\omega} \rightarrow \infty$ ($\dot{\omega} \rightarrow +\infty$ слева от линии F и $\dot{\omega} \rightarrow -\infty$ справа от нее), в то время как сами скорости $\dot{\varphi} = \omega$ остаются конечными. В этой области

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{J\omega}{-k\varphi + M(\Omega - \omega)} \rightarrow 0$$

при $J \rightarrow +0$, т. е. она будет заполнена фазовыми траекториями, близкими к вертикальным прямым $\varphi = \text{const}$, по которым изображающая точка будет двигаться «скачком» (с $\dot{\omega} \rightarrow \infty$ при $J \rightarrow +0$).

В соответствии с этим мы получаем разбиение фазовой плоскости на траектории для предельного случая $J \rightarrow +0$, изображенное на рис. 535. Вся плоскость вне линии F заполнена вертикальными прямолинейными фазовыми траекториями «бесконечных» ускорений, которые идут из бесконечности и от участков линии F , на которых

$$F'_\omega = -M'(\Omega - \omega) > 0$$

и которые, следовательно, соответствуют падающим участкам характеристики трения, к остальным участкам F^+ линии F , изображенным на рис. 535 жирными линиями. Последние, очевидно, представляют собой предельное положение фазовых траекторий «конечных» ускорений (т. е. сравнительно медленных изменений скорости ω). Только на этих участках F^+ фазовой линии F «вырожденной» системы малый момент инерции J , которым обладает реальная система, не является существенным для ее движения, т. е. движение системы может быть приближенно описано «вырожденными» уравнениями:

$$-k\varphi + M(\Omega - \omega) = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega. \quad (10.32)$$

Если положить $J = 0$, т. е. считать уравнения (10.32) применимыми всегда, то мы получим «дефектную» модель первого порядка с фазовой линией F , содержащей точки стыка фазовых траекторий (точки B, D, D' на рис. 535). Эти точки не являются состояниями равновесия, а, с другой стороны, на линии F нет фазовых траекторий системы (10.32), выходящих из этих точек. Таким образом, пользуясь этой моделью, мы не сможем проследить за движением системы. Исправление этой «дефектной» модели может быть сделано или путем фактического учета малого (или даже сколь угодно малого) момента инерции тормозной колодки или же путем введения дополнительного, соответствующим образом сформулированного постулата скачка изображающей точки из точек стыка фазовых траекторий.

Заметим, что точки стыка фазовых траекторий выделяют дуги линии F , которые соответствуют падающим участкам характеристики трения и вблизи которых изображающая точка не может двигаться при сколь угодно малых положительных моментах инерции J . Иначе говоря, фазовая линия «вырожденной» системы содержит участки, на которых сколь угодно малый момент инерции тормозной колодки является параметром, существенно определяющим характер движения системы.

Нетрудно видеть, что в силу динамики «вырожденной» системы (в силу уравнений (10.32)) рассматриваемая нами система не сможет находиться все время в состояниях, изображаемых точками на траекториях F^+ ; рано или поздно изображающая точка, двигаясь по F^+ , придет в одну из точек B, D или D' и «сорвется» в область «бесконечных»

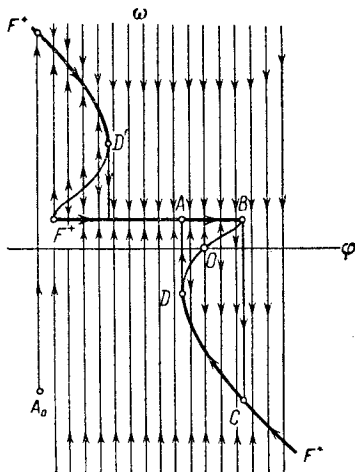


Рис. 535.

ускорений. По соответствующей траектории скачка (BC , DA или $D'A'$) изображающая точка быстро, скачком вновь вернется на одну из траекторий «конечных» ускорений F^+ и т. д. (при скачкообразных изменениях состояний скачком изменяется скорость системы ω при неизменной координате φ). В итоге самое большее после двух движений с конечными ускорениями (например, для движения, начинающегося из состояния A_0 на рис. 535) в системе установятся разрывные периодические автоколебания, которым на фазовой плоскости соответствует предельный цикл $ABCD A$ (рис. 535) и которые состоят из чередующихся движений с конечными и «бесконечными» ускорениями.

Участок AB этого предельного цикла соответствует движению колодки, «захваченной» валом; колодка вращается вместе с валом равномерно со скоростью Ω , при этом пружины деформируются — момент сил упругости возрастает, но вместе с тем возрастает и момент силы трения, все время оставаясь равным моменту силы пружин. Когда момент упругой силы становится равным максимальному моменту силы трения (в точке B), происходит скачкообразное изменение скорости и по величине и по направлению при неизменном растяжении пружин; соответственно изображающая точка «перескакивает» из точки B в точку C , которая соответствует тому же значению момента силы трения

$$M(\Omega - \omega_C) = M_0$$

и которая снова лежит на фазовой траектории сравнительно медленных изменений скорости ω — на траектории F^+ ¹⁾.

¹⁾ Практически натяжение пружин при «скачке» немного изменится, так как на самом деле скачок происходит не мгновенно, но чем меньше момент инерции J , тем меньше длительность скачка и тем меньше изменение координаты φ и натяжения пружин. Порядок величины изменений координаты φ при скачке скорости (от Ω до ω_C) можно примерно оценить, исходя из следующих соображений. Так как реальная система все же обладает некоторым моментом инерции J , то при скачке скорости изменяется и кинетическая энергия системы на $\frac{1}{2} J \Delta(\omega^2)$. Это изменение кинетической энергии должно равняться работе сил натяжения пружин и силы трения:

$$\frac{1}{2} J \Delta(\omega^2) = \int_{\varphi}^{\varphi + \Delta\varphi} [-k\varphi + M(\Omega - \dot{\varphi})] d\varphi \approx \int_{\varphi}^{\varphi + \Delta\varphi} [-M_0 + M(\Omega - \omega)] d\varphi,$$

так как при рассматриваемом скачке

$$\varphi \approx \text{const} = \frac{M_0}{k}.$$

Если ввести среднее значение момента силы трения во время скачка $M_{\text{ср}}$, то $\frac{1}{2} J \Delta(\omega^2) \approx -(M_0 - M_{\text{ср}}) \Delta\varphi$, откуда изменение координаты φ при скачке угловой скорости:

$$\Delta\varphi \approx -\frac{1}{2} \frac{J \Delta(\omega^2)}{M_0 - M_{\text{ср}}}.$$

Далее происходит непрерывное изменение скорости и координаты, определяемое уравнениями (10.32), пока изображающая точка не придет по траектории CD в точку D ($\omega = \omega_D$), соответствующую минимуму характеристики трения. Из этого состояния снова происходит скачок скорости (от ω_D до Ω) при неизменной (точнее, при почти неизменной) координате $\varphi = \frac{M_1}{k}$, где M_1 — минимальное значение момента силы трения (см. рис. 534). Дальше движение совершается таким же образом; колодка совершает автоколебания. Соответствующие осциллограммы автоколебаний угла φ и скорости ω качественно изображены на рис. 536.

«Амплитуда» автоколебаний координаты φ может быть определена по разности максимального и минимального моментов силы трения — по $M_0 - M_1$; именно, она (половина полного размаха) равна

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \frac{M_0 - M_1}{k}.$$

Для вычисления периода нужно подсчитать время движения изображающей точки по траекториям F^+ от A к B и от C к D (рис. 535). Что же касается участков предельного цикла от точки B до точки C и от D до A , то при $J \rightarrow +0$ они проходятся изображающей точкой мгновенно, а при достаточно малых J настолько быстро, что на периоде автоколебаний это заметно не сказывается. Так как на участке AB $\dot{\varphi} = \Omega$, то время его прохождения равно:

$$T_1 = \frac{M_0 - M_1}{k\Omega}.$$

Время T_2 прохождения изображающей точкой участка CD определяется интегрированием на этом участке уравнений (10.32):

$$T = \int_{M_0/k}^{M_1/k} \frac{d\varphi}{\omega} = -\frac{1}{k} \int_{\omega_C}^{\omega_D} \frac{M'(\Omega - \omega)}{\omega} d\omega,$$

так как уравнения (10.32) можно записать также в виде:

$$k\omega = -M'(\Omega - \omega) \frac{d\omega}{dt}. \quad (10.32a)$$

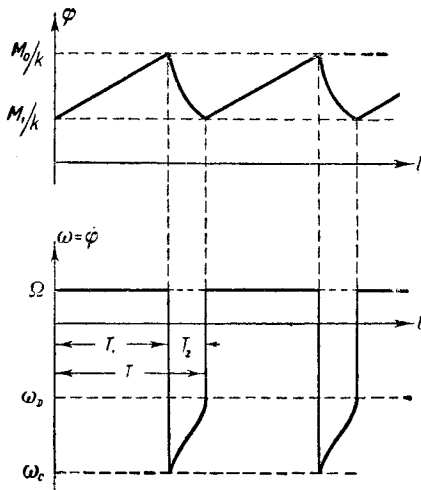


Рис. 536.

Вычислив T_2 (например, графическим интегрированием), мы найдем и период автоколебаний:

$$T = T_1 + T_2.$$

Как уже было сказано, в действительности мгновенных изменений скорости не наблюдается, так как реальная система обладает

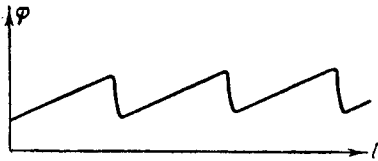


Рис. 537.

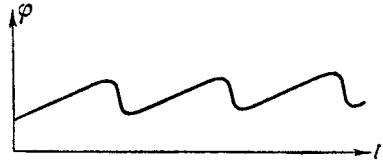


Рис. 538.

некоторым (пусть малым, но конечным) моментом инерции, в результате чего «скачки» происходят не с бесконечно большими, а с очень большими, но конечными ускорениями. Поэтому при $J \neq 0$ фазовые траектории «быстрых» изменений скорости не будут прямолинейными, а должны несколько изогнуться. Однако при достаточно малом моменте инерции и больших моментах упругой силы и силы

трения изгиб этот практически совершенно не заметен. Но характер процесса существенно изменяется при увеличении момента инерции колодки. На рис. 537 и 538 изображены полученные экспериментально кривые колебаний колодки с разными моментами инерции. Форма кривых при увеличении момента инерции колодки получается все более и более близкой к форме гармонических колебаний, и «релаксационный маятник» превращается в маятник Фруда — в автоколебательную систему, близкую к гармоническому осциллятору. Картина на фазовой плоскости (рис. 539), построенная по осциллограмме

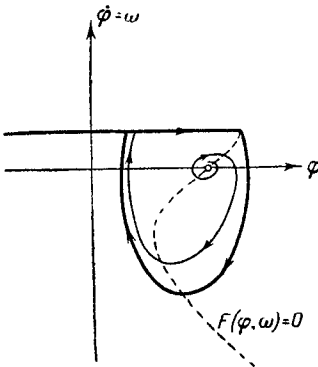


Рис. 539.

колебаний колодки с большим моментом инерции (рис. 538), значительно отличается от разбиения этой плоскости на траектории в предельном случае $J \rightarrow +0$ (рис. 535). Наличие значительного момента инерции колодки сгладило скачки скорости.

§ 7. Два генератора электрических разрывных колебаний

Хорошими электрическими аналогами только что рассмотренной механической релаксационной системы являются простейшие генераторы электрических разрывных (релаксационных) колебаний: схема с неоновой лампой (или с вольтовой дугой) и динаatronный генератор.

1. **Схема с неоновой лампой.** Разрывные колебания в этой схеме (рис. 540) мы уже рассматривали в § 6 гл. IV (п. 2), пользуясь постулатом скачка силы тока, т. е. считая, что при зажигании и гашении неоновой лампы сила тока через нее изменяется скачком при неизменном напряжении на лампе (или, что то же самое, на конденсаторе C). Этот постулат скачка не являлся следствием использованной там модели первого порядка (не являлся следствием уравнения (4.30)), а был получен, исходя из дополнительных физических соображений относительно ограниченности токов и напряжений в схеме.

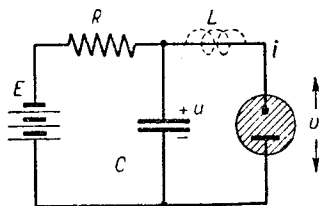


Рис. 540.

Мы рассмотрим теперь кратко ту же схему, учитывая существенные паразитные параметры (но считая их достаточно малыми), и получим, в частности, «скачки» силы тока через неоновую лампу при «неизменном» напряжении на конденсаторе C как следствие динамики системы. Учитывая малую паразитную индуктивность L цепи неоновой лампы, изображенную пунктиром на рис. 540¹⁾, получим следующие уравнения колебаний в схеме с неоновой лампой:

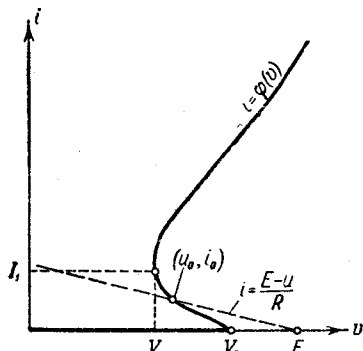


Рис. 541.

$$\left. \begin{aligned} C \frac{du}{dt} &= \frac{E-u}{R} - i, \\ L \frac{di}{dt} &= u - v, \\ i &= \varphi(v), \end{aligned} \right\} \quad (10.33)$$

где $\varphi(v)$ — функция, отображающая зависимость силы тока i через неоновую лампу от напряжения v на ней, — уравнение статической характеристики лампы; обратную функцию, уже однозначную для горящей неоновой лампы, мы обозначим через $v = \psi(i)$.

Как известно, характеристика неоновой лампы (она изображена на рис. 541) имеет падающий участок (при $0 < i < I_1$). Ниже мы будем предполагать, что состояние равновесия (u_0, i_0) рассматриваемой нами схемы, определяемое соотношениями:

$$u = v, \quad i = \frac{E-v}{R} = \varphi(v),$$

¹⁾ Среди малых паразитных параметров, существенных для процессов в схеме, наряду с паразитной индуктивностью монтажа следует отметить также и инерционность газового разряда в неоновой лампе. Эту инерционность приближенно можно отобразить введением некоторой малой, «эквивалент-

единственно, лежит на этом падающем участке (рис. 541) и, следовательно, неустойчиво.

Характеристическое уравнение для этого состояния равновесия, как нетрудно видеть, имеет вид:

$$LCR\lambda^2 + [L + CR\psi'(i_0)]\lambda + R + \psi'(i_0) = 0;$$

поэтому состояние равновесия (u_0, i_0) , если оно лежит на падающем участке характеристики и единственно, т. е. если $-R < \psi'(i_0) < 0$, неустойчиво при $L < -CR\psi'(i_0)$, что, очевидно, выполняется при достаточно малых L . Для того чтобы состояние равновесия было единственным и лежало на падающем участке, необходимо, чтобы E и R были достаточно большими ($E > V_3$, $R > R_{кр}$; подробнее об этом см. гл. IV, § 7, п. 2).

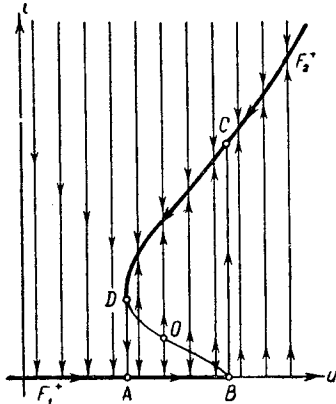


Рис. 542.

Построим предельное (для $L \rightarrow +0$) разбиение фазовой плоскости u, i на траектории системы (10.33). Прежде всего проведем линию F :

$$F(u, i) \equiv u - \psi(i) = 0$$

— фазовую линию «вырожденной» модели (рис. 542) и выделим на ней участки F_1^+ и F_2^+ , на которых выполняется условие несущественности малой паразитной индуктивности L :

$$F_i^+ = -\psi'(i) < 0.$$

Вне этой линии $\frac{di}{dt} \rightarrow \infty$ при $L \rightarrow +0$ (справа от линии $F \frac{di}{dt} \rightarrow +\infty$, слева от нее $\frac{di}{dt} \rightarrow -\infty$) при ограниченных $\frac{du}{dt}$. Поэтому область фазовой плоскости вне линии F является при $L \rightarrow +0$ областью «скачкообразных» изменений состояний системы и заполнена вертикальными прямолинейными траекториями скачков силы тока — траекториями $u = \text{const}$, идущими из бесконечности и от участка линии F , соответствующего падающему участку характеристики неоновой лампы, к линиям F_1^+ и F_2^+ . Иначе говоря, в области вне линий F_1^+ и F_2^+ имеют место скачки силы тока i через неоновую лампу при неизменном напряжении u на конденсаторе C (соответственно при достаточно малых L в этой области имеют место весьма быстрые изменения силы тока i при почти неизменном напряжении u , так как фазовые траектории этих быстрых изменений состояний близки при малых L к прямым $u = \text{const}$). «Медленные» изменения состояний с конечными при $L \rightarrow +0$ скоростями изменения силы тока i и на-

ной» индуктивности последовательно с неоновой лампой. Ниже под L будет подразумеваться сумма этой «эквивалентной» индуктивности и паразитной индуктивности монтажа.

пряжения u имеют место только на линиях F_1^+ и F_2^+ (точнее, вблизи этих линий при малых L). Здесь колебания в схеме удовлетворительно отображаются уравнениями вырожденной (с $L = 0$) системы:

$$i = \varphi(u),$$

$$RC \frac{du}{dt} = E - u - R\varphi(u).$$

Так как на траекториях «медленных» изменений состояний F_1^+ и F_2^+ нет состояний равновесия и изображающая точка движется по ним соответственно к точкам B и D , из которых начинаются скачки силы тока, то при любых начальных условиях в схеме устанавливаются разрывные (релаксационные) автоколебания, которым на фазовой плоскости соответствует предельный цикл $ABCD$ (рис. 542) и при которых колебания силы тока i носят разрывный характер, а колебания напряжения u имеют «пилообразную» форму (рис. 543). Мы не будем вычислять амплитуд и периода автоколебаний, так как они, очевидно, будут выражаться формулами, полученными в § 6 гл. IV.

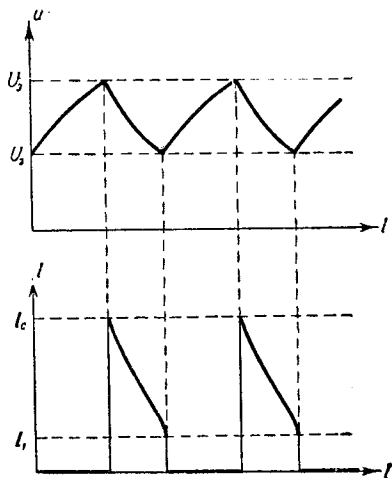


Рис. 543.

Таким образом, в рассматриваемой схеме паразитная индуктивность монтажа и инерционность газового разряда в неоновой лампе являются факторами, существенными (несмотря на их малость) для протекания колебательных процессов в схеме. Только при их учете мы получили динамическую модель, которая достаточно полно отображает динамику схемы и позволяет проследить за колебаниями схемы без привлечения каких-либо дополнительных соображений или гипотез, давая при этом результаты, находящиеся в качественном и удовлетворительном количественном совпадении с экспериментальными данными.

2. Динатронный генератор разрывных колебаний. Схема динатронного генератора разрывных (релаксационных) колебаний приведена на рис. 544; его колебания (при учете малой паразитной емкости C_a) описываются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= E_a - u - Ri, \\ C_a \frac{du}{dt} &= i - i_a, \\ i_a &= \varphi(u), \end{aligned} \right\} \quad (10.34)$$

где $i_a = \varphi(u)$ — уравнение характеристики тетрода (эта характеристика тетрода качественно изображена на рис. 545; существенно, что она имеет падающий участок: при $U_1 < u < U_2$ $\varphi'(u) < 0$)¹⁾.

Генератор имеет состояния равновесия, определяемые, очевидно, уравнением

$$i = \frac{E_a - u}{R} = \varphi(u).$$

Мы будем полагать в дальнейшем параметры схемы E_a , R такими, чтобы схема имела единственное состояние равновесия (u_0, i_0) , лежащее на падающем участке характеристики тетрода (рис. 545). Тогда это состояние равновесия

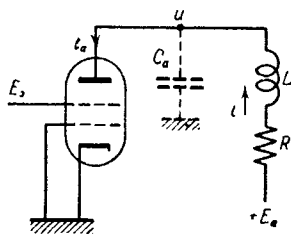


Рис. 544.

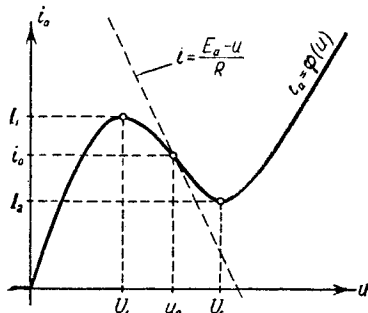


Рис. 545.

неустойчиво, поскольку емкость C_a достаточно мала, и схема будет самовозбуждаться.

Характеристическое уравнение для состояния равновесия (u_0, i_0) генератора, как нетрудно видеть, записывается в виде:

$$\left| \begin{array}{c} L\lambda + R \\ -1 \end{array} \right| C_a \lambda + \varphi'(u_0) \Big| \equiv C_a L \lambda^2 + [C_a R + L \varphi'(u_0)] \lambda + 1 + R \varphi'(u_0) = 0.$$

Если состояние равновесия лежит на падающем участке характеристики и единственно, то $-\frac{1}{R} < \varphi'(u_0) < 0$; следовательно, это состояние равновесия неустойчиво при $C_a < -\frac{L}{R} \varphi'(u_0)$, что выполняется при достаточно малых C_a .

Для рассмотрения колебаний схемы при достаточно малых C_a построим разбиение фазовой плоскости u, i на траектории в пре-

¹⁾ Пренебрегая паразитной емкостью C_a , мы получим модель первого порядка, фазовая линия которой (линия напряжений u) будет содержать точки стыка фазовых траекторий $u = U_1$ и $u = U_2$. Эта модель опять является «дефектной» в том смысле, что она не позволяет проследить за колебаниями системы и объяснить хотя бы качественно колебательные закономерности в схеме. Для рассмотрения колебаний в династронном генераторе нужно или дополнить эту модель соответствующим постулатом скачка или же фактически учесть один из существенных паразитных параметров (таким параметром в схеме является паразитная емкость C_a).

дельном случае $C_a \rightarrow +0$. Это разбиение изображено на рис. 546. Всюду вне линии F , определяемой уравнением $F(u, i) = i - \varphi(u) = 0$, т. е. вне фазовой линии «вырожденной» модели (с $C_a = 0$), скорости изменения напряжения u на тетроте сколь угодно велики при достаточно малых значениях паразитной емкости C_a : при $C_a \rightarrow +0$ $\frac{du}{dt} \rightarrow \infty$, причем над линией F $\frac{du}{dt} \rightarrow +\infty$, под ней $\frac{du}{dt} \rightarrow -\infty$, а $\frac{di}{dt}$ всюду ограничена. Следовательно, эта область фазовой плоскости заполнена траекториями $i = \text{const}$, по которым изображающая точка движется с «бесконечно большой» фазовой скоростью, т. е. траекториями «скачков» напряжения u на тетроте (при неизменной силе тока i). Эти траектории идут из бесконечности и от участка BD линии F , соответствующего падающему участку характеристики, к остальным частям F_1^+ и F_2^+ линии F , на которых выполнены условия несущественности малой паразитной емкости C_a :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\varphi'(u) < 0.$$

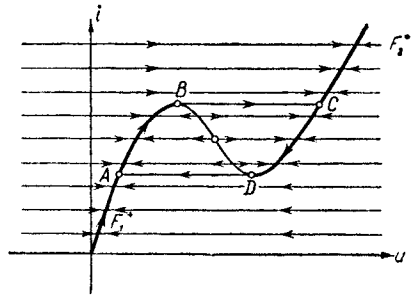


Рис. 546.

В силу этого изображающая точка, попав в результате «скачка» на кривую F_1^+ или F_2^+ , будет затем двигаться по этой кривой уже с конечными (даже при $C_a \rightarrow +0$) скоростями изменения напряжения u , т. е. линии F_1^+ и F_2^+ являются траекториями «медленных» изменений состояний системы¹⁾. Так как на F_1^+ и F_2^+ условие несущественности паразитной емкости C_a выполнено, то здесь малой емкостью C_a можно пренебречь и можно записать уравнение колебаний схемы (при «медленных» изменениях напряжения u на тетроте) в виде следующего уравнения первого порядка:

$$i = \varphi(u), \quad L \frac{di}{dt} + Ri = E_a - u.$$

На траекториях F_1^+ и F_2^+ $\frac{du}{dt} \neq 0$, $\frac{di}{dt} \neq 0$ (там нет состояний равновесия), причем на F_1^+ $\frac{du}{dt} > 0$, а на F_2^+ $\frac{du}{dt} < 0$; поэтому изображающая точка, двигаясь по траектории F_1^+ (по траектории F_2^+), обязательно придет через конечный интервал времени в точку B

¹⁾ Точнее, фазовые траектории «медленных» изменений состояний системы лежат в малой окрестности линий F_1^+ и F_2^+ и стремятся к последним при $C_a \rightarrow +0$. Сами линии F_1^+ и F_2^+ являются при $C_a \neq 0$ изоклинами вертикальных касательных,

(в точку D), откуда по соответствующей траектории скачка $l = \text{const}$ «перескочит» в точку C траектории F_2^+ (в точку A траектории F_1^+).

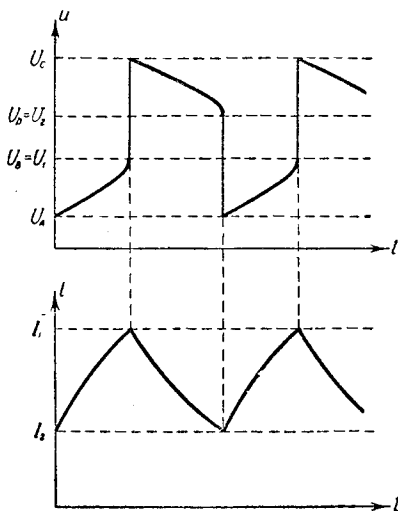


Рис. 547.

«длинных» движений F_1^+ и F_2^+ (длительность скачков от B к C и от D к A мы пренебрегаем) и, как нетрудно видеть, равен

$$T = L \int_{U_A}^{U_B} \frac{\varphi'(u) du}{E_a - u - R\varphi(u)} + L \int_{U_C}^{U_D} \frac{\varphi'(u) du}{E_a - u - R\varphi(u)}$$

(интегралы, стоящие в этом выражении, легко вычисляются, например, в том случае, когда характеристика тетрода аппроксимируется кусочно-линейной функцией).

§ 8. Схема Фрюгауфа

Рассмотрим теперь схему релаксационного генератора, предложенную Фрюгауфом [155, 142]. В этой схеме (рис. 548) существенную роль играет то обстоятельство, что сами лампы образуют участки замкнутых цепей и что поэтому нужно принимать во внимание рас-

¹⁾ Эта картина является общей для всех электрических релаксационных систем, приводящих при пренебрежении паразитными параметрами к одному дифференциальному уравнению первого порядка: если вольт-амперная характеристика $i = \varphi(u)$ нелинейного элемента схемы имеет « N -образную» форму (типа изображенного на рис. 546), то в схеме при разрывных колебаниях будут скачки напряжения u , а сила тока i будет изменяться непрерывно. Наоборот, в случае « S -образной» характеристики $i = \varphi(u)$ нелинейного элемента, аналогичной характеристике неоновой лампы, непрерывно будет изменяться напряжение u , а колебания силы тока будут иметь разрывный характер.

Таким образом, мы приходим к выводу, что на фазовой плоскости существует предельный цикл $ABCD$, в который переходят все траектории системы. Соответственно в схеме при любых начальных условиях устанавливаются автоколебания, при которых в отличие от схемы с неоновой лампой разрывный характер имеют колебания напряжения u , а колебания силы тока i имеют «пилообразную» форму (рис. 547)¹⁾. Наибольшие размахи колебаний силы тока и напряжения, очевидно, равны соответственно $I_B - I_A = I_1 - I_2$ и $U_C - U_A$. Период автоколебаний T складывается из длительностей интервалов времени движения изображающей точки по участкам AB и CD траекторий «мед-

пределение напряжений между лампами и сопротивлениями R . Это сведется к тому, что мы должны будем учитывать анодную реакцию, которая в этой схеме играет принципиальную роль. Поэтому мы при рассмотрении схемы Фрюгауфа будем считать, что анодный ток есть функция не только сеточного, но и анодного напряжения. Именно, мы будем полагать, что анодный ток лампы является однозначной и монотонно возрастающей функцией так называемого «управляющего» напряжения $u_{упр} = u_g + Du_a$:

$$i_a = f(u_g + Du_a),$$

где D — проницаемость лампы — величина, обратная коэффициенту усиления лампы ($D < 1$). Кроме того, ниже мы будем полагать эту функцию такой, что обратная ей функция

$$u_g + Du_a = U(i_a)$$

является также однозначной.

1. «Вырожденная» модель. Пренебрегая всеми паразитными параметрами (в частности, паразитными емкостями) и сеточными токами и считая лампы идентичными, мы получим следующую систему уравнений, описывающих колебания в схеме:

$$i_{a1} = f(u_{g1} + Du_{a1}), \quad i_{a2} = f(u_{g2} + Du_{a2}),$$

$$C \frac{dv}{dt} = i_{a2} - i_{a1},$$

$$u_{g1} = -Ri_{a2}, \quad u_{g2} = -Ri_{a1},$$

$$v = u_{a1} - u_{g2} = E_a - u_{a2} + u_{g1},$$

где u_{g1} , u_{g2} , u_{a1} , u_{a2} — соответственно сеточные и анодные напряжения на лампах \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 (отсчитываемые относительно катодов этих ламп).

Введем безразмерные токи:

$$x = \frac{i_{a1}}{I_0} \quad \text{и} \quad y = \frac{i_{a2}}{I_0},$$

где I_0 — ток насыщения или какой-либо другой масштаб силы тока. Тогда

$$u_{g1} = -RI_0 y, \quad u_{g2} = -RI_0 x,$$

$$u_{a1} = RI_0 \frac{\psi(x) + y}{D}, \quad u_{a2} = RI_0 \frac{\psi(y) + x}{D},$$

где

$$\psi(z) = \frac{1}{RI_0} U(I_0 z)$$

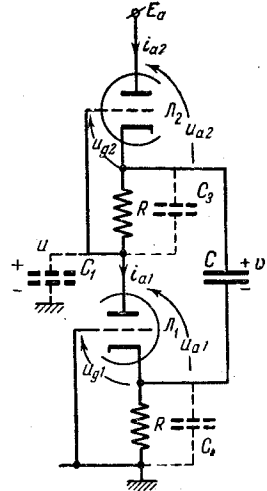


Рис. 548.

— безразмерная (обратная) характеристика лампы, дающая зависимость безразмерного управляющего напряжения $\frac{u_g + Du_a}{RI_0}$ от безразмерного анодного тока $\frac{i_a}{I_0}$; напряжение на конденсаторе C

$$v = \frac{RI_0}{D} \{ \psi(x) + Dx + y \} = \frac{RI_0}{D} \left\{ \frac{DE_a}{RI_0} - \psi(y) - Dy - x \right\}, \quad (10.35)$$

$$RC \frac{dv}{dt} = RI_0 (y - x);$$

используя (10.35) и разрешая относительно производных, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{D}{CR} \frac{x-y}{\Delta(x,y)} \left\{ 1 + D + \psi'(y) \right\}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{D}{CR} \frac{x-y}{\Delta(x,y)} \left\{ 1 + D + \psi'(x) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (10.36)$$

где

$$\Delta(x,y) = [D + \psi'(x)][D + \psi'(y)] - 1. \quad (10.36a)$$

Из полученных уравнений видно, что мы имеем дело с системой первого порядка (с системой с $1/2$ степени свободы), поскольку переменные x и y связаны между собой в силу (10.35) соотношением

$$\Phi(x,y) \equiv \psi(x) + \psi(y) + (1+D)(x+y) = \frac{DE_a}{RI_0}, \quad (10.37)$$

а уравнения (10.36) эквивалентны друг другу (одно из них является следствием другого и соотношения (10.37)).

В силу трудности исключения y или x и полной равноправности переменных x и y мы будем отображать колебания системы движением изображающей точки по фазовой линии Φ :

$$\Phi(x,y) = \frac{DE_a}{RI_0},$$

построенной на плоскости x, y (точнее, в ее квадранте $x \geq 0, y \geq 0$). Эта фазовая линия, равно как и разбиение ее на траектории уравнений (10.36), симметрична относительно биссектрисы $y = x$. Далее, на ней

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+D+\psi'(x)}{1+D+\psi'(y)} < 0, \quad (10.36б)$$

т. е. y убывает с возрастанием x , так как $\psi'(x) > 0$ и $\psi'(y) > 0$; поэтому, если ψ' является непрерывной функцией, что мы будем предполагать, то фазовая линия Φ является всюду гладкой кривой и не может быть замкнутой. Соответственно рассматриваемая нами схема не может совершать непрерывных периодических колебаний, так как правые части уравнений (10.36) являются однозначными функциями точки фазовой линии Φ .

Рассмотрим движение изображающей точки по фазовой линии Φ . Прежде всего отметим, что уравнения (10.36) имеют единственное состояние равновесия (x_0, y_0) , лежащее на биссектрисе $x=y$ и определяемое согласно (10.37) уравнением: $\psi(x_0) + (1+D)x_0 = \frac{1}{2} \frac{DE_a}{RI_0}$. Далее, согласно уравнениям (10.36) изображающая точка движется по линии Φ по направлению к состоянию равновесия (x_0, y_0) в тех точках линии Φ , где $\Delta(x, y) > 0$, и в направлении от этого состояния равновесия там, где $\Delta(x, y) < 0$. Поэтому состояние равновесия схемы устойчиво, если $\Delta(x_0, y_0) > 0$, и неустойчиво, если $\Delta(x_0, y_0) < 0$.

Построим на плоскости x, y симметричную относительно биссектрисы $x=y$ кривую

$$\Delta(x, y) = 0, \quad (10.38)$$

которую мы будем называть ради сокращения кривой Γ . Если эта кривая существует¹⁾, то могут представиться два случая:

1) Параметр $\frac{DE_a}{RI_0}$ таков, что фазовая линия Φ не пересекает кривую Γ . Тогда на Φ всюду $\Delta(x, y) > 0$, и изображающая точка (а следовательно, и рассматриваемая схема) при любых начальных условиях приближается при возрастании t к состоянию равновесия (x_0, y_0) ²⁾.

2) Параметр $\frac{DE_a}{RI_0}$ таков, что фазовая линия Φ пересекает кривую Γ . В этом случае на линии Φ существуют такие расположенные симметрично относительно прямой $y=x$ точки $\gamma(x', y')$, в которых $\Delta(x, y) = 0$ и которые вследствие этого являются точками стыка фазовых траекторий уравнений (10.36). Эти точки не являются состояниями равновесия, и в то же время к ним идут изображающие точки при любых начальных условиях (но на линии Φ нет траекторий, отходящих от точек γ).

Появление на фазовой линии точек стыка траекторий, как и всегда, означает «дефектность» принятой модели, означает существование таких параметров схемы, которые являются существенными для колебаний в схеме, но которыми мы «по наивности» («в силу их малости») пренебрегли, означает, наконец, возможность появления разрывных колебаний. Для рассмотрения последних нам нужно или учесть существенные малые параметры или же дополнить нашу

¹⁾ Она заведомо существует при $\psi'_{\min} < 1 - D$, так как тогда на биссектрисе $y=x$ имеются точки, в которых $\Delta(x, y) < 0$, а с другой стороны вблизи осей координат (при малых x или y) $\Delta(x, y) > 0$, поскольку там $\psi'(x)$ или $\psi'(y)$ могут быть сделаны сколь угодно большими; следовательно, в силу непрерывности функции $\Delta(x, y)$ будет существовать такое геометрическое место точек, в которых $\Delta(x, y) = 0$, т. е. кривая Γ . Если характеристика лампы имеет ток насыщения I_s , то $\psi(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow I_s/I_0$ и кривая Γ будет замкнутой.

²⁾ Ту же картину мы получим при всех E_a , если кривой Γ не существует, ибо тогда $\Delta(x, y) > 0$ во всех точках любой фазовой линии Φ (для любого E_a).

«дефектную» модель первого порядка соответствующим образом сформулированной гипотезой скачка.

2. Постулат скачка. Пойдем сначала по пути дополнения «вырожденной» модели первого порядка (уравнений (10.36)) постулатом скачка. Пусть для определенности фазовая линия Φ пересекает кривую Γ в двух точках: $\gamma_1(x'_1, y'_1)$ и $\gamma_2(x'_2, y'_2)$, причем $x'_2 = y'_1$ и $y'_2 = x'_1$ (рис. 549). Так как эти точки стыка фазовых траекторий всегда являются граничными точками отрезков фазовой линии, на

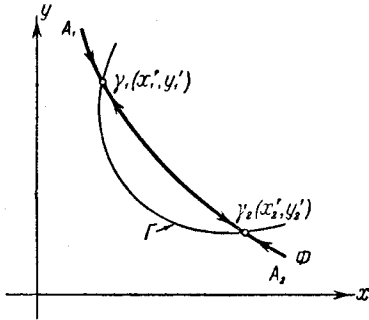


Рис. 549.

которой неучтенные нами малые параметры (или, точнее, некоторые из них) являются существенными для колебательных процессов в генераторе и на которой, следовательно, наша «вырожденная» модель *непригодна* для описания колебаний в схеме, то нам в первую очередь нужно указать те из трех участков $A_1\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$ и γ_2A_2 фазовой линии Φ , на которых колебания схемы могут быть отображены уравнениями (10.36) с некоторой степенью точности, если эти паразитные параметры малы.

Мы примем следующую гипотезу о характере колебаний в схеме:

1) На участках $A_1\gamma_1$ и $A_2\gamma_2$ фазовой линии Φ , на которых $\Delta(x, y) > 0$, неучтенные нами малые, паразитные параметры несущественны для процессов в схеме, в силу чего там имеют место «медленные» изменения состояний схемы, описываемые уравнениями (10.36). Наоборот, на участке $\gamma_1\gamma_2$ имеют место только «быстрые» движения изображающей точки, уводящие ее с $\gamma_1\gamma_2$; там уравнения (10.36) не отображают не только количественно, но и качественно законов колебаний схемы ¹⁾.

2) Когда изображающая точка, двигаясь по участку $A_1\gamma_1$ (или $A_2\gamma_2$) фазовой линии Φ в соответствии с уравнениями (10.36), приходит в точку γ_1 (или γ_2), то дальше она совершает мгновенный скачок в некоторую другую точку $B_1(x''_1, y''_1)$ (или в $B_2(x''_2, y''_2)$) внутри одного из интервалов $A_1\gamma_1$ или $A_2\gamma_2$ фазовой линии Φ , определяемому следующими условиями скачка:

$$\left. \begin{aligned} y'' + \psi(x'') + Dx'' &= y' + \psi(x') + Dx', \\ x'' + \psi(y'') + Dy'' &= x' + \psi(y') + Dy', \end{aligned} \right\} \quad (10.39)$$

причем

$$\Delta(x'', y'') > 0.$$

¹⁾ В п. 4 эта гипотеза будет обоснована путем построения «доброкачественной» модели схемы при учете существенных паразитных емкостей. Некоторым обоснованием гипотезы может служить то обстоятельство, что наша

Эти условия скачка, как обычно, получаются из постулата ограниченности токов и напряжений в схеме, из которого следует, что напряжение v на конденсаторе C (см. (10.35)) должно оставаться неизменным во время скачка анодных токов ламп (напомним, что x и y пропорциональны соответственно i_{a1} и i_{a2}).

Если уравнения (10.39) определяют однозначно по заданной начальной точке скачка γ (по γ_1 или γ_2) конечную точку скачка B (B_1 или B_2) внутри интервалов $A_1 \gamma_1$ или $A_2 \gamma_2$, то сделанная нами гипотеза о характере движения изображающей точки позволит рассмотреть колебания схемы, начинающиеся из состояний, изображаемых точками интервалов $A_1 \gamma_1$ и $A_2 \gamma_2$ фазовой линии Φ . Эти колебания схемы, очевидно, будут периодическими и разрывными.

О существовании и количестве действительных ветвей кривой (B) — множества точек B , соответствующих согласно (10.39) точкам γ при всевозможных значениях параметра $\frac{DE_\alpha}{RT_0}$, — в самом общем случае ничего сказать нельзя. Если кривая (B) существует, то она симметрична относительно биссектрисы $x=y$ и касается в точках последней кривой Γ ; кроме того, она — замкнутая, если характеристика ламп имеет насыщение. Заметим также, что первые два уравнения (10.39) определяют на плоскости x, y , кроме кривой (B), еще кривую двойной кратности, совпадающую с Γ . Однако точки кривой Γ не лежат в области $\Delta(x, y) > 0$ и, следовательно, могут не рассматриваться.

В том случае, когда уравнения (10.39) по заданной точке γ (по заданной начальной точке скачка) определяют несколько точек B , в постулат скачка должны быть добавлены указания, дающие однозначное соответствие точек γ и B .

3. Разрывные колебания схемы. Для дальнейшего рассмотрения этих колебаний необходимо задаться конкретным аналитическим выражением характеристики анодного тока ламп. Будем аппроксимировать характеристику следующей функцией (рис. 550, а):

$$i_a = \frac{I_s}{2} + \frac{I_s}{\pi} \arctg \frac{\pi S}{I_s} (u_{\text{упр}} - u_0),$$

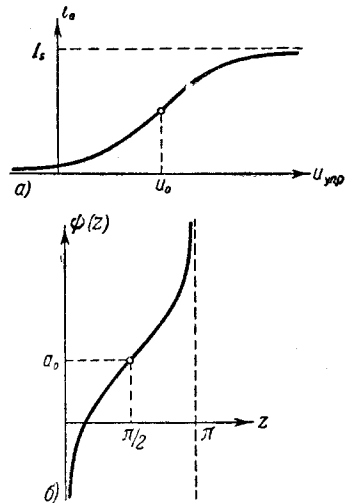


Рис. 550.

модель первого порядка является, по-видимому, доброкачественной (на ее фазовой линии нет точек стыка траекторий), если вся фазовая линия модели лежит в области, где $\Delta(x, y) > 0$. Именно в этой области лежат участки $A_1 \gamma_1$ и $A_2 \gamma_2$.

где I_s — ток насыщения, S — наибольшая крутизна характеристики и u_0 — то значение управляющего напряжения, при котором $i_a = \frac{1}{2} I_s$ и $\frac{di_a}{du_{упр}} = S$. Решая это уравнение относительно управляющего напряжения $u_{упр} = u_g + Du_a$ и полагая масштаб силы тока $I_0 = \frac{I_s}{\pi}$, т. е.

$$x = \pi \frac{i_{a1}}{I_s}, \quad y = \pi \frac{i_{a2}}{I_s} \quad (0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi),$$

мы получим для приведенных (обратных) характеристик ламп:

$$\frac{u_{g1} + Du_{a1}}{RI_0} = \psi(x) = a_0 - a \operatorname{ctg} x, \quad \frac{u_{g2} + Du_{a2}}{RI_0} = \psi(y) = a_0 - a \operatorname{ctg} y,$$

где $a = \frac{1}{RS}$ и $a_0 = \frac{\pi u_0}{RI_s}$; при этом $\psi' \geq a$ (рис. 550, б). Тогда согласно (10.36), (10.37), (10.38) и (10.39) мы получим:

уравнение фазовой линии Φ

$$(1 + D)(x + y) - a(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y) = b, \quad (10.37')$$

где

$$b = \frac{\pi DE_a}{RI_s} - 2a_0;$$

уравнения движения изображающей точки по фазовой линии:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\frac{x-y}{\Delta(x,y)} \left\{ 1 + D + \frac{a}{\sin^2 y} \right\}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{x-y}{\Delta(x,y)} \left\{ 1 + D + \frac{a}{\sin^2 x} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (10.36')$$

где $\tau = \frac{Dt}{RC}$ — новое, безразмерное время;

уравнение кривой Γ — геометрического места начальных точек скачков

$$\Delta(x,y) \equiv \left(D + \frac{a}{\sin^2 x} \right) \left(D + \frac{a}{\sin^2 y} \right) - 1 = 0 \quad (10.38')$$

и условия скачка:

$$\left. \begin{aligned} y'' - a \operatorname{ctg} x'' + Dx'' &= y' - a \operatorname{ctg} x' + Dx', \\ x'' - a \operatorname{ctg} y'' + Dy'' &= x' - a \operatorname{ctg} y' + Dy'. \end{aligned} \right\} \quad (10.39')$$

Так как анодные токи могут меняться только в пределах $0 \leq i_a \leq I_s$, то физический смысл имеют только те точки плоскости x, y , которые принадлежат квадрату $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$. Нетрудно также видеть, что фазовая линия Φ при любых значениях параметра

b проходит через вершины этого квадрата $A_1(0, \pi)$ и $A_2(\pi, 0)$ (рис. 551), причем при $b = \pi(1 + D)$ фазовой линией Φ является прямая $x + y = \pi$. Далее, так как $\Delta(x, y) \geq \Delta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (D + a)^2 - 1$, то кривая Γ , определяемая уравнением (10.38), существует при $D + a < 1$, т. е. при

$$RS(1 - D) > 1;$$

кроме того, она является замкнутой кривой и симметрична относительно прямых:

$$\begin{aligned} x &= y; & x + y &= \pi; \\ x &= \frac{\pi}{2}; & y &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

При $D + a < 1$ кривая (B) , определяемая уравнениями (10.39'), также существует, лежит в области $\Delta(x, y) > 0$, т. е. вне кривой Γ , и является замкнутой и симметричной относительно прямых $x = y$ и $x + y = \pi$, причем каждой начальной

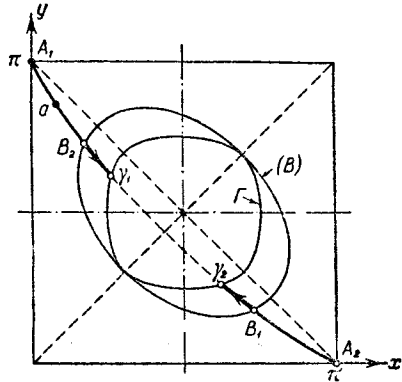


Рис. 551.

точке скачка γ соответствует единственная конечная точка скачка B , лежащая по другую сторону биссектрисы $x = y$.

Поэтому движение изображающей точки (начинающееся для определенности из точки a) носит следующий характер (рис. 551): начав двигаться из точки a , изображающая точка придет по фазовой линии $A_1\gamma_1$ в точку γ_1 , откуда скачком перейдет в точку B_1 на фазовой линии $A_2\gamma_2$. Далее, двигаясь по линии $A_2\gamma_2$, она снова попадет на кривую Γ в точке γ_2 , откуда произойдет скачок в точку B_2 , далее движение по фазовой линии $A_1\gamma_1$ до точки γ_1 и т. д. Таким образом, в схеме устанавливаются периодические разрывные колебания переменных x и y (т. е. анодных токов ламп и напряжений на сопротивлениях R), соответствующие «разрывному» предельному циклу $B_1\gamma_2 \rightarrow B_2\gamma_1 \rightarrow B_1$, состоящему из двух траекторий «медленного» движения $B_1\gamma_2$ и $B_2\gamma_1$ и двух скачков $\gamma_1 \rightarrow B_1$ и $\gamma_2 \rightarrow B_2$.

Выясним, при каких значениях параметров возможны разрывные колебания. Очевидно, для этого необходимо: 1) чтобы кривая Γ существовала (чтобы она имела действительные ветви); 2) константа b в уравнении (10.37') фазовой линии Φ должна быть такой, чтобы линия Φ пересекала кривую Γ . Как мы уже видели, кривая Γ существует, если

$$a < 1 - D.$$

Второе условие будет выполнено, если в состоянии равновесия схемы (x_0, y_0) , определяемом соотношениями:

$$x_0 = y_0, \quad 2(1 + D)x_0 - 2a \operatorname{ctg} x_0 = b,$$

$$\Delta(x_0, y_0) = \left(D + \frac{a}{\sin^2 x_0}\right)^2 - 1 < 0, \text{ или, иначе говоря, } \sin x_0 \leq \sqrt{\frac{a}{1-D}}.$$

Подставляя последнее неравенство в уравнение, определяющее состояние равновесия, получим следующее условие, необходимое для того, чтобы линия Φ пересекала кривую Γ :

$$2(1+D) \arcsin \sqrt{\frac{a}{1-D}} - 2a \sqrt{\frac{1-D}{a}} - 1 < b < \\ < 2(1+D) \left\{ \pi - \arcsin \sqrt{\frac{a}{1-D}} \right\} - 2a \sqrt{\frac{1-D}{a}} - 1,$$

причем для \arcsin взято его значение, соответствующее первой четверти, а значение корня взято со знаком плюс.

Ввиду математических трудностей, связанных с вычислениями периода автоколебаний в случае движения изображающей точки по произвольной фазовой линии Φ , мы ограничимся получением выражения для периода при $b = \pi(1+D)$, когда фазовой линией является прямая $x+y = \pi$. Уравнения «медленного» движения изображающей точки по этой фазовой прямой (уравнения (10.36') при $x+y = \pi$), очевидно, запишутся в виде:

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{dy}{d\tau} = \frac{\pi - 2x}{\frac{a}{\sin^2 x} + D - 1},$$

откуда период автоколебаний (в обычных единицах времени)

$$T = \frac{RC}{D} \left\{ 2a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\pi - 2x) \sin^2 x} - (1-D) \ln \frac{\pi - 2x_1}{\pi - 2x_2} \right\},$$

где x_1 и x_2 — соответственно абсциссы точек пересечения фазовой прямой $x+y = \pi$ с кривыми (B) и Γ , лежащих по одну сторону биссектрисы $x=y$.

4. Учет паразитных емкостей. В заключение параграфа покажем, как принятая нами гипотеза о характере колебаний в схеме Фрюгауфа вытекает из свойств «доброкачественной» модели этой схемы, построенной при учете хотя бы одного существенного паразитного параметра. Среди различных паразитных параметров, малых, но существенных для колебательных процессов в схеме, по-видимому, основную роль играют паразитные емкости (они изображены на рис. 548 пунктиром). Для наших целей достаточно учесть одну из них (любая из этих емкостей делает невозможными мгновенные скачки анодных токов и напряжений на сопротивлениях R). Чтобы не нарушать симметрии схемы, мы будем учитывать ниже только малую паразитную емкость C_1 . В этом случае имеем следующие уравнения колебаний схемы

(в обозначениях рис. 548):

$$C \frac{dv}{dt} = i_{a2} + \frac{u_{g2}}{R} = -i_{a1} - \frac{u_{g1}}{R},$$

$$C_1 \frac{du}{dt} = -\frac{u_{g2}}{R} - i_{a1},$$

$$v = u_{a1} - u_{g2} = E_a - u_{a2} + u_{g1},$$

$$u = u_{a1} - u_{g1} = E_a - u_{a2} + u_{g2},$$

$$i_{a1} = f(u_{g1} + Du_{a1}), \quad i_{a2} = f(u_{g2} + Du_{a2}),$$

представляющих собой систему дифференциальных уравнений второго порядка. Если ввести безразмерные токи

$$x = \frac{i_{a1}}{I_0}, \quad y = \frac{i_{a2}}{I_0},$$

безразмерные напряжения на конденсаторах C и C_1

$$z = \frac{v}{RI_0}, \quad w = \frac{u}{RI_0},$$

безразмерное время

$$t' = \frac{t}{RC}$$

и малый параметр

$$\mu = \frac{C_1}{C},$$

то эти уравнения можно привести к следующей безразмерной форме:

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{w} &= \frac{Dx + y + \psi(x) - Dz}{1-D} = F(w, z), \\ \dot{z} &= \frac{Dy - x - \psi(x) + Dz}{1-D} = G(w, z), \end{aligned} \right\} \quad (10.40)$$

так как x , y связаны между собой и с w и z уравнениями:

$$(1+D)(x+y) + \psi(x) + \psi(y) = \frac{DE_a}{RI_0} \quad (10.40a)$$

$$w = \frac{\psi(y) - \psi(x) + (1+D)z}{1-D}, \quad (10.40b)$$

выражающими их в виде некоторых функций w и z ($\psi = \frac{u_g + Du_a}{RI_0}$, как и раньше, — безразмерное управляющее напряжение, выраженное в виде функции безразмерного анодного тока лампы).

Возьмем в качестве фазовой поверхности полученной системы второго порядка цилиндрическую поверхность Φ^* , в простран-

стве x, y, z , определяемую уравнением (10.40а) (направляющей этой цилиндрической поверхности является линия Φ на плоскости x, y , а ее образующие параллельны оси z), и построим на ней линию F :

$$F(\omega; z) = 0,$$

— фазовую линию «вырожденной» (с $\mu = 0$) системы (рис. 552).

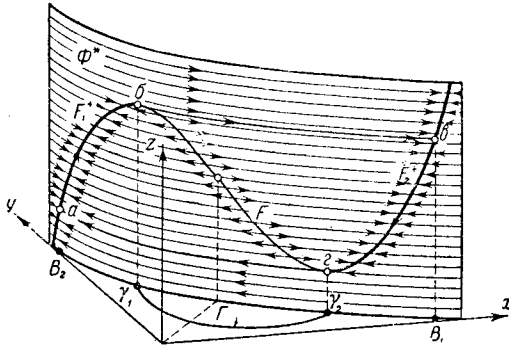


Рис. 552.

Вычислим $\frac{\partial F}{\partial \omega}$ на линии F . Дифференцируя по ω (при постоянном z) функцию $F(\omega, z)$, а также выражения (10.40а) и (10.40б), имеем:

$$(1 - D) \frac{\partial F}{\partial \omega} = [D + \psi'(x)] \frac{\partial x}{\partial \omega} + \frac{\partial y}{\partial \omega},$$

$$[1 + D + \psi'(x)] \frac{\partial x}{\partial \omega} + [1 + D + \psi'(y)] \frac{\partial y}{\partial \omega} = 0,$$

$$-\psi'(x) \frac{\partial x}{\partial \omega} + \psi'(y) \frac{\partial y}{\partial \omega} = 1 - D,$$

откуда, исключая $\frac{\partial x}{\partial \omega}$ и $\frac{\partial y}{\partial \omega}$, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = - \frac{\Delta(x, y)}{[1 + D + \psi'(x)] \psi'(y) + [1 + D + \psi'(y)] \psi'(x)}.$$

Так как знаменатель этого выражения всегда положителен (поскольку $\psi' > 0$), то условие несущественности малой паразитной емкости C_1 ($\frac{\partial F}{\partial \omega} < 0$), очевидно, сводится к неравенству

$$\Delta(x, y) > 0,$$

которое выполняется на «восходящих» участках F^+ линии F (с $\frac{\partial z}{\partial x} > 0$)¹⁾. Таким образом, только в малых окрестностях этих участков F^+ фазовой линии «вырожденной» системы можно пренебрегать малой паразитной емкостью C_1 (разумеется, при $C_1 \ll C$), — только там фазовые траектории «медленных» движений (с конечными фазовыми скоростями при $\mu \rightarrow +0$) близки к линии F и движение изображающей точки отображается (при $C_1 \ll C$) «вырожденными» уравнениями:

$$F=0 \quad \text{или} \quad z = \frac{y + Dx + \psi'(x)}{D}$$

и

$$\dot{z} = y - x,$$

эквивалентными, как нетрудно видеть, уравнениям (10.36). Тем самым мы получили обоснование первого пункта принятой в п. 2 гипотезы о характере колебаний схемы.

Далее, вне линии F $\dot{\omega} \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$, причем $\dot{\omega} \rightarrow +\infty$ над линией F и $\dot{\omega} \rightarrow -\infty$ под этой линией, в то время как \dot{z} остается конечным. Следовательно, область фазовой поверхности Φ^* вне линии F заполнена при $\mu \rightarrow +0$ фазовыми траекториями «быстрых» движений $z = \text{const}$, по которым изображающая точка движется «скачком» вправо (в сторону возрастания ω и x) над кривой F и влево (в сторону уменьшения ω и x) под ней, т. е. на участки F^+ линии F .

Если схема самовозбуждается, т. е. если в состоянии равновесия $\Delta < 0$, то линия F имеет точки максимумов и минимумов z , которые одновременно являются граничными точками фазовых траекторий «медленных» движений F^+ , так как в них $\Delta(x, y)$ и $\frac{\partial F}{\partial \omega}$ обращаются в нуль²⁾. В этих точках «медленное» движение изображающей

1) На линии F

$$1 + D + \psi'(x) + [1 + D + \psi'(y)] \frac{dy}{dx} = 0$$

и

$$D \frac{dz}{dx} = D + \psi'(x) + \frac{dy}{dx} = D + \psi'(x) - \frac{1 + D + \psi'(x)}{1 + D + \psi'(y)} = \frac{\Delta(x, y)}{1 + D + \psi'(y)}.$$

Так как $1 + D + \psi'(y) > 0$, то знак $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{F=0}$ совпадает со знаком $\Delta(x, y)$.

2) Рис. 552 дан для случая, когда линия F имеет одну точку максимума (точку б) и одну точку минимума z (точку з) и, следовательно, два участка F^+ : F_1^+ и F_2^+ . Проекция этих точек на плоскость x, y лежат, очевидно, на линии Γ ,

точки переходит в «быстрое», скачкообразное по соответствующей траектории $z = \text{const}$, приводящей изображающую точку вновь на один из участков F^+ . Во время этих скачков z , т. е. напряжение v на конденсаторе C , остается неизменным (при $\mu \rightarrow +0$), что дает условия скачка (10.39).

Разбиение фазовой поверхности на траектории «быстрых» движений обеспечивает, в отличие от условий скачка (10.39), однозначность соответствия начальных и конечных точек скачков во всех случаях, включая и те, когда линия F имеет больше, чем по одной точке максимума и минимума z . Именно, в соответствии с этим разбиением из точки максимума (минимума) z на кривой F скачок совершается по траектории $z = \text{const}$ вправо (влево) в *ближайшую* точку пересечения прямой $z = \text{const}$ с линией F .

Предельное (при $\mu \rightarrow +0$) разбиение фазовой поверхности Φ^* на траектории, к которому близко разбиение этой поверхности при $\mu \ll 1$, т. е. при $C_1 \ll C$, для случая самовозбуждающейся схемы приведено на рис. 552. Очевидно, при любых начальных условиях в схеме устанавливаются разрывные автоколебания, отображаемые на фазовой поверхности предельным циклом $abvga$ (его проекцией на плоскость x, y и являлся разрывный предельный цикл $B_2\gamma_1 \dashrightarrow \dashrightarrow B_2\gamma_1 \dashrightarrow B_2$).

Так, учитывая хотя бы одну из существенных паразитных емкостей, мы получили «доброкачественную» модель схемы Фрюгауфа, позволяющую полностью рассмотреть колебания схемы без каких-либо дополнительных гипотез и предположений.

§ 9. Мультивибратор с индуктивностью в анодной цепи

Мы уже видели, что задача рассмотрения автоколебательной системы значительно упрощается, если один из существенных колебательных параметров мал, вследствие чего движения системы распадаются на сравнительно простые «быстрые» и «медленные» движения. Первые из них описываются уравнениями (10.17) или соответствующим образом сформулированным постулатом скачка; вторые — уравнениями (10.16), составленными без учета паразитных параметров и имеющими поэтому пониженный порядок.

Мы перейдем теперь к рассмотрению более сложных систем с разрывными колебаниями, уравнения «медленных» движений которых имеют второй порядок. В качестве первого примера возьмем знакомую нам схему мультивибратора с одной RC -цепью, но с индуктивной анодной нагрузкой (рис. 553) (для некоторого упрощения задачи мы будем пренебрегать омическим сопротивлением анодной нагрузки).

1. Уравнения «медленных» движений. Пренебрегая всеми паразитными параметрами, сеточными токами и анодной реакцией, мы

получим на основании законов Кирхгофа следующие уравнения колебаний мультивибратора (в обозначениях рис. 553):

$$L \frac{di}{dt} = E_a - (u + v),$$

$$i = i_a(u) + \frac{u - E_g}{R},$$

$$C \frac{dv}{dt} = \frac{u - E_g}{R},$$

которые являются уравнениями второго порядка (соответственно состоянию мультивибратора мы можем отображать точками на фазовой

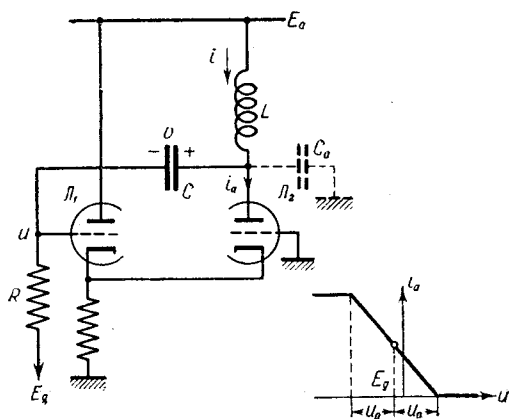


Рис. 553.

плоскости u, v). Схема, очевидно, имеет единственное состояние равновесия, в котором

$$u = E_g, \quad i_a = i_a^0 = i_a(E_g), \quad i = i_a^0, \quad v = v_0 = E_a - E_g.$$

Для упрощения рассмотрения колебаний мультивибратора мы аппроксимируем характеристику ламповой группы $i_a = i_a(u)$ кусочно-линейной функцией (рис. 553), причем будем считать, что сеточное смещение E_g выбрано так, чтобы рабочая точка, соответствующая состоянию равновесия, лежала в середине падающего участка характеристики.

Введем новые безразмерные переменные x, y, z , пропорциональные переменным составляющим напряжений u и v и тока i :

$$x = \frac{u - E_g}{u_0}, \quad y = \beta \frac{v - v_0}{u_0}, \quad z = \frac{R}{u_0} (i - i_a^0),$$

где u_3 — половина «длины» падающего участка характеристики ламповой группы, новое безразмерное время

$$t_{\text{нов}} = \frac{t}{\sqrt{LC}},$$

а также безразмерную характеристику ламповой группы

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S} [i_a(E_g + u_0 x) - i_a(E_g)] = \begin{cases} +1 & \text{при } x < -1, \\ -x & \text{при } |x| \leq 1, \\ -1 & \text{при } x > +1, \end{cases}$$

где S — абсолютное значение крутизны характеристики на падающем участке. Тогда, выбрав $\beta = R \sqrt{\frac{C}{L}}$, мы приведем уравнения мультитрибратора к следующей безразмерной форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= -2hx - y, \\ z &= x + k\varphi(x), \\ \dot{y} &= x, \end{aligned} \right\} \quad (10.41)$$

где

$$k = SR \quad \text{и} \quad h = \frac{\beta}{2} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}},$$

или, исключая z ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{2hx + y}{1 + k\varphi'(x)}, \\ \dot{y} &= x. \end{aligned} \right\} \quad (10.41a)$$

Фазовая плоскость x, y при кусочно-линейной характеристике ламповой группы $\varphi(x)$, очевидно, распадается на три области линейности: 1) $|x| < 1$; 2) $x > +1$ и 3) $x < -1$. Так как при $|x| < 1$ $\varphi'(x) = -1$, то в первой области, содержащей единственное состояние равновесия ($x=0, y=0$), уравнения (10.41a) запишутся в виде линейной системы:

$$\begin{aligned} (1-k)\dot{x} &= -2hx - y, \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

с характеристическим уравнением

$$(1-k)\lambda^2 + 2h\lambda + 1 = 0.$$

Поэтому состояние равновесия $(0,0)$ устойчиво при $k < 1$ и неустойчиво при $k > 1$.

Ниже мы будем рассматривать только последний случай $k > 1$ — случай самовозбуждающегося мультитрибратора (нетрудно видеть, что при $k < 1$ все траектории идут при возрастании t к единственному и устойчивому состоянию равновесия, т. е. в этом случае нет никаких автоколебаний).

Рассмотрим ход фазовых траекторий системы уравнений (10.41а) вблизи прямых $x = \pm 1$, являющихся границами областей линейности. Так как при переходе через эти прямые выражение $1 + k\varphi'(x)$ изменяет знак (поскольку $k > 1$), то точки этих прямых или, точнее, точки полупрямых $x = +1, y > -1$ и $x = -1, y < +1$ являются точками стыка фазовых траекторий. Эти точки не являются состояниями равновесия, но к ним фазовые траектории подходят с обеих сторон.

Таким образом, пренебрегая паразитными параметрами, мы получили «дефектную» модель мультивибратора — модель, не позволяющую провести рассмотрение колебаний мультивибратора: уравнения (10.41а) «заводят» систему в такие состояния на прямых $x = \pm 1$, которые не являются состояниями равновесия и из которых, с другой стороны, нет выходящих фазовых траекторий. Поэтому для получения «доброкачественной» модели мультивибратора нам необходимо или дополнить уравнения (10.41а) соответствующим постулатом скачка или же учесть существенные паразитные параметры схемы.

В задаче о колебаниях судна, управляемого двухпозиционным авторулевым (гл. VIII, § 6), мы также получили на фазовой плоскости линию стыка фазовых траекторий и затем доопределили систему дифференциальных уравнений движения системы так, чтобы стало возможным движение изображающей точки и вдоль этой линии; это движение изображающей точки соответствовало наблюдаемому на практике так называемому «скользящему» режиму работы двухпозиционного авторулевого.

В рассматриваемой задаче о мультивибраторе такое доопределение движения изображающей точки вдоль полупрямых $x = +1, y > -1$ и $x = -1, y < +1$ ничего, кроме ухода в бесконечность, дать не может, т. е. также не приводит к результатам, хотя бы качественно согласующимся с экспериментальными данными.

Заметим также, что точно такая же «дефектная» модель (с линиями стыка фазовых траекторий) получается и для мультивибратора с анодной нагрузкой, состоящей из сопротивления R_a и индуктивности L . Поэтому учет в мультивибраторе с одним RC -звеном (§ 4 настоящей главы) паразитной индуктивности анодной цепи не приведет к построению «доброкачественной» модели мультивибратора.

2. Уравнения мультивибратора при учете паразитной емкости C_a . Составим уравнения колебаний мультивибратора, учитывая малую паразитную емкость анодного узла C_a (ее учета, как мы сейчас увидим, будет достаточно для построения «доброкачественной» модели мультивибратора). На основании законов Кирхгофа имеем:

$$L \frac{di}{dt} = E_a - (u + v),$$

$$i = i_a(u) + C \frac{dv}{dt} + C_a \frac{d(u + v)}{dt},$$

$$C \frac{dv}{dt} = \frac{u - E_g}{R},$$

или в переменных $x, y, z, t_{\text{нов}}$, пренебрегая малой емкостью C_a в выражении $C + C_a$:

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{x} &= z - x - k\varphi(x) \equiv F(x, z), \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= -2hx - y, \end{aligned} \right\} \quad (10.42)$$

где $\mu = \frac{RC_a}{\sqrt{LC}}$ — малый положительный параметр, характеризующий малость паразитной емкости C_a (остальные обозначения те же, что и в (10.41)).

Полагая $\mu = 0$, т. е. пренебрегая малой паразитной емкостью C_a , мы получим снова уравнения (10.41) или (10.41a) — уравнения «медленных» движений системы, которые, однако, справедливы не на всей фазовой поверхности F «вырожденной» системы (с $C_a = 0$):

$$F(x, z) = 0 \quad \text{или} \quad z = x + k\varphi(x),$$

а только на той ее части F^+ , на которой выполняется условие несущественности малой паразитной емкости C_a :

$$F'_x = -1 - k\varphi'(x) < 0,$$

т. е. только при $|x| > 1^1$.

Вне малой окрестности поверхности F^+ происходят «быстрые» движения изображающей точки (там при $\mu \rightarrow +0$ $\dot{x} \rightarrow \infty$, т. е. x изменяется скачком). При этом траектории «быстрых» движений при малых μ близки к прямым $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ и идут в сторону увеличения x над поверхностью F (при $z > x + k\varphi(x)$) и при $\mu \rightarrow +0$ $\dot{x} \rightarrow +\infty$ и в сторону уменьшения x под ней (при $z < x + k\varphi(x)$). Предельное (для $\mu \rightarrow +0$) разбиение фазового пространства x, y, z на траектории системы (10.42), к которому близко разбиение на траектории при достаточно малых μ , качественно изображено на рис. 554; в частности, там изображен предельный цикл, который, как мы увидим ниже, действительно существует при $\mu \rightarrow +0$.

Таким образом, рассматривая модель мультивибратора, полученную при учете малой паразитной емкости C_a , мы приходим к следующим выводам относительно характера колебаний схемы (при $C_a \rightarrow +0$):

¹) Мы рассматриваем случай $k > 1$; тогда при $|x| < 1$ $F'_x = k - 1 > 0$. Если же $k < 1$, то условие несущественности малой паразитной емкости C_a выполняется на всей поверхности $F = 0$; соответственно на фазовой плоскости x, y модели мультивибратора без емкости C_a нет линий стыка фазовых траекторий.

Заметим, что фазовая поверхность F «вырожденной» модели и плоскость x, y гомеоморфны друг другу (их точки соответствуют друг другу взаимно однозначно и непрерывно). Поэтому мы можем отображать «медленные» движения системы движением изображающей точки не по поверхности F^+ , а по плоскости x, y ($|x| > 1$).

1) Схема совершает разрывные колебания, так как все траектории «быстрых» движений идут к поверхности F^+ и переходят, следовательно, в траектории «медленных» движений, которые в свою очередь переходят снова в траектории «быстрых» движений на границах поверхности F^+ , т. е. при $x = \pm 1$.

2) «Медленные» движения изображающей точки имеют место только на поверхности F^+ :

$$z = x + k\varphi(x), \quad |x| > 1;$$

только при $|x| > 1$ уравнения (10.41) или (10.41а) отображают законы колебаний схемы¹⁾.

3) Во время «быстрых» движений (скачков) изображающей точки переменное x (или напряжение u на сетке лампы L_1) изменяется мгновенно, а переменные y и z (т. е. напряжение v на конденсаторе C и сила тока i в анодной нагрузке) остаются неизменными²⁾.

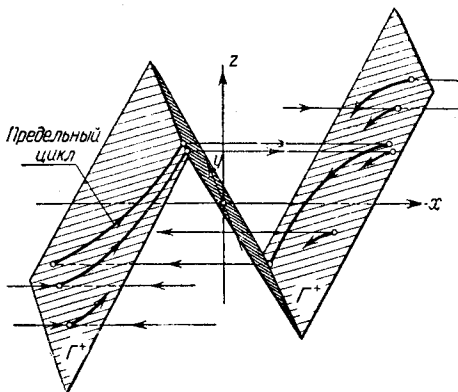


Рис. 554.

3. Разрывные колебания схемы. Проведем детальное рассмотрение разрывных колебаний схемы, опираясь на только что сформулированные особенности колебаний схемы, и, в частности, докажем существование автоколебаний.

Как уже указывалось выше, «медленные» движения системы имеют место только при $|x| > 1$, поэтому они описываются линейными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -2hx - y, \\ \dot{y} &= x, \end{aligned} \right\} \quad (10.416)$$

поскольку $\varphi'(x) = 0$ при $|x| > 1$. Так как характеристическое уравнение для системы (10.416) записывается в виде:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + 1 = 0, \quad (10.43)$$

то характер поведения схемы во время «медленных» изменений состояния зависит только от величины параметра $h = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$. Именно,

¹⁾ Наоборот, фазовые траектории «быстрых» движений отходят от участка F^- ($|x| < 1$) фазовой поверхности F «вырожденной» модели, поэтому там нет никаких «медленных» движений и уравнения (10.41) не справедливы.

²⁾ Условия неизменности напряжения v и силы тока i при скачке состояния системы вытекают и из дополнительного предположения об ограниченности напряжений и токов в схеме.

если $h > 1$, т. е. если $L < \frac{1}{4} CR^2$, то оба корня характеристического уравнения (10.43) будут действительными и отрицательными, и система будет себя вести как аperiodическая. Ее фазовые траектории вне заштрихованной полосы $|x| < 1$, для которой уравнения (10.416) не справедливы, будут иметь вид такой же, как и в случае линейного осциллятора, особая точка которого является устойчивым узлом (рис. 555)¹⁾. Если же

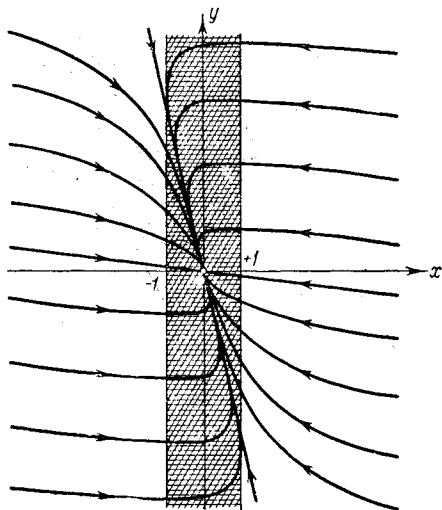


Рис. 555.

то система будет вести себя (во время «медленного» движения) как линейная колебательная система с особой точкой типа устойчивого фокуса в начале координат и фазовые траектории вне заштрихованной полосы $|x| < 1$ будут иметь вид кусков спиралей (рис. 556). И в том, и в другом случае изоклиной вертикальных касательных является прямая $y = -2hx$, а изоклиной горизонтальных касательных — ось $x = 0$ (последняя, однако, лежит вне области применимо-

сти уравнений (10.416)). Стрелками на фазовых траекториях (рис. 555 и 556) указано направление движения изображающей точки, определенное по тому, каков знак \dot{x} или \dot{y} в той или иной области. Заметим, что представляющая точка двигается по фазовым траекториям уравнений (10.416) не в направлении вращения часовой стрелки, как обычно, а против этого направления, потому что y не есть просто \dot{x} , а связано с x и \dot{x} уравнением

$$y = -\dot{x} - 2hx.$$

Нетрудно видеть, что независимо от значения параметра h фазовые траектории «медленных» движений выходят на прямые $x = \pm 1$, откуда изображающая точка уходит скачком по соответствующей траектории «быстрого» движения: $y = \text{const}$ (и $z = \text{const}$). Место, куда придет изображающая точка в результате скачка, определяется

¹⁾ Мы будем отображать колебания схемы движением изображающей точки не в трехмерном фазовом пространстве x, y, z , а по плоскости x, y . Ясно, что при таком рассмотрении фазовые траектории «медленных» и «быстрых» движений на плоскости x, y , являющиеся проекциями фазовых траекторий в пространстве x, y, z , могут пересекаться между собой.

условиями неизменности при скачке переменных y и z . Поскольку конечная точка скачка (в пространстве x, y, z) лежит снова на

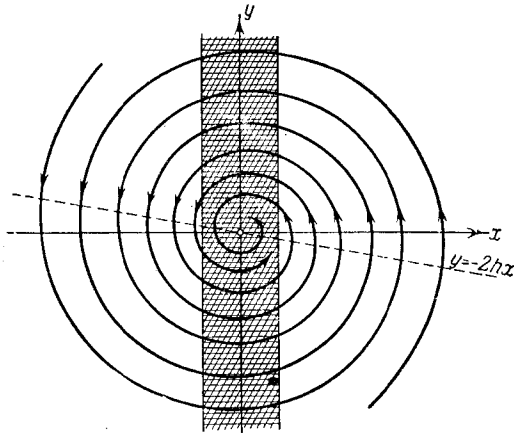


Рис. 556.

поверхности $z = x + k\varphi(x)$, ее координаты (x_2, y_2) связаны с координатами начальной точки скачка (x_1, y_1) , где $x_1 = \pm 1$, уравнениями

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1, \\ x_2 + k\varphi(x_2) &= x_1 + k\varphi(x_1) \end{aligned}$$

и определяются этими уравнениями однозначно, а именно:

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= y_1, \\ x_2 &= -(2k - 1)x_1. \end{aligned} \right\} \quad (10.44)$$

Следовательно, с прямой $x = +1$ изображающая точка перескакивает по траектории скачка $y = \text{const}$ в точку прямой $x = -(2k - 1)$, и наоборот, с прямой $x = -1$ — на прямую $x = 2k - 1$. После скачка изображающая точка движется дальше снова по фазовой траектории «медленного» движения, пока снова не придет на прямую $x = \pm 1$, и т. д. Таким путем из кусков фазовых траекторий «медленных» движений и скачков составляются фазовые траектории (точнее, положительные полутраектории) мультивибратора, отображающие его разрывные колебания (рис. 557 и 558). Покажем, что эти траектории асимптотически приближаются (при $t \rightarrow +\infty$) к устойчивому предельному циклу.

Мы начнем наше рассмотрение со случая достаточно большой индуктивности L ($L > \frac{1}{4} CR^2$, т. е. $h < 1$). Для этого случая мы получаем разбиение плоскости x, y на траектории, изображенное на

рис. 557 (траектории состоят из дуг спиралей «медленных» движений и из отрезков прямолинейных фазовых траекторий скачков:

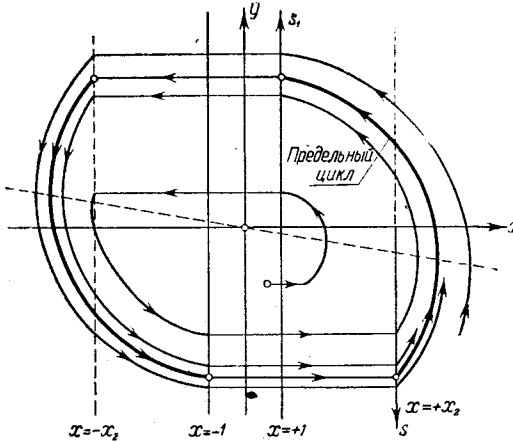


Рис. 557.

$y = \text{const}$). Это разбиение симметрично относительно начала координат, так как и уравнения «медленных» движений (10.41б), и условия скачка (10.44) инвариантны относительно замены переменных x , y на $-x$, $-y$. Поэтому для рассмотрения колебаний схемы (и, в частности, для доказательства существования и устойчивости предельного цикла) нам достаточно исследовать преобразование $s_1 = f(s)$ точек

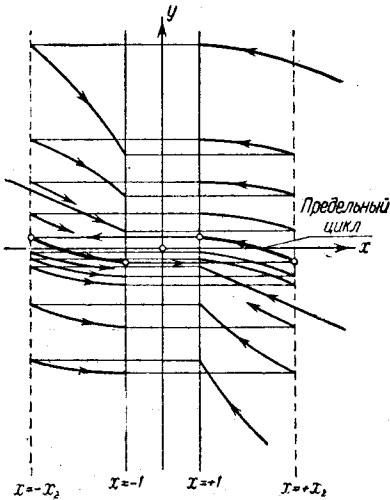


Рис. 558.

$y = -s$ прямой $x = x_2 = 2k - 1$ в точки $y = s_1$ прямой $x = +1$, осуществляемое фазовыми траекториями «медленных» движений на полуплоскости $x > 1$. Неподвижная точка s этого преобразования, очевидно, соответствует предельному циклу.

Рассмотрим фазовую траекторию системы уравнений (10.41б), выходящую при $t = 0$ из точки $(x_2, -s)$:

$$x = e^{-ht} \left[x_2 \cos \omega t - \frac{hx_2 - s}{\omega} \sin \omega t \right],$$

$$y = e^{-ht} \left[-s \cos \omega t + \frac{x_2 - hs}{\omega} \sin \omega t \right],$$

где $\omega = \sqrt{1-h^2}$ (при $h < 1$ характеристическое уравнение (10.43) имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = -h \pm j\omega$). Пусть при $t = \frac{\tau}{\omega}$ изображающая точка, двигаясь по этой траектории, придет на прямую $x = +1$ в точке $y = s_1$ (очевидно, $0 < \tau < \pi$). Тогда

$$1 = e^{-\gamma\tau} \left[x_2 \cos \tau + \left(\frac{s}{\omega} - \gamma x_2 \right) \sin \tau \right],$$

$$s_1 = e^{-\gamma\tau} \left[-s \cos \tau + \left(\frac{x_2}{\omega} - \gamma s \right) \sin \tau \right],$$

где $\gamma = \frac{h}{\omega} = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$. Разрешая эти соотношения относительно s и s_1 , мы получим следующие параметрические выражения для функции соответствия $s_1 = f(s)$:

$$\left. \begin{aligned} s &= \omega \frac{e^{\gamma\tau} - x_2 (\cos \tau - \gamma \sin \tau)}{\sin \tau}, \\ s_1 &= \omega \frac{x_2 e^{-\gamma\tau} - (\cos \tau + \gamma \sin \tau)}{\sin \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (10.45)$$

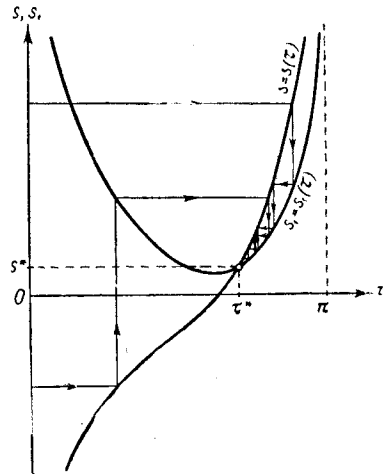


Рис. 559.

Графики полученных непрерывных (при $0 < \tau < \pi$) функций качественно изображены на рис. 559. Так как при $\tau \rightarrow +0$ $s \rightarrow -\infty$, $s_1 \rightarrow +\infty$, а при $\tau \rightarrow \pi - 0$ $s \rightarrow +\infty$, $s_1 \rightarrow +\infty$, причем $s_1 < s$, то существует (по крайней мере одна) точка пересечения этих кривых — неподвижная точка s^* рассматриваемого точечного преобразования. Значение параметра τ для нее ($\tau = \tau^*$), очевидно, определяется уравнением

$$e^{\gamma\tau} - x_2 (\cos \tau - \gamma \sin \tau) = x_2 e^{-\gamma\tau} - (\cos \tau + \gamma \sin \tau)$$

или

$$e^{\gamma\tau} + \cos \tau + \gamma \sin \tau = x_2 [e^{-\gamma\tau} + \cos \tau - \gamma \sin \tau] \quad (10.46)$$

и притом, как нетрудно видеть, единственным образом. Итак, точечное преобразование $s_1 = f(s)$ имеет единственную неподвижную точку s^* , а на плоскости x, y имеется единственный предельный цикл. Этот предельный цикл устойчив, так как в неподвижной точке

$$\left| \frac{ds_1}{ds} \right| < 1.$$

Таким образом, мы убеждаемся, что в рассматриваемой схеме устанавливаются и будут происходить разрывные автоколебания. Форма этих колебаний, вообще говоря, будет заметно отличаться от синусоидальной, так как x (т. е. напряжение на сетке лампы L_1),

а вместе с ним и напряжение на аноде лампы J_2 в некоторых областях изменяются скачкообразно.

Период автоколебаний в силу симметрии разбиения на траектории плоскости x, y , очевидно, равен $2 \frac{\tau^*}{\omega}$ в единицах безразмерного времени, или

$$T = \frac{2 \sqrt{LC}}{\sqrt{1-h^2}} \tau^* \quad (10.47)$$

в обычных единицах (как и раньше, мы пренебрегаем при подсчете периода автоколебаний длительностью «быстрых» движений — скачков). Ясно, что T меньше $T' = \frac{2\pi \sqrt{LC}}{\sqrt{1-h^2}}$ — «условного периода» затухающих колебаний осциллятора, описываемого всюду уравнениями (10.41б), так как из-за наличия мгновенных скачков изображающая точка делает оборот быстрее, чем изображающая точка такого осциллятора (именно из-за этого $\tau^* < \pi$).

Подсчитаем период и амплитуду автоколебаний для случая очень больших L ($L \gg \frac{1}{4} CR^2$), когда $h \ll 1$ (и $\gamma \ll 1$). Полагая в (10.46) $\gamma = 0$, мы получим нулевое приближение для τ^* :

$$\tau^* = \pi,$$

и период автоколебаний T при достаточно больших L близок к периоду колебаний LC -контура без сопротивления — к $T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$. Для определения поправки на период при малых γ введем

$$a = \pi - \tau^*.$$

Тогда, подставляя $\tau^* = \pi - a$ в (10.46), мы получим для a уравнение

$$e^{\gamma(\pi-a)} - \cos a + \gamma \sin a = x_2 [e^{-\gamma(\pi-a)} - \cos a - \gamma \sin a] \quad (10.46a)$$

или, разлагая функции, входящие в уравнение, в степенные ряды:

$$\begin{aligned} & \gamma\pi + \frac{\gamma^2(\pi-a)^2}{2} + \dots + \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4!} + \dots - \gamma \frac{a^3}{3!} + \dots = \\ & = x_2 \left[-\gamma\pi + \frac{\gamma^2(\pi-a)^2}{2} + \dots + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4!} + \dots + \gamma \frac{a^3}{3!} - \dots \right] \quad (10.46b) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что a имеет порядок величины $\gamma^{1/2}$ и поэтому определяется соотношением

$$\gamma\pi + \frac{a^2}{2} = x_2 \left(-\gamma\pi + \frac{a^2}{2} \right) + O(\gamma^2),$$

т. е.

$$a = \sqrt{\frac{2\pi k}{k-1}} \gamma^{\frac{1}{2}} + O(\gamma^{\frac{3}{2}})^1. \quad (10.47a)$$

Таким образом, при $L \gg \frac{1}{4} CR^2$ (т. е. при $h = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \ll 1$)

$$T = 2\pi \sqrt{LC} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2k}{\pi(k-1)}} h^{\frac{1}{2}} + O(h^{\frac{3}{2}}) \right\}. \quad (10.47б)$$

Как видим, поправка на период имеет порядок величины $h^{1/2}$ и поэтому сравнительно велика (для сравнения напомним, что в обычном ламповом генераторе поправка на период является величиной порядка h^2).

Подставляя (10.47а) в (10.45), получим для \bar{s} , т. е. для амплитуды автоколебаний переменного y :

$$\bar{s} = \frac{2k + O(\gamma)}{\sin a} = \sqrt{\frac{2k(k-1)}{\pi h}} + O(h^{\frac{1}{2}}).$$

Так как при малых h фазовые траектории «медленных» движений близки к окружностям $x^2 + y^2 = \text{const}$, то приближенно такой же будет и амплитуда автоколебаний переменного x . Переходя от безразмерных переменных к размерным, мы получим для амплитуд автоколебаний напряжений u (на сетке лампы L_1) и v (на конденсаторе C) следующие выражения:

$$U_0 = u_0 \bar{s} = u_0 \sqrt{\frac{2k(k-1)}{\pi}} h^{-\frac{1}{2}} + O(h^{\frac{1}{2}}),$$

$$V_0 = u_0 \frac{\bar{s}}{2h} = u_0 \sqrt{\frac{k(k-1)}{2\pi}} h^{-\frac{3}{2}} + O(h^{-\frac{1}{2}}).$$

¹⁾ Нетрудно получить и следующий член в асимптотическом разложении поправки на период. Положив в (10.46б) $a = a_0 \gamma^{1/2} + a_1$, где $a_1 = O(\gamma^{3/2})$ и $a_0 = \sqrt{\frac{2\pi k}{k-1}}$, мы получим уравнение, определяющее следующий член асимптотического разложения:

$$\frac{\gamma^2 \pi^2}{2} + a_0 \gamma^{\frac{1}{2}} a_1 - \frac{a_0^4 \gamma^2}{4!} = x_2 \left[\frac{\gamma^2 \pi^2}{2} + a_0 \gamma^{\frac{1}{2}} a_1 - \frac{a_0^4 \gamma^2}{4!} \right] + O(\gamma^{\frac{5}{2}}),$$

т. е.

$$a_1 = \left(\frac{a_0^3}{4!} - \frac{\pi^2}{2a_0} \right) \gamma^{\frac{3}{2}} + O(\gamma^2)$$

и, следовательно,

$$a = \sqrt{\frac{2\pi k}{k-1}} \left\{ \gamma^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{12} \frac{\pi k}{k-1} - \frac{\pi}{4} \frac{k-1}{k} \right] \gamma^{\frac{3}{2}} \right\} + O(\gamma^2).$$

Так как при малых h $V_0 \gg U_0$, то амплитуда колебаний напряжения $u + v$ на аноде лампы L_2 , очевидно, приближенно равняется V_0 . Все эти амплитуды возрастают при увеличении L (или, что то же самое, при уменьшении $h = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ ¹⁾).

Перейдем теперь к рассмотрению случая *малых* L или, иначе, случая, когда $h > 1$. В этом случае корни характеристического уравнения (10.43) действительны и отрицательны, и система ведет себя во время «медленных» движений как линейная, имеющая в начале координат особую точку типа узла (рис. 555). В частности, в области «медленных» движений, т. е. при $|x| > 1$, имеются две прямолинейные фазовые траектории (их угловые коэффициенты являются величинами, обратными корням λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (10.43)). Разбиение плоскости x, y на траектории для случая малых L было приведено на рис. 558 (траектории движения изображающей точки состоят из кусков фазовых траекторий «медленных» движений и из кусков траекторий «быстрых» движений — скачков: $y = \text{const}$).

Подробное рассмотрение показывает, что и в этом случае существует устойчивое периодическое движение, состоящее из двух движений с конечной скоростью и двух скачков и устанавливающееся при любых начальных условиях (это утверждение может быть доказано, например, путем построения и исследования соответствующего точечного преобразования). Эти движения представляющей точки по предельному циклу и отображают разрывные автоколебания в мульти-вibrаторе. Амплитуда этих колебаний может быть определена сразу; именно, изменения переменного x происходят в пределах от x_2 до $-x_2$, т. е. амплитуда автоколебаний переменного x равна $x_2 = 2k - 1$ (тогда амплитуда колебаний напряжения u на сетке лампы L_1 $U_0 = (2k - 1)u_0$). Что же касается периода автоколебаний, то его можно определить, взяв интеграл по t вдоль участков предельного цикла, по которым происходит «медленное» движение изображающей точки.

Однако задача вычисления периода весьма упрощается в том случае, когда L очень мало ($L \ll \frac{1}{4} CR^2$, но, конечно, по-прежнему $L \gg \frac{R^2 C_a^2}{C}$ и $\mu \ll 1$). Тогда $h \gg 1$ и фазовые траектории в области «медленного» движения (но вне некоторой малой окрестности прямой $y = -2hx$) близки к горизонтальным прямым²⁾. Соответственно

¹⁾ Так как амплитуда колебаний напряжения на аноде лампы L_2 возрастает при увеличении индуктивности L (как $L^{3/4}$), то наша теория мульти-вibrатора, развитая при пренебрежении анодной реакцией, очевидно, перестает быть справедливой при достаточно больших L .

²⁾ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2hx + y} \approx -\frac{1}{2h} \approx -0$ вне малой окрестности прямой $y = -2hx$. Поэтому, в частности, амплитуда автоколебаний переменного y будет

предельный цикл будет близок к оси $y=0$; поэтому во время «медленного» движения изображающей точки по предельному циклу $\dot{x} \approx -2hx$ или $\frac{dx}{dt} = -\frac{R}{L}x$ (t — обычное время) и, следовательно, $dt = -\frac{L}{R} \frac{dx}{x}$. Интегрируя правую часть этого уравнения в пределах от x_2 до 1, мы получим длительность полупериода автоколебаний:

$$\frac{T}{2} = -\frac{L}{R} \int_{x_2}^1 \frac{dx}{x} = \frac{L}{R} \ln x_2,$$

т. е. период автоколебаний равен:

$$T = \frac{L}{R} \ln(2k-1). \quad (10.47в)$$

Интересно, что в рассмотренном случае емкость C не влияет заметно на величину периода; это объясняется тем, что при малых L мы получаем сравнительно высокочастотные разрывные автоколебания, во время которых емкость C почти не успевает перезарядиться (амплитуда колебаний напряжения на этой емкости, как мы видели, равна $V_0 = \frac{(k-1)L}{RC^2} u_0 \ll u_0$).

Мы подробно рассмотрели два предельных случая больших и малых индуктивностей L и получили ответы на все вопросы, которые обычно возникают при исследовании автоколебательных процессов. Именно, мы выяснили вопросы об амплитуде, периоде и форме автоколебаний и характере их установления. Мы ограничились случаями больших и малых L только ради простоты изложения, вообще же можно исследовать все эти вопросы и при других, промежуточных значениях L . На рис. 560 приведены фотографии картины на плоскости $u, u+v$, полученные для рассматриваемой схемы с помощью катодного осциллографа (на отклоняющие пластины осциллографической трубки подавались напряжения на сетке лампы L_1 и на аноде L_2)¹⁾.

в рассматриваемом случае $h \gg 1$ приближенно равна $\frac{1}{2} \frac{x_2-1}{2h} = \frac{k-1}{2h}$, а амплитуда колебаний напряжения v на конденсаторе C

$$V_0 \approx \frac{u_0}{2h} \frac{k-1}{2h} = \frac{(k-1)L}{CR^2} u_0.$$

¹⁾ О получении картины на фазовой плоскости при помощи катодного осциллографа см. Дополнение II.

Фотографии расположены в порядке уменьшения L . Характер периодического процесса, изображенного на этих фотографиях, в общем

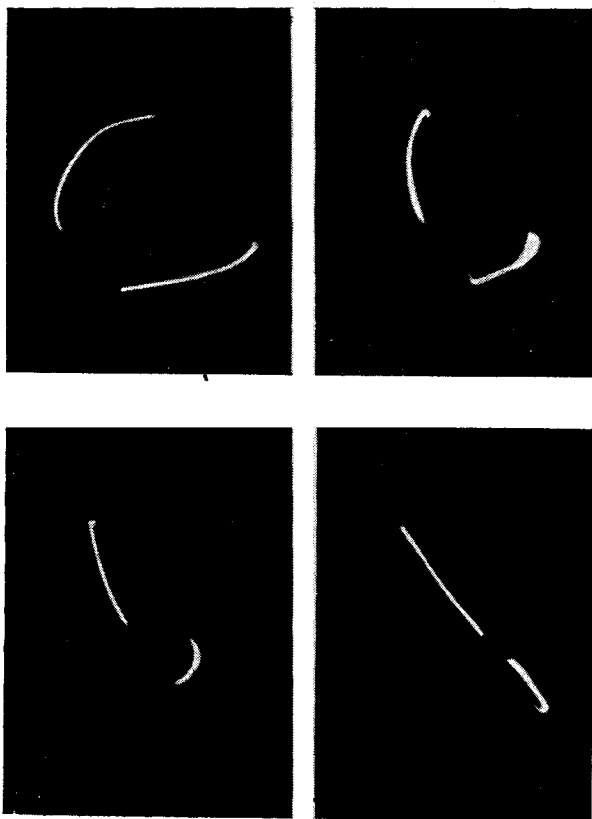


Рис. 560.

совпадает с той картиной, которую мы получили при теоретическом рассмотрении.

§ 10. «Универсальная» схема

Рассмотренные выше (в этой главе) системы могут совершать только разрывные автоколебания. Существуют, однако, такие системы, в которых возможны как непрерывные, так и разрывные автоколебания, переходящие друг в друга при изменениях того или иного параметра системы (при переходе этого параметра через некоторое критическое, бифуркационное значение). Такова, например, так называемая «универсальная» схема [125], приведенная на рис. 561 (характер

ее состояния равновесия был уже рассмотрен в § 4, гл. V). Эта схема является «промежуточной» между генератором квазисинусоидальных (и следовательно, непрерывных) колебаний с двухзвенной RC-цепочкой (см. § 12, гл. V и § 5, гл. VIII) и мультивибратором с одним RC-звеном: в первую схему «универсальная» схема превращается при нижнем положении движка потенциометра r (при $\beta = \frac{r_1}{r} = 0$) и во вторую — при верхнем положении этого движка (при $\beta = \frac{r_1}{r} = 1$), когда емкость C_2 оказывается подсоединенной параллельно емкости C_1 . Поэтому можно ожидать, что при перемещении движка потенциометра от нижнего положения к верхнему (при изменении β от 0 к 1) в схеме будет иметь место переход от непрерывных автоколебаний к разрывным. Исследование схемы это подтверждает.

Уравнение колебаний «универсальной» схемы при пренебрежении сеточными токами и анодной реакцией, а также всеми паразитными параметрами схемы кроме малой паразитной емкости C_a (она изображена на рис. 561 пунктиром) могут быть записаны на основании законов Кирхгофа (в обозначениях рис. 561) следующим образом:

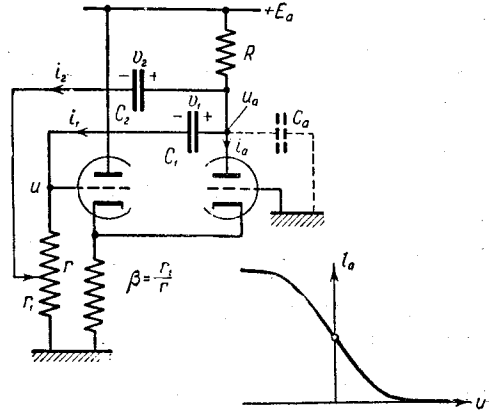


Рис. 561.

Уравнение колебаний «универсальной» схемы при пренебрежении сеточными токами и анодной реакцией, а также всеми паразитными параметрами схемы кроме малой паразитной емкости C_a (она изображена на рис. 561 пунктиром) могут быть записаны на основании законов Кирхгофа (в обозначениях рис. 561) следующим образом:

$$\frac{E_a - u_a}{R} = i_a(u) + C_a \frac{du_a}{dt} + i_1 + i_2,$$

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = i_1, \quad C_2 \frac{dv_2}{dt} = i_2,$$

$$u = r(i_1 + \beta i_2), \quad u_a = u + v_1, \quad v_2 = v_1 + (1 - \beta) r i_1,$$

или в переменных u , v_1 и $z = r i_1$ (при $C_a \ll C_1, C_2$):

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{u} &= E_a - R i_a(u) - \left(1 + \frac{R}{\beta r}\right) u + (1 - \beta) \frac{R}{\beta r} z - v_1, \\ \dot{v}_1 &= z, \quad (1 - \beta) \dot{z} = \frac{C_1}{\beta C_2} u - \left(1 + \frac{C_1}{\beta C_2}\right) z, \end{aligned} \right\} (10.48)$$

где $\mu = \frac{R C_a}{r C}$ — малый положительный параметр, характеризующий малость паразитной емкости C_a ($0 < \mu \ll 1$), а точкой сверху обозначено дифференцирование по безразмерному времени $t' = \frac{t}{r C_1}$. Характеристика ламповой группы $i_a = i_a(u)$ изображена на рис. 561; мы будем

полагать ниже для большей определенности, что абсолютное значение крутизны характеристики

$$S(u) = -\frac{di_a}{du}$$

имеет наибольшее значение ($=S_0$) в состоянии равновесия схемы (при $u=0$) и монотонно убывает, стремясь к нулю, при увеличении $|u|$.

Если пренебречь малой паразитной емкостью C_a , т. е. положить в уравнениях (10.48) $\mu=0$, то множество состояний такой системы будет составлять в пространстве u, z, v_1 поверхность F :

$$F(u, z, v_1) = 0,$$

где

$$F(u, z, v_1) = E_a - Ri_a(u) - \left(1 + \frac{R}{\beta r}\right)u + (1 - \beta) \frac{R}{\beta r}z - v_1 \quad (10.49)$$

— правая часть первого уравнения (10.48) — уравнения с малым коэффициентом μ при производной. Поверхность F в пространстве u, z, v_1 гомеоморфна координатной плоскости u, z ; поэтому «медленные» движения системы мы можем отображать траекториями на этой плоскости. В соответствии с (10.19) имеем следующее условие несущественности малой паразитной емкости C_a :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = RS(u) - 1 - \frac{R}{\beta r} < 0. \quad (10.49a)$$

Здесь, очевидно, возможны два случая.

При $RS_0 < 1 + \frac{R}{\beta r}$ или, иначе, при

$$\beta < \beta_{кр} = \frac{R}{r RS_0 - 1}$$

условие (10.49a) будет выполнено на всей фазовой поверхности F системы с $C_a=0$. В этом случае малая паразитная емкость C_a не является существенной для колебательных процессов в схеме, ею можно пренебречь и рассматривать колебания «универсальной» схемы как колебания системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением (10.49) и двумя последними из уравнений (10.48). Это связано, очевидно, с тем, что при $\beta < \beta_{кр}$ все траектории «быстрых» движений изображающей точки, которые имеются при малых C_a (при $\mu \rightarrow +0$) в фазовом пространстве u, z, v_1 вне поверхности F , идут к этой поверхности (рис. 562). Исключая из этих уравнений одно из переменных, например v_1 , мы получим для переменных u, z систему двух дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\frac{R C_1}{\beta r \beta C_2} u - \left[1 + \frac{R}{\beta r} \left(1 + \frac{C_1}{\beta C_2}\right)\right] z}{1 + \frac{R}{\beta r} - RS(u)}, \\ \dot{z} &= \frac{C_1}{\beta(1-\beta)C_2} u - \left(1 + \frac{C_1}{\beta C_2}\right) \frac{z}{1-\beta} \end{aligned} \right\} \quad (10.50)$$

с регулярными правыми частями (знаменатель правой части первого уравнения всюду положителен). Эти уравнения позволяют проследить

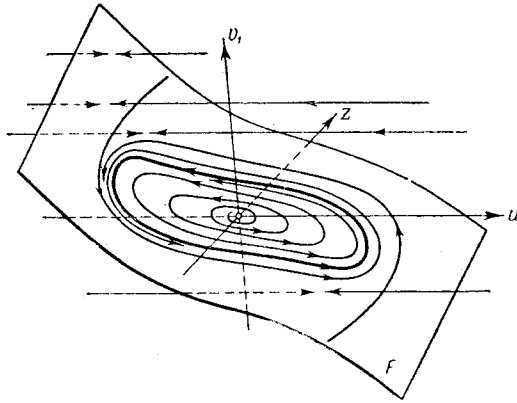


Рис. 562.

за поведением рассматриваемой схемы и сделать заключения о ее колебаниях.

Если условие самовозбуждения

$$RS_0 > 1 + \frac{R}{r} \frac{C_1 + C_2}{C_1 + \beta C_2} \quad (10.51)$$

не выполнено, то единственное состояние равновесия ($u=0, z=0$) является устойчивым фокусом или узлом, к которому идут все фазовые траектории. В этом случае при любых начальных условиях схема приходит к состоянию равновесия, т. е. не совершает ни непрерывных, ни разрывных автоколебаний.

Если же условие самовозбуждения (10.51) выполнено (но по-прежнему $RS_0 < 1 + \frac{R}{\beta r}$), то единственное состояние равновесия $(0, 0)$ будет неустойчивым фокусом или узлом, и при сделанных нами предположениях относительно вида характеристики ламповой группы $i_a = i_a(u)$ на плоскости u, z будет существовать единственный и устойчивый предельный цикл, к которому будут идти все остальные фазовые траектории (рис. 563 и 564). Разбиения плоскости u, z на траектории, изображенные на рис. 563 и 564, построены путем графического интегрирования (методом изоклин) уравнений (10.50). Первое

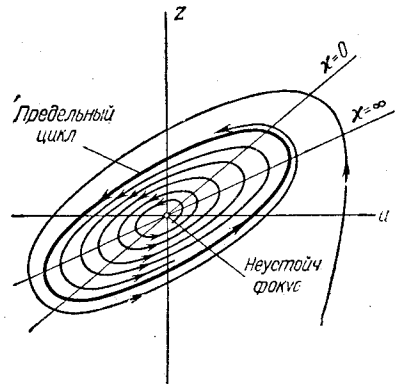


Рис. 563.

будут идти все остальные фазовые траектории (рис. 563 и 564). Разбиения плоскости u, z на траектории, изображенные на рис. 563 и 564, построены путем графического интегрирования (методом изоклин) уравнений (10.50). Первое

из них дано для случая, когда состояние равновесия является неустойчивым фокусом, второе — для случая, когда это состояние равновесия — неустойчивый узел. В схеме, таким образом, при любых начальных условиях будут устанавливаться *непрерывные* автоколебания, поскольку скорости движения изображающей точки по предельному циклу, равно как и на всей плоскости u, z , всюду ограничены (и при сколь угодно малой паразитной емкости C_a).

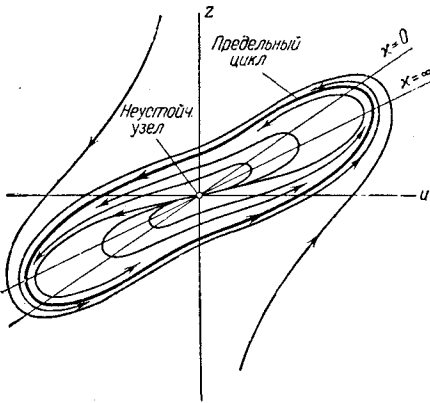


Рис. 564.

Иная картина получается

при $RS_0 > 1 + \frac{R}{\beta r}$, т. е. при

$$\beta > \beta_{\text{кр}} = \frac{R}{r} \frac{1}{RS_0 - 1}. \quad (10.52)$$

При выполнении этого условия в силу непрерывности и монотонности изменения $S(u)$ от S до 0 при увеличении $|u|$, очевидно, существует такое значение u^* напряжения u на сетке левого триода,

что $RS(\pm u^*) = 1 + \frac{R}{\beta r}$, а при

$|u| < u^*$ $RS(u) > 1 + \frac{R}{\beta r}$ и, следовательно, условие несущественности малой паразитной емкости C_a (условие (10.49а)) не выполнено. Поэтому фазовые траектории «быстрых» движений (скачков) в фазовом пространстве u, z, v_1 отходят от полосы $|u| \leq u^*$ поверхности F — фазовой поверхности системы без паразитной емкости C_a , т. е. при $|u| \leq u^*$ в рассматриваемой схеме возможны только «быстрые» движения изображающей точки — скачки напряжения u , не подчиняющиеся, конечно, уравнениям (10.50), составленным при пренебрежении малой паразитной емкостью C_a . Наоборот, на остальной части поверхности F (при $|u| > u^*$) условие (10.49а) выполнено, там траектории «быстрых» движений подходят к поверхности F , и следовательно, вблизи ее движение изображающей точки (колебания схемы) может быть удовлетворительно отображено уравнениями «медленных» движений (10.50), если только емкость C_a действительно мала.

Таким образом, при $\beta > \beta_{\text{кр}}$ мы получаем разбиение фазового пространства u, z, v_1 на траектории, приведенное на рис. 565 и соответствующее уже разрывным колебаниям схемы. На части F^+ поверхности $F: |u| > u^*$, имеют место «медленные» (с конечной скоростью при $\mu \rightarrow +0$) движения изображающей точки по траекториям, определяемым при достаточно малых C_a (при $\mu \rightarrow +0$) уравнениями (10.50). Вне F^+ при $\mu \rightarrow +0$ $\dot{u} \rightarrow \infty$, но \dot{z} и \dot{v}_1 остаются

конечными, поэтому там имеют место «быстрые» движения изображающей точки (скачки) по траекториям «быстрых» движений $z = \text{const}$, $v_1 = \text{const}$ ¹⁾. Так как над поверхностью F $\dot{u} \rightarrow -\infty$ (при $\mu \rightarrow +0$) и под ней $\dot{u} \rightarrow +\infty$, то все траектории «быстрых» движений идут к поверхности F^+ , где переходят в траектории «медленных» движений. В свою очередь все траектории «медленных» движений переходят в траектории скачков при $u = +u^*$ или при $u = -u^*$. Из этих чередующихся друг с другом кусков траекторий «быстрых» и «медленных» движений и «сшиваются» траектории движения изображающей точки — фазовые траектории рассматриваемой схемы в

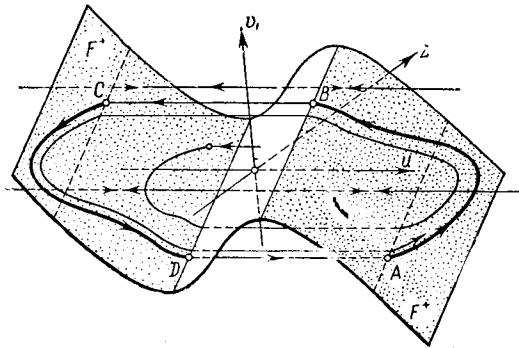


Рис. 565.

пространстве u, z, v_1 . Можно показать, что все фазовые траектории стремятся (при $t \rightarrow +\infty$) к единственному и устойчивому предельному циклу. Таким образом, при $\beta > \beta_{\text{кр}}$ в схеме устанавливаются при любых начальных условиях разрывные автоколебания.

На рис. 566 приведена проекция на координатную плоскость u, z этого разбиения пространства u, z, v_1 на траектории. Траектории «медленных» движений, идущие в областях $|u| > u^*$, построены путем графического интегрирования уравнений (10.50); траекториями скачков являются прямые $z = \text{const}$, причем концевые точки $(\mp u^{**}, z_2)$ траекторий скачков, начинающихся в точках $(\pm u^*, z_1)$, определяются, очевидно, соотношениями:

$$z_2 = z_1, Ri_a(\mp u^{**}) \mp \left(1 + \frac{R}{\beta r}\right) u^{**} = Ri_a(\pm u^*) \pm \left(1 + \frac{R}{\beta r}\right) u^*$$

¹⁾ Условия неизменности z и v_1 при скачке напряжения u получаются из дополнительного (физического) предположения об ограниченности токов и напряжений в схеме. Если токи в схеме ограничены (не могут быть бесконечно большими), то напряжения v_1 и v_2 на конденсаторах C_1 и C_2 не могут изменяться скачком (\dot{v}_1 и \dot{v}_2 должны быть ограниченными). Тогда во время мгновенного скачка должны оставаться неизменными v_1 и v_2 — $v_1 = (1 - \beta) r i_4 = = (1 - \beta) z_1$, т. е. z_1 .

(множество конечных точек траекторий скачков образуют, таким образом, прямые $u = -u^{**}$ и $u = +u^{**}$). Как видим, все траектории асимптотически приближаются (при $t \rightarrow +\infty$) к предельному циклу $ABCD$, состоящему из двух кусков траекторий «медленных» движений AB и CD и двух отрезков траекторий «быстрых» движений BC и DA ¹⁾.

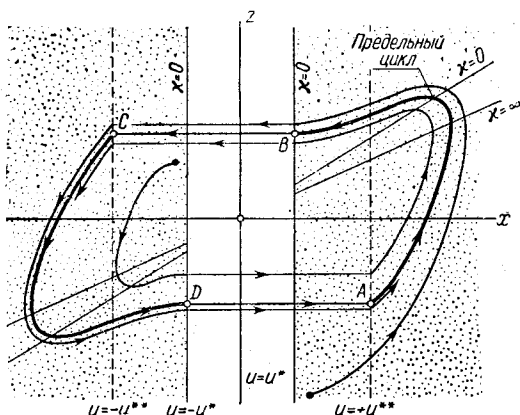


Рис. 566.

Заметим, что сам переход непрерывных автоколебаний в разрывные при $\beta = \beta_{кр}$ совершается непрерывно: при β , приближающихся к $\beta_{кр}$ со стороны меньших значений ($\beta < \beta_{кр}$), скорость изменения напряжения u на прямой $u = 0$ неограниченно возрастает и при $\beta = \beta_{кр}$ становится бесконечно большой; с другой стороны, изменение напряжения u в результате скачка ($= u^{**} + u^*$) при $\beta > \beta_{кр}$ монотонно растет при увеличении β , начиная с нулевого значения при $\beta = \beta_{кр}$.

§ 11. Блокинг-генератор

В современной радиотехнике для генерирования коротких импульсов напряжения часто применяется так называемый блокинг-генератор [65, 71, 91], одна из схем которого приведена на рис. 567.

Блокинг-генератор представляет собой генератор с индуктивной обратной связью, в котором лампа заперта в течение почти всего периода автоколебаний. При отпирании лампы в сеточной обмотке

¹⁾ Строгое доказательство существования предельного цикла и стремления к нему всех остальных траекторий может быть сделано, например, для кусочно-линейной характеристики ламповой группы путем построения и исследования точечного преобразования прямой $u = +u^{**}$ в прямую $u = -u^{**}$, осуществляемого траекториями системы.

трансформатора индуцируется положительное напряжение, в результате чего напряжение u на сетке лампы быстро достигает больших положительных значений (до нескольких сотен вольт) и через лампу протекают значительные анодный и сеточный токи. Эти токи, протекая по обмоткам трансформатора, индуцируют в его выходной обмотке импульс напряжения. Одновременно импульс сеточного тока заряжает конденсатор C , что вызывает уменьшение сеточного напряжения u ; поэтому через некоторый промежуток времени, составляющий обычно небольшую долю периода, лампа окажется снова запертой (так как при уменьшении анодного тока в сеточной обмотке трансформатора индуцируется отрицательное напряжение, вызывающее дальнейшее запираение лампы)¹⁾. В течение остальной части периода лампа заперта, сеточные токи отсутствуют и конденсатор C разряжается через сопротивление R . Сеточное напряжение u постепенно увеличивается и через некоторый интервал времени (длительности порядка RC) достигает значения, при котором лампа отпирается и блокинг-генератор генерирует следующий импульс.

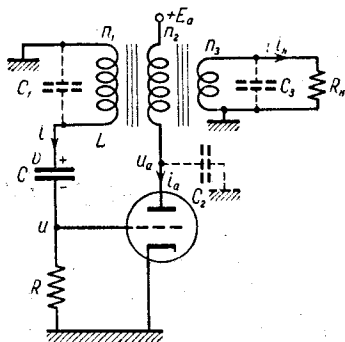


Рис. 567.

1. Уравнения колебаний. При рассмотрении автоколебаний блокинг-генератора мы не можем пренебрегать ни сеточными токами, ни анодной реакцией, так как они играют существенную роль в работе блокинг-генератора: во время генерирования импульсов в лампе текут значительные сеточные токи, заряжающие конденсатор C и вызывающие запираение лампы в конце импульса, а напряжение на аноде u_a (из-за большого падения напряжения на анодной обмотке трансформатора) снижается до весьма небольших значений, что и ограничивает величину импульсов анодного тока и сеточного напряжения. Поэтому анодный ток мы будем считать функцией как сеточного, так и анодного напряжения:

$$i_a = i_a(u, u_a);$$

в то же время для некоторого упрощения задачи мы будем считать сеточный ток зависящим только от сеточного напряжения:

$$i_g = i_g(u)$$

(это достаточно хорошо выполняется в том случае, когда лампа, используемая в блокинг-генераторе, является пентодом).

¹⁾ Мы имеем здесь в виду случай так называемого емкостного восстановления состояний блокинг-генератора с запертой лампой, реализуемый при достаточно больших значениях L/C .

Далее, для генерации импульсов с крутыми фронтами необходимо, чтобы трансформатор блокинг-генератора имел минимальные магнитные потоки рассеяния и минимальные емкости обмоток (для этого трансформатор обычно собирается на тороидальном ферромагнитном сердечнике). Поэтому естественно предположить сначала (в качестве первого приближения), что магнитные потоки рассеяния в трансформаторе полностью отсутствуют, т. е. что магнитный поток одинаков во всех (поперечных) сечениях сердечника трансформатора. При этом предположении магнитный поток через каждый виток любой обмотки трансформатора определяется общим числом ампер-витков во всех обмотках и равен

$$\Phi = \frac{L}{n_1^2} (n_1 i - n_2 i_a + n_3 i_H) = \frac{L}{n_1} (i - k i_a + k' i_H),$$

где L — индуктивность сеточной обмотки трансформатора, n_1 , n_2 и n_3 — числа витков в сеточной, анодной и выходной обмотках, а $k = \frac{n_2}{n_1}$ и $k' = \frac{n_3}{n_1}$ — коэффициенты трансформации напряжения из сеточной обмотки в анодную и выходную; i — ток в цепи конденсатора C и i_H — ток нагрузки (см. рис. 567); в дальнейшем мы будем называть величину

$$I = i - k i_a + k' i_H \quad (10.53)$$

током намагничивания (сердечника трансформатора)¹⁾. Тогда э. д. с. индукции в сеточной, анодной и выходной обмотках трансформатора будут соответственно равны

$$-\frac{d}{dt} (n_1 \Phi) = -L \frac{dI}{dt}, \quad + \frac{d}{dt} (n_2 \Phi) = kL \frac{dI}{dt}$$

и

$$-\frac{d}{dt} (n_3 \Phi) = -k' L \frac{dI}{dt}.$$

Пренебрегая, кроме того, всеми паразитными параметрами схемы (и в частности, малыми емкостями обмоток трансформатора и междуэлектродными емкостями лампы), мы получим следующие уравнения колебаний блокинг-генератора:

$$\left. \begin{aligned} -L \frac{dI}{dt} &= u + v = \frac{E_a - u_a}{k} = \frac{R_H i_H}{k'}, \\ C \frac{dv}{dt} &= i = \frac{u}{R} + i_g(u), \end{aligned} \right\} \quad (10.54)$$

¹⁾ Мы считаем, что сеточная и анодная обмотки трансформатора намотаны так, чтобы парциальные магнитные потоки, создаваемые в трансформаторе (положительными) токами i и i_a , имели противоположные знаки. Только при этом условии получается положительная обратная связь, необходимая для возбуждения блокинг-генератора.

где R_n — сопротивление внешней нагрузки, которую мы будем полагать чисто активной (омической). Подставляя выражение (10.53) для тока намагничивания I :

$$I = \frac{u}{R} + i_g(u) - ki_a(u, u_a) + \frac{k'^2}{R_n} \frac{E_a - u_a}{k} = I(u, u_a) \quad (10.53a)$$

и исключая напряжение на конденсаторе C

$$v = \frac{E_a - u_a}{k} - u, \quad (10.54a)$$

имеем:

$$\begin{aligned} L \left\{ \frac{1}{R} + S_g(u) - kS(u, u_a) \right\} \frac{du}{dt} + L \left\{ \frac{k^2}{R_i(u, u_a)} + \frac{k'^2}{R_n} \right\} \frac{1}{k} \frac{du_a}{dt} = \\ = \frac{E_a - u_a}{k}, \\ - \frac{du}{dt} - \frac{1}{k} \frac{du_a}{dt} = \frac{1}{C} \left[\frac{u}{R} + i_g(u) \right], \end{aligned}$$

где $S_g(u)$, $S(u, u_a)$ и $R_i(u, u_a)$ — соответственно крутизна характеристик сеточного и анодного токов и внутреннее сопротивление лампы, т. е.

$$S_g(u) = \frac{di_g}{du}, \quad S(u, u_a) = \frac{\partial i_a}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_i(u, u_a)} = \frac{\partial i_a}{\partial u_a}.$$

Разрешая эти уравнения относительно производных, получим:

$$\begin{aligned} Lg(u, u_a) \frac{du}{dt} = \frac{u_a - E_a}{k} - \frac{L}{C} \left\{ \frac{k^2}{R_i(u, u_a)} + \frac{k'^2}{R_n} \right\} \left[\frac{u}{R} + i_g(u) \right], \\ Lg(u, u_a) \frac{1}{k} \frac{du_a}{dt} = \frac{E_a - u_a}{k} - \\ - \frac{L}{C} \left\{ \frac{1}{R} + S_g(u) - kS(u, u_a) \right\} \left[\frac{u}{R} + i_g(u) \right], \quad (10.55) \end{aligned}$$

где

$$g(u, u_a) = \frac{1}{R} + S_g(u) + \frac{k^2}{R_i(u, u_a)} + \frac{k'^2}{R_n} - kS(u, u_a).$$

Очевидно, блокинг-генератор имеет единственное состояние равновесия, определяемое уравнениями:

$$u_a - E_a = 0 \quad \text{и} \quad u + Ri_g(u) = 0,$$

т. е. в состоянии равновесия, если пренебречь сеточным током при $u \leq 0$,

$$u = 0, \quad u_a = E_a.$$

Характеристическое уравнение для состояния равновесия блокинг-генератора, как нетрудно видеть, запишется в виде:

$$\left[Lg(0, E_a)\lambda + \frac{L}{C} \left[\frac{k^2}{R_i(0, E_a)} + \frac{k'^2}{R_H} \right] \left[\frac{1}{R} + S_g(0) \right] - 1 \right. \\ \left. \frac{L}{C} \left[\frac{1}{R} + S_g(0) - kS(0, E_a) \right] \left[\frac{1}{R} + S_g(0) \right] Lg(0, E_a)\lambda + 1 \right] = 0$$

или

$$Lg(0, E_a)\lambda^2 + \left\{ 1 + \frac{L}{C} \left[\frac{k^2}{R_i(0, E_a)} + \frac{k'^2}{R_H} \right] \left[\frac{1}{R} + S_g(0) \right] \right\} \lambda + \\ + \frac{1}{C} \left[\frac{1}{R} + S_g(0) \right] = 0.$$

Ниже мы будем рассматривать только тот случай, когда единственное состояние равновесия блокинг-генератора неустойчиво и блокинг-генератор самовозбуждается, т. е. будем полагать выполненным условие самовозбуждения:

$$g(0, E_a) = \frac{1}{R} + S_g(0) + \frac{k^2}{R_i(0, E_a)} + \frac{k'^2}{R_H} - kS(0, E_a) < 0. \quad (10.56)$$

2. Скачки напряжений и токов. Однако при выполнении условия (10.56) на фазовой плоскости u, u_a заведомо существует некоторая кривая (будем обозначать ее через Γ), в точках которой

$$g(u, u_a) = 0 \quad (10.57)$$

и скорости изменения u и u_a обращаются в бесконечность. Действительно, при достаточно больших $|u|$ крутизна характеристики анодного тока $S(u, u_a)$ мала (при отрицательных u — из-за того, что лампа заперта, при больших положительных u — из-за анодной реакции)¹⁾, т. е. там $g(u, u_a) > 0$. С другой стороны, $g(0, E_a) < 0$ в силу условия (10.56). Отсюда и из предположения, что $S_g(u), S(u, u_a), [R_i(u, u_a)]^{-1}$, а следовательно, и $g(u, u_a)$ суть непрерывные функции, следует существование на плоскости u, u_a непрерывного геометрического места точек, в которых $g(u, u_a) = 0$, т. е. существование кривой Γ . Вид этой кривой приведен на рис. 568.

Для нас существенно, что функция $g(u, u_a)$ изменяет знак при переходе через кривую Γ ; поэтому точки части этой кривой являются точками стыка фазовых траекторий. Таким образом, пренебрегая всеми малыми паразитными параметрами схемы, включая малые паразитные емкости схемы и магнитные потоки рассеяния в трансформаторе, мы пришли к «дефектной» модели блокинг-генератора — к модели, на фазовой плоскости которой имеются точки стыка фазовых траек-

¹⁾ При больших положительных сеточных напряжениях (при больших анодных токах) анодный ток почти перестает зависеть от сеточного напряжения и определяется главным образом анодным напряжением.

торий и которая, следовательно, не дает возможности проследить за колебаниями схемы. Поэтому мы вынуждены изменить динамическую модель блокинг-генератора, или дополняя ее (постулативно) необходимыми соображениями относительно характера колебаний схемы, или же учитывая хотя бы некоторые малые паразитные параметры, существенные, несмотря на их малость, для колебательных процессов в блокинг-генераторе.

Как и раньше, появление на фазовой плоскости точек стыка фазовых траекторий означает, что уравнения (10.55), составленные без учета паразитных параметров, не могут правильно отображать закономерности колебаний блокинг-генератора при *всех* значениях u и u_a ; иначе говоря, в одной из двух областей, на которые делится плоскость u, u_a кривой Γ , некоторые из неучтенных малых паразитных параметров играют существенную роль, в силу чего уравнения (10.55) там не пригодны для описания колебаний системы. Поэтому нам прежде всего следует решить вопрос о том, в какой из областей плоскости u, u_a малые паразитные параметры не существенны для колебаний блокинг-генератора и уравнения (10.55) с некоторой степенью точности отображают закономерности его колебаний.

Примем (постулативно) следующие дополнительные предположения относительно характера колебаний блокинг-генератора:

1) В области

$$g(u, u_a) > 0$$

малые паразитные параметры схемы не играют существенной роли и колебания блокинг-генератора («медленные» движения) отображаются уравнениями (10.55) (некоторым обоснованием этого постулата является то обстоятельство, что к области $g(u, u_a) > 0$ принадлежит область значений u, u_a , в которой лампа заперта и где малые паразитные параметры, по-видимому, не играют существенной роли).

2) Если изображающая точка, двигаясь на плоскости u, u_a (в области $g(u, u_a) > 0$) по траектории уравнений (10.55), приходит на кривую Γ , то затем она совершает мгновенный скачок в другую точку, принадлежащую снова области «медленных» движений $g(u, u_a) > 0$.

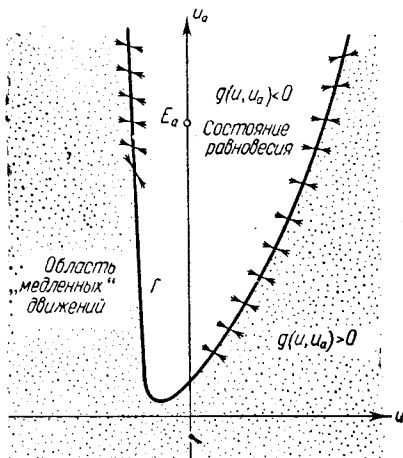


Рис. 568.

3) Считая все напряжения и токи в схеме ограниченными, мы должны принять, что во время мгновенного скачка состояние напряжения v на конденсаторе C и магнитные потоки через обмотки трансформатора остаются неизменными¹⁾; так как во время «медленного» движения перед скачком и после скачка изображающей точки напряжение v связано с u и u_a соотношением (10.54а), а магнитные потоки через обмотки трансформатора полностью определяются током намагничивания $I = I(u, u_a)$ (см. (10.53а)), то конечная точка скачка (u^* , u_a^*) связана с начальной точкой (u, u_a) , лежащей на кривой Γ , следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} u^* + \frac{u_a^*}{k} &= u + \frac{u_a}{k}, \\ I(u^*, u_a^*) &= I(u, u_a). \end{aligned} \right\} \quad (10.58)$$

Этих дополнительных предположений вместе с уравнениями (10.15) достаточно для рассмотрения колебаний блокинг-генератора.

Докажем сделанные постулаты относительно разрывного характера колебаний блокинг-генератора, исходя из рассмотрения динамики его модели третьего порядка, получаемой при учете малых паразитных емкостей обмоток трансформатора, изображенных на рис. 567 пунктиром (емкость C_2 является суммой емкости анодной обмотки и выходной емкости лампы, емкость C_3 — суммой емкостей выходной обмотки и выходных цепей блокинг-генератора); остальными малыми паразитными параметрами (в том числе магнитными потоками рассеяния в трансформаторе) мы по-прежнему пренебрегаем. Для такой модели имеем следующие уравнения колебаний:

$$\begin{aligned} -L \frac{df^*}{dt} &= u + v = \frac{E_a - u_a}{k} = \frac{u_{\text{ВЫХ}}}{k'}, \\ C \frac{dv}{dt} &= \frac{u}{R} + i_g(u) = i(u), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f^* &= i + C_1 \frac{d(u + v)}{dt} - k \left[i_a + C_2 \frac{du_a}{dt} \right] + k' \left[\frac{u_{\text{ВЫХ}}}{R_H} + C_3 \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} \right] = \\ &= i(u) - ki_a(u, u_a) + \frac{k'^2}{R_H} \frac{E_a - u_a}{k} - \frac{C'}{k} \frac{du_a}{dt} = I(u, u_a) - \frac{C'}{k} \frac{du_a}{dt} \end{aligned}$$

— ток намагничивания (в этом выражении $C' = C_1 + k^2 C_2 + k'^2 C_3$ и имеет смысл малой эквивалентной паразитной емкости, включенной параллельно сеточной обмотке трансформатора). Исключая из этих уравнений $u = \frac{E_a - u_a}{k} - v$, получим следующую систему дифференциальных уравнений третьего порядка

¹⁾ Если бы во время мгновенного скачка напряжение и магнитный поток через какую-либо обмотку трансформатора изменились на конечную величину, то ток $i = C \frac{dv}{dt}$ и э. д. с. индукции в соответствующей обмотке были бы бесконечно большими, что противоречит нашему предположению относительно ограниченности токов и напряжений в схеме,

(в переменных I^* , v и u_a):

$$\left. \begin{aligned} L \frac{dI^*}{dt} &= \frac{u_a - E_a}{k}, \\ C \frac{dv}{dt} &= i = i \left(\frac{E_a - u_a}{k} - v \right), \\ \frac{C'}{k} \frac{du_a}{dt} &= I \left(\frac{E_a - u_a}{k} - v, u_a \right) - I^* = F(u_a, v, I^*). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Согласно уравнениям (2) при $C' \rightarrow +0$ в фазовом пространстве u_a, v, I^* вне поверхности F :

$$F(u_a, v, I^*) \equiv I - I^* = 0,$$

$\frac{du_a}{dt} \rightarrow \infty$, но $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{dI^*}{dt}$ остаются конечными. Поэтому вне поверхности F имеют место «быстрые» движения изображающей точки системы по траекториям:

$$v = \text{const}, \quad I^* = \text{const}, \quad (3)$$

во время которых напряжения u и u_a изменяются скачком, а напряжение v на конденсаторе C и магнитные потоки через обмотки трансформатора остаются неизменными.

Эти траектории «быстрых» движений (3) идут, как известно, к той части поверхности F , на которой

$$\frac{\partial F}{\partial u_a} < 0 \quad \text{или} \quad g(u, u_a) > 0,$$

так как

$$k \frac{\partial F}{\partial u_a} = -\frac{\partial I}{\partial u} + k \frac{\partial I}{\partial u_a} = -\frac{1}{R} - S_g(u) + kS(u, u_a) - \frac{k^2}{R_i(u, u_a)} - \frac{k'^2}{R_H} = -g(u, u_a);$$

наоборот, изображающие точки уходят скачком от той части поверхности F , на которой $g(u, u_a) < 0$. Следовательно, «медленные» движения изображающей точки («медленные» изменения состояния блокинг-генератора с конечными при $C' \rightarrow +0$ скоростями изменений переменных) имеют место только в малой окрестности поверхности F^+ :

$$I^* = I(u, u_a), \quad u = \frac{E_a - u_a}{k} - v, \quad g(u, u_a) > 0 \quad (F^+)$$

(в пределе, при $C' \rightarrow +0$, — на самой поверхности F^+); вследствие этого уравнения «медленных» движений при достаточно малых паразитных емкостях (при достаточно малых C') записываются в виде уравнений (10.54) или (10.55).

Вне поверхности F^+ происходят «быстрые» движения изображающей точки по траекториям (3) с тем большими скоростями изменения напряжений u и u_a , чем меньше паразитные емкости блокинг-генератора; эти траектории «быстрых» движений проектируются на плоскость u, u_a в виде линий $v = \text{const}$, т. е. в виде прямых линий

$$u + \frac{u_a}{k} = \text{const}. \quad (3')$$

Траектории «медленных» движений на поверхности F^+ переходят в траектории «быстрых» движений (скачков) на границе этой поверхности (эта граница

проектируется на плоскость u, u_a в виде кривой Γ); в свою очередь траектории «быстрых» движений, как нетрудно видеть, идут снова к поверхности F^+ , где переходят в траектории «медленных» движений. При этом начальные и конечные точки траекторий скачков, лежащие на поверхности F^+ , очевидно, связаны между собой условиями (10.58), поскольку во время скачка ϑ и I^* не изменяются, а $I^* = I(u, u_a)$ на поверхности F^+ . Для иллюстрации сказанного на рис. 569 изображены поверхность F^+ и некоторые фазовые траектории в фазовом пространстве u, u_a, I^* и их проекции на координатную плоскость u, u_a .

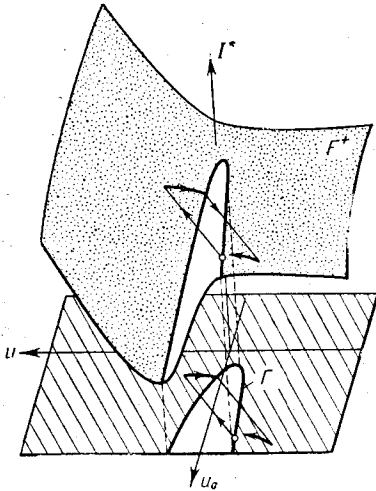


Рис. 569.

Таким образом, учитывая малые паразитные емкости схемы, существенные во время скачков состояний, мы получаем «доброкачественную» модель блокинг-генератора (модель третьего порядка), удовлетворительно отображающую поведение блокинг-генератора и приводящую в пределе, при $C' \rightarrow 0$, к сформулированным выше постулатам о разрывном характере колебаний блокинг-генератора.

Заметим также, что эти постулаты получаются и из рассмотрения динамики модели блокинг-генератора (модели третьего порядка), получаемой при учете малых магнитных потоков рассеяния в трансформаторе, но при пренебрежении всеми паразитными емкостями, или модели пятого порядка, в которой учитываются как малые паразитные емкости, так и малые магнитные потоки рассеяния. Однако траектории «быстрых» движений (их проекции на плоскость u, u_a) будут отличными от прямых (β'); например, при учете только магнитных потоков рассеяния в трансформаторе проекциями фазовых траекторий «быстрых» движений на плоскость u, u_a будут линии

$$I(u, u_a) = \text{const.} \quad (3'')$$

3. Разрывные колебания. Для дальнейшего более детального рассмотрения разрывных автоколебаний блокинг-генератора возьмем кусочно-линейную аппроксимацию характеристик лампы, приведенную на рис. 570 и являющуюся идеализированными характеристиками пентодов:

$$i_a = i_a(u, u_a) = \begin{cases} 0 & \text{при } u_a \leq 0 \text{ и при } u \leq -u_0, \\ S(u + u_0) & \text{при } 0 < S(u + u_0) < \frac{u_a}{R_0}, \\ \frac{u_a}{R_0} & \text{при } S(u + u_0) \geq \frac{u_a}{R_0} > 0, \end{cases}$$

$$i_g = i_g(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0, \\ S_g u & \text{при } u \geq 0, \end{cases}$$

где $-u_0$ — напряжение запираения лампы, S и S_g — крутизна характеристик анодного и сеточных токов на восходящих (прямолинейных)

участках и R_0 — внутреннее сопротивление лампы в области анодной реакции (мы считаем, таким образом, что анодной реакции нет, т. е. анодный ток i_a зависит только от сеточного напряжения u при достаточно больших напряжениях на аноде лампы — при $u_a > SR_0(u + u_0)$, и что, наоборот, в области анодной реакции при $u_a \leq SR_0(u + u_0)$ анодный ток полностью определяется анодным напряжением и не зависит от сеточного напряжения).

При такой кусочно-линейной аппроксимации характеристик лампы плоскость u, u_a разбивается на шесть областей «линейности», в каждой

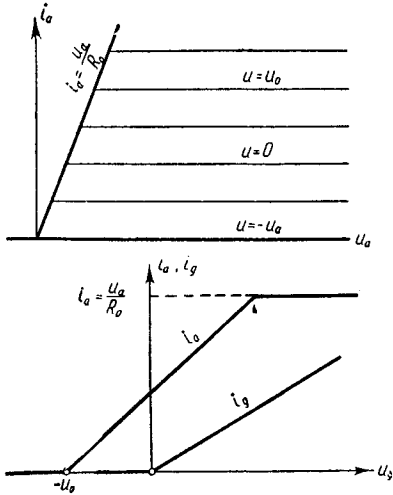


Рис. 570.

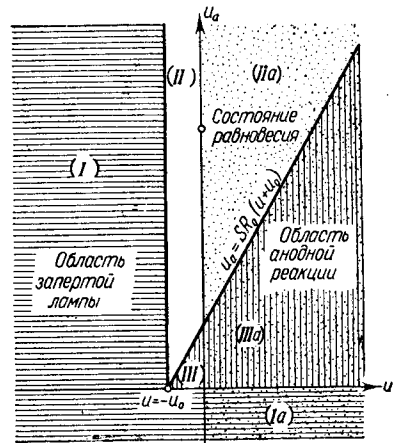


Рис. 571.

из которых уравнения колебаний блокинг-генератора линейны. Эти области «линейности» изображены на рис. 571: области (I) и (Ia) соответствуют запертой лампе ($i_a \equiv 0$), в областях (II) и (IIa) анодная реакция отсутствует и анодный ток i_a зависит только от сеточного напряжения u ; наконец, области (III) и (IIIa) являются областями «полной» анодной реакции, в которых анодный ток не зависит от сеточного напряжения и полностью определяется напряжением на аноде лампы; в областях (Ia), (IIa), (IIIa) $u > 0$ и в лампе течет сеточный ток.

Пусть

$$kS > \frac{1}{R} + S_g + \frac{k'^2}{R_H} \quad \text{и} \quad E_a > SR_0 u_0. \quad (10.59)$$

Тогда состояние равновесия блокинг-генератора $(0, E_a)$ будет лежать на границе областей (II) и (IIa), в которых $R_i = \infty$ и поэтому $g(u, u_a) < 0$. Следовательно, это состояние равновесия будет неустойчивым, а в областях (II) и (IIa) имеют место только «быстрые»

движения (скачки) изображающей точки. Наоборот, в областях (I), (Ia), (III) и (IIIa), т. е. в областях запертой лампы и анодной реакции, где $S(u, u_a) = 0$ и $g(u, u_a) > 0$, возможны «медленные» движения изображающей точки (с конечными скоростями), подчиняющиеся уравнениям (10.55). Ясно, что границей области «медленных» движений, т. е. линией Γ , в рассматриваемом случае кусочно-линейных характеристик лампы являются полупрямые

$$u = -u_0, \quad u_a > 0 \quad \text{и} \quad u_a = SR_0(u + u_0) > 0.$$

Введем для приведения уравнений «медленных» движений к безразмерной форме новые, безразмерные переменные $x, y, t_{\text{нов}}$, связанные со старыми переменными соотношениями:

$$u = u_0 x, \quad u_a = k u_0 y, \quad t_{\text{ст}} = L \cdot g(u, u_a) t_{\text{нов}} \quad (10.60)$$

(ниже для сокращения мы будем обозначать новое, безразмерное время $t_{\text{нов}}$ через t , а старое, обычное время — через $t_{\text{ст}}$; масштаб времени, очевидно, различен в различных областях «линейности» фазовой плоскости). Тогда уравнения «медленных» движений — уравнения (10.55) — запишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y - A - a(x, y)x, \\ \dot{y} &= A - y - b(x)x, \end{aligned} \right\} \quad (10.61)$$

где

$$a(x, y) = \frac{L}{C} \frac{G(x)}{r(x, y)}, \quad b(x) = \frac{L}{C} [G(x)]^2,$$

полная проводимость цепи сетки

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{R} & \text{при } x < 0, \\ G = \frac{1}{R} + S_g & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

$$\frac{1}{r(x, y)} = \frac{k^2}{R_i} + \frac{k'^2}{R_{\text{H}}} = \begin{cases} \frac{1}{r_1} = \frac{k'^2}{R_{\text{H}}} & \text{в областях (I) и (Ia),} \\ \frac{1}{r_2} = \frac{k^2}{R_0} + \frac{k'^2}{R_{\text{H}}} & \text{в областях (III) и (IIIa)} \end{cases}$$

— кусочно-постоянные функции (постоянные в каждой из областей линейности) и

$$A = \frac{E_a}{k u_0}$$

— приведенное безразмерное анодное напряжение (напряжение источника питания).

Границей области «медленных» движений на фазовой плоскости x, y будут полупрямые Γ :

$$\dot{x} = -1, \quad y > 0 \quad \text{и} \quad y = \frac{SR_0}{k} (x + 1) > 0, \quad (10.62)$$

а условия скачка (10.58) будут состоять в том, что значения величин

$$G(x)x - \frac{y}{r(x,y)} \text{ и } x + y \quad (10.58a)$$

непосредственно после скачка изображающей точки с полупрямых (10.62) совпадают с их значениями перед скачком.

Для доказательства условий скачка (10.58a) заметим, что в области «медленных» движений, т. е. в областях (I), (Ia), (III) и (IIIa), анодный ток

$$i_a = \frac{u_a}{R_i} = \frac{ku_0 y}{R_i},$$

где R_i — внутреннее сопротивление лампы ($R_i = \infty$ в областях (I) и (Ia) и $R_i = R_0$ в областях (III) и (IIIa)); поэтому ток намагничивания

$$I = u_0 \left\{ G(x)x - \frac{y}{r(x,y)} + \frac{A}{r_1} \right\}. \quad (a)$$

Кроме того, напряжение на конденсаторе C

$$v = u_0 \{A - (x + y)\}. \quad (b)$$

Сформулированные выше условия скачка (10.58a) получаются из условий скачка (10.58) и этих выражений для I и v .

Ниже для определенности мы будем полагать, что паразитные емкости являются основными среди малых паразитных параметров, существенных во время скачков состояний блокинг-генератора, и будем пренебрегать малыми магнитными потоками рассеяния в трансформаторе. Тогда траекториями скачков на плоскости x, y будут прямые

$$x + y = \text{const}, \quad (r)$$

так как при отсутствии магнитных потоков рассеяния в трансформаторе напряжение v на конденсаторе C дается выражением (b) и во время «медленных», и во время «быстрых» изменений состояния блокинг-генератора, и это напряжение не изменяется во время мгновенного скачка (почти не изменяется, если паразитные емкости блокинг-генератора достаточно малы). Незменным во время скачка будет и ток намагничивания, однако он во время скачка отличается от выражения (a) (из-за наличия паразитных емкостей) и становится равным этому выражению только после прекращения скачка.

Траектории скачков (r) будут изображаться на рисунках, иллюстрирующих разбиение плоскости x, y на траектории, тонкими линиями.

Для дальнейшего будет полезным уравнение

$$\frac{d}{dt}(x + y) = - \{ a(x, y) + b(x) \} x, \quad (10.61a)$$

получаемое из уравнений (10.61). Из этого уравнения, в частности, следует, что $x + y$ возрастает (а напряжение v убывает) при $x < 0$ (т. е. при $u < 0$) и, наоборот, $x + y$ убывает (v возрастает) при $x > 0$ (при $u > 0$).

Рассмотрим разбиение на траектории фазовой плоскости x, y блокинг-генератора, полагая

$$A \gg 1 \text{ и } \frac{R_0}{k^2}, \frac{1}{S_g}, \frac{R_H}{k'^2}, \sqrt{\frac{L}{C}} \ll \sqrt{\frac{RR_H}{k'^2}} \ll R, \quad (10.63)$$

что выполняется при обычно встречающихся значениях параметров блокинг-генератора (A является величиной порядка нескольких десятков, а R_0/k^2 , $1/S_g$ и R_{II}/k'^2 имеют значения одного порядка, порядка сотен ом, и значительно меньше сопротивления R).

В области (I), где лампа заперта, т. е. $i_a \equiv 0$, $i_g \equiv 0$, $G(x) = \frac{1}{R}$ и $r(x, y) = r_1 = \frac{R_{II}}{k'^2}$, уравнения «медленных» колебаний блокинг-генератора запишутся в виде следующей линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y - A - a_1 x, \\ \dot{y} &= A - y - b_1 x, \end{aligned} \right\} \quad (10.64)$$

где

$$a_1 = \frac{L}{CRr_1} \quad \text{и} \quad b_1 = \frac{L}{CR^2},$$

причем при обычных значениях параметров $0 < b_1 \ll a_1 \ll 1$; в области (I) $t_{ст} \approx \frac{L}{r_1} t_{нов}$, поскольку там $g(u, u_a) = \frac{1}{R} + \frac{1}{k'^2 R_{II}} \approx \frac{1}{r_1}$.

Характеристическое уравнение системы (10.64)

$$\lambda^2 + (1 + a_1)\lambda + a_1 + b_1 = 0 \quad (10.64a)$$

имеет при $0 < b_1 \ll a_1 \ll 1$ два действительных отрицательных корня:

$$\lambda_1 = -\gamma_1 < 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -\gamma'_1 < 0,$$

где

$$\gamma_1 = a_1 + b_1 [1 + O(a_1)] \approx a_1 \quad \text{и} \quad \gamma'_1 = 1 - b_1 [1 + O(a_1)] \approx -1.$$

Общим решением уравнений (10.64) будет:

$$\left. \begin{aligned} x &= B_1 e^{-\gamma_1 t} + B'_1 e^{-\gamma'_1 t} \approx B_1 e^{-a_1 t} + B'_1 e^{-t}, \\ y &= A + B_1 (a_1 - \gamma_1) e^{-\gamma_1 t} + B'_1 (a_1 - \gamma'_1) e^{-\gamma'_1 t} \approx \\ &\approx A - B_1 b_1 e^{-a_1 t} - B'_1 e^{-t}. \end{aligned} \right\} \quad (10.64б)$$

Соответствующее разбиение области (I) на траектории «медленных» движений изображающей точки приведено на рис. 572. В этой области имеются две прямолинейные траектории $y = A + x_1 x$ и $y = A + x_2 x$, где $x_1 = -b_1 \approx 0$ и $x_2 \approx -1^1$). Остальные траекто-

¹⁾ Для углового коэффициента прямолинейной фазовой траектории $y = A + x x$ имеем согласно (10.64):

$$x^2 + (1 - a_1)x + \gamma_1 = 0,$$

откуда

$$x_1 = -b_1 [1 + O(a_1)] \approx 0 \quad \text{и} \quad x_2 = -1 + a_1 + b_1 [1 + O(a_1)] \approx -1,$$

рии (вне малой окрестности траектории $y = A + x_1 x$) близки к прямым $x + y = \text{const}$ (точнее, к прямым, параллельным второй прямолинейной траектории $y = A + x_2 x$), и изображающие точки двигаются по этим траекториям в направлении к первой прямолинейной траектории. Нетрудно видеть, что все траектории, идущие в области $y > 0$, выходят на границу области (I) — на полупрямую Γ_1

$$x = -1, y \geq A - a_1$$

(так как $\dot{x} \geq 0$ только при $y \geq A - a_1$). При этом все траектории, идущие ниже прямой $x + y = A - 1$, входят в малую окрестность почти горизонтальной фазовой траектории $y = A + x_1 x$ и поэтому выходят на полупрямую Γ_1 в точках, весьма близких к точке $(-1, A)^1$.

Если изображающая точка вышла на полупрямую $x = -1$ в некоторой точке с ординатой y_1 ($y_1 \geq A - a_1$), то она затем по соответствующей траектории «быстрого» движения (по траектории $x + y = y_1 - 1$) «перепрыгнет» в точку (x_1^*, y_1^*) , которая однозначно определяется условиями скачка (10.58а) (условиями сохранения напряжения на конденсаторе C и тока намагничивания в трансформаторе) и лежит в области (IIIа), если условия (10.63) выполнены. Именно, конечная точка скачка (x_1^*, y_1^*) определяется по начальным условиям

$$Gx_1^* - \frac{y_1^*}{r_2} = -\frac{1}{R} - \frac{y_1}{r_1} \approx -\frac{y_1}{r_1}, \text{ так как обычно } r_1 \ll R,$$

и

$$x_1^* + y_1^* = -1 + y_1,$$

¹⁾ Заметим, что движению изображающей точки по траектории $y = A + x_1 x \approx A$ и в малой ее окрестности соответствует процесс разряда конденсатора C через сопротивление R при весьма небольших напряжениях на обмотках трансформатора. При движении изображающей точки по этой траектории x (напряжение u на сетке лампы) изменяется как $e^{-a_1 t}$ или как $e^{-\frac{t}{RC}}$ ($t_{ст}$ — обычное, размерное время), в то время как при движении по остальным траекториям переменные x и y изменяются как e^{-t} или как $e^{-\frac{r_1}{L} t_{ст}}$, т. е. значительно быстрее.

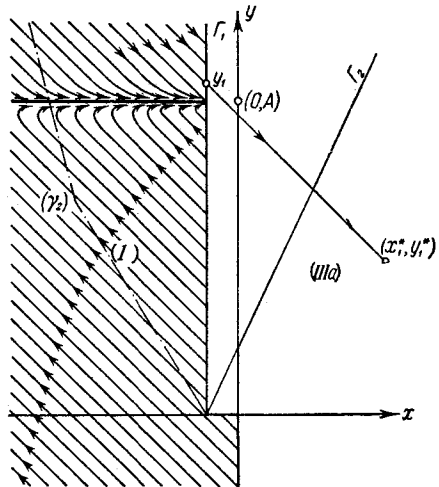


Рис. 572.

откуда

$$x_1^* \approx \frac{y_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) - \frac{1}{r_2}}{G + \frac{1}{r_2}} \quad \text{и} \quad y_1^* \approx \frac{y_1 \left(G + \frac{1}{r_1} \right) - G}{G + \frac{1}{r_2}} \quad (10.65)$$

(так как $y_1 \geq A - a_1 \gg 1$, то $x_1^* > 0$ и $0 < y_1^* < \frac{SR_0}{k} (x_1^* + 1)$, т. е. точка (x_1^*, y_1^*) действительно лежит в области (IIIa); при этом $y_1^* < y_1$).

В области (IIIa), т. е. в области анодной реакции и сеточного тока (там $R_i = R_0$ и $G(x) = G \approx \frac{1}{S_g}$, так как обычно $S_g \gg \frac{1}{R}$), уравнения (10.61) запишутся в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - A - a_2 x, \\ \dot{y} = A - y - b_2 x, \end{cases} \quad (10.66)$$

где

$$a_2 = \frac{L}{C} \frac{G}{r_2} \quad \text{и} \quad b_2 = \frac{L}{C} G^2;$$

в области (IIIa) $t_{ct} = L \left(G + \frac{1}{r_2} \right) t_{нов}$. Дифференциальным уравнением интегральных кривых (или фазовых траекторий, поскольку в области (IIIa) нет состояний равновесия уравнений (10.66)) будет:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A - y - b_2 x}{y - A - a_2 x}. \quad (10.66a)$$

Характеристическое уравнение линейной системы (10.66)

$$\lambda^2 + (1 + a_2)\lambda + a_2 + b_2 = 0 \quad (10.66b)$$

в зависимости от величин параметров a_2 и b_2 , т. е. в зависимости от соотношения между характеристическим сопротивлением сеточной цепи блокинг-генератора $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ и сопротивлениями

$$\frac{1}{G} \approx \frac{1}{S_g} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{r_2}{G}} \approx \left\{ S_g \left(\frac{k^2}{R_0} + \frac{k'^2}{R_H} \right) \right\}^{-1/2}$$

имеет или два действительных отрицательных корня (при $(1 - a_2)^2 > 4b_2$) или два комплексно-сопряженных корня с отрицательной действительной частью (при $(1 - a_2)^2 < 4b_2$). Нетрудно видеть, что существуют два таких значения ρ_1 и ρ_2 (причем $\rho_1 < \sqrt{\frac{r_2}{G}} < \rho_2$), что при $\rho < \rho_1$ и при $\rho > \rho_2$ корни характеристического уравнения (10.66b) будут действительными и отрицательными, а при $\rho_1 < \rho < \rho_2$ — комплексно-сопряженными.

В соответствии с этим траектории в области (IIIa) имеют вид параболических траекторий устойчивого узла, расположенного в состоя-

нии равновесия $(0, A)$, т. е. вне области (IIIa), или дуг спиральной устойчивого фокуса в той же точке. Наиболее простыми эти траектории будут в случаях достаточно больших и достаточно малых значений характеристического сопротивления блокинг-генератора $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

При достаточно больших ρ , когда $a_2, b_2 \gg A$, вне малой окрестности оси ординат $\frac{dy}{dx} \approx + \frac{b_2}{a_2}$ (согласно уравнению (10.66a)) и фазовые траектории близки к прямым $y - \frac{b_2}{a_2} x = \text{const}$ или $\frac{y}{r_2} - Gx = \text{const}$, которые являются линиями постоянного тока намагничивания в трансформаторе, поскольку в области (IIIa) ток намагничивания

$$I = u_0 \left\{ Gx - \frac{y}{r_2} \right\}.$$

При движении изображающей точки по этим траекториям происходит уменьшение x и y (т. е. уменьшение напряжений на сетке и аноде лампы и анодного тока), сопровождаемое сравнительно значительным уменьшением $x + y$, т. е. увеличением напряжения v на конденсаторе C . Иначе говоря, при $a_2, b_2 \gg A$, т. е. при $\rho \gg \frac{1}{G}, \sqrt{\frac{r_2}{G}}$, во время генерирования импульса анодного тока ток намагничивания I в трансформаторе почти не изменяется, а уменьшение сеточного напряжения u , приводящее в конце концов к запуску лампы, обусловлено значительным и сравнительно быстрым возрастанием напряжения v на конденсаторе C (из-за наличия сеточного тока в лампе) и происходит, несмотря на увеличение напряжения на сеточной обмотке трансформатора. Такой механизм прекращения генерирования импульса анодного тока носит название *емкостного восстановления* состояний блокинг-генератора с запортой лампой.

Наоборот, при достаточно малых значениях $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, когда $a_2, b_2 \ll 1$, $\frac{dy}{dx} \approx -1$ (вне окрестностей прямых $y = A + a_2 x$ и $y = A - b_2 x$), и фазовые траектории будут близки к прямым $x + y = \text{const}$ — к линиям постоянного напряжения на конденсаторе C . В этом случае (при $y < A - b_2 x$) x уменьшается, а y увеличивается, что приводит к сравнительно большому уменьшению тока намагничивания I . Теперь за время генерирования импульса анодного тока напряжение v на конденсаторе C почти не изменяется, и уменьшение сеточного напряжения u , приводящее к прекращению генерирования импульса, происходит главным образом в результате уменьшения тока намагничивания I и напряжения на сеточной обмотке трансформатора, равного $-L \frac{dI}{dt_{\text{ст}}}$. Этот механизм прекращения

генерирования импульса анодного тока обычно называют *индуктивным восстановителем* состояний блокинг-генератора с запертой лампой.

Уравнения колебаний блокинг-генератора в области (III), где есть анодная реакция, но нет сеточных токов, и куда могут перейти фазовые траектории из области (IIIa), мы получим из уравнений (10.66), если заменим в них G на $\frac{1}{R}$. Фазовыми траекториями в этой области будут траектории устойчивого узла в точке $(0, A)$, также близкие к прямым $x + y = \text{const}$.

Изображающая точка, двигаясь по траекториям «медленных» движений в областях анодной реакции (IIIa) и (III), обязательно выйдет на границу этих областей — на полупрямую Γ_2 :

$$y = \frac{SR_0}{k} (x + 1) > 0,$$

являющуюся одновременно границей области «медленных» движений; отсюда изображающая точка скачком перепрыгнет в область (I).

Если начальной точкой скачка была точка (x_2, y_2) полупрямой Γ_2 , то конечная точка скачка (x_2^*, y_2^*) однозначно определится условиями скачка

$$\frac{x_2^*}{R} - \frac{y_2^*}{r_1} = G(x_2) x_2 - \frac{y_2}{r_2} \quad \text{и} \quad x_2^* + y_2^* = x_2 + y_2,$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} y_2^* &\approx \frac{r_1}{r_2} y_2 - r_1 G(x_2) x_2 = r_1 \left\{ \left[\frac{SR_0}{kr_2} - G(x_2) \right] x_2 + \frac{SR_0}{kr_2} \right\}, \\ x_2^* &= x_2 + y_2 - y_2^* \approx \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) y_2 + [1 + r_1 G(x_2)] x_2 = \\ &= -r_1 \left\{ \left[kS - \frac{1}{r_1} - G(x_2) \right] x_2 + kS \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10.67)$$

Геометрическое место конечных точек скачка изображающей точки из точек полупрямой Γ_2 изображено на рис. 572 ломаной пунктирной линией $(\gamma_2)^1$. После скачка в точку (x_2^*, y_2^*) изображающая точка будет совершать «медленное» движение в области (I) по соответствующей траектории уравнений (10.64) и выйдет снова на полупрямую Γ_1 , откуда совершит скачок в область (IIIa) и т. д.

Таким образом, блокинг-генератор при выполнении условий самовозбуждения (10.59) будет совершать разрывные колебания, которым соответствуют «медленные» движения изображающей точки в областях (I) и (IIIa) + (III), чередующиеся с «быстрыми» (мгновенными)

¹⁾ Нетрудно видеть, что в силу первого из условий самовозбуждения (10.59) $x_2^* < -1$, т. е. что конечная точка скачка (x_2^*, y_2^*) действительно лежит в области (I); при этом $y_2^* > y_2 > 0$. Далее, в силу того же условия и неравенства $r_2 < \frac{R_0}{k^2}$ x_2^* убывает, а y_2^* возрастает при увеличении x_2 (или y_2).

скачками из области (I) в область (IIIa) и из области (IIIa) (или (III)) в область (I). При этом, очевидно, движениям изображающей точки в области (I) соответствуют те этапы колебательных процессов в блокинг-генераторе, во время которых лампа блокинг-генератора заперта. Наоборот, движениям изображающей точки в областях (IIIa) и (III) соответствует процесс генерирования импульсов анодного тока (лампа открыта, но анодное напряжение невелико, в силу чего имеет место анодная реакция).

4. Разрывные автоколебания блокинг-генератора.

Для нахождения периодических разрывных колебаний (автоколебаний) блокинг-генератора и исследования их устойчивости рассмотрим точечное преобразование II полупрямой Γ_1 самой в себя, осуществляемое фазовыми траекториями (рис. 573). Пусть s — ордината исходной точки полупрямой Γ_1 :

$$x = -1, \quad y \geq A - a_1.$$

Из этой точки изображающая точка по траектории «быстрого» движения перепрыгивает в точку (x_1^*, y_1^*) , определяемую по s соотношениями (10.65); затем по траектории «медленного» движения в области (IIIa) (или в областях (IIIa) и (III)) она выйдет на полупрямую Γ_2 в точке (x_2, y_2) , откуда совершит скачок в точку (x_2^*, y_2^*) , лежащую в области (I); и наконец, изображающая точка, двигаясь по соответствующей траектории «медленного» движения в области (I), выйдет снова на полупрямую Γ_1 в некоторой точке $(-1, s')$, которая и будет являться последующей точкой рассматриваемого точечного преобразования II:

$$s' = \Pi(s).$$

Очевидно, существует такой интервал исходных точек полупрямой Γ_1 $A - a_1 \leq s < s_1$, для которых точки (x_2, y_2) лежат ниже прямой $x + y = A - 1$ ¹⁾. Ниже этой прямой будут лежать и соответствующие точки (x_2^*, y_2^*) , в силу чего при $b_1 \ll 1$ фазовые траектории

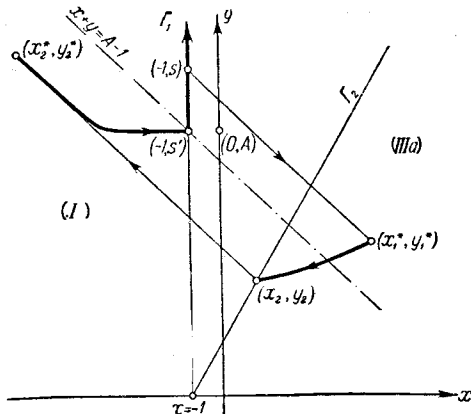


Рис. 573.

¹⁾ Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что при скачке изображающей точки $x + y$ не изменяется (так как не изменяется напряжение v на конденсаторе C , а в областях (IIIa) и (III)

$$\frac{d}{dt}(x + y) = -[a + b]x < 0.$$

в области (I) , начинающиеся в точках (x_2^*, y_2^*) , придут в малую окрестность траектории $y \approx A$ и выйдут на полупрямую Γ_1 в точках, близких к $(-1, A)$. Таким образом, при $A - a_1 \leq s < s_1$, $s' \approx A$, т. е. график функции последования $s' = \Pi(s)$ на этом интервале изменения s близок к горизонтальной прямой. Нетрудно показать непосредственным вычислением функции последования, что при $s \geq s_1$, $s' < s$. Поэтому график функции последования (т. е. диаграмма Ламерея) для рассматриваемого точечного преобразования Π имеет вид, изображенный на рис. 574. Так как график функции последования имеет

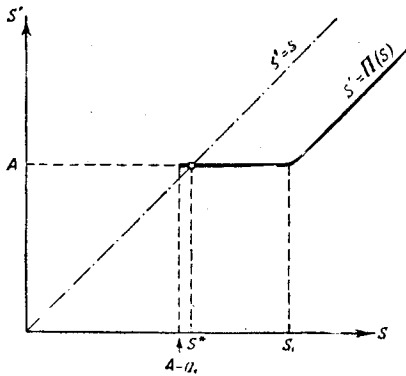


Рис. 574.

единственную точку пересечения $s = s^* \approx A$ с биссектрисой $s' = s$,

причем в этой точке $\left| \frac{ds'}{ds} \right| \ll 1$, то точечное преобразование Π имеет единственную, и притом устойчивую, неподвижную точку $s = s^*$, которой на фазовой плоскости x, y соответствует единственный и устойчивый предельный цикл, пересекающий полупрямую Γ_1 в точке, близкой при $b_1 \ll 1$ к точке $(-1, A)$. К этому предельному циклу стремятся (при $t \rightarrow +\infty$) все остальные траектории, т. е., иначе говоря, в блокинг-генера-

торе при любых начальных условиях устанавливается один и тот же режим разрывных автоколебаний.

Вид предельного цикла, а следовательно, и форма разрывных автоколебаний блокинг-генератора зависят главным образом от вида фазовых траекторий в области $(IIIa)$, который в свою очередь зависит от величин параметров a_2 и b_2 . На рис. 575 — 577 приведены предельные циклы и соответствующие им осциллограммы колебаний сеточного и анодного напряжений, а также анодного тока при различных значениях характеристического сопротивления блокинг-генератора $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$: рис. 575 — для $\rho \gg \frac{1}{G}$, $\sqrt{\frac{r_2}{G}}$ (т. е. для случая емкостного восстановления, в котором траектории в области $(IIIa)$ близки к прямым $y - \frac{b_2}{a_2} x = \text{const}$ или $I = \text{const}$); рис. 576 — для ρ , имеющих порядок величин $\frac{1}{G}$, $\sqrt{\frac{r_2}{G}}$, и рис. 577 — для $\rho \ll \frac{1}{G}$, $\sqrt{\frac{r_2}{G}}$ (т. е. для случая индуктивного восстановления, когда траектории в области $(IIIa)$ близки к прямым $x + y = \text{const}$ или $v = \text{const}$). Как видно из приведенных рисунков, импульс анодного тока i_a , а также анодного напряжения u_a и выходного напряжения,

линейно зависящего от u_a , имеет наиболее плоскую вершину при $\sqrt{\frac{L}{C}} \sim \frac{1}{G}$, $\sqrt{\frac{r_2}{G}}$, т. е. в случае «смешанного» восстановления (состояний блокинг-генератора с запертой лампой).

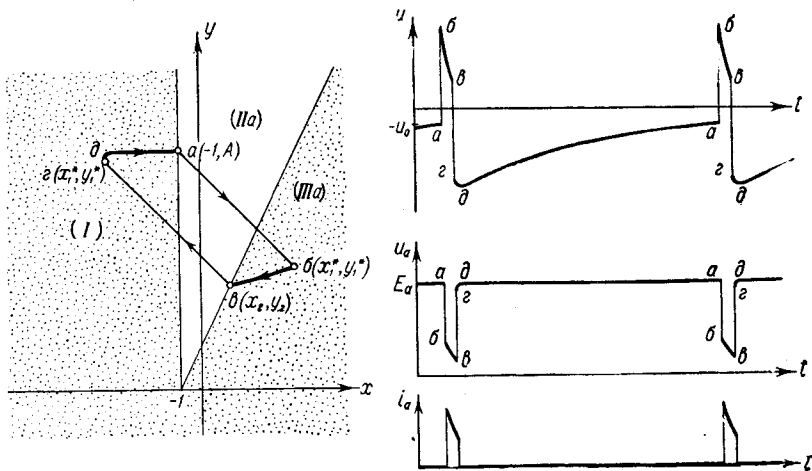


Рис. 575.

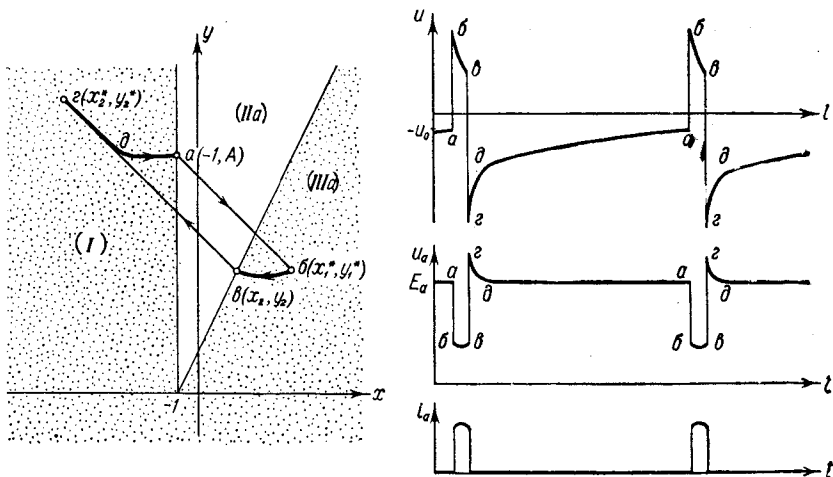


Рис. 576.

Вычисления периода колебаний, длительности импульсов анодного тока, амплитуд напряжений и токов в установившемся режиме разрывных автоколебаний блокинг-генератора существенно

упрощаются в результате того обстоятельства, что при $b_1 \ll 1$, т. е. при $\sqrt{\frac{L}{C}} \ll R$, предельный цикл пересекает полупрямую Γ_1 в точке,

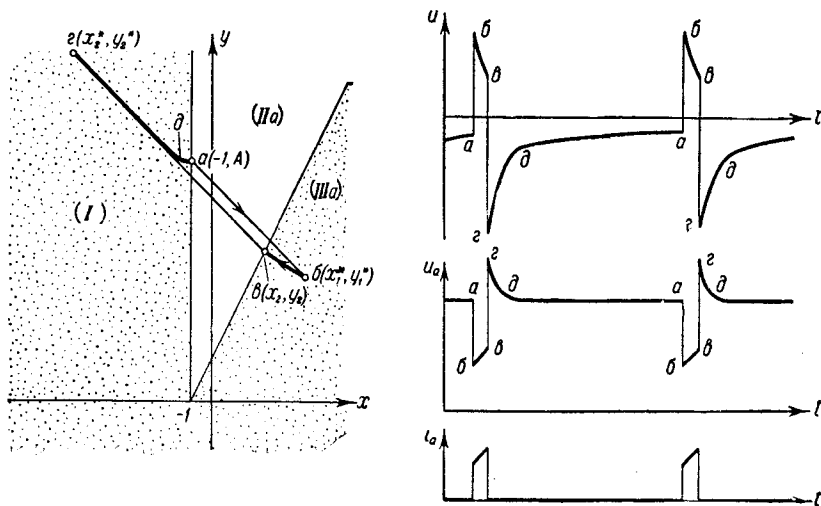


Рис. 577.

близкой к $(-1, A)$. В силу этого координаты конечной точки скачка (x_1^*, y_1^*) , определяемой соотношениями (10.65), равны:

$$x_1^* \approx \frac{A \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) - \frac{1}{r_2}}{G + \frac{1}{r_2}} \approx A \frac{\frac{k^2}{R_0}}{S_g + \frac{k^2}{R_0} + \frac{k'^2}{R_H}},$$

$$y_1^* \approx \frac{A \left(G + \frac{1}{r_1} \right) - G}{G + \frac{1}{r_2}} = A \frac{S_g + \frac{k'^2}{R_H}}{S_g + \frac{k^2}{R_0} + \frac{k'^2}{R_H}} < A$$

и практически не зависят ни от C , ни от L . Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — уравнение фазовой траектории «медленного» движения в области (IIIa), начинающейся (при $t=0$) в точке (x_1^*, y_1^*) и являющейся дугой предельного цикла (иначе говоря, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ является решением уравнений (10.66), удовлетворяющим начальным условиям: $\varphi(0) = x_1^*$, $\psi(0) = y_1^*$), и пусть эта траектория выходит на полупрямую Γ_2 (в точке (x_2, y_2)). Составим функцию

$$\Phi(t) = \frac{SR_0}{k} [1 + \varphi(t)] - \psi(t)$$

$(\Phi(t) > 0$ внутри области (IIIa)); тогда корень t' уравнения

$$\Phi(t) = 0,$$

очевидно, даст длительность импульсов анодного тока, генерируемых блокинг-генератором (в единицах безразмерного времени области (III)), а координатами точки выхода предельного цикла на полупрямую Γ_2 будут:

$$x_2 = \varphi(t'), \quad y_2 = \psi(t')^1).$$

Соответственно длительность импульсов в единицах обычного времени будет равна:

$$\tau = L \left(G + \frac{1}{r_2} \right) t'^2).$$

Из точки (x_2, y_2) изображающая точка совершает мгновенный скачок (по отрезку траектории «быстрого» движения $x + y = \text{const}$) в точку (x_2^*, y_2^*) предельного цикла, определяемую соотношениями (10.67) и лежащую в области (I), и затем идет в области (I) по траектории «медленного» движения (10.64б), начинающейся (пусть при $t=0$) в точке $(x_2^*, y_2^*)^3$:

$$\begin{aligned} x &\approx -[A - (x_2 + y_2)]e^{-at} + (A - y_2^*)e^{-t}, \\ y &\approx A - (A - y_2^*)e^{-t}. \end{aligned}$$

¹⁾ Если уравнение $\Phi(t) = 0$ имеет несколько корней (что может быть только при $(1 - a_2)^2 < 4b_2$), то под t' следует понимать наименьший положительный корень этого уравнения.

²⁾ Если же предельный цикл переходит в область (III) и лишь затем выходит на полупрямую Γ_2 , то в этом случае, интегрируя уравнения колебаний блокинг-генератора в областях (IIIa) и (III) и используя очевидное условие непрерывности траекторий при переходе через границу этих областей, следует найти уравнение дуги предельного цикла, лежащей в областях (IIIa) и (III):

$$x = \varphi_1(t_{CT}), \quad y = \psi_1(t_{CT}),$$

и составить функцию

$$\Phi_1(t_{CT}) = \frac{SR_0}{k} [1 + \varphi_1(t_{CT})] - \psi_1(t_{CT}).$$

Тогда корень уравнения

$$\Phi(t_{CT}) = 0$$

будет являться длительностью импульса τ (в единицах обычного времени), а координатами точки (x_2, y_2) будут:

$$x_2 = \varphi_1(\tau), \quad y_2 = \psi_1(\tau).$$

³⁾ Полагая, что при $t=0$ $x = x_2^*$ и $y = y_2^*$, мы получим из (10.64б):

$$B_1 + B_1' = x_2^* \quad \text{и} \quad A - B_1' = y_2^*,$$

поскольку $b_1 \ll 1$, или

$$B_1 = x_2^* + y_2^* - A = -[A - (x_2 + y_2)] \quad \text{и} \quad B_1' = A - y_2^*.$$

Схема, очевидно, имеет единственное состояние равновесия, в котором $u_1 = u_2 = E_g$, $i_{a1} = i_{a2} = i_a(E_g)$ и $v_1 = v_2 = v_0 = E_a - R_a \cdot i_a(E_g) - E_g$.

Введем для упрощения выкладок безразмерные переменные x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , связанные с напряжениями u_1 , u_2 , v_1 , v_2 соотношениями:

$$u_{1,2} = E_g + u_0 \cdot x_{1,2},$$

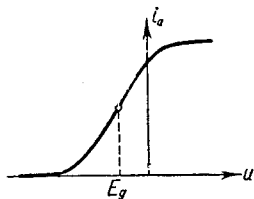
$$v_{1,2} = v_0 + \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) u_0 \cdot y_{1,2},$$

где u_0 — некоторый масштаб напряжений (x_1 , x_2 , y_1 , y_2 пропорциональны переменным составляющим напряжений на сетках ламп и на конденсаторах C), безразмерное время

$$t_{\text{нов}} = \frac{t_{\text{ст}}}{C(R_a + R_g)}$$

и безразмерную характеристику ламп

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S} [i_a(E_g + u_0 \cdot x) - i_a(E_g)],$$



где S — крутизна характеристики ламп в рабочей точке (т. е. при $u = E_g$). Ниже для большей определенности мы будем считать характеристику ламп, а также сеточное смещение E_g такими, что безразмерная крутизна характеристики $\varphi'(x)$ является четной непрерывной функцией x , которая монотонно убывает, стремясь к нулю, при возрастании $|x|$; очевидно, $0 \leq \varphi'(x) \leq 1$ (рис. 579).

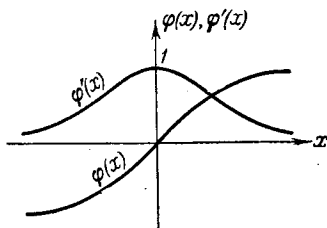


Рис. 579.

В новых безразмерных переменных уравнения колебаний мультивибратора запишутся в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} -y_1 &= x_1 + k\varphi(x_2), & -y_2 &= x_2 + k\varphi(x_1), \\ \dot{y}_1 &= x_1, & \dot{y}_2 &= x_2, \end{aligned} \right\} \quad (10.68)$$

где

$$k = \frac{SR_a R_g}{R_a + R_g}$$

— параметр схемы, являющийся коэффициентом усиления (на высоких частотах) усилителя, собранного из элементов одной из половин схемы. Исключая y_1 и y_2 , мы получим два дифференциальных уравнения первого порядка для x_1 и x_2 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 + k\varphi'(x_2)\dot{x}_2 + x_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 + k\varphi'(x_1)\dot{x}_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.68a)$$

или, разрешая относительно \dot{x}_1 и \dot{x}_2 ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_1 - k\varphi'(x_2)x_2}{k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) - 1}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_2 - k\varphi'(x_1)x_1}{k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (10.686)$$

Таким образом, рассматриваемый мультивибратор является системой второго порядка (при пренебрежении всеми паразитными параметрами) и его состояния мы можем изображать точками на плоскости x_1, x_2 .

Применяя критерий Бендиксона к уравнению интегральных кривых

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{P(x_1, x_2)}{Q(x_1, x_2)} = \frac{x_1 - k\varphi'(x_2)x_2}{x_2 - k\varphi'(x_1)x_1},$$

получаемому из уравнений (10.686), можно убедиться, что система уравнений (10.686) не допускает непрерывных периодических решений, так как выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} = +2,$$

т. е. всюду положительно.

Характеристическое уравнение для единственного состояния равновесия ($x=0, y=0$) имеет вид:

$$(1 - k^2)\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

так как в силу определения безразмерной характеристики лампы $\varphi'(0) = 1$. При $k < 1$ это состояние равновесия устойчиво (устойчивый узел), и к нему, как нетрудно видеть, стремятся (при $t \rightarrow +\infty$) все фазовые траектории. Иначе говоря, мультивибратор при любых начальных условиях приходит к состоянию равновесия и не может совершать никаких автоколебаний.

Поэтому ниже мы будем рассматривать только случай

$$k > 1,$$

когда единственное состояние равновесия неустойчиво (седло) и мультивибратор самовозбуждается. Но при $k > 1$ на плоскости x_1, x_2 , очевидно, существует такое множество точек, в которых выполняется равенство

$$k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) - 1 = 0; \quad (10.69)$$

это множество точек образует некоторую непрерывную кривую Γ , замкнутую и симметричную относительно биссектрис и координатных осей плоскости x_1, x_2 . На этой кривой Γ \dot{x}_1 и \dot{x}_2 обращаются в бесконечность, причем существенно, что точки части этой кривой являются точками стыка фазовых траекторий уравнений (10.686), и в них уравнения (10.686), составленные при пренебрежении паразитными параметрами схемы, не дают возможности продолжения решения. Та-

ким образом, пренебрегая паразитными параметрами, мы опять приходим к «дефектной» динамической модели, уравнения которой не позволяют проследить за поведением мультивибратора (очевидно, из-за того, что при составлении этих уравнений были отброшены среди паразитных параметров параметры, существенные для колебательных процессов в мультивибраторе).

2. Скачки напряжений u_1, u_2 . Покажем, учитывая малые паразитные емкости C_a и C_g (они изображены на рис. 578 пунктиром), что мультивибратор будет совершать при $k > 1$ разрывные колебания [61].

Уравнения колебаний мультивибратора при учете малых паразитных емкостей C_a и C_g (но при прежних остальных упрощающих предположениях) в безразмерных переменных, введенных выше, могут быть записаны в виде следующей системы дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{x}_1 &= -y_1 - x_1 - k\varphi(x_2) \equiv F_1(x_1, x_2, y_1), \\ \mu \dot{x}_2 &= -y_2 - x_2 - k\varphi(x_1) \equiv F_2(x_1, x_2, y_2), \\ \dot{y}_1 &= x_1, \quad \dot{y}_2 = x_2, \end{aligned} \right\} \quad (10.70)$$

$$\mu = \frac{\frac{R_a}{R_g}}{\left[1 + \frac{R_a}{R_g}\right]^2} \cdot \frac{C_a + C_g}{C}$$

— малый положительный параметр, характеризующий малость паразитных емкостей C_a и C_g по сравнению с емкостью C . Вывод уравнений колебаний мультивибратора при учете паразитных емкостей C_a и C_g и приведение этих уравнений к безразмерной форме мы опускаем, так как связанные с этим выкладки полностью аналогичны выкладкам, сделанным в § 5 настоящей главы при выводе уравнений (10.26). Уравнения (10.70) написаны сразу для случая достаточно малых значений емкостей C_a и C_g ($C_a, C_g \ll C$).

Рассмотрим в общих чертах предельное (при $\mu \rightarrow +0$) разбиение четырехмерного фазового пространства x_1, x_2, y_1, y_2 на фазовые траектории системы уравнений (10.70). Выделим в этом пространстве поверхность F :

$$-y_1 = x_1 + k\varphi(x_2), \quad -y_2 = x_2 + k\varphi(x_1)$$

— фазовую поверхность «вырожденной» системы ($\mu = 0$); эта поверхность, очевидно, гомеоморфна координатной плоскости x_1, x_2 , т. е. точки поверхности F и плоскости x_1, x_2 соответствуют друг другу взаимно однозначно и непрерывно. В каждой точке (x_1, x_2, y_1, y_2) четырехмерного фазового пространства вне этой поверхности F при $\mu \rightarrow +0$ $\dot{x}_1 \rightarrow \infty$, $\dot{x}_2 \rightarrow \infty$, а \dot{y}_1 и \dot{y}_2 остаются конечными; поэтому

в пределе, при $\mu \rightarrow +0$, все фазовое пространство вне поверхности F заполнено фазовыми траекториями, лежащими в плоскостях

$$y_1, y_2 = \text{const.}$$

По этим траекториям изображающая точка двигается «скачком» (со сколь угодно большой скоростью изменения переменных x_1 и x_2 при достаточно малых μ), что соответствует «быстрым» (тем более быстрым, чем меньше паразитные емкости) изменениям состояния мульти-вibrатора, во время которых «скачком» изменяются сеточные напряжения u_1 и u_2 , а напряжения v_1 и v_2 на конденсаторах C остаются неизменными.

Для достаточно малых μ приближенные (асимптотические) дифференциальные уравнения траекторий «быстрых» движений, лежащих вблизи некоторой плоскости $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0$ ($y_1^0, y_2^0 = \text{const}$), получаются из первых двух уравнений (10.70) заменой в них переменных y_1 и y_2 на постоянные y_1^0 и y_2^0 :

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{x}_1 &= -y_1^0 - x_1 - k \varphi(x_2) \equiv F_1(x_1, x_2, y_1^0), \\ \mu \dot{x}_2 &= -y_2^0 - x_2 - k \varphi(x_1) \equiv F_2(x_1, x_2, y_2^0). \end{aligned} \right\} \quad (10.71)$$

Эти уравнения, конечно, справедливы только вне малой окрестности точек пересечения плоскости $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0$ и поверхности F , а их решения аппроксимируют при достаточно малых μ (и тем точнее, чем меньше μ) решения точной системы уравнений (10.70) (также вне F) только на протяжении конечных интервалов времени.

Так как

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -2,$$

то согласно критерию Бендиксона приближенные уравнения (10.71) не могут иметь замкнутых фазовых траекторий. Поэтому ход всех траекторий «быстрых» движений определяется особыми точками уравнений (10.71) и их сепаратрисами. Особыми точками уравнений (10.71), очевидно, являются точки пересечения плоскости $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0$ с поверхностью F , при этом точка (x_1, x_2, y_1^0, y_2^0) поверхности F — устойчивый узел приближенных уравнений (10.71), если

$$k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1 < 0, \quad (10.72)$$

и седло, если

$$k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1 > 0 \quad (10.72a)$$

¹⁾ Характеристическое уравнение для точки (x_1, x_2, y_1^0, y_2^0) поверхности F , для особой точки приближенных уравнений «быстрых» движений (10.71), имеет вид (см. также (10.18) в § 3 настоящей главы):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) = 0,$$

Следовательно, все фазовые траектории «быстрых» движений (они лежат при $\mu \rightarrow +0$ в плоскостях $u_1, u_2 = \text{const}$) идут из бесконечности и от точек (x_1, x_2, y_1, y_2) поверхности F , в которых

$$k^2 \cdot \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1 > 0,$$

в малые окрестности точек той части поверхности F , на которой

$$k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1 < 0;$$

эту часть поверхности F , к точкам которой идут все фазовые траектории «быстрых» движений, мы будем обозначать ниже через F^+ .

Таким образом, при достаточно малых μ фазовые траектории «медленных» движений изображающей точки (с ограниченными при $\mu \rightarrow +0$ фазовыми скоростями) лежат только в малой окрестности (с размерами порядка μ) поверхности F^+ :

$$\left. \begin{aligned} -y_1 = x_1 + k \varphi(x_2), \quad -y_2 = x_2 + k \varphi(x_1), \\ k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.73)$$

В пределе, при $\mu \rightarrow +0$, эти траектории «медленных» движений лежат на самой поверхности F^+ , и их дифференциальные уравнения получаются из уравнений поверхности F^+ и последних двух уравнений (10.70), т. е. совпадают с уравнениями (10.68), полученными ранее при пренебрежении паразитными параметрами схемы.

Границей области «медленных» движений (области F^+) является замкнутая линия γ на поверхности F , определяемая уравнением

$$k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1 = 0;$$

при этом, в силу сделанных выше предположений относительно характеристик ламп, областью F^+ является та часть поверхности F , которая лежит вне кривой γ . Так как в области «медленных» движений (на поверхности F^+) нет ни состояний равновесия, ни замкнутых фазовых траекторий и траектории «медленных» движений не уходят в бесконечно удаленные части поверхности F^+ (см. уравнения (10.68)), то изображающая точка, двигаясь по траекториям «медленных» движений на поверхности F^+ , обязательно придет на ее границу γ , после чего она совершит «быстрое» движение (скачок) по соответствующей траектории $u_1, u_2 = \text{const}$ и придет снова на поверхность F^+ . Координаты концевой точки скачка $x_1 = x_1^+$, $x_2 = x_2^+$, очевидно, связаны с координатами начальной точки скачка $x_1 = x_1^-$, $x_2 = x_2^-$ уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1^+ + k\varphi(x_2^+) = x_1^- + k\varphi(x_2^-), \\ x_2^+ + k\varphi(x_1^+) = x_2^- + k\varphi(x_1^-), \end{aligned} \right\} \quad (10.74)$$

так как во время скачка u_1 и u_2 (т. е. напряжения v_1 и v_2 на конденсаторах C) не изменяются, а начальные и концевые точки скачков лежат на поверхности F^+ .

В рассматриваемой задаче условия скачка (10.74) для каждой точки (x_1^-, x_2^-) кривой γ дают единственную концевую точку скачка (x_1^+, x_2^+) , и поэтому использование дифференциальных уравнений скачков (10.71) для определения концевых точек скачков не является необходимым. Однако исследование этих уравнений дает возможность найти сами траектории «быстрых» движений (приближенно для достаточно малых значений параметра μ), найти соотношения между переменными x_1 и x_2 во время скачков. Начальная точка скачка, лежащая на кривой γ , является для приближенных уравнений (10.71) особой точкой типа седло-узел и из нее выходит единственная траектория

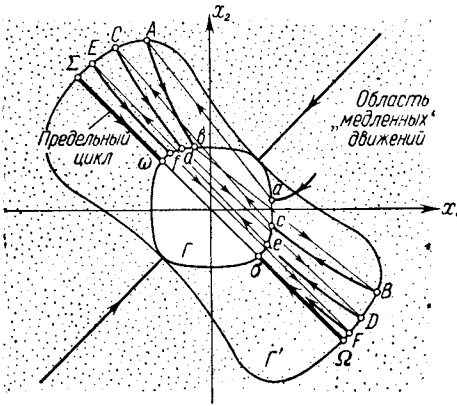


Рис. 580.

уравнений (10.71), которая и является интересующей нас траекторией «быстрого» движения (скачка).

3. Разрывные колебания мультивибратора. Таким образом, при $k > 1$ рассматриваемый мультивибратор будет совершать разрывные колебания, состоящие из чередующихся друг с другом «медленных» (с конечными скоростями изменения сеточных напряжений u_1, u_2) и «быстрых», скачкообразных

(с $\frac{du_1}{dt} \rightarrow \infty, \frac{du_2}{dt} \rightarrow \infty$ при $C_a, C_g \rightarrow +0$) изменений

состояния мультивибратора. Пользуясь гомеоморфностью координатной плоскости x_1, x_2 и поверхности F , плоскости x_1, x_2 и плоскостей $y_1, y_2 = \text{const}$, мы можем рассмотреть эти разрывные колебания путем изучения разбиения плоскости x_1, x_2 , т. е. плоскости сеточных напряжений u_1, u_2 , на траектории «медленных» и «быстрых» движений (на траектории уравнений (10.68) и (10.71)); заметим, что траектории на координатной плоскости x_1, x_2 являются проекциями фазовых траекторий в четырехмерном фазовом пространстве x_1, x_2, y_1, y_2 и поэтому могут пересекаться между собой.

Это разбиение на траектории плоскости x_1, x_2 качественно изображено на рис. 580. Так как кривая γ — граница поверхности F^+ проектируется на плоскость x_1, x_2 в виде кривой Γ (см. (10.69)), то область «медленных» движений (проекцией поверхности F^+) будет та часть плоскости x_1, x_2 , которая лежит вне замкнутой кривой Γ ; в области, лежащей внутри кривой Γ , никаких «медленных» движений быть не может, там имеют место только «быстрые», скачкообразные движения изображающей точки. Изображающая точка, двигаясь по траектории уравнений (10.68)

в области «медленных» движений, обязательно придет на границу этой области — на кривую Γ , откуда по траектории «быстрого» движения (по соответствующей траектории уравнений (10.71)) «перепрыгнет» снова в область «медленных» движений. Геометрическое место конечных точек скачков (x_1^+, x_2^+) , соответствующих согласно (10.74) начальным точкам скачков — точкам (x_1^-, x_2^-) кривой Γ , изображено на рис. 580 в виде кривой Γ' (эта кривая Γ' является при сделанных выше упрощающих предположениях также замкнутой и непрерывной кривой, симметричной относительно биссектрис плоскости x_1, x_2 и охватывающей кривую Γ).

Если изображающая точка пришла на линию Γ в некоторой точке a (рис. 580), то ее дальнейшее движение будет происходить по траектории $aAbVcCd\dots$, состоящей из отрезков траекторий «медленных» движений Ab, Bc, Cd и т. д. и из отрезков траекторий скачков aA, bB, cC и т. д. (на рис. 580 траектории «медленных» движений изображены жирными линиями, траектории скачков — тонкими линиями). Можно показать, что в результате этого движения система асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближается к периодическому процессу, которому соответствует предельный цикл $\Sigma\omega\Omega\sigma\Sigma$, состоящий из двух отрезков траекторий «медленных» движений $\Sigma\omega$ и $\Omega\sigma$ и двух траекторий скачков $\omega\Omega$ и $\sigma\Sigma$ ¹⁾.

При таком периодическом движении все время соблюдаются равенства

$$x_2 = -x_1, \quad y_2 = -y_1.$$

¹⁾ Установление в мультивибраторе периодических разрывных колебаний было показано в работе [6] путем графического интегрирования уравнений и в работе [58] методом точечного преобразования (для кусочно-линейной аппроксимации характеристики лампы).

В рассматриваемой задаче предельный цикл — замкнутая фазовая траектория в четырехмерном фазовом пространстве x_1, x_2, y_1, y_2 — проектируется на отрезок $\Sigma\Omega$ биссектрисы $x_2 = -x_1$ плоскости x_1, x_2 , в силу чего этот отрезок пробегается изображающей точкой (x_1, x_2) то в одном, то в другом направлении. Однако можно сделать так, чтобы разрывные периодические колебания отображались движением изображающей точки по обычному предельному циклу на некоторой фазовой поверхности, если только соответствующим образом выбрать вид этой поверхности (вместо фазовой плоскости). Мы видели, что, попадая на замкнутую кривую Γ (рис. 580), изображающая точка перескакивает на кривую Γ' , после чего траектории «медленных» движений заключены в области между этими двумя кривыми. Считая точку a тождественной A , точку b тождественной B и т. д., т. е. «спрессовывая» в точки отрезки траекторий скачков, мы сможем отобразить эту область (взаимно однозначно и непрерывно) на поверхность шара. Разрывные автоколебания при этом отобразятся предельным циклом (например, экватором). Кроме того, на сфере мы получим две особые точки (два неустойчивых узла), расположенные по разные стороны цикла (например, на полюсах) и соответствующие точкам касания кривых Γ и Γ' . После такого отображения сразу видно, что в мультивибраторе не может быть квазипериодических колебаний (такие колебания могли бы существовать только тогда, когда фазовая поверхность — тор). Не может быть также и периодических движений изображающей точки по замкнутой траектории, дважды охватывающей шар. А priori эти результаты не очевидны.

Эта симметрия в колебаниях является, конечно, следствием симметричности схемы и характеристики ламп мультивибратора. Можно было бы с самого начала предполагать, что установившиеся автоколебания будут симметричными; тогда в уравнениях (10.70) мы могли бы положить $x_2 \equiv -x_1$, $y_2 \equiv -y_1$ и $\varphi(x_2) \equiv -\varphi(x_1)$ и получить систему уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \mu \dot{x} &= -x - y + k\varphi(x), \\ \dot{y} &= x. \end{aligned}$$

Систему подобного типа мы уже рассматривали (см. § 5 этой главы) при изучении разрывных колебаний мультивибратора с одним RC -звеном (таким образом, результаты, полученные в § 5, и в частности

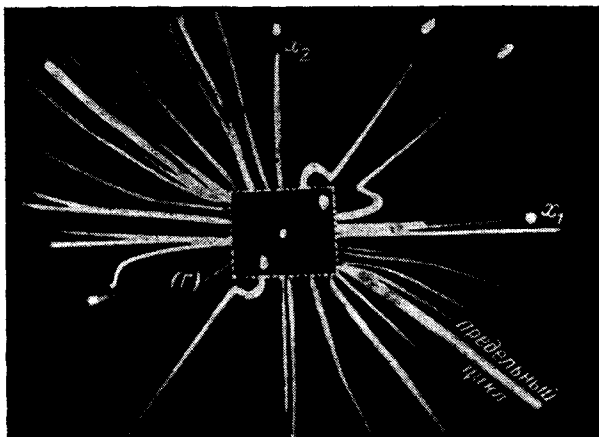


Рис. 581.

выражения для периода автоколебаний, справедливы и для установившихся колебаний симметричного мультивибратора). Однако при таком подходе мы были бы лишены возможности рассматривать процессы установления этих колебаний в схеме.

На рис. 581 приведена фотография разбиения на траектории плоскости сеточных напряжений u_1 , u_2 (плоскости x_1 , x_2), полученная с помощью катодного осциллографа ¹⁾. Эта фотография полностью подтверждает сделанные выше заключения о разрывном характере колебаний мультивибратора и об установлении в нем периодических

¹⁾ В развитой здесь теории мы пренебрегали сеточными токами. В связи с этим в сеточные цепи мультивибратора, использовавшегося для получения фотографии траекторий, были введены ограничительные сопротивления r , существенно уменьшившие сеточные токи (на рис. 578 эти сопротивления изображены пунктиром).

разрывных колебаний (автоколебаний). Ясно видно, что скачки напряжений u_1 и u_2 начинаются не только из точек кривой Г, но и из точек области, лежащей внутри нее. Изображающие точки, заброшенные в начальный момент в область внутри Г, уходят из нее скачком.

§ 13. Симметричный мультивибратор (с сеточными токами)

В заключение главы мы рассмотрим более подробно разрывные автоколебания симметричного мультивибратора (его схема приведена на рис. 582), по-прежнему пренебрегая анодной реакцией¹⁾ но

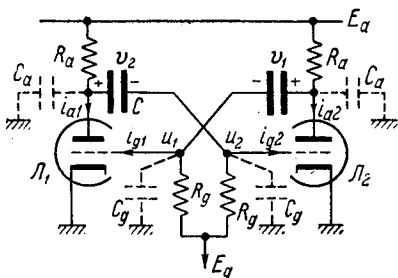


Рис. 582.

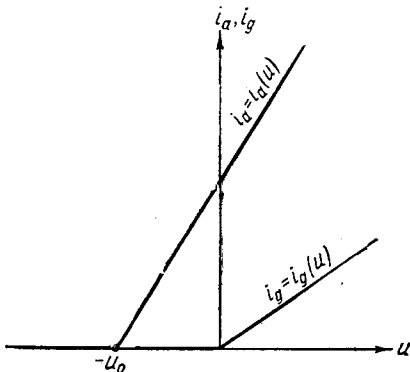


Рис. 583.

учитывая сеточные токи ламп, которые обычно играют существенную роль в работе мультивибратора [62]. Для получения количественных результатов будем аппроксимировать характеристики ламп следующими кусочно-линейными функциями (без насыщения):

$$i_a = i_a(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq -u_0; \\ S(u + u_0) & \text{при } u > -u_0; \end{cases}$$

$$i_g = i_g(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq 0, \\ S_g u & \text{при } u > 0; \end{cases}$$

здесь u — сеточное напряжение, $-u_0$ — напряжение запираения ламп, S и S_g — величины крутизны восходящих участков характеристик анодного и сеточного токов ламп.

Эти функции (их графики приведены на рис. 583) удовлетворительно отображают свойства современных ламп, практически не имеющих насыщения ни по анодному, ни по сеточному токам.

¹⁾ Анодной реакцией в лампах можно пренебречь, если лампы, примененные в мультивибраторе, суть пентоды или триоды с достаточно большим внутренним сопротивлением R_i и если напряжения на анодах ламп во время колебаний остаются достаточно большими. Последнее заведомо выполняется при небольших сопротивлениях R_a и достаточно большом напряжении анодного питания E_a .

1. Уравнения колебаний. Скачки напряжений u_1 и u_2 . Пренебрегая паразитными параметрами, мы получим (на основании законов Кирхгофа и в обозначениях рис. 582) следующие уравнения «медленных», нескачкообразных изменений состояния мультивибратора¹⁾:

$$\begin{aligned} C \frac{dv_1}{dt'} &= \frac{u_1 - E_g}{R_g} + i_g(u_1), \\ \frac{E_a - (u_1 + v_1)}{R_a} &= i_a(u_2) + C \frac{dv_1}{dt'}, \\ C \frac{dv_2}{dt'} &= \frac{u_2 - E_g}{R_g} + i_g(u_2), \\ \frac{E_a - (u_2 + v_2)}{R_a} &= i_a(u_1) + C \frac{dv_2}{dt'}. \end{aligned}$$

Введем, как и в предыдущем параграфе, новые, безразмерные переменные x_1, x_2, y_1, y_2 , связанные с напряжениями u_1, u_2, v_1, v_2 соотношениями:

$$u_{1,2} = u_0 x_{1,2}, \quad v_{1,2} = E_a + \frac{R_a}{R_g} E_g + u_0 \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) y_{1,2},$$

и новое, безразмерное время

$$t = \frac{t'}{C(R_a + R_g)}.$$

В этих переменных уравнения «медленных» изменений состояния мультивибратора запишутся в следующей безразмерной форме:

$$\left. \begin{aligned} -y_1 &= x_1 + \alpha \cdot \psi(x_1) + k\varphi(x_2), \\ -y_2 &= x_2 + \alpha \cdot \psi(x_2) + k\varphi(x_1), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + \beta \cdot \psi(x_1) - \sigma, \\ \dot{y}_2 &= x_2 + \beta \cdot \psi(x_2) - \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (10.75)$$

где

$$\begin{aligned} k &= \frac{SR_a R_g}{R_a + R_g}, \\ \alpha &= \frac{S_g R_a R_g}{R_a + R_g}, \\ \beta &= S_g R_g, \end{aligned}$$

приведенное (безразмерное) сеточное смещение

$$\sigma = \frac{E_g}{u_0}$$

¹⁾ Во время «медленных» изменений состояния мультивибратора малые паразитные параметры не играют существенной роли и ими можно пренебречь. Далее, мы обозначаем время через t' , так как ниже через t будет обозначено безразмерное время.

и

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S} i_a(u_0 x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ x + 1 & \text{при } x \geq -1, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{u_0 S_g} i_g(u_0 x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

— приведенные (безразмерные) характеристики анодного и сеточного токов ламп. Первые два уравнения устанавливают функциональную связь между x_1 , x_2 и y_1 , y_2 (т. е. между сеточными напряжениями u_1 , u_2 и напряжениями v_1 , v_2 на конденсаторах C), которая, подчеркнем еще раз, имеет место только во время «медленных» изменений состояния мультивибратора; два последних являются дифференциальными и дают закон изменения состояния мультивибратора во времени.

Исключая из уравнений (10.75) переменные y_1 , y_2 , получим следующую систему дифференциальных уравнений для переменных x_1 , x_2 :

$$\left. \begin{aligned} [1 + \alpha\psi'(x_1)] \dot{x}_1 + k\varphi'(x_2) \dot{x}_2 + x_1 + \beta\psi(x_1) &= \sigma, \\ k\varphi'(x_1) \dot{x}_1 + [1 + \alpha\psi'(x_2)] \dot{x}_2 + x_2 + \beta\psi(x_2) &= \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (10.75a)$$

или, разрешая относительно производных,

$$\dot{x}_1 = \frac{P_1(x_1, x_2)}{\Delta(x_1, x_2)}, \quad \dot{x}_2 = \frac{P_2(x_1, x_2)}{\Delta(x_1, x_2)}, \quad (10.75b)$$

где

$$P_1(x_1, x_2) = k\varphi'(x_2) [x_2 + \beta\psi(x_2) - \sigma] - [1 + \alpha\psi'(x_2)] [x_1 + \beta\psi(x_1) - \sigma],$$

$$P_2(x_1, x_2) = k\varphi'(x_1) [x_1 + \beta\psi(x_1) - \sigma] - [1 + \alpha\psi'(x_1)] [x_2 + \beta\psi(x_2) - \sigma],$$

$$\Delta(x_1, x_2) = [1 + \alpha\psi'(x_1)] [1 + \alpha\psi'(x_2)] - k^2\varphi'(x_1) \varphi'(x_2).$$

Поскольку полученная система дифференциальных уравнений является системой второго порядка, мы можем отображать состояния мультивибратора (во время их «медленных» изменений) точками на плоскости x_1 , x_2 , а «медленные» процессы в мультивибраторе — движением изображающей точки по фазовым траекториям (по траекториям уравнений (10.75б)) на этой плоскости. Однако, как и в задаче о мультивибраторе без сеточных токов (см. предыдущий параграф), «медленные» изменения состояния мультивибратора с сеточными токами, отображаемые уравнениями (10.75), возможны не при всех значениях переменных x_1 , x_2 . Именно, областью «медленных» движений системы (областью применимости уравнений (10.75)) является только та часть плоскости x_1 , x_2 — область M , в которой

$$\Delta(x_1, x_2) = [1 + \alpha\psi'(x_1)] [1 + \alpha\psi'(x_2)] - k^2\varphi'(x_1) \cdot \varphi'(x_2) > 0;$$

вне этой области M возможны только «быстрые», скачкообразные изменения состояния мультивибратора — «мгновенные скачки» сеточных напряжений u_1, u_2 (или переменных x_1, x_2)¹⁾.

Границей области «медленных» движений M является линия Γ , на которой функция $\Delta(x_1, x_2)$ — знаменатель правых частей уравнений (10.75б) — изменяет знак; поэтому точки части линии Γ являются точками стыка фазовых траекторий уравнений (10.75б). Если изображающая точка, двигаясь по траектории «медленного» движения (по траектории уравнений (10.75б) в области M), выходит на линию Γ в некоторой точке (x_1^-, x_2^-) , то дальше она «быстрым» движением (мгновенным скачком) «перепрыгивает» в точку (x_1^+, x_2^+) , принадлежащую также области M . Так как напряжения v_1 и v_2 на конденсаторах, а следовательно и значения переменных y_1 и y_2 , во время мгновенного скачка измениться не могут (иначе в мультивибраторе были бы бесконечно большие токи) и так как и начальная и конечная точки скачка принадлежат области M , то согласно первым двум уравнениям (10.75), справедливым в этой области, координаты начальной и конечной точек скачка (x_1^-, x_2^-) и (x_1^+, x_2^+) связаны между собой следующими уравнениями (условиями скачка):

$$\left. \begin{aligned} x_1^+ + \alpha\psi(x_1^+) + k\varphi(x_2^+) &= x_1^- + \alpha\psi(x_1^-) + k\varphi(x_2^-), \\ x_2^+ + \alpha\psi(x_2^+) + k\varphi(x_1^+) &= x_2^- + \alpha\psi(x_2^-) + k\varphi(x_1^-). \end{aligned} \right\} \quad (10.76)$$

Для обоснования сказанного относительно области применимости уравнений (10.75) и скачков состояния мультивибратора (без привлечения дополнительных физических соображений) необходимо учесть хотя бы некоторые из малых паразитных параметров схемы, существенных во время «быстрых» движений системы. Такими паразитными параметрами являются малые паразитные емкости C_a и C_g , изображенные на рис. 582 пунктиром. Учитывая эти емкости, получим (при $C_a, C_g \ll C$) уравнения колебаний мультивибратора в следующем

¹⁾ Некоторым обоснованием введенного постулата скачка могут служить следующие соображения. Если $x_1 > -1$ и $x_2 > -1$ (т. е. обе лампы мультивибратора открыты) и если коэффициент усиления k настолько велик, что $\Delta(x_1, x_2) < 0$, то, как можно подсчитать, общий коэффициент передачи на высоких частотах в цепочке элементов, составляющих мультивибратор (сетка лампы L_1 — RC -цепь между анодом лампы L_1 и сеткой лампы L_2 — лампа L_2 — вторая RC -цепь — сетка лампы L_1), будет больше единицы. Вследствие наличия в схеме такой положительной обратной связи любое «быстрое», скачкообразное отклонение сеточного напряжения (например, u_1) приведет к «лавинообразному», нарастающему изменению сеточных напряжений, которое будет продолжаться все время, пока открыты обе лампы. Поэтому при $\Delta(x_1, x_2) < 0$ в схеме возможны только «быстрые» скачкообразные изменения состояния мультивибратора.

Наоборот, при $x_1 < -1$ или при $x_2 < -1$, когда по крайней мере одна из ламп заперта, а $\Delta(x_1, x_2) > 0$, цепь положительной обратной связи разорвана, скачкообразные изменения сеточных напряжений будут затухающими, что делает «медленные» движения устойчивыми по отношению к скачкам сеточных напряжений и, следовательно, возможными.

виде:

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{x}_1 &= -y_1 - x_1 - \alpha \psi(x_1) - k\varphi(x_2) \equiv F_1(x_1, x_2, y_1), \\ \mu \dot{x}_2 &= -y_2 - x_2 - \alpha \psi(x_2) - k\varphi(x_1) \equiv F_2(x_1, x_2, y_2), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + \beta \psi(x_1) - \sigma \equiv G(x_1), \\ \dot{y}_2 &= x_2 + \beta \psi(x_2) - \sigma \equiv G(x_2), \end{aligned} \right\} \quad (10.77)$$

где $\mu = \frac{R_a}{R_g} \frac{C_a + C_g}{(1 + R_a/R_g)^2 C}$ — малый положительный параметр, характеризующий малость паразитных емкостей C_a и C_g (по сравнению с емкостями C). Соответственно фазовым пространством будет четырехмерное пространство x_1, x_2, y_1, y_2 .

Так как

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -2 - \alpha [\psi'(x_1) + \psi'(x_2)] < 0$$

и

$$\frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (x_1, x_2)} = [1 + \alpha \psi'(x_1)] [1 + \alpha \psi'(x_2)] - k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) \equiv \Delta(x_1, x_2),$$

то согласно § 3 настоящей главы «медленные» движения системы (т. е. движения с ограниченными \dot{x}_1 и \dot{x}_2 при $\frac{C_a}{C}, \frac{C_g}{C} \rightarrow +0$) будут происходить только в малой $O(\mu)$ -окрестности поверхности F^+ , определяемой уравнениями:

$$F_1(x_1, x_2, y_1) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_2) = 0, \quad \Delta(x_1, x_2) > 0,$$

а в пределе, при $\mu \rightarrow +0$, на самой поверхности F^+ , вследствие чего приближенные уравнения «медленных» движений совпадают с уравнениями (10.75), полученными при пренебрежении всеми паразитными параметрами схемы. Заметим, что поверхность F^+ проектируется на гомеоморфную ей область M координатной плоскости x_1, x_2 .

Вне поверхности F^+ имеют место «быстрые» движения изображающей точки по траекториям $y_1, y_2 = \text{const}$ (при $\mu \rightarrow +0$ $\dot{x}_1, \dot{x}_2 \rightarrow \infty$, а \dot{y}_1 и \dot{y}_2 остаются ограниченными), т. е. там происходят скачки сеточных напряжений u_1 и u_2 при постоянных напряжениях v_1 и v_2 на конденсаторах C . Приближенные (для $0 < \mu \ll 1$) дифференциальные уравнения «быстрых» движений системы по траекториям, лежащим вблизи плоскости $y_1 \equiv y_1^0, y_2 \equiv y_2^0$ ($y_1^0, y_2^0 = \text{const}$), получаются из первых двух уравнений (10.77) заменой в них y_1, y_2 на постоянные y_1^0, y_2^0 :

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{x}_1 &= -y_1^0 - x_1 - \alpha \psi(x_1) - k\varphi(x_2) \equiv F_1(x_1, x_2, y_1^0), \\ \mu \dot{x}_2 &= -y_2^0 - x_2 - \alpha \psi(x_2) - k\varphi(x_1) \equiv F_2(x_1, x_2, y_2^0); \end{aligned} \right\} \quad (10.77a)$$

конечно, эти уравнения отображают динамику «быстрых» изменений состояния мультивибратора только вне малой (например, вне $O(\sqrt{\mu})$) окрестности поверхности F^+ :

$$F_1(x_1, x_2, y_1) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_2) = 0,$$

частью которой является поверхность F^+ .

Отметим следующее: 1) так как $\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} < 0$ при всех значениях x_1, x_2 ,

y_1^0, y_2^0 , то уравнения (10.77a) в силу критерия Бендиксона не имеют замкнутых фазовых траекторий; 2) точки пересечения плоскости $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0$ с поверхностью F^+ являются устойчивыми состояниями равновесия для приближенных уравнений (10.77a) и 3) нет траекторий «быстрых» движений, уходящих в бес-

конечность. Поэтому все траектории «быстрых» движений идут (при $C_a, C_g \rightarrow 0$) в малую $O(\mu)$ -окрестность поверхности F^+ , где переходят в траектории «медленных» движений. В свою очередь траектории «медленных» движений на поверхности F^+ , выходящие на ее границу — на линию γ , на которой $\Delta(x_1, x_2)$ изменяет знак с положительного на отрицательный и которая проектируется на плоскость x_1, x_2 в виде линии Γ , переходят в траектории «быстрых» движений (скачков). Концевые точки таких траекторий скачков изображающей точки (с границы γ области «медленных» движений) лежат снова на поверхности F^+ и удовлетворяют поэтому условиям скачка (10.76). Заметим, что концевая точка скачка определяется условиями скачка (10.76) по заданной начальной точке скачка однозначно, в силу чего использование дифференциальных уравнений скачка (10.77а) для определения концевой точки скачка, как и в задаче о колебаниях мультивибратора без сеточных токов, не является обязательным.

Таким образом, в мультивибраторе возможны разрывные колебания, которые состоят из чередующихся «медленных» (с ограниченными скоростями изменения сеточных напряжений u_1 и u_2) и «быстрых», скачкообразных (с очень большими \dot{u}_1 и \dot{u}_2 при малых паразитных параметрах) движений системы. Первые из них описываются уравнениями (10.75), вторые — условиями скачка (10.76) или, более полно, уравнениями (10.77а) и тем точнее, чем меньше паразитные параметры схемы.

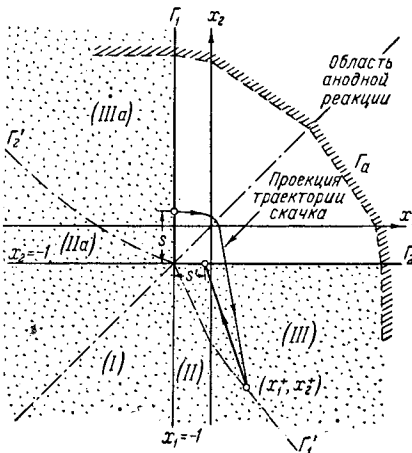


Рис. 584.

2. Разрывные колебания. Ниже мы рассмотрим разрывные колебания симметричного мультивибратора с сеточными токами в наиболее интересном для практических приложений случае:

$$k > 1 + \alpha, \quad \beta \gg 1 + \alpha, \quad \sigma. \quad (10.78)$$

Первое из условий (10.78) обеспечивает самовозбуждение мультивибратора при $\sigma > -1$ (т. е. при $E_g > -u_0$), второе — значительно упрощает рассмотрение фазовых траекторий «медленных» движений в области с сеточным током в одной из ламп¹⁾. В силу первого из

¹⁾ Условия (10.78) эквивалентны неравенствам: $SR_a > 1 + S_p R_a$, $R_a \ll R_g$ и $S_g R_g \gg 1$, $\frac{E_g}{u_0}$, которые обычно выполняются, так как в применяемых схемах $R_a \sim 10^3 \div 10^4$ ом, $R_g \sim 10^4 \div 10^6$ ом, $S \sim 3 \div 10$ ма/в, $S_g \sim 0,1 \div 1$ ма/в, $E_g \sim 0 \div 300$ в, а $u_0 \sim 5 \div 20$ в, т. е. $k \sim 5 \div 20$, $\alpha \sim 0,1 \frac{1}{2}$, $\beta \sim 10 \div 10^3$ и $\sigma \sim 0 \div 60$.

Заметим, что при $k < 1$ неравенство $\Delta(x_1, x_2) > 0$ выполняется на всей плоскости x_1, x_2 , т. е. вся плоскость x_1, x_2 является областью «медленных» движений. Нетрудно видеть, что в этом случае все траектории идут к устойчи-

условий (10.78) $\Delta(x_1, x_2) > 0$ только при $\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) = 0$, т. е. при $x_1 < -1$ или при $x_2 < -1$; иначе говоря, границей Γ области «медленных» движений M (на плоскости x_1, x_2) будут являться полупрямые $\Gamma_1: x_1 = -1, x_2 > -1$ и $\Gamma_2: x_2 = -1, x_1 > -1$, а областью «медленных» движений M будет область, которая лежит слева и ниже этих полупрямых и в которой по крайней мере одна из ламп мультивибратора заперта. Наоборот, в области изменения переменных x_1, x_2 , лежащей справа и выше полупрямых Γ_1 и Γ_2 , обе лампы открыты, $\Delta(x_1, x_2) < 0$ и там возможны только «быстрые», скачкообразные изменения состояния мультивибратора (рис. 584).

При достаточно больших u_1 или u_2 в лампе L_1 или L_2 наступает анодная реакция: анодный ток i_a становится зависящим от анодного напряжения u_a и почти не зависящим от сеточного напряжения (см., например, § 10 этой главы). Граница области анодной реакции в предположении, что в области анодной реакции $i_a = \frac{u_a}{R_0}$, качественно изображена на рис. 584 штрихованной линией Γ_a . Область значений x_1, x_2 , лежащая справа и выше этой линии, является областью анодной реакции и принадлежит, как нетрудно видеть, также к области «медленных» движений. Мы полагаем, что при колебаниях мультивибратора его изображающая точка (x_1, x_2) в область анодной реакции не попадает.

Единственное состояние равновесия лежит на биссектрисе $x_1 = x_2$ и определяется уравнением

$$x + \beta\psi(x) = \sigma,$$

т. е. координаты состояния равновесия

$$x_1 = x_2 = x_0(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{при } \sigma \leq 0, \\ \frac{\sigma}{1+\beta} \approx 0 & \text{при } \sigma > 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение, определяющее характер состояния равновесия, записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} \mu\lambda + \alpha^* & k^* & 1 & 0 \\ k^* & \mu\lambda + \alpha^* & 0 & 1 \\ -\beta^* & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\beta^* & 0 & \lambda \end{vmatrix} \equiv [\lambda(\mu\lambda + \alpha^*) + \beta^*]^2 - k^{*2}\lambda^2 = 0,$$

где $\alpha^* = 1 + \alpha\psi'(x_0)$, $\beta^* = 1 + \beta\psi'(x_0)$ и $k^* = k\varphi'(x_0)$, и имеет при $0 < \mu \ll 1$ своими корнями:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta^*}{\alpha^* \pm k^*} \quad \text{и} \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1/\mu}{\alpha^* \pm k^*}$$

вому состоянию равновесия и в мультивибраторе не возможны никакие автоколебания.

Случай $1 < k < 1 + \alpha$, в котором возможны разрывные автоколебания, не является интересным с точки зрения практических приложений.

(два из них являются величинами порядка единицы, два других — порядка $1/\mu$). При $\sigma < -1$ (т. е. при $E_g < -u_0$), когда $x_0 = \sigma < -1$ и $k^* = 0$, все четыре корня отрицательны, и состояние равновесия, находящееся в этом случае в области «медленных» движений, устойчиво (для траекторий «медленных» движений на плоскости x_1, x_2 оно будет устойчивым узлом). Если же $\sigma > -1$ ($E_g > -u_0$), то состояние равновесия попадает в область «быстрых» движений ($x_0 > -1$) и неустойчиво, поскольку при $x_0 > -1$ $k^* = k > 1 + \alpha$ (в силу первого из условий (10.78)) и характеристическое уравнение будет иметь два положительных корня; один из них имеет порядок величины $\frac{1}{\mu}$, т. е. изображающая точка будет уходить от состояния равновесия со скоростью порядка $\frac{1}{\mu}$ (скачком при $\mu \rightarrow +0$). В этом случае (при $\sigma > -1$) мультивибратор будет самовозбуждаться, и в нем, как увидим ниже, будут устанавливаться периодические разрывные колебания (одни и те же при любых начальных условиях), т. е. будет иметь место мягкий режим установления разрывных колебаний. Существование устойчивых разрывных автоколебаний возможно и при $\sigma < -1$, когда состояние равновесия устойчиво, т. е. при $\sigma < -1$ возможен как жесткий режим установления автоколебаний, так и случай отсутствия автоколебаний вообще.

Область «медленных» движений M (на плоскости x_1, x_2) в силу принятой кусочно-линейной аппроксимации характеристик ламп разбивается прямыми $x_1 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $x_2 = 0$ на пять областей: (I), (II), (IIa), (III) и (IIIa) (рис. 584), в каждой из которых уравнения «медленных» движений являются линейными. Эти уравнения в области (I): $x_1 < -1$, $x_2 < -1$, где обе лампы мультивибратора заперты, очевидно, записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 + x_1 &= \sigma, \\ \dot{x}_2 + x_2 &= \sigma; \end{aligned} \right\} \quad (10.79a)$$

в области (II): $-1 < x_1 < 0$, $x_2 < -1$, где лампа L_2 заперта, а лампа L_1 отперта (но в ней нет сеточных токов), в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 + x_1 &= \sigma, \\ \dot{x}_2 + x_2 &= \sigma - k\dot{x}_1, \end{aligned} \right\} \quad (10.79б)$$

и, наконец, в области (III): $x_1 > 0$, $x_2 < -1$, где лампа L_2 по-прежнему заперта, а в лампе L_1 имеются и анодный и сеточный токи, — в виде:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \alpha)\dot{x}_1 + (1 + \beta)x_1 &= \sigma, \\ \dot{x}_2 + x_2 &= \sigma - k\dot{x}_1. \end{aligned} \right\} \quad (10.79в)$$

Так как переменные x_1 и x_2 входят в уравнения колебаний мультивибратора симметрично (это, очевидно, является следствием симметрии его схемы), то разбиение области «медленных» движений M на

траектории уравнений (10.75) будет *симметричным* относительно биссектрисы $x_1 = x_2$, которая всегда является интегральной кривой этих уравнений; в частности, уравнения «медленных» изменений состояния мультивибратора в областях (IIa) и (IIIa), где заперта лампа L_1 и отперта лампа L_2 , получаются из уравнений (10.79б) и (10.79в) заменой переменных x_1, x_2 на x_2, x_1 .

В области (I) интегральными кривыми являются прямые $\frac{x_2 - \sigma}{x_1 - \sigma} = \text{const}$, которые (или продолжения которых при $\sigma > -1$) проходят через точку (σ, σ) . Эта область содержит состояние равновесия (σ, σ) при $\sigma < -1$.

В области (II) изоклиной горизонтальных касательных является прямая $x_2 - \sigma - k(x_1 - \sigma) = 0$, продолжение которой проходит также через точку (σ, σ) и которая пересекает полупрямую Γ_2 (на отрезке $-1 \leq x_1 \leq 0$) только при $\sigma \leq \frac{1}{k-1}$; слева от этой изоклины $\dot{x}_2 < 0$ (т. е. траектории удаляются от полупрямой Γ_2), справа от нее $\dot{x}_2 > 0$ (траектории приближаются к Γ_2); в частности, при $\sigma \geq \frac{1}{k-1}$ все траектории в области (II) не выходят на полупрямую Γ_2 , а переходят в область (III). Далее, в области (II) при $-1 < \sigma < 0$ имеется прямолинейная фазовая траектория $x_1 \equiv \sigma$ (на ней $\dot{x}_2 > 0$).

В области (III)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -k + \frac{1+\alpha}{1+\beta} \frac{x_2 - \sigma}{x_1 - \frac{1}{1+\beta}}$$

и приближенно равно $-k$ вне малой окрестности оси ординат ($x_1 = 0$) в силу неравенств (10.78). Поэтому все траектории в области (III) вне этой окрестности близки к прямым:

$$x_2 + kx_1 = \text{const},$$

причем скорости изменения переменных x_1 и x_2 при движении изображающей точки по этим траекториям имеют порядок величины $\frac{1+\beta}{1+\alpha} \gg 1$, т. е. здесь мы имеем дело с сравнительно быстрыми движениями изображающей точки; эти движения мы будем условно называть «полубыстрыми»¹⁾. Кроме того, при $\sigma \geq 0$ в области (III) имеется

¹⁾ Для того чтобы «полубыстрые» движения изображающей точки в области (III) принадлежали к классу «медленных» движений, надо, очевидно, полагать, что

$$\frac{1+\beta}{1+\alpha} \ll \frac{1}{\mu}.$$

«Полубыстрые» движения изображающей точки соответствуют процессам сравнительно быстрого (за время порядка $\frac{C}{S_g} \ll CR_g$) заряда конденсатора C , находящегося в цепи сетки лампы L_1 , в которой текут сеточные токи, значительно превышающие токи через сопротивление R_g .

прямолинейная фазовая траектория «медленного» движения

$$x_1 \equiv \frac{\sigma}{1+\beta} = x_0 \approx 0$$

(на ней $\dot{x}_2 > 0$ и является величиной порядка единицы).

Разбиение области «медленных» движений M на траектории в трех возможных, качественно различных случаях: $\sigma < -1$, $-1 < \sigma < 0$ и $\sigma \geq 0$, приведено на рис. 585. Как видно из этого разбиения,

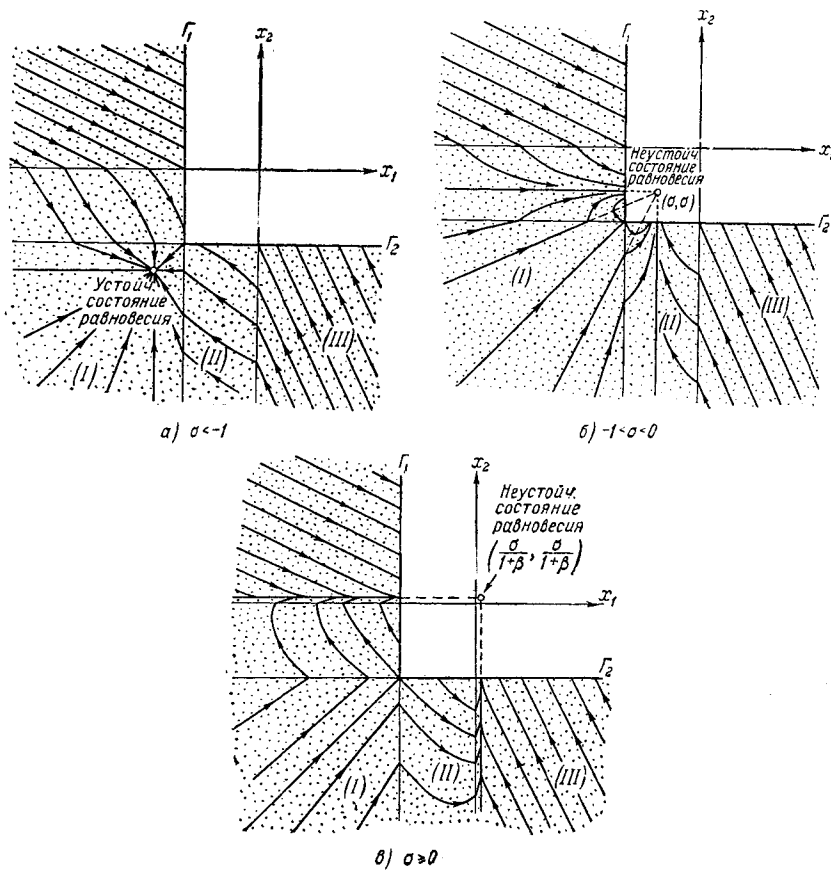


Рис. 585.

при $\sigma > -1$ все траектории «медленных» движений выходят (при возрастании t) на границу Γ области «медленных» движений — на полупрямые Γ_1 и Γ_2 , а при $\sigma < -1$, когда в области (I) имеется устойчивое состояние равновесия (σ, σ) , часть траекторий «медленных» движений идет к этому состоянию равновесия, а остальные траектории выходят на полупрямые Γ_1 и Γ_2 . Поэтому в области

«медленных» движений нет замкнутых фазовых траекторий и автоколебания в мультивибраторе, если они существуют, обязательно являются *разрывными*, т. е. состоят из чередующихся «медленных» и «быстрых», скачкообразных изменений состояния мультивибратора¹⁾.

Соответствующие им траектории (построенные на плоскости x_1, x_2) будут пересекать полупрямые Γ_1 и Γ_2 . Поэтому рассмотрение колебаний мультивибратора сводится к построению точечных преобразований полупрямых Γ_1 и Γ_2 самих в себя или друг в друга, осуществляемых траекториями системы, и к исследованию этих преобразований.

Введем на полупрямых Γ_1 и Γ_2 координату s — расстояние точек этих полупрямых до точки $(-1, -1)$: $s = 1 + x_2$ на полупрямой Γ_1 и $s = 1 + x_1$ на полупрямой Γ_2 , причем $s > 0$, и рассмотрим движение изображающей точки, начинающееся для определенности в точке с координатой s полупрямой Γ_1 , т. е. в точке $(-1, s - 1)$. Из этой начальной точки изображающая точка «перепрыгнет» (по соответствующей траектории «быстрого» движения) в точку (x_1^+, x_2^+) , координаты которой однозначно определяются условиями скачка (10.76). Нетрудно видеть, что точки областей (I), (IIa) и (IIIa) не могут являться концевыми точками скачка изображающей точки с полупрямой Γ_1 . В самом деле, предположив, что $x_1^+ \leq -1$, мы получим из (10.76), что $x_1^+ = -1$ и $x_2^+ = s - 1$, т. е. получим концевую точку скачка совпадающей с начальной, что невозможно, так как концевая точка скачка может лежать только внутри области «медленных» движений, а не на ее границе. Поэтому концевая точка скачка может лежать только в областях (II) и (III) (т. е. $x_1^+ > -1$, $x_2^+ < -1$) и ее координаты определяются по заданному значению следующими уравнениями, получаемыми из (10.76):

$$x_1^+ + \alpha\psi(x_1^+) = ks - 1, \quad x_2^+ + kx_1^+ = s - 1 + \alpha\psi(s - 1) - k; \quad (10.80)$$

в частности, при $s < \frac{1}{k}$ точка (x_1^+, x_2^+) лежит в области (II):

$$x_1^+ = ks - 1 < 0, \quad x_2^+ = -(k^2 - 1)s - 1, \quad (10.80a)$$

а при $s > \frac{1}{k}$ точка (x_1^+, x_2^+) лежит в области (III)²⁾.

¹⁾ Отсутствие замкнутых фазовых траекторий, лежащих целиком в области «медленных» движений, можно также доказать, применяя критерий Бендиксона к уравнению интегральных кривых

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{P_2(x_1, x_2)}{P_1(x_1, x_2)}$$

(см. уравнения (10.75б)); замкнутых траекторий нет, так как $\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} < 0$ на всей плоскости x_1, x_2 .

²⁾ Геометрическое место концевых точек (x_1^+, x_2^+) скачков изображающей точки из точек полупрямой Γ_1 изображено на рис. 584 пунктирной линией Γ'_1 , состоящей из трех прямолинейных отрезков. На том же рисунке ломаной линией Γ'_2 , идущей симметрично линии Γ'_1 , изображено геометрическое место концевых точек скачков изображающей точки из точек полупрямой Γ_2 .

Из точки (x_1^+, x_2^+) изображающая точка будет двигаться далее по траектории «медленного» движения, проходящей через эту точку, и или придет в некоторую точку полупрямой Γ_2 (с координатой s') или же будет асимптотически приближаться к состоянию равновесия (σ, σ) , лежащему в области (I) . В первом случае точка s полупрямой Γ_1 имеет последующую точку s' на полупрямой Γ_2 , причем, как нетрудно видеть, функция соответствия

$$s' = \Pi(s)$$

является однозначной и непрерывной; во втором случае (он может иметь место только при $\sigma < -1$) точка s полупрямой Γ_1 не имеет последующей ни на полупрямой Γ_2 , ни на полупрямой Γ_1 .

Точно таким же (в силу симметрии схемы) будет и преобразование точек $(s-1, -1)$ полупрямой Γ_2 в точки $(-1, s'-1)$ полупрямой Γ_2 , т. е. координата s' последующей точки (на полупрямой Γ_1), если она существует, определяется по координате s исходной точки (на полупрямой Γ_2) той же функцией соответствия $s' = \Pi(s)$. Поэтому ниже мы будем иметь дело с одним точечным преобразованием полупрямых Γ_1 и Γ_2 друг в друга, которое будем обозначать через Π . Применяя многократно это преобразование, мы получим последовательность точек пересечения рассматриваемой траектории с полупрямыми Γ_1 и Γ_2 :

$$s, s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots,$$

в которой координата (т. е. $x_2 + 1$ на полупрямой Γ_1 и $x_1 + 1$ на полупрямой Γ_2) каждой последующей точки пересечения определяется по координате предыдущей точки функцией соответствия преобразования Π :

$$\begin{aligned} s_1 &= \Pi(s), \\ s_2 &= \Pi(s_1), \dots, \\ s_{k+1} &= \Pi(s_k), \dots \end{aligned}$$

независимо от того, на какой из полупрямых (на Γ_1 или на Γ_2) лежит предыдущая точка пересечения.

Зная последовательности точек пересечения траекторий с полупрямыми Γ_1 и Γ_2 , мы, очевидно, сможем проследить за колебаниями мультивибратора. Например, если точечное преобразование Π имеет устойчивую неподвижную точку s^* и данная последовательность s, s_1, s_2, \dots сходится к ней, то это, очевидно, означает, что существует устойчивый разрывный предельный цикл, к которому асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближается рассматриваемая траектория, т. е. это означает, что в мультивибраторе устанавливаются периодические разрывные колебания. Если же последовательность точек s, s_1, s_2, \dots — конечная, т. е. если некоторая точка s_N не имеет последующей, то траектория, соответствующая этой последователь-

ности, после N пересечений с полупрямыми Γ_1 и Γ_2 не выходит более на границу области «медленных» движений и идет, следовательно, к устойчивому состоянию равновесия (этот случай возможен только при $\sigma < -1$).

3. Точечное преобразование Π . Перейдем к вычислению и исследованию функции соответствия $s' = \Pi(s)$ точечного преобразования Π , рассматривая, как и раньше (но более детально), ход траекторий системы, начинающихся в точках полупрямой Γ_1 . Обозначим, как и раньше, через s координату начальной (исходной) точки на полупрямой Γ_1 , через x_1^+ , x_2^+ — координаты конечной точки скачка изображающей точки из точки s полупрямой Γ_1 (точка (x_1^+, x_2^+) лежит в области (II) или (III)), через L — положительную полутраекторию «медленного» движения, начинающуюся в точке (x_1^+, x_2^+) , и через s' — координату точки выхода полутраектории L на полупрямую Γ_2 — координату последующей точки преобразования Π , если последняя существует, т. е. если L выходит на Γ_2 .

Сделаем сначала следующие замечания.

1) Так как x_1^+ и x_2^+ являются непрерывными кусочно-линейными функциями s , а правые части дифференциальных уравнений «медленных» движений (10.75 б) — кусочно-линейными функциями x_1 и x_2 , то функция соответствия $s' = \Pi(s)$ будет непрерывной кусочно-дифференцируемой функцией (производная $\frac{ds'}{ds}$ имеет разрыв непрерывности первого рода в точках $s = \frac{1}{k}$ и $s = 1$).

2) Пусть s_1 и s_2 — координаты двух исходных точек преобразования Π , причем $s_2 > s_1$ и точка s_1 имеет последующую s'_1 . Тогда и точка s_2 будет иметь последующую s'_2 , причем $s'_2 > s'_1$; следовательно, функция соответствия $s' = \Pi(s)$ является монотонно возрастающей и

$$\frac{ds'}{ds} > 0$$

(в точках $s = \frac{1}{k}$ и $s = 1$ этому неравенству удовлетворяют левый и правый пределы $\frac{ds'}{ds}$).

Для доказательства этого утверждения заметим следующее. Согласно (10.80) для геометрического места концевых точек скачков (x_1^+, x_2^+) (для кривой Γ'_1 на рис. 584) имеем:

$$\frac{dx_1^+}{ds} = \frac{k}{1 + \alpha\psi'(x_1^+)} > 0,$$

т. е. x_1^+ является монотонно возрастающей функцией s , и

$\frac{dx_2^+}{dx_1^+} = -k + \frac{1}{k} [1 + \alpha\psi'(x_1^+)] [1 + \alpha\psi'(s-1)] \geq -\left(k - \frac{1}{k}\right) > -k$
(знак равенства имеет место только для точек (x_1^+, x_2^+) , лежащих

в области (II), т. е. только для $s < \frac{1}{k}$). Далее, полутраектории L выходят в область, расположенную над геометрическим местом точек (x_1^+, x_2^+) (над линией Γ'_1) в области (III) и при выполнении условия $s > -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$ в области (II); полутраектории L в области (II), соответствующие $s < -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$ (такие полутраектории существуют только при $\sigma < -1$), выходят в область, расположенную под линией Γ'_1 , эту линию Γ'_1 более не пересекают и, следовательно, не выходят на полупрямую Γ_2^1).

¹⁾ В области (III) (вне малой окрестности оси ординат) изображающая точка движется по траекториям, близким к прямым $x_2 + kx_1 = \text{const}$, в сторону уменьшения x_1 ; следовательно, полутраектории L в области (III) выходят в область, лежащую над линией Γ'_1 , поскольку на последней

$$-k < \frac{dx_2^+}{dx_1^+} < 0.$$

Для исследования хода траекторий «медленных» движений в области (II) рассмотрим пересечение этих траекторий с семейством параллельных прямых:

$$x_2 + \left(k - \frac{1}{k}\right) x_1 = a = \text{const}, \quad (\text{A})$$

одной из которых (при $a = -\frac{k^2 + k - 1}{k}$) является линия Γ'_1 (в пределах области (II)). Так как в силу (10.79 б)

$$\frac{d}{dt} \left[x_2 + \left(k - \frac{1}{k}\right) x_1 \right] = \sigma - x_2 - \frac{1}{k} (\sigma - x_1),$$

то траектории «медленных» движений в области (II) пересекают прямые (A) в направлении снизу вверх при $\sigma - x_2 - \frac{1}{k} (\sigma - x_1) > 0$, т. е. под прямой

$$x_2 - \sigma = \frac{1}{k} (x_1 - \sigma), \quad (\text{B})$$

и в направлении сверху вниз — над этой прямой. При $\sigma \geq -1$ прямая (B) лежит над областью (II), поэтому все траектории в области (II) (в частности, все полутраектории L) пересекают прямые (A) в направлении снизу вверх, приближаясь к полупрямой Γ_2^1 . Так как в точках линии Γ'_1

$$\sigma - x_2 - \frac{1}{k} (\sigma - x_1) = \sigma - x_2^+ - \frac{1}{k} (\sigma - x_1^+) = k^2 s + \frac{(1+\sigma)(k-1)}{k}$$

согласно (10.80 а), то при $\sigma < -1$ в область, расположенную над линией Γ'_1 , выходят только те полутраектории L (в области (II)), которые соответствуют $s > -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$; так как для точек (x_1^+, x_2^+) в области (II) $0 < s < \frac{1}{k}$,

то такие полутраектории существуют только при $-\frac{k^2 + k - 1}{k - 1} < \sigma < -1$.

Наоборот, полутраектории L , соответствующие $s < -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$, выхо-

Обозначим через $(x_1^+)_1$, $(x_2^+)_1$ и $(x_1^+)_2$, $(x_2^+)_2$ координаты концевых точек скачков изображающей точки из рассматриваемых нами точек s_1 и s_2 полупрямой Γ_1 и через L_1 и L_2 — положительные полутраектории «медленных» движений, начинающиеся соответственно в точках $((x_1^+)_1, (x_2^+)_1)$ и $((x_1^+)_2, (x_2^+)_2)$; полутраектория L_1 приходит на полупрямую Γ_2 и, следовательно, выходит из точки $((x_1^+)_1, (x_2^+)_1)$ в область, расположенную над линией Γ'_1 . Так как $s_2 > s_1$, то в силу сказанного выше $(x_1^+)_2 > (x_1^+)_1$ и полутраектория L_2 также будет выходить в область, лежащую над линией Γ'_1 , и будет идти справа от полутраектории L_1 , поскольку полутраектории L_1 и L_2 пересекаться не могут. Поэтому и полутраектория L_2 выйдет на полупрямую Γ_2 , причем координата ее точки выхода $s'_2 > s'_1$. Таким образом, утверждение 2) доказано.

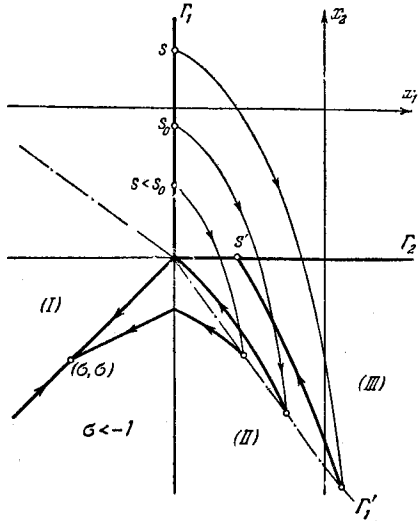


Рис. 586.

Отметим также следующее: при $\sigma \geq -1$ все траектории «медленных» движений в областях (II) и (III) выходят на полупрямую Γ_2 , поэтому все точки $s > 0$ имеют последующие s' , причем в силу доказанного утверждения 2) $s' > s'_0 = \Pi(0)$; если же $\sigma < -1$, то последующие s' имеют только те точки s , для которых $s > s_0$, где s_0 — координата той точки полупрямой Γ_1 , которая преобразуется в точку $s' = 0$ полупрямой Γ_2 (точкам $s < s_0$ соответствуют полутраектории L , не выходящие на полупрямую Γ_2 и асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ приближающиеся к устойчивому состоянию равновесия (σ, σ) ; см. рис. 586).

дят в область, расположенную под линией Γ'_1 , линию Γ'_1 более не пересекают и, следовательно, не выходят на полупрямую Γ_2 . Для доказательства последнего утверждения допустим, что при $\sigma < -1$ некоторая полутраектория L , начинающаяся в точке $(\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^+)$ и соответствующая значению

$$\bar{s} < -\frac{(1 + \sigma)(k - 1)}{k^2},$$

пересекает линию Γ'_1 по крайней мере еще один

раз. Тогда в этой точке пересечения $(\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^+)$ (или в первой из точек пересечения, если их несколько) полутраектория L пересекала бы линию Γ'_1 в направлении снизу вверх, что невозможно, так как при $\sigma < -1$ $x_1 < 0$ в области (II) и $\bar{x}_1^+ < \bar{x}_1^+$, т. е. точка $(\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^+)$ соответствовала бы значению

$$\bar{s} < \bar{s} < -\frac{(1 + \sigma)(k - 1)}{k^2}$$

(напомним, что x_1^+ является монотонно возрастающей функцией s).

3) Функция соответствия, конечно, зависит от параметров системы и, в частности, от приведенного (безразмерного) сечочного смещения σ . Так как в области (II)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -k + \frac{\sigma - x_2}{\sigma - x_1}$$

и в области (III)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -k + \frac{(1 + \alpha)(\sigma - x_2)}{\sigma - (1 + \beta)x_1},$$

то, дифференцируя эти соотношения по σ , получим:
в области (II)

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{dx_2}{dx_1} \right] = -\frac{x_1 - x_2}{(\sigma - x_1)^2} < 0,$$

в области (III)

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{dx_2}{dx_1} \right] = -(1 + \alpha) \frac{(1 + \beta)x_1 - x_2}{[\sigma - (1 + \beta)x_1]^2} < 0,$$

т. е. в обеих областях при увеличении σ происходит поворот по часовой стрелке векторного поля направлений касательных к траекториям «медленных» движений системы; в области (III) $\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{dx_2}{dx_1} \right] \approx 0$ в силу условий (10.78), поэтому поворотом векторного поля направлений касательных к траекториям в этой области мы будем в дальнейшем пренебрегать. Так как, кроме того, координаты конечных точек скачков x_1^+ и x_2^+ от σ не зависят, то мы, очевидно, можем утверждать, что при увеличении σ точки выхода на полупрямую Γ_2 положительных полутраекторий L , соответствующих любым заданным (фиксированным) значениям s , сдвигаются вправо. Следовательно,

$$\frac{\partial s'}{\partial \sigma} > 0; \quad (10.81)$$

очевидно, $\frac{\partial s'}{\partial \sigma} \approx 0$ для тех значений s , которым соответствуют полутраектории L , лежащие целиком в области (III)¹⁾. Таким образом, при уменьшении σ график функции соответствия $s' = \Pi(s)$ на диаграмме Ламерея (на плоскости s, s') или не изменяется, или же хотя бы частично смещается вниз.

Перейдем теперь к вычислению и более детальному исследованию функции соответствия $s' = \Pi(s)$ точечного преобразования Π . В связи с тем, что уравнения скачка (10.80), а также дифференциальные уравнения «медленных» движений являются кусочно-линейными, нам придется разбить интервал изменения s : $0 < s < +\infty$

¹⁾ Для этих значений s $\frac{\partial s'}{\partial \sigma}$ является малой величиной порядка $\frac{1 + \alpha}{1 + \beta}$ и $\frac{\sigma}{1 + \beta}$.

при $\sigma \geq -1$ и $s_0 < s < +\infty$ при $\sigma < -1$ на интервалы, в каждом из которых указанные уравнения линейны, и затем на каждом из них провести вычисление функции соответствия.

а) Точечное преобразование Π для $s \geq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$. При достаточно больших s изображающая точка после скачка в точку (x_1^+, x_2^+) попадает на одну из траекторий «полубыстрых» движений в области (III):

$$x_2 + kx_1 = a = \text{const} \geq -1$$

и по ней приходит на полупрямую Γ_2 в точке с абсциссой $x_1' = \frac{1+\alpha}{k} \geq 0$. Так как

$$a = x_2^+ + kx_1^+ = (1+\alpha)(s-1) - k$$

согласно (10.80), то этот случай имеет место только при

$$s \geq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha} = \frac{k+\alpha}{1+\alpha}$$

и координата последующей точки преобразования Π $s' = 1 + x_1' = \frac{1+\alpha}{k} + 1$ или

$$s' = \frac{1+\alpha}{k} s - \frac{\alpha}{k} \geq 1. \quad (10.82)$$

Отметим, что точке $s = 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ соответствует последующая $s' = 1$ и что при $s > 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ $\frac{ds'}{ds} = \frac{1+\alpha}{k} < 1$ согласно первому из неравенств (10.78)¹⁾. Поэтому $s' < s$ и точечное преобразование Π не может иметь неподвижной точки с координатой $s^* \geq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$.

б) Точечное преобразование Π для $\frac{1}{k} \leq s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ и $\sigma \geq -1$. При $\frac{1}{k} < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ концевая точка скачка (x_1^+, x_2^+) также лежит в области (III), но теперь изображающая точка по соответствующей траектории «полубыстрого» движения:

$$x_2 + kx_1 = a = x_2^+ + kx_1^+ < -1$$

¹⁾ Выражения для s и $\frac{ds'}{ds}$, приведенные выше, являются, конечно, приближенными; они отличаются от точных на малые величины порядка $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$ и $\frac{\sigma}{1+\beta}$.

или попадает в малую окрестность фазовой траектории «медленного» движения

$$x_1 \equiv x_0 = \frac{\sigma}{1 + \beta} \approx 0$$

при $\sigma \geq 0$ и выходит на полупрямую Γ_2 в точке с абсциссой $x'_1 \approx \approx x_0 \approx 0$, или же при $\sigma < 0$ выходит на границу областей (III) и (II) в точке $(0, a)$ и затем переходит в область (II).

Таким образом, при $\sigma \geq 0$ координата последующей точки

$$s' = 1^+); \quad (10.83)$$

следовательно, при $\sigma \geq 0$ точка $s^* = 1$ будет являться неподвижной точкой преобразования II и притом устойчивой.

Рассмотрим теперь случай $-1 \leq \sigma < 0$. Интегрируя дифференциальные уравнения (10.79б), нетрудно получить следующие уравнения траектории, лежащей в области (II) и начинающейся (при $t = 0$) в точке $(0, a)$:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sigma(1 - e^{-t}), \\ x_2 &= \sigma - (\sigma - a + k\sigma t)e^{-t}. \end{aligned} \right\} \quad (10.84)$$

Изображающая точка, двигаясь по этой траектории, выйдет при некотором $t = \tau > 0$ на полупрямую Γ_2 . Для этого момента времени имеем:

$$\begin{aligned} s' - 1 &= \sigma(1 - e^{-\tau}), \\ -1 &= \sigma - (\sigma - a + k\sigma\tau)e^{-\tau}. \end{aligned}$$

Так как

$$a = \begin{cases} (1 + \alpha)(s - 1) - k & \text{при } s \geq 1, \\ s - 1 - k & \text{при } \frac{1}{k} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

то, разрешая полученные уравнения относительно s и s' , получим следующие уравнения (в параметрической форме) для функции соответствия преобразования II:

$$\begin{aligned} \text{при } 1 \leq s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha} \\ \left. \begin{aligned} s &= 1 + \frac{k + \sigma + k\sigma\tau - (1 + \sigma)e^{-\tau}}{1 + \alpha}, \\ s' &= 1 + \sigma(1 - e^{-\tau}); \end{aligned} \right\} \quad (10.85a) \end{aligned}$$

¹⁾ Точнее, $s' = 1 + g(s)$ и $\frac{ds'}{ds} = g'(s)$, где $g(s)$ и $g'(s)$ — малые величины порядка $\frac{1 + \alpha}{1 + \beta}$ и $\frac{\sigma}{1 + \beta}$.

при $\frac{1}{k} \leq s \leq 1$

$$\left. \begin{aligned} s &= 1 + k + \sigma + k\sigma\tau - (1 + \sigma)e^\tau, \\ s' &= 1 + \sigma(1 - e^{-\tau}); \end{aligned} \right\} \quad (10.856)$$

заметим, что уравнения (10.856) получаются из (10.85а), если заменить в последних α на 0. Точке $s = 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ соответствует значение $\tau = 0$ и $s' = 1$, точке $s = 1 - \frac{1}{k}$ — значению $\tau = \tau_1$, точке $s = \frac{1}{k}$ —

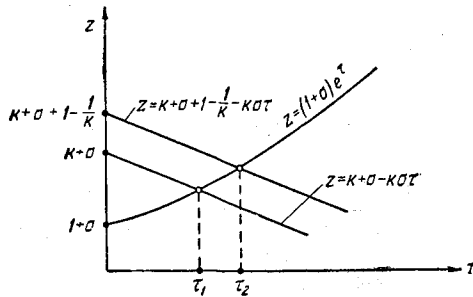


Рис. 587.

значение $\tau = \tau_2$, где τ_1 и τ_2 — значения параметра τ , определяемые однозначно уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sigma)e^{\tau_1} &= k + \sigma + k\sigma\tau_1, \\ (1 + \sigma)e^{\tau_2} &= 1 - \frac{1}{k} + k + \sigma + k\sigma\tau_2 \end{aligned} \right\} \quad (10.86)$$

(графическое решение этих уравнений приведено на рис. 587; очевидно, что $\tau_2 > \tau_1$).

Так как

$$\frac{ds}{d\tau} = \begin{cases} \frac{k\sigma - (1 + \sigma)e^\tau}{1 + \alpha} & \text{при } 1 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}, \\ k\sigma - (1 + \sigma)e^\tau & \text{при } \frac{1}{k} < s < 1, \end{cases}$$

$$\frac{ds'}{d\tau} = \sigma e^{-\tau} < 0, \text{ поскольку } \sigma < 0,$$

$$\frac{ds'}{ds} = \begin{cases} (1 + \alpha) \frac{-\sigma e^{-\tau}}{-k\sigma + (1 + \sigma)e^\tau} & \text{при } 1 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}, \\ \frac{-\sigma e^{-\tau}}{-k\sigma + (1 + \sigma)e^\tau} & \text{при } \frac{1}{k} < s < 1, \end{cases}$$

то при $-1 \leq \sigma < 0$ $\frac{ds'}{d\tau} < 0$ и монотонному изменению τ от 0 до τ_2

соответствует монотонное уменьшение s от $1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ до $\frac{1}{k}$. Далее, в силу первого из условий (10.78)

$$0 < \frac{ds'}{ds} < \frac{1+\alpha}{k} < 1 \quad \text{при} \quad 1 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha},$$

$$0 < \frac{ds'}{ds} < \frac{1}{k} < 1 \quad \text{при} \quad \frac{1}{k} < s < 1.$$

Таким образом, точечное преобразование Π при $-1 \leq \sigma < 0$ не может иметь неподвижных точек s^* на интервале $1 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$, так как на этом интервале $s' < 1$, и может иметь единственную и устойчивую неподвижную точку на интервале $\frac{1}{k} \leq s < 1$ (единственность и устойчивость неподвижной точки, если

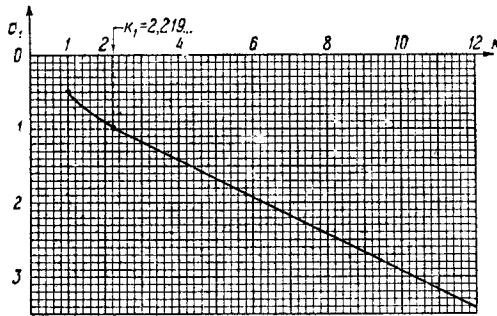


Рис. 588.

она существует, следует из неравенства $0 < \frac{ds'}{ds} < 1$, доказанного выше для всех $\frac{1}{k} < s < 1$). Значение параметра преобразования $\tau = \tau^*$ для этой неподвижной точки определяется согласно (10.85) уравнением

$$k + k\sigma\tau^* + \sigma e^{-\tau^*} - (1 + \sigma)e^{\tau^*} = 0 \quad (10.87)$$

и дает нам величину полупериода разрывных автоколебаний (в единицах безразмерного времени), если пренебрегать длительностью «быстрых» и «полубыстрых» движений.

Условие существования неподвижной точки s^* на интервале $\frac{1}{k} \leq s < 1$, очевидно, может быть записано в виде $(s')_{\tau = \tau^*} \geq \frac{1}{k}$ или, используя (10.81), в виде

$$\sigma \geq \sigma_1 = \sigma_1(k), \quad (10.88)$$

где σ_1 — бифуркационное значение параметра σ , определяемое уравнением

$$(s')_{\tau_2 = \tau_1} = 1 + \sigma(1 - e^{-\tau_1}) = \frac{1}{k}$$

совместно со вторым из уравнений (10.86), выражающим τ_2 через σ и k . Так как $\tau_2 > 0$, то при $k > 1$ $\sigma_1 < 0$; кроме того, $\sigma_1 = -1$ при $k = k_1 = 2,219 \dots$ ¹⁾. График функции $\sigma_1 = \sigma_1(k)$, построенный на основании численного решения указанных уравнений, приведен на рис. 588²⁾. Так как при $k > k_1 \approx 2,2 \dots$ $\sigma_1 < -1$, то неподвижная точка s^* на интервале существует при всех $-1 < \sigma < 0$, если $k > k_1$.

в) *Точечное преобразование П* при $0 < s < \frac{1}{k}$ и $\sigma \geq -1$. При $0 < s < \frac{1}{k}$ конечная точка (x_1^+, x_2^+) скачка изображающей точки из точки s полупрямой Γ_1 лежит согласно (10.80а) уже внутри области (II). Интегрируя дифференциальные уравнения (10.795), нетрудно получить следующее уравнение траектории L «медленных» движений, начинающейся в точке (x_1^+, x_2^+) при $t = 0$ и проходящей в области (II):

$$x_1 = \sigma + (x_1^+ - \sigma)e^{-t}, \quad x_2 = \sigma + [k(x_1^+ - \sigma)t + x_2^+ - \sigma]e^{-t}. \quad (10.89)$$

Эта траектория при $\sigma \geq -1$ или выходит на границу областей (II) и (III) и переходит затем в область (III) (это может быть только при $\sigma > 0$ и заведомо имеет место при $\sigma \geq \frac{1}{k-1}$, тогда координата последующей точки $s' = 1$), или же выходит на полупрямую Γ_2 ,

¹⁾ k_1 является единственным корнем уравнения $ke^{(1 - \frac{1}{k^2})} = 1$.

²⁾ Численное решение уравнения $\frac{1}{k} = 1 + \tau_1(1 - e^{-\tau_1})$ и второго из уравнений (10.86) $(1 + \sigma_1)e^{\tau_1} = 1 - \frac{1}{k} + k + \tau_1 + k\tau_1\tau_2$ удобно вести следующим образом. Подставим первое уравнение во второе и разрешим его относительно σ_1 :

$$\sigma_1 = \frac{k - e^{\tau_1}}{e^{\tau_1} - e^{-\tau_1} - k\tau_2}. \quad (A)$$

Тогда после подстановки снова в первое уравнение получим

$$k^2(\tau_2 - 1 + e^{-\tau_2}) - k(\tau_2 + 1 - e^{-\tau_2}) + e^{\tau_2} - e^{-\tau_2} = 0. \quad (B)$$

Задавая различные значения $\tau_2 > 0$, но такие, чтобы дискриминант квадратного уравнения (B) был положительным (для этого τ_2 должно удовлетворять неравенству $0 < \tau_2 < 0,82 \dots$), мы найдем из уравнения (B) для каждого значения τ_2 два значения k и затем из уравнения (A) соответствующие им значения σ_1 . Заметим, что при $\tau_2 \rightarrow +0$ один из корней k квадратного уравнения (B) стремится к 1, другой — к $+\infty$, а соответствующие значения $\sigma_2 = k - \frac{1}{k}$ и $k - \infty$.

оставаясь все время в пределах области (II) (в этом случае абсцисса x'_1 точки выхода L на Γ_2 заключена в интервале между x'_1 и σ).

Пусть при некотором $t = \tau > 0$ изображающая точка, двигаясь по траектории L (в пределах области (II)), приходит на полупрямую Γ_2 . Тогда координата s' последующей точки преобразования Π ($s' = x'_1 - 1$) определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} s' - 1 &= \sigma + (ks - 1 - \sigma) e^{-\tau}, \\ -1 &= \sigma + [k(ks - 1 - \sigma)\tau - (k^2 - 1)s - 1 - \sigma] e^{-\tau} \end{aligned} \right\} (10.89a)$$

(здесь мы использовали соотношения (10.80a), выражающие координаты концевой точки скачка через координату s начальной точки скачка на полупрямой Γ_1 при $0 < s < \frac{1}{k}$).

При $\sigma = -1$ второе уравнение (10.89a) определяет для всех траекторий L одно и то же время пробега τ , именно $\tau = 1 - \frac{1}{k^2}$; тогда согласно первому уравнению (10.89a) функция соответствия (для $0 < s < \frac{1}{k}$) будет линейной:

$$s' = s k e^{-\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}, \quad (10.90)$$

ее графиком является отрезок прямой с угловым коэффициентом $k e^{-\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}$, начинающийся в начале координат. Очевидно, при $k > k_1$, где $k_1 = 2, 2 \dots$ — единственный корень уравнения $k e^{-\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)} = 1$, этот отрезок расположен над биссектрисой $s' = s$ и при $k < k_1$ — под ней¹⁾.

При $\sigma > -1$ график функции соответствия $s' = \Pi(s)$ для $0 < s \leq \frac{1}{k}$ идет в силу (10.81) всюду над прямой (10.90), т. е. $s' = \Pi(s) > s k e^{-\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}$, поэтому при изменении s от 0 до $\frac{1}{k}$ s' монотонно возрастает (так как $\frac{ds'}{ds} > 0$) от некоторого значения $s'_0 = \Pi(0) > 0$ до значения $\Pi\left(\frac{1}{k}\right) > e^{-\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}$. Разрешая уравнения (10.89a) относительно s и s' , мы получим функцию соответствия

¹⁾ Отсюда в силу (10.81) еще раз следует, что при $-1 < \sigma < 0$ и $k \geq k_1$ ($s' = \frac{1}{k} > \frac{1}{k}$ и, следовательно, преобразование Π имеет неподвижную точку $\frac{1}{k} < s^* < 1$).

в следующей параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} s &= (1 + \sigma) \frac{1 + k\tau - e^\tau}{k^2\tau - (k^2 - 1)}, \\ s' &= (1 + \sigma) \frac{k^2\tau - (k^2 + k - 1)(1 - e^{-\tau})}{k^2\tau - (k^2 - 1)}, \end{aligned} \right\} \quad (10.91)$$

при условии, конечно, что $s' \leq 1$.

Если же для тех или иных значений s в интервале $0 < s < \frac{1}{k}$ второе соотношение (10.91) дает значения $s' > 1$, то это, очевидно, означает, что рассматриваемые траектории L не выходят на отрезок полупрямой Γ_2 , лежащий в пределах области (II), а переходят в область (III); следовательно, для этих значений s функция соответствия не будет выражаться соотношениями (10.91). Это может быть только при $\sigma > 0$ и заведомо имеет место для всех $0 < s \leq \frac{1}{k}$ при $\sigma \geq \frac{1}{k-1}$, когда все траектории в области (II) переходят в область (III)⁴⁾. Поэтому траектории L , соответствующие таким значениям s , начинаясь в точках (x_1^+, x_2^+) области (II), переходят в область (III) — в малую окрестность траектории $x_1 \equiv x_0 = \frac{\sigma}{1+\beta} \approx 0$, где и выходят на полупрямую Γ_2 — в точках с абсциссами $x_1' \approx x_0 \approx 0$, т. е. для таких значений s координата последующей точки

$$s' = 1. \quad (10.91a)$$

Рассмотрим кратко функцию соответствия (10.91). Очевидно, точке $s = \frac{1}{k}$ соответствует значение $\tau = \tau_2$, определяемое вторым из уравнений (10.86), а точке $s = 0$ — значение $\tau = \tau_3 > 0$, определяемое однозначно (при $k > 1$) уравнением

$$e^{\tau_3} = 1 + k\tau_3.$$

Далее, нетрудно показать, что значениям s в интервале $0 < s < \frac{1}{k}$ соответствуют значения параметра τ в интервале $\tau_3 > \tau > \tau_2$.

⁴⁾ Согласно первому из уравнений (10.89a) $s' < 1$ для всех $0 < s < \frac{1}{k}$, если $\sigma < 0$. Наоборот, при $\sigma > 0$ траектория L_1 , соответствующая $s = \frac{1}{k}$, переходит в область (III), поэтому в силу непрерывной зависимости траекторий L от начальных условий в область (III) будут переходить и траектории L , близкие к L_1 и соответствующие значениям s ($s < \frac{1}{k}$), близким к $\frac{1}{k}$, т. е. при $\sigma > 0$ всегда существуют такие значения s в интервале $0 < s < \frac{1}{k}$, для которых функция соответствия не выражается соотношениями (10.91).

Для доказательства последнего утверждения введем вспомогательную функцию

$$\Psi(\tau) = \frac{1 + k\tau - e^\tau}{k^2\tau - (k^2 - 1)},$$

со знаком которой совпадает (при $\sigma > -1$) знак s . Знаменатель этой функции $k^2\tau - (k^2 - 1)$ меньше нуля при $\tau < \tau_4$ и больше нуля при $\tau > \tau_4$, где $\tau_4 = 1 - \frac{1}{k^2}$; при $\tau = \tau_4$ знаменатель функции Ψ обращается в нуль, а сама

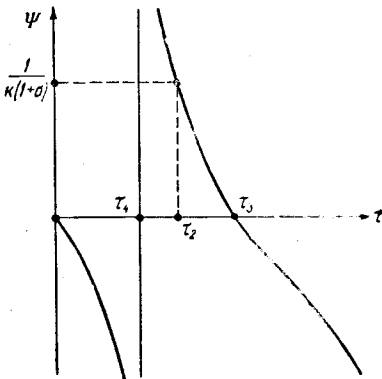


Рис. 589.

функция — в бесконечность. Числитель функции Ψ , $1 + k\tau - e^\tau$, равен нулю при $\tau = 0$, больше нуля при $0 < \tau < \tau_3$ (τ_3 было введено выше), обращается снова в нуль при $\tau = \tau_3$ и меньше нуля при $\tau > \tau_3$. Так как при $\tau = \tau_4$ числитель функции Ψ : $1 + k\tau_4 - e^{\tau_4} = 1 + \tau_4(1 - \tau_4)^{-1/2} - e^{\tau_4} > 0$, поскольку $0 < \tau_4 < 1$, $k = (1 - \tau_4)^{-1/2}$ и при всех $0 < \tau < 1$ $\tau(1 - \tau)^{-1/2} > e^\tau - 1$, то $\tau_4 < \tau_3$. Этих сведений достаточно для качественного построения графика функции Ψ (очевидно, при $0 < \tau < \tau_4$ $\Psi < 0$, при $\tau_4 < \tau < \tau_3$ $\Psi > 0$ и при $\tau > \tau_3$ $\Psi < 0$, причем при $\tau \rightarrow +\infty$ $\Psi \rightarrow -\infty$). Этот график приведен на рис. 589. Очевидно, что $\tau_4 < \tau_2 < \tau_3$, так как τ_2 удовлетворяет уравнению

$\Psi(\tau_2) = \frac{1}{k(1 + \sigma)} > 0$. Таким образом, значениям s в интервале $0 < s < \frac{1}{k}$ соответствуют значения параметра τ в интервале $\tau_3 > \tau > \tau_2$, причем на этом интервале $\frac{ds}{d\tau} < 0$, а следовательно и $\frac{ds'}{d\tau} < 0$ (так как $\frac{ds'}{ds} > 0$), в силу чего при монотонном увеличении параметра τ от τ_2 до τ_3 s монотонно убывает от $\frac{1}{k}$ до 0, а $s' = \sigma(s')$, $\tau = \tau_2 > e^{-\left(1 - \frac{1}{k}\right)}$ до $s'_0 = (s')_{\tau = \tau_3} > 0$.

Если гочешное преобразование Π имеет неподвижную точку s^* на интервале $0 < s < \frac{1}{k}$, то параметр преобразования $\tau = \tau^*$ ($\tau_2 < \tau^* < \tau_3$) для нее определится из условия $s = s' < \frac{1}{k} < 1$ или согласно (10.91) из уравнения

$$e^\tau + k(k-1)\tau - (k^2 + k - 1)(1 - e^{-\tau}) - 1 = 0. \quad (10.92)$$

Нетрудно показать, что это уравнение имеет единственный положительный корень τ^* (тогда если корень τ^* удовлетворяет неравенствам $\tau_2 < \tau^* < \tau_3$, то преобразование Π имеет единственную неподвижную точку s^* на интервале $0 < s < \frac{1}{k}$). Рассмотрим с этой целью вспомогательную функцию

$$\Phi(\tau) = e^\tau + k(k-1)\tau - (k^2 + k - 1)(1 - e^{-\tau}).$$

Для нее

$$\begin{aligned}\Phi'(\tau) &= e^\tau + k(k-1) - (k^2 + k - 1)e^{-\tau}, \\ \Phi''(\tau) &= e^\tau + (k^2 + k - 1)e^{-\tau} > 0, \\ \Phi(0) &= 0, \quad \Phi'(0) = -2(k-1) < 0, \\ \Phi(+\infty) &= +\infty, \quad \Phi'(+\infty) = +\infty.\end{aligned}$$

Поэтому график функции $\Phi(\tau)$ имеет вид, изображенный на рис. 590: функция $\Phi(\tau) < 0$ при достаточно малых положительных τ и имеет единственный минимум $\Phi_{\min} < 0$ (при некотором $\tau = \tau' > 0$, определяемом уравнением $\Phi'(\tau) = 0$); при $\tau > \tau'$ функция $\Phi(\tau)$ является монотонно возрастающей и изменяется при возрастании τ от $\Phi_{\min} < 0$ при $\tau = \tau'$ до $+\infty$ при $\tau \rightarrow +\infty$; следовательно, график функции $\Phi(\tau)$ пересекает ось τ (при $\tau > \tau'$) и притом *только один раз*. Таким образом, уравнение $\Phi(\tau) = 0$ имеет единственный положительный корень τ^* , а точечное преобразование Π может иметь

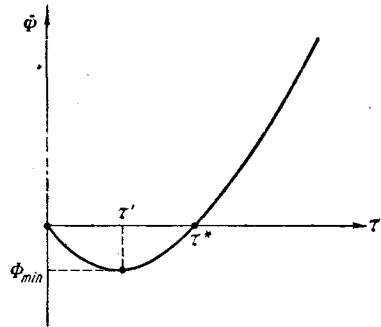


Рис. 590.

на интервале $0 < s < \frac{1}{k}$ не более одной неподвижной точки.

Так как при $k > k_1 = 2.2\dots$ прямая (10.99) лежит над биссектрисой $s' = s$, то график функции соответствия $s' = \Pi(s)$ при $k > k_1$ и $\sigma > -1$ будет лежать также над этой биссектрисой, т. е. для всех $0 < s < \frac{1}{k}$ будет справедливо неравенство $s' = \Pi(s) > s$. Следовательно, в этом случае на интервале $0 < s < \frac{1}{k}$ нет неподвижных точек преобразования Π .

При $\sigma > -1$, но $k < k_1$ (когда $\sigma_1(k) > -1$) возможны два случая.

1) Если $\sigma > \sigma_1(k)$, то, как было показано выше (см. (10.83)), $(s')_{\tau=\tau_2} > \frac{1}{k} = (s)_{\tau=\tau_2}$ или, иначе говоря, $s' - s > 0$ при $\tau = \tau_2$ (или $s = \frac{1}{k}$); тот же знак разности $s' - s$ имеет и при $\tau = \tau_3$ (при $s = 0$). Поэтому разность $s' - s$, являющаяся непрерывной функцией s , или не обращается в нуль на интервале $0 < s < \frac{1}{k}$, или же обращается в нуль на этом интервале четное число раз. Последнее, как мы только что доказали, невозможно. Следовательно, и в этом случае преобразование Π не имеет неподвижных точек на интервале $0 < s < \frac{1}{k}$.

2) При $-1 < \sigma < \sigma_1(k)$ $(s')_{\tau=\tau_2} < \frac{1}{k}$, т. е. разность $s' - s < 0$ при $s = \frac{1}{k}$ (при $\tau = \tau_2$); при $s = 0$ (при $\tau = \tau_3$) эта разность по-прежнему положительна. Поэтому на интервале $0 < s < \frac{1}{k}$ разность $s' - s$ обращается в нуль, т. е. существует неподвижная точка s^* преобразования Π и притом единственная, как было доказано выше. Эта неподвижная точка в силу ее единственности будет обязательно *устойчивой*. В самом деле, если бы неподвижная точка s^* была неустойчивой, то при $s = s^*$ имело бы место неравенство $\frac{ds'}{ds} > 1$ или $\frac{d}{ds}(s' - s) > 0$. Тогда разность $s' - s$ была бы положительной величиной при значениях $s > s^*$, но близких к s^* (при $s^* < s \leq s^* + \epsilon$, где ϵ — некоторое достаточное малое положительное число), и, следовательно, обращалась бы в нуль по крайней мере еще раз на интервале $s^* + \epsilon < s < \frac{1}{k}$, т. е. точечное преобразование Π имело бы на интервале $0 < s < \frac{1}{k}$ еще одну неподвижную точку (кроме s^*), что невозможно.

г) *Точечное преобразование Π при $\sigma < -1$.* При $\sigma < -1$ в области (I) существует устойчивое состояние равновесия (σ, σ) , к которому идет часть траекторий «медленных» движений (см. рис. 585, а и 586). Поэтому теперь существует такое $s_0 > 0$, которое является точной нижней границей значений s для точек, имеющих последующие, т. е. точечное преобразование Π существует только при $s > s_0$ (см. также стр. 869). Конечно, эта нижняя граница интервала существования преобразования Π заведомо меньше $1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$, так как точки $s \geq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ имеют последующие s' , определяемые функцией (10.82) при любых σ и, в частности, при $\sigma < -1$.

Далее, при выводе выражений (10.85а), (10.85б) и (10.91) для функции соответствия преобразования Π мы нигде не пользовались условием $\sigma \geq -1$ (это условие использовалось только при их анализе). Поэтому указанные выражения остаются справедливыми в соответствующих интервалах изменения s и при $\sigma < -1$ (но, конечно, только при $s > s_0$).

Отметим, наконец, что в силу (10.81) при $\sigma < -1$ и всех $s_0 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ имеет место неравенство

$$s' = \Pi(s) < (s')_{\sigma = -1}, \quad (10.93)$$

где

$$(s')_{\sigma=-1} = \begin{cases} ske^{-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)} & \text{при } 0 < s \leq \frac{1}{k}, \\ e^{-\left(1-\frac{s}{k}\right)} & \text{при } \frac{1}{k} \leq s \leq 1, \\ e^{-\left(1+\frac{\alpha}{k}-\frac{1+\alpha}{k}s\right)} & \text{при } 1 \leq s \leq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha} \end{cases}$$

— функция соответствия для $\sigma = -1$ ¹⁾. Из неравенства (10.93) следует, что $s' < s$ при $\sigma < -1$, $k < k_1 = 2, 2, \dots$ и всех $s > s_0$, поскольку при $k < k_1$ $(s')_{\sigma=-1} < s$, т. е. преобразование Π в этом случае не имеет неподвижных точек. Оно может иметь неподвижные точки только при $k > k_1$. При этом, поскольку $s' < 1$ при $\sigma < -1$ и всех $s_0 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ (см. неравенство (10.93)), неподвижные точки s^* могут лежать только на интервале $s_0 < s < 1$, вследствие чего значения параметра $\tau = \tau^*$ для этих точек будут определяться уравнением (10.87), если $\frac{1}{k} < s^* < 1$, и уравнением (10.92), если $s^* < \frac{1}{k}$. Последнее уравнение, как было доказано выше (см. доказательство на стр. 879, справедливое и при $\sigma < -1$), не может иметь более одного положительного корня τ^* , следовательно, если на интервале $s_0 < s < \frac{1}{k}$ имеется неподвижная точка s^* преобразования Π , то только одна (само собой разумеется, что для существования такой неподвижной точки необходимо, чтобы $s_0 < \frac{1}{k}$).

Итак, пусть $\sigma < -1$ и $k > k_1 = 2, 2, \dots$. Так как при $s = s_0$ разность $s' - s = -s_0 < 0$, то преобразование Π имеет неподвижную точку и притом одну, если при $s = \frac{1}{k}$ разность

$$s' - s = (s')_{\tau=\tau_2} - \frac{1}{k} > 0,$$

т. е. если (см. (10.88))

$$\sigma > \sigma_1(k)$$

(напомним, что $\sigma_1(k) < -1$ при $k > k_1$). В этой неподвижной точке $s = s^*$ разность $s' - s$ изменяет свой знак с отрицательного (при $s < s^*$)

¹⁾ Явные выражения для функции соответствия при $\sigma = -1$ и

$$\frac{1}{k} \leq s \leq 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$$

получаются из (10.85а) и (10.85б): при $\sigma = -1$ $s' = e^{-\tau}$, а τ оказывается кусочно-линейной функцией s .

на положительный (при $s > s^*$), значит при $s = s^* \frac{d}{ds}(s' - s) > 0$ или $\frac{ds'}{ds} > 1$, т. е. *единственная* (на интервале $s_0 < s < \frac{1}{k}$) *неподвижная точка* s^* преобразования Π , существующая при $k > k_1$ и $\sigma_1(k) < \sigma < -1$, является *неустойчивой*.

Если же $\sigma < \sigma_1(k)$, то при $s = \frac{1}{k} s' - s = (s')_{\tau = \tau_2} - \frac{1}{k} < 0$, поэтому разность $s' - s$ в силу ее непрерывности или не обращается в нуль на интервале $s_0 < s < \frac{1}{k}$, или же обращается в нуль на этом интервале четное число раз. Так как последнее невозможно, то, следовательно, *преобразование* Π *не имеет неподвижных точек на интервале* $s_0 < s < \frac{1}{k}$ *и при* $\sigma < \sigma_1(k)$.

Рассмотрим теперь функцию соответствия на интервале $\frac{1}{k} < s < 1$. Так как $s' > 0$ на всем интервале существования преобразования Π (при всех $s > s_0$), то согласно (10.855) имеем:

$$s' = 1 + \sigma(1 - e^{-\tau}) > 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1 + \sigma}{\sigma} e^{\tau} < 1,$$

и

$$\frac{ds'}{ds} = e^{\tau} \left(k - \frac{1 + \sigma}{\sigma} e^{\tau} \right) > e^{\tau} (k - 1) > e^{\tau} (k_1 - 1) > 1$$

(не следует забывать, что мы рассматриваем случай $\sigma > -1$ и $k > k_1 = 2, 2 \dots > 2$). Таким образом, для всех s , удовлетворяющих неравенствам $s > s_0$ и $\frac{1}{k} < s < 1$, имеем:

$$0 < \frac{ds'}{ds} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{d}{ds}(s' - s) < 0.$$

Отсюда следует, что если на интервале $\frac{1}{k} < s < 1$ существует неподвижная точка преобразования Π , то она является *устойчивой* и, кроме того, *единственной* (на этом интервале), так как на указанном выше интервале изменения s разность $s' - s$ является монотонно убывающей функцией s и поэтому не может обращаться в нуль более одного раза. Поскольку $s' - s < 0$ при $s = 1$, то эта неподвижная точка существует только при

$$\sigma > \sigma_1(k),$$

когда при $s = \frac{1}{k}$ разность $s' - s = (s')_{\tau = \tau_2} - \frac{1}{k} > 0$.

Если же $\sigma < \sigma_1(k)$, то при $s = \frac{1}{k}$, если $s_0 < \frac{1}{k}$, или при $s = s_0$, если $\frac{1}{k} < s_0 < 1$, разность $s' - s < 0$ и будет отрицательной величиной при всех s на рассматриваемом интервале, так как там $\frac{d}{ds}(s' - s) < 0^1$). Следовательно, в этом случае преобразование Π не имеет неподвижных точек на интервале $\frac{1}{k} < s < 1$.

Таким образом, при $\sigma < -1$ преобразование Π не имеет неподвижных точек как при $k < k_1$, так и при $k > k_1$, но $\sigma < \sigma_1(k)$, и

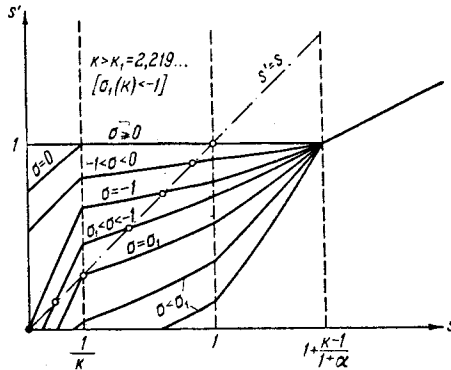


Рис. 591.

имеет две неподвижные точки (устойчивую на интервале $\frac{1}{k} < s < 1$ и неустойчивую на интервале $s_0 < s < \frac{1}{k}$) при $k > k_1$ и $\sigma_1(k) < \sigma < -1$.

4. Диаграммы Ламерея. Мягкий и жесткий режимы установления разрывных автоколебаний. Сказанное выше относительно преобразования Π и его неподвижных точек позволяет построить диаграммы Ламерея (графики функции соответствия на плоскости s, s') и с их помощью проанализировать возможные режимы работы мультивибратора. Семейство графиков функции соответствия $s' = \Pi(s)$, построенных для различных σ , имеет вид, приведенный на рис. 591 при $k > k_1 = 2,2...$ и на рис. 592 при $k < k_1$ (напомним, что мы рассматриваем случай $k > 1 + \alpha$ и $\beta \gg 1 + \alpha, \sigma$).

При $\sigma > -1$ преобразование Π существует при всех $s > 0$ и имеет единственную и устойчивую неподвижную точку $s^* (0 < s^* \leq 1)$,

¹⁾ Мы не рассматриваем случая $1 < s_0 < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$, так как в этом случае преобразование Π не существует при $s < 1$ и, следовательно, не имеет никаких неподвижных точек.

к которой, как нетрудно убедиться хотя бы путем построения «лестниц Ламерея», сходятся все последовательности точек пересечения траекторий системы с полупрямыми Γ_1 и Γ_2 ; соответственно в фазовом пространстве существует единственный и устойчивый разрывный предельный цикл, к которому приближаются (при $t \rightarrow +\infty$) все остальные траектории. Таким образом, при $\sigma > -1$ (при $E_g > -u_0$) в мультивibrаторе устанавливаются одни и те же периодические разрывные колебания (разрывные автоколебания) при любых начальных условиях, т. е. имеет место *мягкий режим установления разрывных автоколебаний*.

При $\sigma < -1$ в фазовом пространстве имеется устойчивое состояние равновесия, а точечное преобразование Π существует только

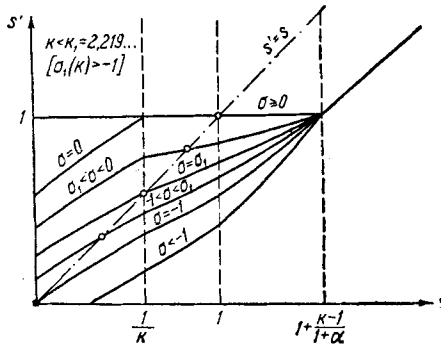


Рис. 592.

при $s > s_0$ ($s_0 > 0$) и зависит от k и σ ; точкам $0 < s < s_0$ соответствуют траектории системы, асимптотически приближающиеся к состоянию равновесия без выхода на границу области «медленных» движений). В зависимости от значений параметров k и σ возможны два случая.

При $k < k_1$, а также при $k > k_1$, но $\sigma < \sigma_1(k) < -1$, преобразование Π не имеет неподвижных точек, $s' < s$ при всех $s > s_0$ и, следовательно, все последовательности точек пересечения траекторий (на плоскости x_1, x_2) с полупрямыми Γ_1 и Γ_2 являются конечными, причем последняя точка лежит в интервале $0 < s < s_0$. Следовательно, в этом случае в мультивibrаторе (после конечного числа разрывных колебаний) устанавливается устойчивое состояние равновесия (при любых начальных условиях), т. е. *мультивibrатор не может совершать автоколебаний*.

При $k > k_1 = 2,2\dots$ и $\sigma_1(k) < \sigma < -1$ точечное преобразование Π имеет две неподвижные точки s_1^* и s_2^* ($s_0 < s_1^* < \frac{1}{k} < s_2^* < 1$), первая из которых является неустойчивой, вторая — устойчивой. Соответственно в фазовом пространстве, кроме устойчивого состояния

равновесия, имеются еще два разрывных предельных цикла, один из которых (соответствующий $s = s_2^*$) устойчив, а другой (соответствующий $s = s_1^*$) неустойчив. Нетрудно видеть, что все последовательности точек пересечения траекторий системы с полупрямыми Γ_1 и Γ_2

$$s, s_1, s_2, \dots$$

с начальными точками $s > s_1^*$ сходятся к устойчивой неподвижной точке s_2^* , а последовательности с начальными точками $s < s_1^*$ являются конечными, так как последняя точка $s_N < s_0$ (в этом можно убедиться, например, путем построения «лестниц Ламерея»).

Таким образом, в этом случае в зависимости от начальных условий устанавливается или устойчивое состояние равновесия, или устойчивый автоколебательный режим, т. е. в мультивибраторе имеет место жесткий режим установления разрывных автоколебаний¹⁾. При фиксированном $k > k_1$, когда $\sigma_1 = \sigma_1(k) < -1$, мы получаем типичную для жесткого режима «гистерезисную» зависимость амплитуды автоколебаний от сеточного смещения E_g (от параметра σ). Пусть σ достаточно медленно возрастает, начиная с отрицательных значений $\sigma < \sigma_1$. Тогда мультивибратор будет находиться в состоянии равновесия до тех пор, пока σ не достигнет значения $\sigma = -1$, при котором состояние равновесия становится неустойчивым. При $\sigma = -1$ мультивибратор перейдет в автоколебательный режим с конечной, отличной от нуля амплитудой колебаний (напомним, что автоколебательный режим существует при $\sigma > \sigma_1$). При дальнейшем увеличении сеточного смещения автоколебания сохраняются, причем их амплитуда непрерывно возрастает. Если теперь мы будем изменять сеточное смещение в обратном направлении, т. е. будем уменьшать параметр σ (опять достаточно медленно), то автоколебания в мультивибраторе будут сохраняться при $\sigma > \sigma_1$ (их амплитуда будет непрерывно уменьшаться, причем она будет стремиться к конечной, отличной от нуля величине при $\sigma \rightarrow \sigma_1 + 0$). При $\sigma = \sigma_1$ автоколебания срываются, так как устойчивый предельный цикл сливается с неустойчивым, и в мультивибраторе устанавливается состояние равновесия²⁾.

Для иллюстрации сказанного на рис. 593 изображена плоскость параметров, разбитая на области, каждая из которых соответствует определенному режиму работы мультивибратора. Границами этих

¹⁾ По-видимому, впервые существование жесткого режима установления разрывных автоколебаний в мультивибраторе было показано в работе В. В. Виткевича [43].

²⁾ Скорость изменения параметра σ должна быть настолько малой, чтобы в каждый момент времени режим работы мультивибратора мало отличался от стационарных режимов при соответствующем постоянном значении σ , т. е. чтобы изображающая точка оставалась вблизи устойчивого состояния равновесия или устойчивого разрывного предельного цикла, несмотря на изменение параметра σ .

областей являются линии $k = 1$, $\sigma = -1$ и $\sigma = \sigma_1(k)$ (при $\sigma < -1$)¹⁾. Разбиение полосы $1 < k < 1 + \alpha$ на области различных режимов работы мультивибратора на рис. 593 не дается, так как этот случай мы не рассматривали.

5. Автоколебания мультивибратора при $E_g \geq 0$. Вычислим период разрывных автоколебаний мультивибратора и построим осциллограммы напряжений для случая $E_g \geq 0$, наиболее интересного с точки зрения практических приложений (по-прежнему будем считать выпол-

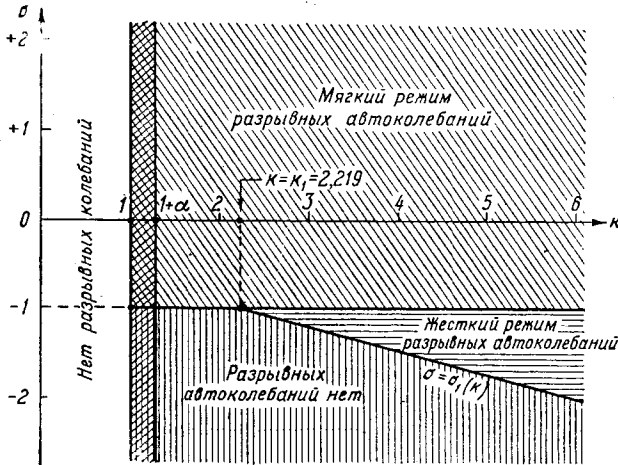


Рис. 593.

ненными условия (10.78)). Как мы видели, при $E_g \geq 0$ (при $\sigma \geq 0$) единственное состояние равновесия мультивибратора

$$x_1 = x_2 = \frac{\sigma}{1 + \beta} \approx 0$$

неустойчиво и все траектории приближаются (при $t \rightarrow +\infty$) к единственному и устойчивому разрывному предельному циклу, соответствующему единственной и устойчивой неподвижной точке $s^* \approx 1$ точечного преобразования II. Проекция этого предельного цикла на плоскости x_1, x_2 и y_1, y_2 изображены (качественно) на рис. 594. Этот предельный цикл состоит из траекторий «быстрых» движений A_1A_2 и $A_1'A_2'$ (эти траектории проектируются на плоскость y_1, y_2 в точки, так как во время «быстрого» движения изображающей точки $y_1, y_2 \approx \text{const}$), из кусков траекторий «полубыстрых» движений A_2A_3 и $A_2'A_3'$, которые пробегаются изображающей точкой за интервалы времени порядка $\frac{1 + \alpha}{1 + \beta} \ll 1$ (в единицах безразмерного

¹⁾ При $k < 1$, как уже указывалось, разрывных колебаний нет и при любых начальных условиях устанавливается устойчивое состояние равновесия.

времени), и из кусков траекторий «медленных» движений A_3A_1 и $A_3A_1^1$.

Так как при $\sigma \geq 0$ координата неподвижной точки преобразования Π $s^* = 1$ (с точностью до членов порядка $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$ и $\frac{\sigma}{1+\beta}$), то

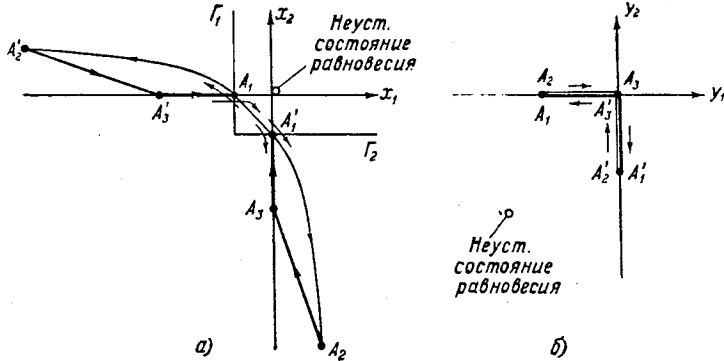


Рис. 594.

траектория «быстрого» движения A_1A_2 начинается в точке A_1 с координатами ²⁾:

$$x_1^{(1)} = -1, \quad x_2^{(1)} = s^* - 1 = 0, \quad y_1^{(1)} = -(k-1), \quad y_2^{(1)} = 0;$$

тогда координаты конечной точки A_2 этой траектории определятся по $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ условиями скачка (10.80):

$$x_1^{(2)} = \frac{k-1}{1+\alpha}, \quad x_2^{(2)} = -k \frac{k+\alpha}{1+\alpha}, \quad y_1^{(2)} = -(k-1), \quad y_2^{(2)} = 0.$$

Для «быстрого» движения изображающей точки по траектории A_1A_2 имеем: $y_1 \equiv y_1^{(1)} = -(k-1)$, $y_2 \equiv y_2^{(1)} = 0$, тогда согласно (10.77а) эта траектория вместе с другими траекториями «быстрых» движений, происходящих при тех же постоянных значениях y_1 и y_2 , определяется приблизительно (но тем точнее, чем меньше μ , т. е. чем меньше паразитные емкости C_a, C_g по сравнению с емкостью C) уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{x}_1 &= k-1-x_1-\alpha\psi(x_1)-k\varphi(x_2), \\ \mu \dot{x}_2 &= -x_2-\alpha\psi(x_2)-k\varphi(x_1) \end{aligned} \right\} \quad (10.94)$$

вне малой окрестности состояний равновесия этих уравнений, где имеют место «быстрые» движения ($\dot{x}_1, \dot{x}_2 \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$), или дифференциальным уравнением интегральных кривых

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2-\alpha\psi(x_2)-k\varphi(x_1)}{k-1-x_1-\alpha\psi(x_1)-k\varphi(x_2)}. \quad (10.94a)$$

¹⁾ Сливающиеся проекции траекторий «медленных» и «полубыстрых» движений на плоскости y_1, y_2 для наглядности несколько смещены друг относительно друга.

²⁾ Здесь и ниже для вычисления переменных y_1, y_2 во время «медленных» и «полубыстрых» движений (в частности, для точек A_1, A_2 и A_3 предельного цикла) использованы первые два уравнения (10.75).

Разбиение плоскости x_1, x_2 на траектории приближенных уравнений (10.94) приведено на рис. 595. Эти уравнения имеют два состояния равновесия A_1 и A_2 : точка $A_1 (-1, 0)$ — начальная точка скачка — является неустойчивой сложной

особой точкой типа седла — узел, точка $A_2 \left(\frac{k-1}{1+\alpha}, -k \frac{k+\alpha}{1+\alpha} \right)$ — устойчивым

узлом, к которому идут все траектории «быстрых» движений (при $y_1 \equiv -(k-1)$ и $y_2 \equiv 0$). Из точки A_1 (точнее, из сколь угодно малой ее окрестности) выходит единственная фазовая траектория — *сепаратриса* этой особой точки. Эта сепаратриса согласно § 3 настоящей главы и будет траекторией «быстрого» движения $A_1 A_2$, являющейся частью разрывного предельного цикла.

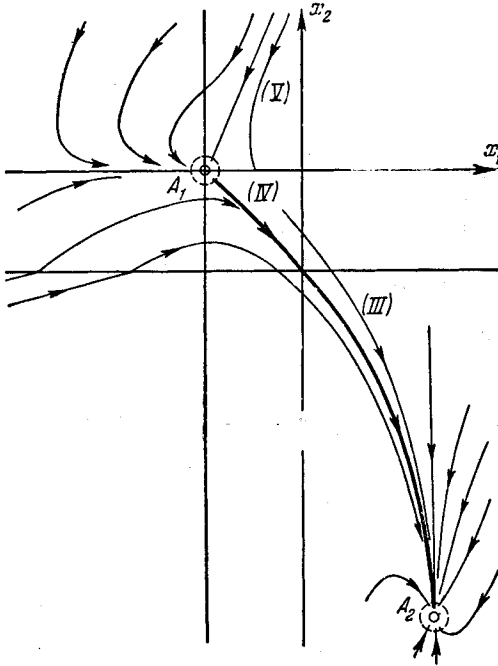


Рис. 595.

Внутри квадрата (IV) (см. рис. 595) $-1 \leq x_1 \leq 0, -1 \leq x_2 \leq 0$ уравнение интегральных кривых «быстрых» движений (уравнение (10.94а)) записывается в виде:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2 + k(x_1 + 1)}{x_1 + 1 + kx_2},$$

поэтому сепаратрисой, выходящей из точки A_1 , будет (в пределах области (IV)) отрезок прямой

$$x_2 = -(x_1 + 1)^1.$$

Далее сепаратриса в точке $(0, -1)$ переходит в область (III): $x_1 \geq 0, x_2 \leq -1$, где она будет определяться дифференциальным уравнением интегральных кривых для этой области:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 - k(x_1 + 1)}{k - 1 - (1 + \alpha)x_1}.$$

Интегрируя это уравнение и используя начальное условие: $x_2 = -1$ при $x_1 = 0$, мы получим следующее уравнение рассматриваемой сепаратрисы $A_1 A_2$ (в пределах области (III)):

$$x_2 = -k \frac{k+\alpha}{1+\alpha} - \frac{k}{\alpha} \left(\frac{k-1}{1+\alpha} - x_1 \right) + \left[k \frac{k+\alpha}{1+\alpha} + \frac{k}{\alpha} \frac{k-1}{1+\alpha} - 1 \right] \left(1 - \frac{1+\alpha}{k-1} x_1 \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

¹⁾ Другая сепаратриса, асимптотически приближающаяся к особой точке A_1 , идет в области (V): $-1 \leq x_1 \leq 0, x_2 > 0$, и является (в пределах этой области) отрезком прямой $x_2 = x(x_1 + 1)$ с угловым коэффициентом

$$x = \frac{\alpha}{2k} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2k} \right)^2 + 1}.$$

Построенная по полученным уравнениям траектория «быстрого» движения A_1A_2 — сепаратриса особой точки A_1 — изображена на рис. 595 и 594, а.

Отметим также, что уравнения (10.94) позволяют получить приближенную зависимость переменных x_1 и x_2 от t во время «быстрого», скачкообразного движения изображающей точки с границы малой окрестности точки A_1 на границу малой окрестности точки A_2 . Например, нетрудно показать, что интервал времени, за который изображающая точка переходит с границы $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки A_1 на границу $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности точки A_2 , является величиной порядка $\mu \ln \frac{1}{\mu}$.

В точке A_2 «быстрое» движение изображающей точки переходит в «полубыстрое», происходящее по траектории, близкой к прямой

$$x_2 + kx_1 = \text{const} = x_2^{(2)} + kx_1^{(2)} = -k;$$

по этой траектории изображающая точка за интервал времени порядка $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$ приходит в точку A_3 с координатами:

$$x_1^{(3)} = 0, \quad x_2^{(3)} = -k, \\ y_1^{(3)} = 0, \quad y_2^{(3)} = 0.$$

Далее изображающая точка движется по траектории «медленно-го» движения A_3A_1' :

$$x_1 \equiv 0$$

(со скоростью изменения переменного x_2 порядка единицы). Для этой траектории

$$\dot{x}_2 + x_2 = \sigma$$

(см. уравнения (10.79в)) и, следовательно,

$$x_2 = \sigma - (k + \sigma)e^{-t}$$

(за начало отсчета времени $t=0$ выбран тот момент времени, когда изображающая точка находилась в точке A_3). Поэтому изображающая точка через интервал времени

$$\tau^* = \ln \frac{k + \sigma}{1 + \sigma}$$

придет на полупрямую Γ_2 в точке A_1' , откуда снова начнется «быстрое» движение. Вторая половина предельного цикла $A_1'A_2'A_3A_1$ симметрична

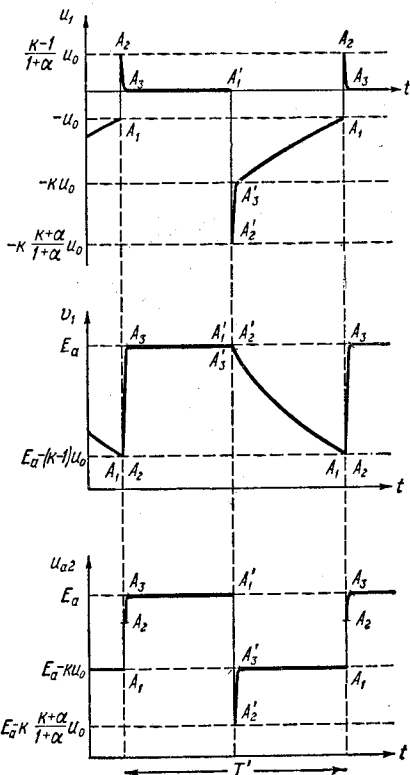


Рис. 596.

только что рассмотренной половине $A_1A_2A_3A_1'$ (в пространстве x_1, x_2, y_1, y_2 — относительно плоскости $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, а на плоскостях x_1, x_2 и y_1, y_2 — относительно биссектрис $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$).

Зная разрывный предельный цикл $A_1A_2A_3A_1'A_2'A_3'A_1$ (рис. 594), нетрудно построить осциллограммы напряжений в мультивибраторе во время автоколебаний, соответствующих движению изображающей точки по этому предельному циклу. Такие осциллограммы для напряжений u_1, v_1 и $u_{a2} = u_1 + v_1$ приведены на рис. 596. Автоколебания будут симметричными, поэтому, если пренебречь длительностью «быстрых» и «полубыстрых» движений, то период разрывных

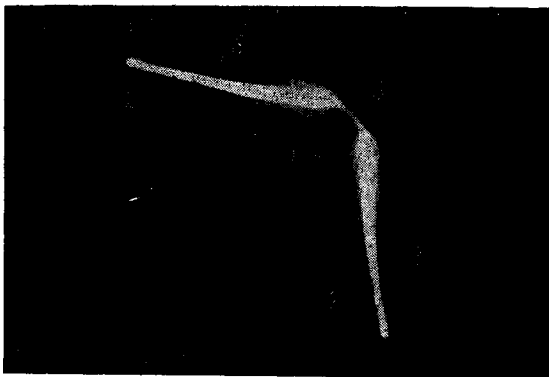


Рис. 597. Фотография разрывного предельного цикла (на плоскости u_1, u_2). 1 — траектории «мелких» движений; 2 — траектории «полубыстрых» движений; 3 — траектории «быстрых» движений.

автоколебаний мультивибратора с сегочными токами при $\sigma \geq 0$ (при $E_g \geq 0$) равен

$$T = 2\tau^* = 2 \ln \frac{k + \sigma}{1 + \sigma}$$

(в единицах безразмерного времени) и

$$T' = 2(R_a + R_g) C \ln \frac{SR_a}{1 + R_a/R_g} + \frac{E_g}{u_0}}{1 + \frac{E_g}{u_0}}$$

(в обычных единицах).

В заключение параграфа заметим, что экспериментальная проверка полностью (и качественно и количественно) подтверждает развитую здесь теорию. Для примера мы приведем фотографию пре-

дельного цикла на плоскости напряжений u_1, u_2 (рис. 597) и фотографии осциллограмм напряжений u_1, v_1 и u_{a2} (рис. 598), полученные

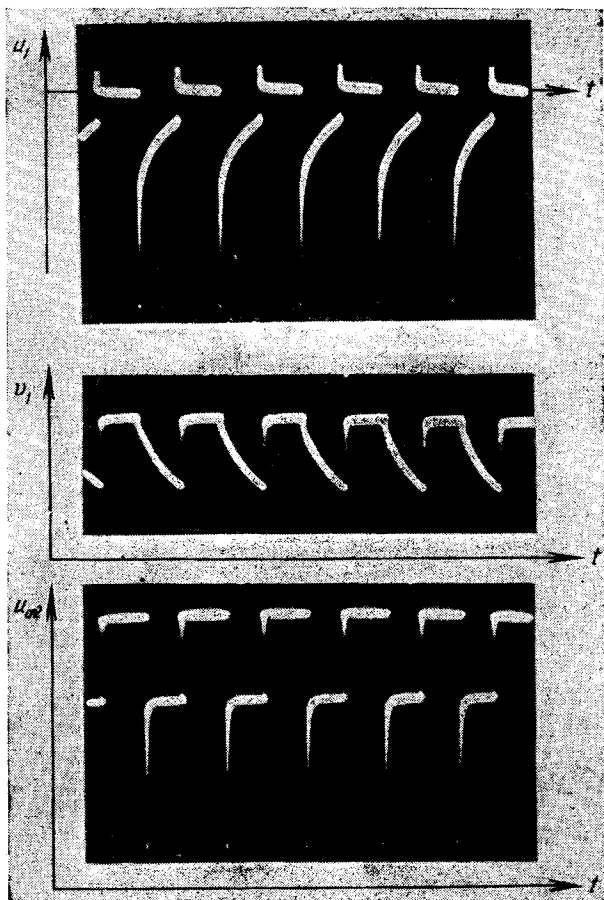


Рис. 598.

экспериментально при помощи электронного осциллографа (ср. с рис. 594, а и 596)¹⁾.

¹⁾ Для того чтобы на фотографии предельного цикла были видны участки «быстрых» движений, в мультивибраторе были искусственно увеличены паразитные емкости путем подключения емкостей к анодам ламп, а также были выбраны при фотографировании довольно большие экспозиции (из-за большой экспозиции траектории «медленных» и «полубыстрых» движений на фотографии имеют сильный ореол).

такие, что точки $M_1 [t', \varphi_1(t'), \dots, \varphi_n(t')]$ и $M_2 [t'', \varphi_1(t''), \dots, \varphi_n(t'')]$ лежат вне \bar{R}_1 .

Можно показать, что интервал $t_1 < t < t_2$ значений t , фигурирующий в теореме I, в силу условия г) является «максимально возможным интервалом определения решения» в следующем смысле: не существует интервала (t_1^*, t_2^*) значений t , содержащего интервал (t_1, t_2) , на котором были бы определены функции $x_k = \varphi_k^*(t)$, удовлетворяющие условиям а), б) и в) настоящей теоремы, и, следовательно, совпадающие на интервале (t_1, t_2) с функциями $x_k = \varphi_k(t)$.

Условие г), которое характеризует тот факт, что интервал (t_1, t_2) является максимально возможным, часто выражают также следующими словами: «решение системы может быть продолжено до границы области R ».

В настоящей книге под решением системы вида (Д.1) всегда подразумевается решение, определенное на максимально возможном промежутке значений t . При этом в настоящей книге решение обычно бывает определено при всех значениях t , т. е. при значениях t в интервале $-\infty < t < +\infty$.

В пространстве t, x_1, x_2, \dots, x_n функции $x_k = \varphi_k(t)$ определяют *интегральную кривую*. В силу теоремы I через каждую точку $M(t_0, x_1^0, x_n^0)$ области R проходит одна и только одна интегральная кривая.

Для того чтобы в явной форме отметить тот факт, что решение зависит от начальных значений t_0, x_1^0, \dots, x_n^0 , его записывают также в виде:

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0). \quad (\text{Д.2})$$

По самому смыслу этой записи мы, очевидно, имеем:

$$\varphi_k(t_0, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \equiv x_k^0.$$

Если t_0, x_1^0, \dots, x_n^0 рассматриваются как произвольные параметры (но, очевидно, такие, что точка $M(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ принадлежит области R), то систему функций (Д.2) называют *общим решением*. Если t_0, x_1^0, \dots, x_n^0 фиксированы, то систему функций (Д.2) называют *частным решением* или просто *решением* (так что «решение» и частное решение имеют один и тот же смысл). Для него имеет место следующая теорема.

Теорема II (о непрерывной зависимости от начальных значений).

Пусть

$$x_k = \varphi_k(t, t^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

— какое-нибудь решение системы (Д.1), определенное при всех значениях $t_1 < t < t_2$, и пусть τ_1 и τ_2 — любые числа, принадлежащие этому интервалу, причем $\tau_1 < \tau_2$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ можно

указать такое $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon, \tau_1, \tau_2)$, что для всех t_0, x_1^0, \dots, x_n^0 , для которых

$$|t_0 - t^*| < \delta, \quad |x_i^* - x_i^0| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

решение

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$$

определено при всех значениях $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ и при всех этих значениях t выполняются неравенства:

$$|\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) - \varphi_k(t, t^*, x_1^*, \dots, x_n^*)| < \varepsilon.$$

Теорема III.

Если функции $P_i(t, x_1, \dots, x_n)$ в правых частях системы (Д.1) имеют непрерывные частные производные по переменным x_1, x_2, \dots, x_n , то функции

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

имеют *непрерывные частные производные* по переменным x_1^0, \dots, x_n^0 . Эти частные производные вместе с самими функциями φ_k удовлетворяют системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_k}{dt} &= P_k(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^0} &= \frac{\partial P_k}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i^0} + \dots + \frac{\partial P_k}{\partial \varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i^0}, \\ i &= 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

В случае, когда правые части системы (Д.1) — аналитические функции своих переменных, справедлива следующая теорема.

Теорема IV.

Если функции $P_k(t, x_1, \dots, x_n)$ — аналитические функции переменных x_1, x_2, \dots, x_n , то функции

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$$

являются *аналитическими функциями своих аргументов* в окрестности всякой системы значений, для которой они определены.

Теоремы I—IV, в частности, используются при рассмотрении функции последования. Именно, принимая во внимание метод построения функции последования, нетрудно видеть в случае, когда правые части динамической системы — аналитические функции, что в силу теоремы IV функция последования тоже является аналитической функцией. В случае, когда правые части имеют непрерывные производные по x и y , из теорем I, II и III следует, что функция

¹⁾ Когда правые части системы (Д.1) имеют непрерывные частные производные по переменным x_i до порядка $k \geq 1$, то решение этой системы имеет непрерывные частные производные по x_i^0 также до порядка k . Однако случай, когда $k > 1$, не используется в настоящей книге.

последования непрерывна и имеет непрерывную производную (см. § 7 гл. V).

Предположим, что наряду с системой (Д.1)

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

рассматривается «изменная» система

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n) + p_k(t, x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{Д.3})$$

где $p_k(t, x_1, \dots, x_n)$ — функции, определенные в той же области R , что и функции P_k , непрерывные в этой области и имеющие непрерывные частные производные по переменным x_1, x_2, \dots, x_n .

В частности, предположим, что правые части заданной системы зависят от некоторого параметра μ , т. е. система имеет вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{Д.4})$$

Пусть эта система рассматривается при некотором частном значении $\mu = \mu_0$, т. е. рассматривается система

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu_0) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{Д.5})$$

и наряду с ней система (Д.4) рассматривается при каком-нибудь не равном μ_0 значении μ . Мы можем считать в этом случае, что система (Д.4) при $\mu \neq \mu_0$ является измененной системой по отношению к системе (Д.5), и можем считать, что система (Д.4) имеет вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu_0) + p_k(t, x_1, \dots, x_n),$$

где

$$p_k(t, x_1, \dots, x_n) = P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu) - P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu_0).$$

Теорема V (о непрерывной зависимости решения от изменения правой части и начального значения).

Пусть

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

— решение системы (Д.1), определенное при всех значениях t

$$t_1 < t < t_2 \quad (t_1 < t_0 < t_2),$$

и пусть τ_1 и τ_2 — какие-нибудь числа, удовлетворяющие неравенству $t_1 < \tau_1 < t_0 < \tau_2 < t_2$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при условии:

$$|p_k(t, x_1, \dots, x_n)| < \delta \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

в области R и

$$|x_i^0 - x_i^*| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

решение системы (Д.3), соответствующее начальным значениям t_0 , x_1^* , \dots , x_n^* ,

$$x_k = \varphi_k^*(t, t_0, x_1^*, \dots, x_n^*),$$

определено при всех значениях t , $t_1 \leq t \leq t_2$, и при всех этих значениях t выполняются неравенства

$$|\varphi_k^*(t, t_0, x_1^*, \dots, x_n^*) - \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

С л е д с т в и е. Если правые части рассматриваемой системы (Д.4) — непрерывные функции параметра μ , то и в решении этой системы

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)$$

функции $\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)$ — непрерывные функции μ .

Предположим, что функции $P_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $P_k(t, x_1, \dots, x_n) + p_k(t, x_1, \dots, x_n)$ имеют непрерывные частные производные по переменным x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда в силу теоремы III в решении системы (Д.1) и в решении системы (Д.3) функции $\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ и $\varphi_k^*(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ имеют частные производные по $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$:

$$\frac{\partial \varphi(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i^0} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi^*(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i^0}.$$

Пусть решение системы (Д.1) определено при значениях t : $t_1 < t < t_2$, и пусть τ_1 и τ_2 — какие-нибудь числа, удовлетворяющие неравенствам $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$. Тогда имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а VI.

Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если в области R

$$|p_k(t, x_1, \dots, x_n)| < \delta, \quad \left| \frac{\partial p_k(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| < \delta, \quad |x_i^0 - x_i^*| < \delta$$

$$(k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n),$$

то решение системы (Д.3)

$$x = \varphi^*(t, t_0, x_1^*, \dots, x_n^*)$$

определено при всех значениях t в интервале $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ и при этих значениях t выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial \varphi(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i^0} - \frac{\partial \varphi^*(t, t_0, x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i^*} \right| < \varepsilon.$$

Если правые части рассматриваемой динамической системы (Д.4)

$P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu)$ и производные $\frac{(\partial P_k) t, x_1, \dots, x_n, \mu}{\partial x_i}$ — непрерывные функции μ и $x_k = \varphi_k(t, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)$ — решение этой системы, то производные

$$\frac{\partial \varphi_k(t, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)}{\partial x_k^0}$$

тоже являются непрерывными функциями μ .

Рассмотрим еще случай, когда у системы

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu)$$

правые части являются аналитическими функциями всех аргументов. Для такой системы справедлива следующая теорема.

Теорема VII.

Если функции $P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu)$ — аналитические функции своих аргументов, то и функции

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)$$

также являются аналитическими функциями всех своих аргументов в окрестности всякой системы значений $t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0$, для которой они определены.

Следствие. Пусть для значений $t_0, x_1^*, \dots, x_n^*, \mu^*$ решение

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^*, \dots, x_n^*, \mu^*)$$

определено для всех t в интервале $t_1 < t < t_2$ и пусть τ_1 и τ_2 — какие-либо значения, такие, что $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$. Тогда функции

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)$$

могут быть разложены в ряд по степеням $(x_i^0 - x_i^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), сходящийся для всех t и μ , удовлетворяющих неравенствам

$$\tau_1 \leq t \leq \tau_2, \quad |\mu - \mu^*| < \delta \quad (\text{Д.6})$$

и при всех

$$|x_i^0 - x_i^*| < h_0,$$

где h_0 — некоторая постоянная, не зависящая от выбора значений t и μ , удовлетворяющих неравенствам (Д. 6). При этом коэффициенты этих рядов являются аналитическими функциями μ при всех μ в интервале

$$|\mu - \mu^*| < \delta.$$

ДОПОЛНЕНИЕ II

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ РАЗБИЕНИЯ ФАЗОВОГО
ПРОСТРАНСТВА НА ТРАЕКТОРИИ ПРИ ПОМОЩИ
ЭЛЕКТРОННОГО ОСЦИЛЛОГРАФА**

Изучение колебательных процессов в тех или иных системах путем рассмотрения разбиения соответствующего фазового пространства на траектории является не только теоретическим (математическим), но и экспериментальным методом. Применяя электронный осциллограф, можно наблюдать не только форму колебаний, но и движение изображающей точки по фазовой плоскости x, y . Для этого нужно на одну пару отклоняющих пластин трубки осциллографа подать (непосредственно или через соответствующий усилитель) напряжение, пропорциональное переменной x (например, напряжение на конденсаторе колебательного контура лампового генератора), а на другую пару пластин — напряжение, пропорциональное переменной y (пропорциональное, например, силе тока в колебательном контуре). Тогда положение светящейся точки на экране осциллографа будет в точности соответствовать положению изображающей точки на фазовой плоскости. Если состояние системы будет изменяться, то соответствующим образом будет изменяться и положение светящейся точки на экране, светящаяся точка будет вычерчивать на экране фазовую траекторию (точнее, положительную полутраекторию), соответствующую данному начальному состоянию. Эту траекторию можно сфотографировать или наблюдать визуально, если трубка осциллографа имеет длительное послесвечение экрана.

Если же применяется осциллограф с малым послесвечением экрана трубки, то для получения визуально наблюдаемых фазовых траекторий нужно, чтобы один и тот же кусок фазовой траектории прочерчивался на экране осциллографа многократно и достаточно часто (не реже 10 — 15 раз в секунду). В известных случаях это условие соблюдается само собой: именно, когда мы наблюдаем периодический процесс. Тогда изображающая точка (светящаяся точка на экране) снова и снова возвращается в исходное положение и вычерчивает одну и ту же замкнутую кривую — предельный цикл. Таким образом, при помощи электронного осциллографа можно непосредственно воспроизвести предельный цикл на фазовой плоскости. Но представляет интерес получить на экране осциллографа весь фазовый портрет, который содержит не только предельные циклы, но и все другие фазовые траектории, не соответствующие периодическим движениям. Для этого необходимо обеспечить возвращение изображающей точки в исходное положение при помощи какого-либо специального приспособления. Это приспособление должно состоять в том, чтобы, после того как «представляющая точка» прочертила весь экран или достигла стационарного состояния, она снова вернулась в исходное

положение; для этого необходимо вернуть систему к тем же начальным условиям.

Для примера опишем схему, разработанную В. Бовшеверовым [140] для «зарисовки фазовых портретов» ламповых генераторов. Схема эта приведена на рис. 599. В емкостную ветвь колебательного контура генератора включено небольшое сопротивление R_2 , и падение напряжения на нем, пропорциональное силе тока i в емкостной ветви, подается на одну пару отклоняющих пластин трубки осциллографа.

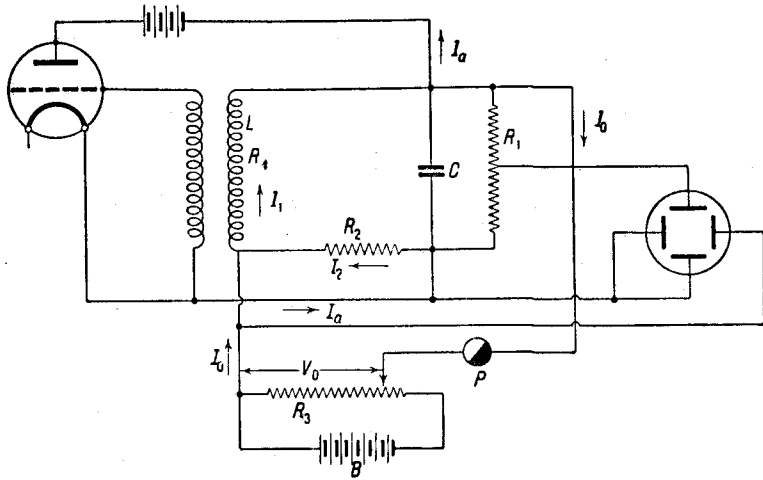


Рис. 599.

На другую пару пластин трубки подается напряжение u на конденсаторе C (через высокоомный потенциометр R_1). Сопротивление R_1 выбирается настолько большим, а сопротивление R_2 — настолько малым, чтобы они не изменяли существенно затухание колебаний в колебательном контуре, т. е. чтобы их влиянием на колебательный контур можно было пренебречь.

Для задания различных начальных условий параллельно колебательному контуру включается низкоомный потенциометр R_3 , к которому присоединена батарея B . Потенциометр присоединен к контуру через выключатель P , который периодически размыкает цепь на небольшие промежутки времени. Пока выключатель замкнут, малое сопротивление R_3 сильно шунтирует контур, так что даже при самой сильной обратной связи он остается аperiodически затухающим. За время замкнутого положения выключателя в контуре успевают установиться постоянный ток и постоянное напряжение на конденсаторе C . Значения токов и напряжений, которые устанавливаются в схеме, зависят от напряжений V_0 на выходе потенциометра R_3 . Эти постоянные значения могут быть определены точно, но особенно

легко найти их приближенные значения, воспользовавшись тем, что сопротивление катушки индуктивности $R_4 \ll R_1$, а также $R_2 \ll R_1$. В силу этих соотношений почти весь ток I_0 от потенциометра течет через катушку индуктивности L . То же самое относится и к анодному току лампы I_a . Поэтому $I_2 \ll I_0$ и сила тока в индуктивной ветви контура $I_1 \approx I_0 + I_a$. С другой стороны, в ветви, состоящей из сопротивлений R_1 и R_2 , почти все напряжение V_0 падает на сопротивлении R_1 и, значит, приближенно напряжение на конденсаторе $U_0 \approx V_0 = R_4(I_0 + I_a)$.

В момент размыкания выключателя P происходит следующее: цепь тока I_0 размыкается, но I_1 — ток в цепи индуктивности — не может измениться скачком. Следовательно, в цепи сопротивления R_2 ток должен измениться скачком от нулевого значения до I_0 , так как только при этом условии ток I_1 не изменится при размыкании выключателя. Напряжение же на конденсаторе не может измениться скачком и останется прежним (примерно равным V_0). Таким образом, в начальный момент времени (непосредственно после размыкания выключателя P) напряжение на конденсаторе будет равно V_0 , а в емкостной ветви будет протекать ток $I_0 = \frac{V_0}{R_4} - I_a$. Так как при выключении P отсоединится малое сопротивление R_3 , шунтирующее контур, то дальше в схеме будет протекать процесс, определяемый начальными условиями, и мы получим на экране осциллографа кусок соответствующей положительной полутраектории лампового генератора. Замыкание выключателя P снова шунтирует колебательный контур малым сопротивлением R_3 , и система весьма быстро приходит в исходное состояние ($u = V_0$, $i = I_0$). При новом размыкании процесс будет опять начинаться из тех же начальных условий и т. д. На экране осциллографа «представляющая» точка практически мгновенно будет возвращаться в исходное положение, при размыкании выключателя P — снова прочерчивать ту же самую фазовую траекторию и т. д. ¹⁾ Изменяя V_0 , мы можем изменять начальные условия и получать изображения на экране осциллографа различных фазовых траекторий.

Описанным способом были сняты «фазовые портреты» лампового генератора, приведенные на рис. 600. Эти фотографии ²⁾ соответствуют четырем различным значениям обратной связи в ламповом генераторе при жестком режиме. На рис. 601 эти значения обратной связи обозначены соответствующими буквами. Рис. 600, а дает

¹⁾ Для периодически повторяющихся замыканий и размыканий цепи потенциометра R_4 можно применить круговой выключатель, вращающийся равномерно при помощи электромотора, или же быстродействующее (например, поляризованное) реле, обмотка которого питается переменным напряжением подходящей (звуковой) частоты.

²⁾ На всех приведенных фотографиях движение «представляющей точки» происходит против часовой стрелки.

фазовый портрет в отсутствии обратной связи — обычную картину для колебательной системы со сравнительно большим затуханием.

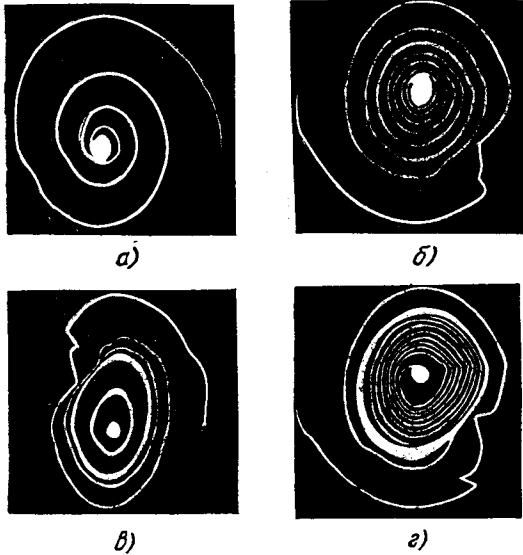


Рис. 600.

Рис. 600, б соответствует наличию обратной связи, еще не достигающей критического значения. Фазовый портрет дает ту же картину, характерную для осциллятора с меньшим, чем в первом случае, затуханием

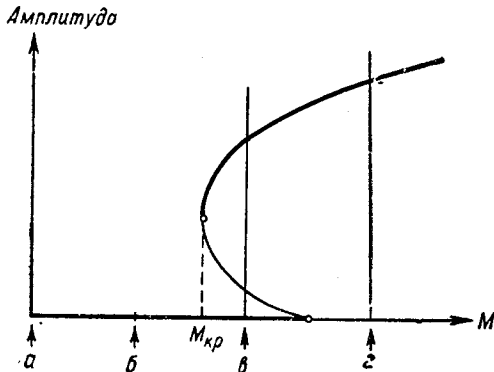


Рис. 601.

колебаний (затухание меньше из-за наличия обратной связи). Рис. 600, в дает фазовый портрет лампового генератора с обратной связью,

превышающей критическую, но еще не дающей самовозбуждения. Фазовый портрет содержит два предельных цикла, причем внешний цикл устойчив, а внутренний неустойчив. Для того чтобы сфотографировать неустойчивый предельный цикл, поступали следующим образом. Начальные условия подбирались так, чтобы они соответствовали некоторой точке, лежащей как раз на неустойчивом предельном цикле. Так как у самого предельного цикла фазовые траектории отходят от него очень медленно, то за время одного движения (за время разомкнутого выключателя P) представляющая точка не успевает сколько-нибудь заметно отойти от предельного цикла.

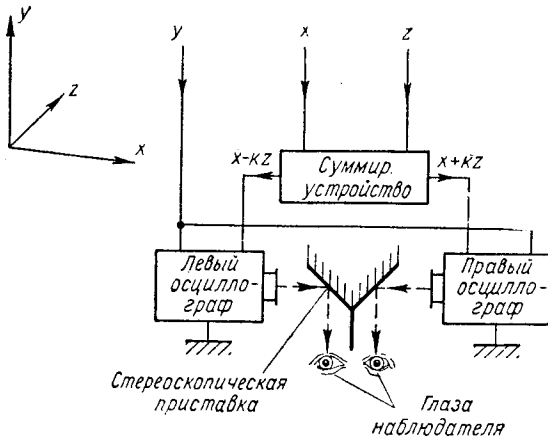


Рис. 602.

В конечном счете на фотографии получается изображение неустойчивого предельного цикла. Необходимо иметь в виду, что фотография на рис. 600, в (так же как и следующая, на рис. 600, г) представляет собой, в сущности, комбинацию из двух фотографий, соответствующих двум различным начальным состояниям генератора: одному, лежащему вне устойчивого предельного цикла, и другому, лежащему как раз на неустойчивом предельном цикле. Рис. 600, г соответствует сильной обратной связи, при которой имеет место самовозбуждение генератора и на фазовой плоскости существует только один, и притом устойчивый, предельный цикл. Этот портрет, как и предыдущий, получен двукратным фотографированием, т. е. фотографированием двух фазовых траекторий, одна из которых начинается вне предельного цикла, а другая — внутри него.

Фазовые траектории в трехмерном фазовом пространстве можно наблюдать при помощи двух осциллографов и стереоскопической приставки. Блок-схема такой установки изображена на рис. 602. Напряжения, пропорциональные трем координатам x , y , z фазового пространства, подаются с исследуемой системы на простое суммирующее

устройство и на осциллографы; напряжение, пропорциональное координате y , подается непосредственно на оба осциллографа — на отклоняющие по вертикали пластины трубок осциллографов, а напряжения, пропорциональные координатам x и z , подаются на суммирующее устройство, на одном выходе которого получается напряжение, пропорциональное $x - kz$, а на другом — напряжение, пропорциональное $x + kz$. Напряжения с выходов суммирующего устройства подаются соответственно на отклоняющие по горизонтали пластины трубок левого и правого осциллографов. В итоге на экранах осциллографов получаются изображения фазовых траекторий в проекциях для левого и правого глаза, которые при одновременном наблюдении через стереоскопическую приставку дают фазовые траектории, видимые (из-за стереоэффекта) в пространстве. Для многократно повторяемого задания одних и тех же начальных условий в исследуемой системе применяется прерыватель, аналогичный примененному в изложенной выше работе В. Бовшеверова¹⁾.

ДОПОЛНЕНИЕ III

НЕКОТОРЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2z.$$

$$\sin^3 z = \frac{3}{4} \sin z - \frac{1}{4} \sin 3z.$$

$$\sin^4 z = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2z + \frac{1}{8} \cos 4z.$$

$$\sin^5 z = \frac{5}{8} \sin z - \frac{5}{16} \sin 3z + \frac{1}{16} \sin 5z.$$

$$\sin^6 z = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2z + \frac{3}{16} \cos 4z - \frac{1}{32} \cos 6z.$$

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2z.$$

$$\cos^3 z = \frac{3}{4} \cos z + \frac{1}{4} \cos 3z.$$

$$\cos^4 z = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2z + \frac{1}{8} \cos 4z.$$

¹⁾ Подобная установка была разработана на кафедре теории колебаний Горьковского университета (студентом-дипломником Г. Г. Денисовым) в 1952 г. Заметим, что примененное линейное преобразование координат не учитывает уменьшения угловых размеров объектов при их удалении от наблюдателя; поэтому в этой установке фазовые траектории наблюдаются с некоторым искажением перспективы.

$$\cos^5 z = \frac{5}{8} \cos z + \frac{5}{16} \cos 3z + \frac{1}{16} \cos 5z.$$

$$\cos^6 z = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2z + \frac{3}{16} \cos 4z + \frac{1}{32} \cos 6z.$$

$$\sin^2 z \cos z = \frac{1}{4} \cos z - \frac{1}{4} \cos 3z.$$

$$\cos^3 z \sin z = \frac{1}{4} \sin z + \frac{1}{4} \sin 3z.$$

(Выражения типа $\cos^2 z \sin z$, $\sin^2 z \cos z$ могут быть получены из вышеприведенных формул для $\sin^3 z$ и $\cos^3 z$ простым дифференцированием.)

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Приведем также рекуррентную формулу для вычисления средних значений $\sin^m z$ и $\cos^m z$. Пусть

$$A_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^m z \, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^m z \, dz;$$

тогда

$$A_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} A_m.$$

Так как $A_0 = 1$ и $A_1 = 0$, то $A_3 = A_5 = A_7 = \dots = 0$

и

$$A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_4 = \frac{3}{8}, \quad A_6 = \frac{5}{16}, \quad A_8 = \frac{35}{128}, \dots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А. Введение в динамику автоматического регулирования двигателей. Машгиз, 1950.
2. Айзерман М. А. Физические основы применения методов малого параметра к решению нелинейных задач теории автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика **14**, 597 (1953).
3. Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний. Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 41. Изд. АН СССР, 1956.
4. Андронов А. А. Математические проблемы теории автоколебаний. Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 85. Изд. АН СССР, 1956.
5. Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний. Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 32. Изд. АН СССР, 1956.
6. Андронов А. А., Витт А. А. Разрывные периодические решения и теория мультивибратора Абрагама и Блоха. ДАН СССР **8**, 189 (1930); Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 65. Изд. АН СССР, 1956.
7. Андронов А. А., Витт А. А. К теории захватывания Ван-дер-Поля. Arch. f. Elektrotech. **24**, 99 (1930); Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 51. Изд. АН СССР, 1956.
8. Андронов А. А., Витт А. А. Об устойчивости по Ляпунову. ЖЭТФ **3**, 373 (1933); Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 140. Изд. АН СССР, 1956.
9. Андронов А. А., Вознесенский И. Н. О работах Д. К. Максвелла, И. А. Вышнеградского и А. Стодоло в области теории регулирования машин. Сб. «Д. К. Максвелл, И. А. Вышнеградский, А. Стодола. Теория автоматического регулирования (классики науки)». Изд. АН СССР, 1949; Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 490. Изд. АН СССР, 1956.
10. Андронов А. А., Леонтович Е. А. К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории. ДАН СССР **21**, 427 (1938); Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 217. Изд. АН СССР, 1956.
11. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра. Уч. зап. ГГУ, стр. 3 (1939); Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 188. Изд. АН СССР, 1956.
12. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла. ДАН СССР **99**, 885 (1954).
13. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла. Матем. сб. **40**, 179 (1956).
14. Андронов А. А., Любина А. Г. Применение теории Пуанкаре о «точках бифуркаций» и «смене устойчивости» к простейшим автоколебательным системам. ЖЭТФ **5**, вып. 3—4 (1935); Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 125. Изд. АН СССР, 1956.
15. Андронов А. А., Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Новые исследования в области нелинейных колебаний. Радиоиздат, 1936; Physics of the USSR **11**, № 2—3, 1 (1935).

16. Андронов А. А., Неймарк Ю. И. О движениях идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель догадилевских часов. ДАН СССР **51**, 17 (1946); Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 313. Изд. АН СССР, 1956.
17. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы. ДАН СССР **14**, 247 (1937); Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 181. Изд. АН СССР, 1956.
18. Баркгаузен Г. Г. Катодные лампы, т. II, 1928.
19. Баутин Н. Н. К теории синхронизации. ЖТФ **9**, 510 (1939).
20. Баутин Н. Н. Об одном случае негармонических колебаний. Уч. зап. ГГУ **12**, 231 (1939).
21. Баутин Н. Н. Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл. ЖТФ **9**, 601 (1939).
22. Баутин Н. Н. О движении идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель часов Галилея—Гюйгенса. ДАН СССР **61**, 17 (1948).
23. Баутин Н. Н. О задаче Мандельштама в теории часов. ДАН СССР **65**, 279 (1949).
24. Баутин Н. Н. Динамическая модель хронометрового хода. Инж. сб. АН СССР **12**, 3 (1952).
25. Баутин Н. Н. Динамическая модель часового хода без собственного периода. Инж. сб. АН СССР **16**, 3 (1953).
26. Баутин Н. Н. О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений. ПММ **18**, 128 (1954).
27. Баутин Н. Н. Динамическая теория часовых ходов без конструктивной остановки ходового колеса. Инж. сб. АН СССР **21**, 3 (1955).
28. Баутин Н. Н. Динамические модели свободных часовых ходов. Сб. памяти А. А. Андропова, стр. 109. Изд. АН СССР, 1955.
29. Безменов А. Е. Методы Баркгаузена—Мёллера с точки зрения строгой теории автоколебаний. ЖТФ **6**, 467 (1936).
30. Безменов А. Е. Теория диаграмм срыва Рукопа. Электросвязь, № 4, стр. 13 (1938).
31. Белюстина Л. Н. Определение качественной структуры разбиения на траектории фазовой плоскости грубой системы. (Готовится к печати.)
32. Бендриков Г. А., Горелик Г. С. Применение Брауновской трубки к исследованию движения изображающей точки на плоскости переменных Ван-дер-Поля. ЖТФ **5**, 620 (1935).
33. Бессонов Л. А. Электрические цепи со сталью. Госэнергоиздат, 1948.
34. Биркгоф Д. Д. Динамические системы. М.—Л., 1941.
35. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. АН УССР, 1945.
36. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1955.
37. Бремзен А. С., Файнберг И. С. Анализ работы двух связанных релаксационных генераторов. ЖТФ **11**, 959 (1941).
38. Булгаков Б. В. О применении метода Пуанкаре к свободным псевдолинейным колебательным системам. ПММ **6**, 263 (1942).
39. Булгаков Б. В. О применении метода Ван-дер-Поля к псевдолинейным колебаниям системы с многими степенями свободы. ПММ **6**, 395 (1942).
40. Булгаков Б. В. Автоколебания регулируемых систем. ПММ **7**, 97 (1943).
41. Булгаков Б. В. Колебания. Гостехиздат, 1954.
42. Васильева А. Б. О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры. Матем. сб. **31** (73), 587 (1952).
43. Виткевич В. В. «Жесткий» режим самовозбуждения релаксационного генератора (мультивибратора). ЖТФ **16**, вып. 3, 309 (1946).

44. Власов Н. П. Автоколебательная система с однофазным асинхронным мотором. ЖТФ 5, 641 (1935).
45. Гаузе Г. Ф., Витт А. А. О периодических колебаниях численности популяции. Изд. АН СССР, сер. 7, 1551 (1934).
46. Гольдфарб Л. С. О некоторых нелинейностях в системах регулирования. Автоматика и телемеханика 8, 347 (1947).
47. Гольдфарб Л. С. Метод исследования нелинейных систем регулирования, основанный на принципе гармонического баланса. Сб. «Теория автоматического регулирования». Машгиз, 1951.
48. Горелик Г., Кузовкин В., Секерская В. Исследование прерывистой генерации. Техника радио и слабых токов 11, 629 (1932).
49. Градштейн И. С. Нелинейные дифференциальные уравнения с малыми множителями при некоторых производных. ДАН СССР 63, 789 (1949).
50. Градштейн И. С. Дифференциальные уравнения, в которые множителями входят различные степени малого параметра. ДАН СССР 82, 5 (1952).
51. Грановский В. Л., Электрический ток в газе, т. 1. Гостехиздат, 1952.
52. Дородницын А. А. Асимптотическое решение уравнений Ван-дер-Поля. ПММ 11, 313 (1947).
53. Евтянов С. И. Теория автогенератора с гридликом. Электросвязь, № 9, 66 (1940).
54. Жевакин С. А. К теории звездной переменности. ДАН СССР 99, 217 (1954).
55. Жевакин С. А. О сдвигах фаз между колебаниями блеска и колебаниями лучевой скорости переменных звезд. ДАН СССР 99, 353 (1954).
56. Жевакин С. А. Об автоколебаниях переменных звезд «большой последовательности». Сб. памяти А. А. Андреева, стр. 629. Изд. АН СССР, 1955.
57. Железцов Н. А. Само модуляция автоколебаний лампового генератора с автоматическим смещением в цепи катода. ЖТФ 13, 495 (1948).
58. Железцов Н. А. К теории симметричного мультивибратора. ЖТФ 20, 778 (1950).
59. Железцов Н. А. К теории лампового генератора с двухзвенной RC-цепочкой. Труды Горьковского физико-технического института и радиофизического факультета ГГУ 35, 220, Москва — Горький, 1957.
60. Железцов Н. А. К теории разрывных колебаний в системах второго порядка. Радиопизика 1, № 1 (1958).
61. Железцов Н. А., Родыгин Л. В. К теории симметричного мультивибратора. ДАН СССР 81, 391 (1951).
62. Железцов Н. А., Фейгин М. И. О режимах работы симметричного мультивибратора. Радиотехника и электроника 2, 751 (1957).
63. Жуковский Н. Е. О движении маятника с трением в точке подвеса. Собр. соч., т. 1, стр. 290. Гостехиздат, 1948.
64. Жуковский Н. Е. О парении птиц. Труды отделения физич. наук Общества любителей естествознания 4, вып. 2, 29 (1891); Собр. соч., т. 4, стр. 5. Гостехиздат, 1949.
65. Ицхоки Я. С. Импульсная техника. Соврадио, 1949.
66. Казакевич В. В. О приближенном решении уравнения Ван-дер-Поля. ДАН СССР 49, 424 (1945).
67. Казакевич В. В. Многократные системы и простейшие динамические модели часов. ДАН СССР 74, 665 (1950).
68. Кайдановский Н. Л. Природа механических автоколебаний, возникающих при сухом трении. ЖТФ 19, вып. 9 (1949).
69. Кайдановский Н. Л., Хайкин С. Э. Механические релаксационные колебания. ЖТФ 3, вып. 1 (1933).
70. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ИЛ, 1950.

71. Капчинский И. М. Методы теории колебаний в радиотехнике. Госэнергоиздат, 1954.
72. Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле. Гостехиздат, 1948.
73. Кобзарев Ю. Б. Устойчивость частоты автоколебательной системы. Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям», т. 1, стр. 5, Москва, 1933.
74. Кобзарев Ю. Б. О квазилинейном методе трактовки явлений в ламповом генераторе (почти синусоидальных колебаний). ЖТФ 5, 216 (1935).
75. Колмогоров А. Н. Аналитические методы теории вероятностей. УМН, вып. 5, стр. 5 (1938).
76. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Изд. АН СССР, 1933.
77. Крылов А. Н. О применении способа последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения. Изв. АН СССР, стр. 1 (1933).
78. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Новые методы нелинейной механики в их применении к изучению работы электронных генераторов, ч. 1. ОНТИ, 1934.
79. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд. АН УССР, 1937.
80. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории. ДАН СССР 14, 251 (1937).
81. Леонтович Е. А., Майер А. Г. Общая качественная теория. Дополнение к главам 5 и 6 в книге А. Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями». Гостехиздат, 1947.
82. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории. ДАН СССР 103, 557 (1955).
83. Леонтович М. А. Статистическая физика. Гостехиздат, 1944.
84. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892; Гостехиздат, 1950.
85. Майер А. Г. Исследование уравнений Релея и Ван-дер-Поля. Изв. ГГУ, вып. 2 (1936).
86. Майер А. Г. К теории связанных колебаний двух самовозбуждающихся генераторов. Уч. зап. ГГУ, вып. 2, стр. 3 (1935).
87. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1949.
88. Мандельштам Л. И. Вопросы электрических колебательных систем и радиотехники. Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям», т. 1, стр. 5, ГТТИ, 1933.
89. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Витт А. А., Горелик Г. С., Хайкин С. Э. Новые исследования нелинейных колебаний. Радиоиздат, 1936.
90. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений. ЖЭТФ 4, 117 (1934).
91. Меерович Л. А., Зеличенко Л. Г. Импульсная техника. Сов. радио, М., 1953.
92. Мигулин В. В., Левитас Д. М. О работе блокинг-генератора. ЖТФ 17, вып. 10 (1947).
93. Мищенко Е. Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. Изв. АН СССР (сер. матем.) 21, 627 (1957).
94. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным. ДАН СССР 102, 889 (1955).
95. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Л., 1949.

96. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.
97. Нетушил А. В. К вопросу о «скачках» в нелинейных системах. ЖТФ **15**, 873 (1945).
98. Никольский Г. Н. К вопросу об автоматической устойчивости корабля на заданном курсе. Труды Центральной лаборатории проводной связи, вып. 1 (1934).
99. Основы автоматического регулирования. Сб. под ред. Солодовникова В. В. Машгиз, 1954.
100. Папалекси Н. Д. О некоторых современных проблемах в теории колебаний. УФН **11**, 185 (1931).
101. Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Горелик Г. С., Рытов С. М. Некоторые исследования в области нелинейных колебаний, проведенные в СССР, начиная с 1935 г. УФН **33**, 335 (1947).
102. Петров В. В., Уланов Г. М. Теория двух простейших релейных систем авторегулирования. Автоматика и телемеханика **11**, 289 (1950).
103. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1952.
104. Б. Ван-дер-Поль. Нелинейная теория электрических колебаний. Связьтехиздат, 1935.
105. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Изв. АН СССР (сер. матем.) **21**, 605 (1957).
106. Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ **3**, 165 (1933); Собрание трудов А. А. Андропова, стр. 142. Изд. АН СССР, 1956.
107. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ **4**, 883 (1934).
108. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, 1947.
109. Ржевкин С. Н., Введенский Б. А. Прерывистый триодный генератор, его теория и применения. Телегр. и телеф. без проводов, № 11, 67 (1921).
110. Рунге К. Графические методы математических вычислений. ГТТИ, 1932.
111. Рытов С. М. Развитие теории нелинейных колебаний в СССР. Радиотехника и электроника **2**, 1435 (1957).
112. Скибарко А. П., Стрелков С. П. Качественные исследования процессов в генераторе по сложной схеме. ЖТФ **4**, 158 (1938).
113. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1953.
114. Стокер Д. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. ИЛ, 1952.
115. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Гостехиздат, 1950.
116. Стрелков С. П. Маятник Фроуда. ЖТФ **3**, 563 (1933).
117. Стретт Д. В. (Релей). Теория звука, т. 1, стр. 235. Гостехиздат, 1955.
118. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. Гостехиздат, 1952.
119. Тихонов А. М. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Магем. сб. **31** (73), 575 (1952).
120. Толле М. Регулирование силовых машин. Госэнергоиздат, 1951.
121. Фельдбаум А. А. Введение в теорию нелинейных цепей. Госэнергоиздат, 1948.
122. Фельдбаум А. А. Простейшие релейные системы автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика **10**, 249 (1949).
123. Франк-Каменецкий Д. А. Механизм двухстадийного воспламенения. ЖФХ **14**, 30 (1940).
124. Франк-Каменецкий Д. А. Проблема автоколебаний в теории переменных звезд. Сб. памяти А. А. Андропова, стр. 691. Изд. АН СССР, 1955.
125. Хайкин С. Э. Непрерывные и разрывные колебания. ЖПФ **7**, вып. 6, 21 (1930).

126. Хайкин С. Э. Автоколебательные системы. Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям», т. 1, стр. 72. ГТТИ, 1933.
127. Хайкин С. Э. О влиянии малых параметров на характер стационарных состояний динамической системы. ЖТФ 5, 1389 (1935).
128. Шишелов Л. П. Механика часового механизма, ч. 1, 2, 3, Л., 1933—1937.
129. Эльсгольц Л. Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Гос-техиздат, 1954.
130. Юзвинский В. Об автоколебаниях системы, аналогичной язычку гармонии и кларнета. ЖТФ 4, 1295 (1934).
131. Abraham N. et Bloch E. Mesures en valeur absolue des periodes des oscillations electriques de haute frequence, Annales de Physique, Ser. 9, 12, 237 (1919).
132. Airy C. On the Regulator of the Clock-work for effecting Uniform Movement of Equatoreales. Mem. Roy. Astr. Soc., London 11, 249 (1840); 20, 115 (1850-51).
133. Andrade J. L'Horlogerie et Chronometrie. Paris, 1925.
134. Appleton E. and Greaves W. On the Solution of the Representative Differential Equation of the Triode Oscillator. Phil. Mag., Ser. 6, 45 (1923).
135. Appleton E. and van der Pol B. On a type of oscillation — hysteresis in a simple triode generator. Phil. Mag., Ser. 6, 43, 177 (1922).
136. Barkhausen H. Die Vakuumröhre und ihre technische Anwendung. Jahrbuch d. drahtl. Telegraphie 14, 27 (1919); 16, 82 (1920).
137. Bendixson I. Sur les courbes definies par des equations differentielles, Acta Math. 24, 1 (1901).
138. Bieberbach L. Theorie der Differentialgleichungen. Berlin, J. Springer, 1930.
139. Birkhoff G. Quelques theoremes sur les mouvements des systemes dynamiques. Bull. Soc. Math. de France, 40 (1912).
140. Bowschewerow V. Experimentelle Untersuchung des Phasenraumes autoschwingender Systeme. Tech. Phys. of the USSR 11, 43 (1935).
141. Chaikin S., Lochakov L. Oscillations «discontinues» dans un circuit a capacite et self-induction. Tech. Phys. of the USSR 11, 181 (1935).
142. Cholodenko L. Zur Theorie der Frühaufschens Kipp-Schaltung. Tech. Phys. of the USSR 2, 552 (1935).
143. Le Corbeiller P. Les systemes auto-entreteneues et les oscillations de relaxation. Paris, Hermann, 1931.
144. Le Corbeiller P. La mecanisme de la production des oscillations. Annales des Postes, Telegraphes et Telephones 21, 697 (1932).
145. Debaggis L. Contributions of the Theory of Nonlinear Oscillations. Princeton, 1952; русск. перевод: УМН 10, вып. 4, 66 (1955).
146. Decaux et Corbeiller P. Sur une systeme electrique autoentreteneues, utilisant un tube a neon. Comp. Rend. 193, 723 (1931).
147. Dulac H. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. de France 51 (1923).
148. Dulac H. Recherche des cycles limites. Comp. Rend. 204, 23 (1937).
149. Fatou P. Sur le mouvement d'un systeme soumis a des forces a courte periode. Bull. Soc. Math. de France 56, 98 (1928).
150. Friedländer E. Steuerungsvorgänge durch «Feldzerfall» und Kipp-schwingungen in Elektronenröhren, Zts. f. tech. Phys. 7, 481 (1926).
151. Friedländer E. Über Stabilitätsbedingungen und ihre Abhängigkeit von Steuerorganen und Energie-Speichern. Phys. Zts. 27, 361 (1926).
152. Friedländer E. Ueber Kippschwingungen, insbesondere bei Elektronenröhren. Arch. f. Elektrotech. 17, 1, 103 (1927).
153. Friedländer E. Einige Berichtungen und Ergänzungen zum Problem der Kippschwingungen. Arch. f. Elektrotech. 20, 158 (1928).
154. Frommer M. Singuläre Punkte. Math. Ann. 99 (1928).
155. Frühauf G. Eine neue Schaltung zur Erzeugung von Schwingungen mit linearem Spannungsverlauf. Arch. f. Elektrotech. 21, 471 (1929).

156. Haag J. Sur les oscillations auto-entretenues. *Comp. Rend.* **199**, 906 (1934).
157. Haag J. Sur l'etude asymptotiques des oscillations de relaxation. *Comp. Rend.* **292**, 102 (1936).
158. Haag J. Etude asymptotique des oscillations de relaxation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **60** (1943).
159. Haag J. Exemples concrets d'etude asymptotique d'oscillations de relaxation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **61** (1944).
160. Den Hartog. *Mechanical Vibrations*. Mc Graw-Hill Comp., New York and London, 1947.
161. Heegner K. Ueber Schwingungserzeugung mittels eines Elektronenröhrensystem, welche Selbstinduction nicht erhalten. *Zts. f. Hochfrequenztechnik* **29**, 151 (1927).
162. Heegner K. und Watanabe I. Ueber Schwingungserzeugung mittels eines Elektronenröhrensystem, bei welchem die Kapazität von untergeordneter Bedeutung ist. *Zts. f. Hochfrequenztechnik* **34**, 49 (1929).
163. Hopf E. Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegung dynamischen Systeme. *Math. Ann.* **103**, Heft 4—5.
164. Hull. Das Dynatron, ein Vakuumröhre mit der Eigenschaft des negativen elektrischen Widerstandes. *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie* **14**, 47, 157 (1919).
165. Iobst G. Drei Beiträge über Schwingungserzeugung. *Telefunken Zeitung*, № 47, 11 (1927).
166. Ikonnikov E. On the dynamics of symmetrical flight of an aeroplane. *Tech. Phys. of the USSR* **4**, № 6, 1 (1937).
167. Kamke E. *Differentialgleichungen Reeler Funktionen*. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1930.
168. Koenigs. *Recherches sur les substitutions uniformes*. *Bulletin des Sciences mathematiques*, 1883.
169. Koenigs. *Recherches sur les equations fuctionelles*. *Annales de l'Ecole Norm.*, 1884.
170. Krüger. Mechanische Schwingungssysteme mit Stossanregung. *Annalen der Physik* **70**, 291 (1923).
171. Lanchester F. *Aerodnetics*, London, 1908.
172. Leaute H. Sur les oscillations a longues periodes dans les machines actinnees par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prevenir ces oscillations. *Jour. de l'Ecole Polytechnique* **55**, 1 (1885).
173. Levinson N. Perturbations of discontinuous solutions of nonlinear differential equations. *Acta Math.* **82**, 71 (1951).
174. Lienard A. Etude des oscillations entretenues. *Revue Generale d'Electricite* **23**, 901, 946 (1928).
175. Lotka. *Elements of Physical Biology*. Baltimore, 1925.
176. Mayer A. On the theory of Coupled Vibrations of Two Self-Excited Generators. *Tech. Phys. of the USSR* **2**, № 5, 1 (1935).
177. Mayer A. A Contribution to the Theory of Forced Oscillations in a Generator with Two Degrees of Freedom. *Tech. Phys. of the USSR* **3**, № 12, 1 (1936).
178. Möller H. Quantitative Behandlung der Schwingungen im Röhrengenerator mit Hilfe der Schwingkennlinien. *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie* **14**, 326 (1919).
179. Ollendorf F. und Peters W. Schwingungsstabilität Parallelarbeiten der Synchronmaschinen. *Wissenschaftlichen Veröffentlichungen aus dem Simens-Konzern* **5** (1926).
180. Papalexii N. *Theorie des Elektronenröhrengenerator*. Odessa, 1922.
181. Poincare H. *Oeuvres*, Vol. 1. Paris, Gauthier-Villars, 1928.
182. Poincare H. Sur l'equilibre d'une masse fluide animee d'un mouvement de rotation. *Acta Mathematica* **7** (1885).
183. Poincare H. *Figures d'equilibre d'une masse fluide*. Paris, 1903.

184. Poincare H. Sur le probleme de trois corps et les equations de la dynamiques. *Acta Mathematica* **13** (1890).
185. Poincare H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. Paris, Gauthier-Villars, 1892 — 1899.
186. Van der Pol B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibration. *Radio Review* **1**, 701 (1920).
187. Van der Pol B. An Oscillation-Hysteresis in a Triode-Generator. *Phil. Mag.* **43**, 177 (1922).
188. Van der Pol B. On relaxation oscillation. *Phil. Mag.* (7) **2**, 978 (1926).
189. Van der Pol B. Ueber Relaxationsschwingungen. *Zts. f. Hochfrequenztechnik* **28**, 178 (1926); **29**, 114 (1927).
190. Van der Pol B. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. *Phil. Mag.* (7) **3**, 65 (1927).
191. Van der Pol B. Oscillations sinusoidales et de relaxation. *L'Onde electrique*, 1930.
192. Van der Pol B. et van der Mark M. Le battement du coeur considere comme oscillation de relaxation et un modele electrique de coeur. *L'Onde electrique* **7**, 365 (1928).
193. Robb A. On a graphical solution of a class of differential equation occurring in wireless telegraphy. *Phil. Mag.* (6) **43**, 700 (1922).
194. Rukop H. Reissdiagramme von Senderröhren, *Telefunken Zeitung* **6**, Juni 1923, 27; September 1923, 20.
195. Rukop H. Reissdiagramme von Senderröhren. *Zts. f. techn. Physik* **5**, 260, 299, 387, 441, 569 (1924).
196. La Salle J. Relaxation oscillations. *Quart. of Appl. Math.* **7**, 1 (1949).
197. Schunk H., Zenneck I. Ueber Schwingungskreise mit Eisenkernspulen. *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie* **19**, 170 (1922).
198. Tricomi F. Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in electrotechnica. *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*, Ser. 11, **2**, 1 (1933).
199. Volterra V. Leçons sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie. Paris, Gauthier-Villars, 1931.
200. Wagner K. Der Lichtbogen als Wechselstromerzeuger. Leipzig, Verl. S. Hirzel, 1910.
201. Webb H., Becker G. Theory of Multivibrator. *Journ. Appl. Physics* **15**, 825 (1944).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 188, 229, 328
—, близкие к синусоидальным 231, 650
— жесткий режим установления 194, 619, 684, 723, 883
—, мягкий режим установления 194, 679, 684, 721, 883
— разрывные 282, 727
Авторезонанс 194
Авторулевой двухпозиционный 562
— с жесткой обратной связью 564, 574
— с запаздыванием временным 580, 591
— с запаздыванием пространственным 580, 581
— с коррекцией по скорости 564
Амплитуда 37
- Баланса энергии диаграмма 110
Бендиксона критерий 345
— для цилиндра 483
Бифуркационная диаграмма 126, 254, 720
Бифуркационное значение параметра 126, 253, 466
Бифуркация в автоколебательной системе 466, 717, 719
Блокинг-генератор 824
—, восстановление емкостное 839
—, — индуктивное 840
- Ван-дер-Поля метод 653
— переменные 654
— уравнение 385
- Гамильтона уравнения 143
— функция 143
Генератор динатронный 98, 302, 789
— ламповый с двухзвенной RC -цепью 388, 539, 686
— с индуктивной обратной связью 85, 182, 675, 703, 707
- Генератор ламповый со смещенной Γ -характеристикой 529
— с сеточными токами 714
— с симметричной характеристикой лампы 521
— с характеристикой лампы без насыщения 508, 709
— с Γ -характеристикой лампы 182, 708
— релаксационный 272
- Движение «быстрое» 747
— лимитационное 97, 119
— лимитационно-убегающее 120
— «медленное» 748
— периодическое 43, 112, 267
— стационарное 29
— убегающее 117
Декремент затухания логарифмический 50
Диссипации энергии условие 169
Дуга электрическая 252, 317, 736
Дюлака критерий 346, 375
— для цилиндра 483, 501
- Емкости паразитные 282
- Жуковского задача 497
- Изоклина 42, 57
Изоклин метод 56, 384
Инвариант интегральный 156
Инкремент логарифмический 89
- Кенигса теорема 333
Клирфактор 193
Колебания, затухающие апериодические 59
—, — осцилляторно 49
— периодические 43, 48, 111, 267
— разрывные 285, 551, 727
— механические 780
— релаксационные 272

- Коши теорема 892
 Кривая интегральная 40, 66, 271, 291
 — контактная 377
 Кулона закон трения 175
- Лагранжа теорема** 116
 — уравнения 141, 168
 — функция 141
 Лагранжа — Максвелла уравнения 142
 Ламерея диаграмма 187, 331
 Лампа неоновая 272
 Лежен-Дирихле теорема 116
 Линия особая (динамической системы) 396
 — фазовая 69, 245, 269
 Ляпунова теорема 309
 — — обратная 116
- Машина паровая** 626
 Маятник (при больших отклонениях) 122
 Множество предельных точек 401
 — связанное, замкнутое 400
 Множитель интегрирующий 154
 Модель динамическая 18
 — математическая 15
 Мотор однофазный асинхронный 261
 Мультивибратор симметричный 846
 — с индуктивностью в цепи анода 804
 — с одной RC -цепью (звеном) 279, 741, 771
 — с сеточными токами 855
- Осциллятор гармонический** 35
 — с трением квадратичным 174, 621
 — — — кулоновским (сухим) 175
 — — — линейным 48, 170
 Отрезок без контакта 328, 402
- Параметры паразитные** 282, 733
 Период условный 50
 Планера полет 497
 Плоскость фазовая 38
 Поверхность фазовая многолистная 215, 582, 594, 604
 — — цилиндрическая 122, 480, 626
 Полутраектория орбитно-неустойчивая (особая) 413
 — орбитно-устойчивая (не особая) 413
 — положительная, отрицательная 397
 Преобразование точечное 186, 328
 — — , параметрическое представление 505
 Пространство фазовое, функциональное 592
 Пуанкаре индексы 338
 — метод 689
- Пуанкаре сфера 366
 Пуфффа уравнения 155, 160
- Регулятор температуры двухпозиционный** 268
 — фрикционный 263
 Режим скользящий 569, 576, 591
 Реле ламповое 257, 347
 Рунге метод 394
- Седло** 96, 99, 113
 Сепаратриса 118, 419
 Сила обобщенная 169
 Система автоколебательная 188, 229, 328
 — автономная 30
 — грубая 31, 427, 430
 — динамическая 18
 — диссипативная 169
 — измененная 428
 — консервативная 103, 148, 151
 — кусочно-консервативная 622
 — кусочно-линейная 504
 — линейная 35
 — релейная 599
 Скачка условие 74, 282, 765
 Скачки консервативные 79
 — неконсервативные 80
 Скорость фазовая 38, 42
 Состояние равновесия 43, 315
 — — грубое 315, 431
 — — , устойчивость 43, 246, 315
 Спускное устройство часов 196, 213
- Стабильность хода часов 228
 Степеней свободы число 20
 Схема с неоновой лампой 271, 787
 — «универсальная» 303, 818
- Топологически инвариантные свойства** 412
 Точка изображающая (представляющая) 38
 — неподвижная (точечного преобразования) 186, 331
 — — , устойчивость 332
 — особая 41
 — предельная полутраектории 398
 — — траектории 398
 — простая, сложная 316
 Траектория фазовая 38, 66, 289
 — — орбитно-неустойчивая (особая) 413, 415
 — — орбитно-устойчивая (не особая) 413, 415
 — — предельная 400
 — — самопредельная 400

- Траектория фазовая целая 38, 398
 Трение «жидкое», вязкое, линейное 26, 170
 — квадратичное 174, 621
 — «отрицательное» 82
 — «сухое», кулоновское 26, 27, 176
- Узел** 66
 — неустойчивый 89, 295
 — устойчивый 66, 295
- Устойчивость абсолютная 59, 612
 — движения периодического (по Ляпунову) 149, 324
 — орбитная 151, 325
 — состояния равновесия (по Ляпунову) 45, 247, 315
 — точки неподвижной 331
- Фаза колебаний начальная** 37
Фокус неустойчивый 88, 299
 — сложный 437
 — устойчивый 58, 299
- Фруда—Жуковского маятник 84
 Фрюгауфа схема 792
 Фугоида 50J
- Функция последования 186, 328, 329
 — соответствия 505
- Центр** 41, 111, 300
Цикл без контакта 357, 374
 — предельный 185, 324
 — — грубый 441
 — — — полуустойчивый, сложный 441
 — — — , устойчивости условие 326, 335
 — — — , устойчивость орбитная 325
 — — — , — по Ляпунову 326
 — — — устойчивый, неустойчивый 326, 473
- Цилиндр фазовый** 122, 170, 480, 626
 — — , развертка 122, 170
- Частота круговая** 37
Часы 196, 213
- Энергии интеграл** 134, 142
Энергия системы 103, 108
- Ячейка (топологической структуры разбиения на траектории)** 421
 — односвязная, двусвязная 424

*Александр Александрович Андронов,
Александр Адольфович Витт,
Семен Эммануилович Хайкин*
Теория колебаний

Редактор *В. А. Григорова*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов*

Корректор *И. С. Цветкова.*

Сдано в набор 9/VI 1953 г. Подписано
к печати 9/XII 1953 г. Бумага
60 × 92¹/₁₆. Физ. печ. л. 57,25,
Условн. печ. л. 57,25. Уч.-изд. л. 58,93.
Тираж 20000 экз. Т-11573.
Цена книги 31 р. 50 к. Заказ № 1923.

Государственное издательство
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет народного
хозяйства. Управление полиграфиче-
ской промышленности. Типогра-
фия № 1 «Печатный Двор» имени
А. М. Горького, Ленинград,
Гатчинская, 26.