СПРАВОЧНИК ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

СПРАВОЧНИК ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ С ФОРМУЛАМИ, ГРАФИКАМИ И МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ТАБЛИЦАМИ

Под редакцией
М. АБРАМОВИЦА и И. СТИГАН

Перевод с английского под редакцией
В. А. ДИТКИНА и Л. Н. КАРМАЗИНОЙ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.193
С 74
УДК 517.5

HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS
WITH FORMULAS, GRAPHS AND MATHEMATICAL TABLES

Edited by

MILTON ABRAMOWITZ AND IRENE A. STEGUN

NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
APPLIED MATHEMATICS SERIES · 55

Issued June 1964

С $\frac{20203-148}{053(02)\text{-}79}$ 80 79. 1702070000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Решение многих научных и технических проблем связано с исследованием специальных функций. Научно-технический прогресс привел к резкому увеличению числа специальных функций, применяемых в приложениях. В связи с этим появилась обширная литература. Изданы солидные специализированные монографии, посвященные изложению свойств определенного класса функций или даже одной функции. Вышли в свет различные подробные справочники. В руководствах по вычислительным методам целые разделы посвящены вопросам приближенного вычисления значений функций; за последние 30 лет изданы в большом количестве таблицы значений специальных функций.

Многочисленная и разнообразная литература, посвященная специальным функциям, вызывает известные трудности у лиц, имеющих дело с ними. Возникла потребность в издании одного пособия, в котором можно было бы найти ответы на все основные вопросы, возникающие при применении математических функций в приложениях. Первым таким пособием была известная книга Е. Янке и Ф. Эмде «Специальные функции». Предлагаемый вниманию читателей «Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и таблицами)» написан большим коллективом ученых США под общим руководством Национального Бюро Стандартов. В его составлении участвовали такие известные ученые, как X. Антосевич, М. Абрамовиц, Г. Бланш, У. Гаучи, К. Гольдберг, Ф. Дэвис, У. Кейхилл, А. Лоуен, Э. Люк, А. Мак-Ниш, Дж. Миллер, Л. Милн-Томсон, М. Нейман, Ф. Оберхеттингер, Ф. Олвер, С. Певи, И. Полонский, Н. Северо, Л. Слейтер, И. Стиган, Т. Сузард, Э. Хейнсворт, У. Хохштрассер, М. Цслен, Р. Цукер, А. Шопф. Общее редактирование осуществили М. Абрамовиц и И. Стиган.

Этот «Справочник» значительно превосходит труд Янке и Эмде по объему содержащейся в нем информации. Он написан с учетом современных вычислительных методов и средств вычислительной техники.

Книга охватывает все важные классы специальных функций: элементарные трансцендентные функции (логарифмическую, показательную, тригонометрические и гиперболические); интегральную показательную функцию и гамма-функцию, а также родственные им функции; интеграл вероятностей и интегралы Френеля; функции Лежандра; функции Бесселя целого и дробного порядка, а также интегралы от них; функции Струве и родственные им функции; вырожденные и невырожденные гипергеометрические функции; волновые функции Кулона и сфероидальные волновые функции; эллиптические функции Якоби и Вейерштрасса; тэта-функции; эллиптические интегралы; функции параболического цилиндра; функции Матье; ортогональные многочлены, многочлены Бернулли, Эйлера и дзета-функцию Римана и т.д. Для каждой функции дается широкий обзор ее свойств, причем делается упор на свойства, полезные при вычислениях, даются довольно полные и точные таблицы ее значений. Кроме того, в каждой главе рассматриваются методы вычислений функций с использованием приведенных формул и таблиц.

Кроме того, в «Справочнике» рассматриваются вопросы, так или иначе связанные со специальными функциями и их вычислениями: комбинаторный анализ, распределение вероятностей, системы счисления, интерполяция, численное дифференцирование и интегрирование, преобразования Лапласа. Кроме того, в «Справочнике» приведены таблицы математических и физических постоянных и коэффициенты перевода. Присутствие этих таблиц создает большие удобства для пользования книгой физиками и инженерами.

Справочник состоит из введения и двадцати девяти глав. Каждая глава содержит основную часть, примеры, таблицы и библиографию. Основная часть делится на пункты с двойной нумерацией, которые тематически объединяют в себе формулы и таблицы, имеющие тройной номер. Рисунки либо являются иллюстрациями к тексту, либо несут самостоятельную смысловую нагрузку. В конце каждой главы имеется библиография книг, теоретических работ и таблиц.

Каждая глава «Справочника» написана индивидуальным автором — специалистом по соответствующим вопросам. Несмотря на некоторую возникшую из-за этого разницу в стиле написания отдельных глав, «Справочник» представляет собой единое целое, содержащее всю основную информацию, необходимую для работы со специальными функциями.

Этот «Справочник» многократно переиздавался без существенных изменений.

Настоящая книга является переводом «Справочника», изданного в 1964 г. в США.

Над переводом работал коллектив в составе: В. М. Беляков, Ю. А. Брычков, Л. Н. Кармазина, К. А. Карпов, М. К. Керимов, Н. А. Меллер, В. И. Пагурова, С. С. Таганова и Э. А. Чистова.

В процессе перевода были исправлены замеченные неточности и опечатки. В библиографии иностранный перевод отечественных источников заменен соответствующими оригиналами, приведены переводы работ иностранных авторов. Кроме того, в библиографию были добавлены работы советских авторов.

В процессе редактирования справочника его материал был приведен в соответствие с принятыми в СССР нормами: изменены обозначения математических функций, в гл. 2 введены сокращения обозначений физических величин. В числах оставлена десятичная точка вместо десятичной запятой. Однако, в отличие от оригинала, в десятичных дробях, меньших 1, перед этой точкой поставлен нуль (например, запись .5 заменена записью 0.5); в каждой главе переставлены местами таблицы и литература.

В целях компактификации книги были изъяты широко распространенные в СССР таблицы степеней и корней чисел (гл. 3), таблицы элементарных функций и примеры к ним (гл. 4), а также изъяты таблицы простых чисел (гл. 24).

ВВЕДЕНИЕ

М. АБРАМОВИЦ

1. Настоящая книга представляет собой достаточно полное справочное пособие по математическим функциям, встречающимся при решении разнообразных физических и инженерных проблем. Хорошо известная книга «Специальные функции» Е. Янке и Ф. Эмде *) была неоценимой для специалистов и за последние полвека выдержала много изданий. Предлагаемая книга расширяет работу этих авторов, давая более полные и более точные числовые таблицы, а также более широкий обзор математических свойств описываемых функций. Количество рассматриваемых функции также увеличено.

Классификация функций и организация глав в данном справочнике сделаны по образцу книги «An Index of Mathematical Tables» **). Как правило, глава содержит таблицы, графики, аппроксимации многочленами и рациональными функциями, формулировки основных математических свойств рассматриваемого класса функций. Приводится много числовых примеров, иллюстрирующих пользование таблицами и приемы вычисления значений, лежащих вне области табулирования.

В конце каждой главы дается краткая библиография книг и статей, содержащих доказательства сформулированных свойств и наиболее важные числовые таблицы. Наиболее полная информация о таблицах дается в Указателе (см. сноску **)) ***).

Математические обозначения, употребляемые в справочнике, являются принятыми в литературе, в частности в книге «Higher Transcendental Functions»****). Иногда указываются и другие обозначения, используемые для тех же функций. Введение новых символов сведено к минимуму, и были приложены все усилия, чтобы исключить спорные обозначения.

2. Точность таблиц. Число значащих цифр, данных в каждой из таблиц, зависит в некоторой степени от того, что уже имелось в табличной литературе. При этом мы не считали целесообразным делать точность всех таблиц справочника одинаковой. Большинство таблиц содержит по крайней мере пять значащих цифр. Табличный шаг выбран так, чтобы обеспечить при линейной интерполяции 4—5 верных знаков, т е. точность, достаточную во многих физических приложениях. Если требуется бо́льшая точность интерполяции, то ее можно получить, применив одну из описываемых ниже интерполяционных процедур более высокого порядка.

В некоторых таблицах значения функции даются с большим числом знаков через неравномерные интервалы аргумента, как например, в табл. 9.4. Цель таких таблиц — дать опорные значения при контроле программ для вычислительных машин. В этом случае интерполяция не применяется.

Максимальная допустимая ошибка в таблицах справочника — 0,6 единицы последнего знака для элементарных функций, одна единица последнего знака для высших функций, за исключением немногих случаев, когда ошибка может возрастать до двух единиц последнего знака.

3. Вспомогательные функции и аргументы. Одна из основных задач справочника — дать такие таблицы или вычислительные методы, которые позволили бы получать численные значения рассматриваемых функций для всех допустимых действительных значений их параметров. Для выделения особенностей основных функций часто применяются вспомогательные функции, а для замены бесконечных интервалов конечными — вспомогательные аргументы. Разъясним это на примере.

Интегральная показательная функция положительного аргумента имеет представления

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\,du,$$

$$\mathrm{Ei}(x) = \gamma + \ln x + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots,$$

$$\mathrm{Ei}(x) \sim \frac{e^x}{x}\left[1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \frac{3!}{x^3} + \ldots\right] \quad (x \to \infty).$$

Логарифмическая особенность затрудняет интерполяцию функции $\mathrm{Ei}(x)$ вблизи $x = 0$. Функции же $\mathrm{Ei}(x) - \ln x$ и $x^{-1}[\mathrm{Ei}(x) - \ln x - \gamma]$ хорошо ведут себя и легко интерполируются в этой области. Каждая может служить вспомогательной функцией. Фактически выбрана вторая, так как при обратном переходе от нее к $\mathrm{Ei}(x)$ получается несколько бо́льшая точность. Функция $x^{-1}[\mathrm{Ei}(x) - \ln x - \gamma]$ протабулирована с девятью десятичными знаками на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. На интервале $1/2 \leqslant x \leqslant 2$ $\mathrm{Ei}(x)$ — достаточно гладкая функция, которая табулируется непосредственно. При больших значениях x начинает проявляться экспоненциальный характер функции $\mathrm{Ei}(x)$. Более гладкой и легко интерполируемой при этих x является функция $xe^{-x}\mathrm{Ei}(x)$, которая и табулируется при $2 \leqslant x \leqslant 10$. Наконец, интервал $10 \leqslant x < \infty$ заменяется конечным с помощью обратного аргумента x^{-1}. Для того чтобы получить в этой области хорошо интерполируемую таблицу функции $xe^{-x}\mathrm{Ei}(x)$, достаточно 21 табличного значения, соответствующего $x^{-1} = 0{,}1(-0{,}005)0$.

---

*) Шестое издание (в соавторстве с Лёшем) было опубликовано в 1960 г. в ФРГ (7-м изданием), в США и в СССР (3-м изданием) (см. [9.32]).

**) Fletcher A., Miller J. C. P., Rosenhead L., Comrie L. J. An Index of Mathematical Tables. — U.S.A.: Addison-Wesley, 1962.

***) На русском языке имеются аналогичные издания: 1. Лебедев А. В., Федорова Р. В. Справочник по математическим таблицам. — М.: Изд-во АН СССР, 1956; 2. Бурунова Н. М. Справочник по математическим таблицам. Дополнение № 1. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.

****) См. [26.2].

4. Интерполяция. В таблицах этой книги не содержатся ни разности, ни какие-либо другие вспомогательные средства для интерполяции. Было решено, что лучше использовать место для табулирования вспомогательных функций. Правда, как известно, разности можно поместить, не увеличивая объема таблиц, а взяв больший табличный шаг. Но увеличение шага противоречило бы требованию, чтобы линейная интерполяция в таблицах обеспечивала 4—5 верных знаков.

В приложениях, в которых точность линейной интерполяции недостаточна, рекомендуется применять формулу Лагранжа или итеративный метод Эйткена *). В помощь читателю к большинству таблиц прилагается информация о максимальной ошибке линейной интерполяции и о числе точек, необходимых в формулах Лагранжа и Эйткена для получения полной табличной точности.

Для примера рассмотрим следующую выдержку из табл. 5.1:

x	$xe^xE_1(x)$	x	$xe^xE_1(x)$
7.5	0.89268 7854	8.0	0.89823 7113
7.6	0.89384 6312	8.1	0.89927 7888
7.7	0.89497 9666	8.2	0.90029 7306
7.8	0.89608 8737	8.3	0.90129 6023
7.9	0.89717 4302	8.4	0.90227 4695

$$\begin{bmatrix}(-6)3\\5\end{bmatrix}$$

Числа в квадратных скобках под столбцами означают, что ошибка линейной интерполяции не превосходит $3\cdot10^{-6}$ и что для того, чтобы проинтерполировать с полной табличной точностью, требуется использовать пять табличных значений в формулах Лагранжа или Эйткена.

Допустим, имея таблицу, мы хотим вычислить значение функции $xe^xE_1(x)$ при $x = 7.9527$. Для этого применим поочередно линейную интерполяцию, формулы Лагранжа, Эйткена, разностные интерполяционные формулы и ряды Тейлора.

1) *Линейная интерполяция.* Формула этой процедуры имеет вид

$$f_p = (1-p)f_0 + pf_1,$$

где f_0, f_1 — значения функции f, соответствующие двум последовательным ближайшим к x табличным значениям аргумента x_0 и x_1; p определяется формулой

$$p = (x - x_0)/(x_1 - x_0)$$

и f_p — искомое значение функции. В данном случае имеем

$$f_0 = 0.89717\,4302,\quad f_1 = 0.89823\,7113,\quad p = 0.527.$$

Для вычисления f_p по этой формуле на настольной вычислительной машине поочередно устанавливаются на клавиатуре f_0, f_1 и умножаются с накоплением соответственно на $1-p$ и p:

$$f_{0.527} = (1-0.527)\cdot(0.89717\,4302) + 0.527\cdot(0.89823\,7113) = 0.89773\,4403.$$

Так как известно, что при линейной интерполяции возможна ошибка, равная $3\cdot10^{-6}$, то округляем полученное число до 0.89773. Максимальная возможная ошибка этого результата складывается из ошибки отбрасывания последних знаков — $0.4403\cdot10^{-5}$ плюс $3\cdot10^{-6}$, т.е. не превосходит $0.8\cdot10^{-5}$.

2) *Формула Лагранжа.* В данном примере применяется формула Лагранжа по пяти точкам:

$$f = A_{-2}(p)f_{-2} + A_{-1}(p)f_{-1} + A_0(p)f_0 + A_1(p)f_1 + A_2(p)f_2,$$

где $f = f(x)$ — искомое значение, $f_k = f(x_k)$ — табличные значения функции, $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, \pm1, \pm2$, h — шаг таблиц, $A_k(p)$ — коэффициенты формулы Лагранжа. Таблицы коэффициентов $A_k(p)$ даются в гл. 25 для значений $p = 0(0.01)1$. Полезно иметь в виду, что сумма $A_k(p)$ при $k = 0, \pm1, \pm2$ и фиксированном p равна единице.

Проведем вычисления по этой формуле для $p = 0.52$, 0.53 и 0.54. Получим следующие результаты:

x	$xe^xE_1(x)$		
7.952	0.89772 9757		
		10622	
7.953	0.89774 0379		−2
		10620	
7.954	0.89775 0999		

Числа в третьей и четвертой колонках являются первой и второй разностями значений $xe^xE_1(x)$ (см. ниже). Малость второй разности свидетельствует о точности проведенных интерполяций. Требуемое значение получается теперь линейной интерполяцией:

$$f_p = 0.3(0.89772\,9757) + 0.7(0.89774\,0379) = 0.89773\,7192.$$

Если заранее неизвестно, какой степени нужно взять многочлен Лагранжа, можно сделать предварительную интерполяцию с помощью двух или более многочленов различных степеней и сравнить результаты. Совпадающие знаки считаются верными.

3) *Итерационный метод Эйткена.* В рассматриваемом примере вычисления проводятся по следующей схеме:

n	x_n	$y_n = xe^xE_1(x)$	$y_{0\,n}$	$y_{0,1,n}$	$y_{0,1,2,n}$	$y_{0,1,2,3,n}$	$x_n - x$
0	8.0	0.89823 7113					0.0473
1	7.9	0.89717 4302	0.89773 44034				−0.0527
2	8.1	0.89927 7888	0.89774 48264	0.89773 71499			0.1473
3	7.8	0.89608 8737	2 90220	2394	0.89773 71938		−0.1527
4	8.2	0.90029 7306	4 98773	1216	16	0.89773 71930	0.2473
5	7.7	0.89497 9666	2 35221	2706	43	30	−0.2527

Здесь

$$y_{0,n} = \frac{1}{x_n - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_n & x_n - x\end{vmatrix}$$

*) Aitken A. C. On interpolation by iteration of proportional parts, without the use of differences. — Proc. Edinburgh Math. Soc., 1932, **3**, p. 56—76.

и

$$y_{0,1,n} = \frac{1}{x_n - x_1}\begin{vmatrix} y_{0,1} & x_1 - x \\ y_{0,n} & x_n - x \end{vmatrix},$$

$$y_{0,1,\ldots,m-1,m,n} = \frac{1}{x_n - x_m}\begin{vmatrix} y_{0,1,\ldots,m-1,m} & x_m - x \\ y_{0,1,\ldots,m-1,n} & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Эти выражения легко вычисляются на настольных вычислительных машинах. Обычно в промежуточных вычислениях удерживается запасной десятичный знак, чтобы уменьшить накопление ошибок округления

Очередность ввода табличных значений в вычисления в какой-то мере несущественна Но чтобы получить максимальную скорость сходимости и в то же время минимизировать накопление ошибок округления, нужно, как в данном примере, начинать с табличного аргумента, ближайшего к аргументу искомого значения, затем брать ближайший из оставшихся табличных аргументов и т д Дополнительная строка обеспечивает контроль точности вычислений.

4) *Разностные формулы.* Мы будем пользоваться обозначениями центральных разностей (гл. 25)

$$\begin{array}{ccccccc}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \delta f_{1/2} & & & \\
x_1 & f_1 & & \delta^2 f_1 & & \\
 & & \delta f_{3/2} & & \delta^3 f_{3/2} & \\
x_2 & f_2 & & \delta^2 f_2 & & \delta^4 f_2, \\
 & & \delta f_{5/2} & & \delta^3 f_{5/2} & \\
x_3 & f_3 & & \delta^2 f_3 & & \\
 & & \delta f_{7/2} & & & \\
x_4 & f_4 & & & &
\end{array}$$

где

$$\delta f_{1/2} = f_1 - f_0,\ \ \delta f_{3/2} = f_2 - f_1, \ldots,$$
$$\delta^2 f_1 = \delta f_{3/2} - \delta f_{1/2} = f_2 - 2f_1 + f_0,$$
$$\delta^3 f_{3/2} = \delta^2 f_2 - \delta^2 f_1 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0,$$
$$\delta^4 f_2 = \delta^3 f_{5/2} - \delta^3 f_{3/2} = f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0.$$

Ниже дается относящаяся к данному примеру часть таблицы с разностями. Разности записаны, как принято, в единицах последнего десятичного знака значений функции По малости разностей высокого порядка можно судить также о точности значений функции:

x	$xe^xE_1(x)$	$\delta^2 f$	$\delta^4 f$
7.9	0.89717 4302	−2 2754	−34
8.0	0.89823 7113	−2 2036	−39

Применим, например, интерполяционную формулу Эверетта:

$$f_p = (1-p) f_0 + E_2(p)\,\delta^2 f_0 + E_4(p)\,\delta^4 f_0 + \ldots +$$
$$+ p f_1 + F_2(p)\,\delta^2 f_1 + F_4(p)\,\delta^4 f_1 + \ldots$$

Беря численные значения интерполяционных коэффициентов $E_2(p)$, $E_4(p)$, $F_2(p)$ и $F_4(p)$ из табл 25.1, находим

$$10^9 f_{0\ 527} = 0.473\ (89717\ 4302) + 0.061196\ (22754) -$$
$$-0.012\ (34) + 0.527\ (89823\ 7113) + 0.063439\ (22036) -$$
$$-\ 0.012\ (39) = 89773\ 7193.$$

Кстати, из формулы Эверетта следует, что ошибка линейной интерполяции примерно равна

$$E_2(p)\,\delta^2 f_0 + F_2(p)\,\delta^2 f_1 \approx \frac{1}{2}\,[E_2(p) + F_2(p)]\,[\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1].$$

Так как максимальное значение $|E_2(p) + F_2(p)|$ на интервале $0 < p < 1$ равно 1/8, то ошибка линейной интерполяции не превосходит

$$\frac{1}{16}\,|\,\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1\,| = \frac{1}{16}\,|f_2 - f_1 - f_0 + f_{-1}|.$$

5) *Ряды Тейлора* В тех случаях, когда легко вычисляются последовательные производные табулированной функции, можно для интерполяции использовать разложение Тейлора:

$$(fx) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f'(x_0)}{1!} +$$
$$+ (x - x_0)^2\frac{f''(x_0)}{2!} + (x - x_0)^3\frac{f'''(x_0)}{3!} + \ldots$$

Сначала вычисляем производные $f^{(n)}(x_0)$ до тех пор, пока $(n+1)$-й член ряда не обратится с заданной точностью в нуль Затем подсчитываем сумму ряда при данном значении x. Для контроля полученных значений производных вычисляются по ряду табличные значения функции при $x = x_{-1}$ и $x = x_1$.

В настоящем примере имеем

$$f(x) = xe^x E_1(x),$$
$$f'(x) = (1 + x^{-1})\,f(x) - 1,$$
$$f''(x) = (1 + x^{-1})\,f'(x) - x^{-2}f(x),$$
$$f'''(x) = (1 + x^{-1})\,f''(x) - 2x^{-2}f'(x) + 2x^{-3}f(x).$$

Выполняя вычисления при $x_0 = 7.9$ и $x - x_0 = 0\,0527$, удерживая дополнительный десятичный знак в промежуточных результатах, получим $f(x) = 0.89773\ 7194$.

5. Обратная интерполяция. Между прямой и обратной линейной интерполяцией нет принципиальной разницы. Для тех случаев, когда линейная интерполяция не обеспечивает достаточной точности результата, рекомендуются следующие два метода.

П е р в ы й м е т о д. С помощью прямой интерполяции, например, по формуле Лагранжа составляется новая таблица с более мелким шагом в окрестности аппроксимируемого значения, затем применяется уже более точная обратная линейная интерполяция к субтабулированным значениям

В т о р о й м е т о д Используется формула Эйткена или ряд Тейлора, в которых функция и аргумент взаимно меняются ролями.

Следует отметить, что точность обратной интерполяции может быть совершенно отлична от точности прямой. В частности, это имеет место в областях, где функция медленно изменяется, например, вблизи максимума или минимума Точность, достижимая при обратной интерполяции, может быть оценена с помощью формулы

$$\Delta x \approx \Delta f / \frac{df}{dx},$$

где Δf — максимальная возможная ошибка в значениях функции f.

Пример. Дано $xe^xE_1(x) = 0.9$ Найти x из таблицы на стр. 8.

1) *Обратная линейная интерполяция.* Значение p находится по формуле

$$p = (f_p - f_0)(f_1 - f_0).$$

Имеем

$$p = \frac{0.9 - 0.89927\ 7888}{0.90029\ 7306 - 0.89927\ 7888} = \frac{72\ 2112}{101\ 9418} = 0.708357.$$

Следовательно,

$$x = x_0 + p(x_1 - x_0) = 8.1 + 0.708357(0.1) = 8.17083\ 57.$$

Оценим возможную ошибку этого результата. Напомним, что максимальная ошибка прямой линейной интерполяции в этой таблице равна $\Delta f = 3 \cdot 10^{-6}$. Приближенное значение df/dx дается отношением первой разности к интервалу по аргументу (см. гл. 25), равному в данном случае 0.010. Таким образом, максимальная ошибка в значении x равна приблизительно $3 \cdot 10^{-6}/0.010$, т.е. 0.0003.

2) *Метод субтабулирования.* Для уточнения полученного приближенного значения x выполним прямую интерполяцию при $p = 0.70$, 0.71 и 0.72 с помощью пятиточечной формулы Лагранжа:

x	$xe^xE_1(x)$	δ	δ^2
8.170	0.89999 3683		
		10151	
8.171	0.90000 3834		−2
		10149	
8.172	0.90001 3983		

Обратная линейная интерполяция в этой таблице дает

$$p = \frac{0.9 - 0.89999\ 3683}{0.00001\ 0151} = 0.6223.$$

Следовательно, $x = 8.17062\ 23$.

Максимальная ошибка этого результата равна

$$\Delta f / \frac{df}{dx} \approx \frac{1 \cdot 10^{-9}}{0.010} = 1 \cdot 10^{-7}.$$

3) *Метод Эйткена.* Вычисления выполняются по такой же схеме, как при прямой интерполяции.

n	$y_n = xe^xE_1(x)$	x_n	$x_{0,n}$	$x_{0,1\ n}$	$x_{0,1,2,n}$	$x_{0,1,2,3\ n}$	$y_n - y$
0	0.90029 7306	8.2					0.000297306
1	0.89927 7888	8.1	8.17083 5712				−0.000722112
2	0.90129 6033	8.3	8.17023 1505	8.17061 9521			0.001296033
3	0.89823 7113	8.0	8.17113 8043	2 5948	8.17062 2244		−0.001762887
4	0.90227 4695	8.4	8.16992 9437	1 7335	415	8.17062 2318	0.002274695
5	0.89717 4302	7.9	8.17144 0382	2 8142	231	265	−0.002825698

Максимальная ошибка ответа такая же, как в методе субтабулирования. О точности можно судить также по количеству совпадающих знаков результатов двух высших интерполяций, в данном случае $x_{0,1,2,3,4}$ и $x_{0,1,2,3,5}$.

6. Двумерная интерполяция. Двумерная интерполяция обычно выполняется как последовательность одномерных. Сначала проводится интерполяция по одному аргументу для нескольких табличных значений второго. Полученные значения контролируются с помощью разностей. Затем проводится интерполяция по второму аргументу.

Значения аналитических функций комплексного переменного часто вычисляются другим методом, а именно, с помощью разложения в ряд Тейлора. Конечно, этот метод применим лишь в том случае, когда нужные производные могут быть вычислены без особых трудностей.

7. Получение функций из рекуррентных соотношений. Многие специальные математические функции, которые зависят от параметра, называемого их индексом, порядком или степенью, удовлетворяют линейному разностному уравнению (или рекуррентному соотношению) относительно этого параметра. Примерами могут служить функции Лежандра $P_n(x)$, Бесселя $J_n(x)$ и интегральная показательная функция $E_n(x)$, для которых имеются соответствующие рекуррентные соотношения

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0,$$

$$J_{n+1} - (2n/x)J_n + J_{n-1} = 0,$$

$$nE_{n+1} + xE_n = e^{-x}.$$

Рекуррентные соотношения являются важным и мощным вычислительным инструментом, особенно полезным при работе на ЭВМ. Если значения $P_n(x)$ или $J_n(x)$ известны для двух последовательных значений n, или $E_n(x)$ известно для одного значения n, то эти функции могут быть вычислены для других значений n путем последовательного применения рекуррентного соотношения. Поскольку эта процедура поневоле выполняется над округленными значениями, необходимо знать, как ведут себя ошибки в рекуррентном процессе. Если ошибки не возрастают относительно величины функции, процесс называется устойчивым. Если же относительная ошибка возрастает и может даже превысить величину искомой функции, процесс является неустойчивым.

Устойчивость может зависеть: а) от того, какое вычисляется частное решение разностного уравнения; b) от значений x или других параметров в разностном уравнении; c) от направления изменения n, т.е. от того, возрастает или убывает n в процессе вычислений. Приведем следующие примеры.

Устойчивость — возрастающие n:

$$P_n(x), \qquad P_n^m(x),$$

$$Q_n(x), \qquad Q_n^m(x) \quad (x<1),$$

$$Y_n(x), \qquad K_n(x),$$

$$J_{-n-1/2}(x), \quad I_{-n-1/2}(x),$$

$$E_n(x) \quad (n < x).$$

Устойчивость — убывающие n

$P_n(x)$, $P_n^m(x)$ $(x < 1)$,

$Q_n(x)$, $Q_n^m(x)$,

$J_n(x)$, $I_n(x)$,

$J_{n+1/2}(x)$, $I_{n+1/2}(x)$,

$E_n(x)$ $(n > x)$,

$F_n(\eta, \rho)$ — волновая функция Кулона.

Примеры, иллюстрирующие вычисление значений конкретных функций из их рекуррентных соотношений, даются в соответствующих главах. Иногда даже в случаях, когда рекуррентный процесс неустойчив, им можно пользоваться (если исходные значения известны с достаточной точностью).

Миллер применил рекуррентную схему, устойчивую при убывающих n таким образом, что ему не понадобилось предварительно вычислять начальные значения функции для больших n. Алгоритм Миллера хорошо подходит для вычислительных машин, он описан в примере 1 раздела 19.28.

Глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Д. ЛИПМАН

СОДЕРЖАНИЕ

Таблица 1.1. Математические постоянные

n	$\sqrt{n}$			
2	1. 4142	13562	37309	50488
3	1. 7320	50807	56887	72935
5	2. 2360	67977	49978	96964
7	2. 6457	51311	06459	05905
11	3. 3166	24790	35539	98491
13	3. 6055	51275	46398	92931
17	4. 1231	05625	61766	05498
19	4. 3588	98943	54067	35522
23	4. 7958	31523	31271	95416
29	5. 3851	64807	13450	40313
31	5. 5677	64362	83002	19221
37	6. 0827	62530	29821	96890
41	6. 4031	24237	43284	86865
43	6. 5574	38524	30200	06523
47	6. 8556	54600	40104	41249
53	7. 2801	09889	28051	82711
59	7. 6811	45747	86860	81758
61	7. 8102	49675	90665	43941
67	8. 1853	52771	87244	99700
71	8. 4261	49773	17635	86306
73	8. 5440	03745	31753	11679
79	8. 8881	94417	31558	88501
83	9. 1104	33579	14429	88819
89	9. 4339	81132	05660	38113
97	9. 8488	57801	79610	47217

$10^{1/2}$		3. 1622	77660	16837	93320
$10^{1/3}$		2. 1544	34690	03188	37219
$10^{1/4}$		1. 7782	79410	03892	28012
$10^{1/5}$		1 5848	93192	46111	34853
$100^{1/3}$		4. 6415	88833	61277	88924
$100^{1/5}$		2 5118	86431	50958	01112
$1000^{1/4}$		5. 6234	13251	90349	08040
$1000^{1/5}$		3. 9810	71705	53497	25077
$2^{1/3}$		1. 2599	21049	89487	31648
$3^{1/3}$		1. 4422	49570	30740	83823
$2^{1/4}$		1. 1892	07115	00272	10667
$3^{1/4}$		1. 3160	74012	95249	24608
$2^{-1/2}$	(− 1)	7. 0710	67811	86547	52440
$3^{-1/2}$	(− 1)	5. 7735	02691	89625	76451
$5^{-1/2}$	(− 1)	4. 4721	35954	99957	93928

$e^{\pi/2}$		4. 8104	77380	96535	16555
$e^{\pi/4}$		2. 1932	80050	73801	54566
$e^{-\pi/2}$	(− 1)	2. 0787	95763	50761	90855
$e^{-\pi/4}$	(− 1)	4. 5593	81277	65996	23677
$e^{1/2}$		1. 6487	21270	70012	81468
$e^{-1/2}$	(− 1)	6. 0653	06597	12633	42360
$e^{1/3}$		1. 3956	12425	08608	95286
$e^{-1/3}$	(− 1)	7. 1653	13105	73789	25043

n		e^{n}				
1		2. 7182	81828	45904	52353	60287
2		7. 3890	56098	93065	02272	30427
3	(1)	2. 0085	53692	31876	67740	92853
4	(1)	5. 4598	15003	31442	39078	11026
5	(2)	1. 4841	31591	02576	60342	11156
6	(2)	4. 0342	87934	92735	12260	83872
7	(3)	1. 0966	33158	42845	85992	63720
8	(3)	2. 9809	57987	04172	82747	43592
9	(3)	8. 1030	83927	57538	40077	09997
10	(4)	2. 2026	46579	48067	16516	95790

n		e^{-n}				
1	(− 1)	3. 6787	94411	71442	32159	55238
2	(− 1)	1. 3533	52832	36612	69189	39995
3	(− 2)	4. 9787	06836	78639	42979	34242
4	(− 2)	1. 8315	63888	87341	80293	71802
5	(− 3)	6. 7379	46999	08546	70966	36048
6	(− 3)	2. 4787	52176	66635	84230	45167
7	(− 4)	9. 1188	19655	54516	20800	31361
8	(− 4)	3. 3546	26279	02511	83882	13891
9	(− 4)	1. 2340	98040	86679	54949	76367
10	(− 5)	4. 5399	92976	24848	51535	59152

n		$e^{n\pi}$			
1	(1)	2. 3140	69263	27792	69006
2	(2)	5. 3549	16555	24764	73650
3	(4)	1. 2391	64780	79166	97482
4	(5)	2. 8675	13131	36653	29975
5	(6)	6. 6356	23999	34113	42333
6	(8)	1. 5355	29353	95446	69392
7	(9)	3. 5533	21280	84704	43597
8	(10)	8. 2226	31558	55949	95275
9	(12)	1. 9027	73895	29216	12917
10	(13)	4. 4031	50586	06320	29011
e^{π}	(1)	1. 5154	26224	14792	64190
e^{γ}		1. 7810	72417	99019	79852

n		$e^{-n\pi}$			
1	(− 2)	4. 3213	91826	37722	49774
2	(− 3)	1. 8674	42731	70798	88144
3	(− 5)	8. 0699	51757	03045	99239
4	(− 6)	3. 4873	42356	20899	54918
5	(− 7)	1. 5070	17275	39006	46107
6	(− 9)	6. 5124	12136	07990	07282
7	(−10)	2. 8142	68457	48555	27211
8	(−11)	1. 2161	55670	94093	08397
9	(−13)	5. 2554	85176	00644	85552
10	(−14)	2 2711	01068	32409	38387
$e^{-\pi}$	(− 2)	6. 5988	03584	53125	37077
$e^{-\gamma}$	(− 1)	5. 6145	94835	66885	16982

n	$\ln n$				
2	0. 6931	47180	55994	53094	172321
3	1. 0986	12288	66810	96913	952452
4	1. 3862	94361	11989	06188	344642
5	1. 6094	37912	43410	03746	007593
6	1. 7917	59469	22805	50008	124774
7	1. 9459	10149	05531	33051	053527
8	2. 0794	41541	67983	59282	516964
9	2. 1972	24577	33621	93827	904905
10	2 3025	85092	99404	56840	179915
11	2. 3978	95272	79837	05440	619436
13	2. 5649	49357	46153	67360	531874
17	2. 8332	13344	05621	60802	495346
19	2 9444	38979	16644	04600	090274
23	3. 1354	94215	92914	96908	067528
29	3. 3672	95829	98647	40271	832720
31	3. 4339	87204	48514	62459	291613
37	3. 6109	17912	64422	44443	680957
41	3. 7135	72066	70430	78038	667634
43	3. 7612	00115	69356	24234	728425

n		$\log_{10} n$				
2	(−1)	3. 0102	99956	63981	19521	37389
3	(−1)	4. 7712	12547	19662	43729	50279
4	(−1)	6. 0205	99913	27962	39042	74778
5	(−1)	6 9897	00043	36018	80478	62611
6	(−1)	7. 7815	12503	83643	63250	87668
7	(−1)	8. 4509	80400	14256	83071	22163
8	(−1)	9. 0308	99869	91943	58564	12167
9	(−1)	9. 5424	25094	39324	87459	00558
10		1. 0000	00000	00000	00000	00000
11		1. 0413	92685	15822	50407	50200
13		1. 1139	43352	30683	67692	06505
17		1. 2304	48921	37827	39285	40170
19		1. 2787	53600	95282	89615	36333
23		1. 3617	27836	01759	28788	67777
29		1. 4623	97997	89895	60873	32847
31		1 4913	61693	83427	26796	66704
37		1. 5682	01724	06699	49968	08451
41		1. 6127	83856	71973	54945	09412
43		1. 6334	68455	57958	65264	05088

Таблица 1.1. Математические постоянные

n		$\ln n$					n		$\log_{10} n$				
47		3. 8501	47601	71005	85868	209507	47		1. 6720	97857	93571	74644	14219
53		3. 9702	91913	55212	18341	444691	53		1. 7242	75869	60078	90456	32992
59		4. 0775	37443	90571	94506	160504	59		1. 7708	52011	64214	41902	60656
61		4. 1108	73864	17331	12487	513891	61		1. 7853	29835	01076	70338	85749
67		4. 2046	92619	39096	60596	700720	67		1. 8260	74802	70082	64341	49132
71		4. 2626	79877	04131	54213	291545	71		1. 8512	58348	71907	52860	92829
73		4. 2904	59441	14839	11290	921089	73		1. 8633	22860	12045	59010	74387
79		4. 3694	47852	46702	14941	729455	79		1. 8976	27091	29044	14279	94821
83		4. 4188	40607	79659	79234	754722	83		1. 9190	78092	37607	39038	32760
89		4. 4886	36369	73213	98383	178155	89		1. 9493	90006	61491	27847	23543
97		4. 5747	10978	50338	28221	167216	97		1. 9867	71734	26624	48517	84362
$\ln\pi$		1. 1447	29885	84940	01741	43427	$\log_{10}\pi$	(−1)	4. 9714	98726	94133	85435	12683
$\ln\sqrt{2\pi}$	(−1)	9. 1893	85332	04672	74178	03296	$\log_{10}e$	(−1)	4. 3429	44819	03251	82765	11289
n		$n \ln 10$					n		$n\pi$				
1		2. 3025	85092	99404	56840	17991	1		3. 1415	92653	58979	32384	62643
2		4. 6051	70185	98809	13680	35983	2		6 2831	85307	17958	64769	25287
3		6. 9077	55278	98213	70520	53974	3		9. 4247	77960	76937	97153	87930
4		9. 2103	40371	97618	27360	71966	4	(1)	1. 2566	37061	43591	72953	85057
5	(1)	1. 1512	92546	49702	28420	08996	5	(1)	1. 5707	96326	79489	66192	31322
6	(1)	1. 3815	51055	79642	74104	10795	6	(1)	1. 8849	55592	15387	59430	77586
7	(1)	1. 6118	09565	09583	19788	12594	7	(1)	2. 1991	14857	51285	52669	23850
8	(1)	1. 8420	68074	39523	65472	14393	8	(1)	2. 5132	74122	87183	45907	70115
9	(1)	2. 0723	26583	69464	11156	16192	9	(1)	2. 8274	33388	23081	39146	16379
n		π^n					n		π^{-n}				
1		3. 1415	92653	58979	32384	62643	1	(−1)	3. 1830	98861	83790	67153	77675
2		9. 8696	04401	08935	86188	34491	2	(−1)	1 0132	11836	42337	77144	38795
3	(1)	3. 1006	27668	02998	20175	47632	3	(−2)	3. 2251	53443	31994	89184	42205
4	(1)	9. 7409	09103	40024	37236	44033	4	(−2)	1. 0265	98225	46843	35189	15278
5	(2)	3. 0601	96847	85281	45326	27413	5	(−3)	3. 2677	63643	05338	54726	28250
6	(2)	9. 6138	91935	75304	43703	02194	6	(−3)	1. 0401	61473	29585	22960	89838
7	(3)	3. 0202	93227	77679	20675	14206	7	(−4)	3. 3109	36801	77566	76432	59528
8	(3)	9. 4885	31016	07057	40071	28576	8	(−4)	1. 0539	03916	53493	66633	17287
9	(4)	2. 9809	09933	34462	11666	50940	9	(−5)	3. 3546	80357	20886	91287	39854
10	(4)	9. 3648	04747	60830	20973	71669	10	(−5)	1. 0678	27922	68615	33662	04078
$\pi/2$		1. 5707	96326	79489	66192	31322	$3\pi/2$		4. 7123	88980	38468	98576	93965
$\pi/3$		1. 0471	97551	19659	77461	54214	$4\pi/3$		4. 1887	90204	78639	09846	16858
$\pi/4$	(−1)	7. 8539	81633	97448	30961	56608	$\pi(2)^{1/2}$		4. 4428	82938	15836	62471	15881
$\pi^{1/2}$		1. 7724	53850	90551	60272	98167	$\pi^{-1/2}$	(−1)	5 6418	95835	47756	28694	80795
$\pi^{1/3}$		1. 4645	91887	56152	32630	20143	$\pi^{-1/3}$	(−1)	6. 8278	40632	55295	68146	70208
$\pi^{1/4}$		1. 3313	35363	80038	97127	97535	$\pi^{-1/4}$	(−1)	7. 5112	55444	64942	48285	87030
$\pi^{2/3}$		2. 1450	29397	11102	56000	77444	$\pi^{-2/3}$	(−1)	4. 6619	40770	35411	61438	19885
$\pi^{3/4}$		2. 3597	30492	41469	68875	78474	$\pi^{-3/4}$	(−1)	4. 2377	72081	23757	59679	10077
$\pi^{3/2}$		5. 5683	27996	83170	78452	84818	$\pi^{-3/2}$	(−1)	1. 7958	71221	25166	56168	90820
π^{e}	(1)	2. 2459	15771	83610	45473	42715	π^{-e}	(−2)	4. 4525	26726	69229	06151	35273
$(2\pi)^{1/2}$		2. 5066	28274	63100	05024	15765	$(2\pi)^{-1/2}$	(−1)	3. 9894	22804	01432	67793	99461
$(\pi/2)^{1/2}$		1. 2533	14137	31550	02512	07883	$(2/\pi)^{1/2}$	(−1)	7. 9788	45608	02865	35587	98921
$\pi(2)^{-1/2}$		2. 2214	41469	07918	31235	07940	$2^{1/2}/\pi$	(−1)	4. 5015	81580	78553	03477	75996
$1r$		57. 2957	79513	08232	08767	98155°	$1'$		0. 0002	90888	20866	57215	96154r
$1°$		0. 0174	53292	51994	32957	69237r	$1''$		0. 0000	04848	13681	10953	59936r
γ		0. 5772	15664	90153	28606	06512	$\ln\gamma$		−0. 5495	39312	98164	48223	37662
$\Gamma(1/2)$		1. 7724	53850	905516			$1/\Gamma(1/2)$		0. 5641	89583	547756		
$\Gamma(1/3)$		2. 6789	38534	707748			$1/\Gamma(1/3)$		0. 3732	82173	907395		
$\Gamma(2/3)$		1. 3541	17939	426400			$1/\Gamma(2/3)$		0. 7384	88111	621648		
$\Gamma(1/4)$		3. 6256	09908	221908			$1/\Gamma(1/4)$		0. 2758	15662	830209		
$\Gamma(3/4)$		1. 2254	16702	465178			$1/\Gamma(3/4)$		0. 8160	48939	098263		
$\Gamma(4/3)$		0. 8929	79511	569249			$1/\Gamma(4/3)$		1. 1198	46521	722186		
$\Gamma(5/3)$		0. 9027	45292	950934			$1/\Gamma(5/3)$		1. 1077	32167	432472		
$\Gamma(5/4)$		0. 9064	02477	055477			$1/\Gamma(5/4)$		1. 1032	62651	320837		
$\Gamma(7/4)$		0. 9190	62526	848883			$1/\Gamma(7/4)$		1. 0880	65252	131017		
$\ln\Gamma(1/3)$		0. 9854	20646	927767			$\ln\Gamma(4/3)$		−0 1131	91641	740343		
$\ln\Gamma(2/3)$		0. 3031	50275	147523			$\ln\Gamma(5/3)$		−0 1023	14832	960640		
$\ln\Gamma(1/4)$		1. 2880	22524	698077			$\ln\Gamma(5/4)$		−0 0982	71836	421813		
$\ln\Gamma(3/4)$		0. 2032	80951	431296			$\ln\Gamma(7/4)$		−0. 0844	01121	020486		

Примечание при корректуре. Предпоследний столбец, 14-я строка снизу — должно быть 62470 (вместо 62471).

Глава 2
ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕВОДА

А. МАК НИШ

СОДЕРЖАНИЕ

Таблицы этой главы содержат некоторые часто употребляемые физические постоянные и коэффициенты перевода.

Все научные измерения в области механики и теплоты основаны на четырех международных произвольно выбранных единицах, величины которых фиксируются четырьмя принятыми эталонами.

Единица длины — метр (м). Он равен 1 650 763.73 длинам волн, испускаемых в вакууме атомом криптона-86 при переходе $2P_{10} - 5D_5$.

Единица массы — килограмм (кг). Он равен массе эталона килограмма, который хранится в городе Севре во Франции.

Единица времени — секунда (с). Она равна 1/31 556 925.9747 доле тропического года, который определен для 12 часов эфемеридного времени 1900 года, или же равна 9 192 631 770 периодам излучения, испускаемого атомом цезия 133 при переходе между уровнями его сверхтонкой структуры.

Единица температуры — градус. Он определяется при помощи термодинамической шкалы, на которой тройной точке чистой природной воды соответствует 273.16 К. Шкала Цельсия получается вычитанием 273.15 градусов из шкалы Кельвина.

Другие единицы измерения определяются через основные единицы при помощи коэффициентов пропорциональности. Полная система, которая включает в себя электрические единицы, называется Международной системой единиц (СИ). Беря 1/100 часть метра в качестве единицы длины, и 1/1000 килограмма в качестве единицы массы, получим систему СГС, которая часто используется в физике и химии.

Единица электрического тока в системе СИ — ампер — определяется при помощи уравнения $2\Gamma_m I_1 I_2/4\pi = F$, в котором F обозначает силу взаимодействия в вакууме между двумя бесконечно длинными параллельными проводниками бесконечно малого сечения, расположенными на расстоянии 1 м друг от друга, рассчитанную на 1 м длины проводника. Если F выражена в ньютонах и Γ_m приписано численное значение $4\pi \cdot 10^{-7}$, то I_1 и I_2 выражаются в амперах. Такие единицы СИ, как вольт, ом, фарада, генри и другие, определяются обычно принятыми уравнениями. В этой системе сила взаимодействия между двумя электрическими зарядами в вакууме равна $Q_1Q_2/(4\pi\Gamma_e r^2) = F$, где $F_e = 10^7/(4\pi c^2)$, а c — скорость света в метрах в секунду ($\Gamma_e = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$).

Если в этих формулах исключить 4π в знаменателях и выразить F в динах, а r — в сантиметрах, то они определят нерационализированную систему СГС. Полагая $\Gamma_m = 1$, получим абсолютную электромагнитную систему единиц СГСМ, в которой магнитная проницаемость вакуума равна единице, а его диэлектрическая проницаемость $\Gamma_e = 1/c^2$. При $\Gamma_e = 1$ получаем абсолютную электростатическую систему единиц СГСЭ, в которой диэлектрическая проницаемость вакуума равна единице, а его магнитная проницаемость равна $\Gamma_m = 1/c^2$.

Значения постоянных, приведенные в табл. 2.3, рекомендованы Национальной академией наук США — Национальным советом комитета по фундаментальным постоянным в 1963 г. В качестве предельных ошибок выбраны утроенные значения стандартных ошибок, вычисленных из экспериментальных данных по методу наименьших квадратов. Величины, имеющие отношение к атомным весам, определены посредством единой шкалы атомных весов, за единицу (а.е.м.) которой принята 1/12 массы изотопа C^{12}.

Таблица 2.1. **Общие единицы измерения и коэффициенты перевода**

Величина	Единица СИ	Единица СГС	Единица СИ/ Единица СГС
Сила	ньютон (Н)	дина (дин)	10^5
Энергия	джоуль (Дж)	эрг (эрг)	10^7
Мощность	ватт (Вт)	*)	10^7

*) Во всех случаях пропусков не имеется специального названия единиц. В данном случае речь идет о единице мощности СГС.

Таблица 2.2. Единицы измерения и коэффициенты перевода электрических и магнитных единиц

Величина	СИ	СГСМ	СГСЭ	ед. СИ/ед. СГСМ	ед. СИ/ед. СГСЭ
Ток	ампер (А)	абсолютный ампер	статический ампер	10^{-1}	$\sim 3 \cdot 10^{9}$
Заряд	кулон (Кл)	абсолютный кулон	статический кулон	10^{-1}	$\sim 3 \cdot 10^{9}$
Потенциал	вольт (В)	абсолютный вольт	статический вольт	10^{8}	$\sim 1/3 \cdot 10^{-2}$
Сопротивление	ом (Ом)	абсолютный ом	статический ом	10^{9}	$\sim 1/9 \cdot 10^{-11}$
Индуктивность	генри (Г)	сантиметр (см)		10^{9}	$\sim 1/9 \cdot 10^{-11}$
Емкость	фарада (Ф)		сантиметр	10^{-9}	$\sim 9 \cdot 10^{11}$
Напряженность магнитного поля	ампер-виток на метр (А · в/м)	эрстед (Э)		$4\pi \cdot 10^{-3}$ *)	$3 \cdot 10^{9}$ *)
Магнитодвижущая сила	ампер-виток (А · в)	гильберт (Гб)		$4\pi \cdot 10^{-1}$ *)	$\sim 3/10^{6}$ *)
Магнитный поток	вебер (Вб)	максвелл (Мкс)		10^{8}	$\sim 1/3 \cdot 10^{-2}$
Магнитная индукция	тесла (Т)	гаусс (Гс)		10^{4}	$\sim 1/3 \cdot 10^{-6}$
Электрическая индукция				10^{-5} *)	$\sim 3 \cdot 10^{-5}$ *)

*) Если используется нерационализированная система единиц, то эту величину нужно разделить на 4π. Другие величины не изменяются.

Пример. Если сила тока равна 100А, то ее значение в абсолютных амперах равно $100 \cdot 10^{-1} = 10$.

Таблица 2.3. Значения некоторых физических постоянных

Постоянная	Символ	Величина постоянной	Предельная ошибка*)	Единицы: Международная система МКСА		Единицы: Система СГС	
Скорость света в вакууме	c	2.9979250	± 10	$\times 10^{8}$	$м \cdot с^{-1}$	$\times 10^{10}$	$см \cdot с^{-1}$
Электронный заряд	e	1 6021917	70	10^{-19}	Кл	10^{-20}	$см^{1/2} \cdot г^{1/2}$ **)
		4 803250	21			10^{-10}	$см^{3/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1}$ ***)
Число Авогадро	N_A	6 022169	40	10^{23}	$моль^{-1}$	10^{23}	$моль^{-1}$
Масса покоя электрона	m_e	9.109558	54	10^{-31}	кг	10^{-28}	г
		5.485930	34	10^{-4}	а.е.м.	10^{-4}	а.е.м.
Масса покоя протона	m_p	1.672614	11	10^{-27}	кг	10^{-24}	г
		1.00727661	8	10^{0}	а.е.м.	10^{0}	а.е.м.
Масса покоя нейтрона	m_n	1.674920	11	10^{-27}	кг	10^{-24}	г
		1.00866520	10	10^{0}	а.е.м.	10^{0}	а.е.м.
Число Фарадея	F	9.648670	54	10^{4}	$Кл \cdot моль^{-1}$	10^{3}	$см^{1/2} \cdot г^{1/2} \cdot моль^{-1}$ **)
		2.892599	16			10^{14}	$см^{3/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1} \cdot моль^{-1}$ ***)
Постоянная Планка	h	6.626196	50	10^{-34}	Дж · с	10^{-27}	эрг · с
	$\hbar = h/2\pi$	1.0545919	80	10^{-34}	Дж · с	10^{-27}	эрг · с
Постоянная тонкой структуры	α	7.297351	11	10^{-3}		10^{-3}	
	$1/\alpha$	1 3703602	21	10^{2}		10^{2}	
	$\alpha/2\pi$	1.161409	16	10^{-3}		10^{-3}	
	α^2	5.325133	14	10^{-5}		10^{-5}	
Удельный заряд электрона	e/m_e	1.7588028	54	10^{11}	$Кл \cdot кг^{-1}$	10^{7}	$см^{1/2} \cdot г^{1/2}$ **)
		5.272759	16			10^{17}	$см^{3/2} \cdot г^{-1/2} \cdot с^{-1}$ ***)
Отношение кванта действия к кванту заряда	h/e	4 135708	14	10^{-15}	$Дж \cdot с \cdot Кл^{-1}$	10^{-7}	$см^{3/2} \cdot г^{1/2} \cdot с^{-1}$ **)
		1.3795234	46			10^{-17}	$см^{1/2} \cdot г^{1/2}$ ***)
Комптоновская длина волны электрона	λ_C	2.4263096	74	10^{-12}	м	10^{-10}	см
	$\bar{\lambda}_C = \lambda_C/2\pi$	3.861592	12	10^{-13}	м	10^{-11}	см
Комптоновская длина волны протона	$\lambda_{C,p}$	1.3214409	90	10^{-15}	м	10^{-13}	см
	$\lambda_{C,p}/2\pi$	2.103139	14	10^{-16}	м	10^{-14}	см
Постоянная Ридберга	R_∞	1.09737312	11	10^{7}	$м^{-1}$	10^{5}	$см^{-1}$
Боровский радиус	a_0	5.2917715	81	10^{-11}	м	10^{-9}	см
Классический радиус электрона	r_e	2 817939	13	10^{-15}	м	10^{-13}	см
	r_e^2	7.9398	6	10^{-30}	$м^2$	10^{-26}	$см^2$

Таблица 2.3 (*продолжение*)

Постоянная	Символ	Величина постоянной	Предельная ошибка *)	Единицы: Международная система МКСА		Единицы: Система СГС	
Томсоновское сечение рассеяния электрона	$8\pi r^2 e/3$	6.6515	5	10^{-29}	м^2	10^{-25}	см^2
Гиромагнитное отношение для протона	γ_p	2.6751965	82	10^8	рад·с$^{-1}$·тл$^{-1}$	10^4	рад·с$^{-1}$·Гс$^{-1}$ **)
	$\gamma/2\pi$	4.257707	13	10^7	Гц·тл$^{-1}$	10^3	с$^{-1}$·Гс$^{-1}$ **)
(без поправки на диамагнетизм, H_2O)	γ'	2.6751270	82	10^8	рад·с$^{-1}$·тл$^{-1}$	10^4	рад·с$^{-1}$·Гс$^{-1}$ **)
	$\gamma'/2\pi$	4.257597	13	10^7	Гц·тл$^{-1}$	10^3	с$^{-1}$Гс$^{-1}$ **)
Магнетон Бора	μ_B	9.274096	65	10^{-24}	Дж·Т$^{-1}$	10^{-21}	эрг·Гс$^{-1}$ **)
Ядерный магнетон	$\mu_{яд}$	5.050951	50	10^{-27}	Дж·Т$^{-1}$	10^{-24}	эрг·Гс$^{-1}$ **)
Магнитный момент протона	μ_p	1.4106203	99	10^{-26}	Дж·Т$^{-1}$	10^{-23}	эрг·Гс$^{-1}$ **)
	$\mu_p/\mu_{яд}$	2.792782	17	10^0		10^0	
(без поправки на диамагнетизм, H_2O)	$\mu'_p/\mu'_{яд}$	2.792709	17	10^0		10^0	
Аномальный угловой момент электрона	$(\mu_e/\mu_0)^{-1}$	1.159615	15	10^{-3}		10^{-3}	
Постоянная расщепления Зеемана	μ_B/hc	4.66858	4	10^{-1}	м$^{-1}$·Т$^{-1}$	10^{-5}	см$^{-1}$·Гс$^{-1}$ **)
Универсальная газовая постоянная	R	8.31434	35	10^0	Дж·К$^{-1}$·моль$^{-1}$	10^7	эрг·К$^{-1}$·моль$^{-1}$
Нормальный объем совершенного газа	V_0	2.24136	39	10^{-2}	м^3·моль$^{-1}$	10^4	см^3·моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	k	1.380622	59	10^{-23}	Дж·К$^{-1}$	10^{-16}	эрг·К$^{-1}$
Первая радиационная постоянная	$c_1 = 2\pi hc^2$	4.992579	38	10^{-16}	Вт·м^2	10^{-5}	эрг·см^2·с$^{-1}$
Вторая радиационная постоянная	$c_2 = hc/k$	1.438833	61	10^{-2}	м·К	10^0	см·К
Постоянная в законе смещения Вина	b	2.8978	4	10^{-3}	м·К	10^{-1}	см·К
Постоянная Стефана	σ	5.66961	96	10^{-8}	Вт·м$^{-2}$·К$^{-4}$	10^{-5}	эрг·см$^{-2}$·с$^{-1}$·К$^{-4}$
Гравитационная постоянная	G	6.6732	31	10^{-11}	Н·м^2·кг$^{-2}$	10^{-8}	дин·см^2·г$^{-2}$

*) Предельная ошибка выражена в единицах последнего знака числа, стоящего в предыдущем столбце. Предельная ошибка берется равной трем стандартным отклонениям.

**) Электромагнитная система.

***) Электростатическая система.

Таблица 2.4. **Внесистемные коэффициенты перевода**

Стандартное ускорение свободного падения g_0	$= 9.80665$ м · с$^{-2}$
Стандартное атмосферное давление p_0	$= 1.013250 \cdot 10^5$ н · м$^{-2}$ = $= 1.103250 \cdot 10^6$ дин · см$^{-2}$
1 термодинамическая калория *) (cal$_c$)	$= 4.1840$ дж
1 *I T* калория **) (cal$_s$)	$= 4.1868$ дж
1 литр (л)	$= 10^{-3}$ м^3
1 ангстрем (Å)	$= 10^{-10}$ м
1 бар	$= 10^5$ н·м$^{-2}$ = $= 10^6$ дин · см$^{-2}$
1 Гал	$= 10^{-2}$ м · сек$^{-2}$ = $= 1$ см · сек$^{-2}$

*) Используется чаще химиками.

**) Используется чаще инженерами.

Таблица 2.4 (*продолжение*)

1 астрономическая единица (а.е.)	$= 1.49598 \cdot 10^{11}$ м
1 световой год (св. год)	$= 9.46 \cdot 10^{15}$ м
1 парсек (пк)	$= 3.08 \cdot 10^{16}$ м = $= 3.26$ светового года

1 кюри (Ku); такой величиной радиоактивности обладает препарат, в котором происходит $3.700 \cdot 10^{10}$ распадов в секунду.

1 рентген (Р) — доза рентгеновского или гамма-излучения, которая образует в 0.07129 граммах воздуха $2.082 \cdot 10^9$ пар электрон-ионов.

Формула для коэффициента преломления радиоволн с частотой ниже $3 \cdot 10^{10}$ Гц земной атмосферой: $(n - 1) \cdot 10^6 = (77.6T)(p + 4810\, e/T)$, где n — коэффициент преломления, T — температура в К, p — полное давление в миллибарах, e — парциальное давление водяного пара в миллибарах.

Коэффициенты перевода единиц, принятых в США, в единицы метрической системы даны в табл. 2.5.

Таблица 2.5. **Коэффициенты перевода единиц измерения, принятых в США, в единицы измерения метрической системы СИ**

1 ярд	0.9144 м
1 фут	0.3048 м
1 дюйм	0.0254 м
1 уставная миля	1609.344 м
1 морская миля	1852 м
1 фунт	0.45359237 кг
1 унция	0.0283495 кг
1 фунт силы	4.44822 н
1 слаг	14.5939 кг
1 паундаль	0.138255 н
1 фунтофут	1.35582 дж
Температура в градусах Фаренгейта (°F)	32 + 9/5 температуры в градусах Цельсия (°C)
1 британская тепловая единица	1055 дж

Для британской тепловой единицы существуют различные определения. Здесь дано округленное среднее значение, которое отличается от наиболее важных определений не более чем на $3 \cdot 10^{-4}$.

Геодезические постоянные для принятого международного сфероида (по Хейфорду) даны в табл. 2.6. В качестве величин ускорения свободного падения приведены старые потсдамские величины, не поправленные на основе более поздних измерений. Приведенные значения, видимо, на 13 миллионных больше истинных. Все величины вычислены для поверхности геоида по международной формуле.

Таблица 2.6. **Геодезические постоянные**

$a = 6\,378\,388$ м, $f = 1/297$, $b = 6\,356\,912$ м

Широта	Длина 1′ параллели в м	Длина 1′ меридиана в м	g в $м \cdot с^{-2}$
0°	1855.398	1842.925	9.780490
15°	1792.580	1844.170	9.783940
30°	1608.174	1847.580	9.793378
45°	1314.175	1852.256	9.806294
60°	930.047	1856.951	9.819239
75°	481.725	1860.401	9.828734
90°	0	1861.666	9.832213

Глава 3

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

М. АБРАМОВИЦ

СОДЕРЖАНИЕ

3.1. БИНОМ И БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ; АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ; АРИФМЕТИЧЕСКОЕ, ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ, ГАРМОНИЧЕСКОЕ И ОБОБЩЕННОЕ СРЕДНЕЕ

Бином

3.1.1. $$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$$

(n — положительное целое).

Биномиальные коэффициенты (см. гл. 24)

3.1.2. $$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

3.1.3. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}.$$

3.1.4. $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

3.1.5. $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

3.1.6. $$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

3.1.7. $$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Таблица биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$

3.1.8.

n	k = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1											
2	1	2	1										
3	1	3	3	1									
4	1	4	6	4	1								
5	1	5	10	10	5	1							
6	1	6	15	20	15	6	1						
7	1	7	21	35	35	21	7	1					
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Более полная таблица приведена в гл. 24.

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

3.1.9. $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(a+(n-1)d)=$
$$=na+\frac{1}{2}n(n-1)d=\frac{n}{2}(a+l),$$
где l — последний член: $l=a+(n-1)d$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии

3.1.10. $s_n=a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$,
$$\lim_{n\to\infty}s_n=a/(1-r)\ (-1<r<1).$$

Арифметическое среднее A

3.1.11. $A=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Геометрическое среднее G

3.1.12. $G=(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}\ (a_k>0,\ k=1,2,\ldots,n)$.

Гармоническое среднее H

3.1.13. $\dfrac{1}{H}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)$
$$(a_k>0,\ k=1,2,\ldots,n).$$

Обобщенное среднее $M(t)$

3.1.14. $M(t)=\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^t\right)^{1/t}$.

3.1.15. $M(t)=0$, если $t<0$ и хотя бы одна из величин a_k равна нулю.

3.1.16. $\lim_{t\to\infty}M(t)=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}=\max a$.

3.1.17. $\lim_{t\to-\infty}M(t)=\min\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}=\min a$.

3.1.18. $\lim_{t\to0}M(t)=G$.

3.1.19. $M(1)=A$.

3.1.20. $M(-1)=H$.

3.2. НЕРАВЕНСТВА

Соотношения между арифметическим, геометрическим, гармоническим и обобщенным средним

3.2.1. $A\geqslant G\geqslant H$; равенство имеет место при
$$a_1=a_2=\ldots=a_n.$$

3.2.2. $\min a\leqslant M(t)\leqslant\max a$.

3.2.3. $\min a\leqslant G\leqslant\max a$.

Неравенства 3.2.2, 3.2.3 переходят в равенства, если все a_k равны или если $t<0$ и какая-либо из величин a_k равна нулю.

3.2.4. $M(t)<M(s)$ при $t<s$, за исключением случаев, когда все a_k равны между собой или когда $s<0$ и какая-либо из величин a_k равна нулю.

Неравенства треугольника

3.2.5. $|a_1|-|a_2|\leqslant|a_1+a_2|\leqslant|a_1|+|a_2|$.

3.2.6. $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|$.

Неравенство Чебышева

Если $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\ldots\geqslant a_n$,
$b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\ldots\geqslant b_n$, то

3.2.7. $n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$.

Неравенство Гёльдера для сумм

Если $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\ p>1,\ q>1$, то

3.2.8. $\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$.

Равенство имеет место, когда $|b_k|=c|a_k|^{p-1}$ (c — положительная постоянная). При $p=q=2$ имеем

Неравенство Коши

3.2.9. $\left[\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right]^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2$

(равенство при $a_k=cb_k$, c — постоянная).

Неравенство Гёльдера для интегралов

Если $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\ p>1,\ q>1$, то

3.2.10. $\int\limits_a^b|f(x)g(x)|\,dx\leqslant$
$$\leqslant\left[\int\limits_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int\limits_a^b|g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}.$$

Равенство имеет место, когда $|g(x)|=c|f(x)|^{p-1}$ (c — положительная постоянная). Если $p=q=2$, имеем

Неравенство Шварца

3.2.11. $\left[\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2\leqslant\int\limits_a^b[f(x)]^2\,dx\int\limits_a^b[g(x)]^2\,dx$.

Неравенство Минковского для сумм

Если $p > 1$ и $a_k, b_k > 0$ для всех k, то

3.2.12. $$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}.$$

Равенство имеет место, когда $b_k = ca_k$ (c — положительная постоянная).

Неравенство Минковского для интегралов

Если $p > 1$, то

3.2.13. $$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Равенство выполняется, когда $g(x) = cf(x)$ (c — положительная постоянная)

3.3. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Производные

3.3.1. $$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}\ (c \text{ — постоянная})$$

3.3.2. $$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

3.3.3. $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

3.3.4. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)\Big/v^2.$$

3.3.5. $$\frac{d}{dx}u(v) = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}.$$

3.3.6. $$\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln u\frac{dv}{dx}\right).$$

Теорема Лейбница о дифференцировании интеграла

3.3.7. $$\frac{d}{dc}\int_{a(c)}^{b(c)} f(x,c)\,dx = \int_{a(c)}^{b(c)} \frac{\partial}{\partial c}f(x,c)\,dx + f(b,c)\frac{db}{dc} - f(a,c)\frac{da}{dc}.$$

Теорема Лейбница о дифференцировании произведения

3.3.8. $$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \frac{d^n u}{dx^n}v + \binom{n}{1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \binom{n}{2}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + \binom{n}{r}\frac{d^{n-r}u}{dx^{n-r}}\frac{d^rv}{dx^r} + \ldots + u\frac{d^nv}{dx^n}.$$

3.3.9. $$\frac{dx}{dy} = 1\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

3.3.10. $$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-3}.$$

3.3.11. $$\frac{d^3x}{dy^3} = -\left[\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dy}{dx} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-5}.$$

Интегрирование по частям

3.3.12. $$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

3.3.13. $$\int uv\,dx = \left(\int u\,dx\right)v - \int\left(\int u\,dx\right)\frac{dv}{dx}\,dx.$$

Неопределенные интегралы от рациональных алгебраических функций

(постоянные интегрирования опущены)

3.3.14. $$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}\quad (n \neq -1).$$

3.3.15. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|.$$

Для вычисления интегралов вида $\int \frac{P(x)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, где $P(x)$ — многочлен и $n > 1$ — целое, полезны следующие формулы:

3.3.16. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{(4ac-b^2)^{1/2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{(4ac-b^2)^{1/2}}\quad (b^2-4ac < 0).$$

3.3.17. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{(b^2-4ac)^{1/2}}\ln\left|\frac{2ax+b-(b^2-4ac)^{1/2}}{2ax+b+(b^2-4ac)^{1/2}}\right|\quad (b^2-4ac > 0).$$

3.3.18. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{-2}{2ax+b}\quad (b^2-4ac = 0).$$

3.3.19. $$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

3.3.20. $$\int \frac{dx}{(a+bx)(c+dx)} = \frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{c+dx}{a+bx}\right|\quad (ad \neq bc).$$

3.3.21. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}.$

3.3.22. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{2b^2}\ln|a^2+b^2x^2|.$

3.3.23. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right|.$

3.3.24. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}.$

3.3.25. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-x}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

Неопределенные интегралы от иррациональных алгебраических функций

3.3.26. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(a+bx)(c+dx)]^{1/2}} =$

$$= \frac{2}{(-bd)^{1/2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{-d(a+bx)}{b(c+dx)}\right]^{1/2} \quad (bd<0).$$

3.3.27. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(a+bx)(c+dx)]^{1/2}} =$

$$= \frac{-1}{(-bd)^{1/2}}\arcsin\left(\frac{2bd\,x+ad+bc}{bc-ad}\right) \quad (b>0,\ d<0).$$

3.3.28. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(a+bx)(c+dx)]^{1/2}} =$

$$= \frac{2}{(bd)^{1/2}}\ln|[bd(a+bx)]^{1/2}+b(c+dx)^{1/2}| \quad (bd>0).$$

3.3.29. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+bx)^{1/2}(c+dx)} =$

$$= \frac{2}{[d(bc-ad)]^{1/2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{d(a+bx)}{(bc-ad)}\right]^{1/2} \quad (d(ad-bc)<0).$$

3.3.30. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+bx)^{1/2}(c+dx)} =$

$$= \frac{1}{[d(ad-bc)]^{1/2}}\ln\left|\frac{d(a+bx)^{1/2}-[d(ad-bc)]^{1/2}}{d(a+bx)^{1/2}+[d(ad-bc)]^{1/2}}\right| \quad (d(ad-bc)>0).$$

3.3.31. $\displaystyle\int [(a+bx)(c+dx)]^{1/2}\,dx =$

$$= \frac{(ad-bc)+2b(c+dx)}{4bd}[(a+bx)(c+dx)]^{1/2} - \frac{(ad-bc)^2}{8bd}\int \frac{dx}{[(a+bx)(c+dx)]^{1/2}}.$$

3.3.32. $\displaystyle\int \left[\frac{c+dx}{a+bx}\right]^{1/2} dx = \frac{1}{b}[(a+bx)(c+dx)]^{1/2} - \frac{(ad-bc)}{2b}\int \frac{dx}{[(a+bx)(c+dx)]^{1/2}}.$

3.3.33. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} =$

$$= a^{-1/2}\ln|2a^{1/2}(ax^2+bx+c)^{1/2}+2ax+b| \quad (a>0).$$

3.3.34. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} =$

$$= a^{-1/2}\operatorname{Arsh}\frac{(2ax+b)}{(4ac-b^2)^{1/2}} \quad (a>0,\ 4ac>b^2).$$

3.3.35. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} = a^{-1/2}\ln|2ax+b| \quad (a>0,\ b^2=4ac).$

3.3.36. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} = -(-a)^{-1/2}\arcsin\frac{(2ax+b)}{(b^2-4ac)^{1/2}}$

$$(a<0,\ b^2>4ac,\ |2ax+b|<(b^2-4ac)^{1/2}).$$

3.3.37. $\displaystyle\int (ax^2+bx+c)^{1/2}dx = \frac{2ax+b}{4a}(ax^2+bx+c)^{1/2} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}.$

3.3.38. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{1/2}} = -\int \frac{dt}{(a+bt+ct^2)^{1/2}},$

где $t = \dfrac{1}{x}$.

3.3.39. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} = \frac{1}{a}(ax^2+bx+c)^{1/2} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}.$

3.3.40. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2\pm a^2)^{1/2}} = \ln|x+(x^2\pm a^2)^{1/2}|.$

3.3.41. $\displaystyle\int (x^2\pm a^2)^{1/2}dx = \frac{x}{2}(x^2\pm a^2)^{1/2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x+(x^2\pm a^2)^{1/2}|.$

3.3.42. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{1/2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+(x^2+a^2)^{1/2}}{x}\right|.$

3.3.43. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{1/2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}.$

3.3.44. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{1/2}} = \arcsin\frac{x}{a}.$

3.3.45. $\displaystyle\int (a^2-x^2)^{1/2}\,dx =$

$$= \frac{x}{2}(a^2-x^2)^{1/2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

3.3.46. $\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{1/2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+(a^2-x^2)^{1/2}}{x}\right|.$

3.3.47. $\int \frac{dx}{(2ax-x^2)^{1/2}} = \arcsin\frac{x-a}{a}.$

3.3.48. $\int (2ax-x^2)^{1/2}\,dx =$

$$= \frac{x-a}{2}(2ax-x^2)^{1/2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}.$$

3.3.49. $\int \frac{dx}{(ax^2+b)(cx^2+d)^{1/2}} =$

$$= \frac{1}{[b(ad-bc)]^{1/2}}\operatorname{arctg}\frac{x(ad-bc)^{1/2}}{[b(cx^2+d)]^{1/2}} \quad (ad > bc).$$

3.3.50. $\int \frac{dx}{(ax^2+b)(cx^2+d)^{1/2}} =$

$$= \frac{1}{2[b(bc-ad)]^{1/2}}\ln\left|\frac{[b(cx^2+d)]^{1/2}+x(bc-ad)^{1/2}}{[b(cx^2+d)]^{1/2}-x(bc-ad)^{1/2}}\right| \quad (bc > ad).$$

3.4. ПРЕДЕЛЫ, МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ

Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)

3.4.1. Пусть в полуинтервале $a \leqslant x < b$ функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g'(x) \neq 0$. Пусть

$$\lim_{x\to b-} f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to b-} g(x) = 0$$

или

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to b-} g(x) = \infty.$$

Тогда, если

$$\lim_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l, \quad \text{то} \quad \lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)} = l$$

(b и l могут обращаться в ∞).

Максимумы и минимумы

3.4.2. (1) *Функции одной переменной.* Функция $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет *максимум*, если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, и имеет *минимум*, если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$. Точки x_0, в которых $f'(x_0) = 0$, называются *стационарными*.

3.4.3. (2) *Функции двух переменных.* Функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет *максимум* или *минимум*, если

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0,$$

$$\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \end{vmatrix}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} < 0;$$

при этом: максимум, если

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} < 0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} < 0;$$

минимум, если

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} > 0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} > 0.$$

3.5. АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ОШИБКИ

(1) Пусть x_0 — приближенное значение величины x. Тогда

3.5.1. a) *Абсолютной ошибкой* значения x_0 называется разность $\Delta x = x_0 - x$; $x - x_0$ называется поправкой к x.

3.5.2. b) *Относительной ошибкой* значения x_0 называется $\delta x = \frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta x}{x_0}$.

3.5.3. c) *Ошибкой в процентах* называется относительная ошибка, умноженная на 100.

3.5.4. (2) Абсолютная ошибка суммы или разности нескольких чисел не больше суммы абсолютных ошибок отдельных чисел.

3.5.5. (3) Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и абсолютная ошибка значения x_i $(i = 1, \ldots, n)$ есть Δx_i, то абсолютная ошибка значения f при малых Δx_i равна

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

3.5.6. (4) Относительная ошибка произведения или частного нескольких величин не больше суммы относительных ошибок отдельных величин.

3.5.7. (5) Если $y = f(x)$, то относительная ошибка значения y равна

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x.$$

Приближенные значения некоторых выражений

$$(|\varepsilon| \ll 1, \quad |\eta| \ll 1, \quad b \ll a)$$

3.5.8. $(a+b)^k \approx a^k + ka^{k-1}b.$

3.5.9. $(1+\varepsilon)(1+\eta) \approx 1 + \varepsilon + \eta.$

3.5.10. $\frac{1+\varepsilon}{1+\eta} \approx 1 + \varepsilon - \eta.$

3.6. БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

Формула Тейлора для функции одной переменной

3.6.1. $$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n.$$

3.6.2. $$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta_1 h)=\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta_2)^{n-1}f^{(n)}(x+\theta_2 h)\quad (0<\theta_{1,2}(x)<1).$$

3.6.3. $$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}f^{(n)}(x+th)\,dt.$$

3.6.4. $$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n.$$

3.6.5. $$R_n=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)\quad (a<\xi<x).$$

Разложения Лагранжа

Если $y=f(x)$, $y_0=f(x_0)$, $f'(x_0)\neq 0$, то

3.6.6. $$x=x_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y-y_0)^k}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left\{\frac{x-x_0}{f(x)-y_0}\right\}^k\right]_{x=x_0}.$$

3.6.7. $$g(x)=g(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y-y_0)^k}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(g'(x)\left\{\frac{x-x_0}{f(x)-y_0}\right\}^k\right)\right]_{x=x_0},$$

где $g(x)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция.

Биномиальные ряды

3.6.8. $$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\quad (-1<x<1).$$

3.6.9. $$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$$

3.6.10. $$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots\quad (-1<x<1).$$

3.6.11. $$(1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\frac{7x^5}{256}-\frac{21x^6}{1024}+\ldots\quad (-1<x<1).$$

3.6.12. $$(1+x)^{-1/2}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+\frac{35x^4}{128}-\frac{63x^5}{256}+\frac{231x^6}{1024}-\ldots\quad (-1<x<1).$$

3.6.13. $$(1+x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+\frac{22}{729}x^5-\frac{154}{6561}x^6+\ldots\quad (-1<x<1).$$

3.6.14. $$(1+x)^{-1/3}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2-\frac{14}{81}x^3+\frac{35}{243}x^4-\frac{91}{729}x^5+\frac{728}{6561}x^6-\ldots\quad (-1<x<1).$$

Асимптотические разложения

3.6.15. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^{-k}$ называется *асимптотическим разложением функции* $f(x)$, если

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^{-k}=O(x^{-n})\quad \text{при}\quad x\to\infty$$

для любого $n=1, 2, \ldots$ В этом случае используют обозначение

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{-k}.$$

Этот ряд может сходиться или расходиться.

Действия с рядами

Обозначим

$$s_1=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots,$$

$$s_2=1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+\ldots,$$

$$s_3=1+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\ldots$$

Тогда имеют место 3.6.16 — 3.6.24.

	Операция	c_1	c_2	c_3	c_4
3.6.16.	$s_3 = s_1^{-1}$	$-a_1$	$a_1^2 - a_2$	$2a_1a_2 - a_3 - a_1^3$	$2a_1a_3 - 3a_1^2a_2 - a_4 + a_2^2 + a_1^4$
3.6.17.	$s_3 = s_1^{-2}$	$-2a_1$	$3a_1^2 - 2a_2$	$6a_1a_2 - 2a_3 - 4a_1^3$	$6a_1a_3 + 3a_2^2 - 2a_4 - 12a_1^2a_2 + 5a_1^4$
3.6.18.	$s_3 = s_1^{1/2}$	$\frac{1}{2}a_1$	$\frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{8}a_1^2$	$\frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{4}a_1a_2 + \frac{1}{16}a_1^3$	$\frac{1}{2}a_4 - \frac{1}{4}a_1a_3 - \frac{1}{8}a_2^2 + \frac{3}{16}a_1^2a_2 - \frac{5}{128}a_1^4$
3.6.19.	$s_3 = s_1^{-1/2}$	$-\frac{1}{2}a_1$	$\frac{3}{8}a_1^2 - \frac{1}{2}a_2$	$\frac{3}{4}a_1a_2 - \frac{1}{2}a_3 - \frac{5}{16}a_1^3$	$\frac{3}{4}a_1a_3 + \frac{3}{8}a_2^2 - \frac{1}{2}a_4 - \frac{15}{16}a_1^2a_2 + \frac{35}{128}a_1^4$
3.6.20.	$s_3 = s_1^n$	na_1	$\frac{1}{2}(n-1)c_1a_1 + na_2$	$c_1a_2(n-1) + \frac{1}{6}c_1a_1^2(n-1)(n-2) + na_3$	$na_4 + c_1a_3(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) \times a_2^2 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)c_1a_1a_2 + \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)c_1a_1^3$
3.6.21.	$s_3 = s_1s_2$	$a_1 + b_1$	$b_2 + a_1b_1 + a_2$	$b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3$	$b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4$
3.6.22.	$s_3 = s_1/s_2$	$a_1 - b_1$	$a_2 - (b_1c_1 + b_2)$	$a_3 - (b_1c_2 + b_2c_1 + b_3)$	$a_4 - (b_1c_3 + b_2c_2 + b_3c_1 + b_4)$
3.6.23.	$s_3 = \exp(s_1 - 1)$	a_1	$a_2 + \frac{1}{2}a_1^2$	$a_3 + a_1a_2 + \frac{1}{6}a_1^3$	$a_4 + a_1a_3 + \frac{1}{2}a_2^2 + \frac{1}{2}a_2a_1^2 + \frac{1}{24}a_1^4$
3.6.24.	$s_3 = 1 + \ln s_1$	a_1	$a_2 - \frac{1}{2}a_1c_1$	$a_3 - \frac{1}{3}(a_2c_1 + 2a_1c_2)$	$a_4 - \frac{1}{4}(a_3c_1 + 2a_2c_2 + 3a_1c_3)$

Обращение рядов

3.6.25. Пусть

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + \ldots$$

Тогда

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + Gy^7 + \ldots,$$

где

$$aA = 1$$
$$a^3B = -b,$$
$$a^5C = 2b^2 - ac,$$
$$a^7D = 5abc - a^2d - 5b^3,$$
$$a^9E = 6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c,$$
$$a^{11}F = 7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2bc^2 - 42b^5 - 28a^2b^2d,$$
$$a^{13}G = 8a^4bf + 8a^4ce + 7a^4d^2 + 120a^2b^3d + 180a^2b^2c^2 + 132b^6 - a^5g - 36a^3b^2e - 72a^3bcd - 12a^3c^3 - 330ab^4c.$$

Преобразование Куммера

3.6.26. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$ — сходящийся ряд, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c$ — сходящийся ряд с известной суммой c и $\lim \frac{a_k}{c_k} = \lambda \neq 0$. Тогда

$$s = \lambda c + \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \lambda\frac{c_k}{a_k}\right)a_k.$$

Преобразование Эйлера

3.6.27. Если $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots$ — сходящийся ряд с суммой s, то

$$s = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \Delta^k a_0}{2^{k+1}}, \quad \Delta^k a_0 = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}a_{k-m}.$$

Формула суммирования Эйлера—Маклорена

3.6.28. $$\sum_{k=1}^{n-1} f_k = \int_0^n f(k)\,dk - \frac{1}{2}[f(0)+f(n)] + \frac{1}{12}[f'(n)-f'(0)] - \frac{1}{720}[f'''(n)-f'''(0)] + \frac{1}{30\,240}[f^{(V)}(n)-f^{(V)}(0)] - \frac{1}{1\,209\,600}[f^{(VII)}(n)-f^{(VII)}(0)] + \ldots$$

3.7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ

Декартова (алгебраическая) форма

3.7.1. $z = x + iy$.

Тригонометрическая форма

3.7.2. $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

3.7.3. Модуль: $|z| = (x^2+y^2)^{1/2} = r$.

3.7.4. Аргумент: $\arg z = \operatorname{arctg}(y/x) = \theta$ (другие обозначения аргумента: $\operatorname{am} z$ и $\operatorname{ph} z$).

3.7.5. Действительная часть: $x = \operatorname{Re} z = r\cos\theta$.

3.7.6. Мнимая часть: $y = \operatorname{Im} z = r\sin\theta$.

Число, комплексно сопряженное с $z = x + iy$

3.7.7. $\bar z = x - iy$.

3.7.8. $|\bar z| = |z|$.

3.7.9. $\arg \bar z = -\arg z$.

Умножение и деление

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

3.7.10. $z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

3.7.11. $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

3.7.12. $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

3.7.13. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar z_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

3.7.14. $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

3.7.15. $$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Степени

3.7.16. $z^n = r^n e^{in\theta}$.

3.7.17. $z^n = r^n\cos n\theta + ir^n\sin n\theta$ $\quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

3.7.18. $z^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$.

3.7.19. $z^3 = x^3 - 3xy + i(3x^2y - y^3)$.

3.7.20. $z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3)$.

3.7.21. $z^5 = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + i(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)$.

3.7.22. $$z^n = \left[x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{4}x^{n-4}y^4 - \ldots\right] + i\left[\binom{n}{1}x^{n-1}y - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \ldots\right] \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3.7.23. Если $z^n = u_n + iv_n$, то $z^{n+1} = u_{n+1} + iv_{n+1}$, где $u_{n+1} = xu_n - yv_n$, $v_{n+1} = xv_n + yu_n$. $\operatorname{Re} z^n$ и $\operatorname{Im} z^n$ называются *гармоническими* многочленами.

3.7.24. $$\frac{1}{z} = \frac{\bar z}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

3.7.25. $$\frac{1}{z^n} = \frac{\bar z^n}{|z|^{2n}} = (z^{-1})^n.$$

Корни

3.7.26. $$z^{1/2} = \sqrt{z} = r^{1/2}e^{i\theta/2} = r^{1/2}\cos\frac{\theta}{2} + ir^{1/2}\sin\frac{\theta}{2}.$$

При $-\pi < \theta \leqslant \pi$ эта формула дает главное значение корня. Другой корень имеет противоположный знак. Главное значение корня определяется формулой

3.7.27. $$z^{1/2} = \left[\frac{1}{2}(r+x)\right]^{1/2} \pm i\left[\frac{1}{2}(r-x)\right]^{1/2} = u \pm iv,$$

где $2uv = y$ и знак перед v совпадает со знаком y.

3.7.28. $z^{1/n} = r^{1/n}e^{i\theta/n}$ (главное значение при $-\pi < \theta \leqslant \pi$). Другие корни: $r^{1/n}e^{i(\theta+2\pi k)/n}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$.

Неравенства

3.7.29. $$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Комплексные функции, уравнения Коши—Римана

Функция $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — действительные функции, *аналитична* в тех точках $z = x + iy$, в которых выполняются *уравнения Коши — Римана:*

3.7.30. $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если $z = re^{i\theta}$, то

3.7.31. $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Уравнение Лапласа

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ называются *гармоническими.* Они удовлетворяют *уравнению Лапласа:*

в декартовых координатах

3.7.32. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

в полярных координатах

3.7.33. $$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0.$$

3.8. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решение квадратных уравнений

3.8.1. Корни уравнения $az^2 + bz + c = 0$ с действительными коэффициентами определяются формулой

$$z_{1,2} = -\left(\frac{b}{2a}\right) \pm \frac{1}{2a} D^{1/2}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

При этом $z_1 + z_2 = -b/a$, $z_1 z_2 = c/a$.

Уравнение имеет: два действительных различных корня, если $D > 0$; два равных действительных корня, если $D = 0$; два комплексно сопряженных корня, если $D < 0$.

Решение кубических уравнений

3.8.2. Дано уравнение $z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ с действительными коэффициентами. Пусть

$$q = \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{9} a_2^2, \quad r = \frac{1}{6}(a_1 a_2 - 3a_0) - \frac{1}{27} a_2^3.$$

Если $q^3 + r^2 > 0$, то имеется один действительный корень и два комплексно сопряженных. Если $q^3 + r^2 = 0$, то все корни действительны и по крайней мере два из них равны. Если $q^3 + r^2 < 0$, то все корни действительны (неприводимый случай).

Пусть

$$s_1 = [r + (q^3 + r^2)^{1/2}]^{1/3}, \quad s_2 = [r - (q^3 + r^2)^{1/2}]^{1/3};$$

тогда

$$z_1 = (s_1 + s_2) - \frac{a_2}{3},$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{a_2}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2),$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{a_2}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2).$$

Если z_1, z_2, z_3 — корни кубического уравнения, то

$$z_1 + z_2 + z_3 = -a_2,$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = a_1,$$

$$z_1 z_2 z_3 = -a_0.$$

Решение уравнений четвертой степени

3.8.3. Дано уравнение $z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ с действительными коэффициентами. Находим действительный корень u_1 кубического уравнения

$$u^3 - a_2 u^2 + (a_1 a_3 - 4a_0)u - (a_1^2 + a_0 a_3^2 - 4a_0 a_2) = 0$$

и определяем четыре корня уравнения четвертой степени из двух квадратных уравнений

$$v^2 + \left[\frac{a_3}{2} \mp \left(\frac{a_3^2}{4} + u_1 - a_2\right)^{1/2}\right] v + \frac{u_1}{2} \mp \left[\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 - a_0\right]^{1/2} = 0.$$

Если все корни кубического уравнения действительны, то нужно использовать то значение u_1, при котором квадратное уравнение имеет действительные коэффициенты и выбрать знаки так, чтобы если

$$z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = (z^2 + p_1 z + q_1)(z^2 + p_2 z + q_2),$$

то

$$p_1 + p_2 = a_3, \quad p_1 p_2 + q_1 + q_2 = a_2,$$

$$p_1 q_2 + p_2 q_1 = a_1, \quad q_1 q_2 = a_0.$$

Если z_1, z_2, z_3, z_4 — корни данного уравнения, то

$$\sum z_i = -a_3, \quad \sum z_i z_j z_k = -a_1,$$

$$\sum z_i z_j = a_2, \quad z_1 z_2 z_3 z_4 = a_0.$$

3.9. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Общие замечания

3.9.1. Пусть $x = x_1$ — приближенное значение $x = \xi$, где $f(\xi) = 0$, и пусть x_1 и ξ лежат на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Положим $x_{n+1} = x_n + c_n f(x_n)$ $(n = 1, 2, ..)$ Тогда при определенном выборе чисел c_n последовательность x_n сходится к корню ξ.

Например, если $c_n = -1/f'(x_n)$, то приходим к методу Ньютона решения нелинейных уравнений.

Если $c_n = c$ для всех n, то имеет место *метод простой итерации*.

Степень сходимости метода приближений

3.9.2. Пусть $x_1, x_2, x_3, ..$ — бесконечная последовательность приближений к числу ξ. Тогда, если

$$|x_{n+1} - \xi| < A|x_n - \xi|^k \quad (n = 1, 2, ...),$$

где A и k не зависят от n, то говорят, что последовательность имеет сходимость по крайней мере k-й степени (или порядка) к числу ξ. При $k = 1$ и $A < 1$ сходимость линейна, при $k = 2$ квадратична.

Правило ложного положения

3.9.3. Пусть дана функция $y = f(x)$. Для того чтобы найти ξ, при котором $f(\xi) = 0$, нужно выбрать такие x_0 и x_1, чтобы $f(x_0)$ и $f(x_1)$ имели разные знаки, и вычислить

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)}{(f_1 - f_0)} f_1 = \frac{f_1 x_0 - f_0 x_1}{f_1 - f_0}.$$

Затем нужно проделать ту же операцию с x_2 и с тем из чисел x_0 и x_1, для которого $f(x_0)$ или $f(x_1)$ имеет знак, противоположный знаку $f(x_2)$. Правило ложного положения эквивалентно обратной линейной интерполяции.

Метод итераций

3.9.4. Итерационная схема $x_{k+1} = F(x_n)$ сходится к корню уравнения $x = F(x)$, если

(1) $|F'(x)| \leqslant q < 1$ для $a \leqslant x \leqslant b$,

(2) $a \leqslant x_0 \pm \dfrac{|F(x_0) - x_0|}{1 - q} \leqslant b$.

Метод последовательных приближений Ньютона

3.9.5. Если $x = x_k$ — приближенные значения решения $x = \xi$ уравнения $f(x) = 0$, то последовательность

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

сходится квадратично к $x = \xi$. При этом имеет место:

(1) *монотонная сходимость*, если $f(x_0)\,f''(x_0) > 0$ и $f'(x)$, $f''(x)$ не меняют знака в интервале (x_0, ξ), или

(2) *осцилляторная сходимость*, если $f(x_0)\,f''(x_0) < 0$ и $f'(x)$, $f''(x)$ не меняют знака в интервале (x_0, x_1), $x_0 \leqslant \xi \leqslant x_1$.

Применение метода Ньютона к вычислению действительного корня n-й степени

3.9.6. Пусть дано уравнение $x^n = N$. Если x_k — приближенное значение $x = N^{1/n}$, то последовательность

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left[\frac{N}{x_k^{n-1}} + (n-1)\,x_k\right]$$

квадратично сходится к x.

При $n = 2$

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{x_k} + x_k\right),$$

при $n = 3$

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{N}{x_k^2} + 2x_k\right).$$

δ^2-метод Эйткена ускорения сходимости

3.9.7. Если x_k, x_{k+1}, x_{k+2} — три последовательные итерации в последовательности приближений к истинному значению x_k и известно, что последовательность сходится примерно как геометрическая прогрессия, то

$$\bar{x}_k = x_k - \frac{(x_k - x_{k+1})^2}{\Delta^2 x_k} = \frac{x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2}{\Delta^2 x_k},$$

где

$$\Delta^2 x_k = x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2},$$

является более точным приближением к x. Действительно, если $x_k = x + O(\lambda^k)$, то $\bar{x} = x + O(\lambda^k)$, $|\lambda| < 1$.

3.10. ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЯХ

Определения

3.10.1. (1) Пусть

$$f = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

$$f = b_0 + \frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\cdots$$

Если число членов конечно, то f называется *конечной непрерывной дробью*. Если число членов бесконечно, то f называется *бесконечной непрерывной дробью*, а конечная дробь

$$f_n = \frac{A_n}{B_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\cdots\frac{a_n}{b_n}$$

— *n-й подходящей дробью для f.*

(2) Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{B_n}$ существует, то бесконечная непрерывная дробь называется сходящейся. Если $a_i = 1$ и b_i — целые числа, то непрерывная дробь всегда сходится.

Теоремы

(1) Если a_i и b_i положительны, то $f_{2n} < f_{2n+2}$, $f_{2n-1} > f_{2n+1}$.

(2) Если $f_n = \dfrac{A_n}{B_n}$, то

$$A_n = b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2},$$
$$B_n = b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2},$$

где $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$, $B_0 = 1$.

(3) $$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-2} \\ B_{n-1} & B_{n-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix}.$$

(4) $$A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n = (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n} a_k.$$

(5) Для любого $n \geqslant 0$ и любых $c_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$f_n = b_0 + \frac{c_1a_1}{c_1b_1+}\,\frac{c_1c_2a_2}{c_2b_2+}\,\frac{c_2c_3a_3}{c_3b_3+}\cdots\frac{c_{n-1}c_na_n}{c_nb_n}.$$

(6) $$1 + b_2 + b_2b_3 + \ldots + b_2b_3\ldots b_n =$$

$$= \frac{1}{1-}\,\frac{b_2}{b_2+1-}\,\frac{b_3}{b_3+1-}\cdots\frac{b_n}{-b_n+1},$$

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1-}\,\frac{u_1^2}{u_1+u_2-}\cdots\frac{u_{n-1}^2}{-u_{n-1}+u_n},$$

$$\frac{1}{a_0} - \frac{x}{a_0a_1} + \frac{x^2}{a_0a_1a_2} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{a_0a_1a_2\ldots a_n} =$$

$$= \frac{1}{a_0+}\,\frac{a_0x}{a_1-x+}\,\frac{a_1x}{a_2-x+}\cdots\frac{a_{n-1}x}{+a_n-x}.$$

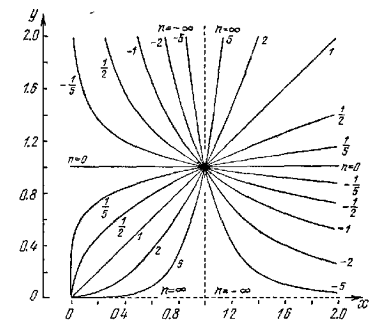


Рис. 3.1. $y = x^n$; $\pm n = 0,\ 1/5,\ 1/2,\ 1,\ 2,\ 5$.

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Решить квадратное уравнение $x^2 - 18.2x + 0.056 = 0$ при условии, что коэффициенты равны 18.2 ± 0.1 и 0.056 ± 0.001. Из 3.8.1 следует, что

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(18.\underline{2} \pm [(18.\underline{2})^2 - 4(0.05\underline{6})]^{1/2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(18.\underline{2} \pm [33\underline{1}.016]^{1/2}) = \frac{1}{2}(18.\underline{2} \pm 18.\underline{1939});$$

$$x_1 = 18.1969, \quad x_2 = 0.003.$$

Меньший корень можно получить точнее:

$$0.05\underline{6}/18.\underline{1969} = 0.003\underline{1} \pm 0.0001.$$

Пример 2. Вычислить $(-3 + 0.0076\,i)^{1/2}$. По формуле 3.7.26 имеем $(-3 + 0.0076\,i)^{1/2} = u + iv$, где

$$u = \frac{y}{2v}, \quad v = \left(\frac{r - x}{2}\right)^{1/2}, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$r = [(-3)^2 + (0.0076)^2]^{1/2} = (9.00005776)^{1/2} = 3.00000\,9627,$$

$$v = \left[\frac{3.00000\,9627 - (-3)}{2}\right]^{1/2} = 1.73205\,2196,$$

$$u = \frac{y}{2v} = \frac{0.0076}{2(1.73205\,2196)} = 0.00219\,392926.$$

Отметим, что вычислено главное значение квадратного корня.

Пример 3. Решить кубическое уравнение $x^3 - 18.1x - 34.8 = 0$. Для того чтобы применить метод Ньютона, сначала составим таблицу значений многочлена $f(x) = x^3 - 18.1x - 34.8$:

x	$f(x)$
4	−43.2
5	−0.3
6	72.6
7	181.5

С помощью обратной линейной интерполяции получаем

$$x_0 = 5 + \frac{0 - (-0.3)}{72.6 - (-0.3)} = 5.004.$$

Метод Ньютона при $f'(x) = 3x^2 - 18.1$ дает

$$x_1 \approx x_0 - f(x_0)/f'(x_0) \approx$$

$$\approx 5.004 - \frac{(-0.07215\,9936)}{57.020048} \approx 5.00526.$$

Вычислим также следующее приближение, которое будет равно 5.00526 5097. Далее, разделив $f(x)$ на $x - 5.00526\,5097$, получаем квадратный многочлен $x^2 + 5.00526\,5097\,x + 6.95267\,869$, нули которого равны $-2.50263\,2549 \pm 0\,83036\,800\,i$.

Пример 4. Решить уравнение четвертой степени

$$x^4 - 2.37752\,4922\,x^3 + 6.07350\,5741\,x^2 - 11.17938\,023x + 9.05265\,5259 = 0.$$

Разложение на два квадратных множителя

$$(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)$$

с помощью обратной интерполяции

Начиная с пробного значения $q_1 = 1$, последовательно вычисляем

q_1	$q_2 = \frac{a_0}{q_1}$	$p_1 = \frac{a_1 - a\,q_1}{q_2 - q_1}$	$p_2 = a_3 - p_1$	$y(q_1) = q_1 + q_2 + p_1p_2 - a_2$
1	9.053	−1.093	−1.284	5.383
2	4.526	−2.543	0.165	0.032
2.2	4.115	−3.106	0.729	−2.023

Ищем то значение q_1, для которого $y(q_1) = 0$. Обратная интерполяция значений $y(q_1)$ дает $y(q_1) \approx 0$ при $q_1 \approx 2.003$.

Теперь

q_1	q_2	p_1	p_2	$y(q_1)$
2.003	4.520	−2.550	0.172	0.011

Обратная интерполяция между $q_1 = 2.2$ и $q_1 = 2.003$ дает $q_1 = 2.0041$ и, таким образом,

q_1	q_2	p_1	p_2	$y(q_1)$
2.0041	4.51706 7640	−2.55259 257	0.17506 765	0.00078 552
2.0042	4.51684 2260	−2.55282 851	0.17530 358	0.00001 655
2.0043	4.51661 6903	−2.55306 447	0.17553 955	−0.00075 263

Обратная интерполяция дает $q_1 = 2.00420\,2152$. Окончательно получаем

q_1	q_2	p_1	p_2	$y(q_1)$
2.00420 2152	4.51683 7410	−2.55283 358	0.17530 8659	−0.00000 0011

Умножение и деление с удвоенной точностью на настольной вычислительной машине

Пример 5. Умножить $M = 20243\,97459\,71664\,32102$ на $m = 69732\,82428\,43662\,95023$ на настольной счетной машине $10 \times 10 \times 20$.

Пусть $M_0 = 20243\,97459$, $M_1 = 71664\,32102$, $m_0 = 69732\,82428$, $m_1 = 43662\,95023$. Тогда

$$Mm = M_0 m_0\, 10^{20} + (M_0 m_1 + M_1 m_0)\, 10^{10} + M_1 m_1.$$

1) Вычислим $M_1 m_1 = 31290\,75681\,96300\,28346$ и запишем цифры 96300 28346, находящиеся в разрядах с 1-го по 10-й счетчика произведений.

2) Перенесем цифры 31290 75681 из разрядов 11—20 счетчика произведений в разряды 1—10.

3) Вычислим $M_1 m_0 + M_0 m_1 + 31290\,75681 = 58812\,67160\,12663\,25894$ и запишем цифры 12663 25894 из разрядов 1—10.

4) Перенесем цифры 58812 67160 из разрядов 11—20 в разряды 1—10.

5) Вычислим $M_0 m_0 + 58812\,67160 = 14116\,69523\,40138\,17612$.

Ниже показано, как получается результат

						96300	28346
				12663	25894		
14116	69523	40138	17612				
14116	69523	40138	17612	12663	25894	96300	28346

Если мы хотим получить произведение Mm с 20 знаками, то нужно записать лишь результат, полученный на пятом шаге. Далее, если допустимая ошибка равна единице 20-го разряда, то операция $M_1 m_1$ может быть опущена. Если M или m содержат менее 20 цифр, удобно располагать их так, как если бы они имели по 20 цифр. Этот процесс умножения может быть распространен на любую требуемую точность.

Пример 6. Разделить $N = 14116\,69523\,40138\,17612$ на $d = 20243\,97459\,71664\,32102$.

Первый метод — линейная интерполяция.

$$N/20243\ 97459 \cdot 10^{10} = 0.69732\ 82430\ 90519\ 39054$$
$$N/20243\ 97460 \cdot 10^{10} = 0.69732\ 82427\ 46057\ 26941$$
$$\text{Разность} = 3\ 44462\ 12113$$

Разность $\times\ 0.71664\,32102 = 24685\,64402\underline{8} \cdot 10^{-20}$ (отметим, что здесь выполняется умножение $11 \cdot 10$ разрядов). Частное равно

$$(69732\,82430\,90519\,39054 - 246856\,4402\underline{8}) \cdot 10^{-20} =$$
$$= 0.69732\,82428\,43662\,9502\underline{6}.$$

Ошибка в 3 единицы 20-го разряда получилась за счет того, что была отброшена вторая разность.

Второй метод. Если N и d — числа, каждое из которых содержит не более 19 цифр, то положим $N = N_1 + N_0 \cdot 10^9$, $d = d_1 + d_0 \cdot 10^9$, где N_0 и d_0 содержат по 10 цифр, а N_1 и d_1 не больше, чем по 9 цифр. Тогда

$$\frac{N}{d} = \frac{N_0 \cdot 10^9 + N_1}{d_0 \cdot 10^9 + d_1} \approx \frac{1}{d_0 \cdot 10^9}\left[N - \frac{N_0 d_1}{d_0}\right].$$

Здесь

$$N = 14116\ 69523\ 40138\ 1761,$$
$$d = 20243\ 97459\ 71664\ 3210,$$
$$N_0 = 14116\ 69523,\quad d_0 = 20243\ 97459,$$
$$d_1 = 71664\ 3210.$$

1) $N_0 d_1 = 10116\,63378\,42188\,8830$ (счетчик произведений).

2) $(N_0 d_1)/d_0 = 49973\,55504$ (счетчик частных).

3) $N - (N_0 d_1)/d_0 = 14116\,69522\,90164\,62106$ (счетчик произведений).

4) $[N - (N_0 d_1)/d_0]/d_0 \cdot 10^9 = 0.69732\,82428$ — первые 10 цифр частного на счетчике частных. Остаток, равный 08839 11654, располагается в счетчике произведений в разрядах с 1-го по 10-й.

5) $r/(d_0 \cdot 10^9) = 0.43662\,9502 \cdot 10^{-10}$ — следующие 9 цифр частного. $N/d = 0.69732\,82428\,43662\,9502$.

Этот метод может быть модифицирован так, чтобы дать частное с 20 значащими цифрами.

Первый метод с помощью интерполяции высокого порядка может быть распространен на деление чисел, содержащих более 20 цифр.

Пример 7. Просуммировать ряд $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ с 5 десятичными знаками, используя преобразование Эйлера. Сумма первых 8 членов с точностью 6D равна 0.634524. Обозначив $u_n = 1/n$, имеем

n	u_n	Δu_n	$\Delta^2 u_n$	$\Delta^3 u_n$	$\Delta^4 u_n$
9	0.111111				
		−11111			
10	0.100000		2020		
		− 9091		−505	
11	0.090909		1515		156
		− 7576		−349	
12	0.083333		1166		
		− 6410			
13	0.076923				

Из 3.6.27 получим

$$S = 0.634524 + \frac{0.111111}{2} - \frac{(-0.011111)}{2^2} + \frac{0.002020}{2^3} - \frac{(-0.000505)}{2^4} + \frac{0.000156}{2^5} =$$
$$= 0.634524 + 0.055556 + 0.002778 + 0.000253 + 0.000032 + 0.000005 = 0.693148$$
$$(S = \ln 2 = 0.6931472 \quad \text{с 7D}).$$

Пример 8. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

с точностью 4D, используя преобразование Эйлера:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin (k\pi + t)}{k\pi + t}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin t}{k\pi + t}\, dt.$$

Вычисляя интегралы в последней сумме при помощи численного интегрирования, получаем

k	$\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{k\pi + t}\,dt$				
0	1.85194				
1	0.43379				
2	0.25661				
3	0.18260	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
4	0.14180				
		−2587			
5	0.11593		799		
		−1788		−321	
6	0.09805		478		153
		−1310		−168	
7	0.08495		310		
		−1000			
8	0.07495				

Сумма до $k = 3$ равна 1 49216. Применяя к остатку преобразование Эйлера, имеем

$$\frac{1}{2}(0.14180) - \frac{1}{2^2}(-0.02587) + \frac{1}{2^3}(0.00799) - $$
$$- \frac{1}{2^4}(-0.00321) + \frac{1}{2^5}(0.00153) =$$
$$= 0.07090 + 0.00647 + 0.00100 + 0.00020 + 0.00005 = 0.07862.$$

Таким образом, для интеграла получаем значение 1.5707$\bar{8}$. Значение интеграла с точностью 6S равно 1.57080.

Пример 9. Просуммировать ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$, используя формулу суммирования Эйлера—Маклорена.

Из 3.6.28 для $n = \infty$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \sum_{k=1}^{10} k^{-2} + \sum_{k=1}^{\infty}(k+10)^{-2} =$$
$$= \sum_{k=1}^{10} k^{-2} + \int\limits_0^{\infty} f(k)dk - \frac{1}{2}f_0 - \frac{1}{12}f_0' + \frac{1}{720}f_0''' - \ldots,$$

где $f(k) = (k + 10)^{-2}$. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = 1.54976\,7731 + 0.1 -$$
$$- 0.005 + 0.00016\,6667 - 0.00000\,0333 =$$
$$= 1.64493\,4065.$$

Для сравнения приводим значение $\frac{\pi^2}{6} = 1.64493\,4067$.

Пример 10. Вычислить

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{3+}\,\frac{4x^2}{5+}\,\frac{9x^2}{7+}\cdots$$

с точностью 5D для $x = 0\,2$. Обозначим $a_1 = x$, $a_n = (n - 1)^2 x^2$ для $n > 1$, $b_0 = 0$, $b_n = 2n - 1$, $A_{-1} = 1$, $B_{-1} = 0$, $A_0 = 0$, $B_0 = 1$.

Для $n \geqslant 1$

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-2} \\ B_{n-1} & B_{n-2} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ (n-1)^2 x^2 \end{bmatrix} \quad \frac{A_0}{B_0} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.2 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \frac{A_1}{B_1} = 0.2,$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0.2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 0.04 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.6 \\ 3.04 \end{vmatrix} \quad \frac{A_2}{B_2} = 0.197368,$$

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 3.04 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 0.16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.032 \\ 15.36 \end{vmatrix} \quad \frac{A_3}{B_3} = 0.197396,$$

$$\begin{bmatrix} A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3.032 & 0.6 \\ 15.36 & 3.04 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 \\ 0.36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21.440 \\ 108.6144 \end{vmatrix} \quad \frac{A_4}{B_4} = 0.197396.$$

Заметим, что в рекуррентном методе вычисления непрерывных дробей исходные числители A_n и знаменатели B_n должны быть вычислены независимо. Числители и знаменатели, полученные сведением A_n/B_n к низшим членам, не могут быть использованы.

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

3.1. Buckingham R. A. Numerical methods. N. Y.: Pitman Publishing Corp , 1957.
3.2. Fort T. Finite differences. — Oxford: Clarendon Press, 1948.
3.3. Fox L. The use and construction of mathematical tables/National Physical Laboratory. — L. Her Majesty's Stationary Office, 1956. — (Mathematical tables; V. 1).
3.4. Hardy G. H. A course of pure mathematics. — N.Y.: Macmillan Co , 1947. Русский перевод: Харди Г. X. Курс чистой математики. — М.: ИЛ, 1949.
3.5. Hartree D. R. Numerical analysis. — Oxford: Clarendon Press, 1952.
3.6 Hildebrand F. B. Introduction to numerical analysis. — N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1956.
3.7. Housholder A. S. Principles of numerical analysis. — N. Y. McGraw-Hill Book Co., 1953.
3.8. Канторович Л. В, Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.; Л.: Физматгиз, 1962.
3.9. Knopp K. Theory and application of infinite series. — L.. Blackie and Son, 1951.
3.10. Kopal Z. Numerical analysis. — N. Y.: John Wiley and Sons, 1955.
3.11. Kowalewski G. Interpolation und genaherte Quadratur. — Leipzig Teubner, 1932
3.12. Kunz K. S. Numerical analysis. — N. Y. McGraw-Hill Book Co., 1957. Русский перевод: Кунц К. С. Численный анализ. — Киев: Техника, 1964.
3.13. Lanczos C. Applied analysis. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1956. Русский перевод: Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. — М.: Физматгиз, 1961.

3.14. Longman I. M. Note on a method for computing infinite integrals of oscillatory functions. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **52**, p. 764.

3.15. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. — М.: Гостехиздат, 1953.

3.16. Milne W. E. Numerical calculus. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1949. Русский перевод: Милн В. Э. Численный анализ. — М.: ИЛ, 1961.

3.17. Milne-Thomson L. M. The calculus of finite differences. — L.: Macmillan Co., 1951.

3.18. Mineur H. Techniques de calcul numérique. — P.: Librairie Polytechnique Ch. Beranger, 1952.

3.19. National Physical Laboratory. Modern computing methods. — L.: Her Majesty's Stationary Office, 1957 (Notes on Applied Science; № 16).

3.20. Rosser J. B. Transformations to speed the convergence of series. — J. Research NBS, 1951, 46, p. 56—64.

3.21. Scarborough J. B. Numerical mathematical analysis. — Baltimore: Johns Hopkins Press, — L.: Oxford Univ. Press, 1955. Русский перевод: Скарборо Дж. Численные методы математического анализа. — М.; Л.: ГТТИ, 1934.

3.22. Steffensen J. F. Interpolation. — N. Y.: Chelsea Publishing Co., 1950. Русский перевод: Стеффенсен Дж. Ф. Теория интерполяции. — М.: ОНТИ, 1935.

3.23. Wall H. S. Analytic theory of continued fractions. — N. Y.: Van Nostrand Co., 1948.

3.24. Whittaker E. T., Robinson G. The calculus of observations. — L.: Blackie and Son, 1944. Русский перевод: Уиттекер Э. и Робинсон Дж. Математическая обработка результатов измерений. — М.; Л.: ОНТИ, 1935.

3.25. Zurmühl R. Praktische Mathematik. — B.: Springer-Verlag, 1953.

Таблицы и сборники формул

3.26. Adams E. P. Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions. — Washington: Smithsonian Institution, 1957.

3.27. Comrie L. J. Barlow's tables of squares, cubes, square roots, cube roots and reciprocals of all integers up to 12,500. — N. Y. Chemical Publishing Co., 1954. Русский перевод см. в [3.35].

3.28. Dwight H. B. Tables of integrals and other mathematical data. — N. Y.: Macmillan Co., 1957. Русский перевод: Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977.

3.29. Gt. Britain H. M. Nautical Almanac Office. Interpolation and allied tables — L.: Her Majesty's Stationary Office, 1956.

3.30. Peirce B. O. A short table of integrals. — Boston: Ginn Co., 1956.

3.31. Schulz G. Formelsammlung zur praktischen Mathematik. — B.: De Gruyter Co., 1945.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

3.32. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973, Т. 1.

3.33. Градштейн М. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.; Л.: Наука, 1971.

3.34. Петерс И., Штейн И. Математические таблицы. — М.: ВЦ АН СССР, 1965. — (БМТ; Вып. 34).

3.35. Таблицы Барлоу квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин всех целых чисел от 1 до 15 000. — М.: Наука, 1975.

3.36. Таблицы степеней целых чисел. — М.: ВЦ АН СССР, 1963. — (БМТ; Вып. 18).

3.37. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. — М.: Гостехиздат, 1956.

Глава 4

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Р. ЦУКЕР

СОДЕРЖАНИЕ

4.1. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ($z = x + iy = re^{i\theta}$)

Интегральное представление

4.1.1. $\ln z = \int\limits_1^z \frac{dt}{t}$.

Здесь путь интегрирования не проходит через начало координат и не пересекает отрицательную часть действительной оси. $\ln z$ — однозначно определенная функция, аналитическая в плоскости z, разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси, действительная для действительных положительных значений z.

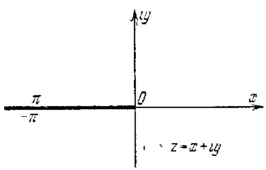


Рис. 4.1. Линия разреза для функций $\ln z$ и z^a (a не равно целому и нулю).

4.1.2. $\ln z = \ln r + i\theta \quad (-\pi < \theta \leqslant \pi)$.

4.1.3. $r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \ x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta,$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Логарифм комплексного переменного $\operatorname{Ln} z$ — многозначная функция, определенная выражением

4.1.4. $\operatorname{Ln} z = \int\limits_1^z \frac{dt}{t}$,

причем путь интегрирования не проходит через начало координат.

4.1.5. $\operatorname{Ln}(re^{i\theta}) = \ln(re^{i\theta}) + 2k\pi i = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, k — целое. $\ln z$ называется *главной ветвью функции* $\operatorname{Ln} z$.

Некоторые тождества

4.1.6. $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$, т. е. каждое значение $\operatorname{Ln}(z_1 z_2)$ есть одно из значений $\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$.

4.1.7. $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$

$$(-\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leqslant \pi).$$

4.1.8. $\operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$.

4.1.9. $\ln\frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2 \ (-\pi < \arg z_1 - \arg z_2 \leqslant \pi)$.

4.1.10. $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ (n — целое).

4.1.11. $\ln z^n = n \ln z$ (n — целое, $-\pi < n \arg z \leqslant \pi$).

Частные значения (см. гл. 1)

4.1.12. $\ln 1 = 0$.

4.1.13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$.

4.1.14. $\ln(-1) = \pi i$.

4.1.15. $\ln(\pm i) = \pm\frac{1}{2}\pi i$.

4.1.16. $\ln e = 1$ (e — действительное число), т. е. $\int\limits_1^e \frac{dt}{t} = 1$.

4.1.17. $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ 18284 \ldots$

(см. 4.2.21).

Логарифмы по произвольному основанию

4.1.18. $\log_a z = \dfrac{\ln z}{\ln a}$.

4.1.19. $\log_a z = \dfrac{\log_b z}{\log_b a}$.

4.1.20. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

4.1.21. $\log_e z = \ln z$.

4.1.22. $\log_{10} z = \dfrac{\ln z}{\ln 10} = \log_{10} e \ln z = (0.43429\ 44819\ \ldots) \ln z$.

4.1.23. $\ln z = \ln 10 \log_{10} z = (2.30258\ 50929\ldots) \log_{10} z$.

$\log_e x = \ln x$ называется *натуральным*, *неперовым* или *гиперболическим* логарифмом; $\log_{10} x = \lg x$ называется *десятичным* логарифмом.

Разложения в ряд

4.1.24. $\ln(1+z) = z - \dfrac{1}{2} z^2 + \dfrac{1}{3} z^3 - \ldots \quad (|z| \leqslant 1,\ z \neq -1)$.

4.1.25. $\ln z = \left(\dfrac{z-1}{z}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^3 + \ldots \quad (\operatorname{Re} z \geqslant 1/2)$.

4.1.26. $\ln z = (z-1) - \dfrac{1}{2}(z-1)^2 + \dfrac{1}{3}(z-1)^3 - \ldots \quad (|z-1| \leqslant 1,\ z \neq 0)$.

4.1.27. $\ln z = 2\left[\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right] \quad (\operatorname{Re} z \geqslant 0,\ z \neq 0)$.

4.1.28. $\ln\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = 2\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{3z^3} + \dfrac{1}{5z^5} + \ldots\right) \quad (|z| \geqslant 1,\ z \neq \pm 1)$.

4.1.29. $\ln(z+a) = \ln a + 2\left[\left(\dfrac{z}{2a+z}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{z}{2a+z}\right)^3 + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{z}{2a+z}\right)^5 + \ldots\right] \quad (a > 0,\ \operatorname{Re} z \geqslant -a \neq z)$.

Пределы

4.1.30. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-\alpha} \ln x = 0 \quad (\alpha = \text{const},\ \operatorname{Re} \alpha > 0)$.

4.1.31. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} \ln x = 0 \quad (\alpha = \text{const},\ \operatorname{Re} \alpha > 0)$.

4.1.32. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k} - \ln m\right) = \gamma = 0.57721\ 56649\ldots$

(γ — постоянная Эйлера; см. гл. 1, 6, 23).

Неравенства

4.1.33. $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x > -1,\ x \neq 0)$.

4.1.34. $x < -\ln(1-x) < \dfrac{x}{1-x} \quad (x < 1,\ x \neq 0)$.

4.1.35. $|\ln(1-x)| \leqslant 3x/2 \quad (0 < x \leqslant 0.5828)$.

4.1.36. $\ln x \leqslant x - 1 \quad (x > 0)$.

4.1.37. $\ln x \leqslant n(x^{1/n} - 1) \quad (n > 0,\ x > 0)$.

4.1.38. $|\ln(1+z)| \leqslant -\ln(1-|z|) \quad (|z| < 1)$.

Разложения в непрерывную дробь

4.1.39. $\ln(1+z) = \dfrac{z}{1+}\ \dfrac{z}{2+}\ \dfrac{z}{3+}\ \dfrac{4z}{4+}\ \dfrac{4z}{5+}\ \dfrac{9z}{6+} \ldots,$

z принадлежит плоскости с разрезом вдоль действительной оси от -1 до $-\infty$.

4.1.40. $\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \dfrac{2z}{1-}\ \dfrac{z^2}{3-}\ \dfrac{4z^2}{5-}\ \dfrac{9z^2}{7-} \ldots,$

z принадлежит плоскости комплексного переменного с разрезом, изображенным на рис. 4.1.

Аппроксимация многочленами (см. [4.5])

4.1.41. $1/\sqrt{10} \leqslant x \leqslant \sqrt{10}$,

$$\lg x = a_1 t + a_3 t^3 + \varepsilon(x), \quad t = \frac{x-1}{x+1},$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 6 \cdot 10^{-4},$$

$$a_1 = 0.86304, \quad a_3 = 0.36415.$$

4.1.42. $1/\sqrt{10} \leqslant x \leqslant \sqrt{10}$,

$$\lg x = a_1 t + a_3 t^3 + a_5 t^5 + a_7 t^7 + a_9 t^9 + \varepsilon(x),$$

$$t = \frac{x-1}{x+1}, \quad |\varepsilon(x)| \leqslant 10^{-7},$$

$$a_1 = 0.86859\ 1718, \quad a_7 = 0.09437\ 6476,$$
$$a_3 = 0.28933\ 5524, \quad a_9 = 0.19133\ 7714,$$
$$a_5 = 0.17752\ 2071,$$

4.1.43. $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\ln(1+x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 1 \cdot 10^{-5},$$

$$a_1 = 0.99949\ 556, \quad a_4 = -0.13606\ 275,$$
$$a_2 = -0.49190\ 896, \quad a_5 = 0.03215\ 845,$$
$$a_3 = 0.28947\ 478,$$

4.1.44. $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\ln(1+x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 1 \cdot 10^{-8},$$

$a_1 = 0.99999\,64239$, $a_5 = 0.16765\,40711$,

$a_2 = -0.49987\,41238$, $a_6 = -0.09532\,93897$,

$a_3 = 0.33179\,90258$, $a_7 = 0.03608\,84937$,

$a_4 = -0.24073\,38084$, $a_8 = -0.00645\,35442$.

Аппроксимация многочленами Чебышева (см. [4.2])

4.1.45. $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$T_n^*(x) = \cos n\theta$, $\cos\theta = 2x - 1$ (см. гл. 22),

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n^*(x).$$

n	A_n	n	A_n
0	0.37645 2813	6	−0.00000 8503
1	0.34314 5750	7	0.00000 1250
2	−0.02943 7252	8	−0.00000 0188
3	0.00336 7089	9	0.00000 0029
4	−0.00043 3276	10	−0.00000 0004
5	0.00005 9471	11	0.00000 0001

Производные

4.1.46. $\dfrac{d}{dz}\ln z = \dfrac{1}{z}$.

4.1.47. $\dfrac{d^n}{dz^n}\ln z = (-1)^{n-1}(n-1)!\,z^{-n}$.

Неопределенные интегралы

4.1.48. $\displaystyle\int \frac{dz}{z} = \ln z$.

4.1.49. $\displaystyle\int \ln z\,dz = z\ln z - z$.

4.1.50. $\displaystyle\int z^n \ln z\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}\ln z - \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}$ ($n \neq -1$, n — целое).

4.1.51. $\displaystyle\int z^n(\ln z)^m\,dz = \frac{z^{n+1}(\ln z)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int z^n(\ln z)^{m-1}\,dz$ ($n \neq -1$).

4.1.52. $\displaystyle\int \frac{dz}{z\ln z} = \ln\ln z$.

4.1.53. $\displaystyle\int \ln[z+(z^2\pm1)^{1/2}]\,dz = z\ln[z+(z^2\pm1)^{1/2}] - (z^2\pm1)^{1/2}$.

4.1.54. $\displaystyle\int z^n\ln[z+(z^2\pm1)^{1/2}]\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}\ln[z+(z^2\pm1)^{1/2}] - \frac{1}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{(z^2\pm1)^{1/2}}\,dz$ ($n \neq -1$).

Определенные интегралы

4.1.55. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt = -\frac{\pi^2}{6}$.

4.1.56. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,dt = -\frac{\pi^2}{12}$.

4.1.57. $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \mathrm{li}(x)$ (см. 5.1.3).

4.2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Разложение в степенной ряд

4.2.1. $e^z = \exp z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots$ $(z = x + iy)$,

где e — действительное число, определенное в 4.1.16.

Основные свойства

4.2.2. $\mathrm{Ln}(\exp z) = z + 2k\pi i$ (k — целое произвольное).

4.2.3. $\ln(\exp z) = z$ $(-\pi < \mathrm{Im}\, z \leqslant \pi)$.

4.2.4. $\exp(\ln z) = \exp(\mathrm{Ln}\, z) = z$.

4.2.5. $\dfrac{d}{dz}\exp z = \exp z$.

Показательная функция с произвольным основанием

4.2.6. Если $N = a^z$, то $z = \mathrm{Log}_a N$.

4.2.7. $a^z = \exp(z\ln a)$.

4.2.8. Если $a = |a|\exp(i\arg a)$ $(-\pi < \arg a \leqslant \pi)$, то имеют место 4.2.9 – 4.2.16.

4.2.9. $|a^z| = |a|^x e^{-y\arg a}$.

4.2.10. $\arg(a^z) = y\ln|a| + x\arg a$.

4.2.11. $\mathrm{Ln}\, a^z = z\ln a$ для одного из значений $\mathrm{Ln}\, a^z$.

4.2.12. $\ln a^x = x\ln a$ $(a > 0)$.

4.2.13. $|e^z| = e^x$.

4.2.14. $\arg(e^z) = y$.

4.2.15. $a^{z_1}a^{z_2} = a^{z_1+z_2}$.

4.2.16. $a^z b^z = (ab)^z$ $(-\pi < \arg a + \arg b \leqslant \pi)$.

Периодичность

4.2.17. $e^{z+2\pi ki} = e^z$ (k — целое).

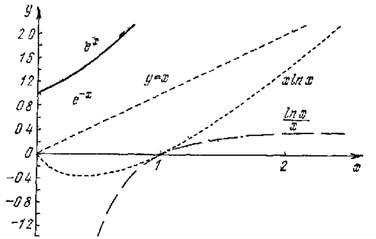


Рис. 4.2. Логарифмическая и показательная функции.

Основные тождества

4.2.18. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

4.2.19. $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2} \quad (-\pi < \operatorname{Im} z_1 \leqslant \pi)$.

Ограничение $-\pi < \operatorname{Im} z_1 \leqslant \pi$ может быть снято, если z_2 — целое.

Пределы

4.2.20. $\lim\limits_{|z|\to\infty} z^{\alpha}e^{-z} = 0 \quad \left(|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\pi - \varepsilon < \frac{1}{2}\pi;\ \alpha \text{ — постоянная}\right)$

4.2.21. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = e^z$.

Частные значения

4.2.22. $e = 2.71828\ 18284\ldots$

4.2.23. $e^0 = 1$.

4.2.24. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

4.2.25. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

4.2.26. $e^{\pm\pi i} = -1$.

4.2.27. $e^{\pm\frac{\pi i}{2}} = \pm i$.

4.2.28. $e^{2\pi k i} = 1 \quad (k \text{ — целое})$.

Неравенства

(x — действительное число, отличное от нуля)

4.2.29. $e^{-x/(1-x)} < 1 - x < e^{-x} \quad (x < 1)$.

4.2.30. $e^x > 1 + x$.

4.2.31. $e^x < \dfrac{1}{1-x} \quad (x < 1)$.

4.2.32. $\dfrac{x}{1+x} < (1 - e^{-x}) < x \quad (x > -1)$.

4.2.33. $x < (e^x - 1) < \dfrac{x}{1-x} \quad (x < 1)$.

4.2.34. $1 + x > e^{x/(1+x)} \quad (x > -1)$.

4.2.35. $e^x > 1 + \dfrac{x^n}{n!} \quad (n > 0,\ x > 0)$.

4.2.36. $e^x > \left(1+\dfrac{x}{y}\right)^y > e^{xy/(x+y)} \quad (x > 0,\ y > 0)$.

4.2.37. $e^{-x} < 1 - \dfrac{x}{2} \quad (0 < x \leqslant 1.5936)$.

4.2.38. $\dfrac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \dfrac{7}{4}|z| \quad (0 < |z| < 1)$.

4.2.39. $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\,e^{|z|}$.

Разложения в непрерывную дробь

4.2.40. $|z| < \infty$,

$$e^z = \frac{1}{1-}\,\frac{z}{1+}\,\frac{z}{2-}\,\frac{z}{3+}\,\frac{z}{2-}\,\frac{z}{5+}\,\frac{z}{2-}\ \ldots,$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1-}\,\frac{z}{2+}\,\frac{z}{3-}\,\frac{z}{2+}\,\frac{z}{5-}\,\frac{z}{2+}\,\frac{z}{7-}\ \ldots,$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{(1 - z/2)+}\,\frac{\frac{z^2}{4}3}{1+}\,\frac{\frac{z^2}{4}15}{1+}\,\frac{\frac{z^2}{4}35}{1+}\ldots\frac{\frac{z^2}{4}(4n^2-1)}{1+}\ \ldots$$

4.2.41. $e^z - e_{n-1}(z) = \dfrac{z^n}{n!-}\,\dfrac{n!z}{(n+1)+}\,\dfrac{z}{(n+2)-}$

$$\frac{(n+1)z}{(n+3)+}\,\frac{2z}{(n+4)-}\ldots\frac{(n+2)z}{(n+5)+}\,\frac{3z}{(n+6)-}\ \ldots \quad (|z| < \infty),$$

$e_n(z)$ см. в 6.5.11.

4.2.42. $e^{2a\,\mathrm{arctg}\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{2a}{z-a+}\,\dfrac{a^2+1}{3z+}\,\dfrac{a^2+4}{5z+}\,\dfrac{a^2+9}{7z+}\ \ldots,$

z принадлежит плоскости комплексного переменного с разрезом, изображенным на рис. 4.4.

Аппроксимация многочленами *)

4.2.43. $0 \leqslant x \leqslant \ln 2 = 0.693\ldots,$

$$e^{-x} = 1 + a_1x + a_2x^2 + \varepsilon(x),$$
$$|\varepsilon(x)| \leqslant 3\cdot 10^{-3},$$
$$a_1 = -0.9664, \quad a_2 = 0.3536.$$

4.2.44. $0 \leqslant x \leqslant \ln 2,$

$$e^{-x} = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \varepsilon(x),$$
$$|\varepsilon(x)| \leqslant 3\cdot 10^{-5},$$
$$a_1 = -0.99986\ 84, \quad a_3 = -0.15953\ 32,$$
$$a_2 = 0.49829\ 26, \quad a_4 = 0.02936\ 41.$$

---

*) Формулы 4.2.43 — 4.2.45 взяты из [4.1], 4.2.46 и 4.2.47 — из [4.5].

4.2.45. $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$,

$$e^{-x} = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2\cdot 10^{-10},$$

$a_1 = -0.99999\ 99995$, $a_5 = -0.00830\ 13598$,

$a_2 = 0.49999\ 99206$, $a_6 = 0.00132\ 98820$,

$a_3 = -0.16666\ 53019$, $a_7 = -0.00014\ 13161$,

$a_4 = 0.04165\ 73475$,

4.2.46. $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$10^x = (1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)^2 + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 7\cdot 10^{-4},$$

$a_1 = 1.14991\ 96$, $a_3 = 0.20800\ 30$,

$a_2 = 0.677\ 4323$, $a_4 = 0.12680\ 89$.

4.2.47. $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$10^x = (1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7)^2 + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| < 5\cdot 10^{-8},$$

$a_1 = 1.15129\ 277603$, $a_5 = 0.01742\ 111988$,

$a_2 = 0.66273\ 088429$, $a_6 = 0.00255\ 491796$,

$a_3 = 0.25439\ 357484$, $a_7 = 0.00093\ 264267$.

$a_4 = 0.07295\ 173666$,

Аппроксимация многочленами Чебышева (см. [4.2])

4.2.48. $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$T_n^*(x) = \cos n\theta$, $\cos\theta = 2x - 1$ (см. гл. 22),

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n^*(x), \qquad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n^*(x).$$

n	A_n	n	A_n
0	1.75338 7654	0	0.64503 5270
1	0.85039 1654	1	−0.31284 1606
2	0.10520 8694	2	0.03870 4116
3	0.00872 2105	3	−0.00320 8683
4	0.00054 3437	4	0.00019 9919
5	0.00002 7115	5	−0.00000 9975
6	0.00000 1128	6	0.00000 0415
7	0.00000 0040	7	−0.00000 0015
8	0.00000 0001		

Производные

4.2.49. $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$.

4.2.50. $\dfrac{d^n}{dz^n}e^{az} = a^n e^{az}$.

4.2.51. $\dfrac{d}{dz}a^z = a^z \ln a$.

4.2.52. $\dfrac{d}{dz}z^a = az^{a-1}$.

4.2.53. $\dfrac{d}{dz}z^z = (1 + \ln z)\,z^z$.

Неопределенные интегралы

4.2.54. $\displaystyle\int e^{az}\,dz = \frac{e^{az}}{a}$.

4.2.55. $$\int z^n e^{az}\,dz = \frac{e^{az}}{a^{n+1}}[(az)^n - n(az)^{n-1} + n(n-1)(az)^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}n!\,(az) + (-1)^n n!] \quad (n \geqslant 0).$$

4.2.56. $$\int \frac{e^{az}}{z^n}\,dz = -\frac{e^{az}}{(n-1)\,z^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int\frac{e^{az}}{z^{n-1}}\,dz \quad (n > 1).$$

4.3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ($z = x + iy$)

Определения

4.3.1. $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

4.3.2. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

4.3.3. $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$.

$\sec z = \dfrac{1}{\sin z}$,

4.3.5. $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$.

4.3.6. $\operatorname{ctg} z = \dfrac{1}{\operatorname{tg} z}$.

Периодичность

4.3.7. $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$ (k — целое).

4.3.8. $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$.

4.3.9. $\operatorname{tg}(z + k\pi) = \operatorname{tg} z$.

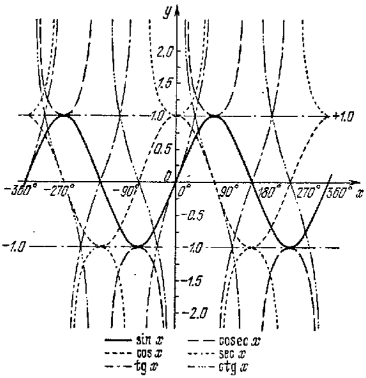


Рис. 4.3. Тригонометрические функции.

Соотношения между тригонометрическими функциями

4.3.10. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$

4.3.11. $\sec^2 z - \operatorname{tg}^2 z = 1.$

4.3.12. $\operatorname{cosec}^2 z - \operatorname{ctg}^2 z = 1.$

Тригонометрические функции отрицательных аргументов

4.3.13. $\sin(-z) = -\sin z.$

4.3.14. $\cos(-z) = \cos z.$

4.3.15. $\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z.$

Формулы сложения

4.3.16. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$

4.3.17. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$

4.3.18. $\operatorname{tg}(z_1 + z_2) = \dfrac{\operatorname{tg} z_1 + \operatorname{tg} z_2}{1 - \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2}.$

4.3.19. $\operatorname{ctg}(z_1 + z_2) = \dfrac{\operatorname{ctg} z_1 \operatorname{ctg} z_2 - 1}{\operatorname{ctg} z_1 + \operatorname{ctg} z_2}.$

Формулы для половинного значения аргумента

4.3.20. $\sin\dfrac{z}{2} = \pm\left(\dfrac{1 - \cos z}{2}\right)^{1/2}.$

4.3.21. $\cos\dfrac{z}{2} = \pm\left(\dfrac{1 + \cos z}{2}\right)^{1/2}.$

4.3.22. $\operatorname{tg}\dfrac{z}{2} = \pm\left(\dfrac{1 - \cos z}{1 + \cos z}\right)^{1/2} = \dfrac{1 - \cos z}{\sin z} = \dfrac{\sin z}{1 + \cos z}.$

Знак выбирается в соответствии со знаком левой части.

Универсальная тригонометрическая подстановка

Если $\operatorname{tg}\dfrac{u}{2} = z$, то

4.3.23. $\sin u = \dfrac{2z}{1 + z^2}, \quad \cos u = \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad du = \dfrac{2}{1 + z^2}\,dz.$

Тригонометрические функции кратных аргументов

4.3.24. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z = \dfrac{2 \operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg}^2 z}.$

4.3.25. $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z = \cos^2 z - \sin^2 z = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 z}{1 + \operatorname{tg}^2 z}.$

4.3.26. $\operatorname{tg} 2z = \dfrac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z} = \dfrac{2 \operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg}^2 z - 1} = \dfrac{2}{\operatorname{ctg} z - \operatorname{tg} z}.$

4.3.27. $\sin 3z = 3 \sin z - 4 \sin^3 z.$

4.3.28. $\cos 3z = -3 \cos z + 4 \cos^3 z.$

4.3.29. $\sin 4z = 8 \cos^3 z \sin z - 4 \cos z \sin z.$

4.3.30. $\cos 4z = 8 \cos^4 z - 8 \cos^2 z + 1.$

Произведения синусов и косинусов

4.3.31. $2 \sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1 - z_2) - \cos(z_1 + z_2).$

4.3.32. $2 \cos z_1 \cos z_2 = \cos(z_1 - z_2) + \cos(z_1 + z_2).$

4.3.33. $2 \sin z_1 \cos z_2 = \sin(z_1 - z_2) + \sin(z_1 + z_2).$

Сумма и разность тригонометрических функций

4.3.34. $\sin z_1 + \sin z_2 = 2 \sin\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right) \cos\left(\dfrac{z_1 - z_2}{2}\right).$

4.3.35. $\sin z_1 - \sin z_2 = 2 \cos\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right) \sin\left(\dfrac{z_1 - z_2}{2}\right).$

4.3.36. $\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right) \cos\left(\dfrac{z_1 - z_2}{2}\right).$

4.3.37. $\cos z_1 - \cos z_2 = -2 \sin\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right) \sin\left(\dfrac{z_1 - z_2}{2}\right).$

4.3.38. $\operatorname{tg} z_1 \pm \operatorname{tg} z_2 = \dfrac{\sin(z_1 \pm z_2)}{\cos z_1 \cos z_2}.$

4.3.39. $\operatorname{ctg} z_1 \pm \operatorname{ctg} z_2 = \dfrac{\sin(z_2 \pm z_1)}{\sin z_1 \sin z_2}.$

Соотношения между квадратами синусов и косинусов

4.3.40. $\sin^2 z_1 - \sin^2 z_2 = \sin(z_1 + z_2) \sin(z_1 - z_2).$

4.3.41. $\cos^2 z_1 - \cos^2 z_2 = -\sin(z_1 + z_2) \sin(z_1 - z_2).$

4.3.42. $\cos^2 z_1 - \sin^2 z_2 = \cos(z_1 + z_2) \cos(z_1 - z_2).$

4.3.43. Знаки тригонометрических функций

Квадрант	sin cosec	cos sec	tg ctg
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

4.3.44. Формулы приведения

$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ k$ — целое)

	$-\theta$	$\frac{\pi}{2} \pm \theta$	$\pi \pm \theta$	$\frac{3\pi}{2} \pm \theta$	$2k\pi \pm \theta$
sin	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\mp\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\pm\sin\theta$
cos	$\cos\theta$	$\mp\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\pm\sin\theta$	$\cos\theta$
tg	$-\operatorname{tg}\theta$	$\mp\operatorname{ctg}\theta$	$\pm\operatorname{tg}\theta$	$\mp\operatorname{ctg}\theta$	$\pm\operatorname{tg}\theta$
cosec	$-\operatorname{cosec}\theta$	$+\sec\theta$	$\mp\operatorname{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$\pm\operatorname{cosec}\theta$
sec	$\sec\theta$	$\mp\operatorname{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$\pm\operatorname{cosec}\theta$	$+\sec\theta$
ctg	$-\operatorname{ctg}\theta$	$\mp\operatorname{tg}\theta$	$\pm\operatorname{ctg}\theta$	$\mp\operatorname{tg}\theta$	$\pm\operatorname{ctg}\theta$

4.3.45. Соотношения между тригонометрическими (или обратными тригонометрическими) функциями $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$

	$\sin x = a$	$\cos x = a$	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{cosec} x = a$	$\sec x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
$\sin x$	a	$(1-a^2)^{1/2}$	$a(1+a^2)^{-1/2}$	a^{-1}	$a^{-1}(a^2-1)^{1/2}$	$(1+a^2)^{-1/2}$
$\cos x$	$(1-a^2)^{1/2}$	a	$(1+a^2)^{-1/2}$	$a^{-1}(a^2-1)^{1/2}$	a^{-1}	$a(1+a^2)^{-1/2}$
$\operatorname{tg} x$	$a(1-a^2)^{-1/2}$	$a^{-1}(1-a^2)^{1/2}$	a	$(a^2-1)^{-1/2}$	$(a^2-1)^{1/2}$	a^{-1}
$\operatorname{cosec} x$	a^{-1}	$(1-a^2)^{-1/2}$	$a^{-1}(1+a^2)^{1/2}$	a	$a(a^2-1)^{-1/2}$	$(1+a^2)^{1/2}$
$\sec x$	$(1-a^2)^{-1/2}$	a^{-1}	$(1+a^2)^{1/2}$	$a(a^2-1)^{-1/2}$	a	$a^{-1}(1+a^2)^{1/2}$
$\operatorname{ctg} x$	$a^{-1}(1-a^2)^{1/2}$	$a(1-a^2)^{-1/2}$	a^{-1}	$(a^2-1)^{1/2}$	$(a^2-1)^{-1/2}$	a

Пример. Если $\sin x = a$, то $\operatorname{ctg} x = a^{-1}(1-a^2)^{1/2}$, $\operatorname{arcsec} a = \operatorname{arcctg}(a^2-1)^{-1/2}$.

4.3.46. Тригонометрические функции некоторых углов

	0 $0°$	$\pi/12$ $15°$	$\pi/6$ $30°$	$\pi/4$ $45°$
sin	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tg	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
cosec	∞	$\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	2	$\sqrt{2}$
sec	1	$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$
ctg	∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1

	$\pi/3$ $60°$	$5\pi/12$ $75°$	$\pi/2$ $90°$	$7\pi/12$ $105°$
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$
cos	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$
tg	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	∞	$-(2+\sqrt{3})$
cosec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	1	$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$
sec	2	$\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	∞	$-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$
ctg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$	0	$-(2-\sqrt{3})$

	$2\pi/3$ $120°$	$3\pi/4$ $135°$	$5\pi/6$ $150°$	$11\pi/12$ $165°$	π $180°$
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	0
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	-1
tg	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-(2-\sqrt{3})$	0
cosec	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	∞
sec	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	-1
ctg	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-(2+\sqrt{3})$	∞

Формула Эйлера

4.3.47. $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Формула Муавра

4.3.48. $(\cos z + i\sin z)^\nu = \cos \nu z + i \sin \nu z$

$(-\pi < \operatorname{Re} z \leqslant \pi$, если ν — нецелое).

Связь с гиперболическими функциями
(см. 4.5.7 — 4.5.12)

4.3.49. $\sin z = -i \operatorname{sh} iz$.

4.3.50. $\cos z = \operatorname{ch} iz$.

4.3.51. $\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz$.

4.3.52. $\operatorname{cosec} z = i \operatorname{cosech} iz$.

4.3.53. $\sec z = \operatorname{sech} iz$.

4.3.54. $\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} i z$.

Действительная и мнимая части тригонометрических функций

4.3.55. $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$.

4.3.56. $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$.

4.3.57. $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$.

4.3.58. $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\sin 2x - i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}$.

Модуль и аргумент тригонометрических функций

4.3.59. $$|\sin z| = (\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y)^{1/2} = \left[\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)\right]^{1/2}.$$

4.3.60. $\arg \sin z = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x \operatorname{th} y)$.

4.3.61. $$|\cos z| = (\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y)^{1/2} = \left[\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2y + \cos 2x)\right]^{1/2}.$$

4.3.62. $\arg \cos z = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x \operatorname{th} y)$.

4.3.63. $|\operatorname{tg} z| = \left(\dfrac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}\right)^{1/2}$.

4.3.64. $\arg \operatorname{tg} z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\sin 2x}\right)$.

Разложения в ряд

4.3.65. $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \quad (|z| < \infty).$$

4.3.66. $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \quad (|z| < \infty).$$

4.3.67. $$\operatorname{tg} z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \frac{17z^7}{315} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} + \ldots \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right).$$

4.3.68. $$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7}{360} z^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}2(2^{2n-1}-1)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} + \ldots \quad (|z| < \pi).$$

4.3.69. $$\sec z = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5z^4}{24} + \frac{61z^6}{720} + \ldots + \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} z^{2n} + \ldots \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right).$$

4.3.70. $$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \ldots - \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} - \ldots \quad (|z| < \pi).$$

4.3.71. $$\ln \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} B_{2n}}{n(2n)!} z^{2n} \quad (|z| < \pi).$$

4.3.72. $$\ln \cos z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_{2n}}{n(2n)!} z^{2n} \quad \left(|z| < \frac{1}{2}\pi\right).$$

4.3.73. $$\ln \frac{\operatorname{tg} z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_{2n}}{n(2n)!} z^{2n} \quad \left(|z| < \frac{1}{2}\pi\right),$$

где B_n и E_n — числа Бернулли и Эйлера соответственно (см. гл. 23).

Пределы

4.3.74. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

4.3.75. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

4.3.76. $\lim\limits_{n\to \infty} n \sin \dfrac{x}{n} = x$.

4.3.77. $\lim\limits_{n\to \infty} n \operatorname{tg} \dfrac{x}{n} = x$.

4.3.78. $\lim\limits_{n\to \infty} \cos \dfrac{x}{n} = 1$.

Неравенства

4.3.79. $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{2}{\pi} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4.3.80. $\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4.3.81. $\cos x \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

4.3.82. $\pi < \dfrac{\sin \pi x}{x(1-x)} \leqslant 4 \quad (0 < x < 1)$.

4.3.83. $|\operatorname{sh} y| \leqslant |\sin z| \leqslant \operatorname{ch} y$.

4.3.84. $|\operatorname{sh} y| \leqslant |\cos z| \leqslant \operatorname{ch} y$.

4.3.85. $|\operatorname{cosec} z| \leqslant \operatorname{cosech} |y|$.

4.3.86. $|\cos z| \leqslant \operatorname{ch} |z|$.

4.3.87. $|\sin z| \leqslant \operatorname{sh} |z|$.

4.3.88. $|\cos z| < 2, \quad |\sin z| \leqslant \frac{6}{5}|z| \qquad (|z| < 1)$.

Бесконечные произведения

4.3.89. $\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$.

4.3.90. $\cos z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2 \pi^2}\right)$.

Разложения на простые дроби

4.3.91. $\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2\pi^2}$

$(z \neq 0, \ \pm\pi, \ \pm 2\pi, \ \ldots)$.

4.3.92. $\operatorname{cosec}^2 z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - k\pi)^2}$

$(z \neq 0, \ \pm\pi, \ \pm 2\pi, \ \ldots)$.

4.3.93. $\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2 - k^2\pi^2}$

$(z \neq 0, \ \pm\pi, \ \pm 2\pi, \ \ldots)$.

Разложения в непрерывную дробь

4.3.94. $\operatorname{tg} z = \frac{z}{1-}\,\frac{z^2}{3-}\,\frac{z^2}{5-}\,\frac{z^2}{7-}\cdots \quad \left(z \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi\right)$.

4.3.95. $\operatorname{tg} az = \frac{a \operatorname{tg} z}{1+}\,\frac{(1-a^2)\operatorname{tg}^2 z}{3+}\,\frac{(4-a^2)\operatorname{tg}^2 z}{5+}$

$\frac{(9-a^2)\operatorname{tg}^2 z}{7+}\cdots \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \quad az \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi\right)$.

Аппроксимация многочленами (см. [4.1])

4.3.96. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2 \cdot 10^{-4},$$

$$a_2 = -0.16605, \quad a_4 = 0.00761.$$

4.3.97. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + a_8x^8 + a_{10}x^{10} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2 \cdot 10^{-9},$$

$$a_2 = -0.16666\,66664, \quad a_8 = 0.00000\,27526,$$

$$a_4 = 0.00833\,33315, \quad a_{10} = -0.00000\,00239.$$

$$a_6 = -0.00019\,84090,$$

4.3.98. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$\cos x = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 9 \cdot 10^{-4},$$

$$a_2 = -0.49670, \quad a_4 = 0.03705.$$

4.3.99. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$\cos x = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + a_8x^8 + a_{10}x^{10} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2 \cdot 10^{-9},$$

$$a_2 = -0.49999\,99963, \quad a_8 = 0.00002\,47609,$$

$$a_4 = 0.04166\,66418, \quad a_{10} = -0.00000\,02605.$$

$$a_6 = -0.00138\,88397,$$

4.3.100. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 1 \cdot 10^{-3},$$

$$a_2 = 0.31755, \quad a_4 = 0.20330.$$

4.3.101. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + a_8x^8 + a_{10}x^{10} + a_{12}x^{12} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_2 = 0.33333\,14036, \quad a_8 = 0.02456\,50893,$$

$$a_4 = 0.13339\,23995, \quad a_{10} = 0.00290\,05250,$$

$$a_6 = 0.05337\,40603, \quad a_{12} = 0.00951\,68091.$$

4.3.102. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$,

$$x \operatorname{ctg} x = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 3 \cdot 10^{-5},$$

$$a_2 = -0.332867, \quad a_4 = -0.024369.$$

4.3.103. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$,

$$x \operatorname{ctg} x = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + a_8x^8 + a_{10}x^{10} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 4 \cdot 10^{-10},$$

$$a_2 = -0.33333\,33410, \quad a_8 = -0.00020\,78504,$$

$$a_4 = -0.02222\,20287, \quad a_{10} = -0.00002\,62619.$$

$$a_6 = -0.00211\,77168,$$

Аппроксимация многочленами Чебышева (см. [4.2])

4.3.104. $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

$T_n^*(x) = \cos n\theta, \ \cos\theta = 2x - 1$ (см. гл. 22),

$$\sin\frac{1}{2}\pi x = x\sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n^*(x^2), \qquad \cos\frac{1}{2}\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n^*(x^2).$$

n	A_n	n	A_n
0	1.27627 8962	0	0.47200 1216
1	−0.28526 1569	1	−0.49940 3258
2	0.00911 8016	2	0.02799 2080
3	−0.00013 6587	3	−0.00059 6695
4	0.00000 1185	4	0.00000 6704
5	−0.00000 0007	5	−0.00000 0047

Производные

4.3.105. $\dfrac{d}{dz}\sin z = \cos z.$

4.3.106. $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\sin z.$

4.3.107. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{tg} z = \sec^2 z.$

4.3.108. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{cosec} z = -\operatorname{cosec} z \operatorname{ctg} z.$

4.3.109. $\dfrac{d}{dz}\sec z = \sec z \operatorname{tg} z.$

4.3.110. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{ctg} z = -\operatorname{cosec}^2 z.$

4.3.111. $\dfrac{d^n}{dz^n}\sin z = \sin\left(z + \dfrac{1}{2}n\pi\right).$

4.3.112. $\dfrac{d^n}{dz^n}\cos z = \cos\left(z + \dfrac{1}{2}n\pi\right).$

Неопределенные интегралы от тригонометрических функций

4.3.113. $\int \sin z\,dz = -\cos z.$

4.3.114. $\int \cos z\,dz = \sin z.$

4.3.115. $\int \operatorname{tg} z\,dz = -\ln\cos z = \ln\sec z.$

4.3.116. $$\int \operatorname{cosec} z\,dz = \ln\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \ln(\operatorname{cosec} z - \operatorname{ctg} z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos z}{1+\cos z}.$$

4.3.117. $$\int \sec z\,dz = \ln(\sec z + \operatorname{tg} z) = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) = \operatorname{gd}^{-1} z,$$

где $\operatorname{gd} z$ — гудерманиан, $\operatorname{gd} z = 2\operatorname{arctg} e^z - \dfrac{\pi}{2}$; $\operatorname{gd}^{-1} z$ — обратный гудерманиан.

4.3.118. $\int \operatorname{ctg} z\,dz = \ln\sin z = -\ln\operatorname{cosec} z.$

4.3.119. $\int z^n \sin z\,dz = -z^n\cos z + n\int z^{n-1}\cos z\,dz.$

4.3.120. $$\int\frac{\sin z}{z^n}dz = \frac{-\sin z}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{\cos z}{z^{n-1}}dz \quad (n > 1).$$

4.3.121. $\int\dfrac{z}{\sin^2 z}dz = -z\operatorname{ctg} z + \ln\sin z.$

4.3.122. $$\int\frac{z\,dz}{\sin^n z} = \frac{-z\cos z}{(n-1)\sin^{n-1} z} - \frac{1}{(n-1)(n-2)\sin^{n-2} z} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{z\,dz}{\sin^{n-2} z} \quad (n > 2).$$

4.3.123. $\int z^n\cos z\,dz = z^n\sin z - n\int z^{n-1}\sin z\,dz.$

4.3.124. $$\int\frac{\cos z}{z^n}dz = -\frac{\cos z}{(n-1)z^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int\frac{\sin z\,dz}{z^{n-1}} \quad (n > 1).$$

4.3.125. $\int\dfrac{z}{\cos^2 z}dz = z\operatorname{tg} z + \ln\cos z.$

4.3.126. $$\int\frac{z\,dz}{\cos^n z} = \frac{z\sin z}{(n-1)\cos^{n-1} z} - \frac{1}{(n-1)(n-2)\cos^{n-2} z} + \frac{(n-2)}{n-1}\int\frac{z\,dz}{\cos^{n-2} z} \quad (n > 2).$$

4.3.127. $$\int\sin^m z\cos^n z\,dz = \frac{\sin^{m+1} z\cos^{n-1} z}{m+n} + \frac{(n-1)}{(m+n)}\int\sin^m z\cos^{n-2} z\,dz = -\frac{\sin^{m-1} z\cos^{n+1} z}{m+n} + \frac{(m-1)}{(m+n)}\int\sin^{m-2} z\cos^n z\,dz \quad (m \neq -n).$$

4.3.128. $$\int\frac{dz}{\sin^m z\cos^n z} = \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1} z\cos^{n-1} z} + \frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{dz}{\sin^m z\cos^{n-2} z} \quad (n > 1),$$

$$\int\frac{dz}{\sin^m z\cos^n z} = \frac{-1}{(m-1)\sin^{m-1} z\cos^{n-1} z} + \frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{dz}{\sin^{m-2} z\cos^n z} \quad (m > 1).$$

4.3.129. $\int\operatorname{tg}^n z\,dz = \dfrac{\operatorname{tg}^{n-1} z}{n-1} - \int\operatorname{tg}^{n-2} z\,dz \quad (n \neq 1).$

4.3.130. $\int \operatorname{ctg}^n z\,dz = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} z}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} z\,dz$ $(n \neq 1)$.

4.3.131. $\int \frac{dz}{a + b\sin z} = \frac{2}{(a^2-b^2)^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{a\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) + b}{(a^2-b^2)^{1/2}}$ $(a^2 > b^2)$,

$$\int \frac{dz}{a+b\sin z} = \frac{1}{(b^2-a^2)^{1/2}} \ln \left[\frac{a\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) + b - (b^2-a^2)^{1/2}}{a\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) + b + (b^2-a^2)^{1/2}}\right] \quad (b^2 > a^2).$$

4.3.132. $\int \frac{dz}{1 \pm \sin z} = \mp \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{z}{2}\right)$.

4.3.133. $\int \frac{dz}{a+b\cos z} = \frac{2}{(a^2-b^2)^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b)\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right)}{(a^2-b^2)^{1/2}}$ $(a^2 > b^2)$,

$$\int \frac{dz}{a+b\cos z} = \frac{1}{(b^2-a^2)^{1/2}} \ln \left[\frac{(b-a)\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) + (b^2-a^2)^{1/2}}{(b-a)\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) - (b^2-a^2)^{1/2}}\right] \quad (b^2 > a^2)$$

4.3.134. $\int \frac{dz}{1+\cos z} = \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right)$.

4.3.135. $\int \frac{dz}{1-\cos z} = -\operatorname{ctg} z$.

4.3.136. $\int e^{az}\sin bz\,dz = \frac{e^{az}}{a^2+b^2}(a\sin bz - b\cos bz)$.

4.3.137. $\int e^{az}\cos bz\,dz = \frac{e^{az}}{a^2+b^2}(a\cos bz + b\sin bz)$.

4.3.138. $\int e^{az}\sin^n bz\,dz =$

$$= \frac{e^{az}\sin^{n-1} bz}{a^2+n^2b^2}(a\sin bz - nb\cos bz) + \frac{n(n-1)\,b^2}{a^2+n^2b}\int e^{az}\sin^{n-2} bz\,dz.$$

4.3.139. $\int e^{az}\cos^n bz\,dz =$

$$= \frac{e^{az}\cos^{n-1} bz}{a^2+n^2b^2}(a\cos bz + nb\sin bz) + \frac{n(n-1)\,b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{az}\cos^{n-2} bz\,dz.$$

Определенные интегралы

4.3.140. $\int\limits_0^\pi \sin mt\sin nt\,dt = 0$,

$$\int\limits_0^\pi \cos mt\cos nt\,dt = 0$$

($m \neq n$; m, n — целые).

4.3.141. $\int\limits_0^\pi \sin^2 nt\,dt = \int\limits_0^\pi \cos^2 nt\,dt = \frac{\pi}{2}$

(n — целое, $n \neq 0$).

4.3.142. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mt}{t}\,dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (m > 0), \\ 0 & (m = 0), \\ -\frac{\pi}{2} & (m < 0). \end{cases}$

4.3.143. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,dt = \ln\frac{b}{a}$.

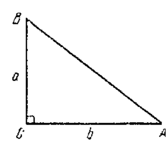
4.3.144. $\int\limits_0^\infty \sin t^2\,dt = \int\limits_0^\infty \cos t^2\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4.3.145. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos t\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

4.3.146. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mt}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}e^{-m}$.

Другие интегралы, содержащие тригонометрические функции, см. в гл. 5 и 7. Преобразование Фурье см. в [5.3].

4.3.147. Формулы решения прямоугольных треугольников



Пусть A, B, C — вершины прямоугольного треугольника (C — прямой угол); a, b, c — соответствующие им противоположные стороны. Тогда

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\operatorname{cosec} A},$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sec A},$$

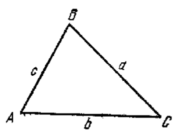
$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\operatorname{ctg} A},$$

$$\text{versine } A = \text{vers } A = 1 - \cos A,$$
$$\text{coversine } A = \text{covers } A = 1 - \sin A,$$

$$\text{haversine } A = \text{hav } A = \frac{1}{2}\text{ vers } A,$$

$$\text{exsecant } A = \text{exsec } A = \sec A - 1.$$

4.3.148. Формулы решения треугольников



Пусть A, B, C — углы треугольника; a, b, c — соответствующие им противоположные стороны. Тогда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc},$$

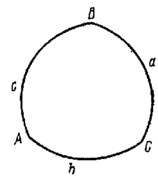
$$a = b \cos C + c \cos B,$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)},$$

$$S = \frac{bc \sin A}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где S — площадь треугольника, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

4.3.149. Формулы решения сферических треугольников



Пусть A, B, C — три угла и a, b, c — соответствующие им противоположные стороны. Тогда

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A =$$
$$= \frac{\cos b \cos (c \pm \theta)}{\cos \theta},$$

где $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} b \cos A$,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

4.4. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определения

4.4.1. $\arcsin z = \int\limits_0^z \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} \quad (z = x + iy).$

4.4.2. $\arccos z = \int\limits_z^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin z.$

4.4.3. $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{dt}{1+t^2}.$

В интегралах 4.4.1 и 4.4.2 путь интегрирования не должен пересекать действительную ось, а в интеграле 4.4.3 — мнимую ось вне единичной окружности с центром в начале координат. Каждая из этих функций является однозначной аналитической в плоскости комплексного переменного z с разрезом вдоль действительной оси от $-\infty$ до -1 и от $+1$ до $+\infty$ в случаях 4.4.1 и 4.4.2 и с разрезом вдоль мнимой оси от i до $i\infty$ и от $-i$ до $-i\infty$ в случае 4.4.3.

Для обратных тригонометрических функций иногда употребляются следующие обозначения:

$$\arcsin z = \sin^{-1} z, \; \arccos z = \cos^{-1} z,$$

$$\operatorname{arctg} z = \operatorname{tg}^{-1} z, \ldots$$

Если $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то $\arcsin x$ и $\arccos x$ действительны и имеют место 4.4.4 — 4.4.9.

4.4.4. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi).$

4.4.5. $\operatorname{arctg} z + \operatorname{arcctg} z = \begin{cases} \pi/2, & \operatorname{Re} z \geqslant 0 \\ -\pi/2, & \operatorname{Re} z < 0. \end{cases}$

4.4.6. $\operatorname{arccosec} z = \arcsin \frac{1}{z}.$

4.4.7. $\operatorname{arcsec} z = \arccos \frac{1}{z}$.

4.4.8. $\operatorname{arcctg} z = \operatorname{arctg} \frac{1}{z}$.

4.4.9. $\operatorname{arcsec} z + \operatorname{arccosec} z = \frac{\pi}{2}$ (см. 4.3.45).

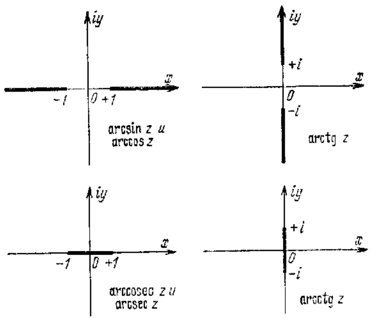


Рис. 4.4. Линии разреза для обратных тригонометрических функций.

Основные свойства

Общими решениями уравнений

$$\sin t = z, \quad \cos t = z, \quad \operatorname{tg} t = z$$

являются соответственно функции

4.4.10. $t = \operatorname{Arcsin} z = (-1)^k \arcsin z + k\pi$.

4.4.11. $t = \operatorname{Arccos} z = \pm \arccos z + 2k\pi$.

4.4.12. $t = \operatorname{Arctg} z = \operatorname{arctg} z + k\pi \quad (z^2 \neq -1)$,

где k — произвольное целое.

4.4.13. Область определения главного значения

y	$x \geqslant 0$	$x < 0$
$\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$	$0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y < 0$
$\arccos x$ и $\operatorname{arcsec} x$	$0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < y \leqslant \pi$
$\operatorname{arcctg} x$ и $\operatorname{arccosec} x$	$0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$	$-\pi/2 \leqslant y < 0$

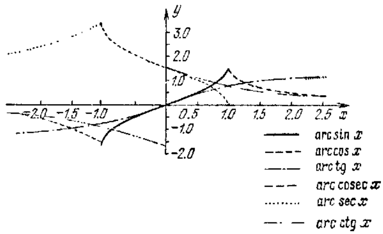


Рис. 4.5. Обратные тригонометрические функции.

Функции отрицательного аргумента

4.4.14. $\arcsin(-z) = -\arcsin z$.

4.4.15. $\arccos(-z) = \pi - \arccos z$.

4.4.16. $\operatorname{arctg}(-z) = -\operatorname{arctg} z$.

4.4.17. $\operatorname{arccosec}(-z) = -\operatorname{arccosec} z$.

4.4.18. $\operatorname{arcsec}(-z) = \pi - \operatorname{arcsec} z$.

4.4.19. $\operatorname{arcctg}(-z) = \pi - \operatorname{arcctg} z$.

Связь с обратными гиперболическими функциями (см. 4.6.14 — 4.6.19)

4.4.20. $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Arsh} iz$.

4.4.21. $\operatorname{Arccos} z = \pm i \operatorname{Arch} z$.

4.4.22. $\operatorname{Arctg} z = -i \operatorname{Arth} iz \quad (z^2 \neq -1)$.

4.4.23. $\operatorname{Arccosec} z = i \operatorname{Arcsech} iz$.

4.4.24. $\operatorname{Arcsec} z = \pm i \operatorname{Arsech} z$.

4.4.25. $\operatorname{Arcctg} z = i \operatorname{Arcth} iz$.

Логарифмические представления

4.4.26. $\operatorname{Arcsin} x = -i \operatorname{Ln}[(1 - x^2)^{1/2} + ix] \quad (x^2 \leqslant 1)$.

4.4.27. $\operatorname{Arccos} x = -i \operatorname{Ln}[x + i(1 - x^2)^{1/2}] \quad (x^2 \leqslant 1)$.

4.4.28. $\operatorname{Arctg} x = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 - ix}{1 + ix} = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i + x}{i - x}$

(x — действительное).

4.4.29. $\operatorname{Arccosec} x = -i \operatorname{Ln}\left[\frac{(x^2 - 1)^{1/2} + i}{x}\right]$

$(x^2 \geqslant 1)$.

4.4.30. $\operatorname{Arcsec} x = -i \operatorname{Ln}\left[\frac{1 + i(x^2 - 1)^{1/2}}{x}\right] \quad (x^2 \geqslant 1)$.

4.4.31. $\operatorname{Arcctg} x = \frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{ix + 1}{ix - 1}\right) = \frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{x - i}{x + i}\right)$

(x — действительное).

Сумма и разность обратных тригонометрических функций

4.4.32. $\operatorname{Arcsin} z_1 \pm \operatorname{Arcsin} z_2 =$
$$= \operatorname{Arcsin}[z_1(1-z_2^2)^{1/2} \pm z_2(1-z_1^2)^{1/2}].$$

4.4.33. $\operatorname{Arccos} z_1 \pm \operatorname{Arccos} z_2 =$
$$= \operatorname{Arccos}\{z_1 z_2 \mp [(1-z_1^2)(1-z_2^2)]^{1/2}\}.$$

4.4.34. $\operatorname{Arctg} z_1 \pm \operatorname{Arctg} z_2 =$
$$= \operatorname{Arctg}\left(\frac{z_1 \pm z_2}{1 \mp z_1 z_2}\right).$$

4.4.35. $\operatorname{Arcsin} z_1 \pm \operatorname{Arccos} z_2 =$
$$= \operatorname{Arcsin}\{z_1 z_2 \pm [(1-z_1^2)(1-z_2^2)]^{1/2}\} =$$
$$= \operatorname{Arccos}[z_2(1-z_1^2)^{1/2} \mp z_1(1-z_2^2)^{1/2}].$$

4.4.36. $\operatorname{Arctg} z_1 \pm \operatorname{Arcctg} z_2 =$
$$= \operatorname{Arctg}\left(\frac{z_1 z_2 \pm 1}{z_2 \mp z_1}\right) = \operatorname{Arcctg}\left(\frac{z_2 \mp z_1}{z_1 z_2 \mp 1}\right).$$

Действительная и мнимая части обратных тригонометрических функций

4.4.37. $\operatorname{Arcsin} z = k\pi + (-1)^k \arcsin\beta +$
$$+ (-1)^k i \ln[\alpha + (\alpha^2-1)^{1/2}].$$

4.4.38. $\operatorname{Arccos} z =$
$$= 2k\pi \pm \{\arccos\beta - i\ln[\alpha + (\alpha^2-1)^{1/2}]\}.$$

4.4.39. $\operatorname{Arctg} z = k\pi + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2-y^2}\right) +$
$$+ \frac{i}{4}\ln\left[\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}\right] \quad (z^2 \neq -1),$$

где k — целое или нуль и
$$\alpha = \frac{1}{2}[(x+1)^2+y^2]^{1/2} + \frac{1}{2}[(x-1)^2+y^2]^{1/2},$$
$$\beta = \frac{1}{2}[(x+1)^2+y^2]^{1/2} - \frac{1}{2}[(x-1)^2+y^2]^{1/2}.$$

Разложения в степенной ряд

4.4.40. $\arcsin z = z + \frac{z^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3z^5}{2\cdot 4\cdot 5} +$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5z^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots \quad (|z|<1).$$

4.4.41. $\arcsin(1-z) =$
$$= \frac{\pi}{2} - (2z)^{1/2}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2^{2k}(2k+1)\,k!}z^k\right]$$
$$(|z|<2).$$

4.4.42. $\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$
$$(|z| \leqslant 1,\ z^2 \neq -1).$$
$$\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{5z^5} + \ldots \quad (|z|>1,\ z^2 \neq -1),$$
$$\operatorname{arctg} z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \ldots\right]$$
$$(z^2 \neq -1).$$

Разложения в непрерывную дробь
(z принадлежит плоскости с разрезом, изображенным на рис. 4.4)

4.4.43. $\operatorname{arctg} z = \frac{z}{1+}\,\frac{z^2}{3+}\,\frac{4z^2}{5+}\,\frac{9z^2}{7+}\,\frac{16z^2}{9+}\ldots$

4.4.44. $\frac{\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{z}{1-}\,\frac{1\cdot 2z^2}{3-}\,\frac{1\cdot 2z^2}{5-}\,\frac{3\cdot 4z^2}{7-}\,\frac{3\cdot 4z^2}{9-}\ldots$

Аппроксимация многочленами *)

4.4.45. $0 \leqslant x \leqslant 1$,
$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - (1-x)^{1/2}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + \varepsilon(x),$$
$$|\varepsilon(x)| \leqslant 5\cdot 10^{-5},$$
$$a_0 = 1.57072\,88,\quad a_2 = 0.07426\,10,$$
$$a_1 = -0.21211\,44,\quad a_3 = -0.01872\,93.$$

4.4.46. $0 \leqslant x \leqslant 1$,
$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - (1-x)^{1/2}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 +$$
$$+ a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7) + \varepsilon(x),$$
$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2\cdot 10^{-8},$$
$$a_0 = 1.57079\,63050,\quad a_4 = 0.03089\,18810,$$
$$a_1 = -0.21459\,88016,\quad a_5 = -0.01708\,81256,$$
$$a_2 = 0.08897\,89874,\quad a_6 = 0.00667\,00901,$$
$$a_3 = -0.05017\,43046,\quad a_7 = 0.00126\,24911.$$

4.4.47. $-1 \leqslant x \leqslant 1$,
$$\operatorname{arctg} x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + a_9x^9 + \varepsilon(x),$$
$$|\varepsilon(x)| \leqslant 10^{-5}$$
$$a_1 = 0.99986\,60,\quad a_7 = -0.08513\,30,$$
$$a_3 = -0.33029\,95,\quad a_9 = 0.02083\,51.$$
$$a_5 = 0.18014\,10,$$

*) Формулы 4.4.45 — 4.4.47 взяты из [4.5], 4.48 — из [4.6], 4.49 — из [4.1].

4.4.48. $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+0.28x^2} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 5 \cdot 10^{-3}.$$

4.4.49. $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 + \sum_{k=1}^{8} a_{2k} x^{2k} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_2 = -0.33333\,14528, \quad a_{10} = -0.07528\,96400,$$
$$a_4 = 0.19993\,55085, \quad a_{12} = 0.04290\,96138,$$
$$a_6 = -0.14208\,89944, \quad a_{14} = -0.01616\,57367,$$
$$a_8 = 0.10656\,26393, \quad a_{16} = 0.00286\,62257.$$

Аппроксимация многочленами Чебышева (см. [4.2])

4.4.50. $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

$$T_n^*(x) = \cos n\theta, \quad \cos\theta = 2x - 1 \quad (\text{см. гл. } 22),$$

$$\operatorname{arctg} x = x \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n^*(x^2),$$

n	A_n	n	A_n
0	0.88137 3587	6	0.00000 3821
1	−0.10589 2925	7	−0.00000 0570
2	0.01113 5843	8	0.00000 0086
3	−0.00138 1195	9	−0.00000 0013
4	0.00018 5743	10	0.00000 0002
5	−0.00002 6215		

При $x > 1$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4.4.51. $-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$$\arcsin x = x \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n^*(2x^2);$$

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\arccos x = \frac{1}{2}\pi - x \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n^*(2x^2);$$

n	A_n	n	A_n
0	1.05123 1959	5	0.00000 5881
1	0.05494 6487	6	0.00000 0777
2	0.00408 0631	7	0.00000 0107
3	0.00040 7890	8	0.00000 0015
4	0.00004 6985	9	0.00000 0002

При $\frac{1}{2}\sqrt{2} < x \leqslant 1$ используются соотношения

$$\arcsin x = \arccos (1-x^2)^{1/2},$$
$$\arccos x = \arcsin (1-x^2)^{1/2}.$$

Производные

4.4.52. $\dfrac{d}{dz} \arcsin z = (1-z^2)^{-1/2}.$

4.4.53. $\dfrac{d}{dz} \arccos z = -(1-z^2)^{-1/2}.$

4.4.54. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{arctg} z = \dfrac{1}{1+z^2}.$

4.4.55. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{arcctg} z = \dfrac{-1}{1+z^2}.$

4.4.56. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{arcsec} z = \dfrac{1}{z(z^2-1)^{1/2}}.$

4.4.57. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{arccosec} z = -\dfrac{1}{z(z^2-1)^{1/2}}.$

Неопределенные интегралы от обратных тригонометрических функций

4.4.58. $\int \arcsin z\,dz = z \arcsin z + (1-z^2)^{1/2}.$

4.4.59. $\int \arccos z\,dz = z \arccos z - (1-z^2)^{1/2}.$

4.4.60. $\int \operatorname{arctg} z\,dz = z \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2).$

4.4.61. $\int \operatorname{arccosec} z\,dz = z \operatorname{arccosec} z \pm \ln[z + (z^2-1)^{1/2}]$

$$\left(0 < \operatorname{arccosec} z < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccosec} z < 0\right).$$

4.4.62. $\int \operatorname{arcsec} z\,dz = z \operatorname{arcsec} z \mp \ln[z + (z^2-1)^{1/2}]$

$$\left(0 < \operatorname{arcsec} z < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} z < \pi\right).$$

4.4.63. $\int \operatorname{arcctg} z\,dz = z \operatorname{arcctg} z + \frac{1}{2}\ln(1+z^2).$

4.4.64. $\int z \arcsin z\,dz = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arcsin z + \frac{z}{4}(1-z^2)^{1/2}.$

4.4.65. $\int z^n \arcsin z\,dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}\arcsin z - \dfrac{1}{n+1}\int \dfrac{z^{n+1}}{(1-z^2)^{1/2}}\,dz \quad (n \neq -1).$

4.4.66. $\int z \arccos z\,dz = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arccos z - \frac{z}{4}(1-z^2)^{1/2}.$

4.4.67. $\int z^n \arccos z\,dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}\arccos z + \dfrac{1}{n+1}\int \dfrac{z^{n+1}}{(1-z^2)^{1/2}}\,dz \quad (n \neq -1).$

4.4.68. $\displaystyle\int z \operatorname{arctg} z\, dz = \frac{1}{2}(1+z^2)\operatorname{arctg} z - \frac{z}{2}$.

4.4.69. $\displaystyle\int z^n \operatorname{arctg} z\, dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}\operatorname{arctg} z - \frac{1}{n+1}\int \frac{z^{n+1}\,dz}{1+z^2} \quad (n \neq -1)$.

4.4.70. $\displaystyle\int z \operatorname{arcctg} z\, dz = \frac{1}{2}(1+z^2)\operatorname{arcctg} z + \frac{z}{2}$.

4.4.71. $\displaystyle\int z^n \operatorname{arcctg} z\, dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}\operatorname{arcctg} z + \frac{1}{n+1}\int \frac{z^{n+1}\,dz}{1+z^2} \quad (n \neq -1)$.

4.5. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ $(z = x + iy)$

Определения

4.5.1. $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

4.5.2. $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$.

4.5.3. $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

4.5.4. $\operatorname{cosech} z = \dfrac{1}{\operatorname{sh} z}$.

4.5.5. $\operatorname{sech} z = \dfrac{1}{\operatorname{ch} z}$.

4.5.6. $\operatorname{cth} z = \dfrac{1}{\operatorname{th} z}$.

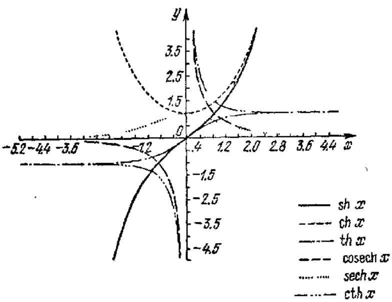


Рис. 4.6. Гиперболические функции.

Связь с тригонометрическими функциями (см. 4.3.49 — 4.3.54)

4.5.7. $\operatorname{sh} z = -i \sin iz$.

4.5.8. $\operatorname{ch} z = \cos iz$.

4.5.9. $\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz$.

4.5.10. $\operatorname{cosech} z = i \operatorname{cosec} iz$.

4.5.11. $\operatorname{sech} z = \sec iz$.

4.5.12. $\operatorname{cth} z\ i = \operatorname{ctg} iz$.

Периодичность
(k — целое)

4.5.13. $\operatorname{sh}(z + 2k\pi i) = \operatorname{sh} z$.

4.5.14. $\operatorname{ch}(z + 2k\pi i) = \operatorname{ch} z$.

4.5.15. $\operatorname{th}(z + k\pi i) = \operatorname{th} z$.

Соотношения между гиперболическими функциями

4.5.16. $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

4.5.17. $\operatorname{th}^2 z + \operatorname{sech}^2 z = 1$.

4.5.18. $\operatorname{cth}^2 z - \operatorname{cosech}^2 z = 1$.

4.5.19. $\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = e^z$.

4.5.20. $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = e^{-z}$.

Гиперболические функции отрицательных значений аргумента

4.5.21. $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z$.

4.5.22. $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z$.

4.5.23. $\operatorname{th}(-z) = -\operatorname{th} z$.

Формулы сложения

4.5.24. $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

4.5.25. $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

4.5.26. $\operatorname{th}(z_1 + z_2) = \dfrac{\operatorname{th} z_1 + \operatorname{th} z_2}{1 + \operatorname{th} z_1 \operatorname{th} z_2}$.

4.5.27. $\operatorname{cth}(z_1 + z_2) = \dfrac{\operatorname{cth} z_1 \operatorname{cth} z_2 + 1}{\operatorname{cth} z_1 + \operatorname{cth} z_2}$.

Гиперболические функции половинного аргумента

4.5.28. $\operatorname{sh}\dfrac{z}{2} = \left(\dfrac{\operatorname{ch} z - 1}{2}\right)^{1/2}$.

4.5.29. $\operatorname{ch}\dfrac{z}{2} = \left(\dfrac{\operatorname{ch} z + 1}{2}\right)^{1/2}$.

4.5.30. $\operatorname{th}\dfrac{z}{2} = \left(\dfrac{\operatorname{ch} z - 1}{\operatorname{ch} z + 1}\right)^{1/2} = \dfrac{\operatorname{ch} z - 1}{\operatorname{sh} z} = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z + 1}$.

Гиперболические функции кратных аргументов

4.5.31. $\operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z = \dfrac{2 \operatorname{th} z}{1 - \operatorname{th}^2 z}$.

4.5.32. $\operatorname{ch} 2z = 2\operatorname{ch}^2 z - 1 = 2\operatorname{sh}^2 z + 1 = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z$.

4.5.33. $\operatorname{th} 2z = \dfrac{2 \operatorname{th} z}{1 + \operatorname{th}^2 z}$.

4.5.34. $\operatorname{sh} 3z = 3 \operatorname{sh} z + 4 \operatorname{sh}^3 z$.

4.5.35. $\operatorname{ch} 3z = -3 \operatorname{ch} z + 4 \operatorname{ch}^3 z$.

4.5.36. $\operatorname{sh} 4z = 4 \operatorname{sh}^3 z \operatorname{ch} z + 4 \operatorname{ch}^3 z \operatorname{sh} z$.

4.5.37. $\operatorname{ch} 4z = \operatorname{ch}^4 z + 6 \operatorname{sh}^2 z \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^4 z$.

Произведения гиперболических синусов и косинусов

4.5.38. $2 \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 = \operatorname{ch}(z_1 + z_2) - \operatorname{ch}(z_1 - z_2)$.

4.5.39. $2 \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 = \operatorname{ch}(z_1 + z_2) + \operatorname{ch}(z_1 - z_2)$.

4.5.40. $2 \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 = \operatorname{sh}(z_1 + z_2) + \operatorname{sh}(z_1 - z_2)$.

Сумма и разность гиперболических функций

4.5.41. $\operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2 \operatorname{sh}\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\dfrac{z_1 - z_2}{2}\right)$.

4.5.42. $\operatorname{sh} z_1 - \operatorname{sh} z_2 = 2 \operatorname{ch}\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\dfrac{z_1 - z_2}{2}\right)$.

4.5.43. $\operatorname{ch} z_1 + \operatorname{ch} z_2 = 2 \operatorname{ch}\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\dfrac{z_1 - z_2}{2}\right)$.

4.5.44. $\operatorname{ch} z_1 - \operatorname{ch} z_2 = 2 \operatorname{sh}\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\dfrac{z_1 - z_2}{2}\right)$.

4.5.45. $\operatorname{th} z_1 + \operatorname{th} z_2 = \dfrac{\operatorname{sh}(z_1 + z_2)}{\operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2}$.

4.5.46. $\operatorname{cth} z_1 + \operatorname{cth} z_2 = \dfrac{\operatorname{sh}(z_1 + z_2)}{\operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2}$.

Соотношения между квадратами гиперболических синусов и косинусов

4.5.47. $\operatorname{sh}^2 z_1 - \operatorname{sh}^2 z_2 = \operatorname{sh}(z_1 + z_2) \operatorname{sh}(z_1 - z_2) = \operatorname{ch}^2 z_1 - \operatorname{ch}^2 z_2$.

4.5.48. $\operatorname{sh}^2 z_1 + \operatorname{ch}^2 z_2 = \operatorname{ch}(z_1 + z_2) \operatorname{ch}(z_1 - z_2) = \operatorname{ch}^2 z_1 + \operatorname{sh}^2 z_2$.

Действительная и мнимая части гиперболических функций $(z = x + iy)$

4.5.49. $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$.

4.5.50. $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$.

4.5.51. $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} 2x + i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$.

4.5.52. $\operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{sh} 2x - i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}$.

Формула Муавра

4.5.53. $(\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z)^n = \operatorname{ch} nz + \operatorname{sh} nz$.

Модуль и аргумент гиперболических функций

4.5.54. $|\operatorname{sh} z| = (\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y)^{1/2} = \left[\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - \cos 2y)\right]^{1/2}$.

4.5.55. $\arg \operatorname{sh} z = \operatorname{arctg}(\operatorname{cth} x \operatorname{th} y)$.

4.5.56. $|\operatorname{ch} z| = (\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y)^{1/2} = \left[\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + \cos 2y)\right]^{1/2}$.

4.5.57. $\arg \operatorname{ch} z = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x \operatorname{tg} y)$.

4.5.58. $|\operatorname{th} z| = \left(\dfrac{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}\right)^{1/2}$.

4.5.59. $\arg \operatorname{th} z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin 2y}{\operatorname{sh} 2x}\right)$.

4.5.60. Соотношения между гиперболическими (или обратными гиперболическими функциями)

	$\operatorname{sh} x = a$	$\operatorname{ch} x = a$	$\operatorname{th} x = a$	$\operatorname{cosech} x = a$	$\operatorname{sech} x = a$	$\operatorname{cth} x = a$
$\operatorname{sh} x$	a	$(a^2 - 1)^{1/2}$	$a(1 - a^2)^{-1/2}$	a^{-1}	$a^{-1}(1 - a^2)^{1/2}$	$(a^2 - 1)^{-1/2}$
$\operatorname{ch} x$	$(1 + a^2)^{1/2}$	a	$(1 - a^2)^{-1/2}$	$a^{-1}(1 + a^2)^{1/2}$	a^{-1}	$a(a^2 - 1)^{-1/2}$
$\operatorname{th} x$	$a(1 + a^2)^{-1/2}$	$a^{-1}(a^2 - 1)^{1/2}$	a	$(1 + a^2)^{-1/2}$	$(1 - a^2)^{1/2}$	a^{-1}
$\operatorname{cosech} x$	a^{-1}	$(a^2 - 1)^{-1/2}$	$a^{-1}(1 - a^2)^{1/2}$	a	$a(1 - a^2)^{-1/2}$	$(a^2 - 1)^{1/2}$
$\operatorname{sech} x$	$(1 + a^2)^{-1/2}$	a^{-1}	$(1 - a^2)^{1/2}$	$a(1 + a^2)^{-1/2}$	a	$a^{-1}(a^2 - 1)^{1/2}$
$\operatorname{cth} x$	$a^{-1}(a^2 + 1)^{1/2}$	$a(a^2 - 1)^{-1/2}$	a^{-1}	$(1 + a^2)^{1/2}$	$(1 - a^2)^{-1/2}$	a

Например, если $\operatorname{sh} x = a$, то $\operatorname{cth} x = a^{-1}(a^2 + 1)^{1/2}$, $\operatorname{Arsech} a = \operatorname{Arcth}(1 - a^2)^{-1/2}$.

4.5.61. Частные значения гиперболических функций

z	0	$\frac{\pi}{2} i$	πi	$\frac{3\pi}{2} i$	∞
$\operatorname{sh} z$	0	i	0	$-i$	∞
$\operatorname{ch} z$	1	0	-1	0	∞
$\operatorname{th} z$	0	$\infty\, i$	0	$-\infty\, i$	1
$\operatorname{cosech} z$	∞	$-i$	∞	i	0
$\operatorname{sech} z$	1	∞	-1	∞	0
$\operatorname{cth} z$	∞	0	∞	0	1

Разложения в степенной ряд

4.5.62. $\operatorname{sh} z = z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \dfrac{z^7}{7!} + \ldots \quad (|z| < \infty)$.

4.5.63. $\operatorname{ch} z = 1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \dfrac{z^6}{6!} + \ldots \; (|z| < \infty)$.

4.5.64. $\operatorname{th} z = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{2}{15} z^5 - \dfrac{17}{315} z^7 + \ldots$

$$\ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} + \ldots \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right).$$

4.5.65. $\operatorname{cosech} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{7}{360} z^3 - \frac{31}{15120} z^5 + \ldots$

$$\ldots - \frac{2(2^{2n-1}-1)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} + \ldots \quad (|z| < \pi).$$

4.5.66. $\operatorname{sech} z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{5}{24} z^4 - \frac{61}{720} z^6 + \ldots$

$$\ldots + \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n} + \ldots \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right).$$

4.5.67. $\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \frac{2}{945} z^5 - \ldots$

$$\ldots + \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} + \ldots \quad (|z| < \pi).$$

B_n и E_n — числа Бернулли и Эйлера соответственно (см. гл. 23).

Разложения в бесконечные произведения

4.5.68. $\operatorname{sh} z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$

4.5.69. $\operatorname{ch} z = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right].$

Разложение в непрерывную дробь

4.5.70. $\operatorname{th} z = \frac{z}{1+}\,\frac{z^2}{3+}\,\frac{z^2}{5+}\,\frac{z^2}{7+} + \ldots$

$$\left(z \neq \frac{\pi}{2} i \pm n\pi i\right).$$

Производные

4.5.71. $\frac{d}{dz} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} z.$

4.5.72. $\frac{d}{dz} \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} z.$

4.5.73. $\frac{d}{dz} \operatorname{th} z = \operatorname{sech}^2 z.$

4.5.74. $\frac{d}{dz} \operatorname{cosech} z = -\operatorname{cosech} z \operatorname{cth} z.$

4.5.75. $\frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \operatorname{th} z.$

4.5.76. $\frac{d}{dz} \operatorname{cth} z = -\operatorname{cosech}^2 z.$

Неопределенные интегралы

4.5.77. $\int \operatorname{sh} z\, dz = \operatorname{ch} z.$

4.5.78. $\int \operatorname{ch} z\, dz = \operatorname{sh} z.$

4.5.79. $\int \operatorname{th} z\, dz = \ln \operatorname{ch} z.$

4.5.80. $\int \operatorname{cosech} z\, dz = \ln \operatorname{th} \frac{z}{2}.$

4.5.81. $\int \operatorname{sech} z\, dz = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} z).$

4.5.82. $\int \operatorname{cth} z\, dz = \ln \operatorname{sh} z.$

4.5.83. $\int z^n \operatorname{sh} z\, dz = z^n \operatorname{ch} z - n \int z^{n-1} \operatorname{ch} z\, dz.$

4.5.84. $\int z^n \operatorname{ch} z\, dz = z^n \operatorname{sh} z - n \int z^{n-1} \operatorname{sh} z\, dz.$

4.5.85. $\int \operatorname{sh}^m z \operatorname{ch}^n z\, dz = \frac{1}{m+n} \operatorname{sh}^{m+1} z \operatorname{ch}^{n-1} z +$

$$+ \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sh}^m z \operatorname{ch}^{n-2} z\, dz = \frac{1}{m+n} \operatorname{sh}^{m-1} z \operatorname{ch}^{n+1} z -$$

$$- \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sh}^{m-2} z \operatorname{ch}^n z\, dz \quad (m+n \neq 0).$$

4.5.86. $\int \frac{dz}{\operatorname{sh}^m z \operatorname{ch}^n z} = \frac{-1}{(m-1)\operatorname{sh}^{m-1} z \operatorname{ch}^{n-1} z} -$

$$- \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dz}{\operatorname{sh}^{m-2} z \operatorname{ch}^n z} \quad (m \neq 1),$$

$$\int \frac{dz}{\operatorname{sh}^m z \operatorname{ch}^n z} = \frac{1}{(n-1)\operatorname{sh}^{m-1} z \operatorname{ch}^{n-1} z} +$$

$$+ \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dz}{\operatorname{sh}^m z \operatorname{ch}^{n-2} z} \quad (n \neq 1).$$

4.5.87. $\int \operatorname{th}^n z\, dz = -\frac{\operatorname{th}^{n-1} z}{n-1} + \int \operatorname{th}^{n-2} z\, dz \quad (n \neq 1).$

4.5.88. $\int \operatorname{cth}^n z\, dz = -\frac{\operatorname{cth}^{n-1} z}{n-1} + \int \operatorname{cth}^{n-2} z\, dz \quad (n \neq 1).$

Другие интегралы, содержащие гиперболические функции, см. в гл. 5 и 7.

4.6. ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ($z = x + iy$)

Определения

4.6.1. $\operatorname{arsh} z = \int_0^z \frac{dt}{(1+t^2)^{1/2}}.$

4.6.2. $\operatorname{arch} z = \int_1^z \frac{dt}{(t^2-1)^{1/2}}.$

4.6.3. $\operatorname{arth} z = \int_0^z \frac{dt}{1-t^2}.$

Пути интегрирования не должны пересекать следующие линии разреза:

в 4.6.1 — мнимую ось от $-i\infty$ до $-i$ и от $+i$ до $+i\infty$;

в 4.6.2 — действительную ось от $-\infty$ до $+1$;

в 4.6.3 — действительную ось от $-\infty$ до -1 и от $+1$ до $+\infty$.

Для обратных гиперболических функций применяют также обозначения $\mathrm{sh}^{-1}\, z$, $\mathrm{arcsh}\, z$, $\mathrm{Arsinh}\, z$ и т.д.

4.6.4. $\mathrm{arcosech}\, z = \mathrm{Arsh}\, \dfrac{1}{z}$.

4.6.5. $\mathrm{arsech}\, z = \mathrm{Arch}\, \dfrac{1}{z}$.

4.6.6. $\mathrm{arcth}\, z = \mathrm{Arth}\, \dfrac{1}{z}$.

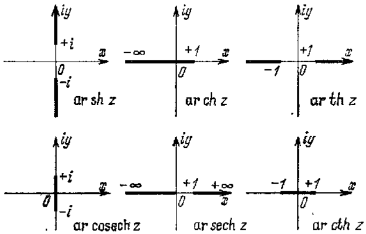


Рис. 4.7. Линии разреза для обратных гиперболических функций.

4.6.7. $\mathrm{arth}\, z = \mathrm{arcth}\, z \pm \dfrac{\pi i}{2}$ (см. 4.5.60) (знак + при $\mathrm{Im}\, z > 0$, знак − при $\mathrm{Im}\, z < 0$).

Основные свойства

Общими решениями уравнений.

$$z = \mathrm{sh}\, t, \quad z = \mathrm{ch}\, t, \quad z = \mathrm{th}\, t$$

являются соответственно функции

4.6.8. $t = \mathrm{Arsh}\, z = (-1)^k\, \mathrm{arsh}\, z + k\pi i$,

4.6.9. $t = \mathrm{Arch}\, z = \pm\, \mathrm{arch}\, z + 2k\pi i$,

4.6.10. $t = \mathrm{Arth}\, z = \mathrm{arth}\, z + k\pi i$ (k — целое).

Обратные гиперболические функции отрицательного аргумента

4.6.11. $\mathrm{arsh}(-z) = -\,\mathrm{arsh}\, z$.

4.6.12. $\mathrm{arch}(-z) = \mathrm{arch}\, z$.

4.6.13. $\mathrm{arth}(-z) = -\,\mathrm{arth}\, z$.

Связь с обратными тригонометрическими функциями (см. 4.4.20 — 4.4.25)

Тождества, которым удовлетворяют гиперболические функции, могут быть получены из соответствующих тождеств для тригонометрических функций заменой z на iz.

4.6.14. $\mathrm{Arsh}\, z = -\, i\, \mathrm{Arcsin}\, iz$.

4.6.15. $\mathrm{Arch}\, z = \pm\, i\, \mathrm{Arccos}\, z$.

4.6.16. $\mathrm{Arth}\, z = -\, i\, \mathrm{Arctg}\, iz$.

4.6.17. $\mathrm{Arcosech}\, z = i\, \mathrm{Arccosec}\, iz$.

4.6.18. $\mathrm{Arsech}\, z = \pm\, i\, \mathrm{Arcsec}\, z$.

4.6.19. $\mathrm{Arcth}\, z = i\, \mathrm{Arcctg}\, iz$.

Логарифмические представления

4.6.20. $\mathrm{arsh}\, x = \ln\,[x + (x^2 + 1)^{1/2}]$.

4.6.21. $\mathrm{arch}\, x = \ln\,[x + (x^2 - 1)^{1/2}] \quad (x \geqslant 1)$.

4.6.22. $\mathrm{arth}\, x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x} \quad (0 \leqslant x^2 < 1)$.

4.6.23. $\mathrm{arcosech}\, x = \ln \left[\dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right)^{1/2}\right] \quad (x \neq 0)$.

4.6.24. $\mathrm{arsech}\, x = \ln \left[\dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)^{1/2}\right] \quad (0 < x \leqslant 1)$.

4.6.25. $\mathrm{arcth}\, x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x + 1}{x - 1} \quad (x^2 > 1)$.

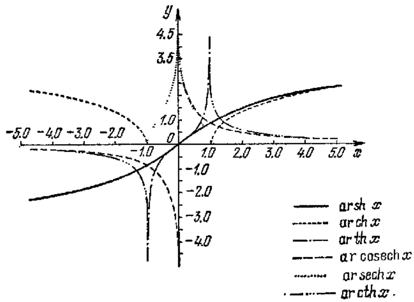


Рис. 4.8. Обратные гиперболические функции.

Сумма и разность обратных гиперболических функций

4.6.26. $\mathrm{Arsh}\, z_1 \pm \mathrm{Arsh}\, z_2 =$

$$= \mathrm{Arsh}\,[z_1(1 + z_2^2)^{1/2} \pm z_2(1 + z_1^2)^{1/2}].$$

4.6.27. $\mathrm{Arch}\, z_1 \pm \mathrm{Arch}\, z_2 =$

$$= \mathrm{Arch}\,\{z_1 z_2 \pm [(z_1^2 - 1)(z_2^2 - 1)]^{1/2}\}.$$

4.6.28. $\mathrm{Arth}\, z_1 \pm \mathrm{Arth}\, z_2 = \mathrm{Arth}\left(\dfrac{z_1 \pm z_2}{1 \pm z_1 z_2}\right)$.

4.6.29. $\mathrm{Arsh}\, z_1 \pm \mathrm{Arch}\, z_2 =$

$$= \mathrm{Arsh}\,\{z_1 z_2 \pm [(1 + z_1^2)(z_2^2 - 1)]^{1/2}\} =$$

$$= \mathrm{Arch}\,[z_2(1 + z_1^2)^{1/2} \pm z_1(z_2^2 - 1)^{1/2}].$$

4.6.30. $\operatorname{Arth} z_1 \pm \operatorname{Arcth} z_2 = \operatorname{Arth}\left(\dfrac{z_1 z_2 \pm 1}{z_2 \pm z_1}\right) = \operatorname{Arcth}\left(\dfrac{z_2 \pm z_1}{z_1 z_2 \pm 1}\right).$

Разложения в степенные ряды

4.6.31. $\operatorname{arsh} z = z - \dfrac{1}{2\cdot 3} z^3 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} z^5 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} z^7 + \ldots \quad (|z| < 1),$

$\operatorname{arsh} z = \ln 2z + \dfrac{1}{2\cdot 2z^2} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4z^4} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6z^6} - \ldots \quad (|z| > 1).$

4.6.32. $\operatorname{arch} z = \ln 2z - \dfrac{1}{2\cdot 2z^2} - \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4z^4} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6z^6} - \ldots \quad (|z| > 1).$

4.6.33. $\operatorname{arth} z = z + \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} + \dfrac{z^7}{7} + \ldots \quad (|z| < 1).$

4.6.34. $\operatorname{arcth} z = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{3z^3} + \dfrac{1}{5z^5} + \dfrac{1}{7z^7} + \ldots \quad (|z| > 1).$

Разложения в непрерывную дробь

4.6.35. $\operatorname{arth} z = \dfrac{z}{1-}\,\dfrac{z^2}{3-}\,\dfrac{4z^2}{5-}\,\dfrac{9z^2}{7-}\ldots$, z принадлежит плоскости с разрезом, изображенным на рис. 4.7.

4.6.36. $\dfrac{\operatorname{arsh} z}{\sqrt{1+z^2}} = \dfrac{z}{1+}\,\dfrac{1\cdot 2z^2}{3+}\,\dfrac{1\cdot 2z^2}{5+}\,\dfrac{3\cdot 4z^2}{7+}\,\dfrac{3\cdot 4z^2}{9+}\ldots$

Производные

4.6.37. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{arsh} z = (1+z^2)^{-1/2}.$

4.6.38. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{arch} z = (z^2-1)^{-1/2}.$

4.6.39. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{arth} z = (1-z^2)^{-1}.$

4.6.40. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{arcosech} z = \mp \dfrac{1}{z(1+z^2)^{1/2}}$

(знак $-$ при $\operatorname{Re} z > 0$ и знак $+$ при $\operatorname{Re} z < 0$).

4.6.41. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{arsech} z = \mp \dfrac{1}{z(1-z^2)^{1/2}}.$

4.6.42. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{arcth} z = (1-z^2)^{-1}.$

Неопределенные интегралы от обратных гиперболических функций

4.6.43. $\int \operatorname{arsh} z\,dz = z \operatorname{arsh} z - (1+z^2)^{1/2}.$

4.6.44. $\int \operatorname{arch} z\,dz = z \operatorname{arch} z - (z^2-1)^{1/2}.$

4.6.45. $\int \operatorname{arth} z\,dz = z \operatorname{arth} z + \dfrac{1}{2}\ln(1-z^2).$

4.6.46. $\int \operatorname{arcosech} z\,dz = z \operatorname{arcosech} z + \operatorname{arsh} z.$

4.6.47. $\int \operatorname{arsech} z\,dz = z \operatorname{arsech} z + \arcsin z.$

4.6.48. $\int \operatorname{arcth} z\,dz = z \operatorname{arcth} z + \dfrac{1}{2}\ln(z^2-1).$

4.6.49. $\int z \operatorname{arsh} z\,dz = \dfrac{2z^2+1}{4}\operatorname{arsh} z - \dfrac{z}{4}(z^2+1)^{1/2}.$

4.6.50. $\int z^n \operatorname{arsh} z\,dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}\operatorname{arsh} z - \dfrac{1}{n+1}\int \dfrac{z^{n+1}}{(1+z^2)^{1/2}}\,dz \quad (n \neq -1).$

4.6.51. $\int z \operatorname{arch} z\,dz = \dfrac{2z^2-1}{4}\operatorname{arch} z - \dfrac{z}{4}(z^2-1)^{1/2}.$

4.6.52. $\int z^n \operatorname{arch} z\,dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}\operatorname{arch} z - \dfrac{1}{n+1}\int \dfrac{z^{n+1}}{(z^2-1)^{1/2}}\,dz \quad (n \neq -1).$

4.6.53. $\int z \operatorname{arth} z\,dz = \dfrac{z^2-1}{2}\operatorname{arth} z + \dfrac{z}{2}.$

4.6.54. $\int z^n \operatorname{arth} z\,dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}\operatorname{arth} z - \dfrac{1}{n+1}\int \dfrac{z^{n+1}}{1-z^2}\,dz \quad (n \neq -1).$

4.6.55. $\int z \operatorname{arcosech} z\,dz = \dfrac{z^2}{2}\operatorname{arcosech} z + \dfrac{1}{2}(1+z^2)^{1/2}.$

4.6.56. $\int z^n \operatorname{arcosech} z\,dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}\operatorname{arcosech} z + \dfrac{1}{n+1}\int \dfrac{z^n}{(z^2+1)^{1/2}}\,dz \quad (n \neq -1).$

4.6.57. $\int z \operatorname{arsech} z\,dz = \dfrac{z^2}{2}\operatorname{arsech} z - \dfrac{1}{2}(1-z^2)^{1/2}.$

4.6.58. $\int z^n \operatorname{arsech} z\,dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}\operatorname{arsech} z + \dfrac{1}{n+1}\int \dfrac{z^n}{(1-z^2)^{1/2}}\,dz \quad (n \neq -1).$

4.6.59. $\int z \operatorname{arcth} z\,dz = \dfrac{z^2-1}{2}\operatorname{arcth} z + \dfrac{z}{2}.$

4.6.60. $\int z^n \operatorname{arcth} z\,dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}\operatorname{arcth} z + \dfrac{1}{n+1}\int \dfrac{z^{n+1}}{z^2-1}\,dz \quad (n \neq -1).$

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

4.1. Carlson B., Coldstein, M. Rational approximation of functions. — Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratory LA-1943, 1955.

4.2. Clenshaw C. W. Polynomial approximations to elementary functions. — **Math. Tables Aids Comp.**, 1954, **8**, p. 143—147.

4.3. Clenshaw C. W. A note on the summation of Chebyshev series. — Math. Tables Aids Comp., 1955, **9**, p. 118—120.

4.4. Hardy G. H. A course of pure mathematics. — N.Y.: Macmillan Co., 1947. Русский перевод: Харди Г. Х. Курс чистой математики. — М.: ИЛ, 1949.

4.5. Hastings C., Jr. Approximations for digital computers. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1955.

4.6. Hastings C., Jr. Note № 143. — Math. Tables Aids Comp., 1953, **6**, № 68.

4.7. Hobson E.W. A treatise on plane trigonometry. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1918.

4.8. Wall H. S. Analytic theory of continued fractions. — N.Y.: Van Nostrand Co., 1948.

Таблицы

4.9. Adams E. P. Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions. — Washington: Smithsonian Institution, 1957.

4.10. Andoyer H. Nouvelles tables trigonométriques fondamentales. — P.: Hermann et fils, 1916.

4.11. British Association for the Advancement of Science. Mathematical tables, V.I. Circular and hyperbolic functions, exponential, sine and cosine integrals, factorial functionions and allied functions, Hermitian probability functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1951.

4.12. Chemical Rubber Company. Standard mathematical tables. — Cleveland: Chemical Rubber Publ. Co., 1959.

4.13. Comrie L. J. Chambers' six-figure mathematical tables. — L.: Chambers, 1949, V. 2.

4.14. Dwight H. B. Tables of integrals and other mathematical data. — N.Y.: Macmillan Co., 1957. Русский перевод: Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977.

4.15. Cröbner W., Hofreiter N. Integraltafel, unbestimmte und bestimmte Integrale. — Wien: Springer-Verlag, 1949—1950.

4.16. Harvard Computation Laboratory. Tables of the function arcsin z. — Cambridge: Harvard Univ. Press, 1956. — $z = x + iy$, $0 \leqslant x \leqslant 475$, $0 \leqslant y \leqslant 475$, 6D, с изменяющимися интервалами.

4.17. Harvard Computation Laboratory. Tables of inverse hyperbolic functions. — Cambridge: Harvard Univ., 1949. — Arth x, $0 \leqslant x \leqslant 1$; Arsh x, $0 \leqslant x \leqslant 3.5$; Arch x, $1 \leqslant x \leqslant 3.5$; Arsh x, Arch x, $3.5 \leqslant x \leqslant 22980$, 9D, с изменяющимися интервалами. Русский перевод: Таблицы обратных гиперболических функций. — М.: ВЦ АН СССР, 1960. — (БМТ; Вып. 11).

4.18. National Bureau of Standards. Tables of 10^x. — Washington: Government Printing Office, 1953. — (Applied Math. Series; 27). $x = 0\ (0.00001)1$, 10D; $10^{n \cdot 10^{-p}}$, $n = 1(1)999$, $p = 3(3)15$, 15D.
Русский перевод: Таблицы антилогарифмов 10^x. — М.: ВЦ АН СССР, 1965. — (БМТ; Вып. 30).

4.19. National Bureau of Standards. Table of natural logarithms for arguments between zero and five to sixteen decimal places. — Washington: Government Printing Office, 1953. — (Applied Math. Series; 31).
$x = 0(0.0001)5$, 16D.
Русский перевод: Таблицы натуральных логарифмов. — М.: ВЦ АН СССР, 1960. — (БМТ; Вып. 7; Вып. 8).

4.20. National Bureau of Standards. Tables of the exponential function e^x. — Washington: Government Printing Office, 1951. — (Applied Math. Series; 14).
$x = -2.4999(0.0001)\ 0.9999$, 18D;
$x = 1(0.0001)\ 2.4999$, 15D; $x = 2.5(0.001)4.999$, 15D;
$x = 5(0.01)9.99$, 12D; $x = -0.000099(0.000001)$ 0.000099, 18D;
$x = -100(1)100$, 19S, $x = -9 \cdot 10^{-n}(10^{-n})\ 9 \cdot 10^{-n}$, $n = 10, 9, 8, 7$ 18D;
значения e и $1/e$, 2556D.

4.21. National Bureau of Standards. Table of the descending exponential $x = 2.5$ to $x = 10$. — Washington: Government Printing Office, 1955. — (Applied Math. Series; 46).
$x = 2.5(0.001)\ 10$, 20D.

4.22. National Bureau of Standards. Tables of sines and cosines for radian arguments. — Washington: Government Printing Office, 1955. — (Applied Math. Series; 43).
$\sin x$, $\cos x$, $x = 0(0.001)\ 25.2$, $0(1)100$, 8D;
$x = 10^{-n}(10^{-n})\ 9 \cdot 10^{-n}$, $n = 5, 4, 3, 2, 1$, 15 D;
$x = 0(0.00001)\ 0.01$, 12D.

4.23. National Bureau of Standards. Tables of circular and hyperbolic sines and cosines for radian arguments. — Washington: Government Printing Office, 1953. — (Applied Math. Series; 36).
$\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{ch}\, x$, $x = 0(0.0001)$ 1.9999, $0(0.1)10$, 9D.
Русский перевод: Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла. — М.: ВЦ АН СССР, 1958. — (БМТ; Вып. 1).

4.24. National Bureau of Standards. Table of circular and hyperbolic tangents and cotangents for radian arguments. — N.Y.: Columbia Univ. Press, 1947.
$\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$, $\mathrm{th}\, x$, $x = 0(0.0001)2$, 8D или 8S.;
$x = 0(0.1)\ 10$, 10D.
Русский перевод: Таблицы круговых и гиперболических тангенсов и котангенсов в радианной мере угла. — М.: ВЦ АН СССР, 1959. — (БМТ; Вып. 7).

4.25. National Bureau of Standards. Table of sines and cosines to fifteen decimal places at hundredths of a degree. — Washington: Government Printing Office, 1949. — (Applied Math. Series; 5).
$\sin x$, $\cos x$, $x = 0°(0.01°)\ 90°$, 15D;
дополнительные таблицы $\sin x$, $\cos x$,
$x = 1°(1°)\ 89°$, 30D.

4.26. National Bureau of Standards. Table of secants and cosecants to nine significant figures at hundredths of a degree. — Washington: Government Printing Office, 1954. — (Applied Math. Series; **40**).

4.27. National Bureau of Standards. Collected short tables of the Computation Laboratory. Tables of functions and of zeros of functions. — Washington: Government Printing Office, 1954. — (Applied Math. Series; **37**).

4.28. National Bureau of Standards. Table of arcsin x. — N.Y.: Columbia Univ. Press., 1945.

arcsin x, $x = 0(0.0001)\,0989(0.00001)\,1$, 12D;

таблицы $f(v) = [\pi/2 - \arcsin(1 - v)]/(2v)^{1/2}$,

$v = 0(0.00001)\,0.0005$, 13D.

Русский перевод см. в [4.29].

4.29. National Bureau of Standards. Tables of arctan x. — Washington: Government Printing Office, 1953. — (Applied Math. Series; **26**).

$x = 0(0.001)\ 7(0.01)50(0.1)300(1)2000(10)10000$, 12D.

Русский перевод [4.28] и [4.29]: Таблицы arcsin x и arctg x. — М.: ВЦ АН СССР, 1960. — (БМТ; Вып. 10).

4.30. National Bureau of Standards. Table of hyperbolic sines and cosines, $x = 2$ to $x = 10$. — Washington: Government Printing Office, 1955. — (Applied Math. Series; **45**).

$x = 2(0.001)\,10$, 9S.

4.31. Peirce B. O. A short table of integrals. — Boston: Ginn Co., 1956.

4.32. Peters J. Ten-place logarithm table. — N.Y.: Frederick Ungar Publ.Co., 1957, V. 1, 2 (together with an appendix of mathematical tables). Русский перевод: 1. Петерс Н. Десятизначные таблицы логарифмов чисел от 1 до 100 000. М.: ВЦ АН СССР, 1964. — (БМТ; Вып. 28); 2. Петерс Н. Десятизначные таблицы логарифмов тригонометрических функций от 0° до 90° через тысячную градуса. — М.: ВЦ АН СССР, 1964. — (БМТ; Вып. 29).

4.33. Peters J. Seven-place values of trigonometric functions for every thousandth of a degree. — N.Y.: Van Nostrand Co., 1942.

4.34. Pollak L. W. Rechentafeln zur harmonischen Analyse. — Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1926.

4.35. Thompson A. J., Standard table of logarithms to twenty decimal places. Tracts for Computers № 022. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952. Русский перевод: Томпсон А. Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел. — М.: ВЦ АН СССР, 1961. — (БМТ; Вып. 15; Вып. 16).

4.36. Todd J. Table of arctangents of rational numbers. — Washington: Government Printing Office, 1951. — (Applied Math. Series; **11**).

arctg $g(m/n)$ и arcctg(m/n), $0 < m < n \leqslant 100$, 12D.

4.37. U.S. Department of Commerce, Coast and Geodetic Survey, Natural sines and cosines to eight decimal places. — Washington: Government Printing Office, 1942. — Special Publication № 231.

4.38. Van Ostrand C. E. Tables of the exponential function and of the circular sine and cosine to radian arguments. — Washington: Government Princing Office, 1921. — (Memoirs of the National Academy of Sciences; **14**, 5th Memoir).

4.39. Vega V. B. Logarithmic tables of numbers and trigonometrical functions. — N.Y.: Stechert Co., 1905.

lg x, $x = 1(1)\,100000$;

логарифмы тригонометрических функций через 10 секунд.

Русский перевод: Вега Г. Таблицы семизначных логарифмов. — М.: Геодезиздат, 1962.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Книги

4.40. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике — М.: Наука, 1977.

4.41. Люстерник Л. А., Червоненкис О. А., Янпольский А. Р. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. — М.: Физматгиз, 1963.

4.42. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1962, Т.I.

Таблицы

4.43. Бремикер К. Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций с шестью десятичными знаками. — М.: Физматгиз, 1962.

4.44. Восьмизначные таблицы тригонометрических функций. — М.: Геодезиздат, 1959.

4.45. Многозначные таблицы элементарных функций ($\sin x$, $\cos x$, e^x, e^{-x}). — М.: ВЦ АН СССР, 1960 — (БМТ; Вып. 9).

4.46. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. — М.: Физматгиз, 1962.

4.47. Субботин М. Ф. Многозначные таблицы логарифмов. — М.: Изд-во АН СССР, 1940.

4.48. Таблицы e^x и e^{-x}. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.

4.49. Хаяши К., Барк Л. С. Многозначные таблицы круговых, гиперболических и других функций. — М.: ВЦ АН СССР, 1965. — (БМТ; Вып. 27).

4.50. Хренов Л. С. Пятизначные таблицы тригонометрических функций, — М.: Физматгиз, 1962.

4.51. Хренов Л. С. Шестизначные таблицы тригонометрических функций. — М.: Физматгиз, 1960.

4.52. Хренов Л. С. Семизначные таблицы тригонометрических функций. — М.: Гостехиздат, 1956.

Глава 5

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ФУНКЦИИ

У. ГАУЧИ и *У. КЕЙХИЛЛ*

СОДЕРЖАНИЕ

5.1. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Определения

5.1.1. $E_1(z) = \int\limits_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \quad (|\arg z| < \pi).$

5.1.2. $\mathrm{Ei}(x) = -\mathrm{vp}\int\limits_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \mathrm{vp}\int\limits_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,dt \quad (x > 0).$

5.1.3. $\mathrm{li}(x) = \mathrm{vp}\int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t} = \mathrm{Ei}(\ln x) \quad (x > 1).$

5.1.4. $E_n(z) = \int\limits_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n}\,dt \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \mathrm{Re}\, z > 0).$

5.1.5. $\alpha_n(z) = \int\limits_1^\infty t^n e^{-zt}\,dt \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \mathrm{Re}\, z > 0).$

5.1.6. $\beta_n(z) = \int\limits_{-1}^1 t^n e^{-zt}\,dt \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$

В 5.1.1 предполагается, что путь интегрирования не проходит через начало координат и не пересекает отрицательную часть действительной оси.

Аналитическое продолжение функций 5.1.1, 5.1.2 и функции 5.1.4 при $n > 0$ дает многозначные функции с точками ветвления $z = 0$ и $z = \infty$ *). Эти функции однозначны в плоскости z, разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси **). Интегральный логарифм $\mathrm{li}(z)$ имеет, кроме того, дополнительную точку ветвления $z = 1$.

Функциональные соотношения

5.1.7. $E_1(-x \pm i0) = -\mathrm{Ei}(x) \mp i\pi,$

$$-\mathrm{Ei}(x) = \frac{1}{2}\left[E_1(-x + i0) + E_1(-x - i0)\right] \quad (x > 0).$$

Явные выражения для $\alpha_n(z)$ и $\beta_n(z)$

5.1.8. $\alpha_n(z) = n!\, z^{-n-1} e^{-z}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}\right).$

*) Некоторые авторы ([5.14], [5.16]) используют в качестве основной функции целую функцию $\int\limits_0^z (1 - e^{-t})\,dt/t$, обозначая ее $\mathrm{Ein}(z)$. Имеет место соотношение $\mathrm{Ein}(z) = E_1(z) + \ln z + \gamma$.

**) Некоторые авторы определяют интеграл $\int\limits_{-\infty}^z (e^t/t)\,dt$ в плоскости z, разрезанной вдоль положительной части действительной оси, оставляя то же обозначение $\mathrm{Ei}(z)$. В этом случае для $z = x > 0$ главное значение интеграла обозначается через $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$ [5.10], [5.25], $E^*(x)$ [5.2], $\mathrm{Ei}^*(x)$ [5.6]. $E_1(x)$ часто обозначается через $\mathrm{Ei}(-x)$.

5.1.9. $\beta_n(z) = n!\, z^{-n-1}\left\{e^z\left[1 - z + \frac{z^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{n!}\right] - e^{-z}\left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}\right]\right\}.$

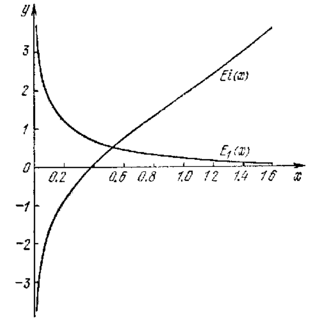


Рис. 5.1. $y = \mathrm{Ei}(x)$ и $y = E_1(x)$.

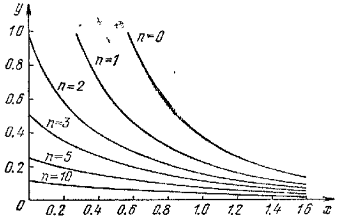


Рис. 5.2. $y = E_n(x)$; $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10$.

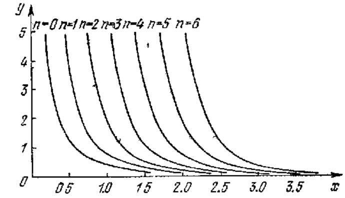


Рис. 5.3. $y = \alpha_n(x)$; $n = 0(1)\,6$.

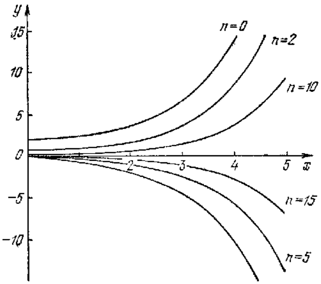


Рис. 5.4. $y = \beta_n(x)$; $n = 0, 1, 2, 5, 10, 15$

Разложения в ряд

($\gamma = 0.5772156649 \ldots$ — постоянная Эйлера).

5.1.10. $\operatorname{Ei}(x) = \gamma + \ln x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\,n!} \quad (x > 0).$

5.1.11. $E_1(z) = -\gamma - \ln z - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^n}{n\,n!} \quad (|\arg z| < \pi).$

5.1.12. $E_n(z) = \dfrac{(-z)^{n-1}}{(n-1)!}[-\ln z + \psi(n)] - \sum\limits_{\substack{m=0\\ m\neq n-1}}^{\infty}{}' \dfrac{(-z)^m}{(m-n+1)\,m!} \quad (|\arg z| < \pi),$

$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(n) = -\gamma + \sum\limits_{m=1}^{n-1} \dfrac{1}{m} \quad (n > 1).$

Соотношение симметрии

5.1.13. $E_n(\bar{z}) = \overline{E_n(z)}.$

Рекуррентные соотношения ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

5.1.14. $E_{n+1}(z) = \dfrac{1}{n}\,[e^{-z} - zE_n(z)].$

5.1.15. $z\alpha_n(z) = e^{-z} + n\alpha_{n-1}(z).$

5.1.16. $z\beta_n(z) = (-1)^n e^z - e^{-z} + n\beta_{n-1}(z).$

Неравенства (см. [5.8], [5.4]) ($x > 0$; $n = 1, 2, 3, \ldots$)

5.1.17. $\dfrac{n-1}{n} E_n(x) < E_{n+1}(x) < E_n(x).$

5.1.18. $E_n^2(x) < E_{n-1}(x)\,E_{n+1}(x).$

5.1.19. $\dfrac{1}{x+n} < e^x E_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x+n-1}.$

5.1.20. $\dfrac{1}{2}\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) < e^x E_1(x) < \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right).$

5.1.21. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{E_n(x)}{E_{n-1}(x)}\right] > 0.$

Разложение в непрерывную дробь

5.1.22. $E_n(z) = e^{-z}\left(\dfrac{1}{z+}\,\dfrac{n}{1+}\,\dfrac{1}{z+}\,\dfrac{n+1}{1+}\,\dfrac{2}{z+}\ldots\right) \quad (|\arg z| < \pi)$

Частные значения

5.1.23. $E_n(0) = \dfrac{1}{n-1} \quad (n > 1).$

5.1.24. $E_0(z) = \dfrac{e^{-z}}{z}.$

5.1.25. $\alpha_0(z) = \dfrac{e^{-z}}{z}, \quad \beta_0(z) = \dfrac{2}{z}\operatorname{sh} z.$

Производные ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

5.1.26. $\dfrac{dE_n(z)}{dz} = -E_{n-1}(z).$

5.1.27. $\dfrac{d^n}{dz^n}[e^z E_1(z)] = \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[e^z E_1(z)] + \dfrac{(-1)^n (n-1)!}{z^n}.$

Определенные и неопределенные интегралы

Более подробную таблицу интегралов можно найти в [5.3], [5.6], [5.11], [5.12], [5.13]. Интегралы, содержащие $E_n(x)$, см. в [5.9].

5.1.28. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{e^{-at}}{b+t}\,dt = e^{ab} E_1(ab).$

5.1.29. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{e^{iat}}{b+t}\,dt = e^{-iab} E_1(-iab) \quad (a > 0,\ b > 0).$

5.1.30. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{t - ib}{t^2 + b^2}\,e^{iat}\,dt = e^{ab} E_1(ab) \quad (a > 0,\ b > 0).$

5.1.31. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{t + ib}{t^2 + b^2}\,e^{iat}\,dt = e^{-ab}(-\operatorname{Ei}(ab) + i\pi) \quad (a > 0,\ b > 0).$

5.1.32. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt = \ln\dfrac{b}{a}.$

5.1.33. $\int\limits_0^{\infty} E_1^2(t)\,dt = 2\ln 2.$

5.1.34. $\int\limits_0^{\infty} e^{-at} E_n(t)\,dt = \dfrac{(-1)^{n-1}}{a^n}\left[\ln(1+a) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^k a^k}{k}\right] \quad (a > -1).$

5.1.35. $$\int_0^1 \frac{e^{at}\sin bt}{t}\,dt = \pi - \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \operatorname{Im} E_1(-a+ib) \quad (a>0,\ b>0).$$

5.1.36. $$\int_0^1 \frac{e^{-at}\sin bt}{t}\,dt = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \operatorname{Im} E_1(a+ib) \quad (a>0,\ b \text{ — действительное}).$$

5.1.37. $$\int_0^1 \frac{e^{at}(1-\cos bt)}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) + \operatorname{Ei}(a) + \operatorname{Re} E_1(-a+ib) \quad (a>0,\ b \text{ — действительное}).$$

5.1.38. $$\int_0^1 \frac{e^{-at}(1-\cos bt)}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) - E_1(a) + \operatorname{Re} E_1(a+ib) \quad (a>0,\ b \text{ — действительное}).$$

5.1.39. $$\int_0^z \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt = E_1(z) + \ln z + \gamma.$$

5.1.40. $$\int_0^x \frac{e^{t}-1}{t}\,dt = \operatorname{Ei}(x) - \ln x - \gamma \quad (x>0).$$

5.1.41. $$\int \frac{e^{ix}}{a^2+x^2}\,dx = \frac{i}{2a}\left[e^{-a}E_1(-a-ix) - e^{a}E_1(a-ix)\right] + \text{const}.$$

5.1.42. $$\int \frac{xe^{ix}}{a^2+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-a}E_1(-a-ix) + e^{a}E_1(a-ix)\right] + \text{const}.$$

5.1.43. $$\int \frac{e^{x}}{a^2+x^2}\,dx = -\frac{1}{a}\operatorname{Re}\left(e^{ia}E_1(-x+ia)\right) + \text{const} \quad (a>0).$$

5.1.44. $$\int \frac{xe^{x}}{a^2+x^2}\,dx = -\operatorname{Re}\left(e^{ia}E_1(-x+ia)\right) + \text{const} \quad (a>0).$$

Связь с неполной гамма-функцией (см. 6.5)

5.1.45. $E_n(z) = z^{n-1}\,\Gamma(1-n, z)$.

5.1.46. $\alpha_n(z) = z^{-n-1}\,\Gamma(n+1, z)$.

5.1.47. $\beta_n(z) = z^{-n-1}[\Gamma(n+1, -z) - \Gamma(n+1, z)]$.

Связь со сферическими функциями Бесселя (см. 10.2)

5.1.48. $$\alpha_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,K_{1/2}(z),\quad \beta_0(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\,I_{1/2}(z).$$

5.1.49. $$\alpha_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,K_{3/2}(z),\quad \beta_1(z) = -\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\,I_{3/2}(z).$$

Теоретико-числовое применение $\operatorname{li}(x)$

Предполагается справедливость гипотезы Римана о том, что все комплексные корни $\zeta(z)$ имеют действительную часть, равную половине.

5.1.50. $\operatorname{li}(x) - \pi(x) = O(\sqrt{x}\ln x) \quad (x\to\infty)$, $\pi(x)$ означает число простых чисел, не превосходящих x.

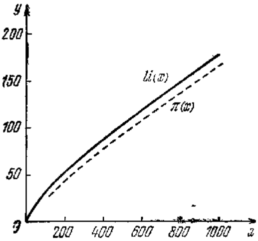


Рис. 5.5. $y = \operatorname{li}(x)$ и $y = \pi(x)$.

Асимптотическое разложение

5.1.51. $$E_n(z) \sim \frac{e^{-z}}{z}\left\{1 - \frac{n}{z} + \frac{n(n+1)}{z^2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{z^3} + \ldots\right\} \quad \left(|\arg z| < \frac{3}{2}\pi\right).$$

Представление $E_n(x)$ для больших значений n

5.1.52. $$E_n(x) = \frac{e^{-x}}{x+n}\left\{1 + \frac{n}{(x+n)^2} + \frac{n(n-2x)}{(x+n)^4} + \frac{n(6x^2-8nx+n^2)}{(x+n)^6} + R(n,x)\right\},$$

$$-0.36n^{-4} \leqslant R(n,x) \leqslant \left(1+\frac{1}{x+n-1}\right)n^{-4} \quad (x>0).$$

Аппроксимация многочленами и рациональными функциями *)

5.1.53. $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$E_1(x) + \ln x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| < 2\cdot 10^{-7},$$

$a_0 = -0.57721\,566,\quad a_3 = 0.05519\,968,$

$a_1 = 0.99999\,193,\quad a_4 = -0.00976\,004,$

$a_2 = -0.24991\,055,\quad a_5 = 0.00107\,857.$

---

*) Аппроксимация 5.1.53 принадлежит Е. Аллену (Заметка № 169. — MTAC, 1954, **8**, с. 240); 5.1.54 и 5.1.56 взяты из [5.7]; 5.1.55 принадлежит С. Гастингсу, мл. (Заметка № 143. — MTAC, 1953, **7**, с. 68).

5.1.54. $1 \leqslant x < \infty$,

$$xe^xE_1(x) = \frac{x^2 + a_1x + a_2}{x^2 + b_1x + b_2} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| < 5\cdot 10^{-5},$$

$$a_1 = 2.334733, \quad b_1 = 3.330657,$$

$$a_2 = 0.250621, \quad b_2 = 1.681534.$$

5.1.55. $10 \leqslant x < \infty$,

$$xe^xE_1(x) = \frac{x^2 + a_1x + a_2}{x^2 + b_1x + b_2} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| < 10^{-7},$$

$$a_1 = 4.03640, \quad b_1 = 5.03637,$$

$$a_2 = 1.15198, \quad b_2 = 4.19160.$$

5.1.56. $1 \leqslant x < \infty$,

$$xe^xE_1(x) = \frac{x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4}{x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| < 2\cdot 10^{-8},$$

$$a_1 = 8.57332\,87401, \quad b_1 = 9.57332\,23454,$$

$$a_2 = 18.05901\,69730, \quad b_2 = 25.63295\,61486,$$

$$a_3 = 8.63476\,08925, \quad b_3 = 21.09965\,30827,$$

$$a_4 = 0.26777\,37343, \quad b_4 = 3.95849\,69228.$$

5.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНУС И ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КОСИНУС

Определения

5.2.1. $\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t}\,dt.$

5.2.2.*). $\mathrm{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t}\,dt$ $\quad (|\arg z| < \pi).$

5.2.3.).** $\mathrm{Shi}(z) = \int_0^z \frac{\operatorname{sh} t}{t}\,dt.$

5.2.4.).** $\mathrm{Chi}(z) = \gamma + \ln z + \int_0^z \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t}\,dt$ $\quad (|\arg z| < \pi).$

5.2.5. $\mathrm{si}(z) = \mathrm{Si}(z) - \frac{\pi}{2}.$

Вспомогательные функции

5.2.6. $f(z) = \mathrm{Ci}(z)\sin z - \mathrm{si}(z)\cos z.$

5.2.7. $g(z) = -\mathrm{Ci}(z)\cos z - \mathrm{si}(z)\sin z.$

Интегральный синус и интегральный косинус, выраженные через вспомогательные функции

5.2.8. $\mathrm{Si}(z) = \frac{\pi}{2} - f(z)\cos z - g(z)\sin z.$

5.2.9. $\mathrm{Ci}(z) = f(z)\sin z - g(z)\cos z.$

*) Иногда (см. [5.14], [5.16]) в качестве основной функции используется целая функция $\int_0^z (1 - \cos t)\,dt/t$, обозначаемая через $\mathrm{Cin}(z)$:

$$\mathrm{Cin}(z) = -\mathrm{Ci}(z) + \ln z + \gamma.$$

**) Употребляются также обозначения (см. [5.14])

$$\mathrm{Sih}\, z = \int_0^z \operatorname{sh} t\,dt/t, \quad \mathrm{Cinh}(z) = \int_0^z (\operatorname{ch} t - 1)\,dt/t.$$

Интегральные представления

5.2.10. $\mathrm{si}(z) = -\int_0^{\pi/2} e^{-z\cos t}\cos(z\sin t)\,dt.$

5.2.11. $\mathrm{Ci}(z) + E_1(z) = \int_0^{\pi/2} e^{-z\cos t}\sin(z\sin t)\,dt.$

5.2.12. $f(z) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t+z}\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{t^2+1}\,dt \quad (\mathrm{Re}\, z > 0).$

5.2.13. $g(z) = \int_0^\infty \frac{\cos t}{t+z}\,dt = \int_0^\infty \frac{te^{-zt}}{t^2+1}\,dt \quad (\mathrm{Re}\, z > 0).$

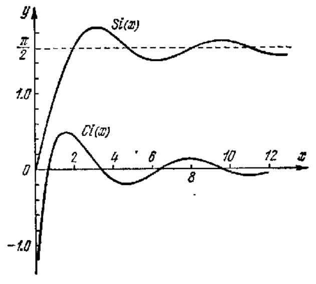


Рис. 5.6. $y = \mathrm{Si}(x)$ и $y = \mathrm{Ci}(x)$

Разложения в ряд

5.2.14. $\mathrm{Si}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$

5.2.15. $\mathrm{Si}(z) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} J^2_{n+1/2}\left(\frac{z}{2}\right).$

5.2.16. $\mathrm{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n(2n)!}$.

5.2.17. $\mathrm{Shi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$.

5.2.18. $\mathrm{Chi}(z) = \gamma + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n(2n)!}$.

Соотношения симметрии

5.2.19. $\mathrm{Si}(-z) = -\mathrm{Si}(z)$, $\mathrm{Si}(\bar z) = \overline{\mathrm{Si}(z)}$.

5.2.20. $\mathrm{Ci}(-z) = \mathrm{Ci}(z) - i\pi \quad (0 < \arg z < \pi)$,

$\mathrm{Ci}(\bar z) = \overline{\mathrm{Ci}(z)}$.

Связь с интегральной показательной функцией

5.2.21. $\mathrm{Si}(z) = \frac{1}{2i}[E_1(iz) - E_1(-iz)] + \frac{\pi}{2}$

$\left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}\right)$.

5.2.22. $\mathrm{Si}(ix) = \frac{i}{2}[\mathrm{Ei}(x) + E_1(x)] \quad (x > 0)$.

5.2.23. $\mathrm{Ci}(z) = -\frac{1}{2}[E_1(iz) + E_1(-iz)]$

$\left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}\right)$.

5.2.24. $\mathrm{Ci}(ix) = \frac{1}{2}[\mathrm{Ei}(x) - E_1(x)] + i\frac{\pi}{2} \quad (x > 0)$.

Значение на бесконечности

5.2.25. $\lim_{x\to\infty} \mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2}$.

Интегралы

Более подробную таблицу интегралов см. в [5.3], [5.6], [5.11], [5.12], [5.13].

5.2.26. $\int_z^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = -\mathrm{si}(z) \quad (|\arg z| < \pi)$.

5.2.27. $\int_z^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt = -\mathrm{Ci}(z) \quad (|\arg z)| \pi)$.

5.2.28. $\int_0^{\infty} e^{-at}\,\mathrm{Ci}(t)dt = \frac{1}{2a}\ln(1 + a^2) \quad (\mathrm{Re}\, a > 0)$.

5.2.29. $\int_0^{\infty} e^{-at}\,\mathrm{si}(t)dt = -\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\, a \quad (\mathrm{Re}\, a > 0)$.

5.2.30. $\int_0^{\infty} \cos t\,\mathrm{Ci}(t)\, dt = \int_0^{\infty} \sin t\,\mathrm{si}(t)\, dt = -\frac{\pi}{4}$.

5.2.31. $\int_0^{\infty} \mathrm{Ci}^2(t)\, dt = \int_0^{\infty} \mathrm{si}^2(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$.

5.2.32. $\int_0^{\infty} \mathrm{Ci}(t)\,\mathrm{si}(t)\, dt = -\ln 2$.

5.2.33. $\int_0^{1} \frac{(1 - e^{-at})\cos bt}{t}\, dt =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) + \mathrm{Ci}\,(b) + \mathrm{Re}\, E_1(a + ib) \quad (b > 0)$.

Асимптотические разложения

5.2.34. $f(z) \sim \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2!}{z^2} + \frac{4!}{z^4} - \frac{6!}{z^6} + \ldots\right)$

$(|\arg z| < \pi)$.

5.2.35. $g(z) \sim \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{3!}{z^2} + \frac{5!}{z^4} - \frac{7!}{z^6} + \ldots\right)$

$(|\arg z| < \pi)$.

Аппроксимация рациональными функциями (см. [5.7])

5.2.36. $1 \leqslant x < \infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^4 + a_1x^2 + a_2}{x^4 + b_1x^2 + b_2}\right) + \varepsilon(x),$$

$|\varepsilon(x)| < 2\cdot 10^{-4}$,

$a_1 = 7.241163, \quad b_1 = 9.068580,$

$a_2 = 2.463936, \quad b_2 = 7.157433.$

5.2.37. $1 \leqslant x < \infty$,

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4 + a_1x^2 + a_2}{x^4 + b_1x^2 + b_2}\right) + \varepsilon(x),$$

$|\varepsilon(x)| < 10^{-4}$,

$a_1 = 7.547478, \quad b_1 = 12.723684,$

$a_2 = 1.564072, \quad b_2 = 15.723606.$

5.2.38. $1 \leqslant x < \infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^8 + a_1x^6 + a_2x^4 + a_3x^2 + a_4}{x^8 + b_1x^6 + b_2x^4 + b_3x^2 + b_4}\right) + \varepsilon(x),$$

$|\varepsilon(x)| < 5\cdot 10^{-7}$,

$a_1 = 38.027264, \quad b_1 = 40.021433,$

$a_2 = 265.187033, \quad b_2 = 322.624911,$

$a_3 = 335.677320, \quad b_3 = 570.236280,$

$a_4 = 38.102495, \quad b_4 = 157.105423.$

5.2.39. $1 \leqslant x < \infty$,

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^8 + a_1x^6 + a_2x^4 + a_3x^2 + a_4}{x^8 + b_1x^6 + b_2x^4 + b_3x^2 + b_4}\right) + \varepsilon(x),$$

$|\varepsilon(x)| < 3\cdot 10^{-7}$,

$a_1 = 42.242855, \quad b_1 = 48.196927,$

$a_2 = 302.757865, \quad b_2 = 482.485984,$

$a_3 = 352.018498, \quad b_3 = 1114.978885,$

$a_4 = 21.821899, \quad b_4 = 449.690326.$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Вычислить Ci (0.25) с 5D.
Из табл. 5.1 и 4.2 имеем

$$\frac{\mathrm{Ci}(0.25)-\ln(0.25)-\gamma}{(0.25)^2}=-0.249350,$$

$$\mathrm{Ci}\,(0.25)=(0.25)^2(-0.249350)+(-1.38629)+$$
$$+0.577216=-0.82466.$$

Пример 2. Вычислить Ei(8) с 5S.
Из табл. 5.1 для $x=8$ имеем $xe^{-x}\,\mathrm{Ei}(x)=1.18185$. Из табл. 4.4 $e^8=2.98096\cdot10^3$. Следовательно, $\mathrm{Ei}(8)=440.38$.

Пример 3. Вычислить Si(20) с 5D.
Так как $1/20=0.05$, то из табл. 5.2 находим $f(20)=0.049757$, $g(20)=0.002464$. Из табл. 4.8 находим $\sin 20=0.912945$, $\cos 20=0.408082$. Используя 5.2.8, получим

$$\mathrm{Si}\,(20)=\frac{\pi}{2}-f(20)\cos 20-g(20)\sin 20=$$
$$=1.570796-0.022555=1.54824.$$

Пример 4. Вычислить $E_n(x)$, $n=1(1)N$ с 5S для $x=1.275$, $N=10$.
Если $x<5$, то без значительной потери точности можно применять рекуррентное соотношение 5.1.14 для возрастающих значений порядка n.

Применяя квадратичную интерполяцию в табл. 5.1, получим $E_1(1.275)=0.1408099$; кроме того, $e^{-1.275}=0.2794310$. Далее, рекуррентная формула 5.1.14 дает

n	$E_n(1.275)$	n	$E_n(1.275)$
1	0.1408099	6	0.0430168
2	0.0998984	7	0.0374307
3	0.0760303	8	0.0331009
4	0.0608307	9	0.0296534
5	0.0504679	10	0.0268469

Интерполируя непосредственно в табл. 5.4 для $n=10$, получим контрольное значение $E_{10}(1.275)=0.0268470$.

Пример 5. Вычислить $E_n(x)$, $n=1(1)N$ с 5S для $x=10$ и $N=10$.

Если, как в этом примере, x больше пяти и $N\leqslant x$, то можно использовать рекуррентную формулу 5.1.14 для убывающих значений порядка n [5.5]. Из табл. 5.5 для $x^{-1}=0.1$ получим $(x+10)\,e^xE_{10}(x)=1.02436$, так что $E_{10}(10)=2.32529\cdot10^{-6}$. Используя эту величину в качестве начального значения, получим столбец (2).

n	$10^6E_n(10)$ (1)	$10^6E_n(10)$ (2)
1	0.41570	0.41570
2	$0.383\underline{00}$	0.38302
3	$0.355\underline{00}$	0.35488
4	$0.330\underline{00}$	0.33041
5	$0.31\underline{000}$	0.30898
6	$0.28\underline{800}$	0.29005
7	$0.2\underline{7667}$	0.27325
8	$0.2\underline{5333}$	0.25822
9	$0.2\underline{5084}$	0.24472
10	$0.2\underline{2573}$	0.23253

Для контроля из табл. 5.2 найдем $xe^xE_1(x)=0.915633$, так что $E_1(10)=4.15697\cdot10^{-6}$. Если использовать рекуррентную формулу в сторону увеличения n, начиная с $E_1(10)=4.1570\cdot10^{-6}$, получим столбец (1). В этом столбце неверные цифры подчеркнуты.

Пример 6. Вычислить $E_n(x)$, $n=1(1)N$ с 5S для $x=12.3$, $N=20$.

Если N больше x, а x больше пяти, то можно использовать рекуррентное соотношение 5.1.14 для убывающих значений n для получения $E_n(x)$ при $n<n_0$ и для возрастающих значений n для получения $E_n(x)$ при $n>n_0$, где $n_0=\langle x\rangle$. Из 5.1.52 при $n_0=12$, $x=12.3$ получим

$$E_{n_0}(x)=\frac{e^{-12.3}}{24.3}(1+0.02032-0.00043-0.00001)=$$
$$=1.91038\cdot10^{-7}.$$

Используя рекуррентную формулу 5.1.14, как указано выше, найдем

n	$10^6E_n(12.3)$	$10^6E_n(12.3)$	n
12	0.191038	0.191038	12
11	0.199213	0.183498	13
10	0.208098	0.176516	14
9	0.217793	0.170042	15
8	0.228406	0.164015	16
7	0.240073	0.158397	17
6	0.252951	0.153144	18
5	0.267234	0.148226	19
4	0.283155	0.143608	20
3	0.300998		
2	0.321117		
1	0.343953		

Для контроля из табл. 5.2 и 5.5 найдем $E_1(12.3)=0.343953\cdot10^{-6}$, $E_{20}(12.3)=0.143609\cdot10^{-6}$.

Пример 7. Вычислить $\alpha_n(2)$ с 6S для $n=1(1)5$.
Без потери точности для всех $x>0$ можно использовать рекуррентную формулу 5.1.15 для возрастающих значений n. Из 5.1.25 получим $\alpha_0(2)=e^{-2}/2=0.0676676$, так что

n	$\alpha_n(2)$
0	0.676676
1	0.101501
2	0.169169
3	0.321421
4	0.710510
5	1.84394

Вычисления по формуле 5.1.8 дают тот же самый результат.

Функции $\alpha_0(x)$ и $\alpha_1(x)$ можно получить из табл. 10.8, используя 5.1.48, 5.1.49.

Пример 8. Вычислить $\beta_n(x)$, $n=0(1)N$ с 6S для $x=1$, $N=5$.
Если $x<0.368N+0.184\ln N+0.821$, то можно использовать рекуррентную формулу 5.1.16 для возрастающих n, в противном случае эту формулу следует использовать для убывающих n[5.5].

Из 5.1.9 при $n=5$ получим округленное до 6D значение $\beta_0(1)=-0.324297$. Используя рекуррентную формулу 5.1.16 для уменьшающихся n и производя вычисления с девятью десятичными знаками, получим столбец (2).

n	$\beta_n(1)$ (1)	$\beta_n(1)$ (2)
0	2.35040 2	$2.35040\ 238\underline{9}$
1	$-0.73575\ 9\underline{269}$	$-0.73575\ 888\underline{0}$
2	$0.87888\ \underline{3849}$	$0.87888\ 462\underline{9}$
3	$-0.44950\ \underline{9722}$	$-0.44950\ 738\underline{3}$
4	$0.55236\ \underline{3499}$	$0.55237\ 28\underline{54}$
5	$-0.3243\underline{4\ 3774}$	$-0.32429\ 7$

Используя рекуррентную формулу для увеличивающихся значений n и начиная с $\beta_0(1)=2\,\mathrm{sh}\,1=2.350402$ (снова сохраняем в вычислениях девять десятичных знаков), получим столбец (1). Подчеркнутые цифры неверны. Все проделанные вычисления показывают, что в то время, как при использовании рекуррентной формулы в сторону уменьшения n теряются три значащие цифры, та же формула, используемая в другую сторону, дает только три верные значащие цифры.

Этот рекуррентный процесс можно также применить, начиная с произвольного значения функции при достаточно большом значении n (см. [5.1]). Например, беря нуль в качестве начального значения функции при $n = 11$, получим

n	$\beta_n(1)$	n	$\beta_n(1)$
11	0.	5	−0.324297
10	0.280560	4	0.552373
9	−0.206984	3	−0.449507
8	0.319908	2	0.878885
7	−0.253812	1	−0.735759
6	0.404621	0	2.350402

Функции $\beta_0(x)$ и $\beta_1(x)$ можно найти, используя табл. 10.8 и формулы 5.1.48 и 5.1.49.

Пример 9. Вычислить $E_1(z)$ для $z = 3.2578 + 6.8943i$.

Из табл. 5.6 для $z_0 = x_0 + iy_0 = 3 + 7i$ получим

$$z_0 e^{z_0} E_1(z_0) = 0.934958 + 0.095598\, i,$$

$$e^{z_0} E_1(z_0) = 0.059898 - 0.107895\, i.$$

По формуле Тейлора при $f(z) = e^z E_1(z)$ имеем

$$f(z) = f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}\Delta z + \frac{f''(z_0)}{2!}(\Delta z)^2 + \ldots,$$

где $\Delta z = z - z_0 = 0.2578 - 0.1057\, i$.

Используя 5.1.27, получим

k	$f^{(k)}(z_0)/k!$	$(\Delta z)^k f^{(k)}(z_0)/k!$
0	$0.059898 - 0.107895\, i$	$0.059898 - 0.107895\, i$
1	$0.008174 + 0.012795\, i$	$0.003460 + 0.002435\, i$
2	$-0.001859 + 0.000155\, i$	$-0.000094 + 0.000110\, i$
3	$0.000088 - 0.000212\, i$	$-0.000003 - 0.000004\, i$

$$f(z) = 0.063261 - 0.105354i,$$
$$e^{-z} = 0.31510 - 0.022075i,$$
$$E_1(z) = -0.000332 - 0.004716i.$$

Повторяя те же вычисления с $z_0 = 3 + 6i$ и $\Delta z = 0.2578 + 0.8943\, i$, получим тот же самый результат.

Другим методом вычислений может быть двумерная интерполяция действительной и мнимой частей функции $ze^z E_1(z)$.

Пример 10. Вычислить $E_1(z)$ для $z = -4.2 + 12.7i$. Используя формулу табл. 5.6 (см. с. 75), получим

$$e^z E_1(z) \approx \frac{0.711093}{-3.784225 + 12.7i} + \frac{0.278518}{-1.90572 + 12.7\, i} + \frac{0.010389}{2.0900 + 12.7\, i} = -0.0184106 - 0.0736698\, i,$$

$$E_1(z) \approx -1.87133 - 4.70540i.$$

Таблица 5.1. Интегральный синус, интегральный косинус и интегральная показательная функция

x	$x^{-1}\mathrm{Si}(x)$	$x^{-2}[\mathrm{Ci}(x)-\ln x-\gamma]$	$x^{-1}[\mathrm{Ei}(x)-\ln x-\gamma]$	$x^{-1}[E_1(x)+\ln x+\gamma]$
0.00	1.00000 00000	−0.25000 00000	1.00000 0000	1.00000 00000
0.01	0.99999 44444	−0.24999 89583	1.00250 5566	0.99750 55452
0.02	0.99997 77781	−0.24999 58333	1.00502 2306	0.99502 21392
0.03	0.99995 00014	−0.24999 06250	1.00755 0283	0.99254 97201
0.04	0.99991 11154	−0.24998 33339	1.01008 9560	0.99008 82265
0.05	0.99986 11215	−0.24997 39598	1.01264 0202	0.98763 75971
0.06	0.99980 00216	−0.24996 25030	1.01520 2272	0.98519 77714
0.07	0.99972 78178	−0.24994 89639	1.01777 5836	0.98276 86889
0.08	0.99964 45127	−0.24993 33429	1.02036 0958	0.98035 02898
0.09	0.99955 01094	−0.24991 56402	1.02295 7705	0.97794 25142
0.10	0.99944 46111	−0.24989 58564	1.02556 6141	0.97554 53033
0.11	0.99932 80218	−0.24987 39923	1.02818 6335	0.97315 85980
0.12	0.99920 03455	−0.24985 00480	1.03081 8352	0.97078 23399
0.13	0.99906 15870	−0.24982 40244	1.03346 2259	0.96841 64710
0.14	0.99891 17512	−0.24979 59223	1.03611 8125	0.96606 09336
0.15	0.99875 08435	−0.24976 57422	1.03878 6018	0.96371 56702
0.16	0.99857 88696	−0.24973 34850	1.04146 6006	0.96138 06240
0.17	0.99839 58357	−0.24969 91516	1.04415 8158	0.95905 57383
0.18	0.99820 17486	−0.24966 27429	1.04686 2544	0.95674 09569
0.19	0.99799 66151	−0.24962 42598	1.04957 9234	0.95443 62237
0.20	0.99778 04427	−0.24958 37035	1.05230 8298	0.95214 14833
0.21	0.99755 32390	−0.24954 10749	1.05504 9807	0.94985 66804
0.22	0.99731 50122	−0.24949 63752	1.05780 3833	0.94758 17603
0.23	0.99706 57709	−0.24944 96056	1.06057 0446	0.94531 66684
0.24	0.99680 55242	−0.24940 07674	1.06334 9719	0.94306 13506
0.25	0.99653 42813	−0.24934 98618	1.06614 1726	0.94081 57528
0.26	0.99625 20519	−0.24929 68902	1.06894 6539	0.93857 98221
0.27	0.99595 88464	−0.24924 18540	1.07176 4232	0.93635 35046
0.28	0.99565 46750	−0.24918 47546	1.07459 4879	0.93413 67481
0.29	0.99533 95489	−0.24912 55938	1.07743 8555	0.93192 94997
0.30	0.99501 34793	−0.24906 43727	1.08029 5334	0.92973 17075
0.31	0.99467 64779	−0.24900 10933	1.08316 5293	0.92754 33196
0.32	0.99432 85570	−0.24893 57573	1.08604 8507	0.92536 42845
0.33	0.99396 97288	−0.24886 83662	1.08894 5053	0.92319 45510
0.34	0.99360 00064	−0.24879 89219	1.09185 5008	0.92103 40684
0.35	0.99321 94028	−0.24872 74263	1.09477 8451	0.91888 27858
0.36	0.99282 79320	−0.24865 38813	1.09771 5458	0.91674 06533
0.37	0.99242 56078	−0.24857 82887	1.10066 6108	0.91460 76209
0.38	0.99201 24449	−0.24850 06507	1.10363 0481	0.91248 36388
0.39	0.99158 84579	−0.24842 09693	1.10660 8656	0.91036 86582
0.40	0.99115 36619	−0.24833 92466	1.10960 0714	0.90826 26297
0.41	0.99070 80728	−0.24825 54849	1.11260 6735	0.90616 55048
0.42	0.99025 17063	−0.24816 96860	1.11562 6800	0.90407 72350
0.43	0.98978 45790	−0.24808 18528	1.11866 0991	0.90199 77725
0.44	0.98930 67074	−0.24799 19870	1.12170 9391	0.89992 70693
0.45	0.98881 81089	−0.24790 00913	1.12477 2082	0.89786 50778
0.46	0.98831 88008	−0.24780 61685	1.12784 9147	0.89581 17511
0.47	0.98780 88010	−0.24771 02206	1.13094 0671	0.89376 70423
0.48	0.98728 81278	−0.24761 22500	1.13404 6738	0.89173 09048
0.49	0.98675 67998	−0.24751 22600	1.13716 7432	0.88970 32920
0.50	0.98621 48361	−0.24741 02526	1.14030 2841	0.88768 41584
	$\begin{bmatrix}(-6)1\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-7)3\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)2\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)2\\4\end{bmatrix}$

$\gamma = 0.57721\ 56649$

См. примеры 1—2.

Таблица 5.1. Интегральный синус, интегральный косинус и интегральная показательная функция

x	$\mathrm{Si}(x)$	$\mathrm{Ci}(x)$	$\mathrm{Ei}(x)$	$E_1(x)$
0.50	0.49310 74180	−0.17778 40788	0.45421 9905	0.55977 3595
0.51	0.50268 77506	−0.16045 32390	0.48703 2167	0.54782 2352
0.52	0.51225 15212	−0.14355 37358	0.51953 0633	0.53621 9798
0.53	0.52179 84228	−0.12707 07938	0.55173 0445	0.52495 1510
0.54	0.53132 81492	−0.11099 04567	0.58364 5931	0.51400 3886
0.55	0.54084 03951	−0.09529 95274	0.61529 0657	0.50336 4081
0.56	0.55033 48563	−0.07998 55129	0.64667 7490	0.49301 9959
0.57	0.55981 12298	−0.06503 65744	0.67781 8642	0.48296 0034
0.58	0.56926 92137	−0.05044 14815	0.70872 5720	0.47317 3433
0.59	0.57870 85069	−0.03618 95707	0.73940 9764	0.46364 9849
0.60	0.58812 88096	−0.02227 07070	0.76988 1290	0.45437 9503
0.61	0.59752 98233	−0.00867 52486	0.80015 0320	0.44535 3112
0.62	0.60691 12503	+0.00460 59849	0.83022 6417	0.43656 1854
0.63	0.61627 27944	0.01758 17424	0.86011 8716	0.42799 7338
0.64	0.62561 41603	0.03026 03686	0.88983 5949	0.41965 1581
0.65	0.63493 50541	0.04264 98293	0.91938 6468	0.41151 6976
0.66	0.64423 51831	0.05475 77343	0.94877 8277	0.40358 6275
0.67	0.65351 42557	0.06659 13594	0.97801 9042	0.39585 2563
0.68	0.66277 19817	0.07815 76659	1.00711 6121	0.38830 9243
0.69	0.67200 80721	0.08946 33195	1.03607 6576	0.38095 0010
0.70	0.68122 22391	0.10051 47070	1.06490 7195	0.37376 8843
0.71	0.69041 41965	0.11131 79525	1.09361 4501	0.36675 9981
0.72	0.69958 36590	0.12187 89322	1.12220 4777	0.35991 7914
0.73	0.70873 03430	0.13220 32879	1.15068 4069	0.35323 7364
0.74	0.71785 39660	0.14229 64404	1.17905 8208	0.34671 3279
0.75	0.72695 42472	0.15216 36010	1.20733 2816	0.34034 0813
0.76	0.73603 09067	0.16180 97827	1.23551 3319	0.33411 5321
0.77	0.74508 36664	0.17123 98110	1.26360 4960	0.32803 2346
0.78	0.75411 22494	0.18045 83335	1.29161 2805	0.32208 7610
0.79	0.76311 63804	0.18946 98290	1.31954 1753	0.31627 7004
0.80	0.77209 57855	0.19827 86160	1.34739 6548	0.31059 6579
0.81	0.78105 01921	0.20688 88610	1.37518 1783	0.30504 2539
0.82	0.78997 93293	0.21530 45859	1.40290 1910	0.29961 1236
0.83	0.79888 29277	0.22352 96752	1.43056 1245	0.29429 9155
0.84	0.80776 07191	0.23156 78824	1.45816 3978	0.28910 2918
0.85	0.81661 24372	0.23942 28368	1.48571 4176	0.28401 9269
0.86	0.82543 78170	0.24709 80486	1.51321 5791	0.27904 5070
0.87	0.83423 65953	0.25459 69153	1.54067 2664	0.27417 7301
0.88	0.84300 85102	0.26192 27264	1.56808 8534	0.26941 3046
0.89	0.85175 33016	0.26907 86687	1.59546 7036	0.26474 9496
0.90	0.86047 07107	0.27606 78305	1.62281 1714	0.26018 3939
0.91	0.86916 04808	0.28289 32065	1.65012 6019	0.25571 3758
0.92	0.87782 23564	0.28955 77018	1.67741 3317	0.25133 6425
0.93	0.88645 60839	0.29606 41358	1.70467 6891	0.24704 9501
0.94	0.89506 14112	0.30241 52458	1.73191 9946	0.24285 0627
0.95	0.90363 80880	0.30861 36908	1.75914 5612	0.23873 7524
0.96	0.91218 58656	0.31466 20547	1.78635 6947	0.23470 7988
0.97	0.92070 44970	0.32056 28495	1.81355 6941	0.23075 9890
0.98	0.92919 37370	0.32631 85183	1.84074 8519	0.22689 1167
0.99	0.93765 33420	0.33193 14382	1.86793 4543	0.22309 9826
1.00	0.94608 30704	0.33740 39229	1.89511 7816	0.21938 3934
	$\begin{bmatrix}(-6)4\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)4\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)4\\5\end{bmatrix}$

Таблица 5.1. Интегральный синус, интегральный косинус и интегральная показательная функция

x	$\mathrm{Si}(x)$	$\mathrm{Ci}(x)$	$\mathrm{Ei}(x)$	$E_1(x)$
1.00	0.94608 30704	0.33740 39229	1.89511 7816	0.21938 3934
1.01	0.95448 26820	0.34273 82254	1.92230 1085	0.21574 1624
1.02	0.96285 19387	0.34793 65405	1.94948 7042	0.21217 1083
1.03	0.97119 06039	0.35300 10067	1.97667 8325	0.20867 0559
1.04	0.97949 84431	0.35793 37091	2.00387 7525	0.20523 8352
1.05	0.98777 52233	0.36273 66810	2.03108 7184	0.20187 2813
1.06	0.99602 07135	0.36741 19060	2.05830 9800	0.19857 2347
1.07	1.00423 46846	0.37196 13201	2.08554 7825	0.19533 5403
1.08	1.01241 69091	0.37638 68132	2.11280 3672	0.19216 0479
1.09	1.02056 71617	0.38069 02312	2.14007 9712	0.18904 6118
1.10	1.02868 52187	0.38487 33774	2.16737 8280	0.18599 0905
1.11	1.03677 08583	0.38893 80142	2.19470 1672	0.18299 3465
1.12	1.04482 38608	0.39288 58645	2.22205 2152	0.18005 2467
1.13	1.05284 40082	0.39671 86134	2.24943 1949	0.17716 6615
1.14	1.06083 10845	0.40043 79090	2.27684 3260	0.17433 4651
1.15	1.06878 48757	0.40404 53647	2.30428 8252	0.17155 5354
1.16	1.07670 51696	0.40754 25593	2.33176 9062	0.16882 7535
1.17	1.08459 17561	0.41093 10390	2.35928 7800	0.16615 0040
1.18	1.09244 44270	0.41421 23185	2.38684 6549	0.16352 1748
1.19	1.10026 29760	0.41738 78816	2.41444 7367	0.16094 1567
1.20	1.10804 71990	0.42045 91829	2.44209 2285	0.15840 8437
1.21	1.11579 68937	0.42342 76482	2.46978 3315	0.15592 1324
1.22	1.12351 18599	0.42629 46760	2.49752 2442	0.15347 9226
1.23	1.13119 18994	0.42906 16379	2.52531 1634	0.15108 1164
1.24	1.13883 68160	0.43172 98802	2.55315 2836	0.14872 6188
1.25	1.14644 64157	0.43430 07240	2.58104 7974	0.14641 3373
1.26	1.15402 05063	0.43677 54665	2.60899 8956	0.14414 1815
1.27	1.16155 88978	0.43915 53815	2.63700 7673	0.14191 0639
1.28	1.16906 14023	0.44144 17205	2.66507 5997	0.13971 8989
1.29	1.17652 78340	0.44363 57130	2.69320 5785	0.13756 6032
1.30	1.18395 80091	0.44573 85675	2.72139 8880	0.13545 0958
1.31	1.19135 17459	0.44775 14723	2.74965 7110	0.13337 2975
1.32	1.19870 88649	0.44967 55955	2.77798 2287	0.13133 1314
1.33	1.20602 91886	0.45151 20863	2.80637 6214	0.12932 5224
1.34	1.21331 25418	0.45326 20753	2.83484 0677	0.12735 3972
1.35	1.22055 87513	0.45492 66752	2.86337 7453	0.12541 6844
1.36	1.22776 76460	0.45650 69811	2.89198 8308	0.12351 3146
1.37	1.23493 90571	0.45800 40711	2.92067 4997	0.12164 2198
1.38	1.24207 28180	0.45941 90071	2.94943 9263	0.11980 3337
1.39	1.24916 87640	0.46075 28349	2.97828 2844	0.11799 5919
1.40	1.25622 67328	0.46200 65851	3.00720 7464	0.11621 9313
1.41	1.26324 65642	0.46318 12730	3.03621 4843	0.11447 2903
1.42	1.27022 81004	0.46427 78995	3.06530 6691	0.11275 6090
1.43	1.27717 11854	0.46529 74513	3.09448 4712	0.11106 8287
1.44	1.28407 56658	0.46624 09014	3.12375 0601	0.10940 8923
1.45	1.29094 13902	0.46710 92094	3.15310 6049	0.10777 7440
1.46	1.29776 82094	0.46790 33219	3.18255 2741	0.10617 3291
1.47	1.30455 59767	0.46862 41732	3.21209 2355	0.10459 5946
1.48	1.31130 45473	0.46927 26848	3.24172 6566	0.10304 4882
1.49	1.31801 37788	0.46984 97667	3.27145 7042	0.10151 9593
1.50	1.32468 35312	0.47035 63172	3.30128 5449	0.10001 9582
	$\left[{(-6)5 \atop 4}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)1 \atop 5}\right]$	$\left[{(-6)9 \atop 5}\right]$

Таблица 5.1 Интегральный синус, интегральный косинус и интегральная показательная функция

x	$\mathrm{Si}(x)$	$\mathrm{Ci}(x)$	$\mathrm{Ei}(x)$	$E_1(x)$
1.50	1.32468 35312	0.47035 63172	3.30128 5449	0.10001 9582
1.51	1.33131 36664	0.47079 32232	3.33121 3449	0.09854 4365
1.52	1.33790 40489	0.47116 13608	3.36124 2701	0.09709 3466
1.53	1.34445 45453	0.47146 15952	3.39137 4858	0.09566 6424
1.54	1.35096 50245	0.47169 47815	3.42161 1576	0.09426 2786
1.55	1.35743 53577	0.47186 17642	3.45195 4503	0.09288 2108
1.56	1.36386 54183	0.47196 33785	3.48240 5289	0.09152 3960
1.57	1.37025 50823	0.47200 04495	3.51296 5580	0.09018 7917
1.58	1.37660 42275	0.47197 37932	3.54363 7024	0.08887 3566
1.59	1.38291 27345	0.47188 42164	3.57442 1266	0.08758 0504
1.60	1.38918 04859	0.47173 25169	3.60531 9949	0.08630 8334
1.61	1.39540 73666	0.47151 94840	3.63633 4719	0.08505 6670
1.62	1.40159 32640	0.47124 58984	3.66746 7221	0.08382 5133
1.63	1.40773 80678	0.47091 25325	3.69871 9099	0.08261 3354
1.64	1.41384 16698	0.47052 01507	3.73009 1999	0.08142 0970
1.65	1.41990 39644	0.47006 95096	3.76158 7569	0.08024 7627
1.66	1.42592 48482	0.46956 13580	3.79320 7456	0.07909 2978
1.67	1.43190 42202	0.46899 64372	3.82495 3310	0.07795 6684
1.68	1.43784 19816	0.46837 54812	3.85682 6783	0.07683 8412
1.69	1.44373 80361	0.46769 92169	3.88882 9528	0.07573 7839
1.70	1.44959 22897	0.46696 83642	3.92096 3201	0.07465 4644
1.71	1.45540 46507	0.46618 36359	3.95322 9462	0.07358 8518
1.72	1.46117 50299	0.46534 57385	3.98562 9972	0.07253 9154
1.73	1.46690 33404	0.46445 53716	4.01816 6395	0.07150 6255
1.74	1.47258 94974	0.46351 32286	4.05084 0400	0.07048 9527
1.75	1.47823 34189	0.46251 99967	4.08365 3659	0.06948 8685
1.76	1.48383 50249	0.46147 63568	4.11660 7847	0.06850 3447
1.77	1.48939 42379	0.46038 29839	4.14970 4645	0.06753 3539
1.78	1.49491 09830	0.45924 05471	4.18294 5736	0.06657 8691
1.79	1.50038 51872	0.45804 97097	4.21633 2809	0.06563 8641
1.80	1.50581 67803	0.45681 11294	4.24986 7557	0.06471 3129
1.81	1.51120 56942	0.45552 54585	4.28355 1681	0.06380 1903
1.82	1.51655 18633	0.45419 33436	4.31738 6883	0.06290 4715
1.83	1.52185 52243	0.45281 54262	4.35137 4872	0.06202 1320
1.84	1.52711 57165	0.45139 23427	4.38551 7364	0.06115 1482
1.85	1.53233 32813	0.44992 47241	4.41981 6080	0.06029 4967
1.86	1.53750 78626	0.44841 31966	4.45427 2746	0.05945 1545
1.87	1.54263 94066	0.44685 83813	4.48888 9097	0.05862 0994
1.88	1.54772 78621	0.44526 08948	4.52366 6872	0.05780 3091
1.89	1.55277 31800	0.44362 13486	4.55860 7817	0.05699 7623
1.90	1.55777 53137	0.44194 03497	4.59371 3687	0.05620 4378
1.91	1.56273 42192	0.44021 85005	4.62898 6242	0.05542 3149
1.92	1.56764 98545	0.43845 63991	4.66442 7249	0.05465 3731
1.93	1.57252 21801	0.43665 46388	4.70003 8485	0.05389 5927
1.94	1.57735 11591	0.43481 38088	4.73582 1734	0.05314 9540
1.95	1.58213 67567	0.43293 44941	4.77177 8785	0.05241 4380
1.96	1.58687 89407	0.43101 72752	4.80791 1438	0.05169 0257
1.97	1.59157 76810	0.42906 27288	4.84422 1501	0.05097 6988
1.98	1.59623 29502	0.42707 14273	4.88071 0791	0.05027 4392
1.99	1.60084 47231	0.42504 39391	4.91738 1131	0.04958 2291
2.00	1.60541 29768	0.42298 08288	4.95423 4356	0.04890 0511
	$\begin{bmatrix}(-6)5\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)9\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)2\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)3\\4\end{bmatrix}$

Таблица 5.1. Интегральный синус, интегральный косинус и интегральная показательная функция

x	$\mathrm{Si}(x)$	$\mathrm{Ci}(x)$	$xe^{-x}\mathrm{Ei}(x)$	$xe^{x}E_1(x)$
2.0	1.60541 29768	0.42298 08288	1.34096 5420	0.72265 7234
2.1	1.64869 86362	0.40051 19878	1.37148 6802	0.73079 1502
2.2	1.68762 48272	0.37507 45990	1.39742 1992	0.73843 1132
2.3	1.72220 74818	0.34717 56175	1.41917 1534	0.74562 2149
2.4	1.75248 55008	0.31729 16174	1.43711 8315	0.75240 4829
2.5	1.77852 01734	0.28587 11964	1.45162 5159	0.75881 4592
2.6	1.80039 44505	0.25333 66161	1.46303 3397	0.76488 2722
2.7	1.81821 20765	0.22008 48786	1.47166 2153	0.77063 6987
2.8	1.83209 65891	0.18648 83896	1.47780 8187	0.77610 2123
2.9	1.84219 01946	0.15289 53242	1.48174 6162	0.78130 0252
3.0	1.84865 25280	0.11962 97860	1.48372 9204	0.78625 1221
3.1	1.85165 93077	0.08699 18312	1.48398 9691	0.79097 2900
3.2	1.85140 08970	0.05525 74117	1.48274 0191	0.79548 1422
3.3	1.84808 07828	+0.02467 82846	1.48017 4491	0.79979 1408
3.4	1.84191 39833	−0.00451 80779	1.47646 8706	0.80391 6127
3.5	1.83312 53987	−0.03212 85485	1.47178 2389	0.80786 7661
3.6	1.82194 81156	−0.05797 43519	1.46625 9659	0.81165 7037
3.7	1.80862 16809	−0.08190 10013	1.46003 0313	0.81529 4342
3.8	1.79339 03548	−0.10377 81504	1.45321 0902	0.81878 8821
3.9	1.77650 13604	−0.12349 93492	1.44590 5765	0.82214 8967
4.0	1.75820 31389	−0.14098 16979	1.43820 8032	0.82538 2600
4.1	1.73874 36265	−0.15616 53918	1.43020 0557	0.82849 6926
4.2	1.71836 85637	−0.16901 31568	1.42195 6813	0.83149 8602
4.3	1.69731 98507	−0.17950 95725	1.41354 1719	0.83439 3794
4.4	1.67583 39594	−0.18766 02868	1.40501 2424	0.83718 8207
4.5	1.65414 04144	−0.19349 11221	1.39641 9030	0.83988 7144
4.6	1.63246 03525	−0.19704 70797	1.38780 5263	0.84249 5539
4.7	1.61100 51718	−0.19839 12468	1.37920 9093	0.84501 7971
4.8	1.58997 52782	−0.19760 36133	1.37066 3313	0.84745 8721
4.9	1.56955 89381	−0.19477 98060	1.36219 6054	0.84982 1778
5.0	1.54993 12449	−0.19002 97497	1.35383 1278	0.85211 0880
5.1	1.53125 32047	−0.18347 62632	1.34558 9212	0.85432 9519
5.2	1.51367 09468	−0.17525 36023	1.33748 6755	0.85648 0958
5.3	1.49731 50636	−0.16550 59586	1.32953 7845	0.85856 8275
5.4	1.48230 00826	−0.15438 59262	1.32175 3788	0.86059 4348
5.5	1.46872 40727	−0.14205 29476	1.31414 3566	0.86256 1885
5.6	1.45666 83847	−0.12867 17494	1.30671 4107	0.86447 3436
5.7	1.44619 75285	−0.11441 07808	1.29947 0536	0.86633 1399
5.8	1.43735 91823	−0.09944 06647	1.29241 6395	0.86813 8040
5.9	1.43018 43341	−0.08393 26741	1.28555 3849	0.86989 5494
6.0	1.42468 75513	−0.06805 72439	1.27888 3860	0.87160 5775
6.1	1.42086 73734	−0.05198 25290	1.27240 6357	0.87327 0793
6.2	1.41870 68241	−0.03587 30193	1.26612 0373	0.87489 2347
6.3	1.41817 40348	−0.01988 82206	1.26002 4184	0.87647 2150
6.4	1.41922 29740	−0.00418 14110	1.25411 5417	0.87801 1816
6.5	1.42179 42744	+0.01110 15195	1.24839 1155	0.87951 2881
6.6	1.42581 61486	0.02582 31381	1.24284 8032	0.88097 6797
6.7	1.43120 53853	0.03985 54400	1.23748 2309	0.88240 4955
6.8	1.43786 84161	0.05308 07167	1.23228 9952	0.88379 8662
6.9	1.44570 24427	0.06539 23140	1.22726 6684	0.88515 9176
7.0	1.45459 66142	0.07669 52785	1.22240 8053	0.88648 7675
	$\begin{bmatrix}(-4)5\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)6\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)6\\6\end{bmatrix}$

Таблица 5.1. Интегральный синус, интегральный косинус и интегральная показательная функция

x	$\mathrm{Si}(x)$	$\mathrm{Ci}(x)$	$xe^{-x}\mathrm{Ei}(x)$	$xe^{x}E_1(x)$
7.0	1.45459 66142	0.07669 52785	1.22240 8053	0.88648 7675
7.1	1.46443 32441	0.08690 68881	1.21770 9472	0.88778 5294
7.2	1.47508 90554	0.09595 70643	1.21316 6264	0.88905 3119
7.3	1.48643 64451	0.10378 86664	1.20877 3699	0.89029 2173
7.4	1.49834 47533	0.11035 76658	1.20452 7026	0.89150 3440
7.5	1.51068 15309	0.11563 32032	1.20042 1500	0.89268 7854
7.6	1.52331 37914	0.11959 75293	1.19645 2401	0.89384 6312
7.7	1.53610 92381	0.12224 58319	1.19261 5063	0.89497 9666
7.8	1.54893 74581	0.12358 59542	1.18890 4881	0.89608 8737
7.9	1.56167 10702	0.12363 80071	1.18531 7334	0.89717 4302
8.0	1.57418 68217	0.12243 38825	1.18184 7987	0.89823 7113
8.1	1.58636 66225	0.12001 66733	1.17849 2509	0.89927 7888
8.2	1.59809 85106	0.11644 00055	1.17524 6676	0.90029 7306
8.3	1.60927 75419	0.11176 72931	1.17210 6376	0.90129 6033
8.4	1.61980 65968	0.10607 09196	1.16906 7617	0.90227 4695
8.5	1.62959 70996	0.09943 13586	1.16612 6526	0.90323 3900
8.6	1.63856 96454	0.09193 62396	1.16327 9354	0.90417 4228
8.7	1.64665 45309	0.08367 93696	1.16052 2476	0.90509 6235
8.8	1.65379 21861	0.07475 97196	1.15785 2390	0.90600 0459
8.9	1.65993 35052	0.06528 03850	1.15526 5719	0.90688 7415
9.0	1.66504 00758	0.05534 75313	1.15275 9209	0.90775 7602
9.1	1.66908 43056	0.04506 93325	1.15032 9724	0.90861 1483
9.2	1.67204 94480	0.03455 49134	1.14797 4251	0.90944 9530
9.3	1.67392 95283	0.02391 33045	1.14568 9889	0.91027 2177
9.4	1.67472 91725	0.01325 24187	1.14347 3855	0.91107 9850
9.5	1.67446 33423	+0.00267 88588	1.14132 3476	0.91187 2958
9.6	1.67315 69801	−0.00770 70361	1.13923 6185	0.91265 1897
9.7	1.67084 45697	−0.01780 40977	1.13720 9523	0.91341 7043
9.8	1.66756 96169	−0.02751 91811	1.13524 1130	0.91416 8766
9.9	1.66338 40566	−0.03676 39563	1.13332 8746	0.91490 7418
10.0	1.65834 75942	−0.04545 64330	1.13147 0205	0.91563 3339
	$\left[{(-4)1 \atop 7}\right]$	$\left[{(-4)2 \atop 7}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 5}\right]$	$\left[{(-6)4 \atop 4}\right]$

Таблица 5.2. Интегральный синус, интегральный косинус и интегральная показательная функция при больших значениях аргумента

x^{-1}	$xf(x)$	$x^2g(x)$	$xe^{-x}\mathrm{Ei}(x)$	$xe^{x}E_1(x)$	$\langle x\rangle$
0.100	0.98191 0351	0.94885 39	1.13147 021	0.91563 33394	10
0.095	0.98353 4427	0.95323 18	1.12249 671	0.91925 68286	11
0.090	0.98509 9171	0.95748 44	1.11389 377	0.92293 15844	11
0.085	0.98660 1776	0.96160 17	1.10564 739	0.92665 90998	12
0.080	0.98803 9405	0.96557 23	1.09773 775	0.93044 09399	13
0.075	0.98940 9188	0.96938 56	1.09014 087	0.93427 87466	13
0.070	0.99070 8244	0.97302 98	1.08283 054	0.93817 42450	14
0.065	0.99193 3695	0.97649 35	1.07578 038	0.94212 92486	15
0.060	0.99308 2682	0.97976 47	1.06896 548	0.94614 56670	17
0.055	0.99415 2385	0.98283 17	1.06236 365	0.95022 55126	18
0.050	0.99514 0052	0.98568 24	1.05595 591	0.95437 09099	20
0.045	0.99604 3013	0.98830 52	1.04972 640	0.95858 41038	22
0.040	0.99685 8722	0.99068 81	1.04366 194	0.96286 74711	25
0.035	0.99758 4771	0.99282 12	1.03775 135	0.96722 35311	29
0.030	0.99821 8937	0.99469 37	1.03198 503	0.97165 49596	33
0.025	0.99875 9204	0.99629 57	1.02635 451	0.97616 46031	40
0.020	0.99920 3795	0.99761 89	1.02085 228	0.98075 54965	50
0.015	0.99955 1207	0.99865 60	1.01547 157	0.98543 08813	67
0.010	0.99980 0239	0.99940 12	1.01020 625	0.99019 42287	100
0.005	0.99995 0015	0.99985 01	1.00505 077	0.99504 92646	200
0.000	1.00000 0000	1.00000 00	1.00000 000	1.00000 00000	∞
	$\left[{(-5)1 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)4 \atop 4}\right]$	$\left[{(-5)5 \atop 6}\right]$	$\left[{(-5)1 \atop 6}\right]$	

$$\mathrm{Si}(x)=\frac{\pi}{2}-f(x)\cos x-g(x)\sin x \qquad \mathrm{Ci}(x)=f(x)\sin x-g(x)\cos x$$

$$\frac{\pi}{2}=1.57079\ 63268$$

$\langle x\rangle$ — целое число, ближайшее к x.

См. пример 3.

Таблица 5.3. **Интегральный синус и интегральный косинус аргумента πx**

x	$\mathrm{Si}(\pi x)$	$\mathrm{Cin}(\pi x)$	x	$\mathrm{Si}(\pi x)$	$\mathrm{Cin}(\pi x)$
0.0	0.00000 00	0.00000 00	5.0	1.63396 48	3.32742 23
0.1	0.31244 18	0.02457 28	5.1	1.63088 98	3.36670 50
0.2	0.61470 01	0.09708 67	5.2	1.62211 92	3.40335 81
0.3	0.89718 92	0.21400 75	5.3	1.60871 21	3.43582 68
0.4	1.15147 74	0.36970 10	5.4	1.59212 99	3.46297 82
0.5	1.37076 22	0.55679 77	5.5	1.57408 24	3.48419 47
0.6	1.55023 35	0.76666 63	5.6	1.55635 75	3.49941 45
0.7	1.68729 94	0.98995 93	5.7	1.54064 82	3.50911 89
0.8	1.78166 12	1.21719 42	5.8	1.52839 53	3.51426 89
0.9	1.83523 65	1.43932 68	5.9	1.52065 96	3.51619 81
1.0	1.85193 70	1.64827 75	6.0	1.51803 39	3.51647 44
1.1	1.83732 28	1.83737 48	6.1	1.52060 20	3.51674 38
1.2	1.79815 90	2.00168 51	6.2	1.52794 77	3.51857 25
1.3	1.74191 10	2.13821 22	6.3	1.53921 04	3.52330 06
1.4	1.67621 68	2.24595 41	6.4	1.55318 17	3.53192 30
1.5	1.60837 27	2.32581 82	6.5	1.56843 12	3.54500 55
1.6	1.54487 36	2.38040 96	6.6	1.58344 97	3.56264 55
1.7	1.49103 51	2.41370 98	6.7	1.59679 62	3.58447 72
1.8	1.45072 37	2.43067 75	6.8	1.60723 30	3.60972 10
1.9	1.42621 05	2.43680 30	6.9	1.61383 85	3.63727 15
2.0	1.41815 16	2.43765 34	7.0	1.61608 55	3.66581 26
2.1	1.42569 13	2.43844 23	7.1	1.61388 08	3.69395 05
2.2	1.44667 38	2.44365 73	7.2	1.60756 18	3.72034 97
2.3	1.47794 03	2.45676 95	7.3	1.59785 21	3.74385 98
2.4	1.51568 40	2.48004 47	7.4	1.58578 13	3.76362 13
2.5	1.55583 10	2.51446 40	7.5	1.57257 88	3.77914 01
2.6	1.59441 60	2.55975 53	7.6	1.55954 96	3.79032 64
2.7	1.62792 16	2.61452 59	7.7	1.54794 81	3.79749 22
2.8	1.65355 62	2.67647 93	7.8	1.53885 84	3.80131 21
2.9	1.66945 05	2.74269 41	7.9	1.53309 50	3.80274 91
3.0	1.67476 18	2.80993 76	8.0	1.53113 13	3.80295 56
3.1	1.66968 11	2.87498 49	8.1	1.53306 26	3.80315 83
3.2	1.65535 02	2.93491 77	8.2	1.53860 67	3.80453 88
3.3	1.63369 82	2.98737 63	8.3	1.54713 99	3.80812 16
3.4	1.60721 88	3.03074 73	8.4	1.55776 52	3.81467 97
3.5	1.57870 92	3.06427 25	8.5	1.56940 54	3.82466 68
3.6	1.55099 62	3.08807 51	8.6	1.58091 06	3.83818 15
3.7	1.52667 49	3.10310 38	8.7	1.59117 06	3.85496 61
3.8	1.50788 19	3.11100 53	8.8	1.59922 11	3.87444 05
3.9	1.49612 20	3.11393 95	8.9	1.60433 29	3.89576 52
4.0	1.49216 12	3.11435 65	9.0	1.60607 69	3.91792 84
4.1	1.49599 24	3.11475 82	9.1	1.60435 85	3.93984 77
4.2	1.50687 40	3.11746 60	9.2	1.59942 00	3.96047 61
4.3	1.52343 40	3.12441 61	9.3	1.59180 91	3.97890 22
4.4	1.54382 74	3.13699 91	9.4	1.58232 00	3.99443 58
4.5	1.56593 04	3.15595 79	9.5	1.57191 16	4.00666 94
4.6	1.58755 15	3.18134 84	9.6	1.56161 12	4.01551 22
4.7	1.60664 04	3.21256 74	9.7	1.55241 46	4.02119 22
4.8	1.62147 45	3.24843 85	9.8	1.54519 00	4.02422 80
4.9	1.63080 69	3.28734 92	9.9	1.54059 74	4.02537 29
5.0	1.63396 48	3.32742 23	10.0	1.53902 91	4.02553 78
	$\left[\begin{matrix}(-3)5\\8\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-3)6\\8\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-4)7\\7\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)7\\7\end{matrix}\right]$

$\mathrm{Ci}(\pi x)=\gamma+\ln\pi+\ln x-\mathrm{Cin}(\pi x)$ $\qquad$ $\gamma+\ln\pi=1.72194\ 55508$

$\mathrm{Si}(n\pi)$ является максимумом для $\mathrm{Si}(x)$ при $n>0$ нечетном и минимумом при $n>0$ четном. $\mathrm{Ci}\,[(n+1/2)\pi]$ является максимумом для $\mathrm{Ci}(x)$ при $n>0$ четном и минимумом при $n>0$ нечетном. Имеем

$$\mathrm{Si}(n\pi)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{(-1)^n}{n\pi}\left[1-\frac{2!}{n^2\pi^2}+\frac{4!}{n^4\pi^4}-\dots\right]\quad(n\to\infty),\quad \mathrm{Ci}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\sim\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\times$$

$$\times\left[1-\frac{2!}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}+\frac{4!}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4}-\dots\right]\quad(n\to\infty).$$

Таблица 5.4. Интегральная показательная функция $E_n(x)$

x	$E_2(x)-x\ln x$	$E_3(x)$	$E_4(x)$	$E_{10}(x)$	$E_{20}(x)$
0.00	1.00000 00	0.50000 00	0.33333 33	0.11111 11	0.05263 16
0.01	0.99572 22	0.49027 66	0.32838 24	0.10986 82	0.05207 90
0.02	0.99134 50	0.48096 83	0.32352 64	0.10863 95	0.05153 21
0.03	0.98686 87	0.47199 77	0.31876 19	0.10742 46	0.05099 11
0.04	0.98229 39	0.46332 39	0.31408 55	0.10622 36	0.05045 58
0.05	0.97762 11	0.45491 88	0.30949 45	0.10503 63	0.04992 60
0.06	0.97285 08	0.44676 09	0.30498 63	0.10386 24	0.04940 19
0.07	0.96798 34	0.43883 27	0.30055 85	0.10270 18	0.04888 33
0.08	0.96301 94	0.43111 97	0.29620 89	0.10155 44	0.04837 02
0.09	0.95795 93	0.42360 96	0.29193 54	0.10042 00	0.04786 24
0.10	0.95280 35	0.41629 15	0.28773 61	0.09929 84	0.04736 00
0.11	0.94755 26	0.40915 57	0.28360 90	0.09818 96	0.04686 29
0.12	0.94220 71	0.40219 37	0.27955 24	0.09709 34	0.04637 10
0.13	0.93676 72	0.39539 77	0.27556 46	0.09600 95	0.04588 43
0.14	0.93123 36	0.38876 07	0.27164 39	0.09493 80	0.04540 27
0.15	0.92560 67	0.38227 61	0.26778 89	0.09387 86	0.04492 62
0.16	0.91988 70	0.37593 80	0.26399 79	0.09283 12	0.04445 47
0.17	0.91407 48	0.36974 08	0.26026 96	0.09179 56	0.04398 82
0.18	0.90817 06	0.36367 95	0.25660 26	0.09077 18	0.04352 66
0.19	0.90217 50	0.35774 91	0.25299 56	0.08975 95	0.04306 98
0.20	0.89608 82	0.35194 53	0.24944 72	0.08875 87	0.04261 79
0.21	0.88991 09	0.34626 38	0.24595 63	0.08776 93	0.04217 07
0.22	0.88364 33	0.34070 05	0.24252 16	0.08679 10	0.04172 82
0.23	0.87728 60	0.33525 18	0.23914 19	0.08582 38	0.04129 03
0.24	0.87083 93	0.32991 42	0.23581 62	0.08486 75	0.04085 71
0.25	0.86430 37	0.32468 41	0.23254 32	0.08392 20	0.04042 85
0.26	0.85767 97	0.31955 85	0.22932 21	0.08298 72	0.04000 43
0.27	0.85096 76	0.31453 43	0.22615 17	0.08206 30	0.03958 46
0.28	0.84416 78	0.30960 86	0.22303 11	0.08114 92	0.03916 93
0.29	0.83728 08	0.30477 87	0.21995 93	0.08024 57	0.03875 84
0.30	0.83030 71	0.30004 18	0.21693 52	0.07935 24	0.03835 18
0.31	0.82324 69	0.29539 56	0.21395 81	0.07846 93	0.03794 95
0.32	0.81610 07	0.29083 74	0.21102 70	0.07759 60	0.03755 15
0.33	0.80886 90	0.28636 52	0.20814 11	0.07673 27	0.03715 76
0.34	0.80155 21	0.28197 65	0.20529 94	0.07587 90	0.03676 78
0.35	0.79415 04	0.27766 93	0.20250 13	0.07503 50	0.03638 22
0.36	0.78666 44	0.27344 16	0.19974 58	0.07420 06	0.03600 06
0.37	0.77909 43	0.26929 13	0.19703 22	0.07337 55	0.03562 31
0.38	0.77144 07	0.26521 65	0.19435 97	0.07255 97	0.03524 95
0.39	0.76370 39	0.26121 55	0.19172 76	0.07175 31	0.03487 98
0.40	0.75588 43	0.25728 64	0.18913 52	0.07095 57	0.03451 40
0.41	0.74798 23	0.25342 76	0.18658 16	0.07016 71	0.03415 21
0.42	0.73999 82	0.24963 73	0.18406 64	0.06938 75	0.03379 39
0.43	0.73193 24	0.24591 41	0.18158 87	0.06861 67	0.03343 96
0.44	0.72378 54	0.24225 63	0.17914 79	0.06785 45	0.03308 89
0.45	0.71555 75	0.23866 25	0.17674 33	0.06710 09	0.03274 20
0.46	0.70724 91	0.23513 13	0.17437 44	0.06635 58	0.03239 87
0.47	0.69886 05	0.23166 12	0.17204 05	0.06561 91	0.03205 90
0.48	0.69039 21	0.22825 08	0.16974 10	0.06489 07	0.03172 29
0.49	0.68184 43	0.22489 90	0.16747 53	0.06417 04	0.03139 03
0.50	0.67321 75	0.22160 44	0.16524 28	0.06345 83	0.03106 12
	$\begin{bmatrix}(-5)1\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)1\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)2\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-7)7\\3\end{bmatrix}$

См. примеры 4 — 6.

Таблица 5.4. Интегральная показательная функция $E_n(x)$

x	$E_2(x)$	$E_3(x)$	$E_4(x)$	$E_{10}(x)$	$E_{20}(x)$
0.50	0.32664 39	0.22160 44	0.16524 28	0.06345 83	0.03106 12
0.51	0.32110 62	0.21836 57	0.16304 30	0.06275 42	0.03073 56
0.52	0.31568 63	0.21518 18	0.16087 53	0.06205 80	0.03041 34
0.53	0.31038 07	0.21205 16	0.15873 92	0.06136 96	0.03009 46
0.54	0.30518 62	0.20897 39	0.15663 41	0.06068 89	0.02977 91
0.55	0.30009 96	0.20594 75	0.15455 96	0.06001 59	0.02946 70
0.56	0.29511 79	0.20297 15	0.15251 50	0.05935 05	0.02915 81
0.57	0.29023 82	0.20004 48	0.15050 00	0.05869 25	0.02885 25
0.58	0.28545 78	0.19716 64	0.14851 39	0.05804 19	0.02855 01
0.59	0.28077 39	0.19433 53	0.14655 65	0.05739 86	0.02825 08
0.60	0.27618 39	0.19155 06	0.14462 71	0.05676 26	0.02795 48
0.61	0.27168 55	0.18881 14	0.14272 53	0.05613 36	0.02766 18
0.62	0.26727 61	0.18611 66	0.14085 07	0.05551 18	0.02737 19
0.63	0.26295 35	0.18346 56	0.13900 28	0.05489 69	0.02708 50
0.64	0.25871 54	0.18085 73	0.13718 13	0.05428 89	0.02680 12
0.65	0.25455 97	0.17829 10	0.13538 55	0.05368 77	0.02652 04
0.66	0.25048 44	0.17576 58	0.13361 53	0.05309 33	0.02624 25
0.67	0.24648 74	0.17328 10	0.13187 01	0.05250 55	0.02596 75
0.68	0.24256 67	0.17083 58	0.13014 95	0.05192 43	0.02569 54
0.69	0.23872 06	0.16842 94	0.12845 33	0.05134 97	0.02542 62
0.70	0.23494 71	0.16606 12	0.12678 08	0.05078 15	0.02515 98
0.71	0.23124 46	0.16373 03	0.12513 19	0.05021 96	0.02489 02
0.72	0.22761 14	0.16143 60	0.12350 61	0.04966 40	0.02463 53
0.73	0.22404 57	0.15917 78	0.12190 31	0.04911 47	0.02437 72
0.74	0.22054 61	0.15695 49	0.12032 24	0.04857 15	0.02412 19
0.75	0.21711 09	0.15476 67	0.11876 38	0.04803 44	0.02386 92
0.76	0.21373 88	0.15261 25	0.11722 70	0.04750 33	0.02361 91
0.77	0.21042 82	0.15049 17	0.11571 15	0.04697 81	0.02337 17
0.78	0.20717 77	0.14840 37	0.11421 70	0.04645 88	0.02312 69
0.79	0.20398 60	0.14634 79	0.11274 33	0.04594 53	0.02288 46
0.80	0.20085 17	0.14432 38	0.11129 00	0.04543 76	0.02264 49
0.81	0.19777 36	0.14233 07	0.10985 67	0.04493 56	0.02240 78
0.82	0.19475 04	0.14036 81	0.10844 33	0.04443 91	0.02217 31
0.83	0.19178 10	0.13843 55	0.10704 93	0.04394 82	0.02194 08
0.84	0.18886 41	0.13653 24	0.10567 44	0.04346 28	0.02171 11
0.85	0.18599 86	0.13465 81	0.10431 85	0.04298 29	0.02148 37
0.86	0.18318 33	0.13281 22	0.10298 12	0.04250 82	0.02125 87
0.87	0.18041 73	0.13099 43	0.10166 22	0.04203 89	0.02103 61
0.88	0.17769 94	0.12920 37	0.10036 12	0.04157 49	0.02081 58
0.89	0.17502 87	0.12744 01	0.09907 80	0.04111 60	0.02059 78
0.90	0.17240 41	0.12570 30	0.09781 23	0.04066 22	0.02038 21
0.91	0.16982 47	0.12399 19	0.09656 39	0.04021 35	0.02016 87
0.92	0.16728 95	0.12230 63	0.09533 24	0.03976 98	0.01995 75
0.93	0.16479 77	0.12064 59	0.09411 77	0.03933 11	0.01974 86
0.94	0.16234 82	0.11901 02	0.09291 94	0.03889 73	0.01954 18
0.95	0.15994 04	0.11739 88	0.09173 74	0.03846 83	0.01933 72
0.96	0.15757 32	0.11581 13	0.09057 13	0.03804 41	0.01913 47
0.97	0.15524 59	0.11424 72	0.08942 11	0.03762 46	0.01893 44
0.98	0.15295 78	0.11270 63	0.08828 63	0.03720 98	0.01873 62
0.99	0.15070 79	0.11118 80	0.08716 69	0.03679 96	0.01854 01
1.00	0.14849 55	0.10969 20	0.08606 25	0.03639 40	0.01834 60
	$\left[\begin{matrix}(-5)1\\4\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-6)7\\3\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-6)4\\3\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-6)1\\3\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-7)4\\3\end{matrix}\right]$

Таблица 5.4. Интегральная показательная функция $E_n(x)$

x	$E_2(x)$	$E_3(x)$	$E_4(x)$	$E_{10}(x)$	$E_{20}(x)$
1.00	0.14849 55	0.10969 20	0.08606 25	0.03639 40	0.01834 60
1.01	0.14631 99	0.10821 79	0.08497 30	0.03599 29	0.01815 39
1.02	0.14418 04	0.10676 54	0.08389 81	0.03559 63	0.01796 39
1.03	0.14207 63	0.10533 42	0.08283 76	0.03520 41	0.01777 59
1.04	0.14000 68	0.10392 38	0.08179 13	0.03481 63	0.01758 98
1.05	0.13797 13	0.10253 39	0.08075 90	0.03443 28	0.01740 57
1.06	0.13596 91	0.10116 43	0.07974 06	0.03405 35	0.01722 35
1.07	0.13399 96	0.09981 45	0.07873 57	0.03367 85	0.01704 33
1.08	0.13206 22	0.09848 42	0.07774 42	0.03330 77	0.01686 49
1.09	0.13015 62	0.09717 31	0.07676 59	0.03294 10	0.01668 84
1.10	0.12828 11	0.09588 09	0.07580 07	0.03257 84	0.01651 37
1.11	0.12643 62	0.09460 74	0.07484 83	0.03221 98	0.01634 09
1.12	0.12462 10	0.09335 21	0.07390 85	0.03186 52	0.01616 99
1.13	0.12283 50	0.09211 49	0.07298 12	0.03151 45	0.01600 07
1.14	0.12107 75	0.09089 53	0.07206 61	0.03116 78	0.01583 33
1.15	0.11934 81	0.08969 32	0.07116 32	0.03082 49	0.01566 76
1.16	0.11764 62	0.08850 83	0.07027 22	0.03048 58	0.01550 37
1.17	0.11597 14	0.08734 02	0.06939 30	0.03015 05	0.01534 14
1.18	0.11432 31	0.08618 88	0.06852 53	0.02981 89	0.01518 09
1.19	0.11270 08	0.08505 37	0.06766 91	0.02949 10	0.01502 21
1.20	0.11110 41	0.08393 47	0.06682 42	0.02916 68	0.01486 49
1.21	0.10953 25	0.08283 15	0.06599 04	0.02884 61	0.01470 94
1.22	0.10798 55	0.08174 39	0.06516 75	0.02852 90	0.01455 55
1.23	0.10646 27	0.08067 17	0.06435 55	0.02821 55	0.01440 32
1.24	0.10496 37	0.07961 46	0.06355 40	0.02790 54	0.01425 26
1.25	0.10348 81	0.07857 23	0.06276 31	0.02759 88	0.01410 35
1.26	0.10203 53	0.07754 47	0.06198 25	0.02729 55	0.01395 59
1.27	0.10060 51	0.07653 16	0.06121 22	0.02699 57	0.01381 00
1.28	0.09919 70	0.07553 26	0.06045 19	0.02669 91	0.01366 55
1.29	0.09781 06	0.07454 76	0.05970 15	0.02640 59	0.01352 26
1.30	0.09644 55	0.07357 63	0.05896 09	0.02611 59	0.01338 11
1.31	0.09510 15	0.07261 86	0.05822 99	0.02582 91	0.01324 12
1.32	0.09377 80	0.07167 42	0.05750 85	0.02554 55	0.01310 27
1.33	0.09247 47	0.07074 29	0.05679 64	0.02526 51	0.01296 57
1.34	0.09119 13	0.06982 46	0.05609 36	0.02498 78	0.01283 01
1.35	0.08992 75	0.06891 91	0.05539 98	0.02471 35	0.01269 59
1.36	0.08868 29	0.06802 60	0.05471 51	0.02444 23	0.01256 31
1.37	0.08745 71	0.06714 53	0.05403 93	0.02417 41	0.01243 17
1.38	0.08624 99	0.06627 68	0.05337 22	0.02390 88	0.01230 17
1.39	0.08506 10	0.06542 03	0.05271 37	0.02364 65	0.01217 31
1.40	0.08388 99	0.06457 55	0.05206 37	0.02338 72	0.01204 58
1.41	0.08273 65	0.06374 24	0.05142 22	0.02313 06	0.01191 98
1.42	0.08160 04	0.06292 07	0.05078 89	0.02287 70	0.01179 52
1.43	0.08048 13	0.06211 04	0.05016 37	0.02262 61	0.01167 19
1.44	0.07937 89	0.06131 11	0.04954 66	0.02237 80	0.01154 99
1.45	0.07829 30	0.06052 27	0.04893 74	0.02213 27	0.01142 91
1.46	0.07722 33	0.05974 52	0.04833 61	0.02189 01	0.01130 96
1.47	0.07616 94	0.05897 82	0.04774 25	0.02165 01	0.01119 14
1.48	0.07513 13	0.05822 17	0.04715 65	0.02141 28	0.01107 44
1.49	0.07410 85	0.05747 55	0.04657 80	0.02117 82	0.01095 86
1.50	0.07310 08	0.05673 95	0.04600 70	0.02094 61	0.01084 40
1.51	0.07210 80	0.05601 35	0.04544 32	0.02071 67	0.01073 07
1.52	0.07112 98	0.05529 73	0.04488 67	0.02048 97	0.01061 85
1.53	0.07016 60	0.05459 08	0.04433 72	0.02026 53	0.01050 75
1.54	0.06921 64	0.05389 39	0.04379 48	0.02004 33	0.01039 77
1.55	0.06828 07	0.05320 64	0.04325 93	0.01982 38	0.01028 90
1.56	0.06735 87	0.05252 83	0.04273 07	0.01960 67	0.01018 15
1.57	0.06645 02	0.05185 92	0.04220 87	0.01939 21	0.01007 50
1.58	0.06555 49	0.05119 92	0.04169 35	0.01917 98	0.00996 97
1.59	0.06467 26	0.05054 81	0.04118 47	0.01896 98	0.00986 56
1.60	0.06380 32	0.04990 57	0.04068 25	0.01876 22	0.00976 24
	$\left[{(-6)5 \atop 3}\right]$	$\left[{(-6)3 \atop 3}\right]$	$\left[{(-6)2 \atop 3}\right]$	$\left[{(-7)6 \atop 3}\right]$	$\left[{(-7)3 \atop 3}\right]$

Таблица 5.4. Интегральная показательная функция $E_n(x)$

x	$E_2(x)$	$E_3(x)$	$E_4(x)$	$E_{10}(x)$	$E_{20}(x)$
1.60	0.06380 32	0.04990 57	0.04068 25	0.01876 22	0.00976 24
1.61	0.06294 64	0.04927 20	0.04018 66	0.01855 68	0.00966 04
1.62	0.06210 20	0.04864 67	0.03969 70	0.01835 38	0.00955 95
1.63	0.06126 98	0.04802 99	0.03921 36	0.01815 30	0.00945 96
1.64	0.06044 97	0.04742 13	0.03873 64	0.01795 43	0.00936 07
1.65	0.05964 13	0.04682 09	0.03826 52	0.01775 79	0.00926 29
1.66	0.05884 46	0.04622 84	0.03779 99	0.01756 37	0.00916 61
1.67	0.05805 94	0.04564 39	0.03734 06	0.01737 16	0.00907 03
1.68	0.05728 54	0.04506 72	0.03688 70	0.01718 16	0.00897 56
1.69	0.05652 26	0.04449 82	0.03643 92	0.01699 37	0.00888 18
1.70	0.05577 06	0.04393 67	0.03599 70	0.01680 79	0.00878 90
1.71	0.05502 94	0.04338 27	0.03556 04	0.01662 42	0.00869 72
1.72	0.05429 88	0.04283 61	0.03512 93	0.01644 24	0.00860 63
1.73	0.05357 86	0.04229 67	0.03470 37	0.01626 27	0.00851 64
1.74	0.05286 86	0.04176 45	0.03428 34	0.01608 50	0.00842 74
1.75	0.05216 87	0.04123 93	0.03386 84	0.01590 92	0.00833 94
1.76	0.05147 88	0.04072 11	0.03345 86	0.01573 54	0.00825 22
1.77	0.05079 86	0.04020 97	0.03305 39	0.01556 34	0.00816 60
1.78	0.05012 81	0.03970 51	0.03265 44	0.01539 34	0.00808 07
1.79	0.04946 70	0.03920 71	0.03225 98	0.01522 53	0.00799 63
1.80	0.04881 53	0.03871 57	0.03187 02	0.01505 90	0.00791 28
1.81	0.04817 27	0.03823 08	0.03148 55	0.01489 45	0.00783 02
1.82	0.04753 92	0.03775 22	0.03110 56	0.01473 18	0.00774 84
1.83	0.04691 46	0.03728 00	0.03073 04	0.01457 10	0.00766 74
1.84	0.04629 87	0.03681 39	0.03035 99	0.01441 19	0.00758 74
1.85	0.04569 15	0.03635 40	0.02999 41	0.01425 46	0.00750 81
1.86	0.04509 28	0.03590 01	0.02963 28	0.01409 90	0.00742 97
1.87	0.04450 24	0.03545 21	0.02927 61	0.01394 51	0.00735 21
1.88	0.04392 03	0.03501 00	0.02892 38	0.01379 29	0.00727 53
1.89	0.04334 63	0.03457 37	0.02857 59	0.01364 24	0.00719 93
1.90	0.04278 03	0.03414 30	0.02823 23	0.01349 35	0.00712 42
1.91	0.04222 22	0.03371 80	0.02789 30	0.01334 63	0.00704 98
1.92	0.04167 18	0.03329 86	0.02755 79	0.01320 07	0.00697 62
1.93	0.04112 91	0.03288 46	0.02722 70	0.01305 67	0.00690 33
1.94	0.04059 38	0.03247 59	0.02690 02	0.01291 43	0.00683 12
1.95	0.04006 60	0.03207 27	0.02657 75	0.01277 34	0.00675 99
1.96	0.03954 55	0.03167 46	0.02625 87	0.01263 41	0.00668 93
1.97	0.03903 22	0.03128 17	0.02594 40	0.01249 64	0.00661 95
1.98	0.03852 59	0.03089 39	0.02563 31	0.01236 01	0.00655 04
1.99	0.03802 67	0.03051 12	0.02532 61	0.01222 54	0.00648 20
2.00	0.03753 43	0.03013 34	0.02502 28	0.01209 21	0.00641 43
	$\left[\begin{smallmatrix}(-6)2\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-6)1\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-7)8\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-7)3\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-7)1\\3\end{smallmatrix}\right]$

Таблица 5.5. Интегральная показательная функция $E_n(x)$ при больших значениях аргумента

x^{-1}	$(x+2)e^xE_2(x)$	$(x+3)e^xE_3(x)$	$(x+4)e^xE_4(x)$	$(x+10)e^xE_{10}(x)$	$(x+20)e^xE_{20}(x)$	$\langle x\rangle$
0.50	1.10937	1.11329	1.10937	1.07219	1.04270	2
0.45	1.09750	1.10285	1.10071	1.06926	1.04179	2
0.40	1.08533	1.09185	1.09136	1.06586	1.04067	3
0.35	1.07292	1.08026	1.08125	1.06187	1.03932	3
0.30	1.06034	1.06808	1.07031	1.05712	1.03762	3
0.25	1.04770	1.05536	1.05850	1.05138	1.03543	4
0.20	1.03522	1.04222	1.04584	1.04432	1.03249	5
0.15	1.02325	1.02895	1.03247	1.03550	1.02837	7
0.10	1.01240	1.01617	1.01889	1.02436	1.02222	10
0.09	1.01045	1.01377	1.01624	1.02182	1.02060	11
0.08	1.00861	1.01147	1.01366	1.01917	1.01883	13
0.07	1.00688	1.00927	1.01116	1.01642	1.01688	14
0.06	1.00528	1.00721	1.00878	1.01360	1.01472	17
0.05	1.00384	1.00531	1.00654	1.01074	1.01234	20
0.04	1.00258	1.00361	1.00451	1.00790	1.00973	25
0.03	1.00152	1.00217	1.00275	1.00516	1.00692	33
0.02	1.00071	1.00103	1.00133	1.00271	1.00401	50
0.01	1.00019	1.00027	1.00036	1.00081	1.00137	100
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	∞
	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)1\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)7\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)1\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)3\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)3\\4\end{smallmatrix}\right]$	

$\langle x\rangle$ означает целое число, ближайшее к x.

Таблица 5.6. Интегральная показательная функция комплексного аргумента

$$ze^zE_1(z)$$

$y\backslash x$	−19 Re	−19 Im	−18 Re	−18 Im	−17 Re	−17 Im	−16 Re	−16 Im	−15 Re	−15 Im
0	1.059305	0.000000	1.063087	0.000001	1.067394	0.000002	1.072345	0.000006	1.078103	0.000014
1	1.059090	0.003539	1.062827	0.004010	1.067073	0.004584	1.071942	0.005296	1.077584	0.006195
2	1.058456	0.007000	1.062061	0.007918	1.066135	0.009032	1.070774	0.010403	1.076102	0.012118
3	1.057431	0.010310	1.060829	0.011633	1.064636	0.013226	1.068925	0.015172	1.073783	0.017579
4	1.056058	0.013410	1.059190	0.015079	1.062657	0.017075	1.066508	0.019486	1.070793	0.022432
5	1.054391	0.016252	1.057215	0.018202	1.060297	0.020512	1.063659	0.023272	1.067318	0.026598
6	1.052490	0.018806	1.054981	0.020969	1.057655	0.023505	1.060510	0.026499	1.063538	0.030055
7	1.050413	0.021055	1.052565	0.023364	1.054829	0.026044	1.057187	0.029167	1.059610	0.032823
8	1.048217	0.022996	1.050037	0.025391	1.051905	0.028141	1.053795	0.031306	1.055664	0.034957
9	1.045956	0.024637	1.047458	0.027066	1.048958	0.029824	1.050421	0.032960	1.051797	0.036527
10	1.043672	0.025993	1.044880	0.028412	1.046045	0.031130	1.047129	0.034183	1.048081	0.037609
11	1.041402	0.027086	1.042345	0.029461	1.043212	0.032102	1.043967	0.035034	1.044559	0.038282
12	1.039177	0.027940	1.039882	0.030245	1.040490	0.032781	1.040965	0.035567	1.041259	0.038616
13	1.037018	0.028581	1.037515	0.030796	1.037901	0.033211	1.038140	0.035836	1.038192	0.038677
14	1.034942	0.029034	1.035259	0.031148	1.035456	0.033431	1.035501	0.035888	1.035359	0.038520
15	1.032959	0.029326	1.033123	0.031330	1.033162	0.033476	1.033049	0.035765	1.032754	0.038193
16	1.031076	0.029477	1.031110	0.031369	1.031019	0.033377	1.030780	0.035502	1.030365	0.037735
17	1.029296	0.029511	1.029222	0.031288	1.029025	0.033162	1.028685	0.035129	1.028180	0.037179
18	1.027620	0.029445	1.027456	0.031110	1.027174	0.032855	1.026756	0.034672	1.026183	0.036552
19	1.026046	0.029296	1.025809	0.030854	1.025459	0.032474	1.024981	0.034150	1.024360	0.035873
20	1.024570	0.029080	1.024275	0.030534	1.023872	0.032037	1.023349	0.033582	1.022695	0.035160

$y\backslash x$	−14 Re	−14 Im	−13 Re	−13 Im	−12 Re	−12 Im	−11 Re	−11 Im	−10 Re	−10 Im
0	1.084892	0.000037	1.093027	0.000092	1.102975	0.000232	1.115431	0.000577	1.131470	0.001426
1	1.084200	0.007359	1.092067	0.008913	1.101566	0.011063	1.113230	0.014169	1.127796	0.018879
2	1.082276	0.014306	1.089498	0.017161	1.098025	0.020981	1.108170	0.026241	1.120286	0.033700
3	1.079313	0.020604	1.085635	0.024471	1.092873	0.029507	1.101137	0.036189	1.110462	0.045218
4	1.075560	0.026075	1.080853	0.030637	1.086686	0.036422	1.093013	0.043843	1.099666	0.053451
5	1.071279	0.030642	1.075522	0.035599	1.079985	0.041724	1.084526	0.049336	1.088877	0.058817
6	1.066708	0.034303	1.069960	0.039405	1.073185	0.045552	1.076197	0.052967	1.078701	0.061886
7	1.062046	0.037117	1.064412	0.042169	1.066578	0.048115	1.068350	0.055093	1.069450	0.063225
8	1.057448	0.039174	1.059054	0.044041	1.060352	0.049644	1.061159	0.056057	1.061235	0.063322
9	1.053021	0.040580	1.053997	0.045176	1.054606	0.050359	1.054687	0.056158	1.054046	0.062566
10	1.048834	0.041444	1.049303	0.045719	1.049380	0.050452	1.048933	0.055640	1.047807	0.061249
11	1.044928	0.041867	1.044997	0.045801	1.044674	0.050084	1.043853	0.054695	1.042417	0.059584
12	1.041320	0.041938	1.041080	0.045531	1.040464	0.049384	1.039389	0.053465	1.037766	0.057719
13	1.038010	0.041734	1.037537	0.044999	1.036713	0.048452	1.035473	0.052056	1.033752	0.055758
14	1.034989	0.041321	1.034344	0.044277	1.033378	0.047365	1.032040	0.050547	1.030282	0.053773
15	1.032241	0.040751	1.031474	0.043422	1.030414	0.046180	1.029026	0.048991	1.027274	0.051808
16	1.029747	0.040066	1.028895	0.042477	1.027781	0.044941	1.026377	0.047428	1.024658	0.049894
17	1.027486	0.039301	1.026579	0.041475	1.025438	0.043679	1.024043	0.045883	1.022375	0.048049
18	1.025437	0.038481	1.024499	0.040444	1.023352	0.042417	1.021981	0.044374	1.020375	0.046282
19	1.023580	0.037629	1.022628	0.039401	1.021489	0.041170	1.020155	0.042912	1.018617	0.044599
20	1.021696	0.036759	1.020942	0.038361	1.019824	0.039950	1.018533	0.041505	1.017066	0.043001

$y\backslash x$	−9 Re	−9 Im	−8 Re	−8 Im	−7 Re	−7 Im	−6 Re	−6 Im	−5 Re	−5 Im
0	1.152759	0.003489	1.181848	0.008431	1.222408	0.020053	1.278884	0.046723	1.353831	0.105839
1	1.146232	0.026376	1.169677	0.038841	1.199049	0.060219	1.233798	0.097331	1.268723	0.160826
2	1.134679	0.044579	1.151385	0.060814	1.169639	0.085335	1.186778	0.122162	1.196351	0.175646
3	1.120694	0.057595	1.131255	0.074701	1.140733	0.098259	1.146266	0.130005	1.142853	0.170672
4	1.106249	0.065948	1.111968	0.082156	1.115404	0.102861	1.114273	0.128440	1.105376	0.158134
5	1.092564	0.070592	1.094818	0.085055	1.094475	0.102411	1.089952	0.122397	1.079407	0.143879
6	1.080246	0.072520	1.080188	0.084987	1.077672	0.099188	1.071684	0.114638	1.061236	0.130280
7	1.069494	0.072580	1.067987	0.083120	1.064339	0.094618	1.057935	0.106568	1.048279	0.118116
8	1.060276	0.071425	1.057920	0.080250	1.053778	0.089537	1.047493	0.098840	1.038838	0.107508
9	1.052450	0.069523	1.049645	0.076885	1.045382	0.084405	1.039464	0.091717	1.031806	0.098337
10	1.045832	0.067197	1.042834	0.073340	1.038659	0.079462	1.033205	0.085271	1.026459	0.090413
11	1.040241	0.064664	1.037210	0.069803	1.033231	0.074821	1.028260	0.079488	1.022317	0.083544
12	1.035508	0.062063	1.032539	0.066381	1.028808	0.070524	1.024300	0.074315	1.019052	0.077561
13	1.031490	0.059482	1.028638	0.063128	1.025171	0.066576	1.021090	0.069688	1.016439	0.072320
14	1.028065	0.056975	1.025359	0.060070	1.022152	0.062962	1.018458	0.065542	1.014319	0.067702
15	1.025132	0.054573	1.022583	0.057215	1.019626	0.059658	1.016277	0.061817	1.012577	0.063610
16	1.022608	0.052291	1.020219	0.054559	1.017494	0.056638	1.014452	0.058460	1.011130	0.059962
17	1.020426	0.050135	1.018192	0.052094	1.015681	0.053874	1.012912	0.055424	1.009915	0.056694
18	1.018530	0.048106	1.016444	0.049806	1.014129	0.051341	1.011600	0.052670	1.008887	0.053752
19	1.016874	0.046201	1.014729	0.047684	1.012790	0.049015	1.010476	0.050161	1.008009	0.051092
20	1.015422	0.044413	1.013607	0.045714	1.011629	0.046875	1.009505	0.047870	1.007254	0.048675

Для $|z| > 4$ линейная интерполяция дает около 4 десятичных знаков, интерполяция по 8 точкам — около 6 десятичных знаков.

См. примеры 9—10.

Таблица 5.6. Интегральная показательная функция комплексного аргумента

$ze^zE_1(z)$

$y\backslash x$	−4 Re	−4 Im	−3 Re	−3 Im	−2 Re	−2 Im	−1 Re	−1 Im	0 Re	0 Im
0	1.438208	0.230161	1.483729	0.469232	1.340965	0.850337	0.697175	1.155727	0.577216	0.000000
1	1.287244	0.263705	1.251069	0.410413	1.098808	0.561916	0.813486	0.578697	0.621450	0.343378
2	1.185758	0.247356	1.136171	0.328439	1.032990	0.388428	0.896419	0.378838	0.798042	0.289091
3	1.123282	0.217835	1.080316	0.262814	1.013205	0.289366	0.936283	0.280906	0.875873	0.237665
4	1.085153	0.189003	1.051401	0.215118	1.006122	0.228399	0.957446	0.222612	0.916770	0.198713
5	1.061263	0.164466	1.035185	0.180487	1.003172	0.187857	0.969809	0.183963	0.940714	0.169481
6	1.045719	0.144391	1.025396	0.154746	1.001788	0.159189	0.977582	0.156511	0.955833	0.147129
7	1.035205	0.128073	1.019109	0.135079	1.001077	0.137939	0.982756	0.136042	0.965937	0.129646
8	1.027834	0.114732	1.014861	0.119660	1.000684	0.121599	0.986356	0.120218	0.972994	0.115678
9	1.022501	0.103711	1.011869	0.107294	1.000454	0.108665	0.988955	0.107634	0.978103	0.104303
10	1.018534	0.094502	1.009688	0.097181	1.000312	0.098184	0.990887	0.097396	0.981910	0.094885
11	1.015513	0.086718	1.008052	0.088770	1.000221	0.089525	0.992361	0.088911	0.984819	0.086975
12	1.013163	0.080069	1.006795	0.081673	1.000161	0.082255	0.993508	0.081769	0.987088	0.080245
13	1.011303	0.074333	1.005809	0.075609	1.000119	0.076067	0.994418	0.075676	0.988391	0.074457
14	1.009806	0.069340	1.005022	0.070371	1.000090	0.070738	0.995151	0.070419	0.990345	0.069429
15	1.008585	0.064959	1.004384	0.065803	1.000070	0.066102	0.995751	0.065838	0.991534	0.065024
16	1.007577	0.061086	1.003859	0.061786	1.000055	0.062032	0.996246	0.061812	0.992518	0.061135
17	1.006735	0.057640	1.003423	0.058227	1.000043	0.058432	0.996661	0.058246	0.993342	0.057677
18	1.006025	0.054555	1.003057	0.055052	1.000035	0.055224	0.997011	0.055066	0.994038	0.054583
19	1.005420	0.051779	1.002747	0.052202	1.000028	0.052349	0.997309	0.052214	0.994631	0.051801
20	1.004902	0.049267	1.002481	0.049631	1.000023	0.049757	0.997565	0.049640	0.995140	0.049284

$y\backslash x$	1 Re	1 Im	2 Re	2 Im	3 Re	3 Im	4 Re	4 Im	5 Re	5 Im
0	0.596347	0.000000	0.722657	0.000000	0.786251	0.000000	0.825383	0.000000	0.852111	0.000000
1	0.673321	0.147864	0.747012	0.075661	0.797036	0.045686	0.831126	0.030619	0.855544	0.021985
2	0.777514	0.186570	0.796965	0.118228	0.823055	0.078753	0.846097	0.055494	0.864880	0.040999
3	0.847468	0.181226	0.844361	0.132252	0.853176	0.096659	0.865521	0.072180	0.877860	0.055341
4	0.891460	0.165207	0.881036	0.131686	0.880584	0.103403	0.885308	0.081408	0.892143	0.064825
5	0.919826	0.148271	0.907873	0.125136	0.903152	0.103577	0.903231	0.085187	0.906058	0.070209
6	0.938827	0.132986	0.927384	0.116656	0.921006	0.100357	0.918527	0.085460	0.918708	0.072544
7	0.952032	0.119807	0.941722	0.107990	0.934958	0.095598	0.931209	0.083666	0.929765	0.072792
8	0.961512	0.108589	0.952435	0.099830	0.945868	0.090303	0.941594	0.080755	0.939221	0.071700
9	0.968512	0.099045	0.960582	0.092408	0.954457	0.084986	0.950072	0.077313	0.947219	0.069799
10	0.973810	0.090888	0.966885	0.085758	0.961283	0.079898	0.957007	0.073688	0.953955	0.067447
11	0.977904	0.083871	0.971842	0.079836	0.966766	0.075147	0.962708	0.070080	0.959626	0.064878
12	0.981127	0.077790	0.975799	0.074567	0.971216	0.070769	0.967423	0.066599	0.964412	0.062242
13	0.983706	0.072484	0.979000	0.069873	0.974865	0.066762	0.971351	0.063300	0.968464	0.059630
14	0.985799	0.067822	0.981621	0.065679	0.977888	0.063104	0.974646	0.060206	0.971911	0.057096
15	0.987519	0.063698	0.983791	0.061921	0.980414	0.059767	0.977430	0.057322	0.974858	0.054671
16	0.988949	0.060029	0.985606	0.058539	0.982544	0.056723	0.979799	0.054644	0.977391	0.052371
17	0.990149	0.056745	0.987138	0.055485	0.984353	0.053941	0.981827	0.052162	0.979579	0.050200
18	0.991167	0.053792	0.988442	0.052717	0.985902	0.051394	0.983574	0.049861	0.981478	0.048160
19	0.992036	0.051122	0.989561	0.050199	0.987237	0.049057	0.985089	0.047728	0.983135	0.046245
20	0.992784	0.048699	0.990527	0.047900	0.988395	0.046909	0.986410	0.045749	0.984587	0.044449

$y\backslash x$	6 Re	6 Im	7 Re	7 Im	8 Re	8 Im	9 Re	9 Im	10 Re	10 Im
0	0.871606	0.000000	0.886488	0.000000	0.898237	0.000000	0.907758	0.000000	0.915633	0.000000
1	0.873827	0.016570	0.888009	0.012947	0.899327	0.010401	0.908565	0.008543	0.916249	0.007143
2	0.880023	0.031454	0.892327	0.024866	0.902453	0.020140	0.910901	0.016639	0.918040	0.013975
3	0.889029	0.043517	0.898793	0.034995	0.907236	0.028693	0.914531	0.023921	0.920856	0.020230
4	0.899484	0.052380	0.906591	0.042967	0.913167	0.035755	0.919127	0.030145	0.924479	0.025717
5	0.910242	0.058259	0.914952	0.048780	0.919729	0.041242	0.924336	0.035208	0.928664	0.030334
6	0.920534	0.061676	0.923283	0.052667	0.926481	0.045242	0.929836	0.039123	0.933175	0.034063
7	0.929945	0.063220	0.931193	0.054971	0.933096	0.047942	0.935365	0.041986	0.937807	0.036944
8	0.938313	0.063425	0.938469	0.056047	0.939359	0.049570	0.940731	0.043936	0.942398	0.039060
9	0.945629	0.062714	0.945023	0.056211	0.945154	0.050349	0.945812	0.045128	0.946833	0.040514
10	0.951965	0.061408	0.950850	0.055725	0.950427	0.050481	0.950535	0.045711	0.951035	0.041413
11	0.957427	0.059735	0.955987	0.054790	0.955176	0.050135	0.954870	0.045818	0.954959	0.041861
12	0.962128	0.057855	0.960495	0.053560	0.959421	0.049444	0.958814	0.045563	0.958586	0.041948
13	0.966178	0.055877	0.964444	0.052146	0.963201	0.048514	0.962379	0.045038	0.961913	0.041755
14	0.969673	0.053874	0.967903	0.050627	0.966559	0.047425	0.965591	0.044319	0.964949	0.041347
15	0.972699	0.051894	0.970935	0.049062	0.969539	0.046236	0.968477	0.043463	0.967710	0.040780
16	0.975326	0.049966	0.973597	0.047489	0.972185	0.044992	0.971067	0.042516	0.970214	0.040095
17	0.977617	0.048109	0.975940	0.045935	0.974538	0.043724	0.973393	0.041512	0.972484	0.039329
18	0.979622	0.046332	0.978009	0.044419	0.976632	0.042456	0.975481	0.040477	0.974540	0.038508
19	0.981384	0.044641	0.979839	0.042951	0.978500	0.041205	0.977357	0.039431	0.976402	0.037653
20	0.982938	0.043036	0.981465	0.041538	0.980169	0.039980	0.979047	0.038388	0.978090	0.036781

Если $x > 10$ или $y > 10$, то (см. [5.15])

$$e^zE_1(z) = \frac{0.711093}{z + 0.415775} + \frac{0.278518}{z + 2.29428} + \frac{0.010389}{z + 6.2900} + \varepsilon,$$

$$|\varepsilon| < 3 \cdot 10^{-6},$$

$$E_1(iy) = -\mathrm{Ci}(y) + i\,\mathrm{si}(y) \quad (y \text{ — действительное}).$$

Таблица 5.6. Интегральная показательная функция комплексного аргумента

$ze^{z}E_1(z)$

$y \backslash x$	11 Re	11 Im	12 Re	12 Im	13 Re	13 Im	14 Re	14 Im	15 Re	15 Im
0	0.922260	0.000000	0.927914	0.000000	0.932796	0.000000	0.937055	0.000000	0.940804	0.000000
1	0.922740	0.006063	0.928295	0.005212	0.933105	0.004528	0.937308	0.003972	0.941014	0.003512
2	0.924143	0.011902	0.929416	0.010258	0.934013	0.008932	0.938055	0.007847	0.941636	0.006949
3	0.926370	0.017321	0.931205	0.014991	0.935473	0.013098	0.939261	0.011540	0.942643	0.010242
4	0.929270	0.022171	0.933560	0.019295	0.937408	0.016934	0.940870	0.014974	0.943994	0.013331
5	0.932672	0.026361	0.936356	0.023091	0.939729	0.020373	0.942816	0.018095	0.945640	0.016169
6	0.936400	0.029857	0.939462	0.026339	0.942338	0.023378	0.945024	0.020867	0.947522	0.018725
7	0.940297	0.032670	0.942757	0.029036	0.945140	0.025934	0.947419	0.023273	0.949582	0.020980
8	0.944229	0.034847	0.946132	0.031205	0.948047	0.028052	0.949933	0.025315	0.951765	0.022931
9	0.948093	0.036453	0.949500	0.032887	0.950985	0.029756	0.952502	0.027004	0.954018	0.024582
10	0.951816	0.037566	0.952792	0.034134	0.953895	0.031081	0.955075	0.028365	0.956296	0.025949
11	0.955347	0.038261	0.955958	0.035004	0.956729	0.032068	0.957610	0.029426	0.958563	0.027052
12	0.958659	0.038612	0.958968	0.035552	0.959454	0.032761	0.960073	0.030221	0.960787	0.027915
13	0.961739	0.038684	0.961800	0.035833	0.962049	0.033201	0.962443	0.030781	0.962947	0.028564
14	0.964583	0.038534	0.964447	0.035893	0.964499	0.033428	0.964702	0.031140	0.965026	0.029024
15	0.967199	0.038211	0.966907	0.035775	0.966799	0.033479	0.966843	0.031327	0.967011	0.029320
16	0.969597	0.037756	0.969184	0.035515	0.968947	0.033384	0.968860	0.031370	0.968897	0.029476
17	0.971789	0.037200	0.971285	0.035144	0.970946	0.033172	0.970752	0.031293	0.970680	0.029512
18	0.973792	0.036572	0.973220	0.034687	0.972802	0.032865	0.972521	0.031117	0.972359	0.029448
19	0.975621	0.035893	0.974999	0.034166	0.974521	0.032485	0.974172	0.030862	0.973936	0.029301
20	0.977290	0.035179	0.976634	0.033597	0.976112	0.032049	0.975709	0.030542	0.975414	0.029086

$y \backslash x$	16 Re	16 Im	17 Re	17 Im	18 Re	18 Im	19 Re	19 Im	20 Re	20 Im
0	0.944130	0.000000	0.947100	0.000000	0.949769	0.000000	0.952181	0.000000	0.954371	0.000000
1	0.944306	0.003128	0.947250	0.002804	0.949897	0.002527	0.952291	0.002290	0.954467	0.002085
2	0.944829	0.006196	0.947693	0.005560	0.950277	0.005016	0.952619	0.004549	0.954752	0.004144
3	0.945678	0.009150	0.948416	0.008223	0.950898	0.007430	0.953156	0.006745	0.955219	0.006151
4	0.946824	0.011940	0.949395	0.010754	0.951741	0.009735	0.953887	0.008853	0.955856	0.008084
5	0.948226	0.014529	0.950600	0.013121	0.952782	0.011904	0.954793	0.010847	0.956650	0.009922
6	0.949842	0.016886	0.951995	0.015296	0.953995	0.013916	0.955853	0.012709	0.957581	0.011649
7	0.951624	0.018994	0.953545	0.017265	0.955349	0.015753	0.957043	0.014429	0.958631	0.013253
8	0.953527	0.020847	0.955212	0.019019	0.956815	0.017409	0.958337	0.015986	0.959779	0.014723
9	0.955509	0.022445	0.956960	0.020555	0.958363	0.018878	0.959712	0.017387	0.961004	0.016056
10	0.957530	0.023797	0.958758	0.021878	0.959966	0.020163	0.961144	0.018628	0.962288	0.017250
11	0.959559	0.024917	0.960576	0.022998	0.961598	0.021270	0.962612	0.019712	0.963611	0.018305
12	0.961568	0.025823	0.962391	0.023927	0.963238	0.022207	0.964097	0.020645	0.964956	0.019227
13	0.963534	0.026534	0.964181	0.024679	0.964868	0.022984	0.965582	0.021436	0.966310	0.020021
14	0.965443	0.027070	0.965931	0.025271	0.966472	0.023616	0.967052	0.022094	0.967658	0.020694
15	0.967280	0.027453	0.967628	0.025720	0.968039	0.024114	0.968496	0.022629	0.968990	0.021255
16	0.969038	0.027700	0.969264	0.026041	0.969558	0.024493	0.969906	0.023052	0.970297	0.021712
17	0.970712	0.027831	0.970832	0.026249	0.971023	0.024765	0.971273	0.023375	0.971571	0.022075
18	0.972300	0.027862	0.972328	0.026361	0.972430	0.024943	0.972594	0.023607	0.972808	0.022352
19	0.973800	0.027809	0.973751	0.026388	0.973775	0.025038	0.973863	0.023760	0.974004	0.022552
20	0.975215	0.027685	0.975099	0.026343	0.975057	0.025062	0.975079	0.023842	0.975155	0.022684

Таблица 5.7. Интегральная показательная функция при малых значениях комплексного аргумента

$e^{z}E_1(z)$

$y \backslash x$	−4.0 Re	−4.0 Im	−3.5 Re	−3.5 Im	−3.0 Re	−3.0 Im	−2.5 Re	−2.5 Im	−2.0 Re	−2.0 Im
0.0	−0.359552	−0.057540	−0.420509	−0.094868	−0.494576	−0.156411	−0.580650	−0.257878	−0.670483	−0.425168
0.2	−0.347179	−0.078283	−0.400596	−0.119927	−0.462493	−0.185573	−0.528987	−0.289009	−0.587558	−0.451225
0.4	−0.333373	−0.096648	−0.379278	−0.141221	−0.429554	−0.208800	−0.478303	−0.310884	−0.510543	−0.463193
0.6	−0.318556	−0.112633	−0.357202	−0.158890	−0.396730	−0.226575	−0.429978	−0.324774	−0.441128	−0.464163
0.8	−0.303109	−0.126301	−0.334923	−0.173169	−0.364785	−0.239500	−0.384941	−0.332047	−0.380013	−0.457088
1.0	−0.287369	−0.137768	−0.312894	−0.184355	−0.334280	−0.248231	−0.343719	−0.334043	−0.327140	−0.444528

$E_1(z)+\ln z$

$y \backslash x$	−2.0		−1.5		−1.0		−0.5		0	
0.0	−4.261087	0.000000	−2.895820	0.000000	−1.895118	0.000000	−1.147367	0.000000	−0.577216	0.000000
0.2	−4.219228	0.636779	−2.867070	0.462804	−1.875155	0.342700	−1.133341	0.258840	−0.567232	0.199556
0.4	−4.094686	1.260867	−2.781497	0.917127	−1.815717	0.679691	−1.091560	0.513806	−0.537482	0.396461
0.6	−3.890531	1.859922	−2.641121	1.354712	−1.718135	1.005410	−1.022911	0.761122	−0.488555	0.588128
0.8	−3.611783	2.422284	−2.449241	1.767748	−1.584591	1.314586	−0.928842	0.997200	−0.421423	0.772095
1.0	−3.265262	2.937296	−2.210344	2.149077	−1.418052	1.602372	−0.811327	1.218731	−0.337404	0.946083

$y \backslash x$	0.5		1.0		1.5		2.0		2.5	
0.0	−0.133374	0.000000	0.219384	0.000000	0.505485	0.000000	0.742048	0.000000	0.941206	0.000000
0.2	−0.126168	0.157081	0.224661	0.126210	0.509410	0.103432	0.745014	0.086359	0.943484	0.073355
0.4	−0.104687	0.312331	0.240402	0.251143	0.521123	0.205962	0.753871	0.172075	0.950289	0.146246
0.6	−0.069328	0.463961	0.266336	0.373547	0.540441	0.306707	0.768490	0.256515	0.961532	0.218215
0.8	−0.020743	0.610264	0.302022	0.492229	0.567061	0.404823	0.788664	0.339075	0.977068	0.288822
1.0	+0.040177	0.749655	0.346856	0.606074	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

5.1. Corbato F. J. On the computation of auxiliary functions for two-center integrals by means of a high-speed computer. — J. Chem. Phys., 1956, **24**, p. 452—453.

5.2. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953.
Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974, Т.II.

5.3. Erdélyi A. et al. Tables of integral transforms. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1954, V. **1**, **2**.
Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. — М.: Наука, 1969.

5.4. Gautschi W. Some elementary inequalities relating to the gamma and incomplete gamma functions. — J. Math. Phys., 1959, **38**, p. 77—81.

5.5. Gautschi W. Recursive computation of certain integrals. — J. Assoc. Comput. Mach., 1961, **8**, p. 21—40.

5.6. Gröbner W., Hofreiter N. Integraltafel. — Wien, Innsbruck: Springer-Verlag, 1949—50.

5.7. Hastings C., Jr. Approximations for digital computers. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1955.

5.8. Hopf E. Mathematical problems of radiative equilibrium. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1934. — (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics; № 31).

5.9. Kourganoff V. Basic methods in transfer problems. — L.: Oxford Univ. Press, 1952.

5.10. Lösch F., Schoblik F. Die Fakultät und verwandte Funktionen. — Leipzig: Teubner, 1951.

5.11. Nielsen N. Theorie des Integrallogarithmus. — Leipzig; Teubner, 1906.

5.12. Oberhettinger F. Tabellen zur Fourier Transformation. — B.: Springer-Verlag, 1957.

5.13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.

5.14. Schelkunoff S. A. Proposed symbols for the modified cosine and exponential integral. — Quart. Appl. Math., 1944, **2**, № 90.

5.15. Todd J. Evaluation of the exponential integral for large complex arguments. — J. Research NBS, 1954, **52**, p. 313—317, Report № 2508.

5.16. Tricomi F. G. Funzioni ipergeometriche confluenti. — R.: Edizioni Cremonese, 1954.

Таблицы

5.17. British Association for the Advancement of Science. Mathematical tables, V. I. Circular and hyperbolic functions, exponential, sine and cosine integrals, etc. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1951.

$\mathrm{Ei}(x)-\ln x$, $-E_1(x)-\ln x$, $\mathrm{Ci}(x)-\ln x$, $\mathrm{Si}(x)$, $x=0(0.1)\,5$, 11D; $\mathrm{Ei}(x)$, $x=5(0.1)\,15$, 10 — 11S; $E_1(x)$, $x=5(0.1)\,15$, 13—14D; $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$, $x=5(0.1)20(0.2)\,40$, 10D.

5.18. Fox L. Tables of Weber parabolic cylinder functions and other functions for large arguments/National Physical Laboratory. — L.: Her Majesty's Stationery Office, 1960. — (Mathematical tables; V.4).

$e^{-x}\mathrm{Ei}\,(x)$, $e^{x}E_1(x)$, $x^{-1}=0(0.001)\,0.1$, 10D;

$f(x)$, $g(x)$, $x^{-1}=0(0.001)\,0.1$, 10D.

5.19. Glaisher J. W. L. Tables of the numerical values of the sine-integral, cosine-integral and exponential integral. — Philos. Trans. Roy. Soc., L., 1870, **160**, p. 367—388.

$\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$, $\mathrm{Ei}(x)$, $-E_1(x)$, $x=0(0.01)\,1$, 18D;

$x=1(0.1)\,5(1)\,15$, 11D.

5.20. Gourary B. S., Lynam M. E. Tables of the auxiliary molecular integrals $A_n(x)$ and the auxiliary functions $C_n(x)$. — Baltimore: Johns Hopkins Univ. Applied Physics Laboratory, 1957. — CM Report № 905.

$\alpha_n(x)$, $n!e_n(x)$, $x=0.05(0.05)15$, $n=0.(1)18$, 9S.

5.21. Harris F. E. Tables of the exponential integral $\mathrm{Ei}(x)$. — Math. Tables Aids Comp., 1957, **11**, p. 9—16.

$E_1(x)$, $e^{x}E_1(x)$, $\mathrm{Ei}(x)$, $e^{-x}\mathrm{Ei}(x)$, $x=1(1)4.(0.4)8(1)\,50$

18—19S.

5.22. Harvard University. Tables of the generalized sine-and cosine-integral functions. — Cambridge: Harvard Univ. Press, 1949. — (The Annals of the Computation Laboratory; V. **18**, **19**).

$$S(a,x)=\int_0^x\frac{\sin u}{u}\,dx,\quad C(a,x)=\int_0^x\frac{1-\cos u}{u}\,dx,\quad 6D;$$

$$\mathrm{Ss}(a,x)=\int_0^x\frac{\sin u}{u}\sin x\,dx,\qquad \mathrm{Sc}(a,x)=$$

$$=\int_0^x\frac{\sin u}{u}\cos x\,dx,\ 6D;$$

$$\mathrm{Cs}(a,x)=\int_0^x\frac{\cos u}{u}\sin x\,dx,\ \mathrm{Cc}(a,x)=$$

$$=\int_0^x\frac{\cos u}{u}(1-\cos x)\,dx,\ 6D;$$

$u=\sqrt{x^2+a^2}$, $0\leqslant a<25$, $0\leqslant x\leqslant 25$.

Русский перевод: Таблицы обобщенных интегральных синусов и косинусов. — М.: ВЦ АН СССР, 1966. — (БМТ; Вып. 37, 38).

5.23. Harvard University. The Annals of the Computation Laboratory, V. 21. Tables of the generalized exponential-integral functions. — Cambridge: Harvard Univ. Press, 1949.

$$E(a,x)=\int_0^x\frac{1-e^{-u}}{u}\,dx,\quad \mathrm{Es}(a,x)=\int_0^x\frac{e^{-u}\sin u}{u}\,dx,$$

$$\mathrm{Ec}(a,x)=\int_0^x\frac{1-e^{-u}\cos u}{u}\,dx,\ 6D;\ u=\sqrt{x^2+a^2},$$

$0\leqslant\ \leqslant a<10$, $0\leqslant x\leqslant 10$.

Русский перевод: Таблицы обобщенных интегральных показательных функций. — М.: ВЦ АН СССР, 1966. — (БМТ; Вып. 36).

5.24. Hershey A. V. Computing programs for the complex exponential integral. — Dahlgren: Naval Proving Ground, 1959. — NPG Report № 1646.

$E_1(-z)$, $z = x + iy$, $x = -20(1)20$, $y = 0(1)20$, 13 S.

5.25. Jahnke E., Emde F. Tables of functions. — N.Y.: Dover Publications, 1945.

$E_1(x)$, $\mathrm{Ei}(x)$, $x = 0.(0.01)1(0.1)5(1)15$, $4-6$S;
$\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$, $x = 0(0.01)1(0.1)5(1)15(5)100(10)200(100)10^{2(1)7}$, $4-5$S;
$\mathrm{Ci}(x)$ и $\mathrm{Si}(x)$, $0 < x < 16$, 5S.

Русский перевод: Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

5.26. Карпов К. А., Разумовский С. Н. Таблицы интегрального логарифма. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.

$\mathrm{li}(x)$, $x = 0(0.0001)2.5(0.001)20(0.01)200(0.1)500(1)10000(10)25000$, 7S; $\mathrm{li}(x) - \ln|1-x|$, $x = 0.95(0.0001)1.05$, 6D.

5.27. Kotani M., Amemiya A., Ishiguro E., Kimura T. Table of molecular integrals. — Tokyo: Maruzen Co., 1955.

$\alpha_n(x)$, $x = 0.25(0.25)9(0.5)19(1)25$, $n = 0(1)15$, 11S;

$\beta_n(x)$, $x = 0.25(0.25)8(0.5)19(1)25$, $n = 0(1)8$, 11S.

5.28. Machiko M. Tables of generalized exponential, sine- and cosine-integrals/Numerical Computation Bureau. — Report № 7. — Tokyo, 1953.

$E_1(z) + \ln|z| = C_\alpha(\xi) + \ln\xi - iS_\alpha(\xi)$, $z = \xi e^{i\alpha}$,
$\xi = 0(0.05)5$, $\alpha = 0^0(2^0)60^0(1^0)90^0$, 6D;

$ze^zE_1(z) = A_\alpha(\eta)\exp[i\Phi_\alpha(\eta)]$, $z = \dfrac{1}{\eta}e^{i\alpha}$,

$\eta = 0.01(0.01)0.2$, $\alpha = 0^0(2^0)60^0(1^0)90^0$, $5-6$D.

5.29. Miller G. F. Tables of generalized exponential integrals/National Physical Laboratory. — L.: Her Majesty's Stationery Office, 1958. — (Mathematical Tables; V. 3).

$(x+n)e^xE_n(x)$, $x = 0(0.01)1$, $n = 1(1)8$,

$x = 0(0.1)20$, $n = 1(1)24$, $x^{-1} = 0(0.001)0.05$,

$n = 1(1)24$; 8D.

5.30. Miller J., Gerhauser J. M., Matsen F. A. Quantum chemistry integrals and tables. — Austin: Univ. of Texas Press, 1959.

$\alpha_n(x)$, $x = 0.125(0.125)25$, $n = 0(1)16$, 14S;

$\beta_n(x)$, $x = 0(0.125)24.875$, $n = 0(1)16$, $12-14$S.

5.31. Miller J., Hurst R. P. Simplified calculation of the exponential integral. — Math. Tables Aids Comp., 1958, **12**, p. 187—193.

$e^{-x}\,\mathrm{Ei}(x)$, $\mathrm{Ei}(x)$, $e^xE_1(x)$, $E_1(x)$,

$x = 0.2(0.05)5(0.1)10(0.2)20(0.5)50(1)80$, 16S.

5.32. National Bureau of Standards. Tables of sine, cosine and exponential integrals. — Washington: Government Printing Office, 1940, V. I.
$\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$, $\mathrm{Ei}(x)$, $E_1(x)$,
$x = 0(0.0001)2$, $x = 0(01)10$, 9D.

5.33. National Bureau of Standards. Tables of sine, cosine and exponential integrals. — Washington: Government Printing Office, 1940, V. II.

$\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$, $\mathrm{Ei}(x)$, $E_1(x)$, $x = 0(0.001)10$, $9-10$D или S; $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$, $x = 10(0.1)40$, 10D; $\mathrm{Ei}(x)$, $E_1(x)$, $x = 10(0.1)15$, $7-11$S.

5.34. National Bureau of Standards. Table of sine and cosine integrals for arguments from 10 to 100. — Washington: Government Printing Office, 1954. — (Applied Math. Series; **32**).

$\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$, $x = 10(0.01)100$, 10D.

5.35. National Bureau of Standards. Tables of functions and of zeros of functions. — Washington: Government Printing Office, 1954. — (Applied Math. Series; **37**). Collected short tables of the Computation Laboratory.

$E_n(x)$, $n = 0(1)20$, $x = 0(0.01)2(0.1)10$, $4-9$S;

$E_2(x) - x\ln x$, $x = 0(0.01)05$, 7S; $E_3(x) + (x^2\ln x)/2$, $x = 0(0.01)0.1$, 7S.

5.36. National Bureau of Standards. Tables of the exponential integral for complex arguments. — Washington: Government Printing Office, 1958. — (Applied Math. Series; **51**).

$E_1(z) + \ln z$, 6D; $x = 0(0.02)1$, $y = 0(0.02)1$,
$x = -1(0.1)0$, $y = 0(0.1)1$; $E_1(z)$, 6D; $x = 0(0.02)4$,
$y = 0(0.02)3(0.05)10$, $x = 0(1)20$, $y = 0(1)20$,
$x = -3.1(0.1)0$, $y = 0(0.1)3.1$, $x = -4.5(0.5)0$,
$y = 0(0.1)4(0.5)10$, $x = -10(0.5)-4.5$, $y = 0(0.5)10$,
$x = -20(1)0$, $y = 0(1)20$; $e^xE_1(z)$, 6D; $x = 4(0.1)10$,
$y = 0(0.5)10$.

Русский перевод: Таблицы интегральной показательной функции в комплексной области. — М.: ВЦ АН СССР, 1965. — (БМТ; Вып. 31).

5.37. Oberländer S. Tabellen von Exponentialfunktionen und- integralen zur Anwendung auf Gebieten der Thermodynamik, Halbleitertheorie und Gaskinetik. — B.: Akademie-Verlag, 1959.

$$\frac{\Delta E}{kT},\ \frac{kT}{\Delta E},\ \exp\left(\frac{-\Delta E}{kT}\right),\ \frac{kT}{\Delta E}\exp\left(\frac{-\Delta E}{kT}\right),$$

$$E_1\left(\frac{\Delta E}{kT}\right),\ \frac{k}{\Delta E}\int_0^T\exp\left(\frac{-\Delta E}{kT}\right)dT,\ \frac{\Delta E}{kT}\exp\left(\frac{\Delta E}{kT}\right)\times$$

$$\times E_1\left(\frac{\Delta E}{kT}\right),\quad 1-\frac{\Delta E}{kT}\exp\left(\frac{\Delta E}{kT}\right)E_1\left(\frac{\Delta E}{kT}\right),$$

$\Delta E = 0.2(0.2)2$, $T = 25(25)1000$, $T = 150(10)390$,

$3-4$S; x^{-1}, $\exp(-x^{-1})$, $x\exp(-x^{-1})$, $E_1(x^{-1})$,

$\int\limits_0^x \exp(-t^{-1})\,dt$, $x^{-1}\exp(x^{-1})\,E_1(x^{-1})$, $1-x^{-1}\exp(x^{-1})\times$

$\times E_1(x^{-1})$; $x = 0.01(0.0001)0.1$, 5–6S.

5.38. Пагурова В. И. Таблицы интегро-экспоненциальной функции

$$E_\nu(x) = \int\limits_1^\infty e^{-xu}u^{-\nu}du.$$ — М.: ВЦ АН СССР, 1959.

$E_n(x)$, $n = 0(1)20$, $x = 0(0.01)2(01)10$, 4–9S;

$E_2(x) - x\ln x$, $x = 0(0.01)5$, 7S; $E_3(x) + (x^2\ln x)/2$,

$x = 0(0.01)0.1$, 7S; $e^xE_n(x)$, $n = 2(1)10$, $x = 10(01)20$, 7D;

$e^xE_\nu(x)$, $\nu = 0(01)1$, $x = 0.01(0.01)7(0.05)12(0.1)20$, 7S или 7D.

5.39. Таблицы интегрального синуса и косинуса. — М.: Изд-во АН СССР, 1954.

Si x, Ci(x), $x = 0(0.0001)2(0.001)10(0.005)100$, 7D;

Ci$(x) - \ln x$, $x = 0(0.0001)0.01$, 7D.

5.40. Таблицы интегральной показательной функции. — М.: Изд-во АН СССР, 1954.

Ei(x), $E_1(x)$, $x = 0(0.0001)1.3(0.001)3(0.0005)10(0.1)15$, 7D.

5.41. Trubey D. K. A table of three exponential integrals/ Oak Ridge National Laboratory. — Report № 2750. — Oak Ridge, June 1959.

$E_1(x)$, $E_2(x)$, $E_3(x)$, $x = 0(0.0005)0.1(0.001)2(0.01)10(0.1)20$, 6S.

Глава 6

ГАММА-ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ФУНКЦИИ

Ф. ДЭВИС

СОДЕРЖАНИЕ

6.1. ГАММА-ФУНКЦИЯ

Интеграл Эйлера

6.1.1. $\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \quad (\operatorname{Re} z>0),$

$$\Gamma(z)=k^z\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-kt}\,dt \quad (\operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Re} k>0).$$

Формула Эйлера

6.1.2. $\Gamma(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} \quad (z\neq 0,\ -1, -2, \ldots).$

Бесконечное произведение Эйлера

6.1.3. $\dfrac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\dfrac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right] \quad (|z|<\infty),$

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left[1+\frac12+\frac13+\frac14+\ldots+\frac1m-\ln m\right]=0.57721\ 56649\ \ldots,$$

γ — постоянная Эйлера, ее числовое значение дано в гл. 1 с 25 десятичными знаками. $\Gamma(z)$ является однозначной аналитической функцией на всей комплексной плоскости, исключая точки $z=-n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), в которых она имеет простые полюсы с вычетами, равными $(-1)^n/n!$. Обратная величина $1/\Gamma(z)$ — целая функция, обладающая простыми нулями в точках $z=-n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$).

Контурный интеграл Ханкеля

6.1.4. $\dfrac{1}{\Gamma(z)}=\dfrac{i}{2\pi}\oint\limits_C(-t)^{-z}e^{-t}\,dt \quad (|z|<\infty).$ Путь интегрирования C начинается от $+\infty$, идет по действительной оси, обходит начало координат против часовой стрелки и возвращается в исходную точку.

Факториал и П-обозначение

6.1.5. $\Pi(z)=z!=\Gamma(z+1).$

Целые значения аргумента

6.1.6. $\Gamma(n+1)=1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)\,n=n!.$

6.1.7. $\lim\limits_{z\to n}\dfrac{1}{\Gamma(-z)}=0=\dfrac{1}{(-n-1)!} \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$

Дробные значения аргумента

6.1.8. $\Gamma\left(\dfrac12\right)=2\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt=\pi^{1/2}=1.77245\ 38509\ \ldots=\left(-\dfrac12\right)!,$

6.1.9. $\Gamma\left(\dfrac32\right)=\dfrac12\pi^{1/2}=0.88622\ 69254\ \ldots=\left(\dfrac12\right)!.$

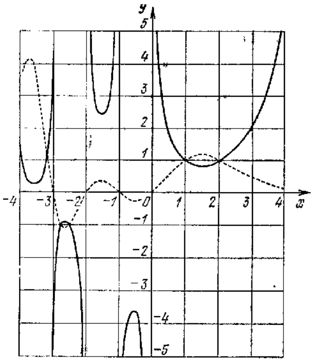


Рис. 6.1. Гамма-функция:
—— $y=\Gamma(x)$, - - - $y=1/\Gamma(x)$.

6.1.10. $\Gamma\left(n+\dfrac14\right)=\dfrac{1\cdot5\cdot9\cdot13\ldots(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\dfrac14\right),$

$$\Gamma\left(\frac14\right)=3.62560\ 99082\ \ldots$$

6.1.11. $\Gamma\left(n+\dfrac13\right)=\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdot10\ldots(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\dfrac13\right),$

$$\Gamma\left(\frac13\right)=2.67893\ 85347\ \ldots$$

6.1.12. $\Gamma\left(n+\dfrac12\right)=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n-1)}{2^n}\Gamma\left(\dfrac12\right).$

6.1.13. $\Gamma\left(n+\dfrac23\right)=\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot11\ldots(3n-1)}{3^n}\Gamma\left(\dfrac23\right),$

$$\Gamma\left(\frac23\right)=1.35411\ 79394\ \ldots$$

6.1.14. $\Gamma\left(n+\dfrac34\right)=\dfrac{3\cdot7\cdot11\cdot15\ldots(4n-1)}{4^n}\Gamma\left(\dfrac34\right),$

$$\Gamma\left(\frac34\right)=1.22541\ 67024\ \ldots$$

Рекуррентные формулы

6.1.15. $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)=z!=z(z-1)!.$

6.1.16. $\Gamma(n+z)=(n-1+z)(n-2+z)\ldots$

$$\ldots(1+z)\Gamma(1+z)=(n-1+z)!=$$
$$=(n-1+z)(n-2+z)\ldots(1+z)z!.$$

Формулы симметрии

6.1.17. $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)\,\Gamma(z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z$,

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t}\,dt \quad (0 < \operatorname{Re} z < 1).$$

Формула удвоения

6.1.18. $\Gamma(2z) = (2\pi)^{-1/2} 2^{2z-1/2}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$.

Формула утроения

6.1.19. $\Gamma(3z) = (2\pi)^{-1}\,3^{3z-1/2}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{3}\right)$.

Формула умножения Гаусса

6.1.20. $\Gamma(nz) = (2\pi)^{(1-n)/2} n^{nz-1/2} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)$.

Биномиальный коэффициент

6.1.21. $\binom{z}{w} = \dfrac{z!}{w!\,(z-w)!} = \dfrac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(w+1)\,\Gamma(z-w+1)}$.

Символ Похгаммера

6.1.22. $(z)_0 = 1,\ (z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1) = \dfrac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$.

Гамма-функция комплексного аргумента

6.1.23. $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$, $\ln\Gamma(\bar{z}) = \overline{\ln\Gamma(z)}$.

6.1.24. $\arg\Gamma(z+1) = \arg\Gamma(z) + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

6.1.25. $\left|\dfrac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(x)}\right|^2 = \prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\dfrac{y^2}{(x+n)^2}\right]^{-1}$.

6.1.26. $|\Gamma(x+iy)| \leqslant |\Gamma(x)|$.

6.1.27. $\arg\Gamma(x+iy) = y\psi(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{y}{x+n} - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x+n}\right)$

$(x + iy \neq 0, -1, -2, \dots)$, где $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$.

6.1.28. $\Gamma(1+iy) = iy\,\Gamma(iy)$.

6.1.29. $\Gamma(iy)\,\Gamma(-iy) = |\Gamma(iy)|^2 = \dfrac{\pi}{y \operatorname{sh} \pi y}$.

6.1.30. $\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right) = \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2 = \dfrac{\pi}{\operatorname{ch}\pi y}$.

6.1.31. $\Gamma(1+iy)\,\Gamma(1-iy) = |\Gamma(1+iy)|^2 = \dfrac{\pi y}{\operatorname{sh}\pi y}$.

6.1.32. $\Gamma\left(\frac{1}{4}+iy\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-iy\right) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{\operatorname{ch}\pi y + i \operatorname{sh}\pi y}$.

Разложение в ряд

6.1.33. $\ln\Gamma(1+z) = -\ln(1+z) + z(1-\gamma) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n[\zeta(n)-1]\,z^n/n \quad (|z| < 2)$,

$\zeta(n)$ — дзета-функция Римана (см. гл. 23).

Разложение в степенной ряд для $1/\Gamma(z)$ *)

6.1.34. $\dfrac{1}{\Gamma(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \quad (|z| < \infty)$.

k	c_k
1	1.00000 00000 000000
2	0.57721 56649 015329
3	−0.65587 80715 202538
4	−0.04200 26350 340952
5	0.16653 86113 822915
6	−0.04219 77345 555443
7	−0.00962 19715 278770
8	0.00721 89432 466630
9	−0.00116 51675 918591
10	−0.00021 52416 741149
11	0.00012 80502 823882
12	−0.00002 01348 547807
13	−0.00000 12504 934821
14	0.00000 11330 272320
15	−0.00000 02056 338417
16	0.00000 00061 160950
17	0.00000 00050 020075
18	−0.00000 00011 812746
19	0.00000 00001 043427
20	0.00000 00000 077823
21	−0.00000 00000 036968
22	0.00000 00000 005100
23	−0.00000 00000 000206
24	−0.00000 00000 000054
25	0.00000 00000 000014
26	0.00000 00000 000001

Аппроксимация многочленами (см. [6.5])

6.1.35. $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\Gamma(x+1) = x! = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 5 \cdot 10^{-5}$$

$a_1 = -0.57486\,46$, $a_4 = 0.42455\,49$,

$a_2 = 0.95123\,63$, $a_5 = -0.10106\,78$.

$a_3 = -0.69985\,88$,

*) Коэффициенты c_k взяты из таблиц [6.12]. Учтены исправления, сделанные Солзером.

6.1.36. $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\Gamma(x+1) = x! = 1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_8x^8 + \varepsilon(x),$$
$$|\varepsilon(x)| \leqslant 3 \cdot 10^{-7},$$

$b_1 = -0.57719\,1652$, $b_5 = -0.75670\,4078$,
$b_2 = 0.98820\,5891$, $b_6 = 0.48219\,9394$,
$b_3 = -0.89705\,6937$, $b_7 = -0.19352\,7818$,
$b_4 = 0.91820\,6857$, $b_8 = 0.03586\,8343$.

Формула Стирлинга

6.1.37. $$\Gamma(z) \sim e^{-z}z^{z-1/2}(2\pi)^{1/2}\left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \cdots\right]$$
$$(z \to \infty, \ |\arg z| < \pi).$$

6.1.38. $$x! = \sqrt{2\pi}\, x^{x+1/2} \exp\left(-x + \frac{\theta}{12x}\right) \quad (x > 0, \ 0 < \theta < 1).$$

Асимптотические формулы

6.1.39. $$\Gamma(az+b) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-az}(az)^{az+b-1/2} \quad (|\arg z| < \pi, \ a > 0).$$

6.1.40. $$\ln\Gamma(z) \sim \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)z^{2m-1}} \quad (z \to \infty, \ |\arg z| < \pi),$$

где B_{2m} — числа Бернулли (см. гл. 23).

6.1.41. $$\ln\Gamma(z) \sim \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \cdots \quad (z \to \infty, \ |\arg z| < \pi).$$

Остаточный член асимптотического разложения

6.1.42. Если $$R_n(z) = \ln\Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z + z - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \sum_{m=1}^{n} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)z^{2m-1}},$$

то $|R_n(z)| \leqslant \dfrac{|B_{2n+2}|\,K(z)}{(2n+1)(2n+2)|z|^{2n+1}}$, где $K(z)$—верхняя грань $|z^2/(u^2+z^2)|$ при $u \geqslant 0$.

Для z, действительного и положительного, R_n по абсолютной величине меньше первого отброшенного члена и имеет тот же знак.

6.1.43. $$\operatorname{Re}\ln\Gamma(iy) = \operatorname{Re}\ln\Gamma(-iy) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{y\operatorname{sh}\pi y}\right) \sim \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\pi y - \frac{1}{2}\ln y \quad (y \to +\infty).$$

6.1.44. $$\operatorname{Im}\ln\Gamma(iy) = \arg\Gamma(iy) = -\arg\Gamma(-iy) = -\operatorname{Im}\ln\Gamma(-iy) \sim y\ln y - y - \frac{1}{4}\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n-1)(2n)y^{2n-1}} \quad (y \to +\infty).$$

6.1.45. $$\lim_{|y|\to\infty} (2\pi)^{-1/2}|\Gamma(x+iy)|\, e^{\pi|y|/2}|y|^{1/2-x} = 1.$$

6.1.46. $$\lim_{n\to\infty} n^{b-a}\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} = 1.$$

6.1.47. $$z^{b-a}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} \sim 1 + \frac{(a-b)(a+b-1)}{2z} + \frac{1}{12}\binom{a-b}{2}\left(3(a+b-1)^2 - a + b - 1\right)\frac{1}{z^2} + \cdots,$$

$z \to \infty$ вдоль некоторой кривой, соединяющей $z = 0$ и $z = \infty$; при этом $z \neq -a, -a-1, \ldots$; $z \neq -b, -b-1, \ldots$

Разложение в непрерывную дробь

6.1.48. $$\ln\Gamma(z) + z - \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - \frac{1}{2}\ln(2\pi) = \frac{a_0}{z+}\,\frac{a_1}{z+}\,\frac{a_2}{z+}\,\frac{a_3}{z+}\,\frac{a_4}{z+}\,\frac{a_5}{z+\ldots} \quad (\operatorname{Re} z > 0),$$

$$a_0 = \frac{1}{12}, \ a_1 = \frac{1}{30}, \ a_2 = \frac{53}{210}, \ a_3 = \frac{195}{371},$$
$$a_4 = \frac{22\,999}{22\,737}, \ a_5 = \frac{29\,944\,523}{19\,733\,142},$$
$$a_6 = \frac{109\,535\,241\,009}{48\,264\,275\,462}.$$

Формула Валлиса *)

6.1.49. $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left(\begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}\right)^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\pi^{1/2}\Gamma(n+1)} \sim \frac{1}{\pi^{1/2}n^{1/2}}\left[1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} - \ldots\right] \quad (n \to \infty).$$

*) Иногда используется обозначение с двойным факториалом:

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n) = 2^n n!,$$
$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1) = \pi^{-1/2}2^n\,\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Некоторые определенные интегралы ($\operatorname{Re} z > 0$)

6.1.50. $\ln\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty \left[(z-1)\,e^{-t} - \frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right]\frac{dt}{t}$,

$$\ln\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + 2\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{e^{2\pi t}-1}\,dt.$$

6.2. БЕТА-ФУНКЦИЯ

6.2.1. $B(z,\ w) = \int\limits_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}\,dt = 2\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{2z-1}(\cos t)^{2w-1}\,dt \qquad (\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re} w > 0).$

6.2.2. $B(z,\ w) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = B(w,\ z).$

6.3. ПСИ-ФУНКЦИЯ (ДИГАММА-ФУНКЦИЯ) *)

6.3.1. $\psi(z) = \frac{d[\ln\Gamma(z)]}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$

Значения при целом аргументе

6.3.2. $\psi(1) = -\gamma,\ \psi(n) = -\gamma + \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^{-1} \quad (n \geqslant 2).$

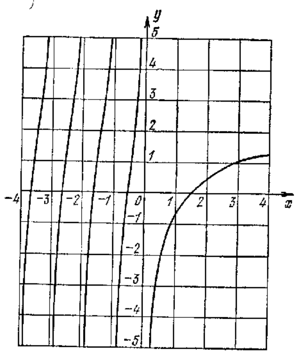


Рис. 6.2. Пси-функция
$y = \psi(x) = d\ln\Gamma(x)/dx.$

Значения при дробном аргументе

6.3.3. $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2 = -1.96351\ 00260\ 21423\ldots$

6.3.4. $\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2 + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) \quad (n \geqslant 1).$

Рекуррентные формулы

6.3.5. $\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$

6.3.6. $\psi(n+z) = \frac{1}{(n-1)+z} + \frac{1}{(n-2)+z} + \ldots + \frac{1}{2+z} + \frac{1}{1+z} + \psi(1+z).$

Формула симметрии

6.3.7. $\psi(1-z) = \psi(z) + \pi\operatorname{ctg}\pi z.$

Формула удвоения

6.3.8. $\psi(2z) = \frac{1}{2}\psi(z) + \frac{1}{2}\psi\left(z+\frac{1}{2}\right) + \ln 2.$

Пси-функция комплексного аргумента

6.3.9. $\psi(\bar z) = \overline{\psi(z)}.$

6.3.10. $\operatorname{Re}\psi(iy) = \operatorname{Re}\psi(-iy) = \operatorname{Re}\psi(1+iy) = \operatorname{Re}\psi(1-iy).$

*) Иногда употребляются обозначение $\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1)$ и аналогичные обозначения для полигамма-функций.

6.3.11. $\operatorname{Im}\psi(iy) = \frac{1}{2}y^{-1} + \frac{1}{2}\pi \operatorname{cth}\pi y.$

6.3.12. $\operatorname{Im}\psi\left(\frac{1}{2}+iy\right) = \frac{1}{2}\pi \operatorname{th}\pi y.$

6.3.13. $\operatorname{Im}\psi(1+iy) = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{2}\pi\operatorname{cth}\pi y = y\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+y^2)^{-1}.$

Разложения в степенной ряд

6.3.14. $\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\zeta(n)z^{n-1} \quad (|z|<1).$

6.3.15. $\psi(1+z) = \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}\pi\operatorname{ctg}\pi z - (1-z^2)^{-1} + 1 - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty}[\zeta(2n+1)-1]z^{2n} \quad (|z|<2).$

6.3.16. $\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(n+z)} \quad (z \neq -1, -2, -3, \ldots).$

6.3.17. $\operatorname{Re}\psi(1+iy) = 1 - \gamma - \frac{1}{1+y^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}[\zeta(2n+1)-1]y^{2n} \quad (|y|<2),$

$\operatorname{Re}\psi(1+iy) = -\gamma + y^2\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}(n^2+y^2)^{-1} \quad (-\infty<y<\infty).$

Асимптотические формулы

6.3.18. $\psi(z) \sim \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2nz^{2n}} = \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} - \frac{1}{252z^6} + \ldots \quad (z\to\infty,\ |\arg z|<\pi).$

6.3.19. $\operatorname{Re}\psi(1+iy) \sim \ln y + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{2ny^{2n}} = \ln y + \frac{1}{12y^2} + \frac{1}{120y^4} + \frac{1}{252y^6} + \ldots \quad (y\to\infty).$

Экстремумы $\Gamma(x)$ — нули $\psi(x)$ (см. [6.7])

$\Gamma'(x_n) = \psi(x_n) = 0$

n	x_n	$\Gamma(x_n)$	n	x_n	$\Gamma(x_n)$
0	+1.462	+0.886	4	−3.635	+0.245
1	−0.504	−3.545	5	−4.653	−0.053
2	−1.573	+2.302	6	−5.667	+0.009
3	−2.611	−0.888	7	−6.678	−0.001

$x_0 = 1.46163\ 21449\ 68362,$

$\Gamma(x_0) = 0.88560\ 31944\ 10889.$

6.3.20. $x_n = -n + (\ln n)^{-1} + o[(\ln n)^{-2}].$

Определенные интегралы

6.3.21. $\psi(z) = \int_0^{\infty}\left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right]dt \quad (\operatorname{Re} z > 0),$

$$\psi(z) = \int_0^{\infty}\left[e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^z}\right]\frac{dt}{t}$$

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - 2\int_0^{\infty}\frac{t\,dt}{(t^2+z^2)(e^{2\pi t}-1)} \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}\right).$$

6.3.22. $\psi(z) + \gamma = \int_0^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt = \int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}dt,$

$$\gamma = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{te^t}\right)dt = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+t} - e^{-t}\right)\frac{dt}{t}.$$

6.4. ПОЛИГАММА-ФУНКЦИИ *)

6.4.1. $\psi^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\psi(z) = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\ln\Gamma(z) = (-1)^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{t^ne^{-zt}}{1-e^{-t}}dt \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), (\operatorname{Re} z > 0),$

$\psi^{(n)}(z)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ является однозначной аналитической функцией на всей комплексной плоскости z, кроме точек $z = -m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, где она имеет полюсы порядка $n+1$.

*) ψ' называют тригамма-функцией; ψ'', $\psi^{(3)}$, $\psi^{(4)}$ — соответственно тетра-, пента- и гексагамма-функциями (см. сноску на стр. 84).

Значения при целом аргументе

6.4.2. $\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} n!\zeta(n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

6.4.3. $\psi^{(m)}(n+1) = (-1)^m m! \left[-\zeta(m+1) + 1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots + \frac{1}{n^{m+1}}\right]$.

Значения при дробном аргументе

6.4.4. $\psi^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+1} n! \, (2^{n+1} - 1) \, \zeta(n+1) \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

6.4.5. $\psi'\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi^2 - 4\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^{-2}$.

Рекуррентная формула

6.4.6. $\psi^{(n)}(z+1) = \psi^{(n)}(z) + (-1)^n n! \, z^{-n-1}$.

Формула симметрии

6.4.7. $\psi^{(n)}(1-z) + (-1)^{n+1}\psi^{(n)}(z) = (-1)^n \pi \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{ctg} \pi z$.

Формула умножения

6.4.8. $\psi^{(n)}(mz) = \delta \ln m + \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{k=0}^{m-1} \psi^{(n)}\left(z + \frac{k}{m}\right)$,

$$\delta = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 0, \\ 0 \text{ при } n > 0. \end{cases}$$

Разложения в ряд

6.4.9. $\psi^{(n)}(1+z) = (-1)^{n+1}\left[n!\,\zeta(n+1) - \frac{(n+1)!}{1!}\zeta(n+2)\,z + \frac{(n+2)!}{2!}\zeta(n+3)z^2 - \ldots\right] \quad (|z| < 1)$.

6.4.10. $\psi^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^{\infty}(z+k)^{-n-1} \quad (z \neq 0, -1, -2, \ldots)$.

Асимптотические формулы

6.4.11. $\psi^{(n)}(z) \sim (-1)^{n-1}\left[\frac{(n-1)!}{z^n} + \frac{n!}{2z^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}\frac{(2k+n-1)!}{(2k)!\,z^{2k+n}}\right] \quad (z \to \infty, \ |\arg z| < \pi)$.

6.4.12. $\psi'(z) \sim \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{30z^5} + \frac{1}{42z^7} - \frac{1}{30z^9} + \ldots \quad (z \to \infty, |\arg z| < \pi)$.

6.4.13. $\psi''(z) \sim -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{6z^6} - \frac{1}{6z^8} + \frac{3}{10z^{10}} - \frac{5}{6z^{12}} + \ldots \quad (z \to \infty, |\arg z| < \pi)$.

6.4.14. $\psi^{(3)}(z) \sim \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \frac{2}{z^5} - \frac{1}{z^7} + \frac{4}{3z^9} - \frac{3}{z^{11}} + \frac{10}{z^{13}} - \ldots \quad (z \to \infty, |\arg z| < \pi)$.

6.5. НЕПОЛНАЯ ГАММА-ФУНКЦИЯ

(см. также 26.4)

6.5.1. $P(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x e^{-t}t^{a-1}dt \quad (\operatorname{Re} a > 0)$.

6.5.2. $\gamma(a, x) = P(a, x)\,\Gamma(a) = \int_0^x e^{-t}t^{a-1}dt \quad (\operatorname{Re} a > 0)$.

6.5.3. $\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t}t^{a-1}dt$.

6.5.4. $\gamma^*(a, x) = x^{-a}P(a, x) = \frac{x^{-a}}{\Gamma(a)}\gamma(a, x)$, γ^* является однозначной аналитической функцией переменных a и x и не имеет особых точек в конечной части плоскости.

Интеграл вероятностей χ^2-распределения

6.5.5. $P(\chi^2 \mid \nu) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^{\chi^2} t^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}dt$.

6.5.6. $I(u, p) = \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_0^{u\sqrt{p+1}} e^{-t}t^p dt = P(p+1, \ u\sqrt{p+1})$

(неполная гамма-функция в форме Пирсона).

6.5.7. $C(x, a) = \int_x^{\infty} t^{a-1}\cos t \, dt \quad (\operatorname{Re} a < 1)$.

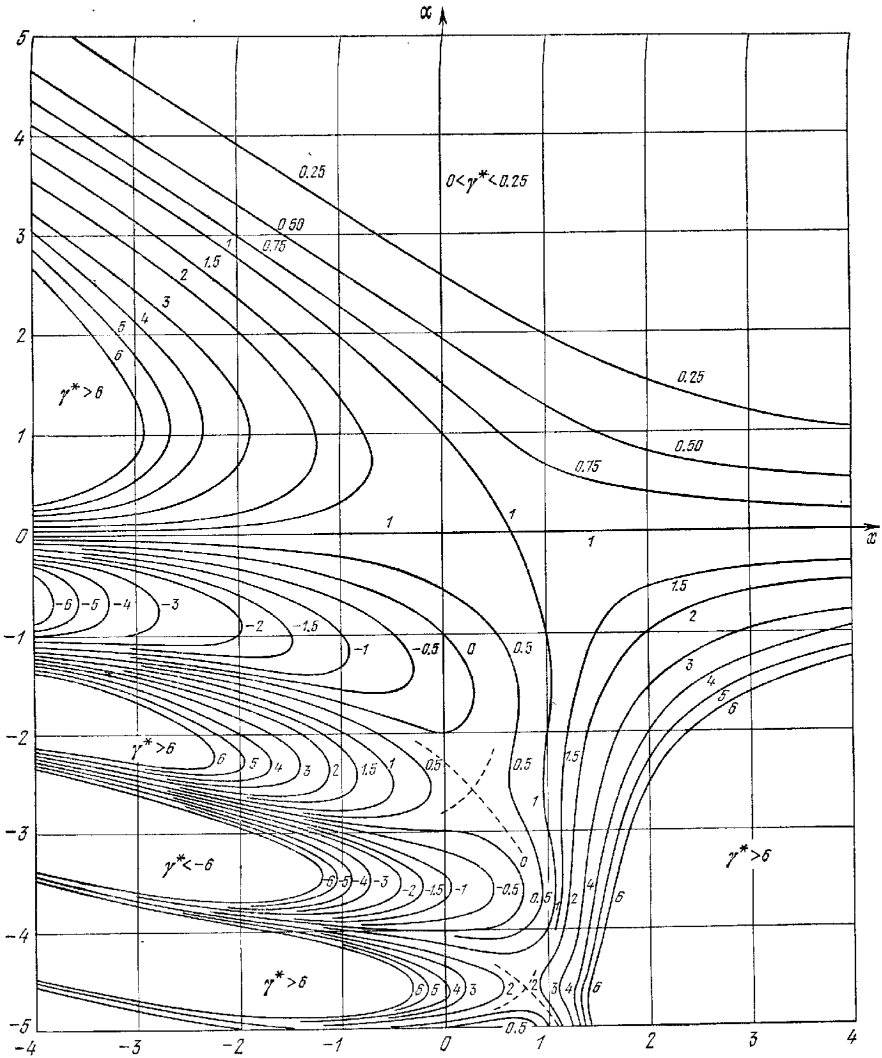


Рис. 6.3. Неполная гамма-функция

$$\gamma^*(a,\ x) = \frac{x^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\, dt.$$

6.5.8. $S(x, a) = \int_x^\infty t^{a-1} \sin t \, dt \quad (\operatorname{Re} a < 1).$

6.5.9. $E_n(x) = \int_1^\infty e^{-xt} t^{-n} dt = x^{n-1}\Gamma(1-n, x).$

6.5.10. $\alpha_n(x) = \int_1^\infty e^{-xt} t^n dt = x^{-n-1}\Gamma(1+n, x).$

6.5.11. $e_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}.$

Неполная гамма-функция как частный случай вырожденной гипергеометрической функции (см. гл. 13)

6.5.12. $\gamma(a, x) = a^{-1}x^a e^{-x} M(1, 1+a, x) =$

$= a^{-1}x^a M(a, 1+a, -x).$

Частные значения

6.5.13. $P(n, x) = 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{-x} =$

$= 1 - e_{n-1}(x)\, e^{-x}.$

Связь с распределением Пуассона см. в 26.4.

6.5.14. $\gamma^*(-n, x) = x^n.$

6.5.15. $\Gamma(0, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{-1} dt = E_1(x).$

6.5.16. $\gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) = 2\int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}\operatorname{erf} x.$

6.5.17. $\Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) = 2\int_x^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}\operatorname{erfc} x.$

6.5.18. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} x \gamma^*\left(\frac{1}{2}, -x^2\right) = \int_0^x e^{t^2} dt.$

6.5.19. $\Gamma(-n, x) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[E_1(x) - e^{-x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j j!}{x^{j+1}}\right].$

6.5.20. $\Gamma(a, ix) = e^{\frac{1}{2}\pi i a}\,[C(x, a) - iS(x, a)].$

Рекуррентные формулы

6.5.21. $P(a+1, x) = P(a, x) - \frac{x^a e^{-x}}{\Gamma(a+1)}.$

6.5.22. $\gamma(a+1, x) = a\gamma(a, x) - x^a e^{-x}.$

6.5.23. $\gamma^*(a-1, x) = x\gamma^*(a, x) + \frac{e^{-x}}{\Gamma(a)}.$

Производные и дифференциальные уравнения

6.5.24. $\left(\frac{\partial \gamma^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}dt}{t} - \ln x =$

$= -E_1(x) - \ln x.$

6.5.25. $\frac{\partial \gamma(a, x)}{\partial x} = -\frac{\partial \Gamma(a, x)}{\partial x} = x^{a-1}e^{-x}.$

6.5.26. $\frac{\partial^n}{\partial x^n}[x^{-a}\Gamma(a, x)] = (-1)^n x^{-a-n}\Gamma(a+n, x)$

$(n = 0, 1, 2, \ldots).$

6.5.27. $\frac{\partial^n}{\partial x^n}[e^x x^a \gamma^*(a, x)] = e^x x^{a-n}\gamma^*(a-n, x)$

$(n = 0, 1, 2, \ldots).$

6.5.28. $x\frac{\partial^2 \gamma^*}{\partial x^2} + (a+1+x)\frac{\partial \gamma^*}{\partial x} + a\gamma^* = 0.$

Разложения в ряд

6.5.29. $\gamma^*(a, z) = e^{-z}\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(a+n+1)} =$

$= \frac{1}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-z)^n}{(a+n)\, n!} \quad (|z| < \infty).$

6.5.30. $\gamma(a, x+y) - \gamma(a, x) =$

$= e^{-x}x^{a-1}\sum_{n=0}^\infty \frac{(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{x^n}[1 - e^{-y}e_n(y)]$

$(|y| < |x|).$

Разложение в непрерывную дробь

6.5.31. $\Gamma(a, x) = e^{-x}x^a\left(\frac{1}{x+}\,\frac{1-a}{1+}\,\frac{1}{x+}\,\frac{2-a}{1+}\,\frac{2}{x+}\ldots\right)$

$(x > 0, \ |a| < \infty).$

Асимптотические разложения

6.5.32. $\Gamma(a, z) \sim z^{a-1}e^{-z}\left[1 + \frac{a-1}{z} + \frac{(a-1)(a-2)}{z^2} + \ldots\right]$

$\left(z \to \infty, \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{2}\right).$

Пусть $R_n(a, z) = u_{n+1}(a, z) + \ldots$ — остаточный член этого ряда. Тогда, если a, z — действительные, для $n > a - 2$ имеем

$$|R_n(a, z)| \leqslant |u_{n+1}(a, z)|$$

и

$$\operatorname{sign} R_n(a, z) = \operatorname{sign} u_{n+1}(a, z).$$

6.5.33. $\gamma(a, z) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{a+n}}{(a+n)\, n!} \quad (a \to +\infty).$

6.5.34. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e_n(\alpha n)}{e^{\alpha n}} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1, \\ 1/2, & \alpha = 1, \\ 1, & 0 \leqslant \alpha < 1. \end{cases}$

6.5.35. $\Gamma(z+1, z) \sim e^{-z}z^z\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, z^{1/2} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2\pi}}{24}\frac{1}{z^{1/2}} + \ldots\right) \quad \left(z \to \infty,\ |\arg z| < \frac{\pi}{2}\right).$

Определенные интегралы

6.5.36. $\int\limits_0^\infty e^{-at}\,\Gamma(b, ct)dt = \frac{\Gamma(b)}{a}\left[1 - \frac{c^b}{(a+c)^b}\right]$ $(\mathrm{Re}\,(a+c) > 0,\ \mathrm{Re}\, b > -1).$

6.5.37. $\int\limits_0^\infty t^{a-1}\,\Gamma(b, t)\,dt = \frac{\Gamma(a+b)}{a}$ $(\mathrm{Re}\,(a+b) > 0,\ \mathrm{Re}\, a > 0).$

6.6. НЕПОЛНАЯ БЕТА-ФУНКЦИЯ

6.6.1. $B_x(a, b) = \int\limits_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$

6.6.2. $I_x(a, b) = B_x(a, b)/B\,(a, b).$

Статистические приложения см. в 26.5.

Симметрия

6.6.3. $I_x(a, b) = 1 - I_{1-x}(b, a).$

Связь с биномиальным разложением

6.6.4. $I_p(a, n-a+1) = \sum\limits_{j=a}^{n}\binom{n}{j} p^j(1-p)^{n-j}.$

Биномиальное распределение см. в 26.1.

Рекуррентные формулы

6.6.5. $I_x(a, b) = xI_x(a-1, b) + (1-x)\,I_x(a, b-1).$

6.6.6. $(a+b-ax)\,I_x(a, b) = a(1-x)\,I_x(a+1, b-1) + bI_x(a, b+1).$

6.6.7. $(a+b)\,I_x(a, b) = aI_x(a+1, b) + bI_x(a, b+1).$

Связь с гипергеометрической функцией

6.6.8. $B_x(a, b) = a^{-1}x^aF(a, 1-b; a+1; x)$

ПРИМЕРЫ

6.7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ И РАСШИРЕНИЕ ТАБЛИЦ

Пример 1. Вычислить $\Gamma(6.38)$ с 8S. Используя рекуррентное соотношение 6.1.16 и табл. 6.1, имеем

$$\Gamma(6.38) = [(5.38)\,(4.38)\,(3.38)\,(2.38)\,(1.38)]\,\Gamma(1.38) = 232.43671.$$

Пример 2. Вычислить $\ln\Gamma(56.38)$, используя табл. 6.4 и линейно интерполируя функцию f_2. Имеем

$$\ln\Gamma(56.38) = \left(56.38 - \frac{1}{2}\right)\ln(56.38) - (56.38) + f_2(56.38).$$

В рассматриваемой области ошибка линейной интерполяции функции f_2 меньше, чем 10^{-7}. Следовательно,

$$f_2(56.38) = 0.92041\,67 \text{ и } \ln\Gamma(56.38) = 169.85497\,42.$$

Прямая интерполяция в табл. 6.4 функции $\lg\Gamma(n)$ устраняет необходимость пользования логарифмами. Однако линейная интерполяция дает ошибку 0.002, поэтому $\lg\Gamma(n)$ получается с относительной погрешностью 10^{-5}.

Пример 3. Вычислить $\psi(6.38)$ с 8S. Используем рекуррентное соотношение 6.3.6 и табл. 6.1:

$$\psi(6.38) = \frac{1}{5.38} + \frac{1}{4.38} + \frac{1}{3.38} + \frac{1}{2.38} + \frac{1}{1.38} + \psi(1.38) = 1.77275\,59.$$

Пример 4. Вычислить $\psi(56.38)$. Используя табл. 6.3, имеем $\psi(56.38) = \ln 56.38 - f_3(56.38)$. В этой таблице ошибка линейной интерполяции функции f_3 в данной области меньше, чем $8\cdot 10^{-7}$. Следовательно,

$$f_3(56.38) = 0.00889\,53 \text{ и } \psi(56.38) = 4.023219.$$

Пример 5. Вычислить $\ln\Gamma(1-i)$. Из формулы симметрии 6.1.23 и табл. 6.7 получаем $\ln\Gamma(1-i) = \overline{\ln\Gamma(1+i)} = -0.6509 + 0.3016\,i.$

Пример 6. Вычислить $\ln\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$. Логарифмируя рекуррентное соотношение 6.1.15, имеем

$$\ln\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \ln\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right) - \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -0.23419 + 0.03467\,i - \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + i\,\mathrm{arctg}\,1\right) = 0.11239 - 0.75073i.$$

Логарифмы комплексных чисел находятся из 4.1.2.

Пример 7. Вычислить $\ln\Gamma(3+7i)$, используя формулу удвоения 6.1.18. Логарифмируя формулу 6.1.18, получаем

$$-\frac{1}{2}\ln 2\pi = -0.91894,$$

$$\left(\frac{5}{2}+7i\right)\ln 2 = 1.73287 + 4.85203\,i,$$

$$\ln\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i\right) = -3.31598 + 2.32553\,i,$$

$$\ln\Gamma\left(2+\frac{7}{2}i\right) = \underline{-2.66047 + 2.93869\,i},$$

$$\ln\Gamma(3+7i) = -5.16252 + 10.11625\,i.$$

Пример 8. Вычислить $\ln\Gamma(3+7i)$ с 5D, используя асимптотическую формулу 6.1.41. Имеем

$$\ln(3+7i) = 2.03022\,15 + 1.16590\,45i.$$

Следовательно,

$$(2.5+7i)\ln(3+7i) = -3.0857779 + 17.1263119\,i,$$

$$-(3+7i) = -3.0000000 - 7.0000000\,i,$$

$$\frac{1}{2}\ln(2\pi) = 0,9189385,$$

$$[12(3+7i)]^{-1} = 0.0043103 - 0.0100575\,i,$$

$$-[360(3+7i)^3]^{-1} = \underline{0.0000059 - 0.0000022\,i},$$

$$\ln\Gamma(3+7i) = -5.16252 + 10.11625\,i.$$

6.8. СУММИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИГАММА-ФУНКЦИЙ

Бесконечные ряды, общий член которых представляет собой рациональную функцию индекса, всегда могут быть сведены к конечным рядам от пси- и полигамма-функций. Проиллюстрируем метод преобразования рядов, выписав явно формулу в том случае, когда знаменатель содержит трехкратный корень.

Пусть общий член бесконечного ряда имеет вид

$$u_n = \frac{p(n)}{d_1(n)\,d_2(n)\,d_3(n)},$$

где

$$d_1(n) = (n+\alpha_1)(n+\alpha_2)\dots(n+\alpha_m),$$

$$d_2(n) = (n+\beta_1)^2(n+\beta_2)^2\dots(n+\beta_r)^2,$$

$$d_3(n) = (n+\gamma_1)^3(n+\gamma_2)^3\dots(n+\gamma_s)^3,$$

$p(n)$ — многочлен степени, не большей $m+2r+3s-2$. Константы α_i, β_i и γ_i различны между собой. Разложение u_n на элементарные дроби имеет следующий вид:

$$u_n = \sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(n+\alpha_k)} + \sum_{k=1}^{r}\frac{b_{1k}}{(n+\beta_k)} + \frac{b_{2k}}{(n+\beta_k)^2} + \sum_{k=1}^{s}\frac{c_{1k}}{(n+\gamma_k)} + \frac{c_{2k}}{(n+\gamma_k)^2} + \frac{c_{3k}}{(n+\gamma_k)^3},$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{r} b_{1k} + \sum_{k=1}^{s} c_{1k} = 0.$$

Теперь можно выразить $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ через константы, содержащиеся в полученном разложении, а именно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\sum_{j=1}^{m} a_j\psi(1+\alpha_j) - \sum_{j=1}^{r} b_{1j}\psi(1+\beta_j) + \sum_{j=1}^{r} b_{2j}\psi'(1+\beta_j) - \sum_{j=1}^{s} c_{1j}\psi(1+\gamma_j) + \sum_{j=1}^{s} c_{2j}\psi'(1+\gamma_j) - \sum_{j=1}^{s}\frac{c_{3j}}{2!}\psi''(1+\gamma_j).$$

Аналогично получаются разложения в случаях, когда знаменатель содержит корни более высокой кратности. Если знаменатель содержит простые или двукратные корни, соответствующие строки опускаются.

Пример 9. Найти

$$s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n+1)}.$$

Так как

$$\frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n+1)} = \frac{1/3}{n+1} - \frac{1}{n+1/2} + \frac{2/3}{n+1/4},$$

имеем $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 1/4$, $a_1 = 1/3$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2/3$. Таким образом,

$$s = -\frac{1}{3}\psi(2) + \psi\left(1\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}\psi\left(1\frac{1}{4}\right) = 0.047198.$$

Пример 10. Найти

$$s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(8n+1)^2}.$$

Так как

$$\frac{1}{n^2(8n+1)^2} = -\frac{16}{n} + \frac{16}{n+1/8} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1/8)^2},$$

имеем $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1/8$, $b_{11} = -16$, $b_{12} = 16$, $b_{21} = 1$, $b_{22} = 1$. Следовательно,

$$s = 16\psi(1) - 16\,\psi\left(1\frac{1}{8}\right) + \psi'(1) + \psi'\left(1\frac{1}{8}\right) = 0{,}013499.$$

Пример 11. Вычислить $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)(n^2+4)}$ (см. также 6.3.13). Имеем

$$\frac{1}{(n^2+1)(n^2+4)} = \frac{i}{6}\left(\frac{1}{n+i} - \frac{1}{n-i}\right) - \frac{i}{12}\left(\frac{1}{n+2i} - \frac{1}{n-2i}\right).$$

Отсюда $a_1 = i/6$, $a_2 = -i/6$, $a_3 = -i/12$, $a_4 = i/12$, $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -i$, $\alpha_3 = 2i$, $\alpha_4 = -2i$ и, следовательно,

$$s = -\frac{i}{6}[\psi(1+i) - \psi(1-i)] + \frac{i}{12}[\psi(1+2i) - \psi(1-2i)].$$

Учитывая 6.3.9, приводим это выражение к виду

$$s = \frac{1}{3}\,\mathrm{Im}\,\psi(1+i) - \frac{1}{6}\,\mathrm{Im}\,\psi(1+2i).$$

Из табл. 6.8 находим $s = 0.13876$.

Т а б л и ц а 6.1. Гамма-, дигамма- и тригамма-функции

x	$\Gamma(x)$	$\ln\Gamma(x)$	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	
1.000	1.00000 00000	0.00000 00000	-0.57721 56649	1.64493 40668	0.000
1.005	0.99713 85354	-0.00286 55666	-0.56902 09113	1.63299 41567	0.005
1.010	0.99432 58512	-0.00569 03079	-0.56088 54579	1.62121 35283	0.010
1.015	0.99156 12888	-0.00847 45187	-0.55280 85156	1.60958 91824	0.015
1.020	0.98884 42033	-0.01121 84893	-0.54478 93105	1.59811 81919	0.020
1.025	0.98617 39633	-0.01392 25067	-0.53682 70828	1.58679 76993	0.025
1.030	0.98354 99506	-0.01658 68539	-0.52892 10873	1.57562 49154	0.030
1.035	0.98097 15606	-0.01921 18101	-0.52107 05921	1.56459 71163	0.035
1.040	0.97843 82009	-0.02179 76511	-0.51327 48789	1.55371 16426	0.040
1.045	0.97594 92919	-0.02434 46490	-0.50553 32428	1.54296 58968	0.045
1.050	0.97350 42656	-0.02685 30725	-0.49784 49913	1.53235 73421	0.050
1.055	0.97110 25663	-0.02932 31868	-0.49020 94448	1.52188 35001	0.055
1.060	0.96874 36495	-0.03175 52537	-0.48262 59358	1.51154 19500	0.060
1.065	0.96642 69823	-0.03414 95318	-0.47509 38088	1.50133 03259	0.065
1.070	0.96415 20425	-0.03650 62763	-0.46761 24199	1.49124 63164	0.070
1.075	0.96191 83189	-0.03882 57395	-0.46018 11367	1.48128 76622	0.075
1.080	0.95972 53107	-0.04110 81702	-0.45279 93380	1.47145 21556	0.080
1.085	0.95757 25273	-0.04335 38143	-0.44546 64135	1.46173 76377	0.085
1.090	0.95545 94882	-0.04556 29148	-0.43818 17635	1.45214 19988	0.090
1.095	0.95338 57227	-0.04773 57114	-0.43094 47988	1.44266 31755	0.095
1.100	0.95135 07699	-0.04987 24413	-0.42375 49404	1.43329 91508	0.100
1.105	0.94935 41778	-0.05197 33384	-0.41661 16193	1.42404 79514	0.105
1.110	0.94739 55040	-0.05403 86341	-0.40951 42761	1.41490 76482	0.110
1.115	0.94547 43149	-0.05606 85568	-0.40246 23611	1.40587 63535	0.115
1.120	0.94359 01856	-0.05806 33325	-0.39545 53339	1.39695 22213	0.120
1.125	0.94174 26997	-0.06002 31841	-0.38849 26633	1.38813 34449	0.125
1.130	0.93993 14497	-0.06194 83322	-0.38157 38268	1.37941 82573	0.130
1.135	0.93815 60356	-0.06383 89946	-0.37469 83110	1.37080 49288	0.135
1.140	0.93641 60657	-0.06569 53867	-0.36786 56106	1.36229 17670	0.140
1.145	0.93471 11562	-0.06751 77212	-0.36107 52291	1.35387 71152	0.145
1.150	0.93304 09311	-0.06930 62087	-0.35432 66780	1.34555 93520	0.150
1.155	0.93140 50217	-0.07106 10569	-0.34761 94768	1.33733 68900	0.155
1.160	0.92980 30666	-0.07278 24716	-0.34095 31528	1.32920 81752	0.160
1.165	0.92823 47120	-0.07447 06558	-0.33432 72413	1.32117 16859	0.165
1.170	0.92669 96106	-0.07612 58106	-0.32774 12847	1.31322 59322	0.170
1.175	0.92519 74225	-0.07774 83345	-0.32119 48332	1.30536 94548	0.175
1.180	0.92372 78143	-0.07933 78240	-0.31468 74438	1.29760 08248	0.180
1.185	0.92229 04591	-0.08089 50733	-0.30821 86809	1.28991 86421	0.185
1.190	0.92088 50371	-0.08242 00745	-0.30178 81156	1.28232 15358	0.190
1.195	0.91951 12341	-0.08391 30174	-0.29539 53259	1.27480 81622	0.195
1.200	0.91816 87424	-0.08537 40900	-0.28903 98966	1.26737 72054	0.200
1.205	0.91685 72606	-0.08680 34780	-0.28272 14187	1.26002 73755	0.205
1.210	0.91557 64930	-0.08820 13651	-0.27643 94897	1.25275 74090	0.210
1.215	0.91432 61500	-0.08956 79331	-0.27019 37135	1.24556 60671	0.215
1.220	0.91310 59475	-0.09090 33619	-0.26398 37000	1.23845 21360	0.220
1.225	0.91191 56071	-0.09220 78291	-0.25780 90652	1.23141 44258	0.225
1.230	0.91075 48564	-0.09348 15108	-0.25166 94307	1.22445 17702	0.230
1.235	0.90962 34274	-0.09472 45811	-0.24556 44243	1.21756 30254	0.235
1.240	0.90852 10583	-0.09593 72122	-0.23949 36791	1.21074 70707	0.240
1.245	0.90744 74922	-0.09711 95744	-0.23345 68341	1.20400 28063	0.245
1.250	0.90640 24771	-0.09827 18364	-0.22745 35334	1.19732 91545	0.250
	$y!$	$\ln y!$	$\frac{d}{dy}\ln y!$	$\frac{d^2}{dy^2}\ln y!$	y
	$\left[{(-6)6 \atop 5}\right]$	$\left[{(-6)5 \atop 5}\right]$	$\left[{(-6)7 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 5}\right]$	

$\log_{10} e = 0.43429\ 44819$

Для $x > 2$ см. примеры 1–4.
Взято из [6.12].

Таблица 6.1. Гамма-, дигамма- и тригамма-функции

x	$\Gamma(x)$	$\ln\Gamma(x)$	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	
1.250	0.90640 24771	−0.09827 18364	−0.22745 35334	1.19732 91545	0.250
1.255	0.90538 57663	−0.09939 41651	−0.22148 34266	1.19072 50579	0.255
1.260	0.90439 71178	−0.10048 67254	−0.21554 61686	1.18418 94799	0.260
1.265	0.90343 62946	−0.10154 96809	−0.20964 14193	1.17772 14030	0.265
1.270	0.90250 30645	−0.10258 31932	−0.20376 88437	1.17131 98301	0.270
1.275	0.90159 71994	−0.10358 74224	−0.19792 81118	1.16498 37821	0.275
1.280	0.90071 84765	−0.10456 25269	−0.19211 88983	1.15871 22990	0.280
1.285	0.89986 66769	−0.10550 86634	−0.18634 08828	1.15250 44385	0.285
1.290	0.89904 15863	−0.10642 59872	−0.18059 37494	1.14635 92764	0.290
1.295	0.89824 29947	−0.10731 46519	−0.17487 71870	1.14027 59053	0.295
1.300	0.89747 06963	−0.10817 48095	−0.16919 08889	1.13425 34350	0.300
1.305	0.89672 44895	−0.10900 66107	−0.16353 45526	1.12829 09915	0.305
1.310	0.89600 41767	−0.10981 02045	−0.15790 78803	1.12238 77175	0.310
1.315	0.89530 95644	−0.11058 57384	−0.15231 05782	1.11654 27706	0.315
1.320	0.89464 04630	−0.11133 33587	−0.14674 23568	1.11075 53246	0.320
1.325	0.89399 66866	−0.11205 32100	−0.14120 29305	1.10502 45678	0.325
1.330	0.89337 80535	−0.11274 54356	−0.13569 20180	1.09934 97037	0.330
1.335	0.89278 43850	−0.11341 01772	−0.13020 93416	1.09372 99497	0.335
1.340	0.89221 55072	−0.11404 75756	−0.12475 46279	1.08816 45379	0.340
1.345	0.89167 12485	−0.11465 77697	−0.11932 76069	1.08265 27136	0.345
1.350	0.89115 14420	−0.11524 08974	−0.11392 80127	1.07719 37361	0.350
1.355	0.89065 59235	−0.11579 70951	−0.10855 55827	1.07178 68773	0.355
1.360	0.89018 45324	−0.11632 64980	−0.10321 00582	1.06643 14226	0.360
1.365	0.88973 71116	−0.11682 92401	−0.09789 11840	1.06112 66696	0.365
1.370	0.88931 35074	−0.11730 54539	−0.09259 87082	1.05587 19286	0.370
1.375	0.88891 35692	−0.11775 52707	−0.08733 23825	1.05066 65216	0.375
1.380	0.88853 71494	−0.11817 88209	−0.08209 19619	1.04550 97829	0.380
1.385	0.88818 41041	−0.11857 62331	−0.07687 72046	1.04040 10578	0.385
1.390	0.88785 42918	−0.11894 76353	−0.07168 78723	1.03533 97036	0.390
1.395	0.88754 75748	−0.11929 31538	−0.06652 37297	1.03032 50881	0.395
1.400	0.88726 38175	−0.11961 29142	−0.06138 45446	1.02535 65905	0.400
1.405	0.88700 28884	−0.11990 70405	−0.05627 00879	1.02043 36002	0.405
1.410	0.88676 46576	−0.12017 56559	−0.05118 01337	1.01555 55173	0.410
1.415	0.88654 89993	−0.12041 88823	−0.04611 44589	1.01072 17518	0.415
1.420	0.88635 57896	−0.12063 68406	−0.04107 28433	1.00593 17241	0.420
1.425	0.88618 49081	−0.12082 96505	−0.03605 50697	1.00118 48640	0.425
1.430	0.88603 62361	−0.12099 74307	−0.03106 09237	0.99648 06113	0.430
1.435	0.88590 96587	−0.12114 02987	−0.02609 01935	0.99181 84147	0.435
1.440	0.88580 50635	−0.12125 83713	−0.02114 26703	0.98719 77326	0.440
1.445	0.88572 23397	−0.12135 17638	−0.01621 81479	0.98261 80318	0.445
1.450	0.88566 13803	−0.12142 05907	−0.01131 64226	0.97807 87886	0.450
1.455	0.88562 20800	−0.12146 49657	−0.00643 72934	0.97357 94874	0.455
1.460	0.88560 43364	−0.12148 50010	−0.00158 05620	0.96911 96215	0.460
1.465	0.88560 80495	−0.12148 08083	+0.00325 39677	0.96469 86921	0.465
1.470	0.88563 31217	−0.12145 24980	0.00806 64890	0.96031 62091	0.470
1.475	0.88567 94575	−0.12140 01797	0.01285 71930	0.95597 16896	0.475
1.480	0.88574 69646	−0.12132 39621	0.01762 62684	0.95166 46592	0.480
1.485	0.88583 55520	−0.12122 39528	0.02237 39013	0.94739 46509	0.485
1.490	0.88594 51316	−0.12110 02585	0.02710 02758	0.94316 12052	0.490
1.495	0.88607 56174	−0.12095 29852	0.03180 55736	0.93896 38700	0.495
1.500	0.88622 69255*	−0.12078 22376	0.03648 99740	0.93480 22005	0.500
	$y!$	$\ln y!$	$\frac{d}{dy}\ln y!$	$\frac{d^2}{dy^2}\ln y!$	y
	$\begin{bmatrix}(-6)4\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)4\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)4\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)9\\5\end{bmatrix}$	

$\log_{10} e = 0.43429\ 44819$

Таблица 6.1. Гамма-, дигамма- и тригамма-функции

x	$\Gamma(x)$	$\ln\Gamma(x)$	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	
1.500	0.88622 69255	−0.12078 22376	0.03648 99740	0.93480 22005	0.500
1.505	0.88639 89744	−0.12058 81200	0.04115 36543	0.93067 57588	0.505
1.510	0.88659 16850	−0.12037 07353	0.04579 67896	0.92658 41142	0.510
1.515	0.88680 49797	−0.12013 01860	0.05041 95527	0.92252 68425	0.515
1.520	0.88703 87833	−0.11986 65735	0.05502 21146	0.91850 35265	0.520
1.525	0.88729 30231	−0.11957 99983	0.05960 46439	0.91451 37552	0.525
1.530	0.88756 76278	−0.11927 05601	0.06416 73074	0.91055 71245	0.530
1.535	0.88786 25287	−0.11893 83580	0.06871 02697	0.90663 32361	0.535
1.540	0.88817 76586	−0.11858 34900	0.07323 36936	0.90274 16984	0.540
1.545	0.88851 29527	−0.11820 60534	0.07773 77400	0.89888 21253	0.545
1.550	0.88886 83478	−0.11780 61446	0.08222 25675	0.89505 41371	0.550
1.555	0.88924 37830	−0.11738 38595	0.08668 83334	0.89125 73596	0.555
1.560	0.88963 91990	−0.11693 92928	0.09113 51925	0.88749 14249	0.560
1.565	0.89005 45387	−0.11647 25388	0.09556 32984	0.88375 59699	0.565
1.570	0.89048 97463	−0.11598 36908	0.09997 28024	0.88005 06378	0.570
1.575	0.89094 47686	−0.11547 28415	0.10436 38544	0.87637 50766	0.575
1.580	0.89141 95537	−0.11494 00828	0.10873 66023	0.87272 89402	0.580
1.585	0.89191 40515	−0.11438 55058	0.11309 11923	0.86911 18871	0.585
1.590	0.89242 82141	−0.11380 92009	0.11742 77690	0.86552 35815	0.590
1.595	0.89296 19949	−0.11321 12579	0.12174 64754	0.86196 36921	0.595
1.600	0.89351 53493	−0.11259 17657	0.12604 74528	0.85843 18931	0.600
1.605	0.89408 82342	−0.11195 08127	0.13033 08407	0.85492 78630	0.605
1.610	0.89468 06085	−0.11128 84864	0.13459 67772	0.85145 12856	0.610
1.615	0.89529 24327	−0.11060 48737	0.13884 53988	0.84800 18488	0.615
1.620	0.89592 36685	−0.10990 00610	0.14307 68404	0.84457 92455	0.620
1.625	0.89657 42800	−0.10917 41338	0.14729 12354	0.84118 31730	0.625
1.630	0.89724 42326	−0.10842 71769	0.15148 87158	0.83781 33330	0.630
1.635	0.89793 34930	−0.10765 92746	0.15566 94120	0.83446 94315	0.635
1.640	0.89864 20302	−0.10687 05105	0.15983 34529	0.83115 11790	0.640
1.645	0.89936 98138	−0.10606 09676	0.16398 09660	0.82785 82897	0.645
1.650	0.90011 68163	−0.10523 07282	0.16811 20776	0.82459 04826	0.650
1.655	0.90088 30104	−0.10437 98739	0.17222 69122	0.82134 74802	0.655
1.660	0.90166 83712	−0.10350 84860	0.17632 55933	0.81812 90092	0.660
1.665	0.90247 28748	−0.10261 66447	0.18040 82427	0.81493 48001	0.665
1.670	0.90329 64995	−0.10170 44301	0.18447 49813	0.81176 45875	0.670
1.675	0.90413 92243	−0.10077 19212	0.18852 59282	0.80861 81094	0.675
1.680	0.90500 10302	−0.09981 91969	0.19256 12015	0.80549 51079	0.680
1.685	0.90588 18996	−0.09884 63351	0.19658 09180	0.80239 53282	0.685
1.690	0.90678 18160	−0.09785 34135	0.20058 51931	0.79931 85198	0.690
1.695	0.90770 07650	−0.09684 05088	0.20457 41410	0.79626 44350	0.695
1.700	0.90863 87329	−0.09580 76974	0.20854 78749	0.79323 28302	0.700
1.705	0.90959 57079	−0.09475 50552	0.21250 65064	0.79022 34645	0.705
1.710	0.91057 16796	−0.09368 26573	0.21645 01462	0.78723 61012	0.710
1.715	0.91156 66390	−0.09259 05785	0.22037 89037	0.78427 05060	0.715
1.720	0.91258 05779	−0.09147 88929	0.22429 28871	0.78132 64486	0.720
1.725	0.91361 34904	−0.09034 76741	0.22819 22037	0.77840 37011	0.725
1.730	0.91466 53712	−0.08919 69951	0.23207 69593	0.77550 20396	0.730
1.735	0.91573 62171	−0.08802 69286	0.23594 72589	0.77262 12424	0.735
1.740	0.91682 60252	−0.08683 75466	0.23980 32061	0.76976 10915	0.740
1.745	0.91793 47950	−0.08562 89203	0.24364 49038	0.76692 13714	0.745
1.750	0.91906 25268	−0.08440 11210	0.24747 24535	0.76410 18699	0.750
	$y!$	$\ln y!$	$\frac{d}{dy}\ln y!$	$\frac{d^2}{dy^2}\ln y!$	y
	$\begin{bmatrix}(-6)3\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)3\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)3\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)4\\5\end{bmatrix}$	

$\log_{10} e = 0.43429\ 44819$

Таблица 6.1. Гамма-, дигамма- и тригамма-функции

x	$\Gamma(x)$	$\ln \Gamma(x)$	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	
1.750	0.91906 25268	-0.08440 11210	0.24747 24535	0.76410 18699	0.750
1.755	0.92020 92224	-0.08315 42192	0.25128 59559	0.76130 23773	0.755
1.760	0.92137 48846	-0.08188 82847	0.25508 55103	0.75852 26870	0.760
1.765	0.92255 95178	-0.08060 33871	0.25887 12154	0.75576 25950	0.765
1.770	0.92376 31277	-0.07929 95955	0.26264 31686	0.75302 19003	0.770
1.775	0.92498 57211	-0.07797 69782	0.26640 14664	0.75030 04040	0.775
1.780	0.92622 73062	-0.07663 56034	0.27014 62043	0.74759 79107	0.780
1.785	0.92748 78926	-0.07527 55386	0.27387 74769	0.74491 42268	0.785
1.790	0.92876 74904	-0.07389 68509	0.27759 53776	0.74224 91617	0.790
1.795	0.93006 61123	-0.07249 96070	0.28129 99992	0.73960 25271	0.795
1.800	0.93138 37710	-0.07108 38729	0.28499 14333	0.73697 41375	0.800
1.805	0.93272 04811	-0.06964 97145	0.28866 97707	0.73436 38093	0.805
1.810	0.93407 62585	-0.06819 71969	0.29233 51012	0.73177 13620	0.810
1.815	0.93545 11198	-0.06672 63850	0.29598 75138	0.72919 66166	0.815
1.820	0.93684 50832	-0.06523 73431	0.29962 70966	0.72663 93972	0.820
1.825	0.93825 81682	-0.06373 01353	0.30325 39367	0.72409 95297	0.825
1.830	0.93969 03951	-0.06220 48248	0.30686 81205	0.72157 68426	0.830
1.835	0.94114 17859	-0.06066 14750	0.31046 97335	0.71907 11662	0.835
1.840	0.94261 23634	-0.05910 01483	0.31405 88602	0.71658 23333	0.840
1.845	0.94410 21519	-0.05752 09071	0.31763 55846	0.71411 01788	0.845
1.850	0.94561 11764	-0.05592 38130	0.32119 99895	0.71165 45396	0.850
1.855	0.94713 94637	-0.05430 89276	0.32475 21572	0.70921 52546	0.855
1.860	0.94868 70417	-0.05267 63117	0.32829 21691	0.70679 21650	0.860
1.865	0.95025 39389	-0.05102 60260	0.33182 01056	0.70438 51138	0.865
1.870	0.95184 01855	-0.04935 81307	0.33533 60467	0.70199 39461	0.870
1.875	0.95344 58127	-0.04767 26854	0.33884 00713	0.69961 85089	0.875
1.880	0.95507 08530	-0.04596 97497	0.34233 22577	0.69725 86512	0.880
1.885	0.95671 53398	-0.04424 93824	0.34581 26835	0.69491 42236	0.885
1.890	0.95837 93077	-0.04251 16473	0.34928 14255	0.69258 50790	0.890
1.895	0.96006 27927	-0.04075 65875	0.35273 85596	0.69027 10717	0.895
1.900	0.96176 58319	-0.03898 42759	0.35618 41612	0.68797 20582	0.900
1.905	0.96348 84632	-0.03719 47650	0.35961 83049	0.68568 78965	0.905
1.910	0.96523 07261	-0.03538 81118	0.36304 10646	0.68341 84465	0.910
1.915	0.96699 26608	-0.03356 43732	0.36645 25136	0.68116 35696	0.915
1.920	0.96877 43090	-0.03172 36054	0.36985 27244	0.67892 31293	0.920
1.925	0.97057 57134	-0.02986 58646	0.37324 17688	0.67669 69903	0.925
1.930	0.97239 69178	-0.02799 12062	0.37661 97179	0.67448 50194	0.930
1.935	0.97423 79672	-0.02609 96858	0.37998 66424	0.67228 70846	0.935
1.940	0.97609 89075	-0.02419 13581	0.38334 26119	0.67010 30559	0.940
1.945	0.97797 97861	-0.02226 62778	0.38668 76959	0.66793 28044	0.945
1.950	0.97988 06513	-0.02032 44991	0.39002 19627	0.66577 62034	0.950
1.955	0.98180 15524	-0.01836 60761	0.39334 54805	0.66363 31270	0.955
1.960	0.98374 25404	-0.01639 10621	0.39665 83163	0.66150 34514	0.960
1.965	0.98570 36664	-0.01439 95106	0.39996 05371	0.65938 70538	0.965
1.970	0.98768 49838	-0.01239 14744	0.40325 22088	0.65728 38134	0.970
1.975	0.98968 65462	-0.01036 70060	0.40653 33970	0.65519 36104	0.975
1.980	0.99170 84087	-0.00832 61578	0.40980 41664	0.65311 63266	0.980
1.985	0.99375 06274	-0.00626 89816	0.41306 45816	0.65105 18450	0.985
1.990	0.99581 32598	-0.00419 55291	0.41631 47060	0.64900 00505	0.990
1.995	0.99789 63643	-0.00210 58516	0.41955 46030	0.64696 08286	0.995
2.000	1.00000 00000	0.00000 00000	0.42278 43351	0.64493 40668	1.000
	$y!$	$\ln y!$	$\frac{d}{dy} \ln y!$	$\frac{d^2}{dy^2} \ln y!$	y
	$\begin{bmatrix}(-6)2\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)2\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)2\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)2\\4\end{bmatrix}$	

$\log_{10} e = 0.43429\ 44819$

Таблица 6.2. Тетрагамма- и пентагамма-функции

x	$\psi''(x)$	$\psi^{(3)}(x)$		x	$\psi''(x)$	$\psi^{(3)}(x)$	
1.00	-2.40411 38063	6.49393 94023	0.00	1.50	-0.82879 66442	1.40909 10340	0.50
1.01	-2.34039 86771	6.25106 18729	0.01	1.51	-0.81487 76121	1.37489 70527	0.51
1.02	-2.27905 42052	6.01969 49890	0.02	1.52	-0.80129 51399	1.34177 21104	0.52
1.03	-2.21996 85963	5.79918 38573	0.03	1.53	-0.78803 87419	1.30967 56244	0.53
1.04	-2.16303 63855	5.58891 68399	0.04	1.54	-0.77509 83287	1.27856 88154	0.54
1.05	-2.10815 80219	5.38832 23132	0.05	1.55	-0.76246 41904	1.24841 46160	0.55
1.06	-2.05523 94833	5.19686 56970	0.06	1.56	-0.75012 69793	1.21917 75841	0.56
1.07	-2.00419 19194	5.01404 67303	0.07	1.57	-0.73807 76946	1.19082 38216	0.57
1.08	-1.95493 13213	4.83939 69702	0.08	1.58	-0.72630 76669	1.16332 08979	0.58
1.09	-1.90737 82154	4.67247 74947	0.09	1.59	-0.71480 85441	1.13663 77770	0.59
1.10	-1.86145 73783	4.51287 67903	0.10	1.60	-0.70357 22779	1.11074 47490	0.60
1.11	-1.81709 75731	4.36020 88083	0.11	1.61	-0.69259 11105	1.08561 33658	0.61
1.12	-1.77423 13035	4.21411 11755	0.12	1.62	-0.68185 75627	1.06121 63792	0.62
1.13	-1.73279 45852	4.07424 35447	0.13	1.63	-0.67136 44220	1.03752 76835	0.63
1.14	-1.69272 67342	3.94028 60737	0.14	1.64	-0.66110 47316	1.01452 22608	0.64
1.15	-1.65397 01677	3.81193 80220	0.15	1.65	-0.65107 17793	0.99217 61290	0.65
1.16	-1.61647 02206	3.68891 64540	0.16	1.66	-0.64125 90881	0.97046 62927	0.66
1.17	-1.58017 49731	3.57095 50416	0.17	1.67	-0.63166 04061	0.94937 06973	0.67
1.18	-1.54503 50903	3.45780 29554	0.18	1.68	-0.62226 96973	0.92886 81843	0.68
1.19	-1.51100 36723	3.34922 38402	0.19	1.69	-0.61308 11332	0.90893 84502	0.69
1.20	-1.47803 61144	3.24499 48647	0.20	1.70	-0.60408 90841	0.88956 20066	0.70
1.21	-1.44608 99765	3.14490 58422	0.21	1.71	-0.59528 81112	0.87072 01433	0.71
1.22	-1.41512 48602	3.04875 84139	0.22	1.72	-0.58667 29593	0.85239 48922	0.72
1.23	-1.38510 22950	2.95636 52925	0.23	1.73	-0.57823 85490	0.83456 89940	0.73
1.24	-1.35598 56308	2.86754 95589	0.24	1.74	-0.56997 99702	0.81722 58660	0.74
1.25	-1.32773 99375	2.78214 40092	0.25	1.75	-0.56189 24756	0.80034 95719	0.75
1.26	-1.30033 19112	2.69999 05478	0.26	1.76	-0.55397 14738	0.78392 47929	0.76
1.27	-1.27372 97857	2.62093 96227	0.27	1.77	-0.54621 25238	0.76793 68005	0.77
1.28	-1.24790 32496	2.54484 97000	0.28	1.78	-0.53861 13291	0.75237 14300	0.78
1.29	-1.22282 33691	2.47158 67746	0.29	1.79	-0.53116 37320	0.73721 50564	0.79
1.30	-1.19846 25147	2.40102 39143	0.30	1.80	-0.52386 57084	0.72245 45705	0.80
1.31	-1.17479 42923	2.33304 08348	0.31	1.81	-0.51671 33630	0.70807 73565	0.81
1.32	-1.15179 34794	2.26752 35032	0.32	1.82	-0.50970 29242	0.69407 12710	0.82
1.33	-1.12943 59642	2.20436 37678	0.33	1.83	-0.50283 07396	0.68042 46226	0.83
1.34	-1.10769 86881	2.14345 90132	0.34	1.84	-0.49609 32712	0.66712 61527	0.84
1.35	-1.08655 95925	2.08471 18367	0.35	1.85	-0.48948 70921	0.65416 50169	0.85
1.36	-1.06599 75682	2.02802 97472	0.36	1.86	-0.48300 88813	0.64153 07680	0.86
1.37	-1.04599 24073	1.97332 48830	0.37	1.87	-0.47665 54207	0.62921 33389	0.87
1.38	-1.02652 47586	1.92051 37473	0.38	1.88	-0.47042 35909	0.61720 30270	0.88
1.39	-1.00757 60850	1.86951 69616	0.39	1.89	-0.46431 03677	0.60549 04793	0.89
1.40	-0.98912 86236	1.82025 90339	0.40	1.90	-0.45831 28188	0.59406 66772	0.90
1.41	-0.97116 53479	1.77266 81419	0.41	1.91	-0.45242 81007	0.58292 29238	0.91
1.42	-0.95366 99322	1.72667 59295	0.42	1.92	-0.44665 34549	0.57205 08299	0.92
1.43	-0.93662 67177	1.68221 73161	0.43	1.93	-0.44098 62055	0.56144 23020	0.93
1.44	-0.92002 06808	1.63923 03178	0.44	1.94	-0.43542 37563	0.55108 95304	0.94
1.45	-0.90383 74031	1.59765 58792	0.45	1.95	-0.42996 35876	0.54098 49774	0.95
1.46	-0.88806 30426	1.55743 77157	0.46	1.96	-0.42460 32537	0.53112 13668	0.96
1.47	-0.87268 43070	1.51852 21649	0.47	1.97	-0.41934 03805	0.52149 16733	0.97
1.48	-0.85768 84281	1.48085 80478	0.48	1.98	-0.41417 26631	0.51208 91127	0.98
1.49	-0.84306 31376	1.44439 65370	0.49	1.99	-0.40909 78630	0.50290 71324	0.99
1.50	-0.82879 66442	1.40909 10340	0.50	2.00	-0.40411 38063	0.49393 94023	1.00
	$\frac{d^3}{dy^3}\ln y!$	$\frac{d^4}{dy^4}\ln y!$	y		$\frac{d^3}{dy^3}\ln y!$	$\frac{d^4}{dy^4}\ln y!$	y
	$\left[\begin{matrix}(-4)3\\7\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-3)1\\7\end{matrix}\right]$			$\left[\begin{matrix}(-5)4\\6\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)1\\6\end{matrix}\right]$	

Взято из [6.12].

Таблица 6.3. Гамма- и дигамма-функции для целых и полуцелых значений аргумента

n	$\Gamma(n)$	$1/\Gamma(n)$	$\Gamma(n+\frac{1}{2})$	$\psi(n)$	$f_1(n)$	$f_3(n)$
1	(0)1.00000 00000	(0)1.00000 000	(−1)8.86226 93	−0.57721 56649	1.08443 755	0.57721 566
2	(0)1.00000 00000	(0)1.00000 000	(0)1.32934 04	+0.42278 43351	1.04220 712	0.27036 285
3	(0)2.00000 00000	(− 1)5.00000 000	(0)3.32335 10	0.92278 43351	1.02806 452	0.17582 795
4	(0)6.00000 00000	(− 1)1.66666 667	(1)1.16317 28	1.25611 76684	1.02100 830	0.13017 669
5	(1)2.40000 00000	(− 2)4.16666 667	(1)5.23427 78	1.50611 76684	1.01678 399	0.10332 024
6	(2)1.20000 00000	(− 3)8.33333 333	(2)2.87885 28	1.70611 76684	1.01397 285	0.08564 180
7	(2)7.20000 00000	(− 3)1.38888 889	(3)1.87125 43	1.87278 43351	1.01196 776	0.07312 581
8	(3)5.04000 00000	(− 4)1.98412 698	(4)1.40344 07	2.01564 14780	1.01046 565	0.06380 006
9	(4)4.03200 00000	(− 5)2.48015 873	(5)1.19292 46	2.14064 14780	1.00929 843	0.05658 310
10	(5)3.62880 00000	(− 6)2.75573 192	(6)1.13327 84	2.25175 25891	1.00836 536	0.05083 250
11	(6)3.62880 00000	(− 7)2.75573 192	(7)1.18994 23	2.35175 25891	1.00760 243	0.04614 268
12	(7)3.99168 00000	(− 8)2.50521 084	(8)1.36843 37	2.44266 16800	1.00696 700	0.04224 497
13	(8)4.79001 60000	(− 9)2.08767 570	(9)1.71054 21	2.52599 50133	1.00642 958	0.03895 434
14	(9)6.22702 08000	(−10)1.60590 438	(10)2.30923 18	2.60291 80902	1.00596 911	0.03613 924
15	(10)8.71782 91200	(−11)1.14707 456	(11)3.34838 61	2.67434 66617	1.00557 019	0.03370 354
16	(12)1.30767 43680	(−13)7.64716 373	(12)5.18999 85	2.74101 33283	1.00522 124	0.03157 539
17	(13)2.09227 89888	(−14)4.77947 733	(13)8.56349 74	2.80351 33283	1.00491 343	0.02970 002
18	(14)3.55687 42810	(−15)2.81145 725	(15)1.49861 21	2.86233 68577	1.00463 988	0.02803 490
19	(15)6.40237 37057	(−16)1.56192 070	(16)2.77243 23	2.91789 24133	1.00439 519	0.02654 657
20	(17)1.21645 10041	(−18)8.22063 525	(17)5.40624 30	2.97052 39922	1.00417 501	0.02520 828
21	(18)2.43290 20082	(−19)4.11031 762	(19)1.10827 98	3.02052 39922	1.00397 584	0.02399 845
22	(19)5.10909 42172	(−20)1.95729 411	(20)2.38280 16	3.06814 30399	1.00379 480	0.02289 941
23	(21)1.12400 07278	(−22)8.89679 139	(21)5.36130 36	3.11359 75853	1.00362 953	0.02189 663
24	(22)2.58520 16739	(−23)3.86817 017	(23)1.25990 63	3.15707 58462	1.00347 806	0.02097 798
25	(23)6.20448 40173	(−24)1.61173 757	(24)3.08677 05	3.19874 25129	1.00333 872	0.02013 331
26	(25)1.55112 10043	(−26)6.44695 029	(25)7.87126 49	3.23874 25129	1.00321 011	0.01935 403
27	(26)4.03291 46113	(−27)2.47959 626	(27)2.08588 52	3.27720 40513	1.00309 105	0.01863 281
28	(28)1.08888 69450	(−29)9.18368 986	(28)5.73618 43	3.31424 10884	1.00298 050	0.01796 342
29	(29)3.04888 34461	(−30)3.27988 924	(30)1.63481 25	3.34995 53741	1.00287 758	0.01734 046
30	(30)8.84176 19937	(−31)1.13099 629	(31)4.82269 69	3.38443 81327	1.00278 154	0.01675 925
31	(32)2.65252 85981	(−33)3.76998 763	(33)1.47092 26	3.41777 14660	1.00269 170	0.01621 574
32	(33)8.22283 86542	(−34)1.21612 504	(34)4.63340 61	3.45002 95305	1.00260 748	0.01570 637
33	(35)2.63130 83693	(−36)3.80039 076	(36)1.50585 70	3.48127 95305	1.00252 837	0.01522 803
34	(36)8.68331 76188	(−37)1.15163 356	(37)5.04462 09	3.51158 25608	1.00245 392	0.01477 796
35	(38)2.95232 79904	(−39)3.38715 754	(39)1.74039 42	3.54099 43255	1.00238 372	0.01435 374
36	(40)1.03331 47966	(−41)9.67759 296	(40)6.17839 94	3.56956 57541	1.00231 744	0.01395 318
37	(41)3.71993 32679	(−42)2.68822 027	(42)2.25511 58	3.59734 35319	1.00225 474	0.01357 438
38	(43)1.37637 53091	(−44)7.26546 018	(43)8.45668 42	3.62437 05589	1.00219 534	0.01321 560
39	(44)5.23022 61747	(−45)1.91196 320	(45)3.25582 34	3.65068 63484	1.00213 899	0.01287 530
40	(46)2.03978 82081	(−47)4.90246 976	(47)1.28605 02	3.67632 73740	1.00208 546	0.01255 208
41	(47)8.15915 28325	(−48)1.22561 744	(48)5.20850 35	3.70132 73740	1.00203 455	0.01224 469
42	(49)3.34525 26613	(−50)2.98931 083	(50)2.16152 90	3.72571 76179	1.00198 606	0.01195 200
43	(51)1.40500 61178	(−52)7.11740 673	(51)9.18649 81	3.74952 71417	1.00193 983	0.01167 297
44	(52)6.04152 63063	(−53)1.65521 087	(53)3.99612 67	3.77278 29557	1.00189 570	0.01140 668
45	(54)2.65827 15748	(−55)3.76184 288	(55)1.77827 64	3.79551 02284	1.00185 354	0.01115 226
46	(56)1.19622 22087	(−57)8.35965 084	(56)8.09115 74	3.81773 24506	1.00181 321	0.01090 895
47	(57)5.50262 21598	(−58)1.81731 540	(58)3.76238 82	3.83947 15811	1.00177 460	0.01067 602
48	(59)2.58623 24151	(−60)3.86662 851	(60)1.78713 44	3.86074 81768	1.00173 759	0.01045 283
49	(61)1.24139 15593	(−62)8.05547 607	(61)8.66760 18	3.88158 15102	1.00170 210	0.01023 879
50	(62)6.08281 86403	(−63)1.64397 471	(63)4.29046 29	3.90198 96734	1.00166 803	0.01003 333
51	(64)3.04140 93202	(−65)3.28794 942	(65)2.16668 38	3.92198 96734	1.00163 530	0.00983 596
	$(n-1)!$	$1/(n-1)!$	$(n-\frac{1}{2})!$	$\frac{d}{dn}\ln(n-1)!$		

$n! = (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} f_1(n)$ $\quad \Gamma(n) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} f_1(n)$ $\quad \psi(n) = \ln n - f_3(n)$ $\quad (2\pi)^{\frac{1}{2}} = 2.50662\ 82746\ 81001$

Значения $\psi(n)$ взяты из [6.12]

Таблица 6.3. Гамма- и дигамма-функции для целых и полуцелых значений аргумента

n	$\Gamma(n)$	$1/\Gamma(n)$	$\Gamma(n+\frac{1}{2})$	$\psi(n)$	$f_1(n)$	$f_3(n)$
51	(64)3.04140 93202	(−65)3.28794 942	(65)2.16668 38	3.92198 96734	1.00163 530	0.00983 596
52	(66)1.55111 87533	(−67)6.44695 964	(67)1.11584 21	3.94159 75166	1.00160 383	0.00964 620
53	(67)8.06581 75171	(−68)1.23979 993	(68)5.85817 12	3.96082 82858	1.00157 355	0.00946 363
54	(69)4.27488 32841	(−70)2.33924 515	(70)3.13412 16	3.97969 62103	1.00154 438	0.00928 784
55	(71)2.30843 69734	(−72)4.33193 547	(72)1.70809 63	3.99821 47288	1.00151 628	0.00911 846
56	(73)1.26964 03354	(−74)7.87624 631	(73)9.47993 44	4.01639 65470	1.00148 919	0.00895 514
57	(74)7.10998 58780	(−75)1.40647 255	(75)5.35616 29	4.03425 36899	1.00146 304	0.00879 758
58	(76)4.05269 19505	(−77)2.46749 571	(77)3.07979 37	4.05179 75495	1.00143 780	0.00864 546
59	(78)2.35056 13313	(−79)4.25430 295	(79)1.80167 93	4.06903 89288	1.00141 341	0.00849 852
60	(80)1.38683 11855	(−81)7.21068 296	(81)1.07199 92	4.08598 80814	1.00138 984	0.00835 648
61	(81)8.32098 71127	(−82)1.20178 049	(82)6.48559 51	4.10265 47481	1.00136 704	0.00821 912
62	(83)5.07580 21388	(−84)1.97013 196	(84)3.98864 10	4.11904 81907	1.00134 498	0.00808 619
63	(85)3.14699 73260	(−86)3.17763 219	(86)2.49290 06	4.13517 72229	1.00132 362	0.00795 750
64	(87)1.98260 83154	(−88)5.04386 062	(88)1.58299 19	4.15105 02388	1.00130 292	0.00783 284
65	(89)1.26886 93219	(−90)7.88103 221	(90)1.02102 98	4.16667 52388	1.00128 286	0.00771 203
66	(90)8.24765 05921	(−91)1.21246 649	(91)6.68774 50	4.18205 98542	1.00126 341	0.00759 489
67	(92)5.44344 93908	(−93)1.83707 044	(93)4.44735 04	4.19721 13693	1.00124 455	0.00748 125
68	(94)3.64711 10918	(−95)2.74189 619	(95)3.00196 15	4.21213 67425	1.00122 623	0.00737 096
69	(96)2.48003 55424	(−97)4.03220 028	(97)2.05634 36	4.22684 26248	1.00120 845	0.00726 388
70	(98)1.71122 45243	(−99)5.84376 852	(99)1.42915 88	4.24133 53785	1.00119 118	0.00715 986
71	(100)1.19785 71670	(−101)8.34824 074	(101)1.00755 70	4.25562 10927	1.00117 439	0.00705 878
72	(101)8.50478 58857	(−102)1.17580 856	(102)7.20403 24	4.26970 55998	1.00115 807	0.00696 052
73	(103)6.12344 58377	(−104)1.63306 744	(104)5.22292 35	4.28359 44887	1.00114 220	0.00686 495
74	(105)4.47011 54615	(−106)2.23707 868	(106)3.83884 87	4.29729 31188	1.00112 675	0.00677 197
75	(107)3.30788 54415	(−108)3.02307 930	(108)2.85994 23	4.31080 66323	1.00111 172	0.00668 148
76	(109)2.48091 40811	(−110)4.03077 240	(110)2.15925 64	4.32413 99657	1.00109 709	0.00659 337
77	(111)1.88549 47017	(−112)5.30364 789	(112)1.65183 12	4.33729 78604	1.00108 283	0.00650 756
78	(113)1.45183 09203	(−114)6.88785 441	(114)1.28016 92	4.35028 48734	1.00106 894	0.00642 395
79	(115)1.13242 81178	(−116)8.83058 257	(116)1.00493 28	4.36310 53862	1.00105 540	0.00634 247
80	(116)8.94618 21308	(−117)1.11779 526	(117)7.98921 57	4.37576 36140	1.00104 220	0.00626 302
81	(118)7.15694 57046	(−119)1.39724 408	(119)6.43131 87	4.38826 36140	1.00102 933	0.00618 554
82	(120)5.79712 60207	(−121)1.72499 269	(121)5.24152 47	4.40060 92931	1.00101 677	0.00610 995
83	(122)4.75364 33370	(−123)2.10364 962	(123)4.32425 79	4.41280 44150	1.00100 452	0.00603 619
84	(124)3.94552 39697	(−125)2.53451 761	(125)3.61075 53	4.42485 26078	1.00099 255	0.00596 419
85	(126)3.31424 01346	(−127)3.01728 287	(127)3.05108 83	4.43675 73697	1.00098 087	0.00589 389
86	(128)2.81710 41144	(−129)3.54974 456	(129)2.60868 05	4.44852 20756	1.00096 946	0.00582 522
87	(130)2.42270 95384	(−131)4.12760 995	(131)2.25650 86	4.46014 99825	1.00095 831	0.00575 814
88	(132)2.10775 72984	(−133)4.74437 926	(133)1.97444 50	4.47164 42354	1.00094 741	0.00569 258
89	(134)1.85482 64226	(−135)5.39134 006	(135)1.74738 38	4.48300 78718	1.00093 676	0.00562 850
90	(136)1.65079 55161	(−137)6.05768 546	(137)1.56390 85	4.49424 38268	1.00092 635	0.00556 584
91	(138)1.48571 59645	(−139)6.73076 163	(139)1.41533 72	4.50535 49379	1.00091 617	0.00550 457
92	(140)1.35200 15277	(−141)7.39644 134	(141)1.29503 36	4.51634 39489	1.00090 620	0.00544 463
93	(142)1.24384 14055	(−143)8.03961 016	(143)1.19790 60	4.52721 35142	1.00089 646	0.00538 598
94	(144)1.15677 25071	(−145)8.64474 211	(145)1.12004 22	4.53796 62023	1.00088 691	0.00532 858
95	(146)1.08736 61567	(−147)9.19653 415	(147)1.05843 98	4.54860 45002	1.00087 757	0.00527 239
96	(148)1.03299 78488	(−149)9.68056 227	(149)1.01081 00	4.55913 08160	1.00086 843	0.00521 738
97	(149)9.91677 93487	(−150)1.00839 190	(150)9.75431 69	4.56954 74827	1.00085 947	0.00516 350
98	(151)9.61927 59682	(−152)1.03957 928	(152)9.51045 90	4.57985 67610	1.00085 070	0.00511 072
99	(153)9.42689 04489	(−154)1.06079 519	(154)9.36780 21	4.59006 08426	1.00084 210	0.00505 901
100	(155)9.33262 15444	(−156)1.07151 029	(156)9.32096 31	4.60016 18527	1.00083 368	0.00500 833
101	(157)9.33262 15444	(−158)1.07151 029	(158)9.36756 79	4.61016 18527	1.00082 542	0.00495 866
	$(n-1)!$	$1/(n-1)!$	$(n-\frac{1}{2})!$	$\frac{d}{dn}\ln(n-1)!$	$\left[{(-7)2 \atop 3}\right]$	$\left[{(-6)1 \atop 4}\right]$

$n!=(2\pi)^{\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}f_1(n)$ $\Gamma(n)=(2\pi)^{\frac{1}{2}}n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}f_1(n)$ $\psi(n)=\ln n-f_3(n)$ $(2\pi)^{\frac{1}{2}}=2.50662\ 82746\ 31001$

Таблица 6.4. Логарифмы гамма-функции

n	$\log_{10}\Gamma(n)$	$\log_{10}\Gamma(n+\frac{1}{3})$	$\log_{10}\Gamma(n+\frac{1}{2})$	$\log_{10}\Gamma(n+\frac{2}{3})$	$f_2(n)$
1	0.00000 000	−0.04915 851	−0.05245 506	0.04443 477	1.00000 000
2	0.00000 000	+0.07578 023	+0.12363 620	+0.17741 398	0.96027 923
3	0.30103 000	0.44375 702	0.52157 621	0.60338 271	0.94661 646
4	0.77815 125	0.96663 576	1.06564 43	1.16765 41	0.93972 921
5	1.38021 12	1.60345 79	1.71885 68	1.83666 09	0.93558 323
6	2.07918 12	2.33045 66	2.45921 95	2.58998 86	0.93281 466
7	2.85733 25	3.13208 89	3.27213 28	3.41389 73	0.93083 524
8	3.70243 05	3.99739 04	4.14719 41	4.29850 39	0.92934 980
9	4.60552 05	4.91820 91	5.07661 30	5.23635 60	0.92819 400
10	5.55976 30	5.88824 59	6.05433 66	6.22163 27	0.92726 910
11	6.55976 30	6.90248 63	7.07552 59	7.24966 15	0.92651 221
12	7.60115 57	7.95684 40	8.13622 37	8.31660 83	0.92588 137
13	8.68033 70	9.04792 45	9.23313 38	9.41927 06	0.92534 753
14	9.79428 03	10.17286 3	10.36346 8	10.55493 3	0.92488 990
15	10.94040 8	11.32921 0	11.52483 6	11.72126 5	0.92449 327
16	12.116500	12.514847	12.715167	12.916241	0.92414 619
17	13.320620	13.727922	13.932651	14.138090	0.92383 993
18	14.551069	14.966804	15.175689	15.385245	0.92356 769
19	15.806341	16.230045	16.442861	16.656311	0.92332 409
20	17.085095	17.516352	17.732896	17.950042	0.92310 485
21	18.386125	18.824561	19.044649	19.265313	0.92290 649
22	19.708344	20.153619	20.377088	20.601105	0.92272 615
23	21.050767	21.502573	21.729270	21.956492	0.92256 149
24	22.412494	22.870550	23.100338	23.330629	0.92241 055
25	23.792706	24.256751	24.489504	24.722740	0.92227 169
26	25.190646	25.660444	25.896045	26.132109	0.92214 350
27	26.605619	27.080949	27.319290	27.558078	0.92202 481
28	28.036983	28.517642	28.758623	29.000035	0.92191 460
29	29.484141	29.969940	30.213468	30.457412	0.92181 198
30	30.946539	31.437301	31.683290	31.929681	0.92171 621
31	32.423660	32.919221	33.167590	33.416347	0.92162 661
32	33.915022	34.415228	34.665900	34.916950	0.92154 262
33	35.420172	35.924878	36.177784	36.431055	0.92146 371
34	36.938686	37.447757	37.702829	37.958255	0.92138 944
35	38.470165	38.983473	39.240648	39.498167	0.92131 942
36	40.014233	40.531658	40.790876	41.050429	0.92125 329
37	41.570535	42.091963	42.353169	42.614701	0.92119 073
38	43.138737	43.664060	43.927200	44.190658	0.92113 146
39	44.718520	45.247636	45.512661	45.777995	0.92107 524
40	46.309585	46.842397	47.109258	47.376420	0.92102 182
41	47.911645	48.448061	48.716713	48.985659	0.92097 101
42	49.524429	50.064362	50.334761	50.605448	0.92092 262
43	51.147678	51.691044	51.963150	52.235536	0.92087 648
44	52.781147	53.327866	53.601639	53.875686	0.92083 244
45	54.424599	54.974597	55.249999	55.525670	0.92079 035
46	56.077812	56.631014	56.908011	57.185269	0.92075 010
47	57.740570	58.296908	58.575464	58.854276	0.92071 156
48	59.412668	59.972075	60.252157	60.532491	0.92067 462
49	61.093909	61.656322	61.937899	62.219723	0.92063 919
50	62.784105	63.349462	63.632504	63.915788	0.92060 518
51	64.483075	65.051318	65.335796	65.620510	0.92057 250
	$\log_{10}(n-1)!$	$\log_{10}(n-\frac{2}{3})!$	$\log_{10}(n-\frac{1}{2})!$	$\log_{10}(n-\frac{1}{3})!$	

$$\ln \Gamma(n)=\ln (n-1)!=(n-\tfrac{1}{2})\ln n-n+f_2(n) \qquad \ln 10=2.30258\ 509299$$

Значения $\lg\Gamma(n)$ взяты из [6.18].

Таблица 6.4. Логарифмы гамма-функции

n	$\log_{10}\Gamma(n)$	$\log_{10}\Gamma(n+\frac{1}{3})$	$\log_{10}\Gamma(n+\frac{1}{2})$	$\log_{10}\Gamma(n+\frac{2}{3})$	$f_2(n)$
51	64.483075	65.051318	65.335796	65.620510	0.92057 250
52	66.190645	66.761717	67.047603	67.333720	0.92054 108
53	67.906648	68.480496	68.767762	69.055256	0.92051 084
54	69.630924	70.207494	70.496116	70.784961	0.92048 173
55	71.363318	71.942561	72.232512	72.522683	0.92045 367
56	73.103681	73.685548	73.976805	74.268279	0.92042 661
57	74.851869	75.436313	75.728854	76.021606	0.92040 051
58	76.607744	77.194720	77.488522	77.782531	0.92037 530
59	78.371172	78.960637	79.255677	79.550922	0.92035 095
60	80.142024	80.733936	81.030194	81.326654	0.92032 741
61	81.920175	82.514493	82.811950	83.109604	0.92030 464
62	83.705505	84.302190	84.600825	84.899655	0.92028 261
63	85.497896	86.096910	86.396705	86.696691	0.92026 127
64	87.297237	87.898542	88.199479	88.500604	0.92024 061
65	89.103417	89.706978	90.009038	90.311284	0.92022 057
66	90.916330	91.522113	91.825280	92.128629	0.92020 115
67	92.735874	93.343845	93.648101	93.952538	0.92018 231
68	94.561949	95.172075	95.477405	95.782913	0.92016 401
69	96.394458	97.006708	97.313096	97.619659	0.92014 625
70	98.233307	98.847650	99.155080	99.462684	0.92012 900
71	100.07841	100.69481	101.00327	101.31190	0.92011 223
72	101.92966	102.54810	102.85758	103.16722	0.92009 593
73	103.78700	104.40744	104.71791	105.02855	0.92008 008
74	105.65032	106.27274	106.58420	106.89582	0.92006 465
75	107.51955	108.14393	108.45636	108.76895	0.92004 964
76	109.39461	110.02091	110.33430	110.64785	0.92003 502
77	111.27543	111.90363	112.21797	112.53246	0.92002 078
78	113.16192	113.79200	114.10727	114.42269	0.92000 690
79	115.05401	115.68594	116.00214	116.31848	0.91999 338
80	116.95164	117.58540	117.90250	118.21976	0.91998 019
81	118.85473	119.49029	119.80830	120.12646	0.91996 733
82	120.76321	121.40056	121.71946	122.03850	0.91995 479
83	122.67703	123.31614	123.63591	123.95583	0.91994 254
84	124.59610	125.23696	125.55760	125.87838	0.91993 059
85	126.52038	127.16296	127.48445	127.80610	0.91991 892
86	128.44980	129.09407	129.41642	129.73891	0.91990 752
87	130.38430	131.03025	131.35344	131.67676	0.91989 638
88	132.32382	132.97143	133.29545	133.61959	0.91988 550
89	134.26830	134.91756	135.24239	135.56735	0.91987 486
90	136.21769	136.86857	137.19421	137.51999	0.91986 446
91	138.17194	138.82442	139.15086	139.47743	0.91985 428
92	140.13098	140.78505	141.11228	141.43964	0.91984 433
93	142.09477	142.75041	143.07842	143.40657	0.91983 459
94	144.06325	144.72044	145.04923	145.37815	0.91982 505
95	146.03638	146.69511	147.02467	147.35435	0.91981 572
96	148.01410	148.67435	149.00467	149.33511	0.91980 659
97	149.99637	150.65813	150.98920	151.32039	0.91979 764
98	151.98314	152.64639	152.97820	153.31013	0.91978 887
99	153.97437	154.63909	154.97164	155.30430	0.91978 028
100	155.97000	156.63619	156.96946	157.30285	0.91977 186
101	157.97000	158.63763	158.97163	159.30574	0.91976 361
	$\log_{10}(n-1)!$	$\log_{10}(n-\frac{2}{3})!$	$\log_{10}(n-\frac{1}{2})!$	$\log_{10}(n-\frac{1}{3})!$	$\left[\begin{matrix}(-7)2\\3\end{matrix}\right]$

$\ln\Gamma(n)=\ln(n-1)!=(n-\frac{1}{2})\ln n-n+f_2(n)$ $\qquad \ln 10=2.30258\ 509299$

Таблица 6.5. **Вспомогательные функции для гамма-и дигамма-функций**

x^{-1}	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$\langle x\rangle$
0.015	1.00125 077	0.92018 852	0.00751 875	67
0.014	1.00116 735	0.92010 519	0.00701 633	71
0.013	1.00108 391	0.92002 186	0.00651 408	77
0.012	1.00100 050	0.91993 853	0.00601 200	83
0.011	1.00091 708	0.91985 520	0.00551 008	91
0.010	1.00083 368	0.91977 186	0.00500 833	100
0.009	1.00075 028	0.91968 853	0.00450 675	111
0.008	1.00066 689	0.91960 520	0.00400 533	125
0.007	1.00058 350	0.91952 187	0.00350 408	143
0.006	1.00050 012	0.91943 853	0.00300 300	167
0.005	1.00041 675	0.91935 520	0.00250 208	200
0.004	1.00033 339	0.91927 187	0.00200 133	250
0.003	1.00025 003	0.91918 853	0.00150 075	333
0.002	1.00016 668	0.91910 520	0.00100 033	500
0.001	1.00008 334	0.91902 187	0.00050 008	1000
0.000	1.00000 000	0.91893 853	0.00000 000	∞
	$\left[\begin{matrix}(-8)1\\2\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-8)1\\2\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-8)2\\3\end{matrix}\right]$	

$$x!=(2\pi)^{\frac{1}{2}}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}f_1(x)$$

$$\Gamma(x)=(2\pi)^{\frac{1}{2}}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}f_1(x)$$

$$\ln\Gamma(x)=\ln(x-1)!=(x-\tfrac{1}{2})\ln x-x+f_2(x)$$

$$\psi(x)=\ln x-f_3(x)$$

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}=2.50662\ 82746\ 31001$$

Таблица 6.6. **Факториалы больших чисел**

n	$n!$	n	$n!$
100	(157) 9.3326 21544 39441 52682	600	(1408) 1.2655 72316 22543 07425
200	(374) 7.8865 78673 64790 50355	700	(1689) 2.4220 40124 75027 21799
300	(614) 3.0605 75122 16440 63604	800	(1976) 7.7105 30113 35386 00414
400	(868) 6.4034 52284 66238 95262	900	(2269) 6.7526 80220 96458 41584
500	(1134) 1.2201 36825 99111 00687	1000	(2567) 4.0238 72600 77093 77354
	$\Gamma(n+1)$		$\Gamma(n+1)$

Взято из [6.10].

$\langle x\rangle$ — целое число, ближайшее к x.

Таблица 6.7. Гамма-функция комплексного аргумента

$x = 1.0$

y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$	y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$
0.0	0.00000 00000 00	0.00000 00000 00	5.0	− 6.13032 41445 53	3.81589 85746 15
0.1	− 0.00819 77805 65	− 0.05732 29404 17	5.1	− 6.27750 24635 84	3.97816 38691 88
0.2	− 0.03247 62923 18	− 0.11230 22226 44	5.2	− 6.42487 30533 35	4.14237 74050 86
0.3	− 0.07194 62509 00	− 0.16282 06721 68	5.3	− 6.57242 85885 29	4.30850 21885 83
0.4	− 0.12528 93748 21	− 0.20715 58263 16	5.4	− 6.72016 21547 03	4.47650 25956 68
0.5	− 0.19094 54991 87	− 0.24405 82989 05	5.5	− 6.86806 72180 48	4.64634 42978 70
0.6	− 0.26729 00682 14	− 0.27274 38104 91	5.6	− 7.01613 75979 76	4.81799 41933 05
0.7	− 0.35276 86908 60	− 0.29282 63511 87	5.7	− 7.16436 74421 06	4.99142 03424 89
0.8	− 0.44597 87835 49	− 0.30422 56029 76	5.8	− 7.31275 12034 30	5.16659 19085 37
0.9	− 0.54570 51286 05	− 0.30707 43756 42	5.9	− 7.46128 36194 29	5.34347 91013 53
1.0	− 0.65092 31993 02	− 0.30164 03204 68	6.0	− 7.60995 96929 51	5.52205 31255 15
1.1	− 0.76078 39588 41	− 0.28826 66142 39	6.1	− 7.75877 46746 55	5.70228 61315 35
1.2	− 0.87459 04638 95	− 0.26733 05805 81	6.2	− 7.90772 40468 98	5.88415 11702 39
1.3	− 0.99177 27669 59	− 0.23921 67844 65	6.3	− 8.05680 35089 04	6.06762 21500 13
1.4	− 1.11186 45664 26	− 0.20430 07241 49	6.4	− 8.20600 89631 00	6.25267 37967 05
1.5	− 1.23448 30515 47	− 0.16293 97694 80	6.5	− 8.35533 65025 11	6.43928 16159 76
1.6	− 1.35931 22484 65	− 0.11546 87935 89	6.6	− 8.50478 23991 25	6.62742 18579 12
1.7	− 1.48608 96127 57	− 0.06219 86983 29	6.7	− 8.65434 30931 23	6.81707 14837 44
1.8	− 1.61459 53960 00	− 0.00341 66314 77	6.8	− 8.80401 51829 10	7.00820 81345 02
1.9	− 1.74464 42761 74	+ 0.06061 28742 95	6.9	− 8.95379 54158 79	7.20081 01014 93
2.0	− 1.87607 87864 31	0.12964 63163 10	7.0	− 9.10368 06798 32	7.39485 62984 36
2.1	− 2.00876 41504 71	0.20345 94738 33	7.1	− 9.25366 79950 15	7.59032 62351 84
2.2	− 2.14258 42092 96	0.28184 56584 26	7.2	− 9.40375 45067 08	7.78719 99928 77
2.3	− 2.27743 81922 04	0.36461 40489 50	7.3	− 9.55393 74783 21	7.98545 82004 68
2.4	− 2.41323 81411 84	0.45158 81524 41	7.4	− 9.70421 42849 72	8.18508 20125 03
2.5	− 2.54990 68424 95	0.54260 44058 52	7.5	− 9.85458 24074 86	8.38605 30880 89
2.6	− 2.68737 61537 50	0.63751 09190 46	7.6	−10.00503 94267 90	8.58835 35709 62
2.7	− 2.82558 56411 91	0.73616 63516 79	7.7	−10.15558 30186 86	8.79196 60705 87
2.8	− 2.96448 14617 89	0.83843 89130 96	7.8	−10.30621 09489 48	8.99687 36442 29
2.9	− 3.10401 54399 01	0.94420 54730 39	7.9	−10.45692 10687 39	9.20305 97799 25
3.0	− 3.24414 42995 90	1.05335 07710 69	8.0	−10.60771 13103 15	9.41050 83803 12
3.1	− 3.38482 90223 77	1.16576 67132 86	8.1	−10.75857 96829 95	9.61920 37472 42
3.2	− 3.52603 43067 09	1.28135 17459 32	8.2	−10.90952 42693 78	9.82913 05671 62
3.3	− 3.66772 81104 88	1.40001 02965 76	8.3	−11.06054 32217 92	10.04027 38971 80
3.4	− 3.80988 12618 23	1.52165 22746 73	8.4	−11.21163 47589 48	10.25261 91518 09
3.5	− 3.95246 71261 89	1.64619 26242 69	8.5	−11.36279 71628 04	10.46615 20903 24
3.6	− 4.09546 13204 51	1.77355 09225 91	8.6	−11.51402 87756 02	10.68085 88047 12
3.7	− 4.23884 14660 71	1.90365 10190 19	8.7	−11.66532 79970 81	10.89672 57081 77
3.8	− 4.38258 69752 28	2.03642 07096 93	8.8	−11.81669 32818 48	11.11373 95241 57
3.9	− 4.52667 88647 16	2.17179 14436 05	8.9	−11.96812 31369 01	11.33188 72758 53
4.0	− 4.67109 95934 09	2.30969 80565 73	9.0	−12.11961 61192 81	11.55115 62762 02
4.1	− 4.81583 29197 96	2.45007 85299 47	9.1	−12.27117 08338 67	11.77153 41183 09
4.2	− 4.96086 37766 87	2.59287 37713 19	9.2	−12.42278 59312 81	11.99300 86662 85
4.3	− 5.10617 81606 63	2.73802 74148 20	9.3	−12.57446 01059 08	12.21556 80464 79
4.4	− 5.25176 30342 30	2.88548 56389 27	9.4	−12.72619 20940 29	12.43920 06390 90
4.5	− 5.39760 62389 84	3.03519 69999 22	9.5	−12.87798 06720 44	12.66389 50701 28
4.6	− 5.54369 64183 04	3.18711 22793 89	9.6	−13.02982 46547 89	12.88964 02037 08
4.7	− 5.69002 29483 73	3.34118 43443 27	9.7	−13.18172 28939 51	13.11642 51346 66
4.8	− 5.83657 58764 54	3.49736 80186 15	9.8	−13.33367 42765 47	13.34423 91814 77
4.9	− 5.98334 58655 32	3.65561 99647 12	9.9	−13.48567 77234 95	13.57307 18794 55
5.0	− 6.13032 41445 53	3.81589 85746 15	10.0	−13.63773 21882 47	13.80291 29742 30

Линейная интерполяция дает около 3 знаков, восьмиточечная интерполяция — около 8 знаков. Для z, находящегося вне области таблицы, см. примеры 5 — 8.

Таблица 6.7. Гамма-функция комплексного аргумента

$x=1.1$

y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$	y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$
0.0	− 0.04987 24412 60	0.00000 00000 00	5.0	− 5.96893 91493 52	3.96198 63258 60
0.1	− 0.05702 02290 38	− 0.04206 65443 76	5.1	− 6.11415 43840 05	4.12446 68364 90
0.2	− 0.07824 35801 68	− 0.08230 97383 98	5.2	− 6.25959 93585 61	4.28888 73284 80
0.3	− 0.11291 43470 17	− 0.11905 06275 18	5.3	− 6.40526 53566 40	4.45521 12743 47
0.4	− 0.16008 21257 99	− 0.15086 79240 09	5.4	− 6.55114 41480 20	4.62340 34819 04
0.5	− 0.21858 96764 09	− 0.17666 11398 43	5.5	− 6.69722 79531 89	4.79343 00232 04
0.6	− 0.28718 99839 43	− 0.19566 16788 64	5.6	− 6.84350 94110 69	4.96525 81683 67
0.7	− 0.36464 38731 53	− 0.20740 35526 60	5.7	− 6.98998 15495 70	5.13885 63238 91
0.8	− 0.44978 83131 87	− 0.21167 10325 55	5.8	− 7.13663 77586 96	5.31419 39750 77
0.9	− 0.54157 54093 11	− 0.20843 91333 00	5.9	− 7.28347 17659 19	5.49124 16322 40
1.0	− 0.63908 78153 48	− 0.19781 78257 67	6.0	− 7.43047 76136 25	5.66997 07803 94
1.1	− 0.74153 80620 74	− 0.18000 55175 74	6.1	− 7.57764 96383 95	5.85035 38321 46
1.2	− 0.84825 85646 26	− 0.15525 33222 12	6.2	− 7.72498 24519 72	6.03236 40835 50
1.3	− 0.95868 73364 97	− 0.12383 93047 38	6.3	− 7.87247 09237 38	6.21597 56726 90
1.4	− 1.07235 26519 67	− 0.08605 08957 00	6.4	− 8.02011 01645 61	6.40116 35407 92
1.5	− 1.18885 84815 22	− 0.04217 34907 11	6.5	− 8.16789 55118 88	6.58790 33956 67
1.6	− 1.30787 15575 95	+ 0.00751 65191 79	6.6	− 8.31582 25159 69	6.77617 16773 32
1.7	− 1.42911 03402 04	0.06275 56777 30	6.7	− 8.46388 69271 17	6.96594 55256 30
1.8	− 1.55233 58336 11	0.12329 53847 15	6.8	− 8.61208 46838 95	7.15720 27497 24
1.9	− 1.67734 40572 49	0.18890 25358 69	6.9	− 8.76041 19021 72	7.34992 17993 20
2.0	− 1.80395 99248 63	0.25935 93780 23	7.0	− 8.90886 48649 60	7.54408 17375 09
2.1	− 1.93203 22878 13	0.33446 29085 79	7.1	− 9.05744 00129 63	7.73966 22151 13
2.2	− 2.06142 99239 46	0.41402 40321 50	7.2	− 9.20613 39357 92	7.93664 34464 25
2.3	− 2.19203 82866 29	0.49786 66085 82	7.3	− 9.35494 33637 73	8.13500 61862 70
2.4	− 2.32375 68617 01	0.58582 64745 04	7.4	− 9.50386 51603 25	8.33473 17082 71
2.5	− 2.45649 70097 26	0.67775 04868 09	7.5	− 9.65289 63148 29	8.53580 17842 76
2.6	− 2.59018 01959 43	0.77349 56148 91	7.6	− 9.80203 39359 83	8.73819 86648 33
2.7	− 2.72473 65306 67	0.87292 80949 66	7.7	− 9.95127 52455 81	8.94190 50606 84
2.8	− 2.86010 35591 81	0.97592 26515 07	7.8	−10.10061 75726 94	9.14690 41251 84
2.9	− 2.99622 52529 98	1.08236 17859 08	7.9	−10.25005 83482 21	9.35317 94376 01
3.0	− 3.13305 11644 50	1.19213 51297 05	8.0	−10.39959 50997 80	9.56071 49872 49
3.1	− 3.27053 57144 30	1.30513 88581 77	8.1	−10.54922 54469 17	9.76949 51583 85
3.2	− 3.40863 75892 32	1.42127 51595 43	8.2	−10.69894 70966 06	9.97950 47158 43
3.3	− 3.54731 92273 03	1.54045 17547 76	8.3	−10.84875 78390 24	10.19072 87913 49
3.4	− 3.68654 63804 17	1.66258 14631 94	8.4	−10.99865 55435 72	10.40315 28704 84
3.5	− 3.82628 77368 25	1.78758 18092 68	8.5	−11.14863 81551 38	10.61676 27802 52
3.6	− 3.96651 45962 20	1.91537 46664 26	8.6	−11.29870 36905 72	10.83154 46772 22
3.7	− 4.10720 05882 64	2.04588 59340 24	8.7	−11.44885 02353 71	11.04748 50362 14
3.8	− 4.24832 14278 81	2.17904 52440 32	8.8	−11.59907 59405 42	11.26457 06394 86
3.9	− 4.38985 47017 40	2.31478 56943 26	8.9	−11.74937 90196 53	11.48278 85664 18
4.0	− 4.53177 96812 84	2.45304 36058 25	9.0	−11.89975 77460 43	11.70212 61836 32
4.1	− 4.67407 71584 70	2.59375 83010 13	9.1	−12.05021 04501 83	11.92257 11355 62
4.2	− 4.81672 93009 83	2.73687 19016 54	9.2	−12.20073 55171 88	12.14411 13354 15
4.3	− 4.95971 95242 44	2.88232 91437 48	9.3	−12.35133 13844 58	12.36673 49565 33
4.4	− 5.10303 23779 21	3.03007 72080 09	9.4	−12.50199 65394 43	12.59043 04241 06
4.5	− 5.24665 34450 28	3.18006 55643 29	9.5	−12.65272 95175 33	12.81518 64072 43
4.6	− 5.39056 92519 72	3.33224 58288 43	9.6	−12.80352 89000 52	13.04099 18113 65
4.7	− 5.53476 71881 64	3.48657 16324 07	9.7	−12.95439 33123 60	13.26783 57709 12
4.8	− 5.67923 54339 89	3.64299 84993 84	9.8	−13.10532 14220 44	13.49570 76423 49
4.9	− 5.82396 28961 29	3.80148 37357 79	9.9	−13.25631 19372 14	13.72459 69974 44
5.0	− 5.96893 91493 52	3.96198 63258 60	10.0	−13.40736 36048 74	13.95449 36168 27

Таблица 6.7. **Гамма-функция комплексного аргумента**

$x=1.2$

y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$	y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$
0.0	− 0.08537 40900 03	0.00000 00000 00	5.0	− 5.80731 52672 85	4.10609 64053 70
0.1	− 0.09169 75124 13	− 0.02865 84973 21	5.1	− 5.95057 66519 39	4.26883 00575 53
0.2	− 0.11050 89067 86	− 0.05586 39903 67	5.2	− 6.09410 47211 91	4.43349 40204 01
0.3	− 0.14135 09532 62	− 0.08025 91592 09	5.3	− 6.23788 94064 81	4.60005 23089 91
0.4	− 0.18352 07443 57	− 0.10066 05658 03	5.4	− 6.38192 11972 10	4.76847 02339 50
0.5	− 0.23614 32688 51	− 0.11610 77219 87	5.5	− 6.52619 11003 82	4.93871 43339 56
0.6	− 0.29824 98509 35	− 0.12588 00935 13	5.6	− 6.67069 06038 24	5.11075 23127 64
0.7	− 0.36884 83560 49	− 0.12948 68069 28	5.7	− 6.81541 16425 98	5.28455 29803 68
0.8	− 0.44697 73864 90	− 0.12663 80564 16	5.8	− 6.96034 65682 97	5.46008 61980 02
0.9	− 0.53174 22756 96	− 0.11720 77278 71	5.9	− 7.10548 81209 15	5.63732 28266 55
1.0	− 0.62233 46814 87	− 0.10119 48344 90	6.0	− 7.25082 94030 54	5.81623 46788 41
1.1	− 0.71803 95313 44	− 0.07868 85726 52	6.1	− 7.39636 38562 29	5.99679 44733 73
1.2	− 0.81823 34133 20	− 0.04983 92764 14	6.2	− 7.54208 52390 70	6.17897 57929 16
1.3	− 0.92237 79303 78	− 0.01483 57562 65	6.3	− 7.68798 76072 47	6.36275 30441 11
1.4	− 1.03001 06294 86	+ 0.02611 15201 47	6.4	− 7.83406 52949 57	6.54810 14200 83
1.5	− 1.14073 52341 62	0.07278 23932 61	6.5	− 7.98031 28978 26	6.73499 68651 55
1.6	− 1.25421 22047 39	0.12495 51937 38	6.6	− 8.12672 52570 99	6.92341 60416 24
1.7	− 1.37015 01536 37	0.18241 21090 01	6.7	− 8.27329 74450 10	7.11333 62984 34
1.8	− 1.48829 83245 09	0.24494 25273 48	6.8	− 8.42002 47512 17	7.30473 56416 32
1.9	− 1.60844 01578 57	0.31234 49712 35	6.9	− 8.56690 26702 20	7.49759 27064 69
2.0	− 1.73038 78680 93	0.38442 80719 73	7.0	− 8.71392 68896 74	7.69188 67310 43
2.1	− 1.85397 79144 87	0.46101 09100 87	7.1	− 8.86109 32795 24	7.88759 75313 86
2.2	− 1.97906 72374 32	0.54192 29484 31	7.2	− 9.00839 78818 89	8.08470 54778 77
2.3	− 2.10553 01371 17	0.62700 37140 16	7.3	− 9.15583 69016 37	8.28319 14729 22
2.4	− 2.23325 56848 33	0.71610 23338 39	7.4	− 9.30340 66975 98	8.48303 69297 94
2.5	− 2.36214 55727 43	0.80907 69945 69	7.5	− 9.45110 37743 60	8.68422 37525 82
2.6	− 2.49211 23232 46	0.90579 43715 71	7.6	− 9.59892 47746 01	8.88673 43171 55
2.7	− 2.62307 77928 95	1.00612 90561 43	7.7	− 9.74686 64719 23	9.09055 14530 96
2.8	− 2.75497 19177 39	1.10996 29987 33	7.8	− 9.89492 57641 38	9.29565 84265 39
2.9	− 2.88773 16568 77	1.21718 49784 62	7.9	−10.04309 96669 84	9.50203 89238 50
3.0	− 3.02130 00992 07	1.32769 01044 18	8.0	−10.19138 53082 31	9.70967 70361 08
3.1	− 3.15562 57049 65	1.44137 93510 29	8.1	−10.33977 99221 46	9.91855 72443 36
3.2	− 3.29066 16590 00	1.55815 91278 68	8.2	−10.48828 08443 04	10.12866 44054 34
3.3	− 3.42636 53170 56	1.67794 08829 56	8.3	−10.63688 55067 01	10.33998 37387 77
3.4	− 3.56269 77297 54	1.80064 07379 67	8.4	−10.78559 14331 66	10.55250 08134 40
3.5	− 3.69962 32317 85	1.92617 91533 49	8.5	−10.93439 62350 38	10.76620 15360 05
3.6	− 3.83710 90860 24	2.05448 06211 84	8.6	−11.08329 76070 93	10.98107 21389 38
3.7	− 3.97512 51741 07	2.18547 33836 08	8.7	−11.23229 33237 11	11.19709 91694 76
3.8	− 4.11364 37264 61	2.31908 91746 67	8.8	−11.38138 12352 53	11.41426 94790 19
3.9	− 4.25263 90859 57	2.45526 29835 70	8.9	−11.53055 92646 46	11.63257 02129 90
4.0	− 4.39208 75003 42	2.59393 28374 55	9.0	−11.67982 54041 57	11.85198 88011 32
4.1	− 4.53196 69393 70	2.73503 96019 03	9.1	−11.82917 77123 44	12.07251 29482 35
4.2	− 4.67225 69332 23	2.87852 67976 01	9.2	−11.97861 43111 70	12.29413 06252 48
4.3	− 4.81293 84293 30	3.02434 04316 86	9.3	−12.12813 33832 78	12.51683 00607 77
4.4	− 4.95399 36651 50	3.17242 88424 26	9.4	−12.27773 31694 04	12.74059 97329 36
4.5	− 5.09540 60548 36	3.32274 25560 43	9.5	−12.42741 19659 29	12.96542 83615 35
4.6	− 5.23716 00880 20	3.47523 41545 72	9.6	−12.57716 81225 64	13.19130 49005 92
4.7	− 5.37924 12391 93	3.62985 81537 79	9.7	−12.72700 00401 42	13.41821 85311 47
4.8	− 5.52163 58863 97	3.78657 08902 31	9.8	−12.87690 61685 35	13.64615 86543 64
4.9	− 5.66433 12381 00	3.94533 04167 32	9.9	−13.02688 50046 68	13.87511 49849 16
5.0	− 5.80731 52672 85	4.10609 64053 70	10.0	−13.17693 50906 38	14.10507 70446 23

Таблица 6.7. Гамма-функция комплексного аргумента

$x=1.3$

y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$	y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$
0.0	− 0.10817 48095 08	0.00000 00000 00	5.0	− 5.64541 41381 33	4.24823 90621 27
0.1	− 0.11383 61080 85	− 0.01671 99199 34	5.1	− 5.78673 23355 37	4.41126 31957 95
0.2	− 0.13070 20636 90	− 0.03225 84033 35	5.2	− 5.92835 35606 66	4.57620 66023 67
0.3	− 0.15843 10081 49	− 0.04549 95427 81	5.3	− 6.07026 64370 51	4.74303 39118 17
0.4	− 0.19649 12771 78	− 0.05544 82296 06	5.4	− 6.21246 02140 03	4.91171 10050 12
0.5	− 0.24420 93680 45	− 0.06126 78750 55	5.5	− 6.35492 47217 66	5.08220 49501 77
0.6	− 0.30082 34434 02	− 0.06229 79103 48	5.6	− 6.49765 03305 97	5.25448 39434 72
0.7	− 0.36553 39002 19	− 0.05805 28252 04	5.7	− 6.64062 79133 72	5.42851 72533 50
0.8	− 0.43754 53407 27	− 0.04820 73993 35	5.8	− 6.78384 88113 55	5.60427 51684 12
0.9	− 0.51609 74046 40	− 0.03257 37450 94	5.9	− 6.92730 48028 21	5.78172 89485 09
1.0	− 0.60048 45154 05	− 0.01107 52190 48	6.0	− 7.07098 80742 52	5.96085 07788 45
1.1	− 0.69006 62005 12	+ 0.01627 90894 04	6.1	− 7.21489 11938 62	6.14161 37268 52
1.2	− 0.78427 03001 02	0.04941 70710 23	6.2	− 7.35900 70872 13	6.32399 17016 49
1.3	− 0.88259 13601 03	0.08822 25250 96	6.3	− 7.50332 90147 58	6.50795 94158 99
1.4	− 0.98458 61322 90	0.13255 01649 50	6.4	− 7.64785 05510 98	6.69349 23498 81
1.5	− 1.08986 76158 16	0.18223 70479 17	6.5	− 7.79256 55658 27	6.88056 67176 38
1.6	− 1.19809 86148 04	0.23711 09920 47	6.6	− 7.93746 82058 02	7.06915 94350 45
1.7	− 1.30898 54162 82	0.29699 65855 44	6.7	− 8.08255 20787 24	7.25924 80896 76
1.8	− 1.42227 19237 14	0.36171 93463 93	6.8	− 8.22781 42379 13	7.45081 09123 38
1.9	− 1.53773 44011 63	0.43110 85022 51	6.9	− 8.37324 71681 76	7.64382 67501 64
2.0	− 1.65517 68709 10	0.50499 87656 67	7.0	− 8.51884 67726 68	7.83827 50411 67
2.1	− 1.77442 71431 91	0.58323 13926 09	7.1	− 8.66460 83606 78	8.03413 57901 50
2.2	− 1.89533 34239 28	0.66565 47394 67	7.2	− 8.81052 74362 48	8.23138 95458 91
2.3	− 2.01776 14331 34	0.75212 44759 30	7.3	− 8.95659 96875 66	8.43001 73795 19
2.4	− 2.14159 19646 87	0.84250 35670 42	7.4	− 9.10282 09770 73	8.63000 08640 04
2.5	− 2.26671 88222 04	0.93666 21049 03	7.5	− 9.24918 73322 19	8.83132 20546 97
2.6	− 2.39304 70725 18	1.03447 70464 53	7.6	− 9.39569 49368 29	9.03396 34708 43
2.7	− 2.52049 15659 37	1.13583 18965 15	7.7	− 9.54234 01230 14	9.23790 80780 23
2.8	− 2.64897 56799 18	1.24061 63628 56	7.8	− 9.68911 93636 11	9.44313 92714 58
2.9	− 2.77843 02497 03	1.34872 60013 87	7.9	− 9.83602 92650 88	9.64964 08601 22
3.0	− 2.90879 26554 06	1.46006 18633 96	8.0	− 9.98306 65608 89	9.85739 70516 25
3.1	− 3.04000 60402 26	1.57453 01525 07	8.1	−10.13022 81051 96	10.06639 24378 12
3.2	− 3.17201 86387 60	1.69204 18960 57	8.2	−10.27751 08670 60	10.27661 19810 47
3.3	− 3.30478 31979 94	1.81251 26335 69	8.3	−10.42491 19248 88	10.48804 10011 24
3.4	− 3.43825 64765 05	1.93586 21235 97	8.4	−10.57242 84612 54	10.70066 51627 91
3.5	− 3.57239 88099 07	2.06201 40693 37	8.5	−10.72005 77580 15	10.91447 04638 39
3.6	− 3.70717 37325 19	2.19089 58627 45	8.6	−10.86779 71917 09	11.12944 32237 30
3.7	− 3.84254 76469 59	2.32243 83465 44	8.7	−11.01564 42292 16	11.34557 00727 24
3.8	− 3.97848 95346 95	2.45657 55932 86	8.8	−11.16359 64236 64	11.56283 79415 00
3.9	− 4.11497 07016 98	2.59324 47004 59	8.9	−11.31165 14105 63	11.78123 40512 20
4.0	− 4.25196 45543 18	2.73238 56006 34	9.0	−11.45980 69041 59	12.00074 59040 23
4.1	− 4.38944 64012 12	2.87394 08855 80	9.1	−11.60806 06939 74	12.22136 12739 31
4.2	− 4.52739 32778 30	3.01785 56433 48	9.2	−11.75641 06415 49	12.44306 81981 38
4.3	− 4.66578 37904 84	3.16407 73073 22	9.3	−11.90485 46773 52	12.66585 49686 64
4.4	− 4.80459 79774 65	3.31255 55163 23	9.4	−12.05339 07978 49	12.88971 01243 51
4.5	− 4.94381 71850 33	3.46324 19848 78	9.5	−12.20201 70627 34	13.11462 24431 99
4.6	− 5.08342 39564 42	3.61609 03828 59	9.6	−12.35073 15923 02	13.34058 09350 03
4.7	− 5.22340 19323 94	3.77105 62237 32	9.7	−12.49953 25649 49	13.56757 48342 95
4.8	− 5.36373 57615 52	3.92809 67607 19	9.8	−12.64841 82148 10	13.79559 35935 62
4.9	− 5.50441 10199 31	4.08717 08902 55	9.9	−12.79738 68295 12	14.02462 68767 33
5.0	− 5.64541 41381 33	4.24823 90621 27	10.0	−12.94643 67480 34	14.25466 45529 28

Таблица 6.7. Гамма-функция комплексного аргумента

$x = 14.$

y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$	y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$
0.0	− 0.11961 29141 72	0.00000 00000 00	5.0	− 5.48319 80511 50	4.38842 59888 87
0.1	− 0.12473 21357 76	− 0.00597 40017 43	5.1	− 5.62258 51037 75	4.55177 72808 10
0.2	− 0.14000 01552 88	− 0.01097 08056 66	5.2	− 5.76231 08530 59	4.71703 54898 14
0.3	− 0.16515 59551 89	− 0.01405 93840 03	5.3	− 5.90236 26637 68	4.88416 59286 80
0.4	− 0.19978 93616 12	− 0.01439 47989 49	5.4	− 6.04272 85898 90	5.05313 51119 86
0.5	− 0.24337 34438 09	− 0.01124 72025 18	5.5	− 6.18339 73257 62	5.22391 06968 84
0.6	− 0.29530 16779 62	− 0.00401 77865 38	5.6	− 6.32435 81614 11	5.39646 14275 35
0.7	− 0.35492 46161 10	+ 0.00775 78473 84	5.7	− 6.46560 09417 01	5.57075 70829 41
0.8	− 0.42158 20669 55	0.02441 65124 32	5.8	− 6.60711 60288 99	5.74676 84279 33
0.9	− 0.49462 85345 46	0.04618 11610 42	5.9	− 6.74889 42683 24	5.92446 71670 92
1.0	− 0.57345 12921 03	0.07317 82199 73	6.0	− 6.89092 69567 80	6.10382 59013 94
1.1	− 0.65748 16506 41	0.10545 58409 92	6.1	− 7.03320 58135 18	6.28481 80874 01
1.2	− 0.74620 06322 98	0.14300 11986 37	6.2	− 7.17572 29534 78	6.46741 79988 09
1.3	− 0.83914 04638 04	0.18575 57618 52	6.3	− 7.31847 08625 98	6.65160 06901 96
1.4	− 0.93588 32199 21	0.23362 80933 40	6.4	− 7.46144 23750 25	6.83734 19628 28
1.5	− 1.03605 77156 27	0.28650 41540 26	6.5	− 7.60463 06520 25	7.02461 83323 73
1.6	− 1.13933 54742 88	0.34425 53337 92	6.6	− 7.74802 91624 64	7.21340 69984 03
1.7	− 1.24542 63479 49	0.40674 45404 87	6.7	− 7.89163 16647 23	7.40368 58155 67
1.8	− 1.35407 41615 64	0.47383 07041 21	6.8	− 8.03543 21899 02	7.59543 32663 20
1.9	− 1.46505 26007 14	0.54537 20299 26	6.9	− 8.17942 50262 34	7.78862 84351 12
2.0	− 1.57816 14562 85	0.62122 82885 81	7.0	− 8.32360 47045 82	7.98325 09839 40
2.1	− 1.69322 32702 19	0.70126 23803 49	7.1	− 8.46796 59849 44	8.17928 11291 83
2.2	− 1.81008 03838 54	0.78534 13608 50	7.2	− 8.61250 38438 82	8.37669 96196 29
2.3	− 1.92859 23663 09	0.87333 70735 61	7.3	− 8.75721 34627 90	8.57548 77156 28
2.4	− 2.04863 37884 08	0.96512 64991 00	7.4	− 8.90209 02169 54	8.77562 71692 98
2.5	− 2.17009 23032 73	1.06059 19035 92	7.5	− 9.04712 96653 17	8.97710 02057 23
2.6	− 2.29286 69947 17	1.15962 08468 95	7.6	− 9.19232 75409 21	9.17988 95050 80
2.7	− 2.41686 69570 58	1.26210 60952 18	7.7	− 9.33767 97419 53	9.38397 81856 34
2.8	− 2.54201 00734 84	1.36794 54704 02	7.8	− 9.48318 23233 58	9.58934 97875 68
2.9	− 2.66822 19640 86	1.47704 16591 47	7.9	− 9.62883 14889 78	9.79598 82575 76
3.0	− 2.79543 50784 95	1.58930 19987 43	8.0	− 9.77462 35841 76	10.00387 79341 91
3.1	− 2.92358 79116 75	1.70463 82510 60	8.1	− 9.92055 50889 05	10.21300 35337 97
3.2	− 3.05262 43245 92	1.82296 63729 35	8.2	−10.06662 26112 05	10.42335 01372 94
3.3	− 3.18249 29542 71	1.94420 62885 89	8.3	−10.21282 28810 76	10.63490 31773 72
3.4	− 3.31314 67001 61	2.06828 16678 10	8.4	−10.35915 27447 20	10.84764 84263 58
3.5	− 3.44454 22757 38	2.19511 97123 13	8.5	−10.50560 91591 10	11.06157 19846 19
3.6	− 3.57663 98160 21	2.32465 09517 70	8.6	−10.65218 91868 81	11.27666 02694 74
3.7	− 3.70940 25331 00	2.45680 90502 77	8.7	−10.79888 99915 05	11.49290 00045 92
3.8	− 3.84279 64130 02	2.59153 06235 98	8.8	−10.94570 88327 39	11.71027 82098 57
3.9	− 3.97678 99482 49	2.72875 50671 88	8.9	−11.09264 30623 27	11.92878 21916 70
4.0	− 4.11135 39012 79	2.86842 43947 56	9.0	−11.23969 01199 39	12.14839 95336 59
4.1	− 4.24646 10946 69	3.01048 30870 18	9.1	−11.38684 75293 27	12.36911 80877 89
4.2	− 4.38208 62246 51	3.15487 79501 77	9.2	−11.53411 28946 97	12.59092 59658 40
4.3	− 4.51820 56949 47	3.30155 79836 24	9.3	−11.68148 38972 65	12.81381 15312 39
4.4	− 4.65479 74683 75	3.45047 42563 18	9.4	−11.82895 82920 01	13.03776 33912 29
4.5	− 4.79184 09340 18	3.60157 97913 33	9.5	−11.97653 39045 38	13.26277 03893 53
4.6	− 4.92931 67880 70	3.75482 94580 13	9.6	−12.12420 86282 47	13.48882 15982 45
4.7	− 5.06720 69267 30	3.91017 98712 52	9.7	−12.27198 04214 52	13.71590 63127 03
4.8	− 5.20549 43497 23	4.06758 92973 81	9.8	−12.41984 73048 02	13.94401 40430 46
4.9	− 5.34416 30732 30	4.22701 75662 27	9.9	−12.56780 73587 55	14.17313 45087 16
5.0	− 5.48319 80511 50	4.38842 59888 87	10.0	−12.71585 87212 03	14.40325 76321 42

Таблица 6.7. Гамма-функция комплексного аргумента

$x=1.5$

y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$	y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$
0.0	− 0.12078 22376 35	0.00000 00000 00	5.0	− 5.32063 00229 09	4.52667 02683 19
0.1	− 0.12545 03928 11	0.00378 68415 10	5.1	− 5.45809 92990 12	4.69038 46594 51
0.2	− 0.13938 53175 79	0.00839 39012 17	5.2	− 5.59594 21987 69	4.85599 23475 89
0.3	− 0.16238 37050 76	0.01460 80536 11	5.3	− 5.73414 48816 77	5.02345 93914 30
0.4	− 0.19412 35254 45	0.02315 34211 15	5.4	− 5.87269 42552 05	5.19275 29984 42
0.5	− 0.23418 63474 70	0.03466 89612 75	5.5	− 6.01157 79223 61	5.36384 14702 24
0.6	− 0.28208 36136 63	0.04969 46638 36	5.6	− 6.15078 41337 33	5.53669 41510 65
0.7	− 0.33728 34790 33	0.06866 64150 66	5.7	− 6.29030 17435 55	5.71128 13794 95
0.8	− 0.39923 54301 20	0.09191 83319 43	5.8	− 6.43012 01693 96	5.88757 44426 18
0.9	− 0.46739 08704 08	0.11969 06415 60	5.9	− 6.57022 93551 39	6.06554 55330 63
1.0	− 0.54121 88685 47	0.15214 09934 52	6.0	− 6.71061 97369 14	6.24516 77083 65
1.1	− 0.62021 70896 71	0.18935 73091 01	6.1	− 6.85128 22117 36	6.42641 48526 40
1.2	− 0.70391 84698 97	0.23137 07067 73	6.2	− 6.99220 81085 67	6.60926 16403 83
1.3	− 0.79189 44573 29	0.27816 75270 32	6.3	− 7.13338 91616 09	6.79368 35022 65
1.4	− 0.88375 56946 74	0.32969 99180 52	6.4	− 7.27481 74856 07	6.97965 65928 01
1.5	− 0.97915 09391 81	0.38589 47712 67	6.5	− 7.41648 55529 97	7.16715 77597 60
1.6	− 1.07776 48736 47	0.44666 10201 49	6.6	− 7.55838 61727 29	7.35616 45152 22
1.7	− 1.17931 53061 81	0.51189 54441 75	6.7	− 7.70051 24706 26	7.54665 50081 65
1.8	− 1.28355 01134 19	0.58148 71805 09	6.8	− 7.84285 78711 49	7.73860 79984 87
1.9	− 1.39024 41643 92	0.65532 11610 93	6.9	− 7.98541 60804 40	7.93200 28323 86
2.0	− 1.49919 63725 85	0.73328 06816 91	7.0	− 8.12818 10705 51	8.12681 94190 02
2.1	− 1.61022 69592 23	0.81524 92850 60	7.1	− 8.27114 70647 52	8.32303 82082 45
2.2	− 1.72317 49667 28	0.90111 21116 92	7.2	− 8.41430 85238 40	8.52064 01697 48
2.3	− 1.83789 60327 96	0.99075 68430 94	7.3	− 8.55766 01333 52	8.71960 67728 67
2.4	− 1.95426 04180 71	1.08407 43370 92	7.4	− 8.70119 67916 34	8.91991 99676 60
2.5	− 2.07215 12706 83	1.18095 90329 08	7.5	− 8.84491 35986 81	9.12156 21668 12
2.6	− 2.19146 31061 38	1.28130 91860 05	7.6	− 8.98880 58456 98	9.32451 62284 17
2.7	− 2.31210 04795 77	1.38502 69784 97	7.7	− 9.13286 90053 22	9.52876 54395 97
2.8	− 2.43397 68277 27	1.49201 85397 98	7.8	− 9.27709 87224 65	9.73429 35008 92
2.9	− 2.55701 34593 17	1.60219 39035 70	7.9	− 9.42149 08057 13	9.94108 45113 82
3.0	− 2.68113 86746 74	1.71546 69204 67	8.0	− 9.56604 12192 67	10.14912 29545 01
3.1	− 2.80628 69972 89	1.83175 51411 18	8.1	− 9.71074 60753 60	10.35839 36845 06
3.2	− 2.93239 85022 62	1.95097 96800 61	8.2	− 9.85560 16271 36	10.56888 19135 53
3.3	− 3.05941 82284 63	2.07306 50684 28	8.3	−10.00060 42619 46	10.78057 31993 69
3.4	− 3.18729 56630 57	2.19793 91011 06	8.4	−10.14575 04950 41	10.99345 34334 60
3.5	− 3.31598 42885 64	2.32553 26824 38	8.5	−10.29103 69636 22	11.20750 88298 51
3.6	− 3.44544 11840 65	2.45577 96733 92	8.6	−10.43646 04212 40	11.42272 59143 12
3.7	− 3.57562 66733 10	2.58861 67421 82	8.7	−10.58201 77325 09	11.63909 15140 53
3.8	− 3.70650 40135 44	2.72398 32197 35	8.8	−10.72770 58681 09	11.85659 27478 60
3.9	− 3.83803 91197 27	2.86182 09608 36	8.9	−10.87352 19000 77	12.07521 70166 56
4.0	− 3.97020 03195 93	3.00207 42115 08	9.0	−11.01946 29973 44	12.29495 19944 46
4.1	− 4.10295 81356 26	3.14468 94828 47	9.1	−11.16552 64215 28	12.51578 56196 58
4.2	− 4.23628 50905 75	3.28961 54314 23	9.2	−11.31170 95229 33	12.73770 60868 20
4.3	− 4.37015 55336 09	3.43680 27461 51	9.3	−11.45800 97367 84	12.96070 18385 99
4.4	− 4.50454 54845 89	3.58620 40415 07	9.4	−11.60442 45796 38	13.18476 15581 47
4.5	− 4.63943 24943 00	3.73777 37568 62	9.5	−11.75095 16459 94	13.40987 41617 61
4.6	− 4.77479 55187 51	3.89146 80616 79	9.6	−11.89758 86050 76	13.63602 87918 31
4.7	− 4.91061 48059 11	4.04724 47663 05	9.7	−12.04433 31977 78	13.86321 48100 75
4.8	− 5.04687 17934 63	4.20506 32380 55	9.8	−12.19118 32337 59	14.09142 17910 27
4.9	− 5.18354 90163 32	4.36488 43223 09	9.9	−12.33813 65886 95	14.32063 95157 82
5.0	− 5.32063 00229 09	4.52667 02683 19	10.0	−12.48519 12016 51	14.55085 79659 84

Таблица 6.7. Гамма-функция комплексного аргумента

$x = 1.6$

y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$	y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$
0.0	− 0.11259 17656 97	0.00000 00000 00	5.0	− 5.15767 38696 89	4.66298 63139 40
0.1	− 0.11687 93076 07	0.01272 17953 11	5.1	− 5.29324 00046 70	4.82709 89421 23
0.2	− 0.12968 70233 13	0.02614 08547 67	5.2	− 5.42921 38858 50	4.99309 00410 26
0.3	− 0.15085 38452 14	0.04092 98346 69	5.3	− 5.56558 05247 67	5.16092 64732 77
0.4	− 0.18012 29875 82	0.05771 47266 93	5.4	− 5.70232 57347 10	5.33057 61938 29
0.5	− 0.21715 76591 72	0.07705 74009 90	5.5	− 5.83943 60752 49	5.50200 82001 33
0.6	− 0.26155 99560 50	0.09944 39491 75	5.6	− 5.97689 88014 04	5.67519 24850 30
0.7	− 0.31289 07142 69	0.12527 90746 90	5.7	− 6.11470 18170 24	5.85009 99922 08
0.8	− 0.37068 83847 40	0.15488 59553 99	5.8	− 6.25283 36319 59	6.02670 25740 71
0.9	− 0.43448 55339 80	0.18851 04588 87	5.9	− 6.39128 33226 66	6.20497 29518 79
1.0	− 0.50382 21960 58	0.22632 83631 44	6.0	− 6.53004 04959 33	6.38488 46780 37
1.1	− 0.57825 58588 66	0.26845 42738 89	6.1	− 6.66909 52554 28	6.56641 21003 90
1.2	− 0.65736 82809 44	0.31495 11405 00	6.2	− 6.80843 81708 20	6.74953 03284 11
1.3	− 0.74076 95833 61	0.36583 95580 78	6.3	− 6.94806 02492 33	6.93421 52011 79
1.4	− 0.82810 01661 20	0.42110 63293 75	6.4	− 7.08795 29088 41	7.12044 32570 25
1.5	− 0.91903 10002 05	0.48071 20031 31	6.5	− 7.22810 79544 00	7.30819 17047 52
1.6	− 1.01326 27864 52	0.54459 72874 22	6.6	− 7.36851 75545 64	7.49743 83963 44
1.7	− 1.11052 43845 66	0.61268 83586 73	6.7	− 7.50917 42208 19	7.68816 18010 64
1.8	− 1.21057 08228 70	0.68490 11588 51	6.8	− 7.65007 07879 17	7.88034 09808 67
1.9	− 1.31318 11150 50	0.76114 48080 60	6.9	− 7.79120 03956 68	8.07395 55670 43
2.0	− 1.41815 60399 85	0.84132 42695 09	7.0	− 7.93255 64719 90	8.26898 57380 27
2.1	− 1.52531 59861 47	0.92534 23984 61	7.1	− 8.07413 27171 08	8.46541 21983 05
2.2	− 1.63449 89215 98	1.01310 14934 56	7.2	− 8.21592 30888 20	8.66321 61583 45
2.3	− 1.74555 85219 99	1.10450 44515 88	7.3	− 8.35792 17887 32	8.86237 93155 10
2.4	− 1.85836 24696 22	1.19945 56127 07	7.4	− 8.50012 32493 99	9.06288 38358 78
2.5	− 1.97279 09238 15	1.29786 13618 36	7.5	− 8.64252 21222 97	9.26471 23369 30
2.6	− 2.08873 51557 24	1.39963 05453 39	7.6	− 8.78511 32665 62	9.46784 78710 61
2.7	− 2.20609 63358 10	1.50467 47448 81	7.7	− 8.92789 17384 38	9.67227 39098 48
2.8	− 2.32478 44606 95	1.61290 84436 93	7.8	− 9.07085 27813 87	9.87797 43290 61
2.9	− 2.44471 74052 94	1.72424 91120 48	7.9	− 9.21399 18168 02	10.08493 33943 44
3.0	− 2.56582 00865 46	1.83861 72327 21	8.0	− 9.35730 44352 92	10.29313 57475 61
3.1	− 2.68802 37258 40	1.95593 62824 65	8.1	− 9.50078 63884 89	10.50256 63937 51
3.2	− 2.81126 51983 53	2.07613 26817 55	8.2	− 9.64443 35813 39	10.71321 06886 60
3.3	− 2.93548 64586 59	2.19913 57221 55	8.3	− 9.78824 20648 48	10.92505 43268 31
3.4	− 3.06063 40331 69	2.32487 74784 17	8.4	− 9.93220 80292 58	11.13808 33302 08
3.5	− 3.18665 85710 48	2.45329 27106 82	8.5	−10.07632 77975 98	11.35228 40372 42
3.6	− 3.31351 44463 00	2.58431 87608 00	8.6	−10.22059 78196 20	11.56764 30924 55
3.7	− 3.44115 94046 31	2.71789 54457 96	8.7	−10.36501 46660 67	11.78414 74364 58
3.8	− 3.56955 42495 22	2.85396 49506 80	8.8	−10.50957 50232 55	12.00176 42963 80
3.9	− 3.69866 25626 62	2.99247 17222 46	8.9	−10.65427 56879 66	12.22054 11767 06
4.0	− 3.82845 04545 47	3.13336 23649 89	9.0	−10.79911 35626 11	12.44040 58504 89
4.1	− 3.95888 63415 67	3.27658 55399 89	9.1	−10.94408 56506 53	12.66136 63509 22
4.2	− 4.08994 07464 23	3.42209 18672 73	9.2	−11.08918 90522 76	12.88341 09632 56
4.3	− 4.22158 61190 90	3.56983 38320 36	9.3	−11.23442 09602 86	13.10652 82170 40
4.4	− 4.35379 66759 32	3.71976 56948 92	9.4	−11.37977 86562 21	13.33070 68786 75
4.5	− 4.48654 82548 65	3.87184 34062 62	9.5	−11.52525 95066 64	13.55593 59442 57
4.6	− 4.61981 81847 38	4.02602 45248 92	9.6	−11.67086 09597 45	13.78220 46327 06
4.7	− 4.75358 51673 33	4.18226 81404 46	9.7	−11.81658 05418 21	14.00950 23791 60
4.8	− 4.88782 91705 81	4.34053 48000 81	9.8	−11.96241 58543 24	14.23781 88286 23
4.9	− 5.02253 13317 74	4.50078 64388 72	9.9	−12.10836 45707 60	14.46714 38298 57
5.0	− 5.15767 38696 89	4.66298 63139 40	10.0	−12.25442 44338 60	14.69746 74295 03

Таблица 6.7. Гамма-функция комплексного аргумента

$x=1.7$

y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$	y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$
0.0	− 0.09580 76974 07	0.00000 00000 00	5.0	− 4.99429 42740 24	4.79738 98064 85
0.1	− 0.09977 01624 55	0.02095 53101 47	5.1	− 5.12797 31077 01	4.96193 49448 28
0.2	− 0.11161 35203 43	0.04250 99781 99	5.2	− 5.26209 29486 79	5.12834 25830 88
0.3	− 0.13120 82417 20	0.06524 48506 20	5.3	− 5.39663 77210 79	5.29658 04404 97
0.4	− 0.15834 67099 43	0.08970 54480 34	5.4	− 5.53159 21994 12	5.46661 72692 91
0.5	− 0.19275 44989 43	0.11638 82473 83	5.5	− 5.66694 19505 53	5.63842 28098 55
0.6	− 0.23410 41754 11	0.14573 09476 06	5.6	− 5.80267 32805 14	5.81196 77481 03
0.7	− 0.28203 01468 30	0.17810 70108 82	5.7	− 5.93877 31855 28	5.98722 36749 88
0.8	− 0.33614 37007 35	0.21382 42284 85	5.8	− 6.07522 93070 61	6.16416 30480 45
0.9	− 0.39604 36829 33	0.25312 66649 29	5.9	− 6.21202 98903 76	6.34275 91548 66
1.0	− 0.46133 26441 19	0.29619 91243 57	6.0	− 6.34916 37463 25	6.52298 60784 05
1.1	− 0.53162 06562 78	0.34317 32455 42	6.1	− 6.48662 02160 75	6.70481 86640 24
1.2	− 0.60653 43029 30	0.39413 44205 39	6.2	− 6.62438 91385 04	6.88823 24881 89
1.3	− 0.68572 05552 37	0.44912 88915 80	6.3	− 6.76246 08200 42	7.07320 38287 20
1.4	− 0.76884 93610 19	0.50817 05624 82	6.4	− 6.90082 60067 27	7.25970 96365 25
1.5	− 0.85561 48134 32	0.57124 72307 84	6.5	− 7.03947 58582 98	7.44772 75087 22
1.6	− 0.94573 52538 42	0.63832 60866 03	6.6	− 7.17840 19241 47	7.63723 56630 84
1.7	− 1.03895 26210 76	0.70935 84280 02	6.7	− 7.31759 61209 77	7.82821 29137 39
1.8	− 1.13503 13039 83	0.78428 36123 89	6.8	− 7.45705 07120 18	8.02063 86480 35
1.9	− 1.23375 66975 90	0.86303 23052 04	6.9	− 7.59675 82876 82	8.21449 28045 37
2.0	− 1.33493 36116 09	0.94552 91079 51	7.0	− 7.73671 17475 34	8.40975 58520 62
2.1	− 1.43838 46369 05	1.03169 46541 37	7.1	− 7.87690 42834 81	8.60640 87697 25
2.2	− 1.54394 85411 53	1.12144 72591 94	7.2	− 8.01732 93640 69	8.80443 30279 13
2.3	− 1.65147 87389 10	1.21470 42030 73	7.3	− 8.15798 07198 22	9.00381 05701 63
2.4	− 1.76084 18623 15	1.31138 27144 41	7.4	− 8.29885 23295 23	9.20452 37958 73
2.5	− 1.87191 64452 44	1.41140 07152 26	7.5	− 8.43993 84073 80	9.40655 55438 14
2.6	− 1.98459 17246 80	1.51467 73744 45	7.6	− 8.58123 33910 02	9.60988 90763 93
2.7	− 2.09876 65571 99	1.62113 35114 76	7.7	− 8.72273 19301 22	9.81450 80646 38
2.8	− 2.21434 84448 82	1.73069 18813 34	7.8	− 8.86442 88760 30	10.02039 65738 46
2.9	− 2.33125 26629 53	1.84327 73680 71	7.9	− 9.00631 92716 38	10.22753 90498 84
3.0	− 2.44940 14805 61	1.95881 71071 34	8.0	− 9.14839 83421 51	10.43592 03060 85
3.1	− 2.56872 34658 89	2.07724 05531 98	8.1	− 9.29066 14862 98	10.64552 55107 28
3.2	− 2.68915 28670 03	2.19847 95064 74	8.2	− 9.43310 42680 75	10.85634 01750 59
3.3	− 2.81062 90603 59	2.32246 81077 41	8.3	− 9.57572 24089 73	11.06835 01418 23
3.4	− 2.93309 60594 79	2.44914 28100 87	8.4	− 9.71851 17806 54	11.28154 15743 00
3.5	− 3.05650 20770 24	2.57844 23336 16	8.5	− 9.86146 83980 47	11.49590 09457 89
3.6	− 3.18079 91341 33	2.71030 76079 67	8.6	−10.00458 84128 32	11.71141 50295 52
3.7	− 3.30594 27115 93	2.84468 17064 22	8.7	−10.14786 81072 85	11.92807 08891 58
3.8	− 3.43189 14379 84	2.98150 97744 80	8.8	−10.29130 38884 74	12.14585 58692 46
3.9	− 3.55860 68105 24	3.12073 89551 42	8.9	−10.43489 22827 58	12.36475 75866 47
4.0	− 3.68605 29448 47	3.26231 83125 99	9.0	−10.57862 99305 96	12.58476 39218 81
4.1	− 3.81419 63503 82	3.40619 87555 93	9.1	−10.72251 35816 27	12.80586 30109 93
4.2	− 3.94300 57284 13	3.55233 29614 33	9.2	−10.86654 00900 14	13.02804 32377 08
4.3	− 4.07245 17902 59	3.70067 53013 46	9.3	−11.01070 64100 32	13.25129 32259 06
4.4	− 4.20250 70933 22	3.85118 17677 02	9.4	−11.15500 95918 83	13.47560 18323 86
4.5	− 4.33314 58930 01	4.00380 99034 45	9.5	−11.29944 67777 28	13.70095 81399 16
4.6	− 4.46434 40087 52	4.15851 87339 90	9.6	−11.44401 51979 25	13.92735 14505 47
4.7	− 4.59607 87027 47	4.31526 87017 23	9.7	−11.58871 21674 47	14.15477 12791 90
4.8	− 4.72832 85697 79	4.47402 16031 94	9.8	−11.73353 50824 91	14.38320 73474 23
4.9	− 4.86107 34372 26	4.63474 05290 18	9.9	−11.87848 14172 43	14.61264 95775 51
5.0	− 4.99429 42740 24	4.79738 98064 85	10.0	−12.02354 87208 09	14.84308 80868 68

Таблица 6.7. Гамма-функция комплексного аргумента

$x=1.8$

y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$	y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$
0.0	− 0.07108 38729 14	0.00000 00000 00	5.0	− 4.83045 68451 13	4.92989 76263 84
0.1	− 0.07476 57386 86	0.02858 63331 36	5.1	− 4.96226 53555 54	5.09490 86275 80
0.2	− 0.08577 55297 09	0.05769 29209 31	5.2	− 5.09454 72216 70	5.26176 50781 04
0.3	− 0.10400 76857 32	0.08782 58538 91	5.3	− 5.22728 53433 89	5.43043 56009 62
0.4	− 0.12929 22486 30	0.11946 40495 57	5.4	− 5.36046 35143 73	5.60088 97905 12
0.5	− 0.16140 31015 52	0.15304 83729 82	5.5	− 5.49406 63619 68	5.77309 81726 78
0.6	− 0.20006 82029 53	0.18897 35429 70	5.6	− 5.62807 92920 13	5.94703 21669 16
0.7	− 0.24498 08149 51	0.22758 31014 17	5.7	− 5.76248 84380 56	6.12266 40498 86
0.8	− 0.29581 07721 71	0.26916 73612 58	5.8	− 5.89728 06145 63	6.29996 69207 68
0.9	− 0.35221 50054 25	0.31396 39650 50	5.9	− 6.03244 32737 64	6.47891 46681 58
1.0	− 0.41384 67690 74	0.36216 05120 09	6.0	− 6.16796 44658 02	6.65948 19384 99
1.1	− 0.48036 32669 52	0.41389 86472 00	6.1	− 6.30383 28019 05	6.84164 41059 65
1.2	− 0.55143 15880 74	0.46927 90315 88	6.2	− 6.44003 74202 92	7.02537 72437 42
1.3	− 0.62673 30272 43	0.52836 66950 54	6.3	− 6.57656 79546 04	7.21065 80966 53
1.4	− 0.70596 59713 03	0.59119 63857 23	6.4	− 6.71341 45046 23	7.39746 40550 43
1.5	− 0.78884 75850 80	0.65777 76436 65	6.5	− 6.85056 76090 92	7.58577 31298 85
1.6	− 0.87511 45440 57	0.72809 94297 11	6.6	− 6.98801 82204 65	7.77556 39290 39
1.7	− 0.96452 30468 26	0.80213 42229 48	6.7	− 7.12575 76814 17	7.96681 56346 11
1.8	− 1.05684 83111 80	0.87984 15616 08	6.8	− 7.26377 77029 87	8.15950 79813 46
1.9	− 1.15188 37223 02	0.96117 10434 30	6.9	− 7.40207 03441 98	8.35362 12360 30
2.0	− 1.24943 97659 29	1.04606 48267 65	7.0	− 7.54062 79930 63	8.54913 61778 15
2.1	− 1.34934 28469 99	1.13445 96865 98	7.1	− 7.67944 33488 49	8.74603 40794 54
2.2	− 1.45143 40669 35	1.22628 86841 72	7.2	− 7.81850 94055 06	8.94429 66893 74
2.3	− 1.55556 80105 11	1.32148 25078 65	7.3	− 7.95781 94361 78	9.14390 62145 64
2.4	− 1.66161 15761 22	1.41997 05387 49	7.4	− 8.09736 69787 03	9.34484 53042 25
2.5	− 1.76944 28703 84	1.52168 16884 90	7.5	− 8.23714 58220 35	9.54709 70341 42
2.6	− 1.87895 01786 38	1.62654 50508 69	7.6	− 8.37714 99935 16	9.75064 48917 54
2.7	− 1.99003 10163 61	1.73449 04020 35	7.7	− 8.51737 37469 39	9.95547 27618 74
2.8	− 2.10259 12619 95	1.84544 85788 28	7.8	− 8.65781 15513 42	10.16156 49130 30
2.9	− 2.21654 43688 12	1.95935 17594 45	7.9	− 8.79845 80804 75	10.36890 59844 02
3.0	− 2.33181 06516 27	2.07613 36663 29	8.0	− 8.93930 82029 08	10.57748 09733 12
3.1	− 2.44831 66432 13	2.19572 97074 49	8.1	− 9.08035 69727 14	10.78727 52232 56
3.2	− 2.56599 45147 78	2.31807 70690 52	8.2	− 9.22159 96207 08	10.99827 44124 32
3.3	− 2.68478 15548 41	2.44311 47704 17	8.3	− 9.36303 15461 81	11.21046 45427 62
3.4	− 2.80461 97009 53	2.57078 36890 62	8.4	− 9.50464 83091 20	11.42383 19293 59
3.5	− 2.92545 51190 19	2.70102 65631 50	8.5	− 9.64644 56228 63	11.63836 31904 38
3.6	− 3.04723 78253 42	2.83378 79764 90	8.6	− 9.78841 93471 63	11.85404 52376 37
3.7	− 3.16992 13469 31	2.96901 43304 05	8.7	− 9.93056 54816 43	12.07086 52667 34
3.8	− 3.29346 24159 89	3.10665 38058 79	8.8	−10.07288 01596 06	12.28881 07487 37
3.9	− 3.41782 06949 39	3.24665 63186 51	8.9	−10.21535 96421 85	12.50786 94213 31
4.0	− 3.54295 85286 89	3.38897 34693 93	9.0	−10.35800 03128 01	12.72802 92806 69
4.1	− 3.66884 07212 13	3.53355 84906 21	9.1	−10.50079 86719 24	12.94927 85734 79
4.2	− 3.79543 43338 26	3.68036 61916 47	9.2	−10.64375 13321 05	13.17160 57894 90
4.3	− 3.92270 85028 21	3.82935 29025 75	9.3	−10.78685 50132 67	13.39499 96541 43
4.4	− 4.05063 42744 24	3.98047 64181 31	9.4	−10.93010 65382 43	13.61944 91215 87
4.5	− 4.17918 44552 05	4.13369 59419 14	9.5	−11.07350 28285 39	13.84494 33679 42
4.6	− 4.30833 34763 48	4.28897 20315 17	9.6	−11.21704 09003 12	14.07147 17848 17
4.7	− 4.43805 72703 06	4.44626 65448 66	9.7	−11.36071 78605 47	14.29902 39730 75
4.8	− 4.56833 31585 96	4.60554 25879 92	9.8	−11.50453 09034 33	14.52758 97368 21
4.9	− 4.69913 97495 61	4.76676 44644 38	9.9	−11.64847 73069 06	14.75715 90776 29
5.0	− 4.83045 68451 13	4.92989 76263 84	10.0	−11.79255 44293 69	14.98772 21889 61

Таблица 6.7. Гамма-функция комплексного аргумента

$x=1.9$

y	$\mathrm{Re}\ln\Gamma(z)$	$\mathrm{Im}\ln\Gamma(z)$	y	$\mathrm{Re}\ln\Gamma(z)$	$\mathrm{Im}\ln\Gamma(z)$
0.0	− 0.03898 42759 23	0.00000 00000 00	5.0	− 4.66612 81728 77	5.06052 77830 38
0.1	− 0.04242 16648 18	0.03569 47077 36	5.1	− 4.79608 44074 24	5.22603 70297 75
0.2	− 0.05270 43596 13	0.07184 49288 73	5.2	− 4.92654 53878 64	5.39337 36626 27
0.3	− 0.06974 53071 16	0.10889 51730 33	5.3	− 5.05749 30552 47	5.56250 72499 47
0.4	− 0.09340 38158 25	0.14726 87453 39	5.4	− 5.18891 02823 51	5.73340 82679 93
0.5	− 0.12349 16727 26	0.18735 90383 60	5.5	− 5.32078 08121 05	5.90604 80662 49
0.6	− 0.15978 08372 30	0.22952 28050 02	5.6	− 5.45308 92008 98	6.08039 88340 38
0.7	− 0.20201 20244 82	0.27407 56544 06	5.7	− 5.58582 07663 21	6.25643 35684 02
0.8	− 0.24990 35004 09	0.32128 97690 64	5.8	− 5.71896 15389 41	6.43412 60432 49
0.9	− 0.30315 95035 34	0.37139 36389 55	5.9	− 5.85249 82177 50	6.61345 07797 49
1.0	− 0.36147 78527 10	0.42457 34706 81	6.0	− 5.98641 81289 78	6.79438 30179 35
1.1	− 0.42455 64621 11	0.48097 58618 37	6.1	− 6.12070 91879 56	6.97689 86894 96
1.2	− 0.49209 86372 39	0.54071 13247 70	6.2	− 6.25535 98637 85	7.16097 43917 16
1.3	− 0.56381 71504 20	0.60385 82827 52	6.3	− 6.39035 91465 66	7.34658 73625 14
1.4	− 0.63943 71834 98	0.67046 72268 81	6.4	− 6.52569 65169 71	7.53371 54565 59
1.5	− 0.71869 82795 42	0.74056 47971 47	6.5	− 6.66136 19179 75	7.72233 71224 13
1.6	− 0.80135 54698 30	0.81415 76239 52	6.6	− 6.79734 57285 54	7.91243 13806 57
1.7	− 0.88717 97447 03	0.89123 58296 55	6.7	− 6.93363 87392 01	8.10397 78029 61
1.8	− 0.97595 80247 42	0.97177 61401 47	6.8	− 7.07023 21291 12	8.29695 64920 80
1.9	− 1.06749 27687 53	1.05574 45936 43	6.9	− 7.20711 74449 04	8.49134 80626 65
2.0	− 1.16160 13318 68	1.14309 88592 34	7.0	− 7.34428 65807 56	8.68713 36229 72
2.1	− 1.25811 51641 83	1.23379 01934 57	7.1	− 7.48173 17598 49	8.88429 47573 07
2.2	− 1.35687 89195 14	1.32776 50714 39	7.2	− 7.61944 55170 18	9.08281 35092 45
2.3	− 1.45774 95259 72	1.42496 65323 75	7.3	− 7.75742 06825 11	9.28267 23655 74
2.4	− 1.56059 52554 63	1.52533 52787 28	7.4	− 7.89565 03667 87	9.48385 42409 11
2.5	− 1.66529 48176 11	1.62881 05662 06	7.5	− 8.03412 79462 62	9.68634 24629 88
2.6	− 1.77173 64947 51	1.73533 09179 80	7.6	− 8.17284 70499 43	9.89012 07585 45
2.7	− 1.87981 73280 00	1.84483 46926 69	7.7	− 8.31180 15468 79	10.09517 32398 33
2.8	− 1.98944 23595 80	1.95726 05315 67	7.8	− 8.45098 55343 75	10.30148 43916 76
2.9	− 2.10052 39332 16	2.07254 77068 08	7.9	− 8.59039 33269 14	10.50903 90590 64
3.0	− 2.21298 10520 42	2.19063 63887 13	8.0	− 8.73001 94457 32	10.71782 24352 78
3.1	− 2.32673 87919 77	2.31146 78475 36	8.1	− 8.86985 86090 10	10.92787 06504 91
3.2	− 2.44172 77675 72	2.43498 46022 00	8.2	− 9.00990 57226 31	11.13901 77608 39
3.3	− 2.55788 36468 15	2.56113 05263 98	8.3	− 9.15015 58714 69	11.35140 17379 39
3.4	− 2.67514 67111 48	2.68985 09205 60	8.4	− 9.29060 43111 75	11.56495 84588 29
3.5	− 2.79346 14569 24	2.82109 25566 19	8.5	− 9.43124 64604 23	11.77967 46963 13
3.6	− 2.91277 62346 38	2.95480 37012 40	8.6	− 9.57207 78935 85	11.99553 75096 87
3.7	− 3.03304 29224 14	3.09093 41220 91	8.7	− 9.71309 43338 13	12.21253 42358 42
3.8	− 3.15421 66305 10	3.22943 50808 91	8.8	− 9.85429 16464 97	12.43065 24807 06
3.9	− 3.27625 54337 96	3.37025 93162 16	8.9	− 9.99566 58330 75	12.64988 01110 27
4.0	− 3.39912 01294 42	3.51336 10185 24	9.0	−10.13721 30251 72	12.87020 52464 75
4.1	− 3.52277 40173 08	3.65869 57993 21	9.1	−10.27892 94790 52	13.09161 62520 42
4.2	− 3.64718 27007 49	3.80622 06560 50	9.2	−10.42081 15703 53	13.31410 17307 41
4.3	− 3.77231 39057 84	3.95589 39339 63	9.3	−10.56285 57891 26	13.53765 05165 78
4.4	− 3.89813 73167 71	4.10767 52859 66	9.4	−10.70505 87350 54	13.76225 16677 85
4.5	− 4.02462 44269 53	4.26152 56312 41	9.5	−10.84741 71130 08	13.98789 44603 16
4.6	− 4.15174 84023 59	4.41740 71132 72	9.6	−10.98992 77287 64	14.21456 83815 73
4.7	− 4.27948 39577 56	4.57528 30577 67	9.7	−11.13258 74849 48	14.44226 31243 75
4.8	− 4.40780 72434 44	4.73511 79308 60	9.8	−11.27539 33771 93	14.67096 85011 36
4.9	− 4.53869 57418 38	4.89687 72979 01	9.9	−11.41834 24904 66	14.90067 48382 65
5.0	− 4.66612 81728 77	5.06052 77830 38	10.0	−11.56143 19955 88	15.13137 21707 60

Таблица 6.7. Гамма-функция комплексного аргумента

$x=2.0$

y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$	y	$Re \ln \Gamma(z)$	$Im \ln \Gamma(z)$
0.0	0.00000 00000 00	0.00000 00000 00	5.0	− 4.50127 58755 42	5.18929 93415 60
0.1	− 0.00322 26151 39	0.04234 57120 74	5.1	− 4.62939 88796 82	5.35533 87031 [illegible]
0.2	− 0.01286 59357 41	0.08509 33372 06	5.2	− 4.75805 70222 52	5.52318 [illegible] 62
0.3	− 0.02885 74027 79	0.12863 61223 10	5.3	− 4.88723 13522 76	5.69281 16137 [illegible]
0.4	− 0.05107 93722 62	0.17335 05507 97	5.4	− 5.01690 38831 33	5.86418 81052 00
0.5	− 0.07937 37235 30	0.21958 93100 95	5.5	− 5.14705 75299 57	6.03728 71248 73
0.6	− 0.11354 77183 40	0.26767 56897 80	5.6	− 5.27767 60518 81	6.21208 16640 30
0.7	− 0.15338 06308 81	0.31789 96132 02	5.7	− 5.40874 39987 03	6.38854 54709 43
0.8	− 0.19863 06626 31	0.37051 53392 47	5.8	− 5.54024 66615 82	6.56665 30238 56
0.9	− 0.24904 17059 66	0.42574 07261 44	5.9	− 5.67217 00274 24	6.74637 95048 97
1.0	− 0.30434 96090 22	0.48375 78429 30	6.0	− 5.80450 07366 29	6.92770 07748 95
1.1	− 0.36428 77010 76	0.54471 46524 35	6.1	− 5.93722 60439 25	7.11059 33491 13
1.2	− 0.42859 14442 42	0.60872 74700 17	6.2	− 6.07033 37820 31	7.29503 43738 76
1.3	− 0.49700 21701 52	0.67588 39160 88	6.3	− 6.20381 23278 98	7.48100 16040 01
1.4	− 0.56926 99322 58	0.74624 61166 63	6.4	− 6.33765 05713 36	7.66847 33815 76
1.5	− 0.64515 55533 76	0.81985 39537 67	6.5	− 6.47183 78858 22	7.85742 86143 76
1.6	− 0.72443 19760 33	0.89672 82178 63	6.6	− 6.60636 41013 16	8.04784 67567 00
1.7	− 0.80688 50339 42	0.97687 35612 07	6.7	− 6.74121 94789 19	8.23970 77898 07
1.8	− 0.89231 37613 78	1.06028 11909 26	6.8	− 6.87639 46872 45	8.43299 22035 86
1.9	− 0.98053 03476 69	1.14693 12720 53	6.9	− 7.01188 07803 50	8.62768 09788 99
2.0	− 1.07135 98302 14	1.23679 50541 04	7.0	− 7.14766 91771 18	8.82375 55706 27
2.1	− 1.16463 96040 42	1.32983 65907 26	7.1	− 7.28375 16419 82	9.02119 78914 05
2.2	− 1.26021 88108 76	1.42601 44920 94	7.2	− 7.42012 02668 81	9.21999 02960 14
2.3	− 1.35795 76568 48	1.52528 30352 04	7.3	− 7.55676 74543 62	9.42011 55664 09
2.4	− 1.45772 66961 57	1.62759 33595 36	7.4	− 7.69368 59017 46	9.62155 68973 45
2.5	− 1.55940 61080 61	1.73289 43555 35	7.5	− 7.83086 85862 69	9.82429 78825 87
2.6	− 1.66288 49866 52	1.84113 34120 22	7.6	− 7.96830 87511 38	10.02832 25016 83
2.7	− 1.76806 06566 17	1.95225 70264 63	7.7	− 8.10599 98924 36	10.23361 51072 54
2.8	− 1.87483 80234 65	2.06621 12994 71	7.8	− 8.24393 57468 08	10.44016 04128 09
2.9	− 1.98312 89631 02	2.18294 23322 91	7.9	− 8.38211 02798 83	10.64794 34810 35
3.0	− 2.09285 17530 93	2.30239 65434 67	8.0	− 8.52051 76753 67	10.85694 97125 60
3.1	− 2.20393 05460 64	2.42452 09185 18	8.1	− 8.65915 23247 82	11.06716 48351 59
3.2	− 2.31629 48844 77	2.54926 32043 52	8.2	− 8.79800 88177 87	11.27857 48933 86
3.3	− 2.42987 92551 37	2.67657 20582 60	8.3	− 8.93708 19330 47	11.49116 62386 10
3.4	− 2.54462 26813 03	2.80639 71597 50	8.4	− 9.07636 66296 28	11.70492 55194 45
3.5	− 2.66046 83499 73	2.93868 92920 59	8.5	− 9.21585 80388 55	11.91983 96725 52
3.6	− 2.77736 32717 84	3.07340 03990 47	8.6	− 9.35555 14566 37	12.13589 59137 86
3.7	− 2.89525 79709 78	3.21048 36221 88	8.7	− 9.49544 23361 92	12.35308 17297 01
3.8	− 3.01410 62029 30	3.34989 33215 16	8.8	− 9.63552 62811 84	12.57138 48693 62
3.9	− 3.13386 46968 42	3.49158 50837 57	8.9	− 9.77579 90392 11	12.79079 33364 76
4.0	− 3.25449 29213 81	3.63551 57202 41	9.0	− 9.91625 64956 49	13.01129 53818 23
4.1	− 3.37595 28711 45	3.78164 32567 78	9.1	−10.05689 46678 12	13.23287 94959 63
4.2	− 3.49820 88720 59	3.92992 69172 45	9.2	−10.19770 96994 20	13.45553 44022 19
4.3	− 3.62122 74039 03	4.08032 71023 23	9.3	−10.33869 78553 49	13.67924 90499 21
4.4	− 3.74497 69383 89	4.23280 53645 81	9.4	−10.47985 55166 49	13.90401 26078 95
4.5	− 3.86942 77912 99	4.38732 43808 43	9.5	−10.62117 91758 12	14.12981 44581 93
4.6	− 3.99455 19873 65	4.54384 79226 20	9.6	−10.76266 54322 81	14.35664 41900 46
4.7	− 4.12032 31366 90	4.70234 08252 48	9.7	−10.90431 09881 75	14.58449 15940 42
4.8	− 4.24671 63216 20	4.86276 89562 20	9.8	−11.04611 26442 29	14.81334 66565 09
4.9	− 4.37370 79930 87	5.02509 91831 32	9.9	−11.18806 72959 27	15.04319 95540 92
5.0	− 4.50127 58755 42	5.18929 93415 60	10.0	−11.33017 19298 27	15.27404 06485 34

Таблица 6.8. Дигамма-функция комплексного аргумента

$x=1.0$

y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$	y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$
0.0	−0.57721 56649	0.00000	5.0	1.61278 48446	1.47080
0.1	−0.56529 77902	0.16342	5.1	1.63245 69889	1.47276
0.2	−0.53073 04055	0.32064	5.2	1.65175 20861	1.47464
0.3	−0.47675 48934	0.46653	5.3	1.67068 42228	1.47646
0.4	−0.40786 79442	0.59770	5.4	1.68926 67162	1.47820
0.5	−0.32888 63572	0.71269	5.5	1.70751 21687	1.47989
0.6	−0.24419 65809	0.81160	5.6	1.72543 25175	1.48151
0.7	−0.15733 61258	0.89563	5.7	1.74303 90807	1.48308
0.8	−0.07088 34022	0.96655	5.8	1.76034 25988	1.48459
0.9	+0.01345 20154	1.02628	5.9	1.77735 32733	1.48605
1.0	0.09465 03206	1.07667	6.0	1.79408 08018	1.48746
1.1	0.17219 05426	1.11938	6.1	1.81053 44105	1.48883
1.2	0.24588 65515	1.15580	6.2	1.82672 28842	1.49015
1.3	0.31576 20906	1.18707	6.3	1.84265 45939	1.49143
1.4	0.38196 28134	1.21413	6.4	1.85833 75219	1.49267
1.5	0.44469 79402	1.23772	6.5	1.87377 92858	1.49387
1.6	0.50420 34618	1.25843	6.6	1.88898 71602	1.49504
1.7	0.56072 00645	1.27675	6.7	1.90396 80964	1.49617
1.8	0.61448 06554	1.29306	6.8	1.91872 87422	1.49727
1.9	0.66570 39172	1.30766	6.9	1.93327 54582	1.49833
2.0	0.71459 15154	1.32081	7.0	1.94761 43346	1.49937
2.1	0.76132 74328	1.33271	7.1	1.96175 12062	1.50037
2.2	0.80607 84807	1.34353	7.2	1.97569 16663	1.50135
2.3	0.84899 54079	1.35341	7.3	1.98944 10799	1.50230
2.4	0.89021 42662	1.36246	7.4	2.00300 45959	1.50323
2.5	0.92985 78387	1.37080	7.5	2.01638 71585	1.50413
2.6	0.96803 70243	1.37849	7.6	2.02959 35177	1.50501
2.7	1.00485 21252	1.38561	7.7	2.04262 82397	1.50586
2.8	1.04039 40175	1.39222	7.8	2.05549 57159	1.50669
2.9	1.07474 51976	1.39838	7.9	2.06820 01717	1.50751
3.0	1.10798 07107	1.40413	8.0	2.08074 56749	1.50830
3.1	1.14016 89703	1.40951	8.1	2.09313 61434	1.50907
3.2	1.17137 24783	1.41455	8.2	2.10537 53524	1.50982
3.3	1.20164 84581	1.41928	8.3	2.11746 69410	1.51056
3.4	1.23104 94107	1.42374	8.4	2.12941 44191	1.51127
3.5	1.25962 36033	1.42794	8.5	2.14122 11731	1.51197
3.6	1.28741 54995	1.43191	8.6	2.15289 04718	1.51266
3.7	1.31446 61381	1.43566	8.7	2.16442 54716	1.51332
3.8	1.34081 34679	1.43922	8.8	2.17582 92217	1.51398
3.9	1.36649 26435	1.44259	8.9	2.18710 46687	1.51462
4.0	1.39153 62879	1.44580	9.0	2.19825 46616	1.51524
4.1	1.41597 47256	1.44885	9.1	2.20928 19555	1.51585
4.2	1.43983 61892	1.45175	9.2	2.22018 92160	1.51645
4.3	1.46314 70060	1.45452	9.3	2.23097 90229	1.51703
4.4	1.48593 17620	1.45716	9.4	2.24165 38740	1.51760
4.5	1.50821 34505	1.45969	9.5	2.25221 61882	1.51816
4.6	1.53001 36052	1.46210	9.6	2.26266 83093	1.51871
4.7	1.55135 24197	1.46441	9.7	2.27301 25085	1.51925
4.8	1.57224 88550	1.46663	9.8	2.28325 09877	1.51978
4.9	1.59272 07370	1.46876	9.9	2.29338 58823	1.52029
5.0	1.61278 48446	1.47080	10.0	2.30341 92637	1.52080
		$\begin{bmatrix}(-3)2\\5\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-5)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)1\\2\end{bmatrix}$

$$Im\,\psi(1+iy)=\tfrac{1}{2}\pi\coth\pi y-\frac{1}{2y}.$$

Вспомогательная функция для Re $\psi(1+iy)$

y^{-1}	$f_4(y)$	$\langle y\rangle$	y^{-1}	$f_4(y)$	$\langle y\rangle$
0.11	0.00100 956	9	0.05	0.00020 839	20
0.10	0.00083 417	10	0.04	0.00013 335	25
0.09	0.00067 555	11	0.03	0.00007 501	33
0.08	0.00053 368	13	0.02	0.00003 333	50
0.07	0.00040 853	14	0.01	0.00000 833	100
0.06	0.00030 011	17	0.00	0.00000 000	∞
	$\begin{bmatrix}(-6)2\\3\end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix}(-6)2\\3\end{bmatrix}$	

$$\mathrm{Re}\,\psi(1+iy)=\ln y+f_4(y),$$

$\langle y\rangle$ — целое число, ближайшее к y.

Таблица 6.8. Дигамма функция комплексного аргумента

		$x=1.1$						$x=1.2$			
y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$	y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$	y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$	y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$
0.0	−0.42375	0.00000	5.0	1.61498	1.45097	0.0	−0.28904	0.00000	5.0	1.61756	1.43125
0.1	−0.41451	0.14258	5.1	1.63457	1.45332	0.1	−0.28169	0.12620	5.1	1.63705	1.43396
0.2	−0.38753	0.28082	5.2	1.65378	1.45557	0.2	−0.26014	0.24926	5.2	1.65617	1.43658
0.3	−0.34490	0.41099	5.3	1.67264	1.45774	0.3	−0.22578	0.36640	5.3	1.67494	1.43910
0.4	−0.28961	0.53042	5.4	1.69115	1.45983	0.4	−0.18064	0.47552	5.4	1.69336	1.44152
0.5	−0.22498	0.63764	5.5	1.70933	1.46184	0.5	−0.12710	0.57530	5.5	1.71146	1.44386
0.6	−0.15426	0.73229	5.6	1.72718	1.46378	0.6	−0.06753	0.66517	5.6	1.72924	1.44612
0.7	−0.08023	0.81484	5.7	1.74473	1.46565	0.7	−0.00412	0.74519	5.7	1.74672	1.44829
0.8	−0.00509	0.88630	5.8	1.76197	1.46746	0.8	+0.06130	0.81589	5.8	1.76390	1.45039
0.9	+0.06954	0.94792	5.9	1.77893	1.46921	0.9	0.12730	0.87806	5.9	1.78079	1.45243
1.0	0.14255	1.00102	6.0	1.79561	1.47090	1.0	0.19280	0.93260	6.0	1.79740	1.45439
1.1	0.21327	1.04687	6.1	1.81201	1.47253	1.1	0.25707	0.98046	6.1	1.81375	1.45629
1.2	0.28131	1.08660	6.2	1.82815	1.47411	1.2	0.31960	1.02252	6.2	1.82983	1.45813
1.3	0.34649	1.12119	6.3	1.84404	1.47565	1.3	0.38012	1.05960	6.3	1.84567	1.45991
1.4	0.40880	1.15146	6.4	1.85968	1.47713	1.4	0.43846	1.09240	6.4	1.86126	1.46164
1.5	0.46829	1.17810	6.5	1.87508	1.47857	1.5	0.49459	1.12153	6.5	1.87661	1.46331
1.6	0.52507	1.20169	6.6	1.89025	1.47996	1.6	0.54851	1.14752	6.6	1.89173	1.46493
1.7	0.57930	1.22269	6.7	1.90519	1.48132	1.7	0.60028	1.17082	6.7	1.90663	1.46651
1.8	0.63111	1.24148	6.8	1.91992	1.48263	1.8	0.64999	1.19179	6.8	1.92132	1.46803
1.9	0.68067	1.25839	6.9	1.93443	1.48391	1.9	0.69774	1.21074	6.9	1.93579	1.46952
2.0	0.72813	1.27368	7.0	1.94874	1.48515	2.0	0.74362	1.22794	7.0	1.95006	1.47096
2.1	0.77363	1.28755	7.1	1.96284	1.48635	2.1	0.78775	1.24362	7.1	1.96413	1.47236
2.2	0.81730	1.30021	7.2	1.97675	1.48752	2.2	0.83022	1.25796	7.2	1.97800	1.47372
2.3	0.85928	1.31179	7.3	1.99047	1.48866	2.3	0.87114	1.27112	7.3	1.99169	1.47505
2.4	0.89967	1.32243	7.4	2.00401	1.48977	2.4	0.91060	1.28323	7.4	2.00519	1.47634
2.5	0.93858	1.33224	7.5	2.01736	1.49085	2.5	0.94868	1.29442	7.5	2.01852	1.47760
2.6	0.97610	1.34131	7.6	2.03054	1.49190	2.6	0.98546	1.30478	7.6	2.03167	1.47882
2.7	1.01234	1.34972	7.7	2.04356	1.49292	2.7	1.02103	1.31441	7.7	2.04465	1.48001
2.8	1.04736	1.35753	7.8	2.05640	1.49392	2.8	1.05546	1.32337	7.8	2.05746	1.48117
2.9	1.08124	1.36482	7.9	2.06908	1.49489	2.9	1.08881	1.33173	7.9	2.07012	1.48230
3.0	1.11405	1.37162	8.0	2.08160	1.49584	3.0	1.12113	1.33955	8.0	2.08262	1.48341
3.1	1.14586	1.37800	8.1	2.09397	1.49676	3.1	1.15250	1.34688	8.1	2.09496	1.48448
3.2	1.17671	1.38398	8.2	2.10619	1.49767	3.2	1.18295	1.35377	8.2	2.10716	1.48553
3.3	1.20667	1.38960	8.3	2.11826	1.49855	3.3	1.21254	1.36024	8.3	2.11921	1.48656
3.4	1.23578	1.39489	8.4	2.13019	1.49940	3.4	1.24132	1.36635	8.4	2.13111	1.48756
3.5	1.26409	1.39989	8.5	2.14198	1.50024	3.5	1.26932	1.37211	8.5	2.14288	1.48853
3.6	1.29164	1.40461	8.6	2.15363	1.50106	3.6	1.29659	1.37756	8.6	2.15451	1.48949
3.7	1.31847	1.40907	8.7	2.16515	1.50186	3.7	1.32315	1.38272	8.7	2.16601	1.49042
3.8	1.34461	1.41331	8.8	2.17654	1.50265	3.8	1.34905	1.38761	8.8	2.17738	1.49133
3.9	1.37010	1.41732	8.9	2.18780	1.50341	3.9	1.37432	1.39226	8.9	2.18862	1.49222
4.0	1.39496	1.42114	9.0	2.19893	1.50416	4.0	1.39898	1.39667	9.0	2.19973	1.49310
4.1	1.41924	1.42478	9.1	2.20995	1.50489	4.1	1.42306	1.40088	9.1	2.21073	1.49395
4.2	1.44294	1.42824	9.2	2.22084	1.50561	4.2	1.44659	1.40489	9.2	2.22160	1.49478
4.3	1.46611	1.43154	9.3	2.23161	1.50631	4.3	1.46959	1.40871	9.3	2.23236	1.49560
4.4	1.48876	1.43469	9.4	2.24228	1.50699	4.4	1.49209	1.41236	9.4	2.24301	1.49640
4.5	1.51092	1.43771	9.5	2.25283	1.50766	4.5	1.51410	1.41586	9.5	2.25354	1.49718
4.6	1.53261	1.44059	9.6	2.26326	1.50832	4.6	1.53565	1.41920	9.6	2.26397	1.49794
4.7	1.55384	1.44335	9.7	2.27360	1.50896	4.7	1.55676	1.42240	9.7	2.27429	1.49869
4.8	1.57463	1.44600	9.8	2.28382	1.50960	4.8	1.57743	1.42547	9.8	2.28450	1.49943
4.9	1.59501	1.44854	9.9	2.29395	1.51021	4.9	1.59769	1.42842	9.9	2.29461	1.50015
5.0	1.61498	1.45097	10.0	2.30397	1.51082	5.0	1.61756	1.43125	10.0	2.30462	1.50085
	$\begin{bmatrix}(-3)2\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)2\\5\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-5)5\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)1\\2\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-3)1\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)1\\5\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-5)5\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)1\\2\end{bmatrix}$

Таблица 6.8. Дигамма-функция комплексного аргумента

$x=1.3$

y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$	y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$
0.0	−0.16919	0.00000	5.0	1.62052	1.41163
0.1	−0.16323	0.11303	5.1	1.63990	1.41472
0.2	−0.14567	0.22372	5.2	1.65891	1.41769
0.3	−0.11748	0.32997	5.3	1.67758	1.42055
0.4	−0.08009	0.43011	5.4	1.69591	1.42331
0.5	−0.03520	0.52298	5.5	1.71392	1.42597
0.6	+0.01541	0.60796	5.6	1.73161	1.42853
0.7	0.07003	0.68491	5.7	1.74900	1.43101
0.8	0.12718	0.75404	5.8	1.76611	1.43340
0.9	0.18561	0.81582	5.9	1.78292	1.43571
1.0	0.24434	0.87085	6.0	1.79947	1.43794
1.1	0.30262	0.91983	6.1	1.81575	1.44011
1.2	0.35994	0.96341	6.2	1.83177	1.44220
1.3	0.41593	1.00227	6.3	1.84754	1.44423
1.4	0.47035	1.03698	6.4	1.86308	1.44619
1.5	0.52310	1.06809	6.5	1.87837	1.44810
1.6	0.57409	1.09605	6.6	1.89344	1.44995
1.7	0.62333	1.12126	6.7	1.90829	1.45174
1.8	0.67084	1.14409	6.8	1.92293	1.45348
1.9	0.71667	1.16483	6.9	1.93735	1.45517
2.0	0.76087	1.18373	7.0	1.95158	1.45681
2.1	0.80353	1.20102	7.1	1.96560	1.45841
2.2	0.84470	1.21688	7.2	1.97944	1.45996
2.3	0.88447	1.23148	7.3	1.99309	1.46147
2.4	0.92290	1.24495	7.4	2.00655	1.46294
2.5	0.96007	1.25743	7.5	2.01984	1.46438
2.6	0.99604	1.26900	7.6	2.03296	1.46577
2.7	1.03088	1.27976	7.7	2.04591	1.46713
2.8	1.06464	1.28980	7.8	2.05869	1.46845
2.9	1.09739	1.29918	7.9	2.07131	1.46974
3.0	1.12917	1.30797	8.0	2.08378	1.47100
3.1	1.16004	1.31621	8.1	2.09610	1.47223
3.2	1.19005	1.32396	8.2	2.10827	1.47342
3.3	1.21923	1.33126	8.3	2.12029	1.47459
3.4	1.24763	1.33814	8.4	2.13217	1.47573
3.5	1.27529	1.34464	8.5	2.14391	1.47685
3.6	1.30223	1.35080	8.6	2.15552	1.47794
3.7	1.32851	1.35663	8.7	2.16700	1.47900
3.8	1.35413	1.36216	8.8	2.17834	1.48004
3.9	1.37915	1.36742	8.9	2.18956	1.48106
4.0	1.40357	1.37242	9.0	2.20066	1.48205
4.1	1.42744	1.37718	9.1	2.21163	1.48302
4.2	1.45077	1.38172	9.2	2.22249	1.48397
4.3	1.47358	1.38606	9.3	2.23323	1.48490
4.4	1.49590	1.39020	9.4	2.24386	1.48582
4.5	1.51775	1.39416	9.5	2.25437	1.48671
4.6	1.53914	1.39795	9.6	2.26478	1.48758
4.7	1.56010	1.40158	9.7	2.27508	1.48844
4.8	1.58064	1.40507	9.8	2.28528	1.48927
4.9	1.60078	1.40841	9.9	2.29537	1.49010
5.0	1.62052	1.41163	10.0	2.30537	1.49090
	$\left[{(-3)2 \atop 5}\right]$	$\left[{(-3)1 \atop 5}\right]$		$\left[{(-5)5 \atop 3}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 3}\right]$

$x=1.4$

y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$	y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$
0.0	−0.06138	0.00000	5.0	1.62386	1.39213
0.1	−0.05646	0.10223	5.1	1.64311	1.39559
0.2	−0.04192	0.20269	5.2	1.66200	1.39891
0.3	−0.01844	0.29974	5.3	1.68055	1.40211
0.4	+0.01295	0.39204	5.4	1.69878	1.40519
0.5	0.05100	0.47862	5.5	1.71668	1.40817
0.6	0.09436	0.55886	5.6	1.73428	1.41103
0.7	0.14171	0.63250	5.7	1.75158	1.41380
0.8	0.19183	0.69957	5.8	1.76860	1.41648
0.9	0.24367	0.76033	5.9	1.78533	1.41907
1.0	0.29635	0.81517	6.0	1.80180	1.42157
1.1	0.34918	0.86457	6.1	1.81800	1.42399
1.2	0.40163	0.90903	6.2	1.83395	1.42634
1.3	0.45331	0.94907	6.3	1.84966	1.42861
1.4	0.50395	0.98517	6.4	1.86513	1.43081
1.5	0.55336	1.01778	6.5	1.88036	1.43294
1.6	0.60144	1.04730	6.6	1.89537	1.43502
1.7	0.64811	1.07409	6.7	1.91017	1.43702
1.8	0.69337	1.09849	6.8	1.92475	1.43898
1.9	0.73722	1.12075	6.9	1.93912	1.44087
2.0	0.77968	1.14113	7.0	1.95330	1.44271
2.1	0.82078	1.15984	7.1	1.96727	1.44450
2.2	0.86058	1.17707	7.2	1.98106	1.44625
2.3	0.89913	1.19296	7.3	1.99467	1.44794
2.4	0.93647	1.20768	7.4	2.00809	1.44959
2.5	0.97265	1.22133	7.5	2.02134	1.45119
2.6	1.00775	1.23402	7.6	2.03442	1.45276
2.7	1.04179	1.24585	7.7	2.04733	1.45428
2.8	1.07484	1.25689	7.8	2.06008	1.45576
2.9	1.10693	1.26723	7.9	2.07267	1.45721
3.0	1.13813	1.27693	8.0	2.08510	1.45862
3.1	1.16846	1.28604	8.1	2.09739	1.46000
3.2	1.19797	1.29461	8.2	2.10952	1.46134
3.3	1.22670	1.30269	8.3	2.12151	1.46266
3.4	1.25469	1.31032	8.4	2.13337	1.46394
3.5	1.28196	1.31753	8.5	2.14508	1.46519
3.6	1.30855	1.32436	8.6	2.15666	1.46641
3.7	1.33450	1.33084	8.7	2.16811	1.46760
3.8	1.35983	1.33699	8.8	2.17943	1.46877
3.9	1.38456	1.34283	8.9	2.19063	1.46991
4.0	1.40873	1.34840	9.0	2.20170	1.47103
4.1	1.43235	1.35370	9.1	2.21265	1.47212
4.2	1.45546	1.35876	9.2	2.22349	1.47319
4.3	1.47806	1.36359	9.3	2.23421	1.47423
4.4	1.50019	1.36821	9.4	2.24481	1.47525
4.5	1.52185	1.37263	9.5	2.25531	1.47626
4.6	1.54307	1.37686	9.6	2.26570	1.47724
4.7	1.56387	1.38092	9.7	2.27598	1.47820
4.8	1.58425	1.38481	9.8	2.28616	1.47914
4.9	1.60425	1.38854	9.9	2.29623	1.48006
5.0	1.62386	1.39213	10.0	2.30621	1.48096
	$\left[{(-3)1 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)8 \atop 4}\right]$		$\left[{(-5)5 \atop 3}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 3}\right]$

Таблица 6.8. **Дигамма-функция комплексного аргумента**

$x=1.5$

y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$	y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$
0.0	0.03649	0.00000	5.0	1.62756	1.37278
0.1	0.04062	0.09325	5.1	1.64667	1.37658
0.2	0.05284	0.18511	5.2	1.66543	1.38025
0.3	0.07266	0.27432	5.3	1.68386	1.38378
0.4	0.09932	0.35978	5.4	1.70196	1.38719
0.5	0.13189	0.44066	5.5	1.71976	1.39047
0.6	0.16935	0.51640	5.6	1.73725	1.39364
0.7	0.21064	0.58668	5.7	1.75445	1.39670
0.8	0.25479	0.65144	5.8	1.77137	1.39965
0.9	0.30091	0.71078	5.9	1.78801	1.40251
1.0	0.34824	0.76494	6.0	1.80439	1.40528
1.1	0.39614	0.81424	6.1	1.82051	1.40796
1.2	0.44411	0.85907	6.2	1.83638	1.41055
1.3	0.49175	0.89980	6.3	1.85201	1.41306
1.4	0.53878	0.93684	6.4	1.86741	1.41549
1.5	0.58497	0.97054	6.5	1.88258	1.41786
1.6	0.63018	1.00127	6.6	1.89752	1.42015
1.7	0.67432	1.02932	6.7	1.91225	1.42237
1.8	0.71732	1.05500	6.8	1.92677	1.42453
1.9	0.75916	1.07855	6.9	1.94109	1.42663
2.0	0.79983	1.10020	7.0	1.95521	1.42866
2.1	0.83935	1.12015	7.1	1.96914	1.43065
2.2	0.87772	1.13857	7.2	1.98287	1.43257
2.3	0.91499	1.15563	7.3	1.99643	1.43445
2.4	0.95118	1.17146	7.4	2.00981	1.43628
2.5	0.98634	1.18618	7.5	2.02301	1.43805
2.6	1.02050	1.19990	7.6	2.03604	1.43978
2.7	1.05370	1.21271	7.7	2.04891	1.44147
2.8	1.08598	1.22469	7.8	2.06162	1.44312
2.9	1.11738	1.23592	7.9	2.07417	1.44472
3.0	1.14794	1.24647	8.0	2.08657	1.44628
3.1	1.17769	1.25639	8.1	2.09882	1.44781
3.2	1.20667	1.26574	8.2	2.11092	1.44930
3.3	1.23491	1.27457	8.3	2.12288	1.45075
3.4	1.26245	1.28290	8.4	2.13470	1.45217
3.5	1.28931	1.29080	8.5	2.14638	1.45355
3.6	1.31552	1.29828	8.6	2.15794	1.45491
3.7	1.34112	1.30537	8.7	2.16936	1.45623
3.8	1.36612	1.31212	8.8	2.18065	1.45753
3.9	1.39055	1.31853	8.9	2.19182	1.45879
4.0	1.41443	1.32464	9.0	2.20286	1.46003
4.1	1.43779	1.33047	9.1	2.21379	1.46124
4.2	1.46065	1.33603	9.2	2.22460	1.46242
4.3	1.48302	1.34134	9.3	2.23530	1.46358
4.4	1.50493	1.34642	9.4	2.24588	1.46471
4.5	1.52639	1.35128	9.5	2.25635	1.46582
4.6	1.54742	1.35594	9.6	2.26672	1.46691
4.7	1.56804	1.36041	9.7	2.27698	1.46798
4.8	1.58826	1.36470	9.8	2.28714	1.46902
4.9	1.60810	1.36882	9.9	2.29720	1.47004
5.0	1.62756	1.37278	10.0	2.30716	1.47105
	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)1\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)7\\4\end{smallmatrix}\right]$		$\left[\begin{smallmatrix}(-5)4\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)2\\3\end{smallmatrix}\right]$

$x=1.6$

y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$	y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$
0.0	0.12605	0.00000	5.0	1.63162	1.35357
0.1	0.12955	0.08566	5.1	1.65057	1.35773
0.2	0.13995	0.17023	5.2	1.66919	1.36173
0.3	0.15687	0.25268	5.3	1.68748	1.36558
0.4	0.17976	0.33214	5.4	1.70546	1.36930
0.5	0.20790	0.40789	5.5	1.72313	1.37289
0.6	0.24050	0.47942	5.6	1.74051	1.37635
0.7	0.27674	0.54642	5.7	1.75760	1.37969
0.8	0.31581	0.60875	5.8	1.77441	1.38293
0.9	0.35697	0.66642	5.9	1.79095	1.38605
1.0	0.39957	0.71957	6.0	1.80724	1.38908
1.1	0.44305	0.76840	6.1	1.82327	1.39200
1.2	0.48692	0.81319	6.2	1.83906	1.39484
1.3	0.53082	0.85423	6.3	1.85460	1.39759
1.4	0.57445	0.89183	6.4	1.86992	1.40025
1.5	0.61757	0.92629	6.5	1.88501	1.40284
1.6	0.66001	0.95790	6.6	1.89989	1.40534
1.7	0.70167	0.98693	6.7	1.91455	1.40778
1.8	0.74244	1.01363	6.8	1.92900	1.41014
1.9	0.78228	1.03824	6.9	1.94326	1.41244
2.0	0.82115	1.06096	7.0	1.95731	1.41467
2.1	0.85905	1.08197	7.1	1.97118	1.41684
2.2	0.89597	1.10144	7.2	1.98487	1.41895
2.3	0.93193	1.11953	7.3	1.99837	1.42101
2.4	0.96694	1.13635	7.4	2.01169	1.42301
2.5	1.00102	1.15204	7.5	2.02485	1.42496
2.6	1.03421	1.16668	7.6	2.03784	1.42686
2.7	1.06653	1.18039	7.7	2.05066	1.42871
2.8	1.09801	1.19324	7.8	2.06332	1.43051
2.9	1.12867	1.20530	7.9	2.07583	1.43227
3.0	1.15856	1.21664	8.0	2.08819	1.43398
3.1	1.18770	1.22733	8.1	2.10040	1.43565
3.2	1.21611	1.23741	8.2	2.11246	1.43728
3.3	1.24383	1.24693	8.3	2.12439	1.43888
3.4	1.27089	1.25594	8.4	2.13617	1.44043
3.5	1.29731	1.26448	8.5	2.14782	1.44195
3.6	1.32311	1.27257	8.6	2.15934	1.44344
3.7	1.34833	1.28026	8.7	2.17073	1.44489
3.8	1.37297	1.28757	8.8	2.18199	1.44631
3.9	1.39707	1.29454	8.9	2.19313	1.44770
4.0	1.42065	1.30117	9.0	2.20415	1.44905
4.1	1.44373	1.30750	9.1	2.21504	1.45038
4.2	1.46632	1.31354	9.2	2.22583	1.45168
4.3	1.48844	1.31932	9.3	2.23650	1.45295
4.4	1.51012	1.32485	9.4	2.24706	1.45420
4.5	1.53136	1.33014	9.5	2.25751	1.45542
4.6	1.55219	1.33522	9.6	2.26785	1.45661
4.7	1.57262	1.34009	9.7	2.27809	1.45778
4.8	1.59265	1.34476	9.8	2.28822	1.45892
4.9	1.61232	1.34925	9.9	2.29826	1.46005
5.0	1.63162	1.35357	10.0	2.30820	1.46115
	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)9\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)6\\4\end{smallmatrix}\right]$		$\left[\begin{smallmatrix}(-5)4\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)2\\3\end{smallmatrix}\right]$

$$Im\,\psi(1.5+iy)=\tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{th}\,\pi y-\frac{4y}{4y^2+1}$$

Таблица 6.8. Дигамма-функция комплексного аргумента

$x=1.7$

y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$	y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$
0.0	0.20855	0.00000	5.0	1.63603	1.33453
0.1	0.21156	0.07918	5.1	1.65482	1.33902
0.2	0.22050	0.15747	5.2	1.67328	1.34335
0.3	0.23511	0.23407	5.3	1.69142	1.34752
0.4	0.25494	0.30824	5.4	1.70926	1.35154
0.5	0.27945	0.37937	5.5	1.72680	1.35543
0.6	0.30803	0.44701	5.6	1.74405	1.35918
0.7	0.34001	0.51086	5.7	1.76102	1.36280
0.8	0.37474	0.57074	5.8	1.77772	1.36630
0.9	0.41161	0.62661	5.9	1.79416	1.36969
1.0	0.45005	0.67852	6.0	1.81034	1.37297
1.1	0.48957	0.72661	6.1	1.82627	1.37614
1.2	0.52973	0.77107	6.2	1.84196	1.37922
1.3	0.57018	0.81211	6.3	1.85742	1.38220
1.4	0.61063	0.84996	6.4	1.87266	1.38509
1.5	0.65085	0.88488	6.5	1.88767	1.38789
1.6	0.69065	0.91710	6.6	1.90246	1.39061
1.7	0.72990	0.94685	6.7	1.91705	1.39326
1.8	0.76849	0.97436	6.8	1.93143	1.39582
1.9	0.80636	0.99982	6.9	1.94562	1.39832
2.0	0.84345	1.02342	7.0	1.95961	1.40074
2.1	0.87973	1.04533	7.1	1.97342	1.40310
2.2	0.91519	1.06570	7.2	1.98704	1.40539
2.3	0.94981	1.08468	7.3	2.00048	1.40762
2.4	0.98362	1.10238	7.4	2.01375	1.40980
2.5	1.01661	1.11893	7.5	2.02685	1.41191
2.6	1.04879	1.13441	7.6	2.03979	1.41398
2.7	1.08020	1.14893	7.7	2.05256	1.41599
2.8	1.11084	1.16257	7.8	2.06518	1.41794
2.9	1.14075	1.17539	7.9	2.07764	1.41986
3.0	1.16993	1.18747	8.0	2.08996	1.42172
3.1	1.19842	1.19886	8.1	2.10212	1.42354
3.2	1.22625	1.20962	8.2	2.11415	1.42531
3.3	1.25342	1.21981	8.3	2.12603	1.42704
3.4	1.27997	1.22945	8.4	2.13778	1.42874
3.5	1.30592	1.23859	8.5	2.14939	1.43039
3.6	1.33129	1.24727	8.6	2.16087	1.43200
3.7	1.35610	1.25553	8.7	2.17222	1.43358
3.8	1.38037	1.26338	8.8	2.18345	1.43513
3.9	1.40413	1.27087	8.9	2.19456	1.43664
4.0	1.42738	1.27800	9.0	2.20555	1.43811
4.1	1.45015	1.28481	9.1	2.21642	1.43956
4.2	1.47246	1.29132	9.2	2.22717	1.44097
4.3	1.49432	1.29755	9.3	2.23781	1.44235
4.4	1.51574	1.30351	9.4	2.24834	1.44371
4.5	1.53675	1.30922	9.5	2.25877	1.44503
4.6	1.55736	1.31470	9.6	2.26908	1.44633
4.7	1.57758	1.31996	9.7	2.27930	1.44760
4.8	1.59742	1.32501	9.8	2.28941	1.44885
4.9	1.61690	1.32986	9.9	2.29942	1.45007
5.0	1.63603	1.33453	0.0	2.30933	1.45127
	$\left[{(-4)7 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)5 \atop 4}\right]$		$\left[{(-5)1 \atop 3}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 3}\right]$

$x=1.8$

y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$	y	$Re\,\psi(z)$	$Im\,\psi(z)$
0.0	0.28499	0.00000	5.0	1.64078	1.31566
0.1	0.28760	0.07358	5.1	1.65939	1.32048
0.2	0.29537	0.14644	5.2	1.67769	1.32513
0.3	0.30809	0.21792	5.3	1.69567	1.32961
0.4	0.32541	0.28740	5.4	1.71336	1.33393
0.5	0.34693	0.35437	5.5	1.73076	1.33810
0.6	0.37215	0.41842	5.6	1.74787	1.34213
0.7	0.40053	0.47928	5.7	1.76472	1.34603
0.8	0.43155	0.53675	5.8	1.78130	1.34979
0.9	0.46469	0.59076	5.9	1.79762	1.35344
1.0	0.49947	0.64131	6.0	1.81369	1.35697
1.1	0.53546	0.68847	6.1	1.82952	1.36038
1.2	0.57226	0.73237	6.2	1.84511	1.36369
1.3	0.60955	0.77316	6.3	1.86047	1.36690
1.4	0.64706	0.81103	6.4	1.87561	1.37001
1.5	0.68455	0.84617	6.5	1.89053	1.37303
1.6	0.72184	0.87877	6.6	1.90525	1.37596
1.7	0.75879	0.90903	6.7	1.91975	1.37881
1.8	0.79528	0.93713	6.8	1.93406	1.38158
1.9	0.83122	0.96326	6.9	1.94817	1.38426
2.0	0.86655	0.98757	7.0	1.96210	1.38688
2.1	0.90123	1.01022	7.1	1.97583	1.38942
2.2	0.93523	1.03136	7.2	1.98939	1.39189
2.3	0.96853	1.05110	7.3	2.00277	1.39430
2.4	1.00111	1.06957	7.4	2.01598	1.39664
2.5	1.03299	1.08687	7.5	2.02903	1.39892
2.6	1.06416	1.10310	7.6	2.04191	1.40115
2.7	1.09463	1.11836	7.7	2.05463	1.40332
2.8	1.12442	1.13270	7.8	2.06719	1.40543
2.9	1.15353	1.14622	7.9	2.07960	1.40749
3.0	1.18200	1.15898	8.0	2.09187	1.40950
3.1	1.20982	1.17103	8.1	2.10399	1.41146
3.2	1.23703	1.18243	8.2	2.11597	1.41338
3.3	1.26363	1.19322	8.3	2.12781	1.41525
3.4	1.28965	1.20345	8.4	2.13952	1.41708
3.5	1.31511	1.21317	8.5	2.15109	1.41886
3.6	1.34003	1.22241	8.6	2.16253	1.42061
3.7	1.36441	1.23119	8.7	2.17385	1.42231
3.8	1.38829	1.23956	8.8	2.18504	1.42398
3.9	1.41168	1.24754	8.9	2.19611	1.42561
4.0	1.43459	1.25516	9.0	2.20707	1.42720
4.1	1.45704	1.26243	9.1	2.21790	1.42876
4.2	1.47904	1.26939	9.2	2.22862	1.43029
4.3	1.50062	1.27605	9.3	2.23923	1.43178
4.4	1.52178	1.28242	9.4	2.24974	1.43324
4.5	1.54254	1.28854	9.5	2.26013	1.43468
4.6	1.56292	1.29440	9.6	2.27042	1.43608
4.7	1.58291	1.30004	9.7	2.28061	1.43745
4.8	1.60255	1.30545	9.8	2.29069	1.43880
4.9	1.62183	1.31065	9.9	2.30068	1.44012
5.0	1.64078	1.31566	10.0	2.31057	1.44142
	$\left[{(-4)6 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 4}\right]$		$\left[{(-5)4 \atop 3}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 3}\right]$

Таблица 6.8. Дигамма-функция комплексного аргумента

			$x=1.9$						$x=2.0$		
y	$\operatorname{Re}\psi(z)$	$\operatorname{Im}\psi(z)$	y	$\operatorname{Re}\psi(z)$	$\operatorname{Im}\psi(z)$	y	$\operatorname{Re}\psi(z)$	$\operatorname{Im}\psi(z)$	y	$\operatorname{Re}\psi(z)$	$\operatorname{Im}\psi(z)$
0.0	0.35618	0.00000	5.0	1.64585	1.29698	0.0	0.42278	0.00000	5.0	1.65125	1.27849
0.1	0.35847	0.06870	5.1	1.66428	1.30212	0.1	0.42480	0.06441	5.1	1.66948	1.28394
0.2	0.36528	0.13681	5.2	1.68240	1.30707	0.2	0.43081	0.12833	5.2	1.68742	1.28919
0.3	0.37644	0.20377	5.3	1.70022	1.31185	0.3	0.44068	0.19130	5.3	1.70506	1.29426
0.4	0.39169	0.26908	5.4	1.71775	1.31647	0.4	0.45420	0.25288	5.4	1.72242	1.29916
0.5	0.41071	0.33229	5.5	1.73500	1.32092	0.5	0.47111	0.31269	5.5	1.73951	1.30389
0.6	0.43309	0.39306	5.6	1.75197	1.32522	0.6	0.49110	0.37042	5.6	1.75633	1.30846
0.7	0.45842	0.45110	5.7	1.76868	1.32938	0.7	0.51380	0.42583	5.7	1.77290	1.31288
0.8	0.48625	0.50624	5.8	1.78513	1.33341	0.8	0.53887	0.47874	5.8	1.78921	1.31715
0.9	0.51614	0.55838	5.9	1.80133	1.33730	0.9	0.56594	0.52904	5.9	1.80528	1.32129
1.0	0.54770	0.60749	6.0	1.81728	1.34107	1.0	0.59465	0.57667	6.0	1.82111	1.32530
1.1	0.58053	0.65359	6.1	1.83300	1.34473	1.1	0.62468	0.62165	6.1	1.83671	1.32918
1.2	0.61431	0.69677	6.2	1.84848	1.34827	1.2	0.65572	0.66400	6.2	1.85208	1.33295
1.3	0.64872	0.73714	6.3	1.86374	1.35170	1.3	0.68751	0.70380	6.3	1.86723	1.33660
1.4	0.68351	0.77483	6.4	1.87878	1.35503	1.4	0.71980	0.74116	6.4	1.88217	1.34015
1.5	0.71846	0.80999	6.5	1.89361	1.35826	1.5	0.75239	0.77618	6.5	1.89690	1.34358
1.6	0.75338	0.84278	6.6	1.90824	1.36140	1.6	0.78510	0.80899	6.6	1.91143	1.34692
1.7	0.78814	0.87335	6.7	1.92266	1.36445	1.7	0.81779	0.83973	6.7	1.92576	1.35017
1.8	0.82261	0.90188	6.8	1.93688	1.36741	1.8	0.85033	0.86853	6.8	1.93990	1.35332
1.9	0.85669	0.92851	6.9	1.95092	1.37029	1.9	0.88262	0.89551	6.9	1.95385	1.35639
2.0	0.89031	0.95338	7.0	1.96476	1.37308	2.0	0.91459	0.92081	7.0	1.96761	1.35937
2.1	0.92342	0.97664	7.1	1.97843	1.37581	2.1	0.94617	0.94454	7.1	1.98120	1.36227
2.2	0.95598	0.99840	7.2	1.99192	1.37846	2.2	0.97731	0.96681	7.2	1.99462	1.36509
2.3	0.98795	1.01879	7.3	2.00523	1.38104	2.3	1.00798	0.98775	7.3	2.00786	1.36784
2.4	1.01932	1.03792	7.4	2.01838	1.38355	2.4	1.03814	1.00743	7.4	2.02094	1.37052
2.5	1.05008	1.05588	7.5	2.03136	1.38599	2.5	1.06779	1.02597	7.5	2.03385	1.37313
2.6	1.08022	1.07278	7.6	2.04418	1.38838	2.6	1.09690	1.04344	7.6	2.04661	1.37567
2.7	1.10975	1.08868	7.7	2.05684	1.39070	2.7	1.12548	1.05992	7.7	2.05921	1.37815
2.8	1.13867	1.10367	7.8	2.06935	1.39297	2.8	1.15352	1.07548	7.8	2.07167	1.38056
2.9	1.16698	1.11782	7.9	2.08171	1.39518	2.9	1.18102	1.09020	7.9	2.08397	1.38292
3.0	1.19470	1.13119	8.0	2.09393	1.39734	3.0	1.20798	1.10413	8.0	2.09613	1.38522
3.1	1.22184	1.14384	8.1	2.10600	1.39944	3.1	1.23442	1.11733	8.1	2.10815	1.38746
3.2	1.24841	1.15583	8.2	2.11793	1.40149	3.2	1.26034	1.12985	8.2	2.12003	1.38966
3.3	1.27442	1.16719	8.3	2.12973	1.40350	3.3	1.28575	1.14174	8.3	2.13178	1.39180
3.4	1.29990	1.17798	8.4	2.14139	1.40546	3.4	1.31067	1.15304	8.4	2.14339	1.39389
3.5	1.32485	1.18823	8.5	2.15292	1.40738	3.5	1.33510	1.16379	8.5	2.15487	1.39593
3.6	1.34929	1.19798	8.6	2.16432	1.40925	3.6	1.35905	1.17403	8.6	2.16623	1.39793
3.7	1.37324	1.20727	8.7	2.17560	1.41108	3.7	1.38254	1.18379	8.7	2.17746	1.39988
3.8	1.39670	1.21613	8.8	2.18675	1.41286	3.8	1.40558	1.19310	8.8	2.18858	1.40179
3.9	1.41970	1.22458	8.9	2.19778	1.41461	3.9	1.42818	1.20200	8.9	2.19957	1.40366
4.0	1.44226	1.23265	9.0	2.20870	1.41632	4.0	1.45036	1.21050	9.0	2.21045	1.40548
4.1	1.46437	1.24037	9.1	2.21950	1.41800	4.1	1.47212	1.21864	9.1	2.22121	1.40727
4.2	1.48606	1.24775	9.2	2.23019	1.41964	4.2	1.49348	1.22643	9.2	2.23187	1.40902
4.3	1.50734	1.25482	9.3	2.24077	1.42124	4.3	1.51446	1.23389	9.3	2.24241	1.41074
4.4	1.52822	1.26160	9.4	2.25124	1.42281	4.4	1.53505	1.24105	9.4	2.25284	1.41241
4.5	1.54872	1.26810	9.5	2.26160	1.42435	4.5	1.55527	1.24792	9.5	2.26318	1.41406
4.6	1.56885	1.27434	9.6	2.27186	1.42586	4.6	1.57514	1.25452	9.6	2.27340	1.41566
4.7	1.58861	1.28033	9.7	2.28202	1.42733	4.7	1.59466	1.26086	9.7	2.28353	1.41724
4.8	1.60803	1.28610	9.8	2.29207	1.42878	4.8	1.61385	1.26696	9.8	2.29356	1.41879
4.9	1.62710	1.29164	9.9	2.30203	1.43020	4.9	1.63270	1.27283	9.9	2.30349	1.42030
5.0	1.64585	1.29698	10.0	2.31190	1.43159	5.0	1.65125	1.27849	10.0	2.31332	1.42179
	$\begin{bmatrix}(-4)6\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\4\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-5)4\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)2\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-4)5\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)3\\4\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-5)4\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)3\\3\end{bmatrix}$

$$\operatorname{Im}\psi(2+iy)=\tfrac{1}{2}\pi\operatorname{cth}\pi y-\frac{1+3y^2}{2y(1+y^2)}$$

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

6.1. Artin E. Einführung in die Theorie der Gammafunktion. — Leipzig, 1931.

6.2. Böhmer P. E. Differenzengleichungen und bestimmte Integrale. — Leipzig: Koebler, 1939, Ch. 3—5.

6.3. Doetsch G. Handbuch der Laplace-Transformation. — Basel: Birkhauser, 1955, V. II, s. 52—61.

6.4. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, Ch. 1, sec. 5, V. 2, Ch. 9. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973, Т.I; 1974, Т.II.

6.5. Hastings C., Jr. Approximations for digital computers. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1955.

6.6. Lösch F., Schoblik F. Die Fakultät und verwandte Funktionen. — Leipzig: Teubner, 1951.

6.7. Sibagaki W. Theory and applications of the gamma function. — Tokyo: Iwanami Syoten, 1952.

6.8. Whittaker E. T., Watson G. N. A course of modern analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952, Ch. 12. Русский перевод: Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1962, Т.I; 1963, Т.II

Таблицы

6.9. Абрамов А. А. Таблицы $\ln \Gamma(z)$ в комплексной области. — М.: Изд-во АН СССР, 1953.
$\ln \Gamma(x+iy)$, $x = 0(0.01)\,10$, $y = 0(0.01)4$, 6D.

6.10. Ballistic Research Laboratory. A table of the factorial numbers and their reciprocals from 1! through 1000! to 20 significant digits. — Aberdeen Proving Ground, 1951. — Technical Note № 381.

6.11. British Association for the Advancement of Science. Mathematical tables. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1951, V. I, p. 40—59. — Гамма и полигамма функции. Кроме того,

$$1+\int_0^x \lg (t)!\,dt, \quad x = 0(0.01)1, \quad 10D.$$

6.12. Davis H. T. Tables of the higher mathematical functions. — Bloomington: Principia Press, 1933, V. 1; 1935, V. 2.
Многозначные таблицы гамма- и полигамма-функций до $\psi^{(4)}(x)$ и их логарифмов.

6.13. Duarte F. J. Nouvelles tables de $\log_{10} n!$ à 33 decimales depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 3000$. — P.: Index Generalis, 1927.

6.14. National Bureau of Standards. Tables of $n!$ and $\Gamma(n+1/2)$ for the first thousand values of n. — Washington: Government Printing Office, 1951. — (Applied Math. Series; 16).

6.15. National Bureau of Standards. Table of Coulomb wave functions. — Washington: Government Printing Office, 1952, V. I, p. 114—135. — (Applied Math. Series; 17).

6.16. National Bureau of Standards. Table of the gamma function for complex arguments. — Washington: Government Printing Office, 1954. — (Applied Math. Series; 34). Русский перевод: Таблицы логарифмов гамма-функции в комплексной области. — М.: ВЦ АН СССР, 1966. — (БМТ; Вып. 40).
$\ln \Gamma(x+iy)$, $x = 0(0.1)10$, $y = 0(0.1)10$, 12D.

6.17. National Physical Laboratory. Tables of Weber parabolic cylinder functions. — L.: Her Majesty's Stationery Office, 1955, p. 226—233.
Действительная и мнимая части функции $\ln \Gamma(k/4 + ia/2)$, $k=0(1)3$, $a=0(0.1)\,5(0.2)\,20$, 8D; $(|\Gamma(3/4+ia/2)/\Gamma(1/4+ia/2)|)^{-1/2}$, $a=0(0.02)\,1(0.1)\,5(0.2)20$, 8D.
Русский перевод: Миллер Дж. Ч.П. Таблицы функций Вебера. — М.: ВЦ АН СССР, 1968. — (БМТ; Вып. 45).

6.18. Pearson E. S. Table of the logarithms of the complete Γ — function, arguments 2 to 1200. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1922. — (Tracts for Computers; № VIII).
$\lg \Gamma(p)$, $p = 2(0.1)\,5(0.2)\,70(1)\,1200$, 10D.

6.19. Peters J. Ten-place logarithm tables. — N.Y.: Frederick Ungar Publ. Co., 1957, V. I, Appendix, p. 58—68.
$n!$, $n = 1(1)60$, точные; $(n!)^{-1}$, $n = 1(1)43$, 54D; $\lg(n!)$, $n = 1(1)1200$, 18D.

6.20. Stanley J. P., Wilkes M. V. Table of the reciprocal of the gamma function for complex argument. — Toronto: Univ. of Toronto Press, 1950.
$x = -0.5(0.01)05$, $y = 0(0.01)1$, 6D.

6.21. Zyczkowski M. Tablice funkcyj eulera i pokrewnych. — Warsaw: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1954.
Обширные таблицы интегралов, содержащих гамма- и бета-функции.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Книги

6.22. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.; Л.: Физматгиз, 1963.

6.23. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: Физматгиз, 1958, Т.III, Ч.2.

Таблицы *)

6.24. Петерс М., Штейн И. Математические таблицы. — М.: ВЦ АН СССР, 1965. — (БМТ; Вып. 34).
$n!$, $n = 1(1)\,60$,
точные значения и разложения на простые множители:
$1/n!$, $n = 1(1)43$, 54D; $\ln(n!)$,
$n = 1(1)1200$, 18D.

6.25. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. — М.: Физматгиз, 1962.
$\Gamma(x)$, $x = 1(0.0001)\,2$, 5D; $\Gamma(n+1)$, $n = 1(1)50$, 6S.

6.26. Таблицы логарифмической производной гамма-функции и ее производных в комплексной области. — М.: ВЦ АН СССР, 1965.
$\psi(x+iy)$, $x = 1(0.01)\,2$, $y = 0(0.01)\,4$; $\psi^{(n)}(x+iy)$, $n = 1(1)10$, $x = 1(0.1)\,2$, $y = 0(0.1)\,4$, 7D или 7S.

6.27. Таблицы специальных функций / Под ред. Шпильрейна Я.Н. — М.: ГТТИ, 1934.
$\Gamma(x)$, $x = 1(0.002)\,2$, 5D.

6.28. Хаяши К., Барк Л. С. Многозначные таблицы круговых, гиперболических и других функций. — М.: ВЦ АН СССР, 1965. — (БМТ; Вып. 27).
$\lg \Gamma(x)$, $x=0(0.01)\,1(0.00001)\,1.001(0.0001)\,1.1(0.001)\,2\,(0.01)3$, 8—13D;
$\Gamma(x)$, $x = -5(0.01)\,1(0.001)\,2(0.01)5$, 7—8D.

*) Библиографию таблиц неполных гамма- и бета-функций см. в гл. 26.

Глава 7

ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ИНТЕГРАЛЫ ФРЕНЕЛЯ

У. ГАУЧИ

СОДЕРЖАНИЕ

7.1. ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определения

7.1.1. $$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

7.1.2. $$\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf} z.$$

7.1.3. $$w(z) = e^{-z^2}\left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt\right) = e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-iz).$$

В 7.1.2 на путь интегрирования наложено следующее ограничение: $\arg t \to \alpha$, где $|\alpha| < \pi/4$, при $t \to \infty$ вдоль пути. (Значение $\alpha = \pi/4$ допустимо, если $\operatorname{Re} t^2$ ограничено слева.)

Интегральное представление

7.1.4. $$w(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{z - t} = \frac{2iz}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2} dt}{z^2 - t^2} \quad (\operatorname{Im} z > 0).$$

Разложения в ряд

7.1.5. $$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

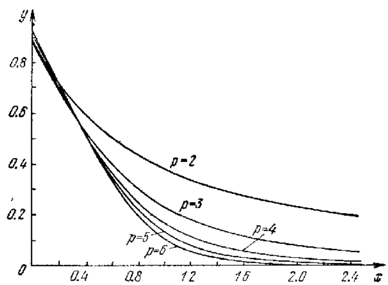


Рис. 7.1. $y = e^{x^p} \int_x^\infty e^{-t^p} dt$: $p = 2(1)6$.

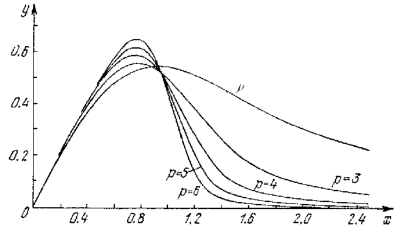


Рис. 7.2. $y = e^{-x^p}\int_0^x e^{t^p}\,dt$; $p = 2(1)\,6$.

7.1.6. $$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1\cdot 3 \ldots (2n+1)} z^{2n+1}.$$

7.1.7. $$\operatorname{erf} z = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[I_{2n+1/2}(z^2) - I_{2n+3/2}(z^2)\right].$$

7.1.8. $$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$ Функции Бесселя $I_{n-1/2}(x)$ см. в гл. 10.

Соотношения симметрии

7.1.9. $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf} z.$

7.1.10. $\operatorname{erf} \bar{z} = \overline{\operatorname{erf} z}.$

7.1.11. $w(-z) = 2e^{-z^2} - w(z).$

7.1.12. $w(\bar{z}) = \overline{w(-z)}.$

Неравенства (см. [7.11], [7.17])

7.1.13. $$\frac{1}{x + \sqrt{x^2+2}} < e^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \frac{4}{\pi}}} \quad (x \geqslant 0).$$

Другие неравенства см. в [7.2].

Разложения в непрерывную дробь

7.1.14. $$2e^{z^2}\int_z^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{z+}\,\frac{1/2}{z+}\,\frac{1}{z+}\,\frac{3/2}{z+}\,\frac{2}{z+}\ldots \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

7.1.15. $$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}\,dt}{z-t} = \frac{1}{z-}\,\frac{1/2}{z-}\,\frac{1}{z-}\,\frac{3/2}{z-}\,\frac{2}{z-}\ldots = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_k^{(n)}}{z - x_k^{(n)}} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0),$$

$x_k^{(n)}$ и $H_k^{(n)}$ — соответственно нули и весовые множители полиномов Эрмита. Их числовые значения см. в гл. 25.

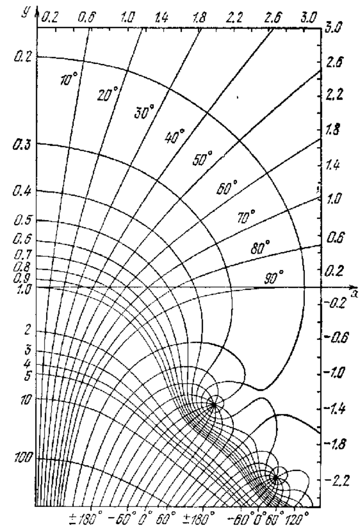


Рис. 7.3. Линии уровня $w(z)$.

Значение на бесконечности

7.1.16. $\operatorname{erf} z \to 1$ $\left(z \to \infty \text{ в области } |\arg z| < \frac{\pi}{4}\right)$.

Максимум и точка перегиба интеграла Досона (см. [7.31])

$$F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

7.1.17. $F(0.92413\ 88730\ldots) = 0.54104\ 42246\ldots$

7.1.18. $F(1.50197\ 52682\ldots) = 0.42768\ 66160\ldots$

Производные

7.1.19. $$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \operatorname{erf} z = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_n(z)\,e^{-z^2} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

7.1.20. $$w^{(n+2)}(z) + 2zw^{(n+1)}(z) + 2(n+1)w^{(n)}(z) = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$w^{(0)}(z) = w(z), \quad w'(z) = -2zw(z) + \frac{2i}{\sqrt{\pi}}.$$

О полиномах Эрмита $H_n(z)$ см. в гл. 22.

Связь с вырожденной гипергеометрической функцией (см. гл. 13)

7.1.21. $\operatorname{erf} z = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -z^2\right) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} M\left(1, \frac{3}{2}, z^2\right).$

Функция нормального распределения со средним значением m **и стандартной дисперсией** σ (см. гл. 26)

7.1.22. $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-m)^2/2\sigma^2} dt = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right).$

Асимптотическое разложение

7.1.23. $\sqrt{\pi} z e^{z^2} \operatorname{erfc} z \sim 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1\cdot 3 \ldots (2m-1)}{(2z^2)^m} \quad \left(z \to \infty, |\arg z| < \frac{3\pi}{4}\right).$

Если ряд оборван после n-го члена и $R_n(z)$ — его остаток, то

7.1.24. $R_n(z) = (-1)^n \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{(2z^2)^n} \theta,$

$$\theta = \int_0^{\infty} e^{-t}\left(1 + \frac{t}{z^2}\right)^{-n-1/2} dt \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$|\theta| < 1 \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{4}\right).$$

Для действительных x остаток $R_n(x)$ по абсолютной величине меньше первого отбрасываемого члена и имеет тот же знак.

Аппроксимация рациональными функциями (см. [7.10]) $(0 \leqslant x < \infty)$

7.1.25. $\operatorname{erf} x = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) e^{-x^2} + \varepsilon(x),$

$$t = \frac{1}{1+px}, \quad |\varepsilon(x)| \leqslant 2.5\cdot 10^{-5},$$

$$p = 0.47047, \quad a_1 = 0.34802\ 42,$$

$$a_2 = -0.09587\ 98, \quad a_3 = 0.74785\ 56.$$

7.1.26. $\operatorname{erf} x = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) e^{-x^2} + \varepsilon(x),$

$$t = \frac{1}{1+px}, \quad |\varepsilon(x)| \leqslant 1.5\cdot 10^{-7},$$

$$p = 0.32759\ 11, \quad a_1 = 0.25482\ 9592,$$

$$a_2 = -0.28449\ 6736, \quad a_3 = 1.42141\ 3741,$$

$$a_4 = -1.45315\ 2027, \quad a_5 = 1.06140\ 5429.$$

7.1.27. $\operatorname{erf} x = 1 - \frac{1}{(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)^4} + \varepsilon(x),$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 5\cdot 10^{-4},$$

$$a_1 = 0.278393, \quad a_3 = 0.000972,$$

$$a_2 = 0.230389, \quad a_4 = 0.078108.$$

7.1.28. $\operatorname{erf} x = 1 - \frac{1}{(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_6 x^6)^{16}} + \varepsilon(x),$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 3\cdot 10^{-7},$$

$$a_1 = 0.07052\ 30784, \quad a_2 = 0.04228\ 20123,$$

$$a_3 = 0.00927\ 05272, \quad a_4 = 0.00015\ 20143,$$

$$a_5 = 0.00027\ 65672, \quad a_6 = 0.00004\ 30638.$$

Бесконечный ряд для интеграла вероятностей комплексного аргумента (см. [7.19])

7.1.29. $\operatorname{erf}(x + iy) = \operatorname{erf} x + \frac{e^{-x^2}}{2\pi x}[(1 - \cos 2xy) + i \sin 2xy] + \frac{2}{\pi} e^{-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2/2}}{n^2 + 4x^2} [f_n(x, y) + i g_n(x, y)] + \varepsilon(x, y),$

$e^{-n^2/4}$

где

$$f_n(x, y) = 2x - 2x \operatorname{ch} ny \cos 2xy + n \operatorname{sh} ny \sin 2xy,$$

$$g_n(x, y) = 2x \operatorname{ch} ny \sin 2xy + n \operatorname{sh} ny \cos 2xy,$$

$$|\varepsilon(x, y)| \approx 10^{-16} |\operatorname{erf}(x + iy)|.$$

7.2. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определение

7.2.1. $\mathrm{i}^n \operatorname{erfc} z = \int_z^{\infty} \mathrm{i}^{n-1} \operatorname{erfc} t\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$

$$\mathrm{i}^{-1} \operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}, \quad \mathrm{i}^0 \operatorname{erfc} z = \operatorname{erfc} z.$$

Дифференциальное уравнение

7.2.2. $\frac{d^2y}{dz^2} + 2z\frac{dy}{dz} - 2ny = 0,$

$$y = A\mathrm{i}^n \operatorname{erfc} z + B\mathrm{i}^n \operatorname{erfc}(-z)$$

(A и B — постоянные).

Выражение в виде простого интеграла

7.2.3. $i^n \operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \frac{(t-z)^n}{n!} e^{-t^2}\, dt.$

Разложение в степенной ряд *)

7.2.4. $i^n \operatorname{erfc} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{2^{n-k} k!\, \Gamma\left(1 + \frac{n-k}{2}\right)}.$

Рекуррентные соотношения

7.2.5. $i^n \operatorname{erfc} z = -\frac{z}{n} i^{n-1} \operatorname{erfc} z + \frac{1}{2n} i^{n-2} \operatorname{erfc} z \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$

7.2.6. $2(n+1)(n+2)\, i^{n+2} \operatorname{erfc} z = (2n + 1 + 2z^2)\, i^n \operatorname{erfc} z - \frac{1}{2} i^{n-2} \operatorname{erfc} z \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$

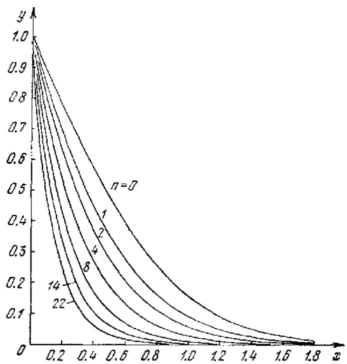


Рис. 7.4. Кратные интегралы вероятностей.

$y = 2^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) i^n \operatorname{erfc} x; \quad n = 0, 1, 2, 4, 8, 14, 22.$

Значение в нуле

7.2.7. $i^n \operatorname{erfc} 0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n/2 + 1)} \quad (n = -1, 0, 1, 2, \ldots).$

Производные

7.2.8. $\frac{d}{dz} i^n \operatorname{erfc} z = -i^{n-1} \operatorname{erfc} z \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$

7.2.9. $\frac{d^n}{dz^n} (e^{z^2} \operatorname{erfc} z) = (-1)^n 2^n n!\, e^{z^2} i^n \operatorname{erfc} z \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$

Связь с $Hh_n(z)$ (см. 19.14)

7.2.10. $i^n \operatorname{erfc} z = \frac{1}{(2^{n-1}\pi)^{1/2}} Hh_n(\sqrt{2} z).$

Связь с полиномами Эрмита (см. гл. 22)

7.2.11. $(-1)^n i^n \operatorname{erfc} z + i^n \operatorname{erfc}(-z) = \frac{i^{-n}}{2^{n-1} n!} H_n(iz).$

Связь с вырожденной гипергеометрической функцией (см. гл. 13)

7.2.12. $i^n \operatorname{erfc} z = e^{-z^2}\left[\frac{1}{2^n \Gamma(n/2 + 1)} M\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) - \frac{z}{2^{n-1}\Gamma((n+1)/2)} M\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2\right)\right].$

Связь с функциями параболического цилиндра (см. гл. 19)

7.2.13. $i^n \operatorname{erfc} z = \frac{e^{-1/2 z^2}}{(2^{n-1}\pi)^{1/2}} D_{-n-1}(z\sqrt{2}).$

Асимптотическое разложение

7.2.14. $i^n \operatorname{erfc} z \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{(2z)^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+n)!}{n!\, m!\, (2z)^{2m}} \quad \left(z \to \infty, \ |\arg z| < \frac{3\pi}{4}\right).$

7.3. ИНТЕГРАЛЫ ФРЕНЕЛЯ

Определение

7.3.1. $C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt.$

7.3.2. $S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt.$

Используются также следующие функции:

7.3.3. $C_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2\, dt, \quad C_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt.$

7.3.4. $S_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2\, dt, \quad S_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$

*) Члены этого ряда, соответствующие $k = n + 2, n + 4, n + 6, \ldots$, считаются равными нулю.

Вспомогательные функции

7.3.5. $$f(z)=\left[\frac{1}{2}-S(z)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)-\left[\frac{1}{2}-C(z)\right]\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right).$$

7.3.6. $$g(z)=\left[\frac{1}{2}-C(z)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)+\left[\frac{1}{2}-S(z)\right]\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right).$$

Функциональные соотношения

7.3.7. $$C(x)=C_1\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=C_2\left(\frac{\pi}{2}x^2\right).$$

7.3.8. $$S(x)=S_1\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=S_2\left(\frac{\pi}{2}x^2\right).$$

7.3.9. $$C(z)=\frac{1}{2}+f(z)\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)-g(z)\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right).$$

7.3.10. $$S(z)=\frac{1}{2}-f(z)\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)-g(z)\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right).$$

Разложения в ряд

7.3.11. $$C(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\pi/2)^{2n}}{(2n)!\,(4n+1)}z^{4n+1}.$$

7.3.12. $$C(z)=\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{1\cdot 3\ldots(4n+1)}z^{4n+1}+\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{1\cdot 3\ldots(4n+3)}z^{4n+3}.$$

7.3.13. $$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!\,(4n+3)}z^{4n+3}.$$

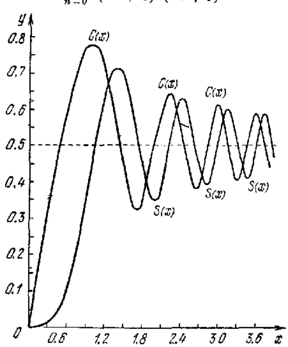


Рис. 7.5. Интегралы Френеля.
$y=C(x)$, $y=S(x)$.

7.3.14. $$S(z)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{1\cdot 3\ldots(4n+3)}z^{4n+3}+\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{1\cdot 3\ldots(4n+1)}z^{4n+1}.$$

7.3.15. $$C_2(z)=J_{1/2}(z)+J_{5/2}(z)+J_{9/2}(z)+\ldots$$

7.3.16. $$S_2(z)=J_{3/2}(z)+J_{7/2}(z)+J_{11/2}(z)+\ldots$$

Функции Бесселя $J_{n+1/2}(z)$ см. в гл. 10.

Соотношения симметрии

7.3.17. $$C(-z)=-C(z)\qquad S(-z)=-S(z).$$

7.3.18. $$C(iz)=iC(z),\qquad S(iz)=-iS(z).$$

7.3.19. $$C(\bar z)=\overline{C(z)},\qquad S(\bar z)=\overline{S(z)}.$$

Значение на бесконечности

7.3.20. $$C(x)\to\frac{1}{2},\quad S(x)\to\frac{1}{2}\qquad(x\to\infty).$$

Производные

7.3.21. $$\frac{df(x)}{dx}=-\pi xg(x),$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=\pi xf(x)-1.$$

Связь с интегралом вероятностей (см. 7.1.1, 7.1.3)

7.3.22. $$C(z)+iS(z)=\frac{1+i}{2}\operatorname{erf}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-i)z\right]=\frac{1+i}{2}\left\{1-e^{i\pi z^2/2}w\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+i)z\right]\right\}.$$

7.3.23. $$g(x)=\operatorname{Re}\left\{\frac{1+i}{2}w\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+i)x\right]\right\}.$$

7.3.24. $$f(x)=\operatorname{Im}\left\{\frac{1+i}{2}w\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+i)x\right]\right\}.$$

Связь с вырожденной гипергеометрической функцией (см. гл. 13)

7.3.25. $$C(z)+iS(z)=zM\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ i\frac{\pi}{2}z^2\right)=ze^{i\pi z^2/2}M\left(1,\ \frac{3}{2},\ -i\frac{\pi}{2}z^2\right).$$

Связь со сферическими функциями Бесселя (см. гл. 10)

7.3.26. $$C_2(z)=\frac{1}{2}\int_0^z J_{-1/2}(t)\,dt,\quad S_2(z)=\frac{1}{2}\int_0^z J_{1/2}(t)\,dt.$$

Асимптотические разложения

7.3.27. $\pi z f(z) \sim 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \ldots (4m-1)}{(\pi z^2)^{2m}}$

$$\left(z \to \infty, \ |\arg z| < \frac{\pi}{2}\right).$$

7.3.28. $\pi z g(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \ldots (4m+1)}{(\pi z^2)^{2m+1}}$

$$\left(z \to \infty, \ |\arg z| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Если $R_n^{(f)}(z)$, $R_n^{(g)}(z)$ — остатки, начинающиеся с $(n+1)$-го члена рядов 7.3.27 и 7.3.28 соответственно, то

7.3.29. $R_n^{(f)}(z) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \ldots (4n-1)}{(\pi z^2)^{2n}} \theta^{(f)}$,

$$\theta^{(f)} = \frac{1}{\Gamma(2n+1/2)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{2n-1/2}}{1 + (2t/\pi z^2)^2} dt$$

$$\left(|\arg z| < \frac{\pi}{4}\right).$$

7.3.30. $R_n^{(g)}(z) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \ldots (4n+1)}{(\pi z^2)^{2n}} \theta^{(g)}$,

$$\theta^{(g)} = \frac{1}{\Gamma(2n+3/2)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{2n+1/2}}{1 + (2t/\pi z^2)^2} dt$$

$$\left(|\arg z| < \frac{\pi}{4}\right).$$

7.3.31. $|\theta^{(f)}| < 1, \quad |\theta^{(g)}| < 1$

$$\left(|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{8}\right).$$

Для действительных x остатки $R_n^{(f)}(x)$ и $R_n^{(g)}(x)$ по абсолютной величине меньше первого отбрасываемого члена и имеют тот же знак.

Аппроксимация рациональными функциями *)

$(0 \leqslant x < \infty)$

7.3.32. $f(x) = \frac{1 + 0.926\,x}{2 + 1.792\,x + 3.104\,x^2} + \varepsilon(x)$,

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2 \cdot 10^{-3}.$$

7.3.33. $g(x) = \frac{1}{2 + 4.142\,x + 3.492\,x^2 + 6.670\,x^3} + \varepsilon(x)$,

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2 \cdot 10^{-3}$$

Более точные приближения см. в [7.1].

7.4. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Более полную таблицу интегралов см. в [7.5], [7.8], [7.15], [7.22].

7.4.1. $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7.4.2. $\int_0^{\infty} e^{-(at^2+2bt+c)} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{(b^2-ac)/a} \operatorname{erfc} \frac{b}{\sqrt{a}}$

$$(\operatorname{Re} a > 0).$$

7.4.3. $\int_0^{\infty} e^{-at^2-b/t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}$

$$(\operatorname{Re} a > 0, \ \operatorname{Re} b > 0).$$

7.4.4. $\int_0^{\infty} t^{2n} e^{-at^2} dt = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{\Gamma(n+1/2)}{2a^{n+1/2}}$

$$(\operatorname{Re} a > 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

7.4.5. $\int_0^{\infty} t^{2n+1} e^{-at^2} dt = \frac{n!}{2a^{n+1}}$ $(\operatorname{Re} a > 0, n = 0, 1, 2, \ldots)$.

7.4.6. $\int_0^{\infty} e^{-at^2} \cos(2xt)\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-x^2/a}$ $(\operatorname{Re} a > 0)$.

7.4.7. $\int_0^{\infty} e^{-at^2} \sin(2xt)\, dt = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-x^2/a} \int_0^{x/\sqrt{a}} e^{t^2} dt$

$$(\operatorname{Re} a > 0).$$

7.4.8. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at}\, dt}{\sqrt{t + z^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{az^2} \operatorname{erfc} \sqrt{a}\, z$

$$(\operatorname{Re} a > 0, \ \operatorname{Re} z > 0).$$

7.4.9. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at}\, dt}{\sqrt{t}\,(t+z)} = \frac{\pi}{\sqrt{z}}\, e^{az} \operatorname{erfc} \sqrt{az}$

$$(\operatorname{Re} a > 0, \ z \neq 0, \ |\arg z| < \pi).$$

7.4.10. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at^2}\, dt}{t + x} = e^{-ax^2}\left[\sqrt{\pi} \int_0^{\sqrt{a}x} e^{t^2} dt - \frac{1}{2} \operatorname{Ei}(ax^2)\right]$

$$(a > 0, \ x > 0).$$

7.4.11. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at^2}\, dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x}\, e^{ax^2} \operatorname{erfc} \sqrt{a}\, x$ $\quad (a > 0, \ x > 0)$.

---

*) Формулы 7.3.32, 7.3.33 базируются на формулах, данных в [7.10].

7.4.12. $$\int_0^1 \frac{e^{-at^2}\,dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{4}\, e^a[1-(\operatorname{erf}\sqrt{a})^2] \quad (a>0).$$

7.4.13. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ye^{-t^2}\,dt}{(x-t)^2+y^2} = \pi \operatorname{Re} w(x+iy)$$
$$(\operatorname{Im} x = 0,\ y > 0)$$

7.4.14. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)\,e^{-t^2}\,dt}{(x-t)^2+y^2} = \pi \operatorname{Im} w(x+iy)$$
$$(\operatorname{Im} x = 0,\ y > 0).$$

7.4.15. $$\int_0^{\infty} \frac{[t^2-(x^2-y^2)]\,e^{-t^2}\,dt}{t^4-2(x^2-y^2)t^2+(x^2+y^2)^2} = \frac{\pi}{2}\operatorname{Re}\frac{w(x+iy)}{y-ix} \quad (\operatorname{Im} x = 0,\ y>0).$$

7.4.16. $$\int_0^{\infty} \frac{2xye^{-t^2}\,dt}{t^4-2(x^2-y^2)\,t^2+(x^2+y^2)^2} = \frac{\pi}{2}\operatorname{Im}\frac{w(x+iy)}{y-ix} \quad (\operatorname{Im} x = 0,\ y>0).$$

7.4.17. $$\int_0^{\infty} e^{-at}\operatorname{erf} bt\,dt = \frac{1}{a}\,e^{a^2/4b^2}\operatorname{erfc}\frac{a}{2b}$$
$$\left(\operatorname{Re} a>0,\ |\arg b| < \frac{\pi}{4}\right).$$

7.4.18. $$\int_0^{\infty} \sin(2at)\operatorname{erfc} bt\,dt = \frac{1}{2a}\,[1-e^{-(a/b)^2}]$$
$$(a>0,\ \operatorname{Re} b>0).$$

7.4.19. $$\int_0^{\infty} e^{-at}\operatorname{erf}\sqrt{bt}\,dt = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a+b}}$$
$$(\operatorname{Re}(a+b)>0).$$

7.4.20. $$\int_0^{\infty} e^{-at}\operatorname{erfc}\sqrt{\frac{b}{t}}\,dt = \frac{1}{a}\,e^{-2\sqrt{ab}}$$
$$(\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re} b>0).$$

7.4.21. $$\int_0^{\infty} e^{(a-b)t}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{at}+\sqrt{\frac{c}{t}}\right)dt = \frac{e^{-2(\sqrt{ac}+\sqrt{bc})}}{\sqrt{b}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$
$$(\operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re} c>0).$$

7.4.22. $$\int_0^{\infty} e^{-at}\cos(t^2)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right]\cos\left(\frac{a^2}{4}\right)-\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right]\sin\left(\frac{a^2}{4}\right)\right\} \quad (\operatorname{Re} a>0).$$

7.4.23. $$\int_0^{\infty} e^{-at}\sin(t^2)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right]\cos\frac{a^2}{4}+\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right]\sin\left(\frac{a^2}{4}\right)\right\} \quad (\operatorname{Re} a>0).$$

7.4.24. $$\int_0^{\infty} e^{-at}\frac{\sin(t^2)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right]^2+\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right]^2 \quad (\operatorname{Re} a>0).$$

7.4.25. $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at}\sqrt{t}}{t^2+b^2}\,dt = \pi\sqrt{\frac{2}{b}}\left\{\left[\frac{1}{2}-C\left(\sqrt{\frac{2ab}{\pi}}\right)\right]\cos(ab)+\left[\frac{1}{2}-S\left(\sqrt{\frac{2ab}{\pi}}\right)\right]\sin(ab)\right\} \quad (\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re} b>0).$$

7.4.26. $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at}\,dt}{\sqrt{t}(t^2+b^2)} = \frac{\pi}{b}\sqrt{\frac{2}{b}}\left\{\left[\frac{1}{2}-S\left(\sqrt{\frac{2ab}{\pi}}\right)\right]\cos(ab)-\left[\frac{1}{2}-C\left(\sqrt{\frac{2ab}{\pi}}\right)\right]\sin(ab)\right\} \quad (\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re} b>0).$$

7.4.27. $$\int_0^{\infty} e^{-at}C(t)\,dt = \frac{1}{a}\left\{\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{a}{\pi}\right)\right]\cos\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)-\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{a}{\pi}\right)\right]\sin\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)\right\} \quad (\operatorname{Re} a>0).$$

7.4.28. $$\int_0^{\infty} e^{-at}S(t)\,dt = \frac{1}{a}\left\{\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{a}{\pi}\right)\right]\cos\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)+\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{a}{\pi}\right)\right]\sin\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)\right\} \quad (\operatorname{Re} a>0).$$

7.4.29. $\int_0^\infty e^{-at} C\left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\right) dt = \frac{1}{2a(\sqrt{a^2+1}-a)^{1/2}\sqrt{a^2+1}}$ $(\operatorname{Re} a > 0)$.

7.4.30. $\int_0^\infty e^{-at} S\left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\right) dt = \frac{1}{2a(\sqrt{a^2+1}+a)^{1/2}\sqrt{a^2+1}}$ $(\operatorname{Re} a > 0)$.

7.4.31. $\int_0^\infty \left\{\left[\frac{1}{2} - C(t)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S(t)\right]^2\right\} dt = \frac{1}{\pi}$.

7.4.32. $\int e^{-(ax^2+2bx+c)}\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{(b^2-ac)/a} \operatorname{erf}\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right) + C$$

$(C = \text{const},\ a \neq 0)$.

7.4.33. $\int e^{-a^2x^2-b^2/x^2}\, dx =$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left[e^{2ab} \operatorname{erf}\left(ax + \frac{b}{x}\right) + e^{-2ab} \operatorname{erf}\left(ax - \frac{b}{x}\right)\right] + C$$

$(a \neq 0)$.

7.4.34. $\int e^{-a^2x^2+b^2/x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4a} e^{-a^2x^2+b^2/x^2} \times$

$$\times\left[w\left(\frac{b}{x} + iax\right) + w\left(-\frac{b}{x} + iax\right)\right] + C \quad (a \neq 0).$$

7.4.35. $\int \operatorname{erf} x\, dx = x \operatorname{erf} x + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} + C$.

7.4.36. $\int e^{ax} \operatorname{erf} bx\, dx =$

$$= \frac{1}{a}\left[e^{ax} \operatorname{erf} bx - e^{a^2/4b^2} \operatorname{erf}\left(bx - \frac{a}{2b}\right)\right] + C \quad (a \neq 0).$$

7.4.37. $\int e^{ax} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{b}{x}}\, dx =$

$$= \frac{1}{a}\left\{e^{ax} \operatorname{erf}\sqrt{\frac{b}{x}} + \frac{1}{2} e^{ax-b/x}\left[w\left(\sqrt{ax} + i\sqrt{\frac{b}{x}}\right) + w\left(-\sqrt{ax} + i\sqrt{\frac{b}{x}}\right)\right]\right\} + C \quad (a \neq 0).$$

7.4.38. $\int \cos(ax^2 + bx + c)\, dx =$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos\left(\frac{b^2-ac}{a}\right) C\left[\sqrt{\frac{2}{a\pi}}(ax+b)\right] + \sin\left(\frac{b^2-ac}{a}\right) S\left[\sqrt{\frac{2}{a\pi}}(ax+b)\right]\right\} + C.$$

7.4.39. $\int \sin(ax^2 + bx + c)\, dx =$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos\left(\frac{b^2-ac}{a}\right) S\left[\sqrt{\frac{2}{a\pi}}(ax+b)\right] - \sin\left(\frac{b^2-ac}{a}\right) C\left[\sqrt{\frac{2}{a\pi}}(ax+b)\right]\right\} + C.$$

7.4.40. $\int C(x)\, dx = xC(x) - \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + C$.

7.4.41. $\int S(x)\, dx = xS(x) + \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + C$.

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Вычислить erf 0.745 и $e^{-(0.745)^2}$, используя ряд Тейлора.

С помощью теоремы Тейлора и формулы 7.1.19 можно показать, что

$$\operatorname{erf}(x_0 + ph) = \operatorname{erf} x_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x_0^2} ph \times \left[1 - phx_0 + \frac{1}{3}p^2h^2(2x_0^2 - 1)\right] + \varepsilon,$$

$$e^{-(x_0+ph)^2} = e^{-x_0^2}\left[1 - 2phx_0 + p^2h^2(2x_0^2 - 1) - \frac{2}{3}p^3h^3x_0(2x_0^2 - 3)\right] + \eta,$$

где $|\varepsilon| < 1.2 \cdot 10^{-10}$, $|\eta| < 3.2 \cdot 10^{-10}$, если $h = 10^{-2}$, $|p| \leqslant 1/2$. Положим $x_0 = 0.74$, $p = 0.5$ и воспользуемся табл. 7.1. Тогда

$$\operatorname{erf} 0.745 = 0.70467\,80779 + (0.5)(0.00652\,58247) \times [1 - (0.005)(0.74) + (0.00000\,83333)(0.0952)] = 0.70792\,8920, \quad e^{-(0.745)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(0.65258\,24665)[1 - 0.0074 + (0.000025)(0.0952) + (0.00000\,00833)(0.74)(1.9048)] = 0.57405\,7910.$$

Для контроля можно провести вычисление при $x_0 = 0.75$, $p = -0.5$.

Пример 2. Вычислить erfc x с точностью 5S для $x = 4.8$.

Имеем $1/x^2 = 0.0434028$. Использовав табл. 7.2 и применив линейную интерполяцию в табл. 7.3, получаем

$$\operatorname{erfc} 4.8 = \frac{1}{4.8}(1.11253)(10^{-10})(0.552669)\frac{\sqrt{\pi}}{2} = (1.1352)10^{-11}.$$

Пример 3. Вычислить $e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\, dt$ с точностью 5S для $x = 6.5$. Имеем $1/x^2 = 0.0236686$. С помощью линейной интерполяции в табл. 7.5 получаем

$$e^{-(6.5)^2}\int_0^{6.5} e^{t^2}\, dt = (0.506143)/(6.5) = 0.077868.$$

Пример 4. Вычислить $i^2 \operatorname{erfc} 1.72$, используя рекуррентное соотношение и табл. 7.1.

Из формулы 7.2.1 и табл. 7.1 получаем

$$i^{-1} \operatorname{erfc} 1.72 = 0.05856\ 50.$$

Применим теперь рекуррентное соотношение 7.2.5 и снова воспользуемся табл. 7.1. Тогда

$$i \operatorname{erfc} 1.72 = -(1.72)(0.01499\ 72) + (0.5)(0.05856\ 50) = 0.00348\ 73,$$

$$i^2 \operatorname{erfc} 1.72 = -(0.86)(0.00348\ 73) + (0.25)(0.01499\ 72) = 0.00075\ 02.$$

Отметим, что в процессе этих вычислений потеряны две значащие цифры.

Пример 5. Вычислить $i^k \operatorname{erfc} 1{,}72$ для $k=1, 2, 3, \ldots$ при помощи рекуррентного процесса для убывающих значений индекса. Образуем последовательность $w_\mu^m(x)$ ($\mu = m, m-1, \ldots, 1, 0, -1$) с помощью рекуррентной формулы 7.2.5, начиная с $w_{m+2}^m = 0$, $w_{m+1}^m = 1$. Тогда для любого фиксированного k (см. [7.7])

$$\lim_{m\to\infty} \frac{w_k^m(x)}{w_{-1}^m(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} i^k \operatorname{erfc} x \quad (x > 0).$$

Для $x = 1.72$, $m = 15$ получаем

μ	$w_\mu^{15}(1.72)$	μ	$w_\mu^{15}(1.72)$	μ	$w_\mu^{15}(1.72)$	μ	$w_\mu^{15}(1.72)$
17	0	12	(3) 2.1011	7	(7) 2.5879	2	(11) 1.2920
16	1	11	(4) 1.3831	6	(8) 1.5569	1	(11) 6.0064
15	3.44	10	(4) 9.8005	5	(8) 8.9787	0	(12) 2.5830
14	(1) 4.3834	9	(5) 6.4143	4	(9) 4.9570	−1	(13) 1.0087
13	(2) 2.5399	8	(6) 4.1666	3	(10) 2.6031		

Из табл. 7.1 имеем $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(1.72)^2} = 0.058565$. Таким образом,

$$i \operatorname{erfc} 1.72 \approx (0.058565)(6.0064\cdot 10^{11})/1.0087\cdot 10^{13} = 3.4873\cdot 10^{-3},$$

$$i^2 \operatorname{erfc} 1.72 \approx (0.058565)(1.2920\cdot 10^{11})/1.0087\cdot 10^{13} = 7.5013\cdot 10^{-4},$$

$$i^3 \operatorname{erfc} 1.72 \approx (0.058565)(2.6031\cdot 10^{10})/1.0087\cdot 10^{13} = 1.5114\cdot 10^{-4}.$$

Пример 6. Вычислить $C(8.65)$, используя табл. 7.8. Для $x = 8.65$ $1/x = 0.115607$; из табл. 7.8 получаем линейной интерполяцией значения

$$f(8.65) = 0.036797, \quad g(8.65) = 0.000159.$$

В табл. 4.6 находим

$$\sin(\pi x^2/2) = -0.961382, \quad \cos(\pi x^2/2) = -0.275218.$$

Используя формулу 7.3.9, имеем

$$C(8.65) = 0.5 + (0.036797)(-0.961382) - (0.000159)(-0.275218) = 0.46467.$$

Пример 7. Вычислить $S_1(1.1)$ с точностью 10D. Используя формулы 7.3.8, 7.3.10 и применив интерполяцию по 6 точкам в табл. 7.8, получаем

$$S_1(1.1) = S\left(1.1\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = S(0.87767\ 30169) = 0.31865\ 57172.$$

Пример 8. Вычислить $S_2(5.24)$ с 6D. В табл. 7.7 возьмем столбец под буквой u. Используя интерполяционную схему Эйткена:

u	$S_2(u)$					
5.20310 58	.43280 06	.03689 42				
5.31808 80	.41573 97	−.07808 80	.42732 63			
5.08938 01	.45093 88	.15061 99	691 63	.42718 63		
5.43432 70	.39999 44	−.19432 70	756 60	6 52	.42717 71	
4.97691 11	.46990 94	.26308 89	674 79	9 39	61	.42717 67

получаем $S_2(5.24) = 0.427177$.

Пример 9. Вычислить $S_2(5.24)$, используя ряд Тейлора и табл. 7.8.

Согласно формуле 7.3.21 можно написать ряды Тейлора для $f_2(u) = f\left(\sqrt{\frac{2u}{\pi}}\right)$ и $g_2(u) = g\left(\sqrt{\frac{2u}{\pi}}\right)$ в следующей форме:

$$f_2(u) = c_0 + c_1(u-u_0) + \frac{c_2}{2!}(u-u_0)^2 + \frac{c_3}{3!}(u-u_0)^3 + \ldots,$$

$$g_2(u) = -\left[c_1 + c_2(u-u_0) + \frac{c_3}{2!}(u-u_0)^2 + \frac{c_4}{3!}(u-u_0)^3 + \ldots\right].$$

где

$$c_0 = f_2(u_0), \quad c_1 = -g_2(u_0),$$

$$c_{k+2} = -c_k + (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{\sqrt{2\pi u_0}\,(2u_0)^k}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

Просмотрев табличные входы табл. 7.8, выбираем $u_0 = 1/0.185638 = 5.386819$. Таким образом, $u - u_0 = 5.24 - 5.386819 = -0.146819$. Из табл. 7.8

$$f_2(u_0) = 0.168270, \quad g_2(u_0) = 0.014483.$$

Применяя выписанные выше ряды, получаем

$$f_2(5.24) = 0.170436, \quad g_2(5.24) = 0.015030.$$

Используя четвертую формулу в конце табл. 7.8, имеем

$$S_2(5.24) = 0.5 - (0.170436)(0.503471) - (0.015030)(-0.864012) = 0.42718.$$

Пример 10. Вычислить $S_2(2)$, используя 7.3.16. Образуя значения $J_{n+1/2}(2)$, как указано в гл. 10, находим

$$S_2(2) = J_{3/2}(2) + J_{7/2}(2) + J_{11/2}(2) + J_{15/2}(2) + \ldots = 0.49129 + 0.06852 + 0.00297 + 0.00006 = 0.56284.$$

Пример 11. Вычислить $\int_1^\infty \frac{Y_0(t)}{t}\,dt$ численным интегрированием, используя табл. 9.1 и 7.8 ($Y_0(t)$ — функция Бесселя второго рода, определенная в 9.1.13). Разбиваем интеграл на три части:

$$\int_1^\infty Y_0(t)\,\frac{dt}{t} = \int_1^{10} Y_0(t)\,\frac{dt}{t} + \int_{10}^\infty [Y_0(t) - \widetilde{Y}_0(t)]\,\frac{dt}{t} + \int_{10}^\infty \widetilde{Y}_0(t)\,\frac{dt}{t},$$

где функция

$$\widetilde{Y}_0(t) = \left(1 - \frac{9}{128t^2}\right)\frac{\sin(t - \pi/4)}{\sqrt{\pi t/2}} - \left(1 - \frac{75}{128t^2}\right)\frac{\cos(t - \pi/4)}{8t\sqrt{\pi t/2}}$$

представляет собой первые два члена асимптотического разложения 9.2.2.

Первый интеграл получаем при помощи численного интегрирования, беря значения из табл. 9.1:

$$\int_1^{10} Y_0(t)\,\frac{dt}{t} = 0.41826\,00.$$

Используя тот факт, что остаток асимптотического разложения по абсолютной величине меньше первого отбрасываемого члена, можно дать следующую оценку:

$$\left|\int_{10}^\infty [Y_0(t) - \widetilde{Y}_0(t)]\,\frac{dt}{t}\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{10}^\infty \left[\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^{13} \cdot 4!}\,t^{-11/2} + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{2^{16} \cdot 5!}\,t^{-13/2}\right] dt = 7.33 \cdot 10^{-7}.$$

Наконец,

$$\int_{10}^\infty \widetilde{Y}_0(t)\,\frac{dt}{t} = \frac{14\,659}{6720}\sqrt{2}\,[1 - C_2(10) - S_2(10)] - \frac{5\,953\,819}{2\,688\,000}\,\frac{\cos 10 - \sin 10}{\sqrt{10\pi}} - \frac{23\,107}{2\,150\,400}\,\frac{\cos 10 + \sin 10}{\sqrt{10\pi}} = -0.02298\,78.$$

В последних вычислениях использовались табл. 7.8. Следовательно,

$$\int_1^\infty Y_0(t)\,\frac{dt}{t} = 0.41826\,00 - 0.02298\,78 = 0.39527\,22.$$

Значение того же интеграла с точностью 8D равно 0.39527 290 (см. табл. 11.2).

Пример 12. Вычислить $w(0.44 + 0.67\,i)$, используя двумерную линейную интерполяцию.

Линейная интерполяция по x в табл. 7.9 при $y = 0.6$ и $y = 0.7$ дает

$$w(0.44 + 0.6\,i) \approx 0.6(0.522246 + 0.167880\,i) + 0.4(0.498591 + 0.202666\,i) = 0.512784 + 0.181794\,i,$$

$$w(0.44 + 0.7\,i) \approx 0.6(0.487556 + 0.147975\,i) + 0.4(0.467521 + 0.179123\,i) = 0.479542 + 0.160434\,i.$$

Линейная интерполяция по y при $x = 0.44$ приводит к значению

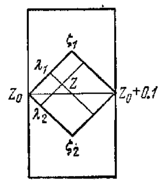
$$w(0.44 + 0.67\,i) = 0.3(0.512784 + 0.181794\,i) + 0.7(0.479542 + 0.160434\,i) = 0.489515 + 0.166842\,i.$$

Значение функции с 6D равно $0.489557 + 0.166889\,i$.

Пример 13. Вычислить $\operatorname{Re} w(z)$ для $z = 0.44 + 0.61\,i$. Двумерная линейная интерполяция, которая описана в примере 12, наиболее точна в том случае, когда z расположено около центра или около диагонали одного из квадратов табличной сетки (см. [7.6]). Она будет значительно менее точной, когда z близко к середине стороны квадрата, как в данном примере. Однако можно ввести вспомогательный квадрат (см. диаграмму), в котором z находится около центра. После этого может быть выполнена двумерная линейная интерполяция в этом вспомогательном квадрате.

Значения $w(z)$ в точках $z = \zeta_1$ и $z = \zeta_2$ приближенно равны среднему арифметическому четырех соседних табличных значений. Введем числа p_1 и p_2 с помощью следующих формул:

$$p_1 + p_2 = \frac{|z_0 - \lambda_1|}{|z_0 - \zeta_1|}, \quad p_1 - p_2 = \frac{|z_0 - \lambda_2|}{|z_0 - \zeta_2|},$$



где $z = z_0 + 0.1(p_1 + ip_2)$. Тогда при $z_0 = 0.4 + 0.6i$, $\zeta_1 = 0.45 + 0.65\,i$, $\zeta_2 = 0.45 + 0.55\,i$, $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.1$ из табл. 7.9 получаем

$$\operatorname{Re} w(\zeta_1) \approx$$
$$\approx \frac{1}{4}(0.522246 + 0.498591 + 0.487556 + 0.467521) = 0.493979,$$
$$\operatorname{Re} w(\zeta_2) \approx$$
$$\approx \frac{1}{4}(0.522246 + 0.498591 + 0.561252 + 0.533157) = 0.528812,$$
$$\operatorname{Re} w(z) \approx$$
$$\approx [1-(0.4+0.1)]\,\{[1-(0.4-0.1)]\,0.522246 + (0.4-0.1)\,0.528812\} + (0.4+0.1)\,\{[1-(0.4-0.1)]\,0.493979 + (0.4-0.1)\,0.498591\} = 0.509789.$$

Значение этой функции с 6D равно 0.509756. Прямая двумерная линейная интерполяция дает число 0.509460.

Пример 14. Вычислить $\operatorname{Im} w(0.39 + 0.61\,i)$ с точностью 6D с помощью ряда Тейлора. Пусть $z = 0.39 + 0.61\,i$, $z_0 = 0.4 + 0.6\,i$. Воспользовавшись формулой 7.1.20 и табл. 7.9, получаем

$$w(z_0) = 0.522246 + 0.167880\,i,$$
$$w'(z_0) = -0.21634 + 0.36738\,i, \quad z - z_0 = (-1+i)\,10^{-2},$$
$$\frac{1}{2}w''(z_0) = -0.215 - 0.185\,i, \quad (z-z_0)^2 = -2i\cdot 10^{-4},$$
$$\operatorname{Im} w(z) = 0.167880 - 0.0021634 - 0.0036738 + 0.0000430 = 0.162086.$$

Пример 15. Вычислить $w(0.4 - 1.3\,i)$. Из формул 7.1.11 и 7.1.12 имеем

$$w(0.4-1.3i) = \overline{w(-0.4-1.3i)} = 2e^{-(0.4-1.3i)^2} - \overline{w(0.4+1.3i)}.$$

Используя табл. 7.9, получаем

$$w(0.4 - 1.3\,i) = 4.33342 + 8.04201\,i.$$

Пример 16. Вычислить $w(7 + 2\,i)$. Воспользуемся второй формулой, помещенной в конце табл. 7.9; тогда

$$w(7 + 2\,i) =$$
$$= (-2 + 7i)\left(\frac{0.5124242}{44.72474 + 28\,i} + \frac{0.05176536}{42.27525 + 28\,i}\right) = 0.021853 + 0.075010\,i.$$

Пример 17. Вычислить $\operatorname{erf}(2 + i)$. Согласно 7.1.3, 7.1.12

$$\operatorname{erf} z = 1 - e^{-z^2} w(iz) =$$
$$= 1 - e^{y^2-x^2}(\cos 2xy - i\sin 2xy)\,\overline{w(y+ix)} \quad (z = x + iy).$$

Используя табл. 7.9, получаем

$$\operatorname{erf}(2 + i) = 1 - e^{-3}(\cos 4 - i\sin 4)\,\overline{w(1+2i)} = 1.003606 - 0.0112590i.$$

Пример 18. Вычислить $S_1\left(\left(\frac{1}{2} + i\right)\sqrt{2}\right)$. Из 7.3.22, 7.3.8 и 7.3.18 имеем

$$S_1(z) = \frac{1}{2} - \frac{1-i}{4}e^{iz^2} w\left[(1+i)\frac{z}{\sqrt{2}}\right] - \frac{1+i}{4}e^{-iz^2} w\left[(i-1)\frac{z}{\sqrt{2}}\right].$$

Полагаем $z = \left(\frac{1}{2} + i\right)\sqrt{2}$ и, используя формулы 7.1.11, 7.1.12 и табл. 7.9, получаем

$$S_1\left(\left(\frac{1}{2} + i\right)\sqrt{2}\right) =$$
$$= -\frac{i}{2} - \frac{1-i}{4}e^{-2}\left(\cos\frac{3}{2} - i\sin\frac{3}{2}\right)\overline{w\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)} + \frac{1+i}{4}e^{2}\left(\cos\frac{3}{2} + i\sin\frac{3}{2}\right) w\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -0.990734 - 0.681619\,i.$$

Пример 19. Вычислить $\int_0^\infty e^{-t^2/4-3t}\cos(2t)\,dt$, используя табл. 7.9. Положим в 7.4.2 $b = y + ix$, $c = 0$; тогда согласно 7.1.3 и 7.1.12

$$\int_0^\infty e^{-at^2-2yt}\cos(2xt) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\operatorname{Re} w\left(\frac{x+iy}{a}\right),$$

где $a > 0$, x, y — действительные.

Далее, по табл. 7.9 определяем, что

$$\int_0^\infty e^{-t^2/4-3t}\cos(2t)\,dt = \sqrt{\pi}\operatorname{Re} w(2 + 3i) = 0.231761.$$

Таблица 7.1. Интеграл вероятностей и его производная

x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	erf x	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	erf x
0.00	1.12837 91671	0.00000 00000	0.50	0.87878 25789	0.52049 98778
0.01	1.12826 63348	0.01128 34156	0.51	0.86995 15467	0.52924 36198
0.02	1.12792 79057	0.02256 45747	0.52	0.86103 70343	0.53789 86305
0.03	1.12736 40827	0.03384 12223	0.53	0.85204 34444	0.54646 40969
0.04	1.12657 52040	0.04511 11061	0.54	0.84297 51813	0.55493 92505
0.05	1.12556 17424	0.05637 19778	0.55	0.83383 66473	0.56332 33663
0.06	1.12432 43052	0.06762 15944	0.56	0.82463 22395	0.57161 57638
0.07	1.12286 36333	0.07885 77198	0.57	0.81536 63461	0.57981 58062
0.08	1.12118 06004	0.09007 81258	0.58	0.80604 33431	0.58792 29004
0.09	1.11927 62126	0.10128 05939	0.59	0.79666 75911	0.59593 64972
0.10	1.11715 16068	0.11246 29160	0.60	0.78724 34317	0.60385 60908
0.11	1.11480 80500	0.12362 28962	0.61	0.77777 51846	0.61168 12189
0.12	1.11224 69379	0.13475 83518	0.62	0.76826 71442	0.61941 14619
0.13	1.10946 97934	0.14586 71148	0.63	0.75872 35764	0.62704 64433
0.14	1.10647 82654	0.15694 70331	0.64	0.74914 87161	0.63458 58291
0.15	1.10327 41267	0.16799 59714	0.65	0.73954 67634	0.64202 93274
0.16	1.09985 92726	0.17901 18132	0.66	0.72992 18814	0.64937 66880
0.17	1.09623 57192	0.18999 24612	0.67	0.72027 81930	0.65662 77023
0.18	1.09240 56008	0.20093 58390	0.68	0.71061 97784	0.66378 22027
0.19	1.08837 11683	0.21183 98922	0.69	0.70095 06721	0.67084 00622
0.20	1.08413 47871	0.22270 25892	0.70	0.69127 48604	0.67780 11938
0.21	1.07969 89342	0.23352 19230	0.71	0.68159 62792	0.68466 55502
0.22	1.07506 61963	0.24429 59116	0.72	0.67191 88112	0.69143 31231
0.23	1.07023 92672	0.25502 25996	0.73	0.66224 62838	0.69810 39429
0.24	1.06522 09449	0.26570 00590	0.74	0.65258 24665	0.70467 80779
0.25	1.06001 41294	0.27632 63902	0.75	0.64293 10692	0.71115 56337
0.26	1.05462 18194	0.28689 97232	0.76	0.63329 57399	0.71753 67528
0.27	1.04904 71098	0.29741 82185	0.77	0.62368 00626	0.72382 16140
0.28	1.04329 31885	0.30788 00680	0.78	0.61408 75556	0.73001 04313
0.29	1.03736 33334	0.31828 34959	0.79	0.60452 16696	0.73610 34538
0.30	1.03126 09096	0.32862 67595	0.80	0.59498 57863	0.74210 09647
0.31	1.02498 93657	0.33890 81503	0.81	0.58548 32161	0.74800 32806
0.32	1.01855 22310	0.34912 59948	0.82	0.57601 71973	0.75381 07509
0.33	1.01195 31119	0.35927 86550	0.83	0.56659 08944	0.75952 37569
0.34	1.00519 56887	0.36936 45293	0.84	0.55720 73967	0.76514 27115
0.35	0.99828 37121	0.37938 20536	0.85	0.54786 97173	0.77066 80576
0.36	0.99122 10001	0.38932 97011	0.86	0.53858 07918	0.77610 02683
0.37	0.98401 14337	0.39920 59840	0.87	0.52934 34773	0.78143 98455
0.38	0.97665 89542	0.40900 94534	0.88	0.52016 05514	0.78668 73192
0.39	0.96916 75592	0.41873 87001	0.89	0.51103 47116	0.79184 32468
0.40	0.96154 12988	0.42839 23550	0.90	0.50196 85742	0.79690 82124
0.41	0.95378 42727	0.43796 90902	0.91	0.49296 46742	0.80188 28258
0.42	0.94590 06256	0.44746 76184	0.92	0.48402 54639	0.80676 77215
0.43	0.93789 45443	0.45688 66945	0.93	0.47515 33132	0.81156 35586
0.44	0.92977 02537	0.46622 51153	0.94	0.46635 05090	0.81627 10190
0.45	0.92153 20130	0.47548 17198	0.95	0.45761 92546	0.82089 08073
0.46	0.91318 41122	0.48465 53900	0.96	0.44896 16700	0.82542 36496
0.47	0.90473 08685	0.49374 58509	0.97	0.44037 97913	0.82987 02930
0.48	0.89617 66223	0.50274 96707	0.98	0.43187 55710	0.83423 15043
0.49	0.88752 57337	0.51166 82612	0.99	0.42345 08779	0.83850 80696
0.50	0.87878 25789	0.52049 98778	1.00	0.41510 74974	0.84270 07929
	$\left[\begin{matrix}(-5)3\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-5)1\\5\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-5)1\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-5)1\\5\end{matrix}\right]$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.88622\ 69255$$

См. пример 1.

Таблица 7.1. Интеграл вероятностей и его производная

x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$	erf x	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$	erf x
1.00	0.41510 74974	0.84270 07929	1.50	0.11893 02892	0.96610 51465
1.01	0.40684 71315	0.84681 04962	1.51	0.11540 38270	0.96727 67481
1.02	0.39867 13992	0.85083 80177	1.52	0.11195 95356	0.96841 34969
1.03	0.39058 18368	0.85478 42115	1.53	0.10859 63195	0.96951 62091
1.04	0.38257 98986	0.85864 99465	1.54	0.10531 30683	0.97058 56899
1.05	0.37466 69570	0.86243 61061	1.55	0.10210 86576	0.97162 27333
1.06	0.36684 43034	0.86614 35866	1.56	0.09898 19506	0.97262 81220
1.07	0.35911 31488	0.86977 32972	1.57	0.09593 17995	0.97360 26275
1.08	0.35147 46245	0.87332 61584	1.58	0.09295 70461	0.97454 70093
1.09	0.34392 97827	0.87680 31019	1.59	0.09005 65239	0.97546 20158
1.10	0.33647 95978	0.88020 50696	1.60	0.08722 90586	0.97634 83833
1.11	0.32912 49667	0.88353 30124	1.61	0.08447 34697	0.97720 68366
1.12	0.32186 67103	0.88678 78902	1.62	0.08178 85711	0.97803 80884
1.13	0.31470 55742	0.88997 06704	1.63	0.07917 31730	0.97884 28397
1.14	0.30764 22299	0.89308 23276	1.64	0.07662 60821	0.97962 17795
1.15	0.30067 72759	0.89612 38429	1.65	0.07414 61034	0.98037 55850
1.16	0.29381 12389	0.89909 62029	1.66	0.07173 20405	0.98110 49213
1.17	0.28704 45748	0.90200 03990	1.67	0.06938 26972	0.98181 04416
1.18	0.28037 76702	0.90483 74269	1.68	0.06709 68781	0.98249 27870
1.19	0.27381 08437	0.90760 82860	1.69	0.06487 33895	0.98315 25869
1.20	0.26734 43470	0.91031 39782	1.70	0.06271 10405	0.98379 04586
1.21	0.26097 83664	0.91295 55080	1.71	0.06060 86436	0.98440 70075
1.22	0.25471 30243	0.91553 38810	1.72	0.05856 50157	0.98500 28274
1.23	0.24854 83805	0.91805 01041	1.73	0.05657 89788	0.98557 84998
1.24	0.24248 44335	0.92050 51843	1.74	0.05464 93607	0.98613 45950
1.25	0.23652 11224	0.92290 01283	1.75	0.05277 49959	0.98667 16712
1.26	0.23065 83281	0.92523 59418	1.76	0.05095 47262	0.98719 02752
1.27	0.22489 58748	0.92751 36293	1.77	0.04918 74012	0.98769 09422
1.28	0.21923 35317	0.92973 41930	1.78	0.04747 18791	0.98817 41959
1.29	0.21367 10145	0.93189 86327	1.79	0.04580 70274	0.98864 05487
1.30	0.20820 79868	0.93400 79449	1.80	0.04419 17233	0.98909 05016
1.31	0.20284 40621	0.93606 31228	1.81	0.04262 48543	0.98952 45446
1.32	0.19757 88048	0.93806 51551	1.82	0.04110 53185	0.98994 31565
1.33	0.19241 17326	0.94001 50262	1.83	0.03963 20255	0.99034 68051
1.34	0.18734 23172	0.94191 37153	1.84	0.03820 38966	0.99073 59476
1.35	0.18236 99865	0.94376 21961	1.85	0.03681 98653	0.99111 10301
1.36	0.17749 41262	0.94556 14366	1.86	0.03547 88774	0.99147 24883
1.37	0.17271 40811	0.94731 23980	1.87	0.03417 98920	0.99182 07476
1.38	0.16802 91568	0.94901 60353	1.88	0.03292 18811	0.99215 62228
1.39	0.16343 86216	0.95067 32958	1.89	0.03170 38307	0.99247 93184
1.40	0.15894 17077	0.95228 51198	1.90	0.03052 47404	0.99279 04292
1.41	0.15453 76130	0.95385 24394	1.91	0.02938 36241	0.99308 99398
1.42	0.15022 55027	0.95537 61786	1.92	0.02827 95101	0.99337 82251
1.43	0.14600 45107	0.95685 72531	1.93	0.02721 14412	0.99365 56502
1.44	0.14187 37413	0.95829 65696	1.94	0.02617 84752	0.99392 25709
1.45	0.13783 22708	0.95969 50256	1.95	0.02517 96849	0.99417 93336
1.46	0.13387 91486	0.96105 35095	1.96	0.02421 41583	0.99442 62755
1.47	0.13001 33993	0.96237 28999	1.97	0.02328 09986	0.99466 37246
1.48	0.12623 40239	0.96365 40654	1.98	0.02237 93244	0.99489 20004
1.49	0.12254 00011	0.96489 78648	1.99	0.02150 82701	0.99511 14132
1.50	0.11893 02892	0.96610 51465	2.00	0.02066 69854	0.99532 22650
	$\left[{(-5)1 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)1 \atop 5}\right]$		$\left[{(-5)1 \atop 5}\right]$	$\left[{(-6)4 \atop 5}\right]$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=0.88622\ 69255$$

Таблица 7.2. Производная интеграла вероятностей

x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$
2.00	(−2)2.0666 985	2.50	(−3)2.1782 842	3.00	(−4)1.3925 305	3.50	(−6)5.3994 268
2.01	(−2)1.9854 636	2.51	(−3)2.0718 409	3.01	(−4)1.3113 047	3.51	(−6)5.0338 887
2.02	(−2)1.9070 402	2.52	(−3)1.9702 048	3.02	(−4)1.2345 698	3.52	(−6)4.6921 589
2.03	(−2)1.8313 482	2.53	(−3)1.8731 800	3.03	(−4)1.1620 929	3.53	(−6)4.3727 530
2.04	(−2)1.7583 088	2.54	(−3)1.7805 771	3.04	(−4)1.0936 521	3.54	(−6)4.0742 749
2.05	(−2)1.6878 448	2.55	(−3)1.6922 136	3.05	(−4)1.0290 362	3.55	(−6)3.7954 113
2.06	(−2)1.6198 806	2.56	(−3)1.6079 137	3.06	(−5)9.6804 434	3.56	(−6)3.5349 275
2.07	(−2)1.5543 422	2.57	(−3)1.5275 078	3.07	(−5)9.1048 542	3.57	(−6)3.2916 626
2.08	(−2)1.4911 571	2.58	(−3)1.4508 325	3.08	(−5)8.5617 765	3.58	(−6)3.0645 257
2.09	(−2)1.4302 545	2.59	(−3)1.3777 304	3.09	(−5)8.0494 817	3.59	(−6)2.8524 914
2.10	(−2)1.3715 650	2.60	(−3)1.3080 500	3.10	(−5)7.5663 267	3.60	(−6)2.6545 968
2.11	(−2)1.3150 207	2.61	(−3)1.2416 455	3.11	(−5)7.1107 499	3.61	(−6)2.4699 374
2.12	(−2)1.2605 554	2.62	(−3)1.1783 764	3.12	(−5)6.6812 674	3.62	(−6)2.2976 636
2.13	(−2)1.2081 043	2.63	(−3)1.1181 075	3.13	(−5)6.2764 699	3.63	(−6)2.1369 782
2.14	(−2)1.1576 041	2.64	(−3)1.0607 090	3.14	(−5)5.8950 187	3.64	(−6)1.9871 328
2.15	(−2)1.1089 930	2.65	(−3)1.0060 558	3.15	(−5)5.5356 429	3.65	(−6)1.8474 250
2.16	(−2)1.0622 108	2.66	(−4)9.5402 778	3.16	(−5)5.1971 360	3.66	(−6)1.7171 961
2.17	(−2)1.0171 986	2.67	(−4)9.0450 949	3.17	(−5)4.8783 532	3.67	(−6)1.5958 281
2.18	(−3)9.7389 910	2.68	(−4)8.5738 992	3.18	(−5)4.5782 082	3.68	(−6)1.4827 416
2.19	(−3)9.3225 623	2.69	(−4)8.1256 247	3.19	(−5)4.2956 707	3.69	(−6)1.3773 933
2.20	(−3)8.9221 551	2.70	(−4)7.6992 476	3.20	(−5)4.0297 636	3.70	(−6)1.2792 741
2.21	(−3)8.5372 378	2.71	(−4)7.2937 850	3.21	(−5)3.7795 604	3.71	(−6)1.1879 068
2.22	(−3)8.1672 930	2.72	(−4)6.9082 932	3.22	(−5)3.5441 831	3.72	(−6)1.1028 445
2.23	(−3)7.8118 164	2.73	(−4)6.5418 671	3.23	(−5)3.3227 997	3.73	(−6)1.0236 686
2.24	(−3)7.4703 176	2.74	(−4)6.1936 378	3.24	(−5)3.1146 217	3.74	(−7)9.4998 679
2.25	(−3)7.1423 190	2.75	(−4)5.8627 725	3.25	(−5)2.9189 025	3.75	(−7)8.8143 219
2.26	(−3)6.8273 562	2.76	(−4)5.5484 722	3.26	(−5)2.7349 351	3.76	(−7)8.1766 120
2.27	(−3)6.5249 776	2.77	(−4)5.2499 713	3.27	(−5)2.5620 500	3.77	(−7)7.5835 232
2.28	(−3)6.2347 440	2.78	(−4)4.9665 360	3.28	(−5)2.3996 135	3.78	(−7)7.0320 473
2.29	(−3)5.9562 287	2.79	(−4)4.6974 632	3.29	(−5)2.2470 263	3.79	(−7)6.5193 709
2.30	(−3)5.6890 172	2.80	(−4)4.4420 794	3.30	(−5)2.1037 210	3.80	(−7)6.0428 629
2.31	(−3)5.4327 069	2.81	(−4)4.1997 400	3.31	(−5)1.9691 613	3.81	(−7)5.6000 632
2.32	(−3)5.1869 067	2.82	(−4)3.9698 274	3.32	(−5)1.8428 397	3.82	(−7)5.1886 725
2.33	(−3)4.9512 374	2.83	(−4)3.7517 508	3.33	(−5)1.7242 768	3.83	(−7)4.8065 419
2.34	(−3)4.7253 306	2.84	(−4)3.5449 449	3.34	(−5)1.6130 192	3.84	(−7)4.4516 637
2.35	(−3)4.5088 292	2.85	(−4)3.3488 688	3.35	(−5)1.5086 387	3.85	(−7)4.1221 624
2.36	(−3)4.3013 869	2.86	(−4)3.1630 053	3.36	(−5)1.4107 306	3.86	(−7)3.8162 867
2.37	(−3)4.1026 681	2.87	(−4)2.9868 598	3.37	(−5)1.3189 127	3.87	(−7)3.5324 013
2.38	(−3)3.9123 473	2.88	(−4)2.8199 597	3.38	(−5)1.2328 243	3.88	(−7)3.2689 796
2.39	(−3)3.7301 092	2.89	(−4)2.6618 533	3.39	(−5)1.1521 246	3.89	(−7)3.0245 971
2.40	(−3)3.5556 487	2.90	(−4)2.5121 089	3.40	(−5)1.0764 921	3.90	(−7)2.7979 245
2.41	(−3)3.3886 700	2.91	(−4)2.3703 144	3.41	(−5)1.0056 235	3.91	(−7)2.5877 218
2.42	(−3)3.2288 871	2.92	(−4)2.2360 761	3.42	(−6)9.3923 243	3.92	(−7)2.3928 327
2.43	(−3)3.0760 230	2.93	(−4)2.1090 184	3.43	(−6)8.7704 910	3.93	(−7)2.2121 788
2.44	(−3)2.9298 098	2.94	(−4)1.9887 824	3.44	(−6)8.1881 894	3.94	(−7)2.0447 548
2.45	(−3)2.7899 886	2.95	(−4)1.8750 262	3.45	(−6)7.6430 199	3.95	(−7)1.8896 240
2.46	(−3)2.6563 089	2.96	(−4)1.7674 231	3.46	(−6)7.1327 211	3.96	(−7)1.7459 135
2.47	(−3)2.5285 285	2.97	(−4)1.6656 619	3.47	(−6)6.6551 620	3.97	(−7)1.6128 098
2.48	(−3)2.4064 136	2.98	(−4)1.5694 459	3.48	(−6)6.2083 353	3.98	(−7)1.4895 557
2.49	(−3)2.2897 383	2.99	(−4)1.4784 919	3.49	(−6)5.7903 503	3.99	(−7)1.3754 458
2.50	(−3)2.1782 842	3.00	(−4)1.3925 305	3.50	(−6)5.3994 268	4.00	(−7)1.2698 235

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.88622\ 69255$$

Таблица 7.2. Производная интеграла вероятностей

x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$
4.00	(−7)1.2698 235	4.50	(−9)1.8113 059	5.00	(−11)1.5670 866	5.50	(−14)8.2233 160
4.01	(−7)1.1720 776	4.51	(−9)1.6552 434	5.01	(−11)1.4178 169	5.51	(−14)7.3659 906
4.02	(−7)1.0816 394	4.52	(−9)1.5123 248	5.02	(−11)1.2825 089	5.52	(−14)6.5967 265
4.03	(−8)9.9797 993	4.53	(−9)1.3814 699	5.03	(−11)1.1598 820	5.53	(−14)5.9066 187
4.04	(−8)9.2060 694	4.54	(−9)1.2616 849	5.04	(−11)1.0487 702	5.54	(−14)5.2876 480
4.05	(−8)8.4906 281	4.55	(−9)1.1520 559	5.05	(−12)9.4811 285	5.55	(−14)4.7325 943
4.06	(−8)7.8292 207	4.56	(−9)1.0517 423	5.06	(−12)8.5694 483	5.56	(−14)4.2349 585
4.07	(−8)7.2178 923	4.57	(−10)9.5997 127	5.07	(−12)7.7438 839	5.57	(−14)3.7888 917
4.08	(−8)6.6529 674	4.58	(−10)8.7603 264	5.08	(−12)6.9964 533	5.58	(−14)3.3891 310
4.09	(−8)6.1310 313	4.59	(−10)7.9927 363	5.09	(−12)6.3198 998	5.59	(−14)3.0309 422
4.10	(−8)5.6489 121	4.60	(−10)7.2909 450	5.10	(−12)5.7076 270	5.60	(−14)2.7100 675
4.11	(−8)5.2036 639	4.61	(−10)6.6494 435	5.11	(−12)5.1536 405	5.61	(−14)2.4226 780
4.12	(−8)4.7925 517	4.62	(−10)6.0631 724	5.12	(−12)4.6524 937	5.62	(−14)2.1653 317
4.13	(−8)4.4130 364	4.63	(−10)5.5274 864	5.13	(−12)4.1992 391	5.63	(−14)1.9349 346
4.14	(−8)4.0627 618	4.64	(−10)5.0381 209	5.14	(−12)3.7893 835	5.64	(−14)1.7287 067
4.15	(−8)3.7395 414	4.65	(−10)4.5911 621	5.15	(−12)3.4188 470	5.65	(−14)1.5441 499
4.16	(−8)3.4413 471	4.66	(−10)4.1830 187	5.16	(−12)3.0839 257	5.66	(−14)1.3790 206
4.17	(−8)3.1662 977	4.67	(−10)3.8103 962	5.17	(−12)2.7812 580	5.67	(−14)1.2313 037
4.18	(−8)2.9126 490	4.68	(−10)3.4702 727	5.18	(−12)2.5077 937	5.68	(−14)1.0991 900
4.19	(−8)2.6787 841	4.69	(−10)3.1598 772	5.19	(−12)2.2607 652	5.69	(−15)9.8105 529
4.20	(−8)2.4632 041	4.70	(−10)2.8766 694	5.20	(−12)2.0376 626	5.70	(−15)8.7544 193
4.21	(−8)2.2645 204	4.71	(−10)2.6183 207	5.21	(−12)1.8362 094	5.71	(−15)7.8104 192
4.22	(−8)2.0814 463	4.72	(−10)2.3826 973	5.22	(−12)1.6543 420	5.72	(−15)6.9668 183
4.23	(−8)1.9127 901	4.73	(−10)2.1678 441	5.23	(−12)1.4901 896	5.73	(−15)6.2130 917
4.24	(−8)1.7574 484	4.74	(−10)1.9719 702	5.24	(−12)1.3420 568	5.74	(−15)5.5398 013
4.25	(−8)1.6143 994	4.75	(−10)1.7934 357	5.25	(−12)1.2084 075	5.75	(−15)4.9384 851
4.26	(−8)1.4826 974	4.76	(−10)1.6307 388	5.26	(−12)1.0878 501	5.76	(−15)4.4015 583
4.27	(−8)1.3614 673	4.77	(−10)1.4825 049	5.27	(−13)9.7912 433	5.77	(−15)3.9222 232
4.28	(−8)1.2498 993	4.78	(−10)1.3474 759	5.28	(−13)8.8108 899	5.78	(−15)3.4943 893
4.29	(−8)1.1472 445	4.79	(−10)1.2245 007	5.29	(−13)7.9271 093	5.79	(−15)3.1126 008
4.30	(−8)1.0528 102	4.80	(−10)1.1125 261	5.30	(−13)7.1305 505	5.80	(−15)2.7719 710
4.31	(−9)9.6595 598	4.81	(−10)1.0105 888	5.31	(−13)6.4127 516	5.81	(−15)2.4681 247
4.32	(−9)8.8608 977	4.82	(−11)9.1780 821	5.32	(−13)5.7660 568	5.82	(−15)2.1971 447
4.33	(−9)8.1266 442	4.83	(−11)8.3337 894	5.33	(−13)5.1835 412	5.83	(−15)1.9555 249
4.34	(−9)7.4517 438	4.84	(−11)7.5656 500	5.34	(−13)4.6589 423	5.84	(−15)1.7401 279
4.35	(−9)6.8315 260	4.85	(−11)6.8669 377	5.35	(−13)4.1865 979	5.85	(−15)1.5481 468
4.36	(−9)6.2616 772	4.86	(−11)6.2315 074	5.36	(−13)3.7613 895	5.86	(−15)1.3770 708
4.37	(−9)5.7382 144	4.87	(−11)5.6537 456	5.37	(−13)3.3786 913	5.87	(−15)1.2246 543
4.38	(−9)5.2574 603	4.88	(−11)5.1285 259	5.38	(−13)3.0343 233	5.88	(−15)1.0888 898
4.39	(−9)4.8160 210	4.89	(−11)4.6511 675	5.39	(−13)2.7245 096	5.89	(−16)9.6798 241
4.40	(−9)4.4107 647	4.90	(−11)4.2173 976	5.40	(−13)2.4458 396	5.90	(−16)8.6032 817
4.41	(−9)4.0388 018	4.91	(−11)3.8233 166	5.41	(−13)2.1952 336	5.91	(−16)7.6449 380
4.42	(−9)3.6974 673	4.92	(−11)3.4653 660	5.42	(−13)1.9699 112	5.92	(−16)6.7919 883
4.43	(−9)3.3843 033	4.93	(−11)3.1402 998	5.43	(−13)1.7673 627	5.93	(−16)6.0329 959
4.44	(−9)3.0970 439	4.94	(−11)2.8451 570	5.44	(−13)1.5853 234	5.94	(−16)5.3577 479
4.45	(−9)2.8336 002	4.95	(−11)2.5772 379	5.45	(−13)1.4217 499	5.95	(−16)4.7571 261
4.46	(−9)2.5920 474	4.96	(−11)2.3340 811	5.46	(−13)1.2747 989	5.96	(−16)4.2229 913
4.47	(−9)2.3706 118	4.97	(−11)2.1134 428	5.47	(−13)1.1428 081	5.97	(−16)3.7480 801
4.48	(−9)2.1676 596	4.98	(−11)1.9132 785	5.48	(−13)1.0242 785	5.98	(−16)3.3259 113
4.49	(−9)1.9816 862	4.99	(−11)1.7317 254	5.49	(−14)9.1785 895	5.99	(−16)2.9507 038
4.50	(−9)1.8113 059	5.00	(−11)1.5670 866	5.50	(−14)8.2233 160	6.00	(−16)2.6173 012

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.88622\ 69255$$

Таблица 7.2. Производная интеграла вероятностей

x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$
6.00	(-16)2.6173 012	6.50	(-19)5.0525 800	7.00	(-22)5.9159 630	7.50	(-25)4.2013 654
6.01	(-16)2.3211 058	6.51	(-19)4.4362 038	7.01	(-22)5.1425 768	7.51	(-25)3.6157 871
6.02	(-16)2.0580 187	6.52	(-19)3.8942 418	7.02	(-22)4.4694 005	7.52	(-25)3.1112 033
6.03	(-16)1.8243 864	6.53	(-19)3.4178 066	7.03	(-22)3.8835 679	7.53	(-25)2.6764 989
6.04	(-16)1.6169 533	6.54	(-19)2.9990 603	7.04	(-22)3.3738 492	7.54	(-25)2.3020 719
6.05	(-16)1.4328 188	6.55	(-19)2.6310 921	7.05	(-22)2.9304 450	7.55	(-25)1.9796 292
6.06	(-16)1.2693 992	6.56	(-19)2.3078 100	7.06	(-22)2.5448 057	7.56	(-25)1.7020 094
6.07	(-16)1.1243 934	6.57	(-19)2.0238 447	7.07	(-22)2.2094 736	7.57	(-25)1.4630 299
6.08	(-17)9.9575 277	6.58	(-19)1.7744 651	7.08	(-22)1.9179 450	7.58	(-25)1.2573 541
6.09	(-17)8.8165 340	6.59	(-19)1.5555 031	7.09	(-22)1.6645 491	7.59	(-25)1.0803 765
6.10	(-17)7.8047 211	6.60	(-19)1.3632 874	7.10	(-22)1.4443 426	7.60	(-26)9.2812 353
6.11	(-17)6.9076 453	6.61	(-19)1.1945 852	7.11	(-22)1.2530 171	7.61	(-26)7.9716 752
6.12	(-17)6.1124 570	6.62	(-19)1.0465 500	7.12	(-22)1.0868 181	7.62	(-26)6.8455 216
6.13	(-17)5.4077 268	6.63	(-20)9.1667 618	7.13	(-23)9.4247 516	7.63	(-26)5.8772 834
6.14	(-17)4.7832 911	6.64	(-20)8.0275 879	7.14	(-23)8.1713 928	7.64	(-26)5.0449 849
6.15	(-17)4.2301 135	6.65	(-20)7.0285 758	7.15	(-23)7.0832 963	7.65	(-26)4.3296 844
6.16	(-17)3.7401 616	6.66	(-20)6.1526 575	7.16	(-23)6.1388 620	7.66	(-26)3.7150 594
6.17	(-17)3.3062 970	6.67	(-20)5.3848 212	7.17	(-23)5.3192 876	7.67	(-26)3.1870 466
6.18	(-17)2.9221 768	6.68	(-20)4.7118 664	7.18	(-23)4.6082 095	7.68	(-26)2.7335 323
6.19	(-17)2.5821 666	6.69	(-20)4.1221 880	7.19	(-23)3.9913 893	7.69	(-26)2.3440 839
6.20	(-17)2.2812 620	6.70	(-20)3.6055 852	7.20	(-23)3.4564 408	7.70	(-26)2.0097 185
6.21	(-17)2.0150 194	6.71	(-20)3.1530 937	7.21	(-23)2.9925 904	7.71	(-26)1.7227 031
6.22	(-17)1.7794 936	6.72	(-20)2.7568 372	7.22	(-23)2.5904 701	7.72	(-26)1.4763 822
6.23	(-17)1.5711 830	6.73	(-20)2.4098 972	7.23	(-23)2.2419 351	7.73	(-26)1.2650 285
6.24	(-17)1.3869 801	6.74	(-20)2.1061 973	7.24	(-23)1.9399 057	7.74	(-26)1.0837 147
6.25	(-17)1.2241 281	6.75	(-20)1.8404 021	7.25	(-23)1.6782 295	7.75	(-27)9.2820 251
6.26	(-17)1.0801 812	6.76	(-20)1.6078 278	7.26	(-23)1.4515 608	7.76	(-27)7.9484 723
6.27	(-18)9.5297 064	6.77	(-20)1.4043 634	7.27	(-23)1.2552 558	7.77	(-27)6.8051 505
6.28	(-18)8.4057 325	6.78	(-20)1.2264 013	7.28	(-23)1.0852 815	7.78	(-27)5.8251 209
6.29	(-18)7.4128 421	6.79	(-20)1.0707 765	7.29	(-24)9.3813 574	7.79	(-27)4.9852 310
6.30	(-18)6.5359 252	6.80	(-21)9.3471 286	7.30	(-24)8.1077 830	7.80	(-27)4.2655 868
6.31	(-18)5.7615 925	6.81	(-21)8.1577 565	7.31	(-24)7.0057 026	7.81	(-27)3.6490 970
6.32	(-18)5.0779 819	6.82	(-21)7.1183 018	7.32	(-24)6.0522 159	7.82	(-27)3.1210 820
6.33	(-18)4.4745 863	6.83	(-21)6.2100 515	7.33	(-24)5.2274 546	7.83	(-27)2.6689 356
6.34	(-18)3.9421 013	6.84	(-21)5.4166 048	7.34	(-24)4.5141 841	7.84	(-27)2.2818 346
6.35	(-18)3.4722 886	6.85	(-21)4.7235 904	7.35	(-24)3.8974 577	7.85	(-27)1.9504 883
6.36	(-18)3.0578 557	6.86	(-21)4.1184 183	7.36	(-24)3.3643 153	7.86	(-27)1.6669 236
6.37	(-18)2.6923 486	6.87	(-21)3.5900 610	7.37	(-24)2.9035 220	7.87	(-27)1.4242 990
6.38	(-18)2.3700 568	6.88	(-21)3.1288 615	7.38	(-24)2.5053 400	7.88	(-27)1.2167 456
6.39	(-18)2.0859 281	6.89	(-21)2.7263 649	7.39	(-24)2.1613 315	7.89	(-27)1.0392 297
6.40	(-18)1.8354 945	6.90	(-21)2.3751 704	7.40	(-24)1.8641 859	7.90	(-28)8.8743 478
6.41	(-18)1.6148 045	6.91	(-21)2.0688 010	7.41	(-24)1.6075 712	7.91	(-28)7.5766 022
6.42	(-18)1.4203 650	6.92	(-21)1.8015 892	7.42	(-24)1.3860 036	7.92	(-28)6.4673 396
6.43	(-18)1.2490 883	6.93	(-21)1.5685 776	7.43	(-24)1.1947 351	7.93	(-28)5.5193 762
6.44	(-18)1.0982 455	6.94	(-21)1.3654 297	7.44	(-24)1.0296 557	7.94	(-28)4.7094 204
6.45	(-19)9.6542 574	6.95	(-21)1.1883 540	7.45	(-25)8.8720 826	7.95	(-28)4.0175 202
6.46	(-19)8.4849 924	6.96	(-21)1.0340 356	7.46	(-25)7.6431 480	7.96	(-28)3.4265 874
6.47	(-19)7.4558 503	6.97	(-22)8.9957 684	7.47	(-25)6.5831 250	7.97	(-28)2.9219 899
6.48	(-19)6.5502 224	6.98	(-22)7.8244 565	7.48	(-25)5.6689 820	7.98	(-28)2.4912 008
6.49	(-19)5.7534 461	6.99	(-22)6.8042 967	7.49	(-25)4.8808 021	7.99	(-28)2.1234 982
6.50	(-19)5.0525 800	7.00	(-22)5.9159 630	7.50	(-25)4.2013 654	8.00	(-28)1.8097 068

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.88622\ 69255$$

Таблица 7.2. Производная интеграла вероятностей

x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$
8.00	(-28)1.8097 068	8.50	(-32)4.7280 139	9.00	(-36)7.4920 734	9.50	(-40)7.2007 555
8.01	(-28)1.5419 762	8.51	(-32)3.9884 601	9.01	(-36)6.2572 800	9.51	(-40)5.9541 351
8.02	(-28)1.3135 913	8.52	(-32)3.3639 141	9.02	(-36)5.2249 519	9.52	(-40)4.9223 495
8.03	(-28)1.1188 091	8.53	(-32)2.8365 973	9.03	(-36)4.3620 651	9.53	(-40)4.0685 471
8.04	(-29)9.5271 911	8.54	(-32)2.3914 628	9.04	(-36)3.6409 535	9.54	(-40)3.3621 678
8.05	(-29)8.1112 334	8.55	(-32)2.0157 780	9.05	(-36)3.0384 441	9.55	(-40)2.7778 742
8.06	(-29)6.9043 382	8.56	(-32)1.6987 713	9.06	(-36)2.5351 317	9.56	(-40)2.2946 629
8.07	(-29)5.8758 453	8.57	(-32)1.4313 316	9.07	(-36)2.1147 690	9.57	(-40)1.8951 272
8.08	(-29)4.9995 601	8.58	(-32)1.2057 541	9.08	(-36)1.7637 559	9.58	(-40)1.5648 437
8.09	(-29)4.2531 077	8.59	(-32)1.0155 245	9.09	(-36)1.4707 105	9.59	(-40)1.2918 638
8.10	(-29)3.6173 797	8.60	(-33)8.5513 598	9.10	(-36)1.2261 088	9.60	(-40)1.0662 907
8.11	(-29)3.0760 612	8.61	(-33)7.1993 468	9.11	(-36)1.0219 837	9.61	(-41)8.7992 901
8.12	(-29)2.6152 245	8.62	(-33)6.0598 819	9.12	(-37)8.5167 148	9.62	(-41)7.2599 363
8.13	(-29)2.2229 829	8.63	(-33)5.0997 438	9.13	(-37)7.0959 960	9.63	(-41)5.9886 802
8.14	(-29)1.8891 933	8.64	(-33)4.2908 734	9.14	(-37)5.9110 925	9.64	(-41)4.9390 403
8.15	(-29)1.6052 025	8.65	(-33)3.6095 760	9.15	(-37)4.9230 619	9.65	(-41)4.0725 570
8.16	(-29)1.3636 296	8.66	(-33)3.0358 465	9.16	(-37)4.0993 592	9.66	(-41)3.3574 141
8.17	(-29)1.1581 801	8.67	(-33)2.5527 988	9.17	(-37)3.4127 918	9.67	(-41)2.7672 971
8.18	(-30)9.8348 778	8.68	(-33)2.1461 817	9.18	(-37)2.8406 437	9.68	(-41)2.2804 460
8.19	(-30)8.3497 786	8.69	(-33)1.8039 709	9.19	(-37)2.3639 423	9.69	(-41)1.8788 710
8.20	(-30)7.0875 167	8.70	(-33)1.5160 228	9.20	(-37)1.9668 449	9.70	(-41)1.5477 017
8.21	(-30)6.0148 717	8.71	(-33)1.2737 818	9.21	(-37)1.6361 251	9.71	(-41)1.2746 493
8.22	(-30)5.1035 431	8.72	(-33)1.0700 339	9.22	(-37)1.3607 427	9.72	(-41)1.0495 600
8.23	(-30)4.3294 262	8.73	(-34)8.9869 668	9.23	(-37)1.1314 847	9.73	(-42)8.6404 628
8.24	(-30)3.6719 947	8.74	(-34)7.5464 360	9.24	(-38)9.4066 395	9.74	(-42)7.1118 055
8.25	(-30)3.1137 725	8.75	(-34)6.3355 422	9.25	(-38)7.8186 802	9.75	(-42)5.8524 252
8.26	(-30)2.6398 841	8.76	(-34)5.3178 836	9.26	(-38)6.4974 888	9.76	(-42)4.8150 968
8.27	(-30)2.2376 697	8.77	(-34)4.4627 957	9.27	(-38)5.3984 710	9.77	(-42)3.9608 401
8.28	(-30)1.8963 577	8.78	(-34)3.7444 525	9.28	(-38)4.4844 496	9.78	(-42)3.2574 873
8.29	(-30)1.6067 846	8.79	(-34)3.1411 074	9.29	(-38)3.7244 373	9.79	(-42)2.6784 979
8.30	(-30)1.3611 569	8.80	(-34)2.6344 525	9.30	(-38)3.0926 112	9.80	(-42)2.2019 782
8.31	(-30)1.1528 476	8.81	(-34)2.2090 784	9.31	(-38)2.5674 566	9.81	(-42)1.8098 720
8.32	(-31)9.7622 228	8.82	(-34)1.8520 172	9.32	(-38)2.1310 520	9.82	(-42)1.4872 907
8.33	(-31)8.2649 206	8.83	(-34)1.5523 585	9.33	(-38)1.7684 718	9.83	(-42)1.2219 600
8.34	(-31)6.9958 710	8.84	(-34)1.3009 248	9.34	(-38)1.4672 880	9.84	(-42)1.0037 632
8.35	(-31)5.9204 954	8.85	(-34)1.0899 975	9.35	(-38)1.2171 545	9.85	(-43)8.2436 338
8.36	(-31)5.0094 199	8.86	(-35)9.1308 655	9.36	(-38)1.0094 602	9.86	(-43)6.7689 179
8.37	(-31)4.2376 977	8.87	(-35)7.6473 600	9.37	(-39)8.3703 932	9.87	(-43)5.5569 047
8.38	(-31)3.5841 456	8.88	(-35)6.4036 010	9.38	(-39)6.9392 997	9.88	(-43)4.5609 970
8.39	(-31)3.0307 803	8.89	(-35)5.3610 534	9.39	(-39)5.7517 311	9.89	(-43)3.7428 271
8.40	(-31)2.5623 380	8.90	(-35)4.4873 418	9.40	(-39)4.7664 456	9.90	(-43)3.0708 096
8.41	(-31)2.1658 657	8.91	(-35)3.7552 711	9.41	(-39)3.9491 520	9.91	(-43)2.5189 477
8.42	(-31)1.8303 736	8.92	(-35)3.1420 030	9.42	(-39)3.2713 439	9.92	(-43)2.0658 489
8.43	(-31)1.5465 399	8.93	(-35)2.6283 611	9.43	(-39)2.7093 286	9.93	(-43)1.6939 130
8.44	(-31)1.3064 586	8.94	(-35)2.1982 476	9.44	(-39)2.2434 186	9.94	(-43)1.3886 628
8.45	(-31)1.1034 263	8.95	(-35)1.8381 516	9.45	(-39)1.8572 574	9.95	(-43)1.1381 922
8.46	(-32)9.3176 012	8.96	(-35)1.5367 357	9.46	(-39)1.5372 589	9.96	(-44)9.3271 204
8.47	(-32)7.8664 369	8.97	(-35)1.2844 884	9.47	(-39)1.2721 404	9.97	(-44)7.6417 477
8.48	(-32)6.6399 552	8.98	(-35)1.0734 315	9.48	(-39)1.0525 343	9.98	(-44)6.2596 629
8.49	(-32)5.6035 774	8.99	(-36)8.9687 435	9.49	(-40)8.7066 400	9.99	(-44)5.1265 162
8.50	(-32)4.7280 139	9.00	(-36)7.4920 734	9.50	(-40)7.2007 555	10.00	(-44)4.1976 562

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.88622\ 69255$$

Таблица 7.3. Дополнительный интеграл вероятностей

x^{-2}	$xe^{x^2}\operatorname{erfc} x$	$\langle x\rangle$	x^{-2}	$xe^{x^2}\operatorname{erfc} x$	$\langle x\rangle$
0.250	0.51079 14	2	0.125	0.53406 72	3
0.245	0.51163 07	2	0.120	0.53511 47	3
0.240	0.51247 67	2	0.115	0.53617 29	3
0.235	0.51332 94	2	0.110	0.53724 20	3
0.230	0.51418 90	2	0.105	0.53832 23	3
0.225	0.51505 55	2	0.100	0.53941 41	3
0.220	0.51592 92	2	0.095	0.54051 76	3
0.215	0.51681 01	2	0.090	0.54163 32	3
0.210	0.51769 83	2	0.085	0.54276 11	3
0.205	0.51859 40	2	0.080	0.54390 16	4
0.200	0.51949 74	2	0.075	0.54505 51	4
0.195	0.52040 85	2	0.070	0.54622 19	4
0.190	0.52132 75	2	0.065	0.54740 24	4
0.185	0.52225 45	2	0.060	0.54859 69	4
0.180	0.52318 98	2	0.055	0.54980 58	4
0.175	0.52413 33	2	0.050	0.55102 95	4
0.170	0.52508 55	2	0.045	0.55226 85	5
0.165	0.52604 63	2	0.040	0.55352 32	5
0.160	0.52701 59	3	0.035	0.55479 41	5
0.155	0.52799 46	3	0.030	0.55608 17	6
0.150	0.52898 25	3	0.025	0.55738 65	6
0.145	0.52997 98	3	0.020	0.55870 90	7
0.140	0.53098 67	3	0.015	0.56005 00	8
0.135	0.53200 35	3	0.010	0.56140 99	10
0.130	0.53303 02	3	0.005	0.56278 96	14
0.125	0.53406 72	3	0.000	0.56418 96	∞
	$\left[{(-6)1 \atop 3}\right]$			$\left[{(-6)3 \atop 3}\right]$	

См. пример 2. $\langle x\rangle$ — целое число, ближайшее к x.

n	$\operatorname{erfc}\sqrt{n\pi}$	n	$\operatorname{erfc}\sqrt{n\pi}$
1	0.01218 88821 84803	6	0.00000 00008 25422
2	0.00039 27505 88282	7	0.00000 00000 33136
3	0.00001 41444 02689	8	0.00000 00000 01343
4	0.00000 05351 64662	9	0.00000 00000 00055
5	0.00000 00208 26552	10	0.00000 00000 00002

$$\operatorname{erfc} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt=1-\operatorname{erf} x$$

Значения $\operatorname{erfc}\sqrt{n\pi}$ взяты из работы [7.3].

Таблица 7.4. Кратные интегралы вероятностей

$$2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)i^n \operatorname{erfc} x$$

x	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.1	(−1)8.32738	(−1)7.93573	(−1)7.62409	(−1)7.36220
0.2	(−1)6.85245	(−1)6.22654	(−1)5.74882	(−1)5.36163
0.3	(−1)5.56938	(−1)4.82842	(−1)4.28565	(−1)3.86125
0.4	(−1)4.46884	(−1)3.69906	(−1)3.15756	(−1)2.74894
0.5	(−1)3.53855	(−1)2.79859	(−1)2.29846	(−1)1.93408
0.6	(−1)2.76388	(−1)2.09021	(−1)1.65244	(−1)1.34438
0.7	(−1)2.12869	(−1)1.54061	(−1)1.17295	(−2)9.22962
0.8	(−1)1.61601	(−1)1.12021	(−2)8.21802	(−2)6.25650
0.9	(−1)1.20884	(−2)8.03288	(−2)5.68138	(−2)4.18643
1.0	(−2)8.90739	(−2)5.67901	(−2)3.87449	(−2)2.76442
1.1	(−2)6.46332	(−2)3.95711	(−2)2.60573	(−2)1.80092
1.2	(−2)4.61706	(−2)2.71686	(−2)1.72776	(−2)1.15720
1.3	(−2)3.24613	(−2)1.83748	(−2)1.12918	(−3)7.33229
1.4	(−2)2.24570	(−2)1.22388	(−3)7.27211	(−3)4.58017
1.5	(−2)1.52836	(−3)8.02626	(−3)4.61400	(−3)2.81992
1.6	(−2)1.02305	(−3)5.18140	(−3)2.88347	(−3)1.71085
1.7	(−3)6.73408	(−3)3.29192	(−3)1.77452	(−3)1.02261
1.8	(−3)4.35805	(−3)2.05795	(−3)1.07519	(−4)6.02074
1.9	(−3)2.77245	(−3)1.26566	(−4)6.41281	(−4)3.49094
2.0	(−3)1.73350	(−4)7.65644	(−4)3.76431	(−4)1.99301
2.1	(−3)1.06515	(−4)4.55498	(−4)2.17431	(−4)1.12014
2.2	(−4)6.43074	(−4)2.66457	(−4)1.23562	(−5)6.19670
2.3	(−4)3.81436	(−4)1.53245	(−5)6.90731	(−5)3.37364
2.4	(−4)2.22250	(−5)8.66372	(−5)3.79773	(−5)1.80727
2.5	(−4)1.27195	(−5)4.81417	(−5)2.05339	(−6)9.52500
2.6	(−5)7.14929	(−5)2.62896	(−5)1.09167	(−6)4.93818
2.7	(−5)3.94619	(−5)1.41072	(−6)5.70591	(−6)2.51807
2.8	(−5)2.13882	(−6)7.43784	(−6)2.93172	(−6)1.26274
2.9	(−5)1.13820	(−6)3.85260	(−6)1.48058	(−7)6.22654
3.0	(−6)5.94664	(−6)1.96029	(−7)7.34867	(−7)3.01870
3.1	(−6)3.05003	(−7)9.79725	(−7)3.58429	(−7)1.43874
3.2	(−6)1.53562	(−7)4.80916	(−7)1.71780	(−8)6.74044
3.3	(−7)7.58899	(−7)2.31835	(−8)8.08871	(−8)3.10379
3.4	(−7)3.68109	(−7)1.09748	(−8)3.74180	(−8)1.40460
3.5	(−7)1.75241	(−8)5.10148	(−8)1.70036	(−9)6.24636
3.6	(−8)8.18726	(−8)2.32831	(−9)7.58967	(−9)2.72947
3.7	(−8)3.75373	(−8)1.04329	(−9)3.32733	(−9)1.17184
3.8	(−8)1.68883	(−9)4.58945	(−9)1.43260	(−10)4.94271
3.9	(−9)7.45575	(−9)1.98190	(−10)6.05736	(−10)2.04800
4.0	(−9)3.22966	(−10)8.40124	(−10)2.51501	(−11)8.33554
4.1	(−9)1.37267	(−10)3.49560	(−10)1.02533	(−11)3.33230
4.2	(−10)5.72405	(−10)1.42757	(−11)4.10427	(−11)1.30837
4.3	(−10)2.34181	(−11)5.72196	(−11)1.61297	(−12)5.04508
4.4	(−11)9.39929	(−11)2.25085	(−12)6.22316	(−12)1.91041
4.5	(−11)3.70102	(−12)8.68930	(−12)2.35705	(−13)7.10366
4.6	(−11)1.42960	(−12)3.29184	(−13)8.76348	(−13)2.59364
4.7	(−12)5.41708	(−12)1.22375	(−13)3.19826	(−14)9.29786
4.8	(−12)2.01353	(−13)4.46407	(−13)1.14567	(−14)3.27252
4.9	(−13)7.34149	(−13)1.59785	(−14)4.02809	(−14)1.13080
5.0	(−13)2.62561	(−14)5.61169	(−14)1.38998	(−15)3.83592
$\left[2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]^{-1}$	(−1)5.64189 58355	(−1)2.50000 00000	(−2)9.40315 97258	(−2)3.12500

См. примеры 4 и 5.

Таблица 7.4. Кратные интегралы вероятностей

$$2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)i^n \operatorname{erfc} x$$

x	$n=5$	$n=6$	$n=10$	$n=11$
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.1	(−1)7.13475	(−1)6.93283	(−1)6.28971	(−1)6.15727
0.2	(−1)5.03608	(−1)4.75548	(−1)3.91490	(−1)3.75188
0.3	(−1)3.51572	(−1)3.22652	(−1)2.41089	(−1)2.26201
0.4	(−1)2.42671	(−1)2.16478	(−1)1.46861	(−1)1.34906
0.5	(−1)1.65569	(−1)1.43588	(−2)8.84744	(−2)7.95749
0.6	(−1)1.11630	(−2)9.41309	(−2)5.27007	(−2)4.64127
0.7	(−2)7.43528	(−2)6.09742	(−2)3.10323	(−2)2.67626
0.8	(−2)4.89121	(−2)3.90166	(−2)1.80600	(−2)1.52533
0.9	(−2)3.17704	(−2)2.46567	(−2)1.03859	(−3)8.59126
1.0	(−2)2.03707	(−2)1.53850	(−3)5.90062	(−3)4.78106
1.1	(−2)1.28901	(−3)9.47623	(−3)3.31130	(−3)2.62835
1.2	(−3)8.04765	(−3)5.76033	(−3)1.83510	(−3)1.42708
1.3	(−3)4.95614	(−3)3.45489	(−3)1.00415	(−4)7.65146
1.4	(−3)3.01008	(−3)2.04411	(−4)5.42413	(−4)4.05030
1.5	(−3)1.80252	(−3)1.19278	(−4)2.89186	(−4)2.11641
1.6	(−3)1.06403	(−4)6.86307	(−4)1.52145	(−4)1.09146
1.7	(−4)6.19032	(−4)3.89303	(−5)7.89765	(−5)5.55435
1.8	(−4)3.54870	(−4)2.17663	(−5)4.04407	(−5)2.78871
1.9	(−4)2.00419	(−4)1.19930	(−5)2.04244	(−5)1.38116
2.0	(−4)1.11492	(−5)6.51088	(−5)1.01722	(−6)6.74666
2.1	(−5)6.10810	(−5)3.48211	(−6)4.99509	(−6)3.24987
2.2	(−5)3.29497	(−5)1.83427	(−6)2.41807	(−6)1.54350
2.3	(−5)1.74988	(−6)9.51547	(−6)1.15378	(−7)7.22681
2.4	(−6)9.14767	(−6)4.86044	(−7)5.42553	(−7)3.33519
2.5	(−6)4.70641	(−6)2.44418	(−7)2.51397	(−7)1.51693
2.6	(−6)2.38278	(−6)1.20988	(−7)1.14766	(−8)6.79864
2.7	(−6)1.18695	(−7)5.89435	(−8)5.16116	(−8)3.00212
2.8	(−7)5.81672	(−7)2.82592	(−8)2.28612	(−8)1.30595
2.9	(−7)2.80391	(−7)1.33308	(−9)9.97266	(−9)5.59577
3.0	(−7)1.32935	(−8)6.18684	(−9)4.28380	(−9)2.36143
3.1	(−8)6.19798	(−8)2.82454	(−9)1.81176	(−10)9.81330
3.2	(−8)2.84151	(−8)1.26835	(−10)7.54345	(−10)4.01541
3.3	(−8)1.28082	(−9)5.60145	(−10)3.09165	(−10)1.61759
3.4	(−9)5.67576	(−9)2.43265	(−10)1.24712	(−11)6.41479
3.5	(−9)2.47236	(−9)1.03880	(−11)4.95086	(−11)2.50393
3.6	(−9)1.05855	(−10)4.36132	(−11)1.93401	(−12)9.61928
3.7	(−10)4.45435	(−10)1.80009	(−12)7.43354	(−12)3.63661
3.8	(−10)1.84200	(−11)7.30331	(−12)2.81094	(−12)1.35283
3.9	(−11)7.48503	(−11)2.91245	(−12)1.04564	(−13)4.95149
4.0	(−11)2.98854	(−11)1.14149	(−13)3.82601	(−13)1.78294
4.1	(−11)1.17234	(−12)4.39668	(−13)1.37691	(−14)6.31544
4.2	(−12)4.51802	(−12)1.66412	(−14)4.87328	(−14)2.20038
4.3	(−12)1.71044	(−13)6.18894	(−14)1.69612	(−15)7.54020
4.4	(−13)6.36069	(−13)2.26147	(−15)5.80461	(−15)2.54109
4.5	(−13)2.32332	(−14)8.11851	(−15)1.95316	(−16)8.42124
4.6	(−14)8.33482	(−14)2.86315	(−16)6.46126	(−16)2.74419
4.7	(−14)2.93656	(−15)9.91898	(−16)2.10125	(−17)8.79230
4.8	(−14)1.01604	(−15)3.37534	(−17)6.71719	(−17)2.76954
4.9	(−15)3.45215	(−15)1.12815	(−17)2.11065	(−18)8.57626
5.0	(−15)1.15173	(−16)3.70336	(−18)6.51829	(−18)2.61062
$\left[2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]^{-1}$	(−3)9.40315 97258	(−3)2.60416 66667	(−6)8.13802 08333	(−6)1.69609 66316

Таблица 7.5. Интеграл Досона

x	$e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$	x	$e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$	x^{-2}	$xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$	$\langle x\rangle$
0.00	0.00000 00000	1.00	0.53807 95069	0.250	0.60268 0777	2
0.02	0.01999 46675	1.02	0.53637 44359	0.245	0.60046 6027	2
0.04	0.03995 73606	1.04	0.53431 71471	0.240	0.59819 8606	2
0.06	0.05985 62071	1.06	0.53192 50787	0.235	0.59588 1008	2
0.08	0.07965 95389	1.08	0.52921 57454	0.230	0.59351 6018	2
0.10	0.09933 59924	1.10	0.52620 66800	0.225	0.59110 6724	2
0.12	0.11885 46083	1.12	0.52291 53777	0.220	0.58865 6517	2
0.14	0.13818 49287	1.14	0.51935 92435	0.215	0.58616 9107	2
0.16	0.15729 70920	1.16	0.51555 55409	0.210	0.58364 8516	2
0.18	0.17616 19254	1.18	0.51152 13448	0.205	0.58109 9080	2
0.20	0.19475 10334	1.20	0.50727 34964	0.200	0.57852 5444	2
0.22	0.21303 68833	1.22	0.50282 85611	0.195	0.57593 2550	2
0.24	0.23099 28865	1.24	0.49820 27897	0.190	0.57332 5618	2
0.26	0.24859 34747	1.26	0.49341 20827	0.185	0.57071 0126	2
0.28	0.26581 41727	1.28	0.48847 19572	0.180	0.56809 1778	2
0.30	0.28263 16650	1.30	0.48339 75174	0.175	0.56547 6462	2
0.32	0.29902 38575	1.32	0.47820 34278	0.170	0.56287 0205	2
0.34	0.31496 99336	1.34	0.47290 38898	0.165	0.56027 9114	2
0.36	0.33045 04051	1.36	0.46751 26208	0.160	0.55770 9305	3
0.38	0.34544 71562	1.38	0.46204 28368	0.155	0.55516 6829	3
0.40	0.35994 34819	1.40	0.45650 72375	0.150	0.55265 7582	3
0.42	0.37392 41210	1.42	0.45091 79943	0.145	0.55018 7208	3
0.44	0.38737 52812	1.44	0.44528 67410	0.140	0.54776 0994	3
0.46	0.40028 46599	1.46	0.43962 45670	0.135	0.54538 3766	3
0.48	0.41264 14572	1.48	0.43394 20135	0.130	0.54305 9774	3
0.50	0.42443 63835	1.50	0.42824 90711	0.125	0.54079 2591	3
0.52	0.43566 16609	1.52	0.42255 51804	0.120	0.53858 5013	3
0.54	0.44631 10184	1.54	0.41686 92347	0.115	0.53643 8983	3
0.56	0.45637 96813	1.56	0.41119 95842	0.110	0.53435 5529	3
0.58	0.46586 43551	1.58	0.40555 40424	0.105	0.53233 4747	3
0.60	0.47476 32037	1.60	0.39993 98943	0.100	0.53037 5810	3
0.62	0.48307 58219	1.62	0.39436 39058	0.095	0.52847 7031	3
0.64	0.49080 32040	1.64	0.38883 23346	0.090	0.52663 5967	3
0.66	0.49794 77064	1.66	0.38335 09429	0.085	0.52484 9575	3
0.68	0.50451 30066	1.68	0.37792 50103	0.080	0.52311 4393	4
0.70	0.51050 40576	1.70	0.37255 93490	0.075	0.52142 6749	4
0.72	0.51592 70382	1.72	0.36725 83182	0.070	0.51978 2972	4
0.74	0.52078 93010	1.74	0.36202 58410	0.065	0.51817 9571	4
0.76	0.52509 93152	1.76	0.35686 54206	0.060	0.51661 3369	4
0.78	0.52886 66089	1.78	0.35178 01580	0.055	0.51508 1573	4
0.80	0.53210 17071	1.80	0.34677 27691	0.050	0.51358 1788	4
0.82	0.53481 60684	1.82	0.34184 56029	0.045	0.51211 1971	5
0.84	0.53702 20202	1.84	0.33700 06597	0.040	0.51067 0372	5
0.86	0.53873 26921	1.86	0.33223 96091	0.035	0.50925 5466	5
0.88	0.53996 19480	1.88	0.32756 38080	0.030	0.50786 5903	6
0.90	0.54072 43187	1.90	0.32297 43193	0.025	0.50650 0473	6
0.92	0.54103 49328	1.92	0.31847 19293	0.020	0.50515 8078	7
0.94	0.54090 94485	1.94	0.31405 71655	0.015	0.50383 7717	8
0.96	0.54036 39857	1.96	0.30973 03141	0.010	0.50253 8471	10
0.98	0.53941 50580	1.98	0.30549 14372	0.005	0.50125 9494	14
1.00	0.53807 95069	2.00	0.30134 03889	0.000	0.50000 0000	∞
	$\left[\begin{matrix}(-5)7\\4\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-5)4\\4\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-6)8\\6\end{matrix}\right]$	

См. пример 3. $\langle x\rangle$ — целое число, ближайшее к x.
Взято из работ [7.18] и [7.31].

Таблица 7.6. $\frac{3}{\Gamma(1/3)}\int\limits_0^x e^{-t^3}\,dt$

$$\frac{3}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^x e^{-t^3}dt$$

x	$\frac{3}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^x e^{-t^3}dt$	x	$\frac{3}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^x e^{-t^3}dt$	x	$\frac{3}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^x e^{-t^3}dt$
0.00	0.00000 00	0.70	0.72276 69	1.40	0.98973 54
0.02	0.02239 69	0.72	0.73842 49	1.42	0.99109 36
0.04	0.04479 31	0.74	0.75360 34	1.44	0.99229 70
0.06	0.06718 72	0.76	0.76829 12	1.46	0.99335 97
0.08	0.08957 63	0.78	0.78247 88	1.48	0.99429 49
0.10	0.11195 67	0.80	0.79615 78	1.50	0.99511 49
0.12	0.13432 36	0.82	0.80932 16	1.52	0.99583 14
0.14	0.15667 11	0.84	0.82196 48	1.54	0.99645 52
0.16	0.17899 22	0.86	0.83408 41	1.56	0.99699 62
0.18	0.20127 90	0.88	0.84567 73	1.58	0.99746 38
0.20	0.22352 24	0.90	0.85674 42	1.60	0.99786 63
0.22	0.24571 24	0.92	0.86728 62	1.62	0.99821 16
0.24	0.26783 80	0.94	0.87730 62	1.64	0.99850 65
0.26	0.28988 71	0.96	0.88680 89	1.66	0.99875 75
0.28	0.31184 70	0.98	0.89580 05	1.68	0.99897 03
0.30	0.33370 37	1.00	0.90428 86	1.70	0.99914 99
0.32	0.35544 26	1.02	0.91228 25		
0.34	0.37704 82	1.04	0.91979 27		
0.36	0.39850 45	1.06	0.92683 11		
0.38	0.41979 45	1.08	0.93341 06		
0.40	0.44090 07	1.10	0.93954 56	1.70	0.99914 99
0.42	0.46180 52	1.12	0.94525 09	1.74	0.99942 75
0.44	0.48248 96	1.14	0.95054 27	1.78	0.99962 05
0.46	0.50293 51	1.16	0.95543 76	1.82	0.99975 26
0.48	0.52312 25	1.18	0.95995 30	1.86	0 99984 14
0.50	0.54303 28	1.20	0.96410 64	1.90	0.99990 01
0.52	0.56264 66	1.22	0.96791 62	1.94	0.99993 82
0.54	0.58194 46	1.24	0.97140 05	1.98	0.99996 24
0.56	0.60090 80	1.26	0.97457 79	2.02	0.99997 76
0.58	0.61951 78	1.28	0.97746 66	2.06	0.99998 69
0.60	0.63775 57	1.30	0.98008 48	2.10	0.99999 25
0.62	0.65560 39	1.32	0.98245 07	2.14	0.99999 57
0.64	0.67304 52	1.34	0.98458 18	2.18	0.99999 77
0.66	0.69006 30	1.36	0.98649 52	2.22	0.99999 87
0.68	0.70664 18	1.38	0.98820 77	2.26	0.99999 93
0.70	0.72276 69	1.40	0.98973 54	2.30	0.99999 97
	$\left[\begin{matrix}(-5)6\\4\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-5)7\\5\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-5)1\\5\end{matrix}\right]$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3}=0.89297\ 95116$$

Взято из [7.23].

Таблица 7.7. Интегралы Френеля

$$C(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \qquad C_2(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt=C\left(\sqrt{\frac{2u}{\pi}}\right)$$

$$S(x)=\int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \qquad S_2(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=S\left(\sqrt{\frac{2u}{\pi}}\right)$$

x	$u=\frac{\pi}{2}x^2$	$C(x)=C_2(u)$	$S(x)=S_2(u)$	x	$u=\frac{\pi}{2}x^2$	$C(x)=C_2(u)$	$S(x)=S_2(u)$
0.00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	1.00	1.57079 63	0.77989 34	0.43825 91
0.02	0.00062 83	0.02000 00	0.00000 42	1.02	1.63425 65	0.77926 11	0.45824 58
0.04	0.00251 33	0.04000 00	0.00003 35	1.04	1.69897 33	0.77735 01	0.47815 08
0.06	0.00565 49	0.05999 98	0.00011 31	1.06	1.76494 68	0.77414 34	0.49788 84
0.08	0.01005 31	0.07999 92	0.00026 81	1.08	1.83217 68	0.76963 03	0.51736 86
0.10	0.01570 80	0.09999 75	0.00052 36	1.10	1.90066 36	0.76380 67	0.53649 79
0.12	0.02261 95	0.11999 39	0.00090 47	1.12	1.97040 69	0.75667 60	0.55517 92
0.14	0.03078 76	0.13998 67	0.00143 67	1.14	2.04140 69	0.74824 94	0.57331 28
0.16	0.04021 24	0.15997 41	0.00214 44	1.16	2.11366 35	0.73854 68	0.59079 66
0.18	0.05089 38	0.17995 34	0.00305 31	1.18	2.18717 68	0.72759 68	0.60752 74
0.20	0.06283 19	0.19992 11	0.00418 76	1.20	2.26194 67	0.71543 77	0.62340 09
0.22	0.07602 65	0.21987 29	0.00557 30	1.22	2.33797 33	0.70211 76	0.63831 34
0.24	0.09047 79	0.23980 36	0.00723 40	1.24	2.41525 64	0.68769 47	0.65216 19
0.26	0.10618 58	0.25970 70	0.00919 54	1.26	2.49379 62	0.67223 78	0.66484 56
0.28	0.12315 04	0.27957 56	0.01148 16	1.28	2.57359 27	0.65582 63	0.67626 72
0.30	0.14137 17	0.29940 10	0.01411 70	1.30	2.65464 58	0.63855 05	0.68633 33
0.32	0.16084 95	0.31917 31	0.01712 56	1.32	2.73695 55	0.62051 11	0.69495 62
0.34	0.18158 41	0.33888 06	0.02053 11	1.34	2.82052 19	0.60181 95	0.70205 50
0.36	0.20357 52	0.35851 09	0.02435 68	1.36	2.90534 49	0.58259 73	0.70755 67
0.38	0.22682 30	0.37804 96	0.02862 55	1.38	2.99142 45	0.56297 59	0.71139 77
0.40	0.25132 74	0.39748 08	0.03335 94	1.40	3.07876 08	0.54309 58	0.71352 51
0.42	0.27708 85	0.41678 68	0.03858 02	1.42	3.16735 37	0.52310 58	0.71389 77
0.44	0.30410 62	0.43594 82	0.04430 85	1.44	3.25720 33	0.50316 23	0.71248 78
0.46	0.33238 05	0.45494 40	0.05056 42	1.46	3.34830 95	0.48342 80	0.70928 16
0.48	0.36191 15	0.47375 10	0.05736 63	1.48	3.44067 23	0.46407 05	0.70428 12
0.50	0.39269 91	0.49234 42	0.06473 24	1.50	3.53429 17	0.44526 12	0.69750 50
0.52	0.42474 33	0.51069 69	0.07267 89	1.52	3.62916 78	0.42717 32	0.68898 88
0.54	0.45804 42	0.52878 01	0.08122 06	1.54	3.72530 06	0.40997 99	0.67878 67
0.56	0.49260 17	0.54656 30	0.09037 08	1.56	3.82268 99	0.39385 29	0.66697 13
0.58	0.52841 59	0.56401 31	0.10014 09	1.58	3.92133 60	0.37895 96	0.65363 46
0.60	0.56548 67	0.58109 54	0.11054 02	1.60	4.02123 86	0.36546 17	0.63888 77
0.62	0.60381 41	0.59777 37	0.12157 59	1.62	4.12239 79	0.35351 20	0.62286 07
0.64	0.64339 82	0.61400 94	0.13325 28	1.64	4.22481 38	0.34325 29	0.60570 26
0.66	0.68423 89	0.62976 25	0.14557 29	1.66	4.32848 64	0.33481 32	0.58758 04
0.68	0.72633 62	0.64499 12	0.15853 54	1.68	4.43341 56	0.32830 61	0.56867 83
0.70	0.76969 02	0.65965 24	0.17213 65	1.70	4.53960 14	0.32382 69	0.54919 60
0.72	0.81430 08	0.67370 12	0.18636 89	1.72	4.64704 39	0.32145 02	0.52934 73
0.74	0.86016 81	0.68709 20	0.20122 21	1.74	4.75574 30	0.32122 83	0.50935 84
0.76	0.90729 20	0.69977 79	0.21668 16	1.76	4.86569 87	0.32318 87	0.48946 49
0.78	0.95567 25	0.71171 13	0.23272 88	1.78	4.97691 11	0.32733 25	0.46990 94
0.80	1.00530 96	0.72284 42	0.24934 14	1.80	5.08938 01	0.33363 29	0.45093 88
0.82	1.05620 35	0.73312 83	0.26649 22	1.82	5.20310 58	0.34203 39	0.43280 06
0.84	1.10835 39	0.74251 54	0.28414 98	1.84	5.31808 80	0.35244 96	0.41573 97
0.86	1.16176 10	0.75095 79	0.30227 80	1.86	5.43432 70	0.36476 35	0.39999 44
0.88	1.21642 47	0.75840 90	0.32083 55	1.88	5.55182 25	0.37882 93	0.38579 25
0.90	1.27234 50	0.76482 30	0.33977 63	1.90	5.67057 47	0.39447 05	0.37334 73
0.92	1.32952 20	0.77015 63	0.35904 93	1.92	5.79058 36	0.41148 24	0.36285 37
0.94	1.38795 56	0.77436 72	0.37859 81	1.94	5.91184 91	0.42963 33	0.35448 37
0.96	1.44764 59	0.77741 68	0.39836 12	1.96	6.03437 12	0.44866 69	0.34838 30
0.98	1.50859 28	0.77926 95	0.41827 21	1.98	6.15814 99	0.46830 56	0.34466 65
1.00	1.57079 63	0.77989 34	0.43825 91	2.00	6.28318 53	0.48825 34	0.34341 57
	$\left[{(-4)2 \atop 3}\right]$	$\left[{(-4)2 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)8 \atop 5}\right]$		$\left[{(-4)2 \atop 3}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 6}\right]$

См. пример 8. При $x \to 0$ имеем $C(x) \approx x - \frac{\pi^2}{40}x^5$, $S(x) \approx \frac{\pi}{6}x^3 - \frac{\pi^3}{336}x^7$.

Таблица 7.7. Интегралы Френеля

$$C(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \qquad S(x)=\int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$

x	$C(x)$	$S(x)$	x	$C(x)$	$S(x)$	x	$C(x)$	$S(x)$
2.00	0.48825 34	0.34341 57	3.00	0.60572 08	0.49631 30	4.00	0.49842 60	0.42051 58
2.02	0.50820 04	0.34467 48	3.02	0.60383 73	0.51619 42	4.02	0.51821 54	0.42301 99
2.04	0.52782 73	0.34844 87	3.04	0.59823 78	0.53536 29	4.04	0.53675 05	0.43039 00
2.06	0.54681 06	0.35470 04	3.06	0.58910 11	0.55311 95	4.06	0.55284 04	0.44217 81
2.08	0.56482 79	0.36334 98	3.08	0.57674 01	0.56880 20	4.08	0.56543 47	0.45764 45
2.10	0.58156 41	0.37427 34	3.10	0.56159 39	0.58181 59	4.10	0.57369 56	0.47579 83
2.12	0.59671 75	0.38730 37	3.12	0.54421 58	0.59165 11	4.12	0.57705 88	0.49545 71
2.14	0.61000 60	0.40223 09	3.14	0.52525 53	0.59791 29	4.14	0.57527 76	0.51532 14
2.16	0.62117 32	0.41880 45	3.16	0.50543 56	0.60033 66	4.16	0.56844 74	0.53405 87
2.18	0.62999 53	0.43673 63	3.18	0.48552 76	0.59880 34	4.18	0.55700 75	0.55039 41
2.20	0.63628 60	0.45570 46	3.20	0.46632 03	0.59334 95	4.20	0.54171 92	0.56319 89
2.22	0.63990 31	0.47535 85	3.22	0.44858 96	0.58416 97	4.22	0.52362 06	0.57157 23
2.24	0.64075 25	0.49532 41	3.24	0.43306 55	0.57161 47	4.24	0.50396 08	0.57491 03
2.26	0.63879 28	0.51521 11	3.26	0.42040 05	0.55618 06	4.26	0.48411 63	0.57295 47
2.28	0.63403 83	0.53462 03	3.28	0.41113 97	0.53849 35	4.28	0.46549 61	0.56582 05
2.30	0.62656 17	0.55315 16	3.30	0.40569 44	0.51928 61	4.30	0.44944 12	0.55399 59
2.32	0.61649 45	0.57041 28	3.32	0.40431 99	0.49936 95	4.32	0.43712 50	0.53831 55
2.34	0.60402 69	0.58602 84	3.34	0.40709 96	0.47960 04	4.34	0.42946 40	0.51990 77
2.36	0.58940 65	0.59964 89	3.36	0.41393 66	0.46084 46	4.36	0.42704 39	0.50011 73
2.38	0.57293 44	0.61095 96	3.38	0.42455 18	0.44393 82	4.38	0.43006 79	0.48041 08
2.40	0.55496 14	0.61969 00	3.40	0.43849 17	0.42964 95	4.40	0.43833 29	0.46226 80
2.42	0.53588 11	0.62562 11	3.42	0.45514 37	0.41864 11	4.42	0.45123 59	0.44707 06
2.44	0.51612 29	0.62859 38	3.44	0.47375 96	0.41143 65	4.44	0.46781 05	0.43599 33
2.46	0.49614 28	0.62851 43	3.46	0.49348 70	0.40839 28	4.46	0.48679 41	0.42990 86
2.48	0.47641 35	0.62535 98	3.48	0.51340 62	0.40967 54	4.48	0.50671 95	0.42931 16
2.50	0.45741 30	0.61918 18	3.50	0.53257 24	0.41524 80	4.50	0.52602 59	0.43427 30
2.52	0.43961 32	0.61010 76	3.52	0.55006 11	0.42486 72	4.52	0.54318 11	0.44442 34
2.54	0.42346 72	0.59834 06	3.54	0.56501 32	0.43808 83	4.54	0.55680 46	0.45897 36
2.56	0.40939 65	0.58415 75	3.56	0.57668 02	0.45428 17	4.56	0.56578 27	0.47676 89
2.58	0.39777 91	0.56790 42	3.58	0.58446 43	0.47265 92	4.58	0.56936 57	0.49637 56
2.60	0.38893 75	0.54998 93	3.60	0.58795 33	0.49230 95	4.60	0.56723 67	0.51619 23
2.62	0.38312 73	0.53087 53	3.62	0.58694 64	0.51224 12	4.62	0.55954 81	0.53457 97
2.64	0.38052 80	0.51106 79	3.64	0.58147 10	0.53143 21	4.64	0.54691 36	0.54999 67
2.66	0.38123 50	0.49110 35	3.66	0.57178 75	0.54888 15	4.66	0.53039 13	0.56113 28
2.68	0.38525 32	0.47153 52	3.68	0.55838 18	0.56366 38	4.68	0.51135 38	0.56702 44
2.70	0.39249 40	0.45291 75	3.70	0.54194 57	0.57498 04	4.70	0.49142 65	0.56714 55
2.72	0.40277 39	0.43578 98	3.72	0.52334 49	0.58220 56	4.72	0.47232 71	0.56146 19
2.74	0.41581 68	0.42066 03	3.74	0.50357 70	0.58492 61	4.74	0.45572 30	0.55044 52
2.76	0.43125 85	0.40798 90	3.76	0.48371 94	0.58296 92	4.76	0.44308 30	0.53504 16
2.78	0.44865 46	0.39817 24	3.78	0.46487 19	0.57641 91	4.78	0.43554 28	0.51659 82
2.80	0.46749 17	0.39152 84	3.80	0.44809 49	0.56561 87	4.80	0.43379 66	0.49675 02
2.82	0.48720 04	0.38828 41	3.82	0.43434 86	0.55115 74	4.82	0.43802 47	0.47728 00
2.84	0.50717 21	0.38856 43	3.84	0.42443 43	0.53384 32	4.84	0.44786 69	0.45995 75
2.86	0.52677 66	0.39238 50	3.86	0.41894 43	0.51466 22	4.86	0.46244 40	0.44637 74
2.88	0.54538 21	0.39964 80	3.88	0.41822 16	0.49472 45	4.88	0.48042 90	0.43780 82
2.90	0.56237 64	0.41014 06	3.90	0.42233 27	0.47520 24	4.90	0.50016 10	0.43506 74
2.92	0.57718 78	0.42353 87	3.92	0.43105 68	0.45726 13	4.92	0.51979 51	0.43843 48
2.94	0.58930 60	0.43941 39	3.94	0.44389 17	0.44198 92	4.94	0.53747 34	0.44761 56
2.96	0.59830 19	0.45724 45	3.96	0.46007 70	0.43032 79	4.96	0.55150 25	0.46175 67
2.98	0.60384 56	0.47643 06	3.98	0.47863 51	0.42301 17	4.98	0.56051 94	0.47951 78
3.00	0.60572 08	0.49631 30	4.00	0.49842 60	0.42051 58	5.00	0.56363 12	0.49919 14
	$\begin{bmatrix}(-4)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\6\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-4)6\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)6\\7\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-4)7\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)8\\7\end{bmatrix}$

При $x>5$ имеем $$\left.\begin{matrix}C(x)\\S(x)\end{matrix}\right\}=0.5\pm\left(0.3183099-\frac{0.0968}{x^4}\right)\frac{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)}{x}-\left(0.10132-\frac{0.154}{x^4}\right)\frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)}{x^3}+$$ $$+\varepsilon(x),\quad |\varepsilon(x)|<3\cdot10^{-7}.$$

При $u>39$ имеем $$\left.\begin{matrix}C_2(u)\\S_2(u)\end{matrix}\right\}=0.5\pm\left(0.3989423-\frac{0.3}{u}\right)\frac{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(u)}{\sqrt{u}}-\left(0.19947-\frac{0.748}{u^2}\right)\frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(u)}{u\sqrt{u}}+\varepsilon(u),\quad |\varepsilon(u)|<3\cdot10^{-7}.$$

Таблица 7.8. Вспомогательные функции

x	$u=\frac{\pi}{2}x^2$	$f(x)=f_2(u)$	$g(x)=g_2(u)$
0.00	0.00000 00000 00000	0.50000 00000 00000	0.50000 00000 00000
0.02	0.00062 83185 30718	0.49969 41196 39303	0.48031 40626 54163
0.04	0.00251 32741 22872	0.49880 88057 20520	0.46125 51239 79101
0.06	0.00565 48667 76462	0.49739 07811 66949	0.44281 99356 00196
0.08	0.01005 30964 91487	0.49548 44294 00553	0.42500 33536 38036
0.10	0.01570 79632 67949	0.49313 18256 06624	0.40779 85545 29930
0.12	0.02261 94671 05847	0.49037 27777 82254	0.39119 72364 96391
0.14	0.03078 76080 05180	0.48724 48761 11561	0.37518 98069 99885
0.16	0.04021 23859 65949	0.48378 35493 31728	0.35976 55566 09573
0.18	0.05089 38009 88155	0.48002 21268 70713	0.34491 28197 39391
0.20	0.06283 18530 71796	0.47599 19056 49140	0.33061 91227 69034
0.22	0.07602 65422 16873	0.47172 22205 45221	0.31687 13200 89318
0.24	0.09047 78684 23386	0.46724 05176 22164	0.30365 57186 36191
0.26	0.10618 58316 91335	0.46257 24293 12303	0.29095 81914 92531
0.28	0.12315 04320 20720	0.45774 18508 40978	0.27876 42811 44593
0.30	0.14137 16694 11541	0.45277 10172 56087	0.26705 92929 81728
0.32	0.16084 95438 63797	0.44768 05805 06203	0.25582 83796 24420
0.34	0.18158 40553 77490	0.44248 96860 81319	0.24505 66166 57772
0.36	0.20357 52039 52619	0.43721 60487 95888	0.23472 90703 35799
0.38	0.22682 29895 89183	0.43187 60273 53913	0.22483 08578 07150
0.40	0.25132 74122 87183	0.42648 46973 90789	0.21534 72003 95520
0.42	0.27708 84720 46620	0.42105 59227 36507	0.20626 34704 48744
0.44	0.30410 61688 67492	0.41560 24246 90070	0.19756 52322 49727
0.46	0.33238 05027 49800	0.41013 58491 35691	0.18923 82774 60398
0.48	0.36191 14736 93544	0.40466 68313 67950	0.18126 86555 47172
0.50	0.39269 90816 98724	0.39920 50585 25702	0.17364 26996 13238
0.52	0.42474 33267 65340	0.39375 93295 63563	0.16634 70480 39628
0.54	0.45804 42088 93392	0.38833 76127 15400	0.15936 86623 13733
0.56	0.49260 17280 82880	0.38294 71004 26771	0.15269 48414 00876
0.58	0.52841 58843 33803	0.37759 42617 52882	0.14631 32329 91905
0.60	0.56548 66776 46163	0.37228 48922 35620	0.14021 18419 37684
0.62	0.60381 41080 19958	0.36702 41612 87842	0.13437 90361 59907
0.64	0.64339 81754 55190	0.36181 66571 25476	0.12880 35503 06985
0.66	0.68423 88799 51857	0.35666 64292 98472	0.12347 44874 03863
0.68	0.72633 62215 09960	0.35157 70288 80259	0.11838 13187 25611
0.70	0.76969 02001 29499	0.34655 15463 82434	0.11351 38821 06517
0.72	0.81430 08158 10474	0.34159 26474 67053	0.10886 23788 79214
0.74	0.86016 80685 52885	0.33670 26065 33192	0.10441 73696 22082
0.76	0.90729 19583 56732	0.33188 33382 57734	0.10016 97688 77848
0.78	0.95567 24852 22015	0.32713 64271 72503	0.09611 08389 91866
0.80	1.00530 96491 48734	0.32246 31553 61284	0.09223 21832 05037
0.82	1.05620 34501 36888	0.31786 45283 60796	0.08852 57381 23702
0.84	1.10835 38881 86479	0.31334 12993 49704	0.08498 37656 77045
0.86	1.16176 09632 97506	0.30889 39917 09068	0.08159 88446 61614
0.88	1.21642 46754 69968	0.30452 29200 36579	0.07836 38619 62362
0.90	1.27234 50247 03866	0.30022 82096 95385	0.07527 20035 30280
0.92	1.32952 20109 99200	0.29600 98149 76518	0.07231 67451 87932
0.94	1.38795 56343 55971	0.29186 75359 51781	0.06949 18433 26312
0.96	1.44764 58947 74177	0.28780 10340 91658	0.06679 13255 49021
0.98	1.50859 27922 53819	0.28380 98467 20271	0.06420 94813 13093
1.00	1.57079 63267 94897	0.27989 34003 76823	0.06174 08526 09645
	$\begin{bmatrix}(-4)2\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)7\\10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)8\\10\end{bmatrix}$

См. примеры 6, 7 и 9.

$$C(x)=\frac{1}{2}+f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)-g(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right),\qquad C_2(u)=\frac{1}{2}+f_2(u)\sin u-g_2(u)\cos u,$$

$$S(x)=\frac{1}{2}-f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)-g(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right),\qquad S_2(u)=\frac{1}{2}-f_2(u)\cos u-g_2(u)\sin u.$$

Таблица 7.8. Вспомогательные функции

x^{-1}	$u^{-1}=\frac{2}{\pi x^2}$	$f(x)=f_2(u)$	$g(x)=g_2(u)$	$\langle x\rangle$	$\langle u\rangle$
1.00	0.63661 97723 67581	0.27989 34003 76823	0.06174 08526 09645	1	2
0.98	0.61140 96293 81825	0.27597 33733 36442	0.05933 31378 64174	1	2
0.96	0.58670 87822 13963	0.27197 11505 76851	0.05693 89827 01255	1	2
0.94	0.56251 72308 63995	0.26788 56989 47656	0.05456 06112 91100	1	2
0.92	0.53883 49753 31921	0.26371 60682 37287	0.05220 03510 52931	1	2
0.90	0.51566 20156 17741	0.25946 14023 65674	0.04986 06317 93636	1	2
0.88	0.49299 83517 21455	0.25512 09512 80091	0.04754 39838 94725	1	2
0.86	0.47084 39836 43063	0.25069 40835 25766	0.04525 30354 03048	1	2
0.84	0.44919 89113 82565	0.24618 02994 44393	0.04299 05078 69390	1	2
0.82	0.42806 31349 39962	0.24157 92449 31459	0.04075 92107 68723	1	2
0.80	0.40743 66543 15252	0.23689 07256 57089	0.03856 20343 27312	1	2
0.78	0.38731 94695 08436	0.23211 47216 24632	0.03640 19405 75704	1	3
0.76	0.36771 15805 19515	0.22725 14019 06110	0.03428 19524 44132	1	3
0.74	0.34861 29873 48488	0.22230 11393 53995	0.03220 51407 19129	1	3
0.72	0.33002 36899 95354	0.21726 45250 44609	0.03017 46086 88637	1	3
0.70	0.31194 36884 60115	0.21214 23821 60229	0.02819 34743 19381	1	3
0.68	0.29437 29827 42770	0.20693 57789 65521	0.02626 48498 36510	1	3
0.66	0.27731 15728 43318	0.20164 60404 80635	0.02439 18186 13588	2	4
0.64	0.26075 94587 61761	0.19627 47584 00004	0.02257 74093 32978	2	4
0.62	0.24471 66404 98098	0.19082 37987 55563	0.02082 45674 44482	2	4
0.60	0.22918 31180 52329	0.18529 53067 79209	0.01913 61240 35536	2	4
0.58	0.21415 88914 24454	0.17969 17083 86674	0.01751 47623 30357	2	5
0.56	0.19964 39606 14474	0.17401 57076 89207	0.01596 29821 58470	2	5
0.54	0.18563 83256 22387	0.16827 02799 47273	0.01448 30628 73722	2	5
0.52	0.17214 19864 48194	0.16245 86594 19322	0.01307 70253 60097	2	6
0.50	0.15915 49430 91895	0.15658 43216 36302	0.01174 65939 24659	2	6
0.48	0.14667 71955 53491	0.15065 09597 56320	0.01049 31590 42015	2	7
0.46	0.13470 87438 32980	0.14466 24548 29603	0.00931 77420 66589	2	7
0.44	0.12324 95879 30364	0.13862 28400 34552	0.00822 09631 52815	2	8
0.42	0.11229 97278 45641	0.13253 62592 29647	0.00720 30137 00215	2	9
0.40	0.10185 91635 78813	0.12640 69204 94864	0.00626 36346 49122	3	10
0.38	0.09192 78951 29879	0.12023 90456 93806	0.00540 21018 72942	3	11
0.36	0.08250 59224 98839	0.11403 68174 47880	0.00461 72197 27002	3	12
0.34	0.07359 32456 85692	0.10780 43252 41741	0.00390 73235 12822	3	14
0.32	0.06518 98646 90440	0.10154 55126 32988	0.00327 02912 03254	3	15
0.30	0.05729 57795 13082	0.09526 41276 74844	0.00270 35642 68526	3	17
0.28	0.04991 09901 53618	0.08896 36786 39974	0.00220 41768 84885	4	20
0.26	0.04303 54966 12048	0.08264 73969 33180	0.00176 87922 53708	4	23
0.24	0.03666 92988 88373	0.07631 82087 00913	0.00139 37442 77909	4	27
0.22	0.03081 23969 82591	0.06997 87161 16730	0.00107 50825 02743	5	32
0.20	0.02546 47908 94703	0.06363 11887 04012	0.00080 86180 82883	5	39
0.18	0.02062 64806 24710	0.05727 75644 30652	0.00058 99686 10701	6	48
0.16	0.01629 74661 72610	0.05091 94597 59575	0.00041 45999 18234	6	61
0.14	0.01247 77475 38405	0.04455 81874 32960	0.00027 78633 97799	7	80
0.12	0.00916 73247 22093	0.03819 47805 44642	0.00017 50279 00844	8	109
0.10	0.00636 61977 23676	0.03183 00214 15118	0.00010 13057 94484	10	157
0.08	0.00407 43665 43153	0.02546 44738 95252	0.00005 18732 17470	13	245
0.06	0.00229 18311 80523	0.01909 85179 38105	0.00002 18849 44630	17	436
0.04	0.00101 85916 35788	0.01273 23855 39770	0.00000 64845 30524	25	982
0.02	0.00025 46479 08947	0.00636 61974 14061	0.00000 08105 69272	50	3927
0.00	0.00000 00000 00000	0.00000 00000 00000	0.00000 00000 00000	∞	∞
	$\begin{bmatrix}(-5)6\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)1\\12\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)1\\12\end{bmatrix}$		

$$C(x)=\frac{1}{2}+f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)-g(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\qquad C_2(u)=\frac{1}{2}+f_2(u)\sin u-g_2(u)\cos u$$

$$S(x)=\frac{1}{2}-f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)-g(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\qquad S_2(u)=\frac{1}{2}-f_2(u)\cos u-g_2(u)\sin u$$

$\langle x\rangle$ — целое число, ближайшее к x.

Таблица 7.9. Интеграл вероятностей комплексного аргумента

$$w(z)=e^{-z^2}\operatorname{erfc}(-iz)\qquad z=x+iy$$

y	$x=0$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=0.1$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=0.2$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=0.3$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=0.4$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$
0.0	1.000000	0.000000	0.990050	0.112089	0.960789	0.219753	0.913931	0.318916	0.852144	0.406153
0.1	0.896457	0.000000	0.888479	0.094332	0.864983	0.185252	0.827246	0.269600	0.777267	0.344688
0.2	0.809020	0.000000	0.802567	0.080029	0.783538	0.157403	0.752895	0.229653	0.712146	0.294653
0.3	0.734599	0.000000	0.729337	0.068410	0.713801	0.134739	0.688720	0.197037	0.655244	0.253613
0.4	0.670788	0.000000	0.666463	0.058897	0.653680	0.116147	0.632996	0.170203	0.605295	0.219706
0.5	0.615690	0.000000	0.612109	0.051048	0.601513	0.100782	0.584333	0.147965	0.561252	0.191500
0.6	0.567805	0.000000	0.564818	0.044524	0.555974	0.087993	0.541605	0.129408	0.522246	0.167880
0.7	0.525930	0.000000	0.523423	0.039064	0.515991	0.077275	0.503896	0.113821	0.487556	0.147975
0.8	0.489101	0.000000	0.486982	0.034465	0.480697	0.068235	0.470452	0.100647	0.456579	0.131101
0.9	0.456532	0.000000	0.454731	0.030566	0.449383	0.060563	0.440655	0.089444	0.428808	0.116714
1.0	0.427584	0.000000	0.426044	0.027242	0.421468	0.054014	0.413989	0.079864	0.403818	0.104380
1.1	0.401730	0.000000	0.400406	0.024392	0.396470	0.048393	0.390028	0.071628	0.381250	0.093752
1.2	0.378537	0.000000	0.377393	0.021934	0.373989	0.043542	0.368412	0.064510	0.360799	0.084547
1.3	0.357643	0.000000	0.356649	0.019805	0.353691	0.039336	0.348639	0.058329	0.342206	0.076538
1.4	0.338744	0.000000	0.337876	0.017951	0.335294	0.035671	0.331054	0.052936	0.325248	0.069538
1.5	0.321585	0.000000	0.320825	0.016329	0.318561	0.032463	0.314839	0.048210	0.309736	0.063393
1.6	0.305953	0.000000	0.305284	0.014905	0.303290	0.029643	0.300009	0.044051	0.295506	0.057978
1.7	0.291663	0.000000	0.291072	0.013648	0.289309	0.027154	0.286406	0.040377	0.282417	0.053186
1.8	0.278560	0.000000	0.278035	0.012536	0.276470	0.024948	0.273892	0.037118	0.270346	0.048931
1.9	0.266509	0.000000	0.266042	0.011547	0.264648	0.022987	0.262350	0.034217	0.259186	0.045139
2.0	0.255396	0.000000	0.254978	0.010664	0.253732	0.021236	0.251677	0.031626	0.248844	0.041748
2.1	0.245119	0.000000	0.244745	0.009874	0.243628	0.019669	0.241783	0.029304	0.239239	0.038706
2.2	0.235593	0.000000	0.235256	0.009165	0.234251	0.018260	0.232592	0.027217	0.230300	0.035968
2.3	0.226742	0.000000	0.226438	0.008526	0.225531	0.016991	0.224033	0.025335	0.221963	0.033498
2.4	0.218499	0.000000	0.218224	0.007949	0.217404	0.015845	0.216047	0.023633	0.214172	0.031263
2.5	0.210806	0.000000	0.210557	0.007427	0.209813	0.014806	0.208582	0.022090	0.206879	0.029234
2.6	0.203613	0.000000	0.203387	0.006952	0.202710	0.013862	0.201589	0.020687	0.200039	0.027389
2.7	0.196874	0.000000	0.196668	0.006520	0.196050	0.013002	0.195028	0.019409	0.193613	0.025706
2.8	0.190549	0.000000	0.190360	0.006125	0.189796	0.012216	0.188861	0.018241	0.187566	0.024168
2.9	0.184602	0.000000	0.184429	0.005764	0.183912	0.011498	0.183056	0.017172	0.181868	0.022759
3.0	0.179001	0.000000	0.178842	0.005433	0.178368	0.010839	0.177581	0.016192	0.176491	0.021466

y	$x=0.5$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=0.6$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=0.7$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=0.8$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=0.9$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$
0.0	0.778801	0.478925	0.697676	0.535713	0.612626	0.576042	0.527292	0.600412	0.444858	0.610142
0.1	0.717588	0.408474	0.651076	0.459665	0.580698	0.497744	0.509299	0.522932	0.439421	0.536087
0.2	0.663223	0.350751	0.608322	0.396852	0.549739	0.432442	0.489710	0.457569	0.430271	0.472773
0.3	0.614852	0.303124	0.569238	0.344645	0.520192	0.377688	0.469480	0.402194	0.418736	0.418491
0.4	0.571717	0.263563	0.533581	0.300989	0.492289	0.331535	0.449244	0.355082	0.405763	0.371813
0.5	0.533157	0.230488	0.501079	0.264268	0.466127	0.292432	0.429418	0.314828	0.392021	0.331544
0.6	0.498591	0.202666	0.471453	0.233206	0.441712	0.259136	0.410264	0.280290	0.377977	0.296692
0.7	0.467521	0.179123	0.444434	0.206787	0.418998	0.230646	0.391936	0.250532	0.363957	0.266427
0.8	0.439512	0.159087	0.419766	0.184200	0.397906	0.206155	0.374518	0.224789	0.350182	0.240057
0.9	0.414191	0.141945	0.397216	0.164793	0.378341	0.185005	0.358043	0.202429	0.336799	0.217004
1.0	0.391234	0.127202	0.376571	0.148036	0.360200	0.166660	0.342511	0.182932	0.323899	0.196783
1.1	0.370363	0.114460	0.357637	0.133501	0.343375	0.150681	0.327900	0.165868	0.311537	0.178990
1.2	0.351335	0.103395	0.340241	0.120838	0.327766	0.136706	0.314176	0.150877	0.299741	0.163281
1.3	0.333942	0.093744	0.324229	0.109759	0.313273	0.124435	0.301294	0.137661	0.288519	0.149370
1.4	0.318001	0.085288	0.309463	0.100026	0.299804	0.113620	0.289208	0.125971	0.277865	0.137012
1.5	0.303355	0.077851	0.295820	0.091443	0.287274	0.104054	0.277869	0.115594	0.267766	0.126002
1.6	0.289866	0.071283	0.283192	0.083845	0.275602	0.095563	0.267228	0.106355	0.258203	0.116164
1.7	0.277412	0.065461	0.271479	0.077096	0.264718	0.088001	0.257237	0.098103	0.249151	0.107348
1.8	0.265890	0.060283	0.260598	0.071081	0.254554	0.081245	0.247851	0.090710	0.240586	0.099427
1.9	0.255205	0.055661	0.250469	0.065701	0.245050	0.075190	0.239027	0.084068	0.232482	0.092291
2.0	0.245276	0.051521	0.241025	0.060876	0.236152	0.069748	0.230724	0.078085	0.224813	0.085845
2.1	0.236031	0.047804	0.232204	0.056534	0.227810	0.064842	0.222905	0.072680	0.217552	0.080009
2.2	0.227407	0.044454	0.223952	0.052617	0.219978	0.060409	0.215535	0.067785	0.210676	0.074712
2.3	0.219347	0.041428	0.216219	0.049073	0.212616	0.056391	0.208581	0.063342	0.204160	0.069894
2.4	0.211800	0.038686	0.208961	0.045859	0.205686	0.052741	0.202013	0.059298	0.197982	0.065500
2.5	0.204723	0.036196	0.202139	0.042936	0.199155	0.049417	0.195804	0.055610	0.192120	0.061486
2.6	0.198074	0.033929	0.195717	0.040271	0.192992	0.046384	0.189928	0.052238	0.186554	0.057811
2.7	0.191818	0.031859	0.189664	0.037836	0.187170	0.043608	0.184362	0.049156	0.181265	0.054439
2.8	0.185924	0.029966	0.183950	0.035607	0.181662	0.041064	0.179084	0.046315	0.176237	0.051339
2.9	0.180361	0.028231	0.178549	0.033561	0.176447	0.038728	0.174074	0.043708	0.171452	0.048485
3.0	0.175105	0.026636	0.173437	0.031680	0.171502	0.036577	0.169315	0.041306	0.166895	0.045851

$$w(x)=e^{-x^2}+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$$

$$w(-x+iy)=\overline{w(x+iy)}\qquad w(x-iy)=2e^{y^2-x^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)-\overline{w(x+iy)}$$

$$w(iy)=e^{y^2}\operatorname{erfc} y\qquad w[(1+i)u]=e^{-2iu^2}\left\{1+(i-1)\left[C\left(\frac{2u}{\sqrt{\pi}}\right)+iS\left(\frac{2u}{\sqrt{\pi}}\right)\right]\right\}$$

См. примеры 12—19.

Таблица 7.9. Интеграл вероятностей комплексного аргумента

$$w(z)=e^{-z^2}\operatorname{erfc}(-iz) \qquad z=x+iy$$

y	$x=1.0$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=1.1$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=1.2$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=1.3$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=1.4$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$
0.0	0.367879	0.607158	0.298197	0.593761	0.236928	0.572397	0.184520	0.545456	0.140858	0.515113
0.1	0.373170	0.538555	0.312136	0.532009	0.257374	0.518283	0.209431	0.499216	0.168407	0.476535
0.2	0.373153	0.478991	0.319717	0.477439	0.270928	0.469488	0.227362	0.456555	0.189247	0.440005
0.3	0.369386	0.427225	0.322586	0.429275	0.279199	0.425667	0.239793	0.417491	0.204662	0.405823
0.4	0.363020	0.382166	0.321993	0.386777	0.283443	0.386412	0.247908	0.381908	0.215711	0.374110
0.5	0.354900	0.342872	0.318884	0.349266	0.284638	0.351299	0.252654	0.349611	0.223262	0.344868
0.6	0.345649	0.308530	0.313978	0.316128	0.283540	0.319910	0.254784	0.320368	0.228026	0.318022
0.7	0.335721	0.278445	0.307816	0.286815	0.280740	0.291851	0.254895	0.293927	0.230578	0.293453
0.8	0.325446	0.252024	0.300807	0.260847	0.276693	0.266757	0.253461	0.270040	0.231385	0.271015
0.9	0.315064	0.228759	0.293259	0.237800	0.271752	0.244295	0.250858	0.248462	0.230826	0.250549
1.0	0.304744	0.208219	0.285402	0.217306	0.266189	0.224168	0.247381	0.228967	0.229205	0.231897
1.1	0.294606	0.190036	0.277407	0.199046	0.260213	0.206108	0.243266	0.211343	0.226767	0.214902
1.2	0.284731	0.173896	0.269401	0.182742	0.253985	0.189878	0.238695	0.195398	0.223710	0.199416
1.3	0.275174	0.159531	0.261476	0.168151	0.247628	0.175271	0.233813	0.180957	0.220192	0.185299
1.4	0.265967	0.146712	0.253697	0.155066	0.241233	0.162100	0.228733	0.167863	0.216340	0.172423
1.5	0.257128	0.135242	0.246112	0.143305	0.234870	0.150205	0.223542	0.155975	0.212253	0.160668
1.6	0.248665	0.124954	0.238752	0.132711	0.228592	0.139441	0.218309	0.145167	0.208014	0.149927
1.7	0.240578	0.115702	0.231635	0.123147	0.222436	0.129684	0.213086	0.135326	0.203684	0.140103
1.8	0.232861	0.107361	0.224775	0.114495	0.216428	0.120822	0.207912	0.126353	0.199315	0.131106
1.9	0.225503	0.099824	0.218176	0.106650	0.210587	0.112760	0.202818	0.118158	0.194947	0.122858
2.0	0.218493	0.092998	0.211839	0.099523	0.204926	0.105411	0.197827	0.110662	0.190608	0.115286
2.1	0.211816	0.086601	0.205760	0.093035	0.199452	0.098700	0.192953	0.103795	0.186324	0.108325
2.2	0.205457	0.081162	0.199935	0.087116	0.194166	0.092562	0.188208	0.097495	0.182112	0.101919
2.3	0.199402	0.076021	0.194356	0.081706	0.189072	0.086936	0.183599	0.091706	0.177985	0.096015
2.4	0.193634	0.071324	0.189014	0.076753	0.184165	0.081773	0.179131	0.086378	0.173954	0.090567
2.5	0.188139	0.067024	0.183901	0.072208	0.179444	0.077024	0.174805	0.081467	0.170024	0.085532
2.6	0.182903	0.063080	0.179008	0.068031	0.174903	0.072651	0.170623	0.076933	0.166201	0.080873
2.7	0.177910	0.059456	0.174324	0.064186	0.170538	0.068617	0.166582	0.072742	0.162487	0.076557
2.8	0.173147	0.056118	0.169840	0.060639	0.166342	0.064890	0.162681	0.068863	0.158883	0.072553
2.9	0.168602	0.053041	0.165546	0.057363	0.162310	0.061440	0.158916	0.065266	0.155389	0.068834
3.0	0.164261	0.050197	0.161434	0.054331	0.158435	0.058243	0.155285	0.061926	0.152005	0.065375

y	$x=1.5$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=1.6$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=1.7$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=1.8$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$	$x=1.9$ $\mathrm{Re}\,w(z)$	$\mathrm{Im}\,w(z)$
0.0	0.105399	0.483227	0.077305	0.451284	0.055576	0.420388	0.039164	0.391291	0.027052	0.364437
0.1	0.134049	0.451763	0.105843	0.426168	0.083112	0.400743	0.065099	0.376214	0.051038	0.353066
0.2	0.156521	0.421076	0.128895	0.400837	0.105929	0.380161	0.087090	0.359721	0.071811	0.340004
0.3	0.173865	0.391665	0.147272	0.375911	0.124612	0.359313	0.105522	0.342479	0.089592	0.325873
0.4	0.186984	0.363828	0.161702	0.351803	0.139717	0.338676	0.120793	0.324985	0.104641	0.311161
0.5	0.196636	0.337720	0.172820	0.328777	0.151751	0.318584	0.133288	0.307609	0.117233	0.296240
0.6	0.203461	0.313397	0.181177	0.306990	0.161171	0.299261	0.143369	0.290613	0.127644	0.281392
0.7	0.207990	0.290847	0.187245	0.286517	0.168379	0.280846	0.151366	0.274180	0.136134	0.266823
0.8	0.210664	0.270016	0.191423	0.267378	0.173725	0.263418	0.157578	0.258431	0.142949	0.252681
0.9	0.211846	0.250823	0.194049	0.249556	0.177513	0.247012	0.162268	0.243439	0.148310	0.239067
1.0	0.211837	0.233171	0.195407	0.233009	0.180002	0.231630	0.165667	0.229244	0.152418	0.226046
1.1	0.210881	0.216954	0.195734	0.217678	0.181414	0.217253	0.167977	0.215857	0.155452	0.213656
1.2	0.209182	0.202067	0.195228	0.203494	0.181938	0.203847	0.169373	0.203272	0.157569	0.201914
1.3	0.206902	0.188403	0.194053	0.190384	0.181733	0.191366	0.170003	0.191471	0.158906	0.190821
1.4	0.204177	0.175862	0.192347	0.178275	0.180933	0.179762	0.169997	0.180425	0.159585	0.180367
1.5	0.201115	0.164349	0.190222	0.167092	0.179651	0.168980	0.169465	0.170099	0.159709	0.170534
1.6	0.197806	0.153773	0.187772	0.156765	0.177983	0.158969	0.168500	0.160457	0.159369	0.161300
1.7	0.194320	0.144054	0.185073	0.147226	0.176008	0.149674	0.167183	0.151458	0.158641	0.152637
1.8	0.190717	0.135113	0.182189	0.138412	0.173792	0.141045	0.165579	0.143063	0.157593	0.144516
1.9	0.187043	0.126883	0.179172	0.130262	0.171390	0.133033	0.163746	0.135234	0.156282	0.136908
2.0	0.183335	0.119298	0.176064	0.122723	0.168849	0.125590	0.161733	0.127931	0.154757	0.129781
2.1	0.179623	0.112302	0.172901	0.115744	0.166206	0.118674	0.159580	0.121118	0.153059	0.123108
2.2	0.175930	0.105842	0.169710	0.109277	0.163493	0.112243	0.157320	0.114761	0.151224	0.116858
2.3	0.172276	0.099870	0.166513	0.103280	0.160737	0.106260	0.154982	0.108827	0.149281	0.111003
2.4	0.168674	0.094343	0.163330	0.097713	0.157958	0.100689	0.152591	0.103285	0.147256	0.105519
2.5	0.165136	0.089222	0.160175	0.092541	0.155175	0.095499	0.150165	0.098107	0.145172	0.100378
2.6	0.161669	0.084472	0.157060	0.087732	0.152402	0.090660	0.147722	0.093265	0.143045	0.095558
2.7	0.158281	0.080061	0.153993	0.083254	0.149649	0.086143	0.145274	0.088735	0.140892	0.091037
2.8	0.154975	0.075960	0.150981	0.079082	0.146927	0.081925	0.142834	0.084493	0.138725	0.086794
2.9	0.151753	0.072142	0.148030	0.075191	0.144243	0.077982	0.140411	0.080519	0.136555	0.082809
3.0	0.148618	0.068585	0.145144	0.071558	0.141602	0.074293	0.138012	0.076794	0.134391	0.079065

$$w(x)=e^{-x^2}+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$$

$$w(-x+iy)=\overline{w(x+iy)} \qquad w(x-iy)=2e^{y^2-x^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)-\overline{w(x+iy)}$$

$$w(iy)=e^{y^2}\operatorname{erfc} y \qquad w[(1+i)u]=e^{-2iu^2}\left\{1+(i-1)\left[C\left(\frac{2u}{\sqrt{\pi}}\right)+iS\left(\frac{2u}{\sqrt{\pi}}\right)\right]\right\}$$

См. примеры 12—19.

Таблица 7.9. Интеграл вероятностей комплексного аргумента

$$w(z)=e^{-z^2}\operatorname{erfc}(-iz) \qquad z=x+iy$$

y	$Re\,w(z)$, $x=2.0$	$Im\,w(z)$, $x=2.0$	$Re\,w(z)$, $x=2.1$	$Im\,w(z)$, $x=2.1$	$Re\,w(z)$, $x=2.2$	$Im\,w(z)$, $x=2.2$	$Re\,w(z)$, $x=2.3$	$Im\,w(z)$, $x=2.3$	$Re\,w(z)$, $x=2.4$	$Im\,w(z)$, $x=2.4$
0.0	0.018316	0.340026	0.012155	0.318073	0.007907	0.298468	0.005042	0.281026	0.003151	0.265522
0.1	0.040201	0.331583	0.031936	0.311886	0.025678	0.293982	0.020958	0.277795	0.017397	0.263201
0.2	0.059531	0.321332	0.049726	0.303894	0.041927	0.287771	0.035728	0.272968	0.030792	0.259435
0.3	0.076396	0.309831	0.065521	0.294574	0.056586	0.280232	0.049248	0.266865	0.043211	0.254478
0.4	0.090944	0.297529	0.079385	0.284327	0.069655	0.271710	0.061473	0.259775	0.054585	0.248566
0.5	0.103359	0.284786	0.091422	0.273482	0.081182	0.262499	0.072408	0.251953	0.064890	0.241914
0.6	0.113836	0.271881	0.101765	0.262308	0.091245	0.252844	0.082092	0.243617	0.074132	0.234714
0.7	0.122574	0.259031	0.110558	0.251016	0.099943	0.242947	0.090585	0.234952	0.082345	0.227129
0.8	0.129768	0.246396	0.117948	0.239772	0.107383	0.232968	0.097963	0.226111	0.089576	0.219302
0.9	0.135600	0.234096	0.124081	0.228703	0.113679	0.223037	0.104309	0.217219	0.095884	0.211349
1.0	0.140240	0.222213	0.129097	0.217904	0.118941	0.213253	0.109709	0.208376	0.101336	0.203368
1.1	0.143840	0.210805	0.133125	0.207442	0.123277	0.203692	0.114251	0.199660	0.105999	0.195438
1.2	0.146541	0.199904	0.136286	0.197366	0.126788	0.194410	0.118019	0.191133	0.109942	0.187620
1.3	0.148466	0.189529	0.138689	0.187705	0.129570	0.185446	0.121092	0.182840	0.113232	0.179965
1.4	0.149725	0.179687	0.140432	0.178478	0.131709	0.176827	0.123548	0.174814	0.115935	0.172510
1.5	0.150415	0.170371	0.141604	0.169691	0.133284	0.168569	0.125454	0.167078	0.118109	0.165281
1.6	0.150622	0.161572	0.142283	0.161343	0.134367	0.160680	0.126877	0.159646	0.119812	0.158299
1.7	0.150418	0.153274	0.142540	0.153429	0.135021	0.153161	0.127873	0.152526	0.121096	0.151576
1.8	0.149870	0.145457	0.142434	0.145938	0.135305	0.146009	0.128495	0.145721	0.122010	0.145120
1.9	0.149032	0.138100	0.142021	0.138855	0.135269	0.139217	0.128792	0.139229	0.122597	0.138933
2.0	0.147953	0.131180	0.141347	0.132164	0.134959	0.132773	0.128805	0.133045	0.122897	0.133015
2.1	0.146675	0.124674	0.140453	0.125849	0.134414	0.126667	0.128574	0.127161	0.122945	0.127363
2.2	0.145234	0.118558	0.139375	0.119891	0.133669	0.120885	0.128130	0.121569	0.122773	0.121972
2.3	0.143660	0.112810	0.138145	0.114272	0.132755	0.115413	0.127506	0.116258	0.122411	0.116834
2.4	0.141982	0.107408	0.136789	0.108973	0.131699	0.110236	0.126726	0.111218	0.121884	0.111942
2.5	0.140220	0.102329	0.135331	0.103977	0.130524	0.105339	0.125814	0.106436	0.121215	0.107286
2.6	0.138395	0.097554	0.133791	0.099265	0.129252	0.100709	0.124792	0.101901	0.120424	0.102858
2.7	0.136523	0.093062	0.132187	0.094822	0.127900	0.096330	0.123676	0.097601	0.119530	0.098648
2.8	0.134619	0.088837	0.130533	0.090631	0.126483	0.092189	0.122484	0.093523	0.118548	0.094646
2.9	0.132693	0.084859	0.128842	0.086677	0.125016	0.088273	0.121229	0.089658	0.117492	0.090842
3.0	0.130757	0.081113	0.127125	0.082944	0.123510	0.084568	0.119922	0.085992	0.116375	0.087227

y	$Re\,w(z)$, $x=2.5$	$Im\,w(z)$, $x=2.5$	$Re\,w(z)$, $x=2.6$	$Im\,w(z)$, $x=2.6$	$Re\,w(z)$, $x=2.7$	$Im\,w(z)$, $x=2.7$	$Re\,w(z)$, $x=2.8$	$Im\,w(z)$, $x=2.8$	$Re\,w(z)$, $x=2.9$	$Im\,w(z)$, $x=2.9$
0.0	0.001930	0.251723	0.001159	0.239403	0.000682	0.228355	0.000394	0.218399	0.000223	0.209377
0.1	0.014698	0.250050	0.012635	0.238187	0.011037	0.227458	0.009778	0.217722	0.008769	0.208854
0.2	0.026841	0.247092	0.023653	0.235838	0.021057	0.225569	0.018918	0.216181	0.017134	0.207577
0.3	0.038226	0.243042	0.034087	0.232504	0.030626	0.222800	0.027707	0.213858	0.025225	0.205607
0.4	0.048773	0.238092	0.043849	0.228337	0.039656	0.219268	0.036064	0.210843	0.032967	0.203014
0.5	0.058437	0.232420	0.052885	0.223482	0.048090	0.215093	0.043930	0.207232	0.040304	0.199873
0.6	0.067205	0.226190	0.061167	0.218077	0.055890	0.210387	0.051264	0.203129	0.047194	0.196262
0.7	0.075088	0.219546	0.068691	0.212247	0.063043	0.205258	0.058046	0.198594	0.053611	0.192256
0.8	0.082112	0.212614	0.075467	0.206103	0.069548	0.199804	0.064266	0.193741	0.059543	0.187927
0.9	0.088317	0.205504	0.081521	0.199744	0.075416	0.194111	0.069927	0.188638	0.064986	0.183344
1.0	0.093751	0.198307	0.086885	0.193255	0.080670	0.188258	0.075043	0.183354	0.069944	0.178568
1.1	0.098466	0.191099	0.091598	0.186707	0.085338	0.182311	0.079632	0.177950	0.074431	0.173654
1.2	0.102518	0.183943	0.095702	0.180163	0.089451	0.176328	0.083718	0.172480	0.078462	0.168651
1.3	0.105960	0.176889	0.099243	0.173670	0.093044	0.170357	0.087328	0.166990	0.082059	0.163603
1.4	0.108848	0.169977	0.102264	0.167270	0.096155	0.164438	0.090492	0.161519	0.085245	0.158547
1.5	0.111233	0.163237	0.104811	0.160996	0.098820	0.158604	0.093239	0.156099	0.088044	0.153515
1.6	0.113165	0.156692	0.106925	0.154872	0.101076	0.152882	0.095601	0.150758	0.090482	0.148534
1.7	0.114690	0.150359	0.108647	0.148918	0.102957	0.147292	0.097608	0.145518	0.092584	0.143625
1.8	0.115851	0.144249	0.110016	0.143147	0.104498	0.141851	0.099288	0.140395	0.094376	0.138807
1.9	0.116689	0.138368	0.111067	0.137569	0.105730	0.136571	0.100671	0.135403	0.095882	0.134094
2.0	0.117239	0.132720	0.111834	0.132191	0.106683	0.131459	0.101783	0.130553	0.097127	0.129498
2.1	0.117534	0.127305	0.112347	0.127015	0.107386	0.126522	0.102649	0.125851	0.098133	0.125027
2.2	0.117606	0.122121	0.112635	0.122042	0.107864	0.121762	0.103293	0.121303	0.098922	0.120688
2.3	0.117481	0.117164	0.112723	0.117271	0.108140	0.117180	0.103737	0.116911	0.099513	0.116484
2.4	0.117184	0.112428	0.112633	0.112699	0.108238	0.112775	0.104002	0.112676	0.099925	0.112419
2.5	0.116737	0.107909	0.112389	0.108322	0.108177	0.108546	0.104105	0.108597	0.100177	0.108493
2.6	0.116160	0.103597	0.112008	0.104136	0.107975	0.104489	0.104066	0.104674	0.100284	0.104707
2.7	0.115471	0.099487	0.111508	0.100133	0.107648	0.100601	0.103898	0.100905	0.100261	0.101058
2.8	0.114685	0.095570	0.110904	0.096309	0.107213	0.096876	0.103617	0.097284	0.100122	0.097546
2.9	0.113816	0.091838	0.110210	0.092657	0.106682	0.093310	0.103236	0.093810	0.099879	0.094168
3.0	0.112878	0.088283	0.109439	0.089170	0.106067	0.089898	0.102767	0.090479	0.099544	0.090921

$$w(x)=e^{-x^2}+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$$

$$w(-x+iy)=\overline{w(x+iy)} \qquad w(x-iy)=2e^{y^2-x^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)-\overline{w(x+iy)}$$

$$w(iy)=e^{y^2}\operatorname{erfc} y \qquad w[(1+i)u]=e^{-2iu^2}\left\{1+(i-1)\left[C\left(\frac{2u}{\sqrt{\pi}}\right)+iS\left(\frac{2u}{\sqrt{\pi}}\right)\right]\right\}$$

См. примеры 12—19.

Таблица 79 Интеграл вероятностей комплексного аргумента

$$w(z)=e^{-z^2}\,\mathrm{erfc}\,(-iz)\qquad z=x+iy$$

y	$x=3.0$ $Re\,w(z)$	$x=3.0$ $Im\,w(z)$	$x=3.1$ $Re\,w(z)$	$x=3.1$ $Im\,w(z)$	$x=3.2$ $Re\,w(z)$	$x=3.2$ $Im\,w(z)$	$x=3.3$ $Re\,w(z)$	$x=3.3$ $Im\,w(z)$	$x=3.4$ $Re\,w(z)$	$x=3.4$ $Im\,w(z)$
0.0	0.000123	0.201157	0.000067	0.193630	0.000036	0.186704	0.000019	0.180302	0.000010	0.174362
0.1	0.007943	0.200742	0.007254	0.193292	0.006670	0.186421	0.006167	0.180061	0.005728	0.174152
0.2	0.015627	0.199669	0.014338	0.192376	0.013225	0.185630	0.012252	0.179369	0.011394	0.173542
0.3	0.023095	0.197980	0.021250	0.190915	0.019639	0.184354	0.018222	0.178245	0.016966	0.172545
0.4	0.030279	0.195732	0.027929	0.188951	0.025862	0.182626	0.024032	0.176715	0.022403	0.171181
0.5	0.037126	0.192984	0.034328	0.186532	0.031849	0.180484	0.029643	0.174806	0.027670	0.169475
0.6	0.043598	0.189798	0.040407	0.183709	0.037565	0.177970	0.035022	0.172560	0.032738	0.167455
0.7	0.049665	0.186239	0.046141	0.180534	0.042983	0.175128	0.040144	0.170006	0.037582	0.165151
0.8	0.055311	0.182368	0.051509	0.177061	0.048083	0.172003	0.044989	0.167184	0.042185	0.162596
0.9	0.060529	0.178243	0.056501	0.173340	0.052854	0.168637	0.049544	0.164132	0.046532	0.159821
1.0	0.065318	0.173918	0.061114	0.169418	0.057289	0.165072	0.053801	0.160886	0.050615	0.156858
1.1	0.069685	0.169445	0.065350	0.165339	0.061387	0.161349	0.057757	0.157480	0.054428	0.153738
1.2	0.073641	0.164866	0.069216	0.161145	0.065151	0.157502	0.061413	0.153948	0.057971	0.150490
1.3	0.077202	0.160223	0.072722	0.156872	0.068589	0.153567	0.064773	0.150320	0.061246	0.147141
1.4	0.080385	0.155551	0.075883	0.152553	0.071711	0.149572	0.067844	0.146623	0.064258	0.143717
1.5	0.083210	0.150880	0.078712	0.148217	0.074529	0.145545	0.070636	0.142882	0.067012	0.140239
1.6	0.085697	0.146236	0.081229	0.143888	0.077055	0.141510	0.073158	0.139120	0.069518	0.136731
1.7	0.087870	0.141640	0.083450	0.139588	0.079306	0.137488	0.075423	0.135357	0.071785	0.133209
1.8	0.089749	0.137113	0.085394	0.135335	0.081297	0.133495	0.077445	0.131609	0.073823	0.129691
1.9	0.091355	0.132667	0.087080	0.131146	0.083044	0.129548	0.079236	0.127892	0.075646	0.126192
2.0	0.092711	0.128317	0.088525	0.127031	0.084562	0.125660	0.080811	0.124219	0.077263	0.122723
2.1	0.093835	0.124071	0.089749	0.123003	0.085867	0.121840	0.082182	0.120600	0.078687	0.119296
2.2	0.094748	0.119936	0.090767	0.119068	0.086974	0.118099	0.083364	0.117045	0.079930	0.115919
2.3	0.095467	0.115919	0.091597	0.115233	0.087900	0.114442	0.084370	0.113560	0.081004	0.112602
2.4	0.096010	0.112023	0.092255	0.111503	0.088657	0.110875	0.085213	0.110153	0.081921	0.109349
2.5	0.096393	0.108249	0.092754	0.107881	0.089259	0.107403	0.085905	0.106827	0.082690	0.106166
2.6	0.096632	0.104600	0.093110	0.104370	0.089719	0.104027	0.086458	0.103586	0.083324	0.103057
2.7	0.096739	0.101076	0.093336	0.100969	0.090050	0.100751	0.086883	0.100433	0.083832	0.100026
2.8	0.096729	0.097674	0.093442	0.097680	0.090263	0.097575	0.087190	0.097369	0.084225	0.097073
2.9	0.096613	0.094395	0.093442	0.094502	0.090368	0.094499	0.087391	0.094396	0.084511	0.094202
3.0	0.096402	0.091236	0.093345	0.091434	0.090375	0.091523	0.087493	0.091513	0.084700	0.091413

y	$x=3.5$ $Re\,w(z)$	$x=3.5$ $Im\,w(z)$	$x=3.6$ $Re\,w(z)$	$x=3.6$ $Im\,w(z)$	$x=3.7$ $Re\,w(z)$	$x=3.7$ $Im\,w(z)$	$x=3.8$ $Re\,w(z)$	$x=3.8$ $Im\,w(z)$	$x=3.9$ $Re\,w(z)$	$x=3.9$ $Im\,w(z)$
0.0	0.000005	0.168830	0.000002	0.163662	0.000001	0.158821	0.000001	0.154273	0.000000	0.149992
0.1	0.005340	0.168645	0.004995	0.163498	0.004685	0.158673	0.004406	0.154140	0.004153	0.149871
0.2	0.010633	0.168102	0.009952	0.163011	0.009339	0.158235	0.008786	0.153743	0.008282	0.149510
0.3	0.015846	0.167212	0.014841	0.162211	0.013935	0.157513	0.013115	0.153088	0.012368	0.148913
0.4	0.020944	0.165990	0.019632	0.161111	0.018446	0.156516	0.017370	0.152183	0.016389	0.148088
0.5	0.025897	0.164456	0.024297	0.159725	0.022847	0.155260	0.021529	0.151040	0.020326	0.147044
0.6	0.030677	0.162633	0.028812	0.158075	0.027118	0.153760	0.025574	0.149672	0.024162	0.145792
0.7	0.035263	0.160548	0.033158	0.156181	0.031239	0.152034	0.029486	0.148094	0.027880	0.144346
0.8	0.039637	0.158227	0.037316	0.154066	0.035195	0.150102	0.033253	0.146324	0.031469	0.142721
0.9	0.043785	0.155698	0.041274	0.151755	0.038974	0.147985	0.036861	0.144380	0.034916	0.140931
1.0	0.047698	0.152988	0.045023	0.149271	0.042565	0.145703	0.040301	0.142279	0.038212	0.138993
1.1	0.051370	0.150124	0.048556	0.146637	0.045962	0.143277	0.043567	0.140039	0.041352	0.136922
1.2	0.054798	0.147132	0.051869	0.143878	0.049161	0.140727	0.046653	0.137680	0.044328	0.134735
1.3	0.057984	0.144038	0.054962	0.141014	0.052159	0.138074	0.049558	0.135218	0.047139	0.132448
1.4	0.060928	0.140862	0.057835	0.138067	0.054958	0.135336	0.052279	0.132671	0.049783	0.130076
1.5	0.063637	0.137628	0.060491	0.135056	0.057557	0.132530	0.054819	0.130054	0.052260	0.127633
1.6	0.066116	0.134354	0.062936	0.131999	0.059962	0.129674	0.057179	0.127384	0.054572	0.125133
1.7	0.068374	0.131058	0.065176	0.128913	0.062177	0.126782	0.059362	0.124673	0.056720	0.122591
1.8	0.070419	0.127755	0.067217	0.125812	0.064206	0.123869	0.061374	0.121935	0.058708	0.120016
1.9	0 072260	0.124460	0.069068	0.122709	0.066058	0.120947	0.063219	0.119182	0.060540	0.117422
2.0	0.073908	0.121185	0.070736	0.119617	0.067738	0.118027	0.064903	0.116425	0.062222	0.114817
2.1	0.075373	0.117940	0.072232	0.116545	0.069254	0.115120	0.066433	0.113673	0.063759	0.112212
2.2	0.076666	0.114735	0.073563	0.113503	0.070615	0.112234	0.067815	0.110935	0.065156	0.109614
2.3	0.077796	0.111578	0.074739	0.110500	0.071829	0.109377	0.069058	0.108218	0.066420	0.107031
2.4	0.078774	0.108474	0.075770	0.107540	0.072902	0.106556	0.070166	0.105530	0.067556	0.104469
2.5	0.079611	0.105431	0.076664	0.104631	0.073845	0.103777	0.071149	0.102875	0.068572	0.101935
2.6	0.080316	0.102451	0.077430	0.101777	0.074663	0.101044	0.072013	0.100260	0.069474	0.099433
2.7	0.080898	0.099538	0.078076	0.098981	0.075366	0.098362	0.072764	0.097688	0.070267	0.096968
2.8	0.081366	0.096696	0.078612	0.096247	0.075961	0.095734	0.073411	0.095163	0.070959	0.094543
2.9	0.081730	0.093927	0.079044	0.093577	0.076455	0.093162	0.073959	0.092688	0.071555	0.092162
3.0	0.081996	0.091230	0.079381	0.090973	0.076855	0.090649	0.074415	0.090265	0.072061	0.089826

Если $x>3.9$ **или** $y>3$, **то** $w(z)=iz\left(\dfrac{0.4613135}{z^2-0.1901635}+\dfrac{0.09999216}{z^2-1.7844927}+\dfrac{0.002883894}{z^2-5.5253437}\right)+\varepsilon(z),\ \ |\varepsilon(z)|<2\cdot 10^{-6}.$

Если $x>6$ **или** $y>6$, **то** $w(z)=iz\left(\dfrac{0.5124242}{z^2-0.2752551}+\dfrac{0.05176536}{z^2-2.724745}\right)+\eta(z),\ \ |\eta(z)|<10^{-6}.$

Таблица 7.10. Комплексные нули интеграла вероятностей

$\operatorname{erf} z_n = 0 \qquad z_n = x_n + iy_n$

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	1.45061 616	1.88094 300	6	4.15899 840	4.43557 144
2	2.24465 928	2.61657 514	7	4.51631 940	4.78044 764
3	2.83974 105	3.17562 810	8	4.84797 031	5.10158 804
4	3.33546 074	3.64617 438	9	5.15876 791	5.40333 264
5	3.76900 557	4.06069 723	10	5.45219 220	5.68883 744

$\operatorname{erf} z_n = \operatorname{erf}(-z_n) = \operatorname{erf} \bar{z}_n = \operatorname{erf}(-\bar{z}_n) = 0$

$$\left.\begin{matrix} x_n \\ y_n \end{matrix}\right\} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\pi\left(4n-\frac{1}{2}\right)} \mp \frac{\ln\left(\pi\sqrt{2n-\frac{1}{4}}\right)}{2\sqrt{\pi\left(4n-\frac{1}{2}\right)}} \quad (n>0).$$

Взято из [7.20].

Таблица 7.11. Комплексные нули интегралов Френеля

$C(z_n) = 0 \qquad z_n = x_n + iy_n$

$S(z_n^*) = 0 \qquad z_n^* = x_n^* + iy_n^*$

n	x_n	y_n	x_n^*	y_n^*
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	1.7437	0.3057	2.0093	0.2886
2	2.6515	0.2529	2.8335	0.2443
3	3.3208	0.2239	3.4675	0.2185
4	3.8759	0.2047	4.0026	0.2008
5	4.3611	0.1909	4.4742	0.1877

$$\begin{matrix}C\\S\end{matrix}(z_n) = \begin{matrix}C\\S\end{matrix}(-z_n) = \begin{matrix}C\\S\end{matrix}(\bar{z}_n) = \begin{matrix}C\\S\end{matrix}(-\bar{z}_n) = \begin{matrix}C\\S\end{matrix}(iz_n) = \begin{matrix}C\\S\end{matrix}(-iz_n) = \begin{matrix}C\\S\end{matrix}(-i\bar{z}_n) = \begin{matrix}C\\S\end{matrix}(i\bar{z}_n) = 0$$

$$x_n \approx \sqrt{4n-1} - \frac{\ln(\pi\sqrt{4n-1})}{\pi^2(4n-1)^{3/2}} \qquad y_n \approx \frac{\ln(\pi\sqrt{4n-1})}{\pi\sqrt{4n-1}}$$

$$(n>0)$$

$$x_n^* \approx 2\sqrt{n} - \frac{\ln(2\pi\sqrt{n})}{8\pi^2 n^{3/2}} \qquad y_n^* \approx \frac{\ln(2\pi\sqrt{n})}{2\pi\sqrt{n}}$$

Таблица 7.12. Максимумы и минимумы интегралов Френеля

$M_n = C(\sqrt{4n+1}) \qquad m_n = C(\sqrt{4n+3}) \qquad M_n^* = S(\sqrt{4n+2}) \qquad m_n^* = S(\sqrt{4n+4})$

n	M_n	m_n	M_n^*	m_n^*
0	0.779893	0.321056	0.713972	0.343415
1	0.640807	0.380389	0.628940	0.387969
2	0.605721	0.404260	0.600361	0.408301
3	0.588128	0.417922	0.584942	0.420516
4	0.577121	0.427036	0.574957	0.428877
5	0.569413	0.433666	0.567822	0.435059

$$M_n \sim \frac{1}{2} + \frac{\pi^2(4n+1)^2-3}{\pi^3(4n+1)^{5/2}} \qquad m_n \sim \frac{1}{2} - \frac{\pi^2(4n+3)^2-3}{\pi^3(4n+3)^{5/2}}$$

$$(n\to\infty)$$

$$M_n^* \sim \frac{1}{2} + \frac{\pi^2(4n+2)^2-3}{\pi^3(4n+2)^{5/2}} \qquad m_n^* \sim \frac{1}{2} - \frac{16\pi^2(n+1)^2-3}{32\pi^3(n+1)^{5/2}}$$

Взято из [7.22].

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

7.1. Boersma J. Computation of Fresnel integrals. — Math. Comp., 1960, **14**, № 380.

7.2. Boyd A. V. Inequalities for Mills' ratio. — Rep. Statist. Appl. Res. Un. Jap. Sci. Engrs., 1959, **6**, p. 44—46.

7.3. Emersleben O., Numerische Werte des Fehlerintegrals für $\sqrt{n\pi}$. — Z. Angew. Math. Mech., 1951, **31**, p. 393—394.

7.4. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V. 2. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974, Т.II.

7.5. Erdélyi A. et al. Tables of integral transforms. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1954, V. I. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. — М.: Наука, 1969.

7.6. Gautschi W. Note on bivariate linear interpolation for analytic functions. — Math. Tables Aids Comp., 1959, **13**, p. 91—96.

7.7. Gautschi W. Recursive computation of the repeated integrals of the error functions. — Math. Comp., 1961, **15**, p. 227—232.

7.8. Gröbner W., Hofreiter N. Integraltafel. — Wien and Innsbruck: Springer-Verlag, 1949—50.

7.9. Hartree D. R. Some properties and applications of the repeated integrals of the error functions. — Mem. Proc. Manchester Lit. Philos. Soc., 1936, **80**, p. 85—102.

7.10. Hastings C., Jr. Approximations for digital computers. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1955.

7.11. Komatu Y. Elementary inequalities for Mills' ratio. — Rep. Statist. Appl. Res. Un. Jap. Sci. Engrs., 1955—57, **4**, p. 69—70.

7.12. Kreyszig E. On the zeros of the Fresnel integrals. — Canad. J. Math., 1957, **9**, p. 118—131.

7.13. Laible Th. Höhenkarte des Fehlerintegrals. — Z. Angew. Math. Phys., 1951, **2**, p. 484—486.

7.14. Lösch F., Schoblik F. Die Fakultät. — Leipzig: Teubner, 1951.

7.15. Oberhettinger F. Tabellen zur Fourier Transformation. — B.: Springer-Verlag, 1957.

7.16. Philip J. R. The function inv erfc Θ. — Austral. J. Phys., 1960, **13**, p. 13—20.

7.17. Pollak H. O. A remark on «Elementary inequalities for Mills' ratio» by Yûsaky Komatu. — Rep. Statist. Appl. Res. Un. Jap. Sci. Engrs., 1955—1957, **4**, p. 110.

7.18. Rosser J. B. Theory and application of $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ and $\int\limits_0^x e^{-p^2y^2}\,dy \int\limits_0^y e^{-x^2}\,dx$. — Brooklyn: Mapleton House, 1948.

7.19. Salzer H. E. Formulas for calculating the error function of a complex variable. — Math. Tables Aids Comp., 1951, **5**, p. 67—70.

7.20. Salzer H. E. Complex zeros of the error function. — J. Franklin Inst., 1955, **260**, p. 209—211.

7.21. Tricomi F. G. Funzioni ipergeometriche confluenti. — R.: Edizioni Cremonese, 1954.

7.22. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. — L.: Cambridge Univ. Press, 1958. Русский перевод: Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949. — В Ч. 2 имеются таблицы функций $C(\sqrt{2x/\pi}$, $S(\sqrt{2x/\pi})$, $x = 0(0.02)\,1(0.5)\,50$, 6D.

Таблицы

7.23. Abramowitz M. Table of the integral $\int\limits_0^x e^{-u^2}\,du$. — J. Math. Phys., 1951, **30**, p. 162—163.

$x = 0(0.01)2.5$, 8D.

7.24. Clemmow P. C., Munford Cara M. A table of $\sqrt{\pi/2}\, e^{i\pi\rho^2/2} \int\limits_\rho^\infty e^{-i\pi\lambda^2/2}\,d\lambda$ for complex values of ρ. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, A, 1952, **245**, p. 189—211.

$|\rho| = 0(0.01)0.8$, $\arg\rho = 0°(1°)$, 45°, 4D.

7.25. Dingle R. B., Doreen Arndt, Roy S. K., The integrals

$$C_p(x) = (p!)^{-1} \int\limits_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon^2 + x^2)^{-1} e^{-\varepsilon}\,d\varepsilon$$

and

$$D_p(x) = (p!)^{-1} \int\limits_0^\infty \varepsilon^p(\varepsilon^2 + x^2)^{-2} e^{-\varepsilon}\,d\varepsilon$$

and their tabulation. — Appl. Sci. Res., 1956, **B6**, p. 155—164.

$C(x)$, $S(x)$, $x = 0(1)20$, 12D.

7.26. Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений функции $w(z) = e^{-z^2}\left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{t^2}\,dt\right)$ от комплексного аргумента. — М.: Гостехиздат, 1954.

$w(z)$, $z = x + iy$; x, $y = 0(0.02)\ 3$; $x = 3(0.1)\,5$, $y = 0(0.1)\,3$; $x = 0(0.1)\,5$, $y = 3(0.1)\,5$; 6D.

7.27. Fried B. D., Conte S. D., The plasma dispersion function. — N.Y.: Academic Press, 1961.

$i\sqrt{\pi}w(z)$, $i\sqrt{\pi}w'(z)$, $z = x + iy$; $x = 0(0.1)\,9.9$, $y = -9.1(0.1)\,10$; $x = \text{var}\ (0.1)\,9.9$, $y = -10(0.1) - 9.2$; 6S.

7.28. Карпов К. А. Таблицы функции $w(z) = e^{-z^2}\int\limits_0^z e^{x^2}dx$ в комплексной области. — М.: Изд-во АН СССР, 1954.

7.29. Карпов К. А. Таблицы функции $F(z) = \int_0^z e^{x^2}\,dx$ в комплексной области. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.

$\theta = 45°(0.3125°)\,48.75°(0.625°)\,55°(1.25°)\,65°(2.5°)\,90°$,

$\rho = \rho_\theta(0.001)\;\rho'_\theta(0.01)\;\rho''_\theta,\; 0 \leqslant \rho_\theta < \rho'_\theta \leqslant \rho''_\theta \leqslant 5$, 5D.

7.30. Kaye J. A table of the first eleven repeated integrals of the error function. — J. Math. Phys. 1955, **34**, p. 119—125.

$i^n \operatorname{erfc} x$, $x = 0(0.01)\,0.2(0.05)\,1(0.1)\,3$,

$n = -1(1)\,11$, 6D.

7.31. Lohmander B., Rittsten S. Table of the function $y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$. — Kungl. Fysiogr. Sallsk. i Lund. Forh., 1958, **28**, p. 45—52.

$x = 0(0.01)\,3(0.02)\,5$,

$x^{-1} = 0(0.005)\,0.2$, 10D; $x = 0.5(0.5)10$, 20D.

7.32. Miller W., Gordon A. R. Numerical evaluation of infinite series and integrals wich arise in certain problems of linear heat flow, electrochemical diffusion, etc. — J. Phys. Chem., 1931, **35**, p. 2785—2884.

$F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$, $x = 0(0.01)\,1.99$, 6D;

$x = 2(0.01)\,4(0.05)\,7.5(0.1)\,10(0.2)\,12$, 8S.

7.33. National Bureau of Standards. Tables of the error function and its derivative. — Washington: Government Printing Office, 1954. — (Applied Math. Series; **41**).

$(2/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$, $\operatorname{erf} x$, $x = 0(0.0001)\,1(0.001)5.6$, 15D;

$(2/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$, $\operatorname{erfc} x$, $x = 4(0.01)\,10$, 8S.

7.34. Pearcey T. Table of the Freshel integral. — L.: Cambridge Univ. Press, 1956.

$C(\sqrt{2x/\pi})$, $S(\sqrt{2x/\pi})$, $x = 0(0.01)\,50$, 6—7D.

7.35. Таблицы интегралов Френеля / Под ред. проф. В. А. Диткина. — М.: Изд-во АН СССР, 1953.

$C(x)$, $S(x)$, $x = 0(0.001)\,25$, 7D; $S(x)$,

$x = 0(0.001)\,0.58$, 7S; $C(x)$, $x = 0(0.001)\,0.101$, 7S.

7.36. Van Wijngaarden A., Scheen W. L. Table of Fresnel integrals. — Verh. Nederl. Acad. Wetensch., Afd. Natuurk., 1949, Sec. I, **19**, № 4, p. 1—26.

КНИГИ, ДОБАВЛЕННЫЕ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

7.37. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.; Л.: Физматгиз, 1963.

7.38. Таблицы вероятностных функций. — М.: ВЦ АН СССР, 1958. — (БМТ; Вып. 2).

7.39. Таблицы функции ошибок и ее первых двадцати производных. — М.: ВЦ АН СССР, 1965. — (БМТ; Вып. 33).

7.40. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

Глава 8
ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

И. СТИГАН

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ

В данной главе приняты следующие обозначения: аргумент z — комплексное число, $z = x + iy$, где x, y — действительные, $-1 \leqslant x \leqslant +1$, $\cos\theta = x$, где θ — действительное; n и m — неотрицательные целые; ν и μ — произвольные комплексные числа; ограничения на них каждый раз оговариваются. Функции Лежандра обозначаются здесь символами $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$.

В литературе используются также следующие обозначения:

$$P^n(x) \quad \text{для} \quad \frac{n!\,P_n(x)}{(2n-1)!!},$$

$$P_{nm}(x) \quad \text{для} \quad (-1)^m P_n^m(x),$$

$$T_n^m(x) \quad \text{для} \quad (-1)^m P_n^m(x),$$

$$\overline{P}_n^m(x) \quad \text{для} \quad (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)\,(n-m)!}{2(n+m)!}}\, P_n^m(x),$$

$$\mathcal{P}_\nu^\mu(z) \quad \text{для} \quad P_\nu^\mu(z), \quad \mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) \text{ для } Q_\nu^\mu(z) \quad (\operatorname{Re} z > 1),$$

$$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) \quad \text{для} \quad e^{\mu\pi i} Q_\nu^\mu(z),$$

$$Q_\nu^\mu(z) \quad \text{для} \quad \frac{\sin(\nu+\mu)\pi}{\sin\nu\pi}\, Q_\nu^\mu(z).$$

Встречаются и некоторые другие обозначения функций Лежандра.

8.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

8.1.1. $$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right] w = 0.$$

Решения

ν называется *степенью*, μ — *порядком;* точки $z = \pm 1, \infty$ являются, вообще говоря, особыми, а именно обыкновенными точками ветвления; μ и ν — произвольные комплексные постоянные.

$P_\nu^\mu(z)$, $Q_\nu^\mu(z)$ — присоединенные функции Лежандра (сферические функции) соответственно первого и второго рода *)

$$|\arg(z\pm 1)| < \pi, \quad |\arg z| < \pi,$$

$$(z^2-1)^{\mu/2} = (z-1)^{\mu/2}(z+1)^{\mu/2}.$$

При $\mu = 0$, целом неотрицательном ν $P_\nu^\mu(z)$ — многочлены Лежандра (см. гл. 22).

8.1.2. $$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left[\frac{z+1}{z-1}\right]^{\mu/2} F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) \quad (|1-z| < 2),$$

где $F(a, b, c; z)$ — гипергеометрическая функция (см. гл. 15).

8.1.3. $$Q_\nu^\mu(z) = e^{i\mu\pi} 2^{-\nu-1}\pi^{1/2}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)} z^{-\nu-\mu-1} \times (z^2-1)^{\mu/2} F\left(1+\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2};\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right) \quad (|z| > 1).$$

Представления через гипергеометрическую функцию

С помощью формул преобразования гипергеометрической функции может быть получен еще целый ряд выражений, аналогичных приведенным ниже (см. [8.1]).

8.1.4. $$P_\nu^\mu(z) = 2^\mu\pi^{1/2}(z^2-1)^{-\mu/2} \times \left\{\frac{F\left(-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}\right)} - 2z\frac{F\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\ 1+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2};\ \frac{3}{2};\ z^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}\right)}\right\} \quad (|z^2| < 1).$$

8.1.5. $$P_\nu^\mu(z) = \frac{2^{-\nu-1}\pi^{-1/2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\nu\right)z^{-\nu+\mu-1}}{(z^2-1)^{\mu/2}\Gamma(-\nu-\mu)} \times F\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\ 1+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2};\ \nu+\frac{3}{2};\ z^{-2}\right) + \frac{2^\nu\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)z^{\nu+\mu}}{(z^2-1)^{\mu/2}\Gamma(1+\nu-\mu)} \times F\left(-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2};\ \frac{1}{2}-\nu;\ z^{-2}\right) \quad (|z^{-2}| < 1).$$

8.1.6. $$e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(z) = \frac{\Gamma(1+\nu+\mu)\,\Gamma(-\mu)\,(z-1)^{\mu/2}(z+1)^{-\mu/2}}{2\Gamma(1+\nu-\mu)} \times F\left(-\nu,\ 1+\nu;\ 1+\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) + \frac{1}{2}\Gamma(\mu)(z+1)^{\mu/2}(z-1)^{-\mu/2} F\left(-\nu,\ 1+\nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right) \quad (|1-z| < 2).$$

---

*) Функции $Y_n^m(\theta,\varphi) = \begin{cases}\cos m\varphi\ P_n^m(\cos\theta),\\ \sin m\varphi\ P_n^m(\cos\theta)\end{cases}$ называются сферическими гармониками первого рода, тессеральными для $m < n$ и секториальными для $m = n$. При $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ они являются однозначными и непрерывными функциями на поверхности единичной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, где $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$ и $z = \cos\theta$.

8.1.7. $$e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(z) = \pi^{1/2}2^\mu(z^2-1)^{-\mu/2}\times$$
$$\times\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)}{2\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}\right)}e^{\pm i\pi(\mu-\nu-1)/2}\times\right.$$
$$\times F\left(-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right)+$$
$$+\frac{z\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)e^{\pm i\pi(\mu-\nu)/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}\right)}\times$$
$$\left.\times F\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\ 1+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2};\ \frac{3}{2};\ z^2\right)\right\}\quad(|z^2|<1).$$

Верхний (нижний) знак берется, когда $\operatorname{Im} z>0$ $(\operatorname{Im} z<0)$.

Вронскиан

8.1.8. $$W\{P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z)\} = \frac{e^{i\mu\pi}2^{2\mu}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{(1-z^2)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}.$$

8.1.9. $W\{P_n(z), Q_n(z)\} = -(z^2-1)^{-1}$.

8.2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ ЛЕЖАНДРА

Отрицательная степень

8.2.1. $P_{-\nu-1}^\mu(z) = P_\nu^\mu(z)$.

8.2.2. $$Q_{-\nu-1}^\mu(z) = \{-\pi e^{i\mu\pi}\cos\nu\pi P_\nu^\mu(z) + Q_\nu^\mu(z)\sin[\pi(\nu+\mu)]\}/\sin[\pi(\nu-\mu)].$$

Отрицательный аргумент

$(\operatorname{Im} z \gtrless 0)$

8.2.3. $$P_\nu^\mu(-z) = e^{\mp i\nu\pi}P_\nu^\mu(z) - \frac{2}{\pi}e^{-i\mu\pi}\sin[\pi(\nu+\mu)]Q_\nu^\mu(z).$$

8.2.4. $Q_\nu^\mu(-z) = -e^{\pm i\nu\pi}Q_\nu^\mu(z)$.

Отрицательный порядок

8.2.5. $$P_\nu^{-\mu}(z) = \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[P_\nu^\mu(z) - \frac{2}{\pi}e^{-i\mu\pi}\sin(\mu\pi)Q_\nu^\mu(z)\right].$$

8.2.6. $$Q_\nu^{-\mu}(z) = e^{-2i\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}Q_\nu^\mu(z).$$

Степень $\mu+\frac{1}{2}$ и порядок $\nu+\frac{1}{2}$

$(\operatorname{Re} z>0)$

8.2.7. $$P_{-\mu-1/2}^{-\nu-1/2}\left(\frac{z}{(z^2-1)^{1/2}}\right) = \frac{(z^2-1)^{1/4}e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(z)}{\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{1/2}\Gamma(\nu+\mu+1)}.$$

8.2.8. $$Q_{-\mu-1/2}^{-\nu-1/2}\left(\frac{z}{(z^2-1)^{1/2}}\right) = -i\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{1/2}\Gamma(-\nu-\mu)(z^2-1)^{1/4}e^{-i\nu\pi}P_\nu^\mu(z).$$

8.3. ЗНАЧЕНИЯ НА РАЗРЕЗЕ

$(-1<x<1)$

8.3.1. $$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2}\left[e^{i\mu\pi/2}P_\nu^\mu(x+i0) + e^{-i\mu\pi/2}P_\nu^\mu(x-i0)\right].$$

8.3.2. $P_\nu^\mu(x) = e^{\pm i\mu\pi/2}P_\nu^\mu(x\pm i0)$.

8.3.3. $$P_\nu^\mu(x) = i\pi^{-1}e^{-i\mu\pi}\left[e^{-i\mu\pi/2}Q_\nu^\mu(x+i0) - e^{i\mu\pi/2}Q_\nu^\mu(x-i0)\right].$$

8.3.4. $$Q_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2}e^{-i\mu\pi}\left[e^{-i\mu\pi/2}Q_\nu^\mu(x+i0) + e^{i\mu\pi/2}Q_\nu^\mu(x-i0)\right].$$

Формулы для $P_\nu^\mu(x)$ и $Q_\nu^\mu(x)$ получены при $z=x\pm i0$ заменой $z-1$ на $(1-x)e^{\pm i\pi}$, (z^2-1) на $(1-x^2)e^{\pm i\pi}$, $z+1$ на $x+1$.

8.4. ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$(x = \cos\theta)$

8.4.1. $P_0(z) = 1, \quad P_0(x) = 1.$

8.4.2. $Q_0(z) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \quad Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = xF\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2};\ x^2\right).$

8.4.3. $P_1(z) = z, \quad P_1(x) = x = \cos\theta.$

8.4.4. $Q_1(z) = \frac{z}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - 1,$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1.$$

8.4.5. $P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2-1), \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1).$

8.4.6. $Q_2(z) = \frac{1}{2}P_2(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - \frac{3z}{2},$

$$Q_2(x) = \left(\frac{3x^2-1}{4}\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2}.$$

8.5. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Обе функции P_ν^μ и Q_ν^μ удовлетворяют одним и тем же рекуррентным соотношениям.

8.5.1. $P_\nu^{\mu+1}(z) = (z^2-1)^{-1/2}\{(\nu-\mu)zP_\nu^\mu(z) - (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z)\}.$

8.5.2. $(z^2-1)\frac{dP_\nu^\mu(z)}{dz} = (\nu+\mu)(\nu-\mu+1)(z^2-1)^{1/2} \times P_\nu^{\mu-1}(z) - \mu z P_\nu^\mu(z).$

8.5.3. $(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z) = (2\nu+1)zP_\nu^\mu(z) - (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z).$

8.5.4. $(z^2-1)\frac{dP_\nu^\mu(z)}{dz} = \nu z P_\nu^\mu(z) - (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z).$

8.5.5. $P_{\nu+1}^\mu(z) = P_{\nu-1}^\mu(z) + (2\nu+1)(z^2-1)^{1/2}P_\nu^{\mu-1}(z).$

8.6. ЧАСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

$x = 0$

8.6.1. $P_\nu^\mu(0) = 2^\mu \pi^{-1/2}\cos\left[\frac{1}{2}\pi(\nu+\mu)\right] \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu + 1\right).$

8.6.2. $Q_\nu^\mu(0) = -2^{\mu-1}\pi^{1/2}\sin\left[\frac{1}{2}\pi(\nu+\mu)\right] \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu + 1\right).$

8.6.3. $\left[\frac{dP_\nu^\mu(x)}{dx}\right]_{x=0} = 2^{\mu+1}\pi^{-1/2}\sin\left[\frac{1}{2}\pi(\nu+\mu)\right] \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + 1\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right).$

8.6.4. $\left[\frac{dQ_\nu^\mu(x)}{dx}\right]_{x=0} = 2^\mu \pi^{1/2}\cos\left[\frac{1}{2}\pi(\nu+\mu)\right] \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + 1\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right).$

8.6.5. $W\{P_\nu^\mu(x),\ Q_\nu^\mu(x)\}_{x=0} = \dfrac{2^{2\mu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu + 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}.$

$$\mu = m = 1, 2, 3, \ldots$$

8.6.6. $P_\nu^m(z) = (z^2-1)^{m/2}\frac{d^m P_\nu(z)}{dz^m},$

$$P_\nu^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m}.$$

8.6.7. $Q_\nu^m(z) = (z^2-1)^{m/2}\frac{d^m Q_\nu(z)}{dz^m},$

$$Q_\nu^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m}.$$

$$\mu = \pm\frac{1}{2}$$

8.6.8. $P_\nu^{1/2}(z) = (z^2-1)^{-1/4}(2\pi)^{-1/2}\{[z+(z^2-1)^{1/2}]^{\nu+1/2} + [z+(z^2-1)^{1/2}]^{-\nu-1/2}\}.$

8.6.9. $P_\nu^{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(z^2-1)^{-1/4}}{2\nu+1} \{[z+(z^2-1)^{1/2}]^{\nu+1/2} - [z+(z^2-1)^{1/2}]^{-\nu-1/2}\}.$

8.6.10. $Q_\nu^{1/2}(z) = i\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{1/2}(z^2-1)^{-1/4}[z+(z^2-1)^{1/2}]^{-\nu-1/2}.$

8.6.11. $Q_\nu^{-1/2}(z) = -i(2\pi)^{1/2}\frac{(z^2-1)^{-1/4}}{2\nu+1} \times [z+(z^2-1)^{1/2}]^{-\nu-1/2}.$

8.6.12. $P_\nu^{1/2}(\cos\theta) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}(\sin\theta)^{-1/2}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right].$

8.6.13. $Q_\nu^{1/2}(\cos\theta) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}(\sin\theta)^{-1/2}\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right].$

8.6.14. $P_\nu^{-1/2}(\cos\theta) = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{-1/2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^{-1}(\sin\theta)^{-1/2}\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right].$

8.6.15. $Q_\nu^{-1/2}(\cos\theta) = -(2\pi)^{1/2}(2\nu+1)^{-1}(\sin\theta)^{-1/2}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right].$

$$\mu = -\nu$$

8.6.16. $P_\nu^{-\nu}(z) = \frac{2^{-\nu}(z^2-1)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)}.$

8.6.17. $P_\nu^{-\nu}(\cos\theta) = \frac{2^{-\nu}(\sin\theta)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}.$

$$\mu = 0,\ \nu = n$$

8.6.18. Формула Родрига $P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(z^2-1)^n}{dz^n}.$

8.6.19. $Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - W_{n-1}(x),$

где

$$W_{n-1}(x) = \frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(x) + \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(x) + \frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(x) + \ldots = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}P_{m-1}(x)P_{n-m}(x),$$

$$W_{-1}(x) = 0.$$

$$\nu = 0,\ 1$$

8.6.20. $\left[\frac{\partial P_\nu(\cos\theta)}{\partial\nu}\right]_{\nu=0} = 2\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right).$

8.6.21. $\left[\frac{\partial P_\nu^{-1}(\cos\theta)}{\partial\nu}\right]_{\nu=0} = -\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - 2\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right).$

8.6.22. $\left[\frac{\partial P_\nu^{-1}(\cos\theta)}{\partial\nu}\right]_{\nu=1} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin\theta\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right).$

8.7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

$$(0 < \theta < \pi)$$

8.7.1. $P_\nu^\mu(\cos\theta) = \pi^{-1/2}2^{\mu+1}(\sin\theta)^\mu \times \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu+1/2)_k(\nu+\mu+1)_k}{k!(\nu+3/2)_k} \times \sin[(\nu+\mu+2k+1)\theta].$

8.7.2. $Q_\nu^\mu(\cos\theta) = \pi^{1/2}2^\mu(\sin\theta)^\mu \times \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu+1/2)_k(\nu+\mu+1)_k}{k!(\nu+3/2)_k} \times \cos[(\nu+\mu+2k+1)\theta].$

8.7.3. $P_n(\cos\theta) = \frac{2^{2n+2}(n!)^2}{\pi(2n+1)!} \times \left[\sin(n+1)\theta + \frac{n+1}{2n+3}\sin(n+3)\theta + \frac{1\cdot3}{2!}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}\sin(n+5)\theta + \ldots\right].$

8.7.4. $Q_n(\cos\theta) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \times \left[\cos(n+1)\theta + \frac{n+1}{2n+3}\cos(n+3)\theta + \frac{1\cdot3}{2!}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\theta + \ldots\right].$

8.8. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

(z не принадлежит интервалу $(-\infty, -1)$ действительной оси)

8.8.1. $P_\nu^\mu(z) = \frac{2^{-\nu}(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty (z+\operatorname{ch}t)^{\mu-\nu-1} \times (\operatorname{sh}t)^{2\nu+1}\,dt \quad (\operatorname{Re}(-\mu) > \operatorname{Re}\nu > -1).$

8.8.2. $Q_\nu^\mu(z) = \frac{e^{i\mu\pi}\sqrt{\pi}\,2^{-\mu}}{\Gamma(\mu+1/2)}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \times (z^2-1)^{\mu/2}\int_0^\infty [z+(z^2-1)^{1/2}\operatorname{ch}t]^{-\nu-\mu-1}(\operatorname{sh}t)^{2\mu}\,dt$

$$(\operatorname{Re}(\nu\pm\mu+1) > 0).$$

8.8.3. $Q_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(z-t)^{-1}P_n(t)\,dt = (-1)^{n+1}Q_n(-z).$

Другие интегральные представления см. в [8.2], [8.22].

8.9. ФОРМУЛЫ СУММИРОВАНИЯ

8.9.1. $$(\xi - z)\sum_{m=0}^{n}(2m+1)P_m(z)P_m(\xi) = (n+1)[P_{n+1}(\xi)P_n(z) - P_n(\xi)P_{n+1}(z)].$$

8.9.2. $$(\xi - z)\sum_{m=0}^{n}(2m+1)P_m(z)Q_m(\xi) = 1 - (n+1)[P_{n+1}(z)Q_n(\xi) - P_n(z)Q_{n+1}(\xi)].$$

8.10. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Для фиксированных z, ν и $\operatorname{Re}\mu \to \infty$ формулы 8.10.1 — 8.10.3 являются асимптотическими разложениями, если z не принадлежит интервалам действительной оси $(-\infty, -1)$ и $(+\infty, +1)$. Верхний (нижний) знак в следующих формулах берется, когда $\operatorname{Im} z > 0$ $(\operatorname{Im} z < 0)$.

8.10.1. $$P_\nu^\mu(z) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}{\pi\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} \times \sin\mu\pi\left[F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1+\mu;\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right) - \frac{\sin\nu\pi}{\sin\mu\pi}e^{\mp i\mu\pi}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\mu}F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1+\mu;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right)\right].$$

8.10.2. $$Q_\nu^\mu(z) = \frac{1}{2}e^{i\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} \times \Gamma(\mu-\nu)\left[F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1+\mu;\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right) - e^{\mp i\nu\pi}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\mu}F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1+\mu;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right)\right].$$

8.10.3. $$Q_\nu^{-\mu}(z) = \frac{e^{-i\mu\pi}\operatorname{cosec}[\pi(\nu-\mu)]}{2\pi\Gamma(1+\mu)} \times \left[e^{\mp i\nu\pi}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{-\mu/2}F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1+\mu;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right) - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{-\mu/2}F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1+\mu;\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)\right].$$

Если в формуле 8.1.2 заменить μ на $-\mu$, то получим асимптотическое разложение для $P_\nu^{-\mu}(z)$ при фиксированных, z, ν и $\operatorname{Re}\mu \to \infty$; при этом z не должно лежать в интервале $(-\infty, -1)$ действительной оси.

При фиксированных z, μ и $\operatorname{Re}\nu \to \infty$ 8.10.4 и 8.10.6 являются асимптотическими разложениями, если z не принадлежит интервалам $(-\infty, -1)$ и $(+\infty, +1)$ действительной оси. В 8.10.5 предполагается, что z не лежит в интервале $(-\infty, +1)$ действительной оси.

8.10.4. $$P_\nu^\mu(z) = (2\pi)^{-1/2}(z^2-1)^{-1/4}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)} \times \left\{[z+(z^2-1)^{1/2}]^{\nu+1/2}F\left(\frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu;\ \frac{3}{2}+\nu;\ \frac{z+(z^2-1)^{1/2}}{2(z^2-1)^{1/2}}\right) + ie^{-i\mu\pi}[z-(z^2-1)^{1/2}]^{\nu+1/2}F\left(\frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu;\ \frac{3}{2}+\nu;\ \frac{-z+(z^2-1)^{1/2}}{2(z^2-1)^{1/2}}\right)\right\}.$$

8.10.5. $$Q_\nu^\mu(z) = e^{i\mu\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}(z^2-1)^{-1/4}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)} \times [z-(z^2-1)^{1/2}]^{\nu+1/2}F\left(\frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu;\ \frac{3}{2}+\nu;\ \frac{-z+(z^2-1)^{1/2}}{2(z^2-1)^{1/2}}\right).$$

8.10.6. $$Q_{-\nu}^{\mu}(z) = \frac{e^{i\mu\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}(z^2-1)^{-1/4}}{\sin[\pi(\mu-\nu)]}\,\frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(1/2-\mu)} \times \left\{\cos\nu\pi\,[z+(z^2-1)^{1/2}]^{\nu-1/2}F\left(\frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu;\ \frac{1}{2}+\nu;\ \frac{z+(z^2-1)^{1/2}}{2(z^2-1)^{1/2}}\right) + ie^{i\nu\pi}\cos\mu\pi[z-(z^2-1)^{1/2}]^{\nu-1/2} \times F\left(\frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu;\ \frac{1}{2}+\nu;\ \frac{-z+(z^2-1)^{1/2}}{2(z^2-1)^{1/2}}\right)\right\}.$$

Аналогичное асимптотическое разложение для $P_{-\nu}^{\mu}(z)$ может быть выведено из 8.10.4 с учетом 8.2.1.

8.10.7. $$P_\nu^\mu(\cos\theta) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)} \times \left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)^{-1/2}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2}\right] + O(\nu^{-1}).$$

8.10.8. $$Q_\nu^\mu(\cos\theta) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\left(\frac{\pi}{2\sin\theta}\right)^{1/2} \times \cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2}\right] + O(\nu^{-1})$$

$$(\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon,\ \varepsilon > 0).$$

Другие асимптотические разложения см. в [8.7], [8.9].

8.11. ФУНКЦИИ ТОРА (ИЛИ КОЛЬЦА)

Ниже даются некоторые специальные свойства, присущие только данному классу функций; другие свойства и представления вытекают из материала, изложенного в предыдущих разделах.

8.11.1. $P^{\mu}_{\nu-1/2}(\operatorname{ch}\eta)=[\Gamma(1-\mu)]^{-1}2^{2\mu}(1-e^{-2\eta})^{-\mu}\times$

$\times\, e^{-(\nu+1/2)\eta}\,F\left(\frac{1}{2}-\mu,\ \frac{1}{2}+\nu-\mu;\ 1-2\mu;\ 1-e^{-2\eta}\right).$

8.11.2. $P^{m}_{n-1/2}(\operatorname{ch}\eta)=$

$$=\frac{\Gamma(n+m+1/2)\,(\operatorname{sh}\eta)^m}{\Gamma(n-m+1/2)\,2^m\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(m+{}^1/_2\right)}\times\int_0^{\pi}\frac{(\sin\varphi)^{2m}\,d\varphi}{(\operatorname{ch}\eta+\cos\varphi\operatorname{sh}\eta)^{n+m+1/2}}.$$

8.11.3. $Q^{\mu}_{\nu-1/2}(\operatorname{ch}\eta)=[\Gamma(1+\nu)]^{-1}\sqrt{\pi}\,e^{i\mu\pi}\times$

$$\times\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+\mu\right)(1-e^{-2\eta})^{\mu}\,e^{-(\nu+1/2)\eta}\,F\left(\frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}+\nu+\mu;\ 1+\nu;\ e^{-2\eta}\right).$$

8.11.4. $Q^{m}_{n-1/2}(\operatorname{ch}\eta)=$

$$=\frac{(-1)^m\,\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n-m+1/2)}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}mt\,dt}{(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{ch}t\operatorname{sh}\eta)^{n+1/2}}\qquad(n>m).$$

8.12. ФУНКЦИИ КОНУСА $(P^{\mu}_{-1/2+i\lambda}(\cos\theta),\ Q^{\mu}_{-1/2+i\lambda}(\cos\theta))$.

Здесь даются некоторые специфические свойства этих функций. Другие формулы получаются из изложенного в предыдущих разделах при $\nu=-\frac{1}{2}+i\lambda$ (λ—вещественный параметр) и $z=\cos\theta$.

8.12.1. $$P_{-1/2+i\lambda}(\cos\theta)=1+\frac{4\lambda^2+1^2}{2^2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{(4\lambda^2+1^2)(4\lambda^2+3^2)}{2^2 4^2}\sin^4\frac{\theta}{2}+\ldots\quad(0\leqslant\theta<\pi).$$

8.12.2. $P_{-1/2+i\lambda}(\cos\theta)=P_{-1/2-i\lambda}(\cos\theta).$

8.12.3. $$P_{-1/2+i\lambda}(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\operatorname{ch}\lambda t\,dt}{\sqrt{2(\cos t-\cos\theta)}}.$$

8.12.4. $Q_{-1/2\mp i\lambda}(\cos\theta)=$

$$=\pm\, i\operatorname{sh}\lambda\pi\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda t\,dt}{\sqrt{2(\operatorname{ch}t+\cos\theta)}}+\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\lambda t\,dt}{\sqrt{2(\operatorname{ch}t-\cos\theta)}}.$$

8.12.5. $P_{-1/2+i\lambda}(-\cos\theta)=$

$$=\frac{\operatorname{ch}\lambda\pi}{\pi}\,[Q_{-1/2+i\lambda}(\cos\theta)+Q_{-1/2-i\lambda}(\cos\theta)].$$

8.13. СВЯЗЬ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ

(см. гл. 17)

(Re $\eta>0$)

8.13.1. $P_{-1/2}(z)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{z+1}}\,K\left(\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right).$

8.13.2. $P_{-1/2}(\operatorname{ch}\eta)=\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}\frac{\eta}{2}\right]^{-1}K\left(\operatorname{th}\frac{\eta}{2}\right).$

8.13.3. $Q_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{z+1}}\,K\left(\sqrt{\frac{2}{z+1}}\right).$

8.13.4. $Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\eta)=2e^{-\eta/2}K(e^{-\eta}).$

8.13.5. $P_{1/2}(z)=\frac{2}{\pi}(z+\sqrt{z^2-1})^{1/2}E\left(\sqrt{\frac{2(z^2-1)^{1/2}}{z+(z^2-1)^{1/2}}}\right).$

8.13.6. $P_{1/2}(\operatorname{ch}\eta)=\frac{2}{\pi}\,e^{\eta/2}\,E(\sqrt{1-e^{-2\eta}}).$

8.13.7. $Q_{1/2}(z)=z\sqrt{\frac{2}{z+1}}\,K\left(\sqrt{\frac{2}{z+1}}\right)-[2(z+1)]^{1/2}E\left(\sqrt{\frac{2}{z+1}}\right).$

$-1<x<1$

8.13.8. $P_{-1/2}(x)=\frac{2}{\pi}K\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right).$

8.13.9. $P_{-1/2}(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}K\left(\sin\frac{\theta}{2}\right).$

8.13.10. $Q_{-1/2}(x)=K\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right).$

8.13.11. $P_{1/2}(x)=\frac{2}{\pi}\left[2E\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)-K\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)\right].$

8.13.12. $Q_{1/2}(x)=K\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)-2E\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right).$

8.14. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА

8.14.1. $$\int_1^\infty P_\nu(x)\, Q_\rho(x)\, dx = [(\rho-\nu)(\rho+\nu+1)]^{-1} \quad (\operatorname{Re}\rho > \operatorname{Re}\nu > 0).$$

8.14.2. $$\int_1^\infty Q_\nu(x)\, Q_\rho(x)\, dx = [(\rho-\nu)(\rho+\nu+1)]^{-1}[\psi(\rho+1)-\psi(\nu+1)]$$ $$(\operatorname{Re}(\rho+\nu) > -1,\ \rho+\nu+1 \neq 0;\ \nu, \rho \neq -1, -2, -3, \ldots)$$

8.14.3. $$\int_1^\infty [Q_\nu(x)]^2 dx = (2\nu+1)^{-1}\psi'(\nu+1) \quad \left(\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right).$$

8.14.4. $$\int_{-1}^1 P_\nu(x)\, P_\rho(x)\, dx = \frac{2}{\pi^2}[(\rho-\nu)(\rho+\nu+1)]^{-1} \times$$ $$\times \{2\sin\pi\nu\sin\pi\rho[\psi(\nu+1)-\psi(\rho+1)] + \pi\sin(\pi\rho-\pi\nu)\} \quad (\rho+\nu+1 \neq 0).$$

8.14.5. $$\int_{-1}^1 [P_\nu(x)]^2 dx = \frac{\pi^2 - 2(\sin\pi\nu)^2\psi'(\nu+1)}{\pi^2(\nu+1/2)}.$$

8.14.6. $$\int_{-1}^1 Q_\nu(x) Q_\rho(x) dx = [(\rho-\nu)(\rho+\nu+1)]^{-1} \times$$ $$\times \left\{[\psi(\nu+1)-\psi(\rho+1)][1+\cos\rho\pi\cos\nu\pi] - \frac{1}{2}\pi\sin(\nu\pi-\rho\pi)\right\}$$ $$(\rho+\nu+1 \neq 0;\ \nu, \rho \neq -1, -2, -3, \ldots).$$

8.14.7. $$\int_{-1}^1 [Q_\nu(x)]^2 dx = (2\nu+1)^{-1} \times \left\{\frac{1}{2}\pi^2 - \psi'(\nu+1)[1+(\cos\nu\pi)^2]\right\}$$ $$(\nu \neq -1, -2, -3, \ldots)$$

8.14.8. $$\int_{-1}^1 P_\nu(x) Q_\rho(x)\, dx = [(\nu-\rho)(\rho+\nu+1)]^{-1} \times$$ $$\times \left\{1 - \cos(\rho\pi-\nu\pi) - \frac{2}{\pi}\sin\pi\nu\cos\pi\nu \times [\psi(\nu+1)-\psi(\rho+1)]\right\} \quad (\operatorname{Re}\nu > 0,\ \operatorname{Re}\rho > 0,\ \rho \neq \nu).$$

8.14.9. $$\int_{-1}^1 P_\nu(x)\, Q_\nu(x)\, dx = -\frac{1}{\pi}(2\nu+1)^{-1}\sin 2\nu\pi\psi'(\nu+1) \quad (\operatorname{Re}\nu > 0).$$

Для целых положительных m, n, l верны следующие формулы:

8.14.10. $$\int_{-1}^1 Q_n^m(x)\, P_l^m(x)\, dx = (-1)^m \frac{1-(-1)^{l+n}}{(l-n)(l+n+1)}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

8.14.11. $$\int_{-1}^1 P_n^m(x)\, P_l^m(x)\, dx = 0 \quad (l \neq n).$$

8.14.12. $$\int_{-1}^1 P_n^m(x)\, P_n^l(x)(1-x^2)^{-1} dx = 0 \quad (l \neq m).$$

8.14.13. $$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}(n+m)!/(n-m)!.$$

8.14.14. $$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1}[P_n^m(x)]^2 dx = (n+m)!/m(n-m)!.$$

8.14.15. $$\int_0^1 P_\nu(x)\, x^\rho\, dx = \frac{\pi^{1/2}2^{-\rho-1}\Gamma(1+\rho)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2}\right)} \quad (\operatorname{Re}\rho > -1).$$

8.14.16. $$\int_0^\pi (\sin t)^{\alpha-1} P_\nu^{-\mu}(\cos t)\, dt = \frac{2^{-\mu}\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1\right)} \times$$ $$\times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)} \quad (\operatorname{Re}(\alpha \pm \mu) > 0).$$

8.14.17. $$P_\nu^{-m}(z) = (z^2-1)^{-m/2}\int_1^z \ldots \int_1^z P_\nu(z)(dz)^m.$$

8.14.18. $$Q_\nu^{-m}(z) = (-1)^m(z^2-1)^{-m/2}\int_z^\infty \ldots \int_z^\infty Q_\nu(z)(dz)^m.$$

Другие интегралы см. в [8.2], [8.4], [8.22] и в гл. 22.

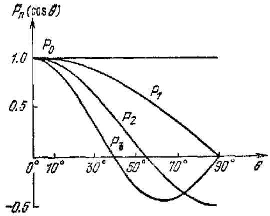


Рис. 8.1. $P_n(\cos\theta)$; $n = 0(1)3$.

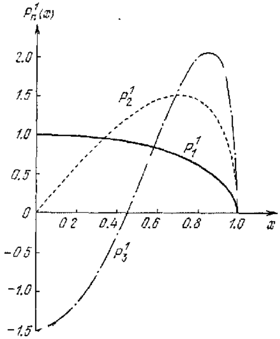


Рис. 8.2. $P_n^1(x)$; $n = 1(1)3$, $x \leqslant 1$.

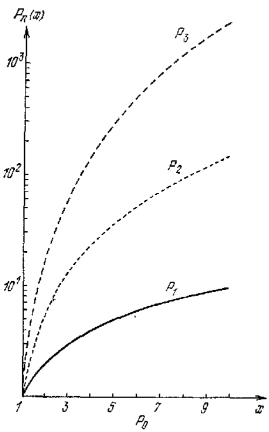


Рис. 8.3. $P_n(x)$; $n = 0(1)3$, $x \geqslant 1$.

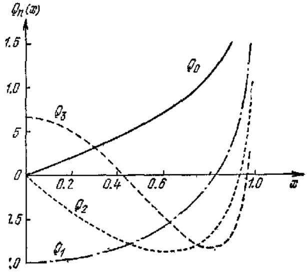


Рис. 8.4. $Q_n(x)$; $n = 0(1)3$, $x < 1$.

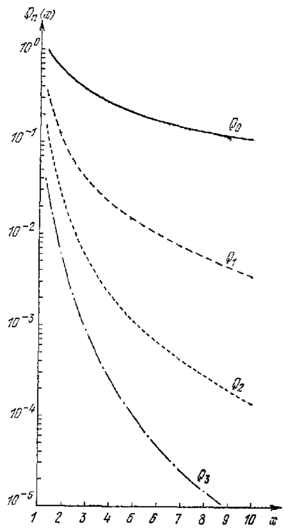


Рис. 8.5. $Q_n(x)$; $n = 0(1)3$, $x > 1$.

ПРИМЕРЫ

Вычисление $P_n(x)$

Для всех значений x (кроме нуля) потеря значащих цифр при использовании рекуррентного соотношения 8.5.3 для возрастающих значений n — небольшая.

Пример 1. Вычислить $P_n(x)$ для значений

$$x = 0.31415\,92654 \text{ и } x = 2.6 \text{ при } n = 2(1)8.$$

n	$P_n(0.31415\,92654)$	$P_n(2.6)$
0	1	1
1	0.31415 92654	2.6
2	−0.35195 59340	9.64
3	−0.39372 32064	40.04
4	0.04750 63122	174.952
5	0.34184 27517	786.74336
6	0.15729 86975	3604.350016
7	−0.20123 39354	16729.51005
8	−0.25617 29328	78402.55522

Из табл. 22.9 получим с десятью значащими цифрами следующие значения:

$$P_8(0.31415\,92654) = -0.25617\,2933,$$

$$P_8(2.6) = 78402.55526.$$

Вычисление $Q_n(x)$

Для $x < 1$ применение рекуррентной формулы 8.5.3 для возрастающих значений n дает небольшую потерю значащих цифр. Однако для $x > 1$ рекуррентное соотношение 8.5.3 может быть использовано только для убывающих значений n. При этом начальные значения получаются из выражений $Q_n(x)$ через гипергеометрические функции.

Пример 2. Вычислить $Q_n(x)$ для $x = 0.31415\,92654$ и $n = 0(1)4$.

Воспользуемся формулами 8.4.2 и 8.4.4 для получения исходных значений $Q_0(x)$ и $Q_1(x)$, затем применим 8.5.3:

n	Q (0.31415 92654)
0	0.32515 34813
1	−0.89785 00212
2	−0.58567 85953
3	0.29190 60854
4	0.59974 26989

Используя результаты примера 1 и формулу 8.6.19, найдем

$$Q_4(x) = \frac{1}{2} P_4(x) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - W_3(x),$$

где $W_3 - \frac{7}{4} P_3 + \frac{1}{3} P_1$, откуда

$$Q_4(0.31415\,92654) = 0.59974\,26989.$$

Пример 3. Вычислить $Q_5(x)$ для $x = 2.6$.

Чтобы получить $F\left(\frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right)$ с девятью значащими цифрами, необходимо взять 10 членов гипергеометрического ряда, входящего в формулу 8.1.3; имеем $Q_5(2.6) = 4.8182\,4468 \times 10^{-5}$. Используя 8.5.3 для возрастающих значений n, получим

n	$Q_n(2.6)$
0	0.40546 51081
1	0.05420 928
2	0.00868 364
3	0.00148 95
4	0.00026 49
5	0.00004 81

Здесь Q_0 и Q_1 получены из 8.4.2 и 8.4.4.

Вычисление $P_{\pm 1/2}(x)$, $Q_{\pm 1/2}(x)$

Для всех значений x $P_{\pm 1/2}(x)$ и $Q_{\pm 1/2}(x)$ наиболее просто вычисляются с помощью формул 8.13.

Пример 4. Вычислить $Q_{-1/2}(x)$ для $x = 2.6$. Используя 8.13.3 и выполняя интерполяцию в табл. 17.1, находим

$$Q_{-1/2}(2.6) = \sqrt{\frac{2}{x+1}}\, K\left(\sqrt{\frac{2}{x+1}}\right) =$$

$$= (0.74535\,59925)\,(1.90424\,1417) = 1.41933\,7751.$$

Чтобы получить такую же точность по формуле 8.1.3, необходимо использовать по крайней мере 9 членов разложения

$$F\left(\frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right).$$

Таблица 8.1. Функции Лежандра первого рода $P_n(x)$

$P_0(x)=1$ $\qquad$ $P_1(x)=x$

x	$\arccos x$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_9(x)$	$P_{10}(x)$
0.00	90.00000 00	-0.50000	0.00000 00	0.00000 000	-0.24609 37
0.01	89.42703 26	-0.49985	-0.01499 75	0.02457 330	-0.24474 14
0.02	88.85400 80	-0.49940	-0.02998 00	0.04893 045	-0.24069 84
0.03	88.28086 87	-0.49865	-0.04493 25	0.07285 701	-0.23400 69
0.04	87.70755 72	-0.49760	-0.05984 00	0.09614 188	-0.22473 64
0.05	87.13401 60	-0.49625	-0.07468 75	0.11857 899	-0.21298 35
0.06	86.56018 72	-0.49460	-0.08946 00	0.13996 890	-0.19887 11
0.07	85.98601 28	-0.49265	-0.10414 25	0.16012 040	-0.18254 68
0.08	85.41143 43	-0.49040	-0.11872 00	0.17885 206	-0.16418 20
0.09	84.83639 29	-0.48785	-0.13317 75	0.19599 366	-0.14397 02
0.10	84.26082 95	-0.48500	-0.14750 00	0.21138 764	-0.12212 50
0.11	83.68468 44	-0.48185	-0.16167 25	0.22489 042	-0.09887 86
0.12	83.10789 74	-0.47840	-0.17568 00	0.23637 363	-0.07447 93
0.13	82.53040 77	-0.47465	-0.18950 75	0.24572 526	-0.04918 90
0.14	81.95215 37	-0.47060	-0.20314 00	0.25285 070	-0.02328 12
0.15	81.37307 34	-0.46625	-0.21656 25	0.25767 367	+0.00296 18
0.16	80.79310 38	-0.46160	-0.22976 00	0.26013 706	0.02925 20
0.17	80.21218 10	-0.45665	-0.24271 75	0.26020 358	0.05529 81
0.18	79.63024 02	-0.45140	-0.25542 00	0.25785 632	0.08080 85
0.19	79.04721 58	-0.44585	-0.26785 25	0.25309 918	0.10549 42
0.20	78.46304 10	-0.44000	-0.28000 00	0.24595 712	0.12907 20
0.21	77.87764 77	-0.43385	-0.29184 75	0.23647 631	0.15126 74
0.22	77.29096 70	-0.42740	-0.30338 00	0.22472 407	0.17181 75
0.23	76.70292 82	-0.42065	-0.31458 25	0.21078 870	0.19047 36
0.24	76.11345 96	-0.41360	-0.32544 00	0.19477 914	0.20700 49
0.25	75.52248 78	-0.40625	-0.33593 75	0.17682 442	0.22120 02
0.26	74.92993 79	-0.39860	-0.34606 00	0.15707 305	0.23287 14
0.27	74.33573 31	-0.39065	-0.35579 25	0.13569 215	0.24185 52
0.28	73.73979 53	-0.38240	-0.36512 00	0.11286 642	0.24801 62
0.29	73.14204 40	-0.37385	-0.37402 75	0.08879 707	0.25124 81
0.30	72.54239 69	-0.36500	-0.38250 00	0.06370 038	0.25147 63
0.31	71.94076 95	-0.35585	-0.39052 25	0.03780 634	0.24865 91
0.32	71.33707 51	-0.34640	-0.39808 00	+0.01135 691	0.24278 89
0.33	70.73122 45	-0.33665	-0.40515 75	-0.01539 566	0.23389 37
0.34	70.12312 59	-0.32660	-0.41174 00	-0.04219 085	0.22203 73
0.35	69.51268 49	-0.31625	-0.41781 25	-0.06876 185	0.20732 00
0.36	68.89980 39	-0.30560	-0.42336 00	-0.0948[illegible] 780	0.18987 83
0.37	68.28438 27	-0.29465	-0.42836 75	-0.12014 608	0.16988 48
0.38	67.66631 73	-0.28340	-0.43282 00	-0.14441 472	0.14754 72
0.39	67.04550 06	-0.27185	-0.43670 25	-0.16737 489	0.12310 73
0.40	66.42182 15	-0.26000	-0.44000 00	-0.18876 356	0.09683 91
0.41	65.79516 52	-0.24785	-0.44269 75	-0.20832 609	0.06904 71
0.42	65.16541 25	-0.23540	-0.44478 00	-0.22581 900	0.04006 39
0.43	64.53243 99	-0.22265	-0.44623 25	-0.24101 269	+0.01024 69
0.44	63.89611 88	-0.20960	-0.44704 00	-0.25369 426	-0.02002 45
0.45	63.25631 61	-0.19625	-0.44718 75	-0.26367 022	-0.05035 30
0.46	62.61289 25	-0.18260	-0.44666 00	-0.27076 932	-0.08032 72
0.47	61.96570 35	-0.16865	-0.44544 25	-0.27484 521	-0.10952 64
0.48	61.31459 80	-0.15440	-0.44352 00	-0.27577 908	-0.13752 51
0.49	60.65941 84	-0.13985	-0.44087 75	-0.27348 225	-0.16389 87
0.50	60.00000 00	-0.12500	-0.43750 00	-0.26789 856	-0.18822 86
	$\left[{(-4)5 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)4 \atop 3}\right]$	$\left[{(-5)9 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)4 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)4 \atop 6}\right]$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(-1+3x^2)$ $\qquad$ $P_3(x)=\frac{x}{2}(-3+5x^2)$

$$P_9(x)=\frac{x}{128}(315-4620x^2+18018x^4-25740x^6+12155x^8)$$

$$P_{10}(x)=\frac{1}{256}(-63+3465x^2-30030x^4+90090x^6-109395x^8+46189x^{10})$$

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

Коэффициенты других многочленов см. в гл. 22.

Таблица 8.1. Функции Лежандра первого рода $P_n(x)$

$$P_0(x)=1 \qquad P_1(x)=x$$

x	$\arccos x$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_9(x)$	$P_{10}(x)$
0.50	60.00000 00	−0.12500	−0.43750 00	−0.26789 856	−0.18822 86
0.51	59.33617 03	−0.10985	−0.43337 25	−0.25900 667	−0.21010 83
0.52	58.66774 85	−0.09440	−0.42848 00	−0.24682 215	−0.22914 92
0.53	57.99454 51	−0.07865	−0.42280 75	−0.23139 939	−0.24498 73
0.54	57.31636 11	−0.06260	−0.41634 00	−0.21283 321	−0.25728 92
0.55	56.63298 70	−0.04625	−0.40906 25	−0.19126 025	−0.26575 85
0.56	55.94420 22	−0.02960	−0.40096 00	−0.16686 000	−0.27014 28
0.57	55.24977 42	−0.01265	−0.39201 75	−0.13985 552	−0.27023 97
0.58	54.54945 74	+0.00460	−0.38222 00	−0.11051 366	−0.26590 30
0.59	53.84299 18	0.02215	−0.37155 25	−0.07914 497	−0.25704 92
0.60	53.13010 24	0.04000	−0.36000 00	−0.04610 304	−0.24366 27
0.61	52.41049 70	0.05815	−0.34754 75	−0.01178 332	−0.22580 16
0.62	51.68386 55	0.07660	−0.33418 00	+0.02337 862	−0.20360 19
0.63	50.94987 75	0.09535	−0.31988 25	0.05890 951	−0.17728 16
0.64	50.20818 05	0.11440	−0.30464 00	0.09430 141	−0.14714 41
0.65	49.45839 81	0.13375	−0.28843 75	0.12901 554	−0.11358 05
0.66	48.70012 72	0.15340	−0.27126 00	0.16248 693	−0.07707 01
0.67	47.93293 52	0.17335	−0.25309 25	0.19412 981	−0.03818 08
0.68	47.15635 69	0.19360	−0.23392 00	0.22334 410	+0.00243 30
0.69	46.36989 11	0.21415	−0.21372 75	0.24952 270	0.04403 37
0.70	45.57299 60	0.23500	−0.19250 00	0.27205 993	0.08580 58
0.71	44.76508 47	0.25615	−0.17022 25	0.29036 111	0.12686 31
0.72	43.94551 96	0.27760	−0.14688 00	0.30385 323	0.16625 89
0.73	43.11360 59	0.29935	−0.12245 75	0.31199 698	0.20299 76
0.74	42.26858 44	0.32140	−0.09694 00	0.31430 004	0.23605 08
0.75	41.40962 21	0.34375	−0.07031 25	0.31033 185	0.26437 45
0.76	40.53580 21	0.36640	−0.04256 00	0.29973 981	0.28693 19
0.77	39.64611 11	0.38935	−0.01366 75	0.28226 712	0.30271 79
0.78	38.73942 46	0.41260	+0.01638 00	0.25777 224	0.31078 93
0.79	37.81448 85	0.43615	0.04759 75	0.22625 012	0.31029 79
0.80	36.86989 76	0.46000	0.08000 00	0.18785 528	0.30052 98
0.81	35.90406 86	0.48415	0.11360 25	0.14292 678	0.28094 87
0.82	34.91520 62	0.50860	0.14842 00	0.09201 529	0.25124 52
0.83	33.90126 20	0.53335	0.18446 75	+0.03591 226	0.21139 19
0.84	32.85988 04	0.55840	0.22176 00	−0.02431 874	0.16170 50
0.85	31.78833 06	0.58375	0.26031 25	−0.08730 820	0.10291 23
0.86	30.68341 71	0.60940	0.30014 00	−0.15134 456	+0.03622 91
0.87	29.54136 05	0.63535	0.34125 75	−0.21433 544	−0.03655 86
0.88	28.35763 66	0.66160	0.38368 00	−0.27376 627	−0.11300 29
0.89	27.12675 31	0.68815	0.42742 25	−0.32665 610	−0.18989 29
0.90	25.84193 28	0.71500	0.47250 00	−0.36951 049	−0.26314 56
0.91	24.49464 85	0.74215	0.51892 75	−0.39827 146	−0.32768 58
0.92	23.07391 81	0.76960	0.56672 00	−0.40826 421	−0.37731 58
0.93	21.56518 50	0.79735	0.61589 25	−0.39414 060	−0.40457 43
0.94	19.94844 36	0.82540	0.66646 00	−0.34981 919	−0.40058 29
0.95	18.19487 23	0.85375	0.71843 75	−0.26842 182	−0.35488 03
0.96	16.26020 47	0.88240	0.77184 00	−0.14220 642	−0.25524 34
0.97	14.06986 77	0.91135	0.82668 25	+0.03750 397	−0.08749 40
0.98	11.47834 09	0.94060	0.88298 00	0.28039 609	+0.16470 81
0.99	8.10961 44	0.97015	0.94074 75	0.59724 553	0.52008 90
1.00	0.00000 00	1.00000	1.00000 00	1.00000 000	1.00000 00
		$\left[\begin{matrix}(-5)4\\3\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)2\\4\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-2)1\\7\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-2)2\\7\end{matrix}\right]$

$$P_2(x)=\tfrac{1}{2}(-1+3x^2) \qquad P_3(x)=\frac{x}{2}(-3+5x^2)$$

$$P_9(x)=\frac{x}{512}(1260-18480x^2+72072x^4-102960x^6+48620x^8)$$

$$P_{10}(x)=\frac{1}{1024}(-252+13860x^2-120120x^4+360360x^6-437580x^8+184756x^{10})$$

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

Коэффициенты других многочленов см. в гл. 22.

Таблица 8.2. Производные функций Лежандра первого рода $P'_n(x)$

$P'_1(x)=1 \qquad P'_2(x)=3x$

x	$P'_3(x)$	$P'_4(x)$	$P'_9(x)$	$P'_{10}(x)$
0.00	-1.50000	0.00000 00	2.46093 75	0.00000 00
0.01	-1.49925	-0.07498 25	2.45011 64	0.27023 41
0.02	-1.49700	-0.14986 00	2.41773 75	0.53765 93
0.03	-1.49325	-0.22452 75	2.36405 34	0.79949 17
0.04	-1.48800	-0.29888 00	2.28948 35	1.05299 82
0.05	-1.48125	-0.37281 25	2.19461 13	1.29552 05
0.06	-1.47300	-0.44622 00	2.08018 11	1.52449 98
0.07	-1.46325	-0.51899 75	1.94709 32	1.73750 05
0.08	-1.45200	-0.59104 00	1.79639 87	1.93223 25
0.09	-1.43925	-0.66224 25	1.62929 31	2.10657 29
0.10	-1.42500	-0.73250 00	1.44710 87	2.25858 73
0.11	-1.40925	-0.80170 75	1.25130 64	2.38654 80
0.12	-1.39200	-0.86976 00	1.04346 68	2.48895 24
0.13	-1.37325	-0.93655 25	0.82528 00	2.56453 90
0.14	-1.35300	-1.00198 00	0.59853 47	2.61230 18
0.15	-1.33125	-1.06593 75	0.36510 73	2.63150 28
0.16	-1.30800	-1.12832 00	+0.12694 88	2.62168 25
0.17	-1.28325	-1.18902 25	-0.11392 76	2.58266 81
0.18	-1.25700	-1.24794 00	-0.35546 01	2.51458 04
0.19	-1.22925	-1.30496 75	-0.59555 27	2.41783 68
0.20	-1.20000	-1.36000 00	-0.83208 96	2.29315 33
0.21	-1.16925	-1.41293 25	-1.06295 03	2.14154 35
0.22	-1.13700	-1.46366 00	-1.28602 54	1.96431 51
0.23	-1.10325	-1.51207 75	-1.49923 18	1.76306 37
0.24	-1.06800	-1.55808 00	-1.70052 94	1.53966 43
0.25	-1.03125	-1.60156 25	-1.88793 72	1.29625 99
0.26	-0.99300	-1.64242 00	-2.05954 92	1.03524 77
0.27	-0.95325	-1.68054 75	-2.21355 15	0.75926 26
0.28	-0.91200	-1.71584 00	-2.34823 78	0.471.5 77
0.29	-0.86925	-1.74819 25	-2.46202 63	+0.17358 30
0.30	-0.82500	-1.77750 00	-2.55347 51	-0.12903 87
0.31	-0.77925	-1.80365 75	-2.62129 80	-0.43453 90
0.32	-0.73200	-1.82656 00	-2.66437 95	-0.73903 23
0.33	-0.68325	-1.84610 25	-2.68178 96	-1.03894 72
0.34	-0.63300	-1.86218 00	-2.67279 74	-1.33065 96
0.35	-0.58125	-1.87468 75	-2.63688 47	-1.61052 81
0.36	-0.52800	-1.88352 00	-2.57375 82	-1.87493 10
0.37	-0.47325	-1.88857 25	-2.48336 07	-2.12030 43
0.38	-0.41700	-1.88974 00	-2.36588 14	-2.34318 21
0.39	-0.35925	-1.88691 75	-2.22176 52	-2.54023 74
0.40	-0.30000	-1.88000 00	-2.05172 01	-2.70832 36
0.41	-0.23925	-1.86888 25	-1.85672 35	-2.84451 75
0.42	-0.17700	-1.85346 00	-1.63802 69	-2.94616 13
0.43	-0.11325	-1.83362 75	-1.39715 86	-3.01090 51
0.44	-0.04800	-1.80928 00	-1.13592 50	-3.03674 96
0.45	+0.01875	-1.78031 25	-0.85640 91	-3.02208 63
0.46	0.08700	-1.74662 00	-0.56096 76	-2.96573 83
0.47	0.15675	-1.70809 75	-0.25222 53	-2.86699 80
0.48	0.22800	-1.66464 00	+0.06693 30	-2.72566 30
0.49	0.30075	-1.61614 25	0.39337 29	-2.54206 98
0.50	0.37500	-1.56250 00	0.72372 44	-2.31712 34
	$\left[{(-4)2 \atop 3}\right]$	$\left[{(-4)6 \atop 4}\right]$	$\left[{(-3)3 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)5 \atop 6}\right]$

$P'_3(x)=\frac{1}{2}(-3+15x^2) \qquad P'_4(x)=\frac{x}{8}(-60+140x^2)$

$$P'_9(x)=\frac{1}{512}(1260-55440x^2+360360x^4\quad 720720x^6+437580x^8)$$

$$P'_{10}(x)=\frac{x}{1024}(27720-480480x^2+2162160x^4-3500640x^6+1847560x^8)$$

$$P'_n(x)=\frac{n+1}{1-x^2}[xP_n(x)-P_{n+1}(x)]$$

Таблица 8.2. Производные функций Лежандра первого рода $P_n'(x)$

$P_1'(x)=1$ $\qquad$ $P_2'(x)=3x$

x	$P_3'(x)$	$P_4'(x)$	$P_9'(x)$	$P_{10}'(x)$
0.50	0.37500	− 1.56250 00	0.72372 44	− 2.31712 34
0.51	0.45075	− 1.50360 75	1.05439 75	− 2.05232 40
0.52	0.52800	− 1.43936 00	1.38160 24	− 1.74978 82
0.53	0.60675	− 1.36965 25	1.70137 21	− 1.41226 67
0.54	0.68700	− 1.29438 00	2.00958 86	− 1.04315 43
0.55	0.76875	− 1.21343 75	2.30201 29	− 0.64649 54
0.56	0.85200	− 1.12672 00	2.57431 87	− 0.22698 16
0.57	0.93675	− 1.03412 25	2.82213 05	+ 0.21005 92
0.58	1.02300	− 0.93554 00	3.04106 49	0.65868 10
0.59	1.11075	− 0.83086 75	3.22677 77	1.11234 92
0.60	1.20000	− 0.72000 00	3.37501 44	1.56397 82
0.61	1.29075	− 0.60283 25	3.48166 60	2.00598 31
0.62	1.38300	− 0.47926 00	3.54283 00	2.43034 08
0.63	1.47675	− 0.34917 75	3.55487 57	2.82266 68
0.64	1.57200	− 0.21248 00	3.51451 63	3.19230 45
0.65	1.66875	− 0.06906 25	3.41888 50	3.51243 07
0.66	1.76700	+ 0.08118 00	3.26561 84	3.78017 74
0.67	1.86675	0.23835 25	3.05294 51	3.98677 13
0.68	1.96800	0.40256 00	2.77978 03	4.12369 16
0.69	2.07075	0.57390 75	2.44582 82	4.18284 84
0.70	2.17500	0.75250 00	2.05168 93	4.15678 18
0.71	2.28075	0.93844 25	1.59897 66	4.03888 45
0.72	2.38800	1.13184 00	1.09043 73	3.82364 72
0.73	2.49675	1.33279 75	+ 0.53008 28	3.50693 03
0.74	2.60700	1.54142 00	− 0.07667 36	3.08626 20
0.75	2.71875	1.75781 25	− 0.72287 14	2.56116 49
0.76	2.83200	1.98208 00	− 1.39984 93	1.93351 26
0.77	2.94675	2.21432 75	− 2.09708 32	1.20791 71
0.78	3.06300	2.45466 00	− 2.80201 52	+ 0.39215 05
0.79	3.18075	2.70318 25	− 3.49987 45	− 0.50239 96
0.80	3.30000	2.96000 00	− 4.17348 81	− 1.46023 77
0.81	3.42075	3.22521 75	− 4.80308 26	− 2.46122 91
0.82	3.54300	3.49894 00	− 5.36607 64	− 3.48002 97
0.83	3.66675	3.78127 25	− 5.83686 10	− 4.48547 21
0.84	3.79200	4.07232 00	− 6.18657 35	− 5.43990 91
0.85	3.91875	4.37218 75	− 6.38285 68	− 6.29851 03
0.86	4.04700	4.68098 00	− 6.38961 06	− 7.00851 07
0.87	4.17675	4.99880 25	− 6.16672 97	− 7.50840 93
0.88	4.30800	5.32576 00	− 5.66983 23	− 7.72711 51
0.89	4.44075	5.66195 75	− 4.84997 54	− 7.58303 90
0.90	4.57500	6.00750 00	− 3.65335 89	− 6.98312 79
0.91	4.71075	6.36249 25	− 2.02101 73	− 5.82184 03
0.92	4.84800	6.72704 00	+ 0.11150 20	− 3.98006 04
0.93	4.98675	7.10124 75	2.81447 18	− 1.32394 73
0.94	5.12700	7.48522 00	6.16433 35	+ 2.27628 14
0.95	5.26875	7.87906 25	10.24405 70	7.04763 58
0.96	5.41200	8.28288 00	15.14351 59	13.11571 11
0.97	5.55675	8.69677 75	20.95987 66	20.70612 01
0.98	5.70300	9.12086 00	27.79800 16	30.04600 25
0.99	5.85075	9.55523 25	35.77086 77	41.38561 43
1.00	6.00000	10.00000 00	45.00000 00	55.00000 00
	$\left[{(-4)2 \atop 3}\right]$	$\left[{(-3)1 \atop 4}\right]$	$\left[{(-1)2 \atop 7}\right]$	$\left[{(-1)3 \atop 7}\right]$

$$P_3'(x)=\tfrac{1}{2}(-3+15x^2) \qquad P_4'(x)=\frac{x}{8}(-60+140x^2)$$

$$P_9'(x)=\frac{1}{512}(1260-55440x^2+360360x^4-720720x^6+437580x^8)$$

$$P_{10}'(x)=\frac{x}{1024}(27720-480480x^2+2162160x^4-3500640x^6+1847560x^8)$$

$$P_n'(x)=\frac{n+1}{1-x^2}\left[xP_n(x)-P_{n+1}(x)\right]$$

Таблица 8.3. Функции Лежандра второго рода $Q_n(x)$

x	$Q_0(x)$	$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$	$Q_9(x)$	$Q_{10}(x)$
0.00	0.00000 000	−1.00000 000	0.00000 000	0.66666 667	−0.40634 921	0.00000 000
0.01	0.01000 033	−0.99990 000	−0.01999 867	0.66626 669	−0.40452 191	−0.04056 181
0.02	0.02000 267	−0.99959 995	−0.03998 933	0.66506 699	−0.39905 538	−0.08068 584
0.03	0.03000 900	−0.99909 973	−0.05996 399	0.66306 829	−0.38999 553	−0.11993 860
0.04	0.04002 135	−0.99839 915	−0.07991 463	0.66027 179	−0.37741 852	−0.15789 513
0.05	0.05004 173	−0.99749 791	−0.09983 321	0.65667 917	−0.36143 026	−0.19414 321
0.06	0.06007 216	−0.99639 567	−0.11971 169	0.65229 261	−0.34216 562	−0.22828 745
0.07	0.07011 467	−0.99509 197	−0.13954 199	0.64711 475	−0.31978 750	−0.25995 321
0.08	0.08017 133	−0.99358 629	−0.15931 602	0.64114 873	−0.29448 565	−0.28879 038
0.09	0.09024 419	−0.99187 802	−0.17902 563	0.63439 817	−0.26647 538	−0.31447 701
0.10	0.10033 535	−0.98996 647	−0.19866 264	0.62686 720	−0.23599 595	−0.33672 259
0.11	0.11044 692	−0.98785 084	−0.21821 885	0.61856 044	−0.20330 891	−0.35527 122
0.12	0.12058 103	−0.98553 028	−0.23768 596	0.60948 299	−0.16869 616	−0.36990 435
0.13	0.13073 985	−0.98300 382	−0.25705 567	0.59964 048	−0.13245 792	−0.38044 330
0.14	0.14092 558	−0.98027 042	−0.27631 958	0.58903 905	−0.09491 050	−0.38675 142
0.15	0.15114 044	−0.97732 893	−0.29546 923	0.57768 532	−0.05638 395	−0.38873 587
0.16	0.16138 670	−0.97417 813	−0.31449 610	0.56558 646	−0.01721 959	−0.38634 905
0.17	0.17166 666	−0.97081 667	−0.33339 158	0.55275 016	+0.02223 260	−0.37958 962
0.18	0.18198 269	−0.96724 312	−0.35214 699	0.53918 465	0.06161 670	−0.36850 308
0.19	0.19233 717	−0.96345 594	−0.37075 353	0.52489 868	0.10057 361	−0.35318 198
0.20	0.20273 255	−0.95945 349	−0.38920 232	0.50990 155	0.13874 395	−0.33376 565
0.21	0.21317 135	−0.95523 402	−0.40748 439	0.49420 314	0.17577 093	−0.31043 947
0.22	0.22365 611	−0.95079 566	−0.42559 062	0.47781 388	0.21130 336	−0.28343 378
0.23	0.23418 947	−0.94613 642	−0.44351 180	0.46074 476	0.24499 861	−0.25302 221
0.24	0.24477 411	−0.94125 421	−0.46123 857	0.44300 738	0.27652 557	−0.21951 969
0.25	0.25541 281	−0.93614 680	−0.47876 145	0.42461 393	0.30556 765	−0.18327 994
0.26	0.26610 841	−0.93081 181	−0.49607 081	0.40557 719	0.33182 571	−0.14469 251
0.27	0.27686 382	−0.92524 677	−0.51315 685	0.38591 059	0.35502 089	−0.10417 949
0.28	0.28768 207	−0.91944 902	−0.53000 962	0.36562 819	0.37489 746	−0.06219 173
0.29	0.29856 626	−0.91341 578	−0.54661 900	0.34474 467	0.39122 551	−0.01920 468
0.30	0.30951 960	−0.90714 412	−0.56297 466	0.32327 542	0.40380 351	+0.02428 610
0.31	0.32054 541	−0.90063 092	−0.57906 608	0.30123 647	0.41246 080	0.06776 975
0.32	0.33164 711	−0.89387 293	−0.59488 256	0.27864 459	0.41705 981	0.11072 534
0.33	0.34282 825	−0.88686 668	−0.61041 313	0.25551 723	0.41749 822	0.15262 723
0.34	0.35409 253	−0.87960 854	−0.62564 662	0.23187 261	0.41371 084	0.19295 076
0.35	0.36544 375	−0.87209 469	−0.64057 159	0.20772 970	0.40567 128	0.23117 811
0.36	0.37688 590	−0.86432 108	−0.65517 633	0.18310 825	0.39339 336	0.26680 432
0.37	0.38842 310	−0.85628 345	−0.66944 887	0.15802 883	0.37693 227	0.29934 337
0.38	0.40005 965	−0.84797 733	−0.68337 690	0.13251 285	0.35638 546	0.32833 437
0.39	0.41180 003	−0.83939 799	−0.69694 784	0.10658 256	0.33189 317	0.35334 774
0.40	0.42364 893	−0.83054 043	−0.71014 872	0.08026 114	0.30363 867	0.37399 123
0.41	0.43561 122	−0.82139 940	−0.72296 624	0.05357 267	0.27184 811	0.38991 596
0.42	0.44769 202	−0.81196 935	−0.73538 670	+0.02654 221	0.23679 006	0.40082 218
0.43	0.45989 668	−0.80224 443	−0.74739 600	−0.00080 418	0.19877 461	0.40646 477
0.44	0.47223 080	−0.79221 845	−0.75897 958	−0.02843 939	0.15815 208	0.40665 845
0.45	0.48470 028	−0.78188 487	−0.77012 243	−0.05633 524	0.11531 136	0.40128 259
0.46	0.49731 129	−0.77123 681	−0.78080 904	−0.08446 239	0.07067 773	0.39028 551
0.47	0.51007 034	−0.76026 694	−0.79102 336	−0.11299 034	+0.02471 030	0.37368 827
0.48	0.52298 428	−0.74896 755	−0.80074 877	−0.14128 732	−0.02210 100	0.35158 779
0.49	0.53606 034	−0.73733 044	−0.80996 804	−0.16992 027	−0.06923 897	0.32415 933
0.50	0.54930 614	−0.72534 693	−0.81866 327	−0.19865 477	−0.11616 303	0.29165 814
	$\left[\begin{matrix}(-5)2\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-5)4\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-5)7\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)1\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)5\\6\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)7\\6\end{matrix}\right]$

$$Q_0(x)=\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\qquad Q_1(x)=\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1$$

$$Q_2(x)=\frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3x}{2}\qquad Q_3(x)=\frac{x}{4}(5x^2-3)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{5x^2}{2}+\frac{2}{3}$$

$$(n+1)Q_{n+1}(x)=(2n+1)xQ_n(x)-nQ_{n-1}(x)$$

$$Q_0(x)=\operatorname{Arth} x$$

Таблица 8.3. Функции Лежандра второго рода $Q_n(x)$

x	$Q_0(x)$	$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$	$Q_9(x)$	$Q_{10}(x)$
0.50	0.54930 614	−0.72534 693	−0.81866 327	−0.19865 477	−0.11616 303	+0.29165 814
0.51	0.56272 977	−0.71300 782	−0.82681 587	−0.22745 494	−0.16231 372	0.25442 027
0.52	0.57633 975	−0.70030 333	−0.83440 647	−0.25628 339	−0.20711 759	0.21286 243
0.53	0.59014 516	−0.68722 307	−0.84141 492	−0.28510 113	−0.24999 263	0.16748 087
0.54	0.60415 560	−0.67375 597	−0.84782 014	−0.31386 748	−0.29035 406	0.11884 913
0.55	0.61838 131	−0.65989 028	−0.85360 014	−0.34253 994	−0.32762 069	0.06761 470
0.56	0.63283 319	−0.64561 342	−0.85873 186	−0.37107 413	−0.36122 172	+0.01449 441
0.57	0.64752 284	−0.63091 198	−0.86319 116	−0.39942 362	−0.39060 386	−0.03973 144
0.58	0.66246 271	−0.61577 163	−0.86695 267	−0.42753 983	−0.41523 901	−0.09422 630
0.59	0.67766 607	−0.60017 702	−0.86998 970	−0.45537 186	−0.43463 218	−0.14810 594
0.60	0.69314 718	−0.58411 169	−0.87227 411	−0.48286 632	−0.44832 986	−0.20044 847
0.61	0.70892 136	−0.56755 797	−0.87377 622	−0.50996 718	−0.45592 864	−0.25030 577
0.62	0.72500 509	−0.55049 685	−0.87446 461	−0.53661 553	−0.45708 410	−0.29671 648
0.63	0.74141 614	−0.53290 783	−0.87430 597	−0.56274 938	−0.45151 989	−0.33872 031
0.64	0.75817 374	−0.51476 880	−0.87326 492	−0.58830 338	−0.43903 693	−0.37537 391
0.65	0.77529 871	−0.49605 584	−0.87130 380	−0.61320 855	−0.41952 271	−0.40576 815
0.66	0.79281 363	−0.47674 300	−0.86838 239	−0.63739 196	−0.39296 048	−0.42904 673
0.67	0.81074 313	−0.45680 211	−0.86445 768	−0.66077 634	−0.35943 834	−0.44442 606
0.68	0.82911 404	−0.43620 245	−0.85948 352	−0.68327 969	−0.31915 810	−0.45121 636
0.69	0.84795 576	−0.41491 053	−0.85341 027	−0.70481 480	−0.27244 363	−0.44884 377
0.70	0.86730 053	−0.39288 963	−0.84618 438	−0.72528 868	−0.21974 878	−0.43687 329
0.71	0.88718 386	−0.37009 946	−0.83774 785	−0.74460 199	−0.16166 443	−0.41503 236
0.72	0.90764 498	−0.34649 561	−0.82803 775	−0.76264 823	−0.09892 467	−0.38323 471
0.73	0.92872 736	−0.32202 902	−0.81698 546	−0.77931 296	−0.03241 178	−0.34160 431
0.74	0.95047 938	−0.29664 526	−0.80451 593	−0.79447 280	+0.03684 038	−0.29049 884
0.75	0.97295 507	−0.27028 369	−0.79054 669	−0.80799 424	0.10764 474	−0.23053 218
0.76	0.99621 508	−0.24287 654	−0.77498 679	−0.81973 225	0.17866 149	−0.16259 543
0.77	1.02032 776	−0.21434 763	−0.75773 539	−0.82952 866	0.24840 151	−0.08787 565
0.78	1.04537 055	−0.18461 097	−0.73868 011	−0.83721 016	0.31523 275	−0.00787 146
0.79	1.07143 168	−0.15356 897	−0.71769 507	−0.84258 586	0.37739 063	+0.07559 560
0.80	1.09861 229	−0.12111 017	−0.69463 835	−0.84544 435	0.43299 312	0.16037 522
0.81	1.12702 903	−0.08710 649	−0.66934 890	−0.84555 002	0.48006 146	0.24398 961
0.82	1.15681 746	−0.05140 968	−0.64164 264	−0.84263 849	0.51654 781	0.32364 357
0.83	1.18813 640	−0.01384 678	−0.61130 745	−0.83641 078	0.54037 123	0.39624 661
0.84	1.22117 352	+0.02578 575	−0.57809 671	−0.82652 589	0.54946 418	0.45844 913
0.85	1.25615 281	0.06772 989	−0.54172 080	−0.81259 105	0.54183 191	0.50669 726
0.86	1.29334 467	0.11227 642	−0.50183 576	−0.79414 886	0.51562 828	0.53731 190
0.87	1.33307 963	0.15977 928	−0.45802 786	−0.77065 991	0.46925 273	0.54659 757
0.88	1.37576 766	0.21067 554	−0.40979 212	−0.74147 880	0.40147 508	0.53099 253
0.89	1.42192 587	0.26551 403	−0.35650 171	−0.70582 022	0.31159 776	0.48727 156
0.90	1.47221 949	0.32499 754	−0.29736 306	−0.66270 962	0.19967 037	0.41282 291
0.91	1.52752 443	0.39004 723	−0.23134 775	−0.61090 890	+0.06677 934	0.30602 901
0.92	1.58902 692	0.46190 476	−0.15708 489	−0.54880 000	−0.08454 828	+0.16680 029
0.93	1.65839 002	0.54230 272	−0.07268 272	−0.47419 336	−0.24975 925	−0.00265 428
0.94	1.73804 934	0.63376 638	+0.02458 593	−0.38399 297	−0.42137 701	−0.19666 273
0.95	1.83178 082	0.74019 178	0.13888 288	−0.27356 330	−0.58752 240	−0.40421 502
0.96	1.94591 015	0.86807 374	0.27707 112	−0.13540 204	−0.72921 201	−0.60564 435
0.97	2.09229 572	1.02952 685	0.45181 370	+0.04408 092	−0.81464 729	−0.76587 179
0.98	2.29755 993	1.25160 873	0.69108 487	0.29436 613	−0.78406 452	−0.81720 735
0.99	2.64665 241	1.62018 589	1.08264 984	0.70624 831	−0.48875 677	−0.59305 105
1.00	∞	∞	∞	∞	∞	∞

$$Q_0(x)=\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad Q_1(x)=\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1$$

$$Q_2(x)=\frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3x}{2} \qquad Q_3(x)=\frac{x}{4}(5x^2-3)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{5x^2}{2}+\frac{2}{3}$$

$$(n+1)Q_{n+1}(x)=(2n+1)xQ_n(x)-nQ_{n-1}(x)$$

Таблица 8.4. Производные функций Лежандра второго рода $Q'_n(x)$

x	$Q'_0(x)$	$Q'_1(x)$	$Q'_2(x)$	$Q'_3(x)$	$Q'_9(x)$	$Q'_{10}(x)$
0.00	1.00000 000	0.00000 000	-2.00000 000	0.00000 000	0.00000 00	-4.06349 21
0.01	1.00010 001	0.02000 133	-1.99959 998	-0.07999 200	0.36520 25	-4.04156 71
0.02	1.00040 016	0.04001 067	-1.99839 968	-0.15993 599	0.72733 83	-3.97600 70
0.03	1.00090 081	0.06003 603	-1.99639 838	-0.23978 392	1.08336 24	-3.86745 44
0.04	1.00160 256	0.08008 546	-1.99359 487	-0.31948 767	1.43027 23	-3.71697 43
0.05	1.00250 627	0.10016 704	-1.98998 747	-0.39899 900	1.76512 98	-3.52604 61
0.06	1.00361 301	0.12028 894	-1.98557 401	-0.47826 951	2.08508 14	-3.29655 13
0.07	1.00492 413	0.14045 936	-1.98035 179	-0.55725 060	2.38737 90	-3.03075 84
0.08	1.00644 122	0.16068 662	-1.97431 766	-0.63589 347	2.66939 94	-2.73130 45
0.09	1.00816 615	0.18097 914	-1.96746 792	-0.71414 899	2.92866 44	-2.40117 40
0.10	1.01010 101	0.20134 545	-1.95979 839	-0.79196 777	3.16285 86	-2.04367 37
0.11	1.01224 820	0.22179 422	-1.95130 431	-0.86930 001	3.36984 76	-1.66240 59
0.12	1.01461 039	0.24233 428	-1.94198 044	-0.94609 554	3.54769 49	-1.26123 82
0.13	1.01719 052	0.26297 462	-1.93182 094	-1.02230 373	3.69467 78	-0.84427 11
0.14	1.01999 184	0.28372 443	-1.92081 942	-1.09787 345	3.80930 18	-0.41580 27
0.15	1.02301 790	0.30459 312	-1.90896 890	-1.17275 302	3.89031 48	+0.01[illegible]70 77
0.16	1.02627 258	0.32559 031	-1.89626 181	-1.24689 019	3.93671 92	0.45767 92
0.17	1.02976 007	0.34672 587	-1.88268 994	-1.32023 203	3.94778 25	0.89344 90
0.18	1.03348 491	0.36800 997	-1.86824 444	-1.39272 496	3.92304 76	1.32231 56
0.19	1.03745 202	0.38945 305	-1.85291 580	-1.46431 458	3.86234 02	1.73958 08
0.20	1.04166 667	0.41106 589	-1.83669 380	-1.53494 573	3.76577 54	2.14059 45
0.21	1.04613 453	0.43285 960	-1.81956 752	-1.60456 234	3.63376 26	2.52079 94
0.22	1.05086 171	0.45484 568	-1.80152 526	-1.67310 742	3.46700 84	2.87577 54
0.23	1.05585 471	0.47703 605	-1.78255 455	-1.74052 294	3.26651 77	3.20128 51
0.24	1.06112 054	0.49944 304	-1.76264 210	-1.80674 982	3.03359 33	3.49331 81
0.25	1.06666 667	0.52207 948	-1.74177 372	-1.87172 780	2.76983 31	3.74813 48
0.26	1.07250 107	0.54495 869	-1.71993 437	-1.93539 537	2.47712 56	3.96230 97
0.27	1.07863 229	0.56809 454	-1.69710 801	-1.99768 972	2.15764 35	4.13277 26
0.28	1.08506 944	0.59150 152	-1.67327 761	-2.05854 661	1.81383 48	4.25684 84
0.29	1.09182 225	0.61519 472	-1.64842 510	-2.11790 027	1.44841 22	4.33229 46
0.30	1.09890 110	0.63918 993	-1.62253 126	-2.17568 334	1.06434 02	4.35733 72
0.31	1.10631 707	0.66350 370	-1.59557 570	-2.23182 672	0.66482 02	4.33070 22
0.32	1.11408 200	0.68815 335	-1.56753 678	-2.28625 944	+0.25327 32	4.25164 55
0.33	1.12220 851	0.71315 706	-1.53839 152	-2.33890 860	-0.16667 95	4.11997 79
0.34	1.13071 009	0.73853 396	-1.50811 [illegible]53	-2.38969 914	-0.59123 78	3.93608 76
0.35	1.13960 114	0.76430 415	-1.47668 292	-2.43855 378	-1.01644 63	3.70095 66
0.36	1.14889 706	0.79048 884	-1.44406 617	-2.48539 281	-1.43822 04	3.41617 42
0.37	1.15861 430	0.81711 039	-1.41023 606	-2.53013 394	-1.85237 43	3.08394 42
0.38	1.16877 045	0.84419 242	-1.37516 155	-2.57269 210	-2.25465 05	2.70708 74
0.39	1.17938 436	0.87175 994	-1.33880 960	-2.61297 926	-2.64075 25	2.28903 82
0.40	1.19047 619	0.89983 941	-1.30114 509	-2.65090 420	-3.00637 81	1.83383 54
0.41	1.20206 756	0.92845 892	-1.26213 064	-2.68637 229	-3.34725 61	1.34610 61
0.42	1.21418 164	0.95764 831	-1.22172 641	-2.71928 520	-3.65918 35	0.83104 35
0.43	1.22684 333	0.98743 931	-1.17988 995	-2.74954 067	-3.93806 51	+0.29437 81
0.44	1.24007 937	1.01786 572	-1.13657 597	-2.77703 216	-4.17995 45	-0.25765 92
0.45	1.25391 850	1.04896 360	-1.09173 613	-2.80164 855	-4.38109 69	-0.81838 00
0.46	1.26839 168	1.08077 146	-1.04531 874	-2.82327 375	-4.53797 26	-1.38069 01
0.47	1.28353 228	1.11333 051	-0.99726 854	-2.84178 630	-4.64734 21	-1.93714 78
0.48	1.29937 630	1.14668 490	-0.94752 634	-2.85705 896	-4.70629 25	-2.48003 04
0.49	1.31596 263	1.18088 202	-0.89602 868	-2.86895 817	-4.71228 35	-3.00140 86
0.50	1.33333 333	1.21597 281	-0.84270 745	-2.87734 353	-4.66319 54	-3.49322 79
	$\begin{bmatrix}(-4)1\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)1\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)7\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)6\\6\end{bmatrix}$

Таблица 8.4. Производные функций Лежандра второго рода $Q_n'(x)$

x	$Q_0'(x)$	$Q_1'(x)$	$Q_2'(x)$	$Q_3'(x)$	$Q_9'(x)$	$Q_{10}'(x)$
0,50	1,33333 333	1,21597 281	− 0,84270 74	− 2,87734 35	− 4,66319 54	− 3,493228
0,51	1,35153 399	1,25201 210	− 0,78748 95	− 2,88206 72	− 4,55737 62	− 3,947399
0,52	1,37061 403	1,28905 905	− 0,73029 59	− 2,88297 33	− 4,39368 94	− 4,355894
0,53	1,39062 717	1,32717 756	− 0,67104 20	− 2,87989 70	− 4,17156 11	− 4,710854
0,54	1,41163 185	1,36643 680	− 0,60963 61	− 2,87266 39	− 3,89102 65	− 5,004695
0,55	1,43369 176	1,40691 178	− 0,54597 91	− 2,86108 89	− 3,55277 54	− 5,230233
0,56	1,45687 646	1,44868 400	− 0,47996 38	− 2,84497 53	− 3,15819 61	− 5,380807
0,57	1,48126 204	1,49184 220	− 0,41147 39	− 2,82411 36	− 2,70941 73	− 5,450406
0,58	1,50693 189	1,53648 320	− 0,34038 30	− 2,79828 02	− 2,20934 79	− 5,433812
0,59	1,53397 760	1,58271 285	− 0,26655 35	− 2,76723 56	− 1,66171 26	− 5,326732
0,60	1,56250 000	1,63064 718	− 0,18983 51	− 2,73072 34	− 1,07108 51	− 5,125950
0,61	1,59261 029	1,68041 364	− 0,11006 36	− 2,68846 75	− 0,44291 60	− 4,829465
0,62	1,62443 145	1,73215 259	− 0,02705 91	− 2,64017 05	+ 0,21644 47	− 4,436645
0,63	1,65809 982	1,78601 903	+ 0,05937 63	− 2,58551 08	0,89973 10	− 3,948368
0,64	1,69376 694	1,84218 458	0,14946 05	− 2,52414 00	1,59875 12	− 3,367169
0,65	1,73160 173	1,90083 983	0,24343 42	− 2,45567 92	2,30438 77	− 2,697375
0,66	1,77179 305	1,96219 705	0,34156 40	− 2,37971 49	3,00660 55	− 1,945245
0,67	1,81455 271	2,02649 344	0,44414 64	− 2,29579 49	3,69447 22	− 1,119087
0,68	1,86011 905	2,09399 499	0,55151 17	− 2,20342 26	4,35619 14	− 0,229371
0,69	1,90876 121	2,16500 099	0,66402 96	− 2,10205 04	4,97914 99	+ 0,711177
0,70	1,96078 431	2,23984 955	0,78211 54	− 1,99107 23	5,54998 34	1,687501
0,71	2,01653 559	2,31892 413	0,90623 72	− 1,86981 51	6,05466 05	2,682165
0,72	2,07641 196	2,40266 159	1,03692 51	− 1,73752 72	6,47859 09	3,675339
0,73	2,14086 919	2,49156 187	1,17478 21	− 1,59336 54	6,80675 90	4,644816
0,74	2,21043 324	2,58619 998	1,32049 75	− 1,43637 96	7,02388 88	5,566082
0,75	2,28571 429	2,68724 079	1,47486 32	− 1,26549 27	7,11464 51	6,412431
0,76	2,36742 424	2,79545 751	1,63879 46	− 1,07947 65	7,06387 68	7,155161
0,77	2,45639 892	2,91175 493	1,81335 60	− 0,87692 20	6,85691 02	7,763836
0,78	2,55362 615	3,03719 894	1,99979 32	− 0,65620 16	6,47990 33	8,206652
0,79	2,66028 199	3,17305 446	2,19957 51	− 0,41542 09	5,92027 14	8,450921
0,80	2,77777 778	3,32083 451	2,41444 73	− 0,15235 72	5,16720 18	8,463693
0,81	2,90782 204	3,48236 488	2,64650 26	+ 0,13562 04	4,21227 67	8,212559
0,82	3,05250 305	3,65986 997	2,89827 40	0,45165 68	3,05023 28	7,666669
0,83	3,21440 051	3,85608 883	3,17286 02	0,79955 16	1,67989 36	6,798024
0,84	3,39673 913	4,07443 439	3,47409 64	1,18395 08	+ 0,10532 57	5,583115
0,85	3,60360 360	4,31921 588	3,80679 33	1,61061 19	− 1,66270 85	4,005017
0,86	3,84024 578	4,59595 604	4,17707 50	2,08677 72	− 3,60489 91	+ 2,056070
0,87	4,11353 352	4,91185 380	4,59287 14	2,62171 45	− 5,69098 02	− 0,258625
0,88	4,43262 411	5,27647 688	5,06465 07	3,22751 63	− 7,87652 81	− 2,916594
0,89	4,81000 481	5,70283 015	5,60654 69	3,92032 16	−10,09858 18	− 5,871760
0,90	5,26315 789	6,20906 159	6,23815 05	4,72224 63	−12,26944 98	− 9,045801
0,91	5,81733 566	6,82129 988	6,98747 73	5,66456 11	−14,26758 89	−12,315713
0,92	6,51041 667	7,57861 025	7,89613 09	6,79318 58	−15,92348 54	−15,495090
0,93	7,40192 450	8,54217 980	9,02883 27	8,17876 62	−16,99643 22	−18,304274
0,94	8,59106 529	9,81365 072	10,49236 44	9,93658 04	−17,13329 84	−20,319071
0,95	10,25641 026	11,57537 057	12,47698 56	12,26978 50	−15,78782 62	−20,873659
0,96	12,75510 204	14,19080 811	15,35932 33	15,57616 37	−12,04072 38	−18,851215
0,97	16,92047 377	18,50515 528	20,00905 43	20,76422 38	− 4,11777 87	−12,140718
0,98	25,25252 525	27,04503 467	29,00735 14	30,50045 90	+12,32933 89	+ 4,242107
0,99	50,25125 628	52,39539 613	55,11181 39	57,80864 53	54,86521 05	49,428990
1,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Таблица 8.5. Функции Лежандра первого рода $P_n(x)$

$P_0(x)=1$ $P_1(x)=x$

x	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_9(x)$	$P_{10}(x)$
1.0	1.00	1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.2	1.66	2.52	4.04700	6.72552	(1)6.02754	(-2)1.06544
1.4	2.44	4.76	9.83200	(1)2.09686	(2)5.03668	(3)1.13789
1.6	3.34	7.84	(1)1.94470	(1)4.97354	(3)2.45973	(3)6.65436
1.8	4.36	11.88	(1)3.41520	(2)1.01148	(3)8.97882	(4)2.81110
2.0	5.50	17.00	(1)5.53750	(2)1.85750	(4)2.71007	(4)9.60605
2.2	6.76	23.32	(1)8.47120	(2)3.16804	(4)7.13591	(5)2.81929
2.4	8.14	30.96	(2)1.23927	(2)5.10597	(5)1.69353	(5)7.37020
2.6	9.64	40.04	(2)1.74952	(2)7.86743	(5)3.70173	(6)1.75809
2.8	11.26	50.68	(2)2.39887	(3)1.16849	(5)7.56647	(6)3.89219
3.0	13.00	63.00	(2)3.21000	(3)1.68300	(6)1.46256	(6)8.09745
3.2	14.86	77.12	(2)4.20727	(3)2.36169	(6)2.69625	(7)1.59814
3.4	16.84	93.16	(2)5.41672	(3)3.24050	(6)4.77208	(7)3.01437
3.6	18.94	111.24	(2)6.86607	(3)4.36022	(6)8.15181	(7)5.46578
3.8	21.16	131.48	(2)8.58472	(3)5.76676	(7)1.34978	(7)9.57313
4.0	23.50	154.00	(3)1.06038	(3)7.51150	(7)2.17406	(8)1.62597
4.2	25.96	178.92	(3)1.29559	(3)9.65154	(7)3.41632	(8)2.68690
4.4	28.54	206.36	(3)1.56757	(4)1.22500	(7)5.25060	(8)4.33189
4.6	31.24	236.44	(3)1.87991	(4)1.53765	(7)7.90944	(8)6.82993
4.8	34.06	269.28	(3)2.23641	(4)1.91071	(8)1.16994	(9)1.05524
5.0	37.00	305.00	(3)2.64100	(4)2.35250	(8)1.70196	(9)1.60047
5.2	40.06	343.72	(3)3.09781	(4)2.87205	(8)2.43839	(9)2.38657
5.4	43.24	385.56	(3)3.61111	(4)3.47916	(8)3.44472	(9)3.50362
5.6	46.54	430.64	(3)4.18537	(4)4.18440	(8)4.80363	(9)5.06985
5.8	49.96	479.08	(3)4.82519	(4)4.99917	(8)6.61853	(9)7.23884
6.0	53.50	531.00	(3)5.53538	(4)5.93572	(8)9.01781	(10)1.02082
6.2	57.16	586.52	(3)6.32087	(4)7.00717	(9)1.21596	(10)1.42299
6.4	60.94	645.76	(3)7.18681	(4)8.22754	(9)1.62372	(10)1.96229
6.6	64.84	708.84	(3)8.13847	(4)9.61180	(9)2.14858	(10)2.67872
6.8	68.86	775.88	(3)9.18133	(5)1.11759	(9)2.81890	(10)3.62216
7.0	73.00	847.00	(4)1.03210	(5)1.29367	(9)3.66876	(10)4.85435
7.2	77.26	922.32	(4)1.15633	(5)1.49122	(9)4.73885	(10)6.45123
7.4	81.64	1001.96	(4)1.29142	(5)1.71215	(9)6.07749	(10)8.50564
7.6	86.14	1086.04	(4)1.43797	(5)1.95846	(9)7.74185	(11)1.11305
7.8	90.76	1174.68	(4)1.59663	(5)2.23227	(9)9.79919	(11)1.44623
8.0	95.50	1268.00	(4)1.76804	(5)2.53583	(10)1.23283	(11)1.86653
8.2	100.36	1366.12	(4)1.95286	(5)2.87149	(10)1.54212	(11)2.39363
8.4	105.34	1469.16	(4)2.15176	(5)3.24171	(10)1.91848	(11)3.05098
8.6	110.44	1577.24	(4)2.36546	(5)3.64912	(10)2.37430	(11)3.86641
8.8	115.66	1690.48	(4)2.59466	(5)4.09643	(10)2.92387	(11)4.87282
9.0	121.00	1809.00	(4)2.84010	(5)4.58649	(10)3.58363	(11)6.10897
9.2	126.46	1932.92	(4)3.10252	(5)5.12230	(10)4.37243	(11)7.62030
9.4	132.04	2062.36	(4)3.38268	(5)5.70699	(10)5.31184	(11)9.45994
9.6	137.74	2197.44	(4)3.68137	(5)6.34383	(10)6.42640	(12)1.16898
9.8	143.56	2338.28	(4)3.99938	(5)7.03621	(10)7.74404	(12)1.43817
10.0	149.50	2485.00	(4)4.33754	(5)7.78769	(10)9.29640	(12)1.76188

Взято из [8.16].

Таблица 8.6. Производные функций Лежандра первого рода $P_n'(x)$

$$P_1'(x) = 1 \qquad P_2'(x) = 3x$$

x	$P_3'(x)$	$P_4'(x)$	$P_5'(x)$	$P_9'(x)$	$P_{10}'(x)$
1.0	6.000	(1)1.00000	(1)1.50000	(1)4.50000	(1)5.50000
1.2	9.300	(1)2.12400	(1)4.57230	(2)7.77587	(3)1.53586
1.4	(1)1.320	(1)3.75200	(2)1.01688	(3)4.50787	(4)1.13477
1.6	(1)1.770	(1)5.96800	(2)1.92723	(4)1.74282	(4)5.24824
1.8	(1)2.280	(1)8.85600	(2)3.30168	(4)5.33445	(5)1.85808
2.0	(1)2.850	(2)1.25000	(2)5.26875	(5)1.39531	(5)5.50068
2.2	(1)3.480	(2)1.69840	(2)7.97208	(5)3.25362	(6)1.42939
2.4	(1)4.170	(2)2.23920	(3)1.15704	(5)6.94480	(6)3.36028
2.6	(1)4.920	(2)2.88080	(3)1.62377	(6)1.38132	(6)7.29317
2.8	(1)5.730	(2)3.63160	(3)2.21628	(6)2.59296	(7)1.48267
3.0	(1)6.600	(2)4.50000	(3)2.95500	(6)4.63721	(7)2.85372
3.2	(1)7.530	(2)5.49440	(3)3.86184	(6)7.95819	(7)5.24287
3.4	(1)8.520	(2)6.62320	(3)4.96025	(7)1.31805	(7)9.25345
3.6	(1)9.570	(2)7.89480	(3)6.27516	(7)2.11632	(8)1.57706
3.8	(2)1.068	(2)9.31760	(3)7.83305	(7)3.30652	(8)2.60626
4.0	(2)1.185	(3)1.09000	(3)9.66187	(7)5.04229	(8)4.19097
4.2	(2)1.308	(3)1.26504	(4)1.17911	(7)7.52431	(8)6.57653
4.4	(2)1.437	(3)1.45772	(4)1.42518	(8)1.10110	(9)1.00955
4.6	(2)1.572	(3)1.66888	(4)1.70764	(8)1.58313	(9)1.51918
4.8	(2)1.713	(3)1.89936	(4)2.02990	(8)2.23988	(9)2.24508
5.0	(2)1.860	(3)2.15000	(4)2.39550	(8)3.12290	(9)3.26340
5.2	(2)2.013	(3)2.42164	(4)2.80816	(8)4.29574	(9)4.67217
5.4	(2)2.172	(3)2.71512	(4)3.27172	(8)5.83620	(9)6.59627
5.6	(2)2.337	(3)3.03128	(4)3.79020	(8)7.83868	(9)9.19329
5.8	(2)2.508	(3)3.37096	(4)4.36775	(9)1.04169	(10)1.26604
6.0	(2)2.685	(3)3.73500	(4)5.00869	(9)1.37071	(10)1.72421
6.2	(2)2.868	(3)4.12424	(4)5.71746	(9)1.78712	(10)2.32397
6.4	(2)3.057	(3)4.53952	(4)6.49870	(9)2.31006	(10)3.10217
6.6	(2)3.252	(3)4.98168	(4)7.35714	(9)2.96206	(10)4.10354
6.8	(2)3.453	(3)5.45156	(4)8.29772	(9)3.76947	(10)5.38214
7.0	(2)3.660	(3)5.95000	(4)9.32550	(9)4.76295	(10)7.00283
7.2	(2)3.873	(3)6.47784	(5)1.04457	(9)5.97809	(10)9.04307
7.4	(2)4.092	(3)7.03592	(5)1.16637	(9)7.45591	(11)1.15949
7.6	(2)4.317	(3)7.62508	(5)1.29849	(9)9.24362	(11)1.47670
7.8	(2)4.548	(3)8.24616	(5)1.44152	(10)1.13953	(11)1.86875
8.0	(2)4.785	(3)8.90000	(5)1.59602	(10)1.39725	(11)2.35063
8.2	(2)5.028	(3)9.58744	(5)1.76260	(10)1.70455	(11)2.93985
8.4	(2)5.277	(4)1.03093	(5)1.94187	(10)2.06937	(11)3.65675
8.6	(2)5.532	(4)1.10665	(5)2.13445	(10)2.50070	(11)4.52490
8.8	(2)5.793	(4)1.18598	(5)2.34099	(10)3.00866	(11)5.57149
9.0	(2)6.060	(4)1.26900	(5)2.56215	(10)3.60463	(11)6.82780
9.2	(2)6.333	(4)1.35580	(5)2.79860	(10)4.30137	(11)8.32969
9.4	(2)6.612	(4)1.44647	(5)3.05102	(10)5.11311	(12)1.01182
9.6	(2)6.897	(4)1.54109	(5)3.32013	(10)6.05576	(12)1.22399
9.8	(2)7.188	(4)1.63974	(5)3.60663	(10)7.14698	(12)1.47481
10.0	(2)7.485	(4)1.74250	(5)3.91127	(10)8.40642	(12)1.77028

Взято из [8.16].

Таблица 8.7. Функции Лежандра второго рода $Q_n(x)$

x	$Q_0(x)$	$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$	$Q_9(x)$	$Q_{10}(x)$
1.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1.2	1.19895	(-1)4.38737	(-1)1.90253	(-2)8.80147	(- 3)1.32079	(- 4)6.75615
1.4	(-1)8.95880	(-1)2.54232	(-2)8.59466	(-2)3.10542	(- 4)1.04810	(- 5)4.27633
1.6	(-1)7.33169	(-1)1.73070	(-2)4.87829	(-2)1.47080	(- 5)1.71471	(- 6)5.73368
1.8	(-1)6.26381	(-1)1.27487	(-2)3.10233	(-3)8.07870	(- 6)3.91902	(- 6)1.13241
2.0	(-1)5.49306	(-2)9.86123	(-2)2.11838	(-3)4.87112	(- 6)1.12179	(- 7)2.06313
2.2	(-1)4.90415	(-2)7.89122	(-2)1.52029	(-3)3.13576	(- 7)3.76522	(- 8)8.62195
2.4	(-1)4.43652	(-2)6.47638	(-2)1.13240	(-3)2.12013	(- 7)1.42488	(- 8)2.96212
2.6	(-1)4.05465	(-2)5.42093	(-3)8.68364	(-3)1.48960	(- 8)5.92566	(- 8)1.12879
2.8	(-1)3.73607	(-2)4.61002	(-3)6.81708	(-3)1.07961	(- 8)2.66020	(- 9)4.67876
3.0	(-1)3.46574	(-2)3.97208	(-3)5.45667	(-4)8.02854	(- 8)1.27252	(- 9)2.07945
3.2	(-1)3.23314	(-2)3.46035	(-3)4.43984	(-4)6.10146	(- 9)6.42269	(-10)9.80358
3.4	(-1)3.03068	(-2)3.04309	(-3)3.66347	(-4)4.72397	(- 9)3.39441	(-10)4.86183
3.6	(-1)2.85272	(-2)2.69807	(-3)3.05981	(-4)3.71695	(- 9)1.86714	(-10)2.51945
3.8	(-1)2.69498	(-2)2.40934	(-3)2.58298	(-4)2.96625	(- 9)1.06372	(-10)1.35695
4.0	(-1)2.55413	(-2)2.16512	(-3)2.20108	(-4)2.39697	(-10)6.25130	(-11)7.56235
4.2	(-1)2.42754	(-2)1.95664	(-3)1.89145	(-4)1.95866	(-10)3.77701	(-11)4.34493
4.4	(-1)2.31312	(-2)1.77717	(-3)1.63766	(-4)1.61661	(-10)2.33956	(-11)2.56563
4.6	(-1)2.20916	(-2)1.62153	(-3)1.42759	(-4)1.34641	(-10)1.48213	(-11)1.55290
4.8	(-1)2.11428	(-2)1.48564	(-3)1.25217	(-4)1.13061	(-11)9.58309	(-12)9.61271
5.0	(-1)2.02733	(-2)1.36628	(-3)1.10450	(-5)9.56532	(-11)6.31274	(-12)6.07362
5.2	(-1)1.94732	(-2)1.26084	(-4)9.79278	(-5)8.14823	(-11)4.23006	(-12)3.91025
5.4	(-1)1.87347	(-2)1.16723	(-4)8.72377	(-5)6.98500	(-11)2.87937	(-12)2.56132
5.6	(-1)1.80507	(-2)1.08374	(-4)7.80551	(-5)6.02278	(-11)1.98859	(-12)1.70471
5.8	(-1)1.74153	(-2)1.00894	(-4)7.01223	(-5)5.22117	(-11)1.39197	(-12)1.15147
6.0	(-1)1.68236	(-3)9.41671	(-4)6.32330	(-5)4.54896	(-12)9.86572	(-13)7.88519
6.2	(-1)1.62711	(-3)8.80944	(-4)5.72204	(-5)3.98181	(-12)7.07418	(-13)5.46920
6.4	(-1)1.57541	(-3)8.25935	(-4)5.19491	(-5)3.50058	(-12)5.12787	(-13)3.83900
6.6	(-1)1.52691	(-3)7.75944	(-4)4.73078	(-5)3.09006	(-12)3.75499	(-13)2.72499
6.8	(-1)1.48133	(-3)7.30377	(-4)4.32050	(-5)2.73812	(-12)2.77600	(-13)1.95462
7.0	(-1)1.43841	(-3)6.88725	(-4)3.95644	(-5)2.43500	(-12)2.07071	(-13)1.41592
7.2	(-1)1.39792	(-3)6.50550	(-4)3.63228	(-5)2.17277	(-12)1.55770	(-13)1.03525
7.4	(-1)1.35967	(-3)6.15475	(-4)3.34266	(-5)1.94497	(-12)1.18115	(-14)7.63577
7.6	(-1)1.32346	(-3)5.83171	(-4)3.08311	(-5)1.74631	(-13)9.02383	(-14)5.67877
7.8	(-1)1.28915	(-3)5.53353	(-4)2.84980	(-5)1.57242	(-13)6.94338	(-14)4.25654
8.0	(-1)1.25657	(-3)5.25771	(-4)2.63950	(-5)1.41968	(-13)5.37876	(-14)3.21427
8.2	(-1)1.22561	(-3)5.00208	(-4)2.44944	(-5)1.28507	(-13)4.19350	(-14)2.44439
8.4	(-1)1.19615	(-3)4.76469	(-4)2.27723	(-5)1.16606	(-13)3.28941	(-14)1.87141
8.6	(-1)1.16807	(-3)4.54386	(-4)2.12082	(-5)1.06054	(-13)2.59524	(-14)1.44191
8.8	(-1)1.14129	(-3)4.33807	(-4)1.97844	(-6)9.66707	(-13)2.05891	(-14)1.11775
9.0	(-1)1.11572	(-3)4.14598	(-4)1.84855	(-6)8.83037	(-13)1.64205	(-15)8.71513
9.2	(-1)1.09127	(-3)3.96640	(-4)1.72979	(-6)8.08237	(-13)1.31620	(-15)6.83294
9.4	(-1)1.06787	(-3)3.79827	(-4)1.62102	(-6)7.41202	(-13)1.06011	(-15)5.38569
9.6	(-1)1.04546	(-3)3.64063	(-4)1.52119	(-6)6.80982	(-14)8.57794	(-15)4.26656
9.8	(-1)1.02397	(-3)3.49262	(-4)1.42940	(-6)6.26763	(-14)6.97159	(-15)3.39644
10.0	(-1)1.00335	(-3)3.35348	(-4)1.34486	(-6)5.77839	(-14)5.69010	(-15)2.71639

Взято из [8.16].

Таблица 8.8. Производные функции Лежандра второго рода $Q_n'(x)$

x	$-Q_0'(x)$	$-Q_1'(x)$	$-Q_2'(x)$	$-Q_3'(x)$	$-Q_9'(x)$	$-Q_{10}'(x)$
1.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1.2	2.27273	1.52833	(-1)9.56516	(-1)5.77060	(- 2)2.06667	(- 2)1.15922
1.4	1.04167	(-1)5.62454	(-1)2.78972	(-1)1.32721	(- 3)1.11220	(- 4)4.88977
1.6	(-1)6.41026	(-1)2.92472	(-1)1.21817	(-2)4.85580	(- 4)1.39114	(- 5)5.11106
1.8	(-1)4.46429	(-1)1.77190	(-2)6.39686	(-2)2.20736	(- 5)2.64367	(- 6)8.39591
2.0	(-1)3.33333	(-1)1.17361	(-2)3.74965	(-2)1.14416	(- 6)6.52419	(- 6)1.83053
2.2	(-1)2.60417	(-2)8.25020	(-2)2.36801	(-3)6.48766	(- 6)1.93263	(- 7)4.86561
2.4	(-1)2.10084	(-2)6.05501	(-2)1.57925	(-3)3.93006	(- 7)6.56197	(- 7)1.49994
2.6	(-1)1.73611	(-2)4.59238	(-2)1.09833	(-3)2.50557	(- 7)2.47880	(- 8)5.19235
2.8	(-1)1.46199	(-2)3.57495	(-3)7.89834	(-3)1.66411	(- 7)1.02057	(- 8)1.97390
3.0	(-1)1.25000	(-2)2.84264	(-3)5.83769	(-3)1.14304	(- 8)4.51200	(- 9)8.10849
3.2	(-1)1.08225	(-2)2.30068	(-3)4.41472	(-4)8.07587	(- 8)2.11821	(- 9)3.55578
3.4	(-2)9.46970	(-2)1.89018	(-3)3.40437	(-4)5.84465	(- 8)1.04686	(- 9)1.64904
3.6	(-2)8.36120	(-2)1.57309	(-3)2.66980	(-4)4.31867	(- 9)5.40951	(-10)8.02794
3.8	(-2)7.44048	(-2)1.32398	(-3)2.12471	(-4)3.24956	(- 9)2.90659	(-10)4.07799
4.0	(-2)6.66667	(-2)1.12539	(-3)1.71292	(-4)2.48459	(- 9)1.61660	(-10)2.15091
4.2	(-2)6.00962	(-3)9.64994	(-3)1.39691	(-4)1.92694	(-10)9.27220	(-10)1.17316
4.4	(-2)5.44662	(-3)8.33966	(-3)1.15099	(-4)1.51364	(-10)5.46705	(-11)6.59413
4.6	(-2)4.96032	(-3)7.25823	(-4)9.57184	(-4)1.20274	(-10)3.30481	(-11)3.80849
4.8	(-2)4.53721	(-3)6.35742	(-4)8.02725	(-5)9.65712	(-10)2.04345	(-11)2.25453
5.0	(-2)4.16667	(-3)5.60078	(-4)6.78356	(-5)7.82792	(-10)1.28985	(-11)1.36497
5.2	(-2)3.84025	(-3)4.96040	(-4)5.77277	(-5)6.40058	(-11)8.29696	(-12)8.43598
5.4	(-2)3.55114	(-3)4.41464	(-4)4.94423	(-5)5.27543	(-11)5.43056	(-12)5.31340
5.6	(-2)3.29381	(-3)3.94656	(-4)4.25974	(-5)4.38019	(-11)3.61188	(-12)3.40566
5.8	(-2)3.06373	(-3)3.54273	(-4)3.69015	(-5)3.66172	(-11)2.43819	(-12)2.21848
6.0	(-2)2.85714	(-3)3.19245	(-4)3.21299	(-5)3.08050	(-11)1.66874	(-12)1.46703
6.2	(-2)2.67094	(-3)2.88709	(-4)2.81078	(-5)2.60683	(-11)1.15686	(-13)9.83782
6.4	(-2)2.50250	(-3)2.61964	(-4)2.46977	(-5)2.21813	(-12)8.11673	(-13)6.68395
6.6	(-2)2.34962	(-3)2.38436	(-4)2.17910	(-5)1.89709	(-12)5.75903	(-13)4.59703
6.8	(-2)2.21043	(-3)2.17655	(-4)1.93008	(-5)1.63035	(-12)4.12938	(-13)3.19817
7.0	(-2)2.08333	(-3)1.99230	(-4)1.71573	(-5)1.40747	(-12)2.99029	(-13)2.24909
7.2	(-2)1.96696	(-3)1.82834	(-4)1.53040	(-5)1.22023	(-12)2.18566	(-13)1.59779
7.4	(-2)1.86012	(-3)1.68195	(-4)1.36949	(-5)1.06216	(-12)1.61163	(-13)1.14602
7.6	(-2)1.76180	(-3)1.55083	(-4)1.22923	(-6)9.28073	(-12)1.19826	(-14)8.29452
7.8	(-2)1.67112	(-3)1.43304	(-4)1.10651	(-6)8.13829	(-13)8.97939	(-14)6.05494
8.0	(-2)1.58730	(-3)1.32691	(-5)9.98765	(-6)7.16078	(-13)6.77915	(-14)4.45610
8.2	(-2)1.50966	(-3)1.23104	(-5)9.03846	(-6)6.32104	(-13)5.15433	(-14)3.30480
8.4	(-2)1.43761	(-3)1.14421	(-5)8.19960	(-6)5.59691	(-13)3.94535	(-14)2.46898
8.6	(-2)1.37061	(-3)1.06538	(-5)7.45601	(-6)4.97021	(-13)3.03931	(-14)1.85745
8.8	(-2)1.30822	(-4)9.93646	(-5)6.79498	(-6)4.42597	(-13)2.35565	(-14)1.40670
9.0	(-2)1.25000	(-4)9.28224	(-5)6.20573	(-6)3.95179	(-13)1.83641	(-14)1.07211
9.2	(-2)1.19560	(-4)8.68435	(-5)5.67908	(-6)3.53736	(-13)1.43959	(-15)8.22064
9.4	(-2)1.14469	(-4)8.13682	(-5)5.20722	(-6)3.17406	(-13)1.13452	(-15)6.33995
9.6	(-2)1.09697	(-4)7.63447	(-5)4.78344	(-6)2.85468	(-14)8.98657	(-15)4.91668
9.8	(-2)1.05219	(-4)7.17272	(-5)4.40196	(-6)2.57314	(-14)7.15299	(-15)3.83321
10.0	(-2)1.01010	(-4)6.74753	(-5)4.05782	(-6)2.32430	(-14)5.72014	(-15)3.00374

Взято из [8.16]

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

8.1. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V.I, Ch. 3. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973, Т.I.

8.2. Hobson E. W. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. — N.Y.: Chelsea Publishing Co., 1955. Русский перевод: Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. — М.: ИЛ, 1952.

8.3. Lense J. Kugelfunktionen. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1950.

8.4. MacRobert T. M. Spherical harmonics. — N.Y.: Dover Publications, 1948.

8.5. Magnus W., Oberhettinger F. Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. — B.: Springer-Verlag, 1948.

8.6. Prasad F. A tratise on spherical harmonics and the functions of Bessel and Lamé. — Benares City, India: Mohamandal Press, 1932. — P. II (Advanced).

8.7. Robin L. Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales. — P.: Gauthier-Villars, 1957, V. I—III.

8.8. Snow C. Hypergeometric and Legendre functions with applications to integral equations of potential theory. — Washington: Government Printing Office, 1952. — (NBS Applied Math. Series; 19).

8.9. Thorne R. C. The asymptotic expansion of Legendre functions of large degree and order. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1957, **249**, p. 597—620.

Таблицы

8.10. Bateman H. Some problems in potential theory. — Mess. of Math., 1922, 617, № 52, p. 73—75.

$P_n(\operatorname{ch}\sigma)$, $Q_n(\operatorname{ch}\sigma)$, $P'_n(\operatorname{ch}\sigma)$, $Q'_n(\operatorname{ch}\sigma)$;

$\operatorname{ch}\sigma = 1.1$, $n = 0(1)\,20$, 10D; $\operatorname{ch}\sigma = 1.2,\ 2,\ 3$;

$n = 0(1)10$, точные или 10D.

8.11. Centre National d'Études des Télécommunications. Tables des fonctions de Legendre associées. Fonction associée de première espèce P_n^m (cos θ). — P.: Éditions de La Revue d'Optique, 1952.

$n = -0.5(0.1)\,10$, $m = 0(1)\,5$, $\theta = 0°(1°)\,90°$.

Русский перевод см. в [8.28].

8.12. Centre National d'Études des Télécommunications. Tables numerique des fonctions associées de Legendre. Fonctions associées de première espèce $P_n^m(\cos\theta)$. — P.: Éditions de La Revue d'Optique, 1959.

$n = -0.5(0.1)\,10$, $m = 0(1)\,2$, $\theta = 0°(1°)\,180°$.

8.13. Clark G. C., Churchill S. W. Table of Legendre polynomials $P_n(\cos\theta)$ for $n = 0(1)80$ and $\theta = 0°(1°)180°$. (Engineering Research Institute Publications. — Ann. Arbor: Univ. of Michigan Press, 1957.

8.14. Gumprecht R. O., Sliepcevich G. M. Tables of functions of the first and second partial derivatives of Legendre polynomials. — Ann. Arbor: Univ. of Michigan Press, 1951. — Значения

$[x\pi_n - (1-x^2)\,\pi'_n]\cdot 10^4$ и $\pi_n\, 10^4$ для $\gamma =$

$= 0°(10°)170°$ (1°) 180°, $n = 1(1)420$, 5S.

8.15. Lynam M. E. Table of Legendre functions for com, plex arguments TG-323. — Baltimore: Johns Hopkins Univ. Applied Physics Laboratory, 1958.

8.16. National Bureau of Standards. Tables of associated Legendre functions. — N.Y.: Columbia Univ. Press, 1945.

$$P_n^m(\cos(\theta)),\ \frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\ \theta),\ n = 1(1)\,10,\ m(\leqslant n) =$$

$$= 0(1)\,4, \theta = 0°(1°)90°,\ 6S;\ P_n^m(x),\ \frac{d}{dx}P_n^m(x),\ n =$$

$$= 1(1)\,10,\ (-1)^m\, Q_n^m(x),\ (-1)^{m+1}\frac{d}{dx}Q_n^m(x),\ n =$$

$= 0(1)\,10$, $m(\leqslant n) = 0(1)4$, $x = 1(0.1)\,10$, 6S или точные; $i^{-n}P_n^m(ix)$, $n = 1(1)\,10$, $i^{n+2m+1}Q_n^m(ix)$,

$$i^{m+2m-1}\frac{d}{dx}Q_n^m(ix),\ n = 0(1)\,10,\ m(\leqslant n) = 0(1)\,4,$$

$$x = 0(0.1)\,10,\ 6S;\ P_{n+1\,2}^m(x),\ \frac{d}{dx}P_{n-1\,2}^m(x),$$

$$(-1)^m Q_{n-1/2}^m(x),\ (-1)^{m+1}\frac{d}{dx}Q_{n+1/2}^m(x),\ n = -1(1)4,$$

$m = 0(1)\,4$, $x = 1(0.1)10$, 4 — 6S.

Русский перевод: Таблицы присоединенных функций Лежандра. — М.: ВЦ АН СССР, 1965. — (БМТ; Вып. 26).

8.17. Prévost G. Tables des fonctions sphériques et de leurs intégrales. — Bordeaux and P.: Gauthier-Villars 1933.

$$P_n(x),\ \int_0^x P_n(t)\,dt,\ n = 1(1)10;\ P_n^j(x),$$

$$\int_0^x P_n^j(t)\,dt,\ n = 0(1)\,8,\ j = 0(1)\,n,\ x = 0(0.01)\,1,\ 5S.$$

Русский перевод см. в [8.28].

8.18. Tallqvist H. Sechsstellige Tafeln der 32 ersten Kugelfunktionen $P_n(\cos\theta)$. — Acta Soc. Sci. Fenn. Nova Series A, 1938, **II**, № 11.

$P_n(\cos\theta)$, $n = 1(1)\,32$, $\theta = 0°(10')\,90°$.

8.19. Tallqvist H. Sechsstellige Tafeln der 16 ersten Kugelfunktionen $P_n(\cos\theta)$. — Acta Soc. Sci. Fenn. Nova Series A, 1937, **II**, № 4.

$P_n(x)$, $n = 1(1)\,16$, $x = 0(0.001)\,1$, 6D.

8.20. Tallqvist H. Tafeln der Kugelfunktionen $P_{25}(\cos\theta)$ bis P_{32} (cos θ). — Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math. 1932, **VI**, № 10.

$P_n(\cos\theta)$, $n = 25(1)\,32$, $\theta = 0°(1°)\,90°$, 5D.

8.21. Tallqvist H. Tafeln der 24 ersten Kugelfunktionen $P_n(\cos\theta)$. — Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math., 1932, **VI**, № 3.

$P_n(\cos\theta)$, $n = 1(1)\,24$, $\theta = 0°(1°)\,90°$. 5D.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Книги

8.22. Градштейн Н. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.

8.23. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.-Л.: Физматгиз, 1963.

Таблицы

8.24. Белоусов С.Л. Таблицы нормированных присоединенных полиномов Лежандра. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.

$P_n^m(\cos\theta)$, $\theta = 0°(2.°5)\,90°$, $m = 0(1)\,36$,

$n = m(1)\,56$, 6D.

8.25. Журина М. И., Кармазина Л. Н. Таблицы и формулы для сферических функций $P^m_{-1/2+i\tau}(z)$. — М.: ВЦ АН СССР, 1962.

8.26. Журина М. И., Кармазина Л. Н. Таблицы функций Лежандра $P_{-1/2+i\tau}(x)$. — М.: Изд-во АН СССР, 1960, Т.I; 1962, Т.II; 1963, Т.III.

$P_{-1/2+i\tau}(x)$, $x = -0.9(0.1)\,2(0.2)\,5(0.5)\,10(10)\,60$,

$\tau = 0(0.01)\,50$, 7S или 7D;

$P^1_{-1/2+i\tau}(x)$, $x = -0.9(0.1)\,2(0.2)\,5(0.5)\,10(10)\,60$,

$\tau = 0(0.01)25$, 7S' или 7D.

8.27. Кармазина Л. Н. Таблицы функций Лежандра от мнимого аргумента. — М.: ВЦ АН СССР, 1972.

$P_{-1/2+i\tau}(ix)$, $x = 0(0.1)\,2(0.2)\,5(0.5)\,10(10)\,60$,

$\tau = 0(0.01)\,15$, 7S.

8.28. Таблицы присоединенных функций Лежандра. — М.: ВЦ АН СССР, 1962. — (БМТ; Вып. 14). — Перевод с франц. [8.11] и [8.17].

$P_n^m(\cos\theta)$, $n = -0.5(0.1)\,10$,

$m = 0(1)\,5$, $\theta = 0°(1°)\,90°$; $(-1)^m\,P_n^m(\mu)$,

$\int\limits_0^\mu P_n^m(t)\,dt$, $n = 0(1)\,8$, $m = 0(1) \leqslant n$;

$n = 9$, $m = 0, 1$; $n = 10$, $m = 0$.

$\mu = 0(0.01)\,1$, 5D.

Глава 9

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Ф. ОЛВЕР

СОДЕРЖАНИЕ

Обозначения

В этой главе приведены таблицы функций Бесселя только целого порядка, описание же свойств дается для функций любых порядков. Используются общепринятые обозначения:

$z = x + iy$; x и y — действительные числа;

n — целое положительное число или нуль;

ν и μ могут быть любыми, если не наложены специальные ограничения. В разделах, посвященных функциям Кельвина (9.9—9.11), ν предполагается действительным.

Обозначения, используемые здесь для функций Бесселя, такие же, как у Ватсона [9.15] и в таблицах [9.20—9.22; 9.28; 9.40; 9.41]. Физики часто обозначают функции $Y_\nu(z)$ через $N_\nu(z)$.

Разные авторы применяют следующие обозначения:

Олдис и Эйри —

$$G_n(z) \text{ вместо } -\frac{1}{2}\pi Y_n(z),$$

$$K_n(z) \text{ вместо } (-1)^n K_n(z);$$

Клиффорд —

$$C_n(x) \text{ вместо } x^{-n/2}J_n(2\sqrt{x});$$

Грэй, Мэтьюз и Мак-Роберт [9.9] —

$Y_n(z)$ вместо $\frac{1}{2}\pi Y_n(z) + (\ln 2 - \gamma) J_n(z)$,

$Y_\nu(z)$ вместо $\pi e^{\nu\pi i}\sec(\nu\pi) Y_\nu(z)$,

$G_\nu(z)$ вместо $\frac{1}{2}\pi i H_\nu^{(1)}(z)$;

Янке, Эмдэ и Лёш [9.32] —

$\Lambda_\nu(z)$ вместо $\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z)$;

Джеффриз —

$Hs_\nu(z)$ вместо $H_\nu^{(1)}(z)$,

$Hi_\nu(z)$ вместо $H_\nu^{(2)}(z)$,

$Kh_\nu(z)$ вместо $(2/\pi)K_\nu(z)$;

Гейне —

$K_n(z)$ вместо $-\frac{1}{2}\pi Y_n(z)$;

Нейман —

$Y^n(z)$ вместо $\frac{1}{2}\pi Y_n(z) + (\ln 2 - \gamma) J_n(z)$;

Уиттекер и Ватсон [9.18] —

$K_\nu(z)$ вместо $\cos(\nu\pi) K_\nu(z)$.

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ J И Y

9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА

Дифференциальное уравнение

9.1.1. $$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = 0.$$

Решениями этого уравнения являются функции Бесселя первого рода $J_{\pm\nu}(z)$, второго рода $Y_\nu(z)$ и третьего рода $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ (последние также называются *функциями Ханкеля)*. Каждая из них является аналитической функцией z во всей комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси. Для фиксированного z ($z \neq 0$) каждая из них является целой функцией параметра ν. Когда $\nu = \pm n$, $J_\nu(z)$ не имеет особых точек и является целой функцией z.

Отметим следующие характерные особенности различных решений:

$J_\nu(z)$ ($\mathrm{Re}\,\nu \geqslant 0$) ограничена, когда $z \to 0$ в любой ограниченной области изменения $\arg z$;

$J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ линейно независимы, кроме того случая, когда ν — целое;

$J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ линейно независимы при любых значениях ν.

$H_\nu^{(1)}(z)$ стремится к нулю, когда $|z| \to \infty$ в секторе $0 < \arg z < \pi$; $H_\nu^{(2)}(z)$ стремится к нулю, когда $|z| \to \infty$ в секторе $-\pi < \arg z < 0$. Для всех значений ν функции $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ линейно независимы.

Соотношения между решениями

9.1.2. $$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}.$$

Правая часть этого уравнения заменяется ее предельным значением, если ν — целое или нуль.

9.1.3. $$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) = i\operatorname{cosec}(\nu\pi)\{e^{-\nu\pi i}J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\}.$$

9.1.4. $$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) = i\operatorname{cosec}(\nu\pi)\{J_{-\nu}(z) - e^{\nu\pi i}J_\nu(z)\}.$$

9.1.5. $$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z),\quad Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z).$$

9.1.6. $$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(z),\quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu\pi i}H_\nu^{(2)}(z).$$

Пределы при малых значениях аргумента

(ν — фиксированное, $z \to 0$)

9.1.7. $$J_\nu(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Big/ \Gamma(\nu+1)\quad (\nu \neq -1, -2, -3, \ldots).$$

9.1.8. $$Y_0(z) \sim -iH_0^{(1)}(z) \sim iH_0^{(2)}(z) \sim \frac{2}{\pi}\ln z.$$

9.1.9. $$Y_\nu(z) \sim -iH_\nu^{(1)}(z) \sim iH_\nu^{(2)}(z) \sim -\frac{1}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\quad (\mathrm{Re}\,\nu > 0).$$

Разложения в ряд

9.1.10. $$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

9.1.11. $$Y_n(z) = -\frac{(z/2)^{-n}}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z^2}{4}\right)^k + \frac{2}{\pi}\ln\frac{z}{2}\,J_n(z) - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)\}\frac{(-z^2/4)^k}{k!(n+k)!},$$

где $\psi(n)$ определена формулой 6.3.2.

9.1.12. $$J_0(z) = 1 - \frac{z^2/4}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} - \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \ldots$$

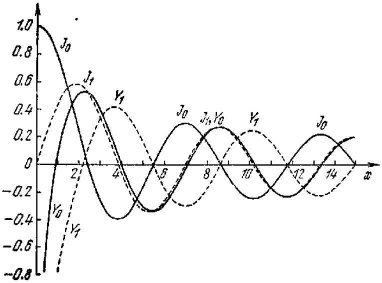


Рис. 9.1. $J_0(x)$, $Y_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_1(x)$.

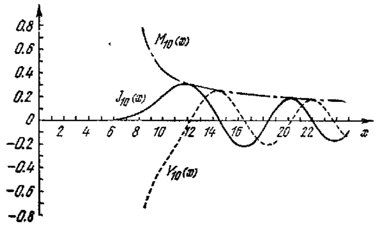


Рис. 9.2. $J_{10}(x)$, $Y_{10}(x)$ и $M_{10}(x) = \sqrt{J_{10}^2(x) + Y_{10}^2(x)}$.

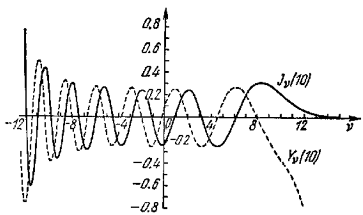


Рис. 9.3. $J_\nu(10)$ и $Y_\nu(10)$.

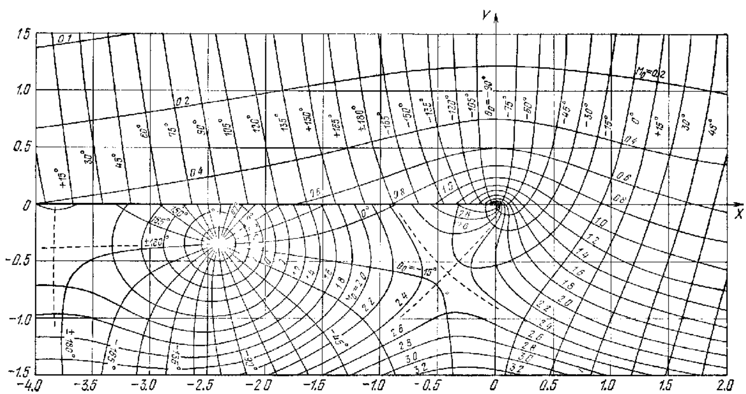


Рис. 9.4. Карта горизонталей модуля и фазы функции Ханкеля $H_0^{(1)}(x+iy) = M_0 e^{i\theta_0}$.

9.1.13. $$Y_0(z)=\frac{2}{\pi}\left\{\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma\right\}J_0(z)+\frac{2}{\pi}\left\{\frac{z^2/4}{(1!)^2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2}-\dots\right\}.$$

9.1.14. $$J_\nu(z)\,J_\mu(z)=(z/2)^{\nu+\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+\mu+2k+1)\,(z^2/4)^k}{\Gamma(\nu+k+1)\,\Gamma(\mu+k+1)\,\Gamma(\nu+\mu+k+1)\,k!}.$$

Вронскианы

9.1.15. $$W\{J_\nu(z),\ J_{-\nu}(z)\}=J_{\nu+1}(z)\,J_{-\nu}(z)+J_\nu(z)\,J_{-(\nu+1)}(z)=-2\sin(\nu\pi)/(\pi z).$$

9.1.16. $$W\{J_\nu(z),\ Y_\nu(z)\}=J_{\nu+1}(z)\,Y_\nu(z)-J_\nu(z)\,Y_{\nu+1}(z)=2/(\pi z).$$

9.1.17. $$W\{H_\nu^{(1)}(z),\ H_\nu^{(2)}(z)\}=H_{\nu+1}^{(1)}(z)\,H_\nu^{(2)}(z)-H_\nu^{(1)}(z)H_{\nu+1}^{(2)}(z)=-4i/(\pi z).$$

Интегральные представления

9.1.18. $$J_0(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\sin\theta)\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\cos\theta)\,d\theta.$$

9.1.19. $$Y_0(z)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\cos(z\cos\theta)\times\{\gamma+\ln(2z\sin^2\theta)\}\,d\theta.$$

9.1.20. $$J_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\pi\cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta=\frac{2(z/2)^\nu}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^1(1-t^2)^{\nu-1/2}\cos(zt)\,dt\quad(\mathrm{Re}\,\nu>-1/2).$$

9.1.21. $$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\sin\theta-n\theta)\,d\theta=\frac{i^{-n}}{\pi}\int_0^\pi e^{iz\cos\theta}\cos(n\theta)\,d\theta.$$

9.1.22. $$J_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\sin\theta-\nu\theta)\,d\theta-\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,t-\nu t}\,dt\quad(|\arg z|<\pi/2),$$

$$Y_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin(z\sin\theta-\nu\theta)\,d\theta-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\{e^{\nu t}+e^{-\nu t}\cos(\nu\pi)\}\,e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,dt\quad(|\arg z|<\pi/2).$$

9.1.23. $$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\sin(x\,\mathrm{ch}\,t)\,dt\quad(x>0),$$

$$Y_0(x)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos(x\,\mathrm{ch}\,t)\,dt\quad(x>0).$$

9.1.24. $$J_\nu(x)=\frac{2(x/2)^{-\nu}}{\pi^{1/2}\Gamma(1/2-\nu)}\int_1^\infty\frac{\sin(xt)\,dt}{(t^2-1)^{\nu+1/2}}\quad(|\mathrm{Re}\,\nu|<1/2,\ x>0).$$

$$Y_\nu(x)=-\frac{2(x/2)^{-\nu}}{\pi^{1/2}\Gamma(1/2-\nu)}\int_1^\infty\frac{\cos(xt)\,dt}{(t^2-1)^{\nu+1/2}}\quad(|\mathrm{Re}\,\nu|<1/2,\ x>0).$$

9.1.25. $$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty+\pi i}e^{z\,\mathrm{sh}\,t-\nu t}\,dt\quad(|\arg z|<\pi/2),$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty-\pi i}e^{z\,\mathrm{sh}\,t-\nu t}\,dt\quad(|\arg z|<\pi/2).$$

9.1.26. $$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(-t)\,(x/2)^{\nu+2t}}{\Gamma(\nu+t+1)}\,dt\quad(\mathrm{Re}\,\nu>0,\ x>0).$$

В последнем интеграле путь интегрирования должен проходить слева от точек $t=0,\ 1,\ 2,\ \dots$

Рекуррентные соотношения

9.1.27. $$\mathscr{C}_{\nu-1}(z)+\mathscr{C}_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}\mathscr{C}_\nu(z),$$

$$\mathscr{C}_{\nu-1}(z)-\mathscr{C}_{\nu+1}(z)=2\mathscr{C}_\nu'(z),$$

$$\mathscr{C}_\nu'(z)=\mathscr{C}_{\nu-1}(z)-\frac{\nu}{z}\mathscr{C}_\nu(z),$$

$$\mathscr{C}_\nu'(z)=-\mathscr{C}_{\nu+1}(z)+\frac{\nu}{z}\mathscr{C}_\nu(z).$$

$\mathscr{C}$ означает J, Y, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ или любую линейную комбинацию этих функций, коэффициенты которой не зависят от z и ν.

9.1.28. $J_0'(z)=-J_1(z)$, $Y_0'(z)=-Y_1(z)$.

Если $f_\nu(z)=z^p\,\mathscr{C}_\nu(\lambda z^q)$, где p, q и λ не зависят от ν, то

9.1.29. $f_{\nu-1}(z)+f_{\nu+1}(z)=(2\nu/\lambda)\,z^{-q}f_\nu(z),$

$$(p+\nu q)\,f_{\nu-1}(z)+(p-\nu q)\,f_{\nu+1}(z)=(2\nu/\lambda)\,z^{1-q}f'_\nu(z),$$

$$zf'_\nu(z)=\lambda qz^q f_{\nu-1}(z)+(p-\nu q)\,f_\nu(z),$$

$$zf'_\nu(z)=-\lambda qz^q f_{\nu+1}(z)+(p+\nu q)\,f_\nu(z).$$

Производные

9.1.30. $$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\{z^\nu\,\mathscr{C}_\nu(z)\}=z^{\nu-k}\,\mathscr{C}_{\nu-k}(z),$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\{z^{-\nu}\,\mathscr{C}_\nu(z)\}=(-1)^k z^{-\nu-k}\,\mathscr{C}_{\nu+k}(z)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

9.1.31. $$\mathscr{C}_\nu^{(k)}(z)=\frac{1}{2^k}\left\{\mathscr{C}_{\nu-k}(z)-\binom{k}{1}\mathscr{C}_{\nu-k+2}(z)+\right.$$

$$\left.+\binom{k}{2}\mathscr{C}_{\nu-k+4}(z)-\ldots+(-1)^k\,\mathscr{C}_{\nu+k}(z)\right\}\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Рекуррентные соотношения для произведений функций

Пусть

9.1.32. $p_\nu=J_\nu(a)\ Y_\nu(b)-J_\nu(b)\ Y_\nu(a),$

$$q_\nu=J_\nu(a)\ Y'_\nu(b)-J'_\nu(b)\ Y_\nu(a),$$

$$r_\nu=J'_\nu(a)\ Y_\nu(b)-J_\nu(b)\ Y'_\nu(a),$$

$$s_\nu=J'_\nu(a)\ Y'_\nu(b)-J'_\nu\quad)\ Y'_\nu(a).$$

Тогда

9.1.33. $$p_{\nu+1}-p_{\nu-1}=-\frac{2\nu}{a}\,q_\nu-\frac{2\nu}{b}\,r_\nu,$$

$$q_{\nu+1}+r_\nu=\frac{\nu}{a}\,p_\nu-\frac{\nu+1}{b}\,p_{\nu+1},$$

$$r_{\nu+1}+q_\nu=\frac{\nu}{b}\,p_\nu-\frac{\nu+1}{a}\,p_{\nu+1},$$

$$s_\nu=\frac{1}{2}\,p_{\nu+1}+\frac{1}{2}\,p_{\nu-1}-\frac{\nu^2}{ab}\,p_\nu,$$

9.1.34. $$p_\nu s_\nu-q_\nu r_\nu=\frac{4}{\pi^2 ab}.$$

Аналитическое продолжение

В формулах 9.1.35 — 9.1.38 m — целое.

9.1.35. $J_\nu(ze^{m\pi i})=e^{m\nu\pi i}J_\nu(z).$

9.1.36. $Y_\nu(ze^{m\pi i})=$

$$=e^{-m\nu\pi i}\,Y_\nu(z)+2i\sin(m\nu\pi)\operatorname{ctg}(\nu\pi)\,J_\nu(z).$$

9.1.37. $\sin(\nu\pi)\ H_\nu^{(1)}(ze^{m\pi i})=$

$$=-\sin\{(m-1)\,\nu\pi\}\,H_\nu^{(1)}(z)-e^{-\nu\pi i}\sin(m\nu\pi)\ H_\nu^{(2)}(z).$$

9.1.38. $\sin(\nu\pi)\ H_\nu^{(2)}(ze^{m\pi i})=$

$$=\sin\{(m+1)\,\nu\pi\}\ H_\nu^{(2)}(z)+e^{\nu\pi i}\sin(m\nu\pi)\ H_\nu^{(1)}(z).$$

9.1.39. $H_\nu^{(1)}(ze^{\pi i})=-e^{-\nu\pi i}H_\nu^{(2)}(z),$

$$H_\nu^{(2)}(ze^{-\pi i})=-e^{\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(z).$$

9.1.40. $J_\nu(\bar z)=\overline{J_\nu(z)},\ \ Y_\nu(\bar z)=\overline{Y_\nu(z)},$

$$H_\nu^{(1)}(\bar z)=\overline{H_\nu^{(2)}(z)},\ \ H_\nu^{(2)}(\bar z)=\overline{H_\nu^{(1)}(z)}$$

(ν — действительное).

Производящая функция и связанные с ней ряды

9.1.41. $$e^{z(t-1/t)/2}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}t^kJ_k(z)\qquad(t\neq 0).$$

9.1.42. $$\cos(z\sin\theta)=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(z)\cos(2k\,\theta).$$

9.1.43. $$\sin(z\sin\theta)=2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(z)\sin\{(2k+1)\,\theta\}.$$

9.1.44. $$\cos(z\cos\theta)=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_{2k}(z)\cos(2k\theta).$$

9.1.45. $$\sin(z\cos\theta)=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kJ_{2k+1}(z)\cos\{(2k+1)\,\theta\}.$$

9.1.46. $1=J_0(z)+2J_2(z)+2J_4(z)+2J_6(z)+\ldots$

9.1.47. $\cos z=J_0(z)-2J_2(z)+2J_4(z)-2J_6(z)+\ldots$

9.1.48. $\sin z=2J_1(z)-2J_3(z)+2J_5(z)-\ldots$

Другие дифференциальные уравнения

9.1.49. $$w''+\left(\lambda^2-\frac{\nu^2-1/4}{z^2}\right)w=0,\qquad w=z^{1/2}\,\mathscr{C}_\nu(\lambda z).$$

9.1.50. $$w''+\left(\frac{\lambda^2}{4z}-\frac{\nu^2-1}{4z^2}\right)w=0,\qquad w=z^{1/2}\,\mathscr{C}_\nu(\lambda z^{1/2}).$$

9.1.51. $w''+\lambda^2z^{p-2}\,w=0,\ \ w=z^{1/2}\,\mathscr{C}_{1/p}(2\lambda z^{p/2}/p).$

9.1.52. $$w''-\frac{2\nu-1}{z}\,w'+\lambda^2w=0,\qquad w=z^\nu\,\mathscr{C}_\nu(\lambda z).$$

9.1.53. $z^2w''+(1-2p)\,zw'+(\lambda^2q^2z^{2q}+p^2-\nu^2q^2)\,w=0,$

$$w=z^p\,\mathscr{C}_\nu(\lambda z^q).$$

9.1.54. $w''+(\lambda^2e^{2z}-\nu^2)\,w=0,\qquad w=\mathscr{C}_\nu(\lambda e^z).$

9.1.55. $z^2(z^2-\nu^2)\,w''+z(z^2-3\nu^2)\,w'+$

$$+\{(z^2-\nu^2)^2-(z^2+\nu^2)\}\,w=0,\qquad w=\mathscr{C}'_\nu(z).$$

9.1.56. $w^{(2n)}=(-1)^n\,\lambda^{2n}z^{-n}w,$

$$w=z^{n/2}\,\mathscr{C}_n(2\lambda\alpha z^{1/2}),$$

где α — любое значение корня степени $2n$ из единицы.

Дифференциальные уравнения для произведений

Обозначения: $\vartheta\equiv z\dfrac{d}{dz}$, $\mathscr{C}_\nu(z)$, $\mathscr{D}_\mu(z)$ — любые цилиндрические функции порядков ν и μ соответственно.

9.1.57. $\{\vartheta^4 - 2(\nu^2+\mu^2)\vartheta^2 + (\nu^2-\mu^2)^2\} w + 4z^2(\vartheta+1)(\vartheta+2) w = 0, \quad w = \mathscr{C}_\nu(z)\,\mathscr{D}_\mu(z).$

9.1.58. $\vartheta(\vartheta^2 - 4\nu^2) w + 4z^2(\vartheta+1) w = 0, \quad w = \mathscr{C}_\nu(z)\,\mathscr{D}_\nu(z).$

9.1.59. $z^3 w''' + z(4z^2 + 1 - 4\nu^2) w' + (4\nu^2 - 1) w = 0, \quad w = z\mathscr{C}_\nu(z)\,\mathscr{D}_\nu(z).$

Верхние границы

9.1.60. $|J_\nu(x)| \leqslant 1 \quad (\nu \geqslant 0), \quad |J_\nu(x)| \leqslant 1/\sqrt{2} \quad (\nu \geqslant 1).$

9.1.61. $0 < J_\nu(\nu) < \dfrac{2^{1/3}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)\,\nu^{1/3}} \quad (\nu > 0).$

9.1.62. $|J_\nu(z)| \leqslant \dfrac{|z/2|^\nu e^{|\operatorname{Im} z|}}{\Gamma(\nu+1)} \quad (\nu \geqslant -1/2).$

9.1.63. $|J_n(nz)| \leqslant \left| \dfrac{z^n \exp\{n\sqrt{1-z^2}\}}{\{1+\sqrt{1-z^2}\}^n} \right|.$

Производные относительно порядка

9.1.64. $$\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(z) = J_\nu(z)\ln(z/2) - (z/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\psi(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} \frac{(z^2/4)^k}{k!}.$$

9.1.65. $$\frac{\partial}{\partial\nu} Y_\nu(z) = \operatorname{ctg}(\nu\pi)\left\{\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(z) - \pi Y_\nu(z)\right\} - \operatorname{cosec}(\nu\pi)\frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(z) - \pi J_\nu(z)$$ $$(\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

9.1.66. $$\left[\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(z)\right]_{\nu=n} = \frac{\pi}{2} Y_n(z) + \frac{n!(z/2)^{-n}}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z/2)^k J_k(z)}{(n-k)\,k!}.$$

9.1.67. $$\left[\frac{\partial}{\partial\nu} Y_\nu(z)\right]_{\nu=n} = -\frac{\pi}{2} J_n(z) + \frac{n!(z/2)^{-n}}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z/2)^k Y_k(z)}{(n-k)\,k!}.$$

9.1.68. $$\left[\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(z)\right]_{\nu=0} = \frac{\pi}{2} Y_0(z), \qquad \left[\frac{\partial}{\partial\nu} Y_\nu(z)\right]_{\nu=0} = -\frac{\pi}{2} J_0(z).$$

Выражения через гипергеометрические функции

9.1.69. $$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{z^2}{4}\right) = \frac{(z/2)^\nu e^{-iz}}{\Gamma(\nu+1)} M\left(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, 2iz\right),$$

9.1.70. $$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \lim F\left(\lambda, \mu; \nu+1; -\frac{z^2}{4\lambda\mu}\right),$$

где λ, $\mu \to \infty$, принимая действительные или комплексные значения; z и ν фиксированы; ${}_0F_1$ — обобщенная гипергеометрическая функция; о функциях $M(a, b, z)$ и $F(a, b; c; z)$ см. в гл. 13 и 15.

Связь с функциями Лежандра

(μ и x фиксированы; $\nu \to \infty$, принимая действительные положительные значения)

9.1.71. $$\lim\left\{\nu^\mu P_\nu^{-\mu}\left(\cos\frac{x}{\nu}\right)\right\} = J_\mu(x) \quad (x > 0).$$

9.1.72. $$\lim\left\{\nu^\mu Q_\nu^{-\mu}\left(\cos\frac{x}{\nu}\right)\right\} = -\frac{1}{2}\pi Y_\mu(x) \quad (x > 0).$$

Определения $P_\nu^{-\mu}$ и $Q_\nu^{-\mu}$ см. в гл. 8.

Разложения в непрерывную дробь

9.1.73. $$\frac{J_\nu(z)}{J_{\nu-1}(z)} = \frac{1}{2\nu z^{-1}-}\,\frac{1}{2(\nu+1)z^{-1}-}\,\frac{1}{2(\nu+2)z^{-1}-}\cdots = \frac{z/2\nu}{1-}\,\frac{z^2/4\nu(\nu+1)}{1-}\,\frac{z^2/4(\nu+1)(\nu+2)}{1-}\cdots$$

Теорема умножения

9.1.74. $$\mathscr{C}_\nu(\lambda z) = \lambda^{\pm\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^k (\lambda^2-1)^k (z/2)^k}{k!} \mathscr{C}_{\nu\pm k}(z) \quad (|\lambda^2 - 1| < 1).$$

Если $\mathscr{C} = J$ и взяты верхние знаки, ограничение на λ не нужно.

Эта формула дает выражение $\mathscr{C}_\nu(re^{i\theta})$ через $\mathscr{C}_{\nu\pm k}(r)$.

Теорема сложения Неймана

9.1.75. $$\mathscr{C}_\nu(u \pm v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathscr{C}_{\nu\mp k}(u) J_k(v) \quad (|v| < |u|).$$

Если $\mathscr{C} = J$ и ν — целое или нуль, то ограничение не нужно. Частные случаи:

9.1.76. $$1 = J_0^2(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(z).$$

9.1.77. $$0 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k J_k(z) J_{2n-k}(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(z) J_{2n+k}(z) \quad (n \geqslant 1).$$

9.1.78. $$J_n(2z) = \sum_{k=0}^{n} J_k(z) J_{n-k}(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(z) J_{n+k}(z).$$

Теорема сложения Графа

9.1.79. $$\mathscr{C}_\nu(w)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\nu\chi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathscr{C}_{\nu+k}(u) J_k(v)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}k\alpha \quad (|ve^{\pm i\alpha}| < |u|).$$

Теорема сложения Гегенбауэра

9.1.80. $$\frac{\mathscr{C}_\nu(w)}{w^\nu} = 2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\frac{\mathscr{C}_{\nu+k}(u)}{u^\nu}\times$$

$$\times\frac{J_{\nu+k}(v)}{v^\nu}C_k^{(\nu)}(\cos\alpha)\quad(\nu\neq 0,\ -1,\ \ldots,|ve^{\pm i\alpha}|<|u|).$$

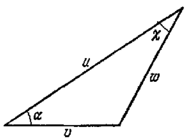
В 9.1.79 и 9.1.80

$$w=\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\alpha},$$

$$u-v\cos\alpha=w\cos\chi,\quad v\sin\alpha=w\sin\chi,$$

ветви выбраны так, что $w\to u$ и $\chi\to 0$, когда $v\to 0$. $C_k^{(\nu)}(\cos\alpha)$ — многочлены Гегенбауэра (см. гл. 22).

Если u и v — действительные положительные, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, то w и x — действительные неотрицательные. Геометрическая интерпретация последнего соотношения показана на рисунке.



Ограничение $|ve^{\pm i\alpha}|<|u|$ не нужно в 9.1.79, если $\mathscr{C}=J$ и v — целое или нуль, а в 9.1.80 — если $\mathscr{C}=J$.

Вырожденная форма ($u=\infty$)

9.1.81. $$e^{iv\cos\alpha}=\Gamma(\nu)\ (v/2)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,i^k\times$$

$$\times J_{\nu+k}(v)\ C_k^{(\nu)}(\cos\alpha)\quad(\nu\neq 0,\ -1,\ldots).$$

Разложение по функциям Бесселя (разложение Неймана)

9.1.82. $$f(z)=a_0J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_k(z)\quad(|z|<c),$$

где c — расстояние от точки $z=0$ до ближайшей особой точки функции $f(z)$,

9.1.83. $$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=c'}f(t)\,O_k(t)\,dt\quad(0<c'<c).$$

$O_k(t)$ — многочлен Неймана, который определяется следующей производящей функцией:

9.1.84. $$\frac{1}{t-z}=J_0(z)\,O_0(t)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_k(z)\,O_k(t)$$

$$(|z|<|t|),$$

$O_n(t)$ — многочлен степени $n+1$ от $1/t$, $O_0(t)=1/t$,

9.1.85. $$O_n(t)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\leqslant n/2}\frac{n(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{2}{t}\right)^{n-2k+1}$$

$$(n=1,\ 2,\ldots).$$

Более общий вид разложения

9.1.86. $$f(z)=a_0J_\nu(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_{\nu+k}(z),$$

называемый также *разложением Неймана*, исследуется в работах [9.7] и [9.15]. Примерами разложений Неймана являются формулы 9.1.41 — 9.1.48 и теоремы сложения. Другие примеры:

9.1.87. $$(z/2)^\nu=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu+2k)\,\Gamma(\nu+k)}{k!}J_{\nu+2k}(z)$$

$$(\nu\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots),$$

9.1.88. $$Y_n(z)=-\frac{n!(z/2)^{-n}}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z/2)^kJ_k(z)}{(n-k)\,k!}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\{\ln(z/2)-\psi(n+1)\}\,J_n(z)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+2k)\,J_{n+2k}(z)}{k(n+k)},$$

где $\psi(n)$ задается формулой 6.3.2.

9.1.89. $$Y_0(z)=\frac{2}{\pi}\{\ln(z/2)+\gamma\}\,J_0(z)-$$

$$-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{J_{2k}(z)}{k}.$$

9.2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА

Главные члены асимптотических формул

(ν фиксировано и $|z|\to\infty$)

9.2.1. $$J_\nu(z)=\sqrt{2/(\pi z)}\left\{\cos\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)+\right.$$

$$\left.+e^{|\operatorname{Im} z|}O(|z|^{-1})\right\}\quad(|\arg z|<\pi).$$

9.2.2. $$Y_\nu(z)=\sqrt{2/(\pi z)}\left\{\sin\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)+\right.$$

$$\left.+e^{|\operatorname{Im} z|}O(|z|^{-1})\right\}\quad(|\arg z|<\pi).$$

9.2.3. $$H_\nu^{(1)}(z)\sim\sqrt{2/(\pi z)}\,e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}$$

$$(-\pi<\arg z<2\pi).$$

9.2.4. $$H_\nu^{(2)}(z)\sim\sqrt{2/(\pi z)}\,e^{-i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}$$

$$(-2\pi<\arg z<$$

Асимптотические разложения Ханкеля
(ν фиксировано и $|z| \to \infty$)

9.2.5. $J_\nu(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\,\{P(\nu, z)\cos\chi - Q(\nu, z)\sin\chi\} \quad (|\arg z| < \pi).$

9.2.6. $Y_\nu(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\,\{P(\nu, z)\sin\chi + Q(\nu, z)\cos\chi\} \quad (|\arg z| < \pi).$

9.2.7. $H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\,\{P(\nu, z) + iQ(\nu, z)\}\,e^{i\chi} \quad (-\pi < \arg z < 2\pi).$

9.2.8. $H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\,\{P(\nu, z) - iQ(\nu, z)\}\,e^{-i\chi} \quad (-2\pi < \arg z < \pi).$

Здесь $\chi = z - \left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}\right)\pi$. Если обозначить $4\nu^2$ через μ, то

9.2.9. $$P(\nu, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu, 2k)}{(2z)^{2k}} = 1 - \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4} - \ldots,$$

9.2.10. $$Q(\nu, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu, 2k+1)}{(2z)^{2k+1}} = \frac{\mu-1}{8z} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \ldots$$

Пусть ν — действительное неотрицательное, z — положительное и в разложении $P(\nu, z)$ взято k членов. Тогда при $k > \nu/2 - 1/4$ остаточный член этого разложения не превосходит по абсолютной величине $(k+1)$-го члена и имеет тот же знак. При $k > \nu/2 - 3/4$ то же самое справедливо для $Q(\nu, z)$.

Асимптотические разложения производных

В этом разделе приняты те же условия и обозначения, что и в предыдущем.

9.2.11. $J'_\nu(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\,\{-R(\nu, z)\sin\chi - S(\nu, z)\cos\chi\} \quad (|\arg z| < \pi).$

9.2.12. $Y'_\nu(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\,\{R(\nu, z)\cos\chi - S(\nu, z)\sin\chi\} \quad (|\arg z| < \pi).$

9.2.13. $H_\nu^{(1)\prime}(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\,\{iR(\nu, z) - S(\nu, z)\}\,e^{i\chi} \quad (-\pi < \arg z < 2\pi).$

9.2.14. $H_\nu^{(2)\prime}(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\,\{-iR(\nu, z) - S(\nu, z)\}\,e^{-i\chi} \quad (-2\pi < \arg z < \pi).$

9.2.15. $$R(\nu, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4\nu^2 + 16k^2 - 1}{4\nu^2 - (4k-1)^2} \frac{(\nu, 2k)}{(2z)^{2k}} = 1 - \frac{(\mu-1)(\mu+15)}{2!(8z)^2} + \ldots$$

9.2.16. $$S(\nu, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4\nu^2 + 4(2k+1)^2 - 1}{4\nu^2 - (4k+1)^2} \frac{(\nu, 2k+1)}{(2z)^{2k+1}} = \frac{(\mu+3)}{8z} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu+35)}{3!(8z)^3} + \ldots$$

Модуль и фаза
(ν фиксировано, $x > 0$)

9.2.17. $M_\nu = |H_\nu^{(1)}(x)| = \sqrt{J_\nu^2(x) + Y_\nu^2(x)},$

$\theta_\nu = \arg H_\nu^{(1)}(x) = \operatorname{arctg}(Y_\nu(x)/J_\nu(x)).$

9.2.18. $N_\nu = |H_\nu^{(1)\prime}(x)| = \sqrt{J_\nu'^2(x) + Y_\nu'^2(x)},$

$\varphi_\nu = \arg H_\nu^{(1)\prime}(x) = \operatorname{arctg}(Y'_\nu(x)/J'_\nu(x)).$

9.2.19. $J_\nu(x) = M_\nu\cos\theta_\nu,\quad Y_\nu(x) = M_\nu\sin\theta_\nu.$

9.2.20. $J'_\nu(x) = N_\nu\cos\varphi_\nu,\quad Y'_\nu(x) = N_\nu\sin\varphi_\nu.$

В следующих соотношениях штрихи означают дифференцирование по x.

9.2.21. $M_\nu^2\theta'_\nu = 2/(\pi x),\quad N_\nu^2\varphi'_\nu = 2(x^2 - \nu^2)/(\pi x^3).$

9.2.22. $N_\nu^2 = M_\nu'^2 + M_\nu^2\theta_\nu'^2 = M_\nu'^2 + 4/(\pi x M_\nu)^2.$

9.2.23. $(x^2 - \nu^2)M_\nu M'_\nu + x^2 N_\nu N'_\nu + xN_\nu^2 = 0.$

9.2.24. $\operatorname{tg}(\varphi_\nu - \theta_\nu) = M_\nu\theta'_\nu/M'_\nu = 2/(\pi x M_\nu M'_\nu),$

$M_\nu N_\nu \sin(\varphi_\nu - \theta_\nu) = 2/(\pi x).$

9.2.25. $x^2 M''_\nu + xM'_\nu + (x^2 - \nu^2)M_\nu - 4/(\pi^2 M_\nu^3) = 0.$

9.2.26. $x^3 w''' + x(4x^2 + 1 - 4\nu^2)w' + (4\nu^2 - 1)w = 0,\quad w = xM_\nu^2.$

9.2.27. $$\theta_\nu'^2 + \frac{1}{2}\frac{\theta_\nu'''}{\theta'_\nu} - \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''_\nu}{\theta'_\nu}\right)^2 = 1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}.$$

Асимптотические разложения модуля и фазы

(ν фиксировано, x — большое положительное число, $\mu = 4\nu^2$)

9.2.28. $$M_\nu^2 \sim \frac{2}{\pi x}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\mu-1}{(2x)^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{(\mu-1)(\mu-9)}{(2x)^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{(2x)^6} + \ldots\right\}.$$

9.2.29. $$\theta_\nu \sim x - \left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{\mu-1}{2(4x)} + \frac{(\mu-1)(\mu-25)}{6(4x)^3} + \frac{(\mu-1)(\mu^2 - 114\mu + 1073)}{5(4x)^5} + \frac{(\mu-1)(5\mu^3 - 1535\mu^2 + 54703\mu - 375733)}{14(4x)^7} + \ldots$$

9.2.30. $N_\nu^2 \sim$

$$\sim \frac{2}{\pi x}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\mu-3}{(2x)^2} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\frac{(\mu-1)(\mu-45)}{(2x)^4} - \dots\right\}.$$

Общий член этого разложения имеет вид

$$-\frac{1\cdot 1\cdot 3\dots(2k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2k)} \times$$
$$\times \frac{(\mu-1)(\mu-9)\dots\{\mu-(2k-3)^2\}\{\mu-(2k+1)(2k-1)^2\}}{(2x)^{2k}}.$$

9.2.31. $\Phi_\nu \sim x -$

$$-\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{\mu+3}{2(4x)} + \frac{\mu^2+46\mu-63}{6(4x)^3} +$$
$$+ \frac{\mu^3+185\mu^2-2053\mu+1899}{5(4x)^5} + \dots$$

Если $\nu \geqslant 0$ и в разложении 9.2.28 взято k членов, то при $k > \nu - 1/2$ остаточный член не превосходит по абсолютной величине $(k+1)$-го члена и имеет тот же знак.

9.3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОРЯДКА

Главные члены асимптотических формул

($\nu \to \infty$, принимая действительные положительные значения, остальные переменные фиксированы)

9.3.1. $J_\nu(z) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\left(\dfrac{ez}{2\nu}\right)^\nu,$

$$Y_\nu(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\left(\frac{ez}{2\nu}\right)^{-\nu}.$$

9.3.2. $J_\nu(\nu\ \mathrm{sech}\ \alpha) \sim \dfrac{e^{\nu(\mathrm{th}\ \alpha-\alpha)}}{\sqrt{2\pi\nu\ \mathrm{th}\ \alpha}} \quad (\alpha > 0),$

$$Y_\nu(\nu\ \mathrm{sech}\ \alpha) \sim -\frac{e^{\nu(\alpha-\mathrm{th}\ \alpha)}}{\sqrt{(\pi\nu\ \mathrm{th}\ \alpha)/2}} \quad (\alpha>0).$$

9.3.3. $J_\nu(\nu\sec\beta) = \sqrt{2/(\pi\nu\ \mathrm{tg}\ \beta)}\ \times$

$$\times\ \{\cos(\nu\ \mathrm{tg}\ \beta - \nu\beta - \pi/4) + O(\nu^{-1})\} \quad (0<\beta<\pi/2),$$

$$Y_\nu(\nu\sec\beta) = \sqrt{2/(\pi\nu\ \mathrm{tg}\ \beta)}\ \times$$
$$\times\ \{\sin(\nu\ \mathrm{tg}\ \beta - \nu\beta - \pi/4) + O(\nu^{-1})\} \quad (0<\beta<\pi/2).$$

9.3.4. $J_\nu(\nu + z\nu^{1/3}) = 2^{1/3}\nu^{-1/3}\mathrm{Ai}(-2^{1/3}z) + O(\nu^{-1}),$

$$Y_\nu(\nu + z\nu^{1/3}) = -2^{1/3}\nu^{-1/3}\mathrm{Bi}(-2^{1/3}z) + O(\nu^{-1}).$$

9.3.5. $J_\nu(\nu) \sim \dfrac{2^{1/3}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}\cdot\dfrac{1}{\nu^{1/3}},$

$$Y_\nu(\nu) \sim -\frac{2^{1/3}}{3^{1/6}\Gamma(2/3)}\cdot\frac{1}{\nu^{1/3}}.$$

9.3.6*). $J_\nu(\nu z) = \left(\dfrac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{1/4}\left\{\dfrac{\mathrm{Ai}(\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{1/3}} + \right.$

$$\left. + \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}\right)}{1+\nu^{1/6}|\zeta|^{1/4}}\,O\left(\frac{1}{\nu^{4/3}}\right)\right\} \quad (|\arg z| < \pi),$$

$$Y_\nu(\nu z) = -\left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{1/4}\left\{\frac{\mathrm{Bi}(\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{1/3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\exp\left|\mathrm{Re}\left(\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}\right)\right|}{1+\nu^{1/6}|\zeta|^{1/4}}\,O\left(\frac{1}{\nu^{4/3}}\right)\right\} \quad (|\arg z| < \pi).$$

*) ζ определяется ниже формулами 9.3.38 и 9.3.39.

Асимптотические разложения Дебая

(I) Если α — фиксированное положительное число, а ν — большое положительное, то

9.3.7. $J_\nu(\nu\ \mathrm{sech}\ \alpha) \sim$

$$\sim \frac{e^{\nu(\mathrm{th}\ \alpha-\alpha)}}{\sqrt{2\pi\nu\ \mathrm{th}\ \alpha}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(\mathrm{cth}\ \alpha)}{\nu^k}\right\},$$

9.3.8. $Y_\nu(\nu\ \mathrm{sech}\ \alpha) \sim$

$$\sim -\frac{e^{\nu(\alpha-\mathrm{th}\ \alpha)}}{\sqrt{(\pi\nu\ \mathrm{th}\ \alpha)/2}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{u_k(\mathrm{cth}\ \alpha)}{\nu^k}\right\},$$

где $u_k(t)$ имеют вид

9.3.9.

$u_0(t) = 1,$

$u_1(t) = (3t - 5t^3)/24,$

$u_2(t) = (81t^2 - 462t^4 + 385t^6)/1152,$

$u_3(t) = (30375t^3 - 3\,69603t^5 + 7\,65765t^7 -$
$\qquad - 4\,25425t^9)/4\,14720,$

$u_4(t) = (44\,65125t^4 - 941\,21676t^6 + 3499\,22430t^8 -$
$\qquad - 4461\,85740t^{10} + 1859\,10725t^{12})/398\,13120,$

значения $u_5(t)$ и $u_6(t)$ см. в [9.4] или [9.21],

9.3.10. $u_{k+1}(t) = \dfrac{1}{2}t^2(1-t^2)\,u_k'(t) +$

$$+ \frac{1}{8}\int_0^t (1-5t^2)\,u_k(t)\,dt \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Аналогично

9.3.11. $J'_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha) \sim$

$$\sim \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{4\pi\nu}}\, e^{\nu(\operatorname{th}\alpha-\alpha)} \left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(\operatorname{cth}\alpha)}{\nu^k}\right\},$$

9.3.12. $Y'_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha) \sim$

$$\sim \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{\pi\nu}}\, e^{\nu(\alpha-\operatorname{th}\alpha)} \left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{v_k(\operatorname{cth}\alpha)}{\nu^k}\right\},$$

$v_k(t)$ имеют вид

9.3.13.

$v_0(t) = 1,$

$v_1(t) = (-9t + 7t^3)/24,$

$v_2(t) = -(135t^2 + 594t^4 - 455t^6)/1152,$

$v_3(t) = (-42525t^3 + 4\,51737t^5 - 8\,83575t^7 +$

$+ 4\,75475t^9)/4\,14720.$

9.3.14. $v_k(t) = u_k(t) + t(t^2-1)\left\{\frac{1}{2}\,u_{k-1}(t) + tu'_{k-1}(t)\right\}$

$(k = 1,\ 2, \ldots).$

(II) Если β **— фиксированное и** $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$, **а** ν **— большое положительное число, то**

9.3.15. $J_\nu(\nu \sec\beta) = \sqrt{2/(\pi\nu \operatorname{tg}\beta)}\ \times$

$\times \{L(\nu,\beta)\cos\psi + M(\nu,\beta)\sin\psi\},$

9.3.16. $Y_\nu(\nu \sec\beta) = \sqrt{2/(\pi\nu \operatorname{tg}\beta)}\ \times$

$\times \{L(\nu,\beta)\sin\psi - M(\nu,\beta)\cos\psi\},$

где $\psi = \nu(\operatorname{tg}\beta - \beta) - \frac{1}{4}\pi;$

9.3.17. $L(\nu, \beta) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_{2k}(i\operatorname{ctg}\beta)}{\nu^{2k}} =$

$$= 1 - \frac{81\operatorname{ctg}^2\beta + 462\operatorname{ctg}^4\beta + 385\operatorname{ctg}^6\beta}{1152\,\nu^2} + \ldots,$$

9.3.18. $M(\nu, \beta) \sim -i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_{2k+1}(i\operatorname{ctg}\beta)}{\nu^{2k+1}} =$

$$= \frac{3\operatorname{ctg}\beta + 5\operatorname{ctg}^3\beta}{24\nu} - \ldots$$

Аналогично

9.3.19. $J'_\nu(\nu \sec\beta) = \sqrt{(\sin 2\beta)/(\pi\nu)}\ \times$

$\times \{-N(\nu,\beta)\sin\psi - O(\nu,\beta)\cos\psi\},$

9.3.20. $Y'_\nu(\nu \sec\beta) = \sqrt{(\sin 2\beta)/(\pi\nu)}\times$

$\times \{N(\nu,\beta)\cos\psi - O(\nu,\beta)\sin\psi\},$

где

9.3.21. $N(\nu, \beta) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_{2k}(i\operatorname{ctg}\beta)}{\nu^{2k}} =$

$$= 1 + \frac{135\operatorname{ctg}^2\beta + 594\operatorname{ctg}^4\beta + 455\operatorname{ctg}^6\beta}{1152\nu^2} - \ldots,$$

9.3.22. $O(\nu,\beta) \sim i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_{2k+1}(i\operatorname{ctg}\beta)}{\nu^{2k+1}} =$

$$= \frac{9\operatorname{ctg}\beta + 7\operatorname{ctg}^3\beta}{24\nu} - \ldots$$

Асимптотические разложения в переходных областях

(z фиксировано, $|\nu|$ — большое число, $|\arg\nu| < \pi/2$)

9.3.23. $J_\nu(\nu + z\nu^{1/3}) \sim$

$$\sim \frac{2^{1/3}}{\nu^{1/3}}\operatorname{Ai}(-2^{1/3}z)\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k(z)}{\nu^{2k/3}}\right\} + \frac{2^{2/3}}{\nu}\operatorname{Ai}'(-2^{1/3}z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_k(z)}{\nu^{2k/3}},$$

9.3.24. $Y_\nu(\nu + z\nu^{1/3}) \sim$

$$\sim -\frac{2^{1/3}}{\nu^{1/3}}\operatorname{Bi}(-2^{1/3}z)\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k(z)}{\nu^{2k/3}}\right\} - \frac{2^{2/3}}{\nu}\operatorname{Bi}'(-2^{1/3}z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_k(z)}{\nu^{2k/3}},$$

где $f_k(z)$ и $g_k(z)$ имеют вид

9.3.25.

$f_1(z) = -\frac{1}{5}z,$

$f_2(z) = -\frac{9}{100}z^5 + \frac{3}{35}z^2,$

$f_3(z) = \frac{957}{7000}z^6 - \frac{173}{3150}z^3 - \frac{1}{225},$

$f_4(z) = \frac{27}{20\,000}z^{10} - \frac{23\,573}{147\,000}z^7 + \frac{5903}{138\,600}z^4 + \frac{947}{346\,500}z,$

9.3.26.

$g_0(z) = \frac{3}{10}z^2,$

$g_1(z) = -\frac{17}{70}z^3 + \frac{1}{70},$

$g_2(z) = -\frac{9}{1000}z^7 + \frac{611}{3150}z^4 - \frac{37}{3150}z,$

$g_3(z) = \frac{549}{28\,000}z^8 - \frac{110\,767}{693\,000}z^5 + \frac{79}{12\,375}z^2.$

Аналогичные разложения для $H_\nu^{(1)}(\nu + z\nu^{1/3})$ и $H_\nu^{(2)}(\nu + z\nu^{1/3})$ получаются при помощи 9.1.3 и 9.1.4; они справедливы соответственно при $-\frac{1}{2}\pi < \arg\nu < \frac{3}{2}\pi$ и $-\frac{3}{2}\pi < \arg\nu < \frac{1}{2}\pi$.

9.3.27. $J'_\nu(\nu + z\nu^{1/3}) \sim$

$$\sim -\frac{2^{2/3}}{\nu^{2/3}} \mathrm{Ai}'(-2^{1/3}z)\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(z)}{\nu^{2k/3}}\right\} + \frac{2^{1/3}}{\nu^{4/3}} \mathrm{Ai}(-2^{1/3}z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k(z)}{\nu^{2k/3}},$$

9.3.28. $Y'_\nu(\nu + z\nu^{1/3}) \sim$

$$\sim \frac{2^{2/3}}{\nu^{2/3}} \mathrm{Bi}'(-2^{1/3}z)\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(z)}{\nu^{2k/3}}\right\} - \frac{2^{1/3}}{\nu^{4/3}} \mathrm{Bi}(-2^{1/3}z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k(z)}{\nu^{2k/3}},$$

где $h_k(z)$ и $l_k(z)$ имеют вид

9.3.29.

$$h_1(z) = -\frac{4}{5}z,$$

$$h_2(z) = -\frac{9}{100}z^5 + \frac{57}{70}z^2,$$

$$h_3(z) = \frac{699}{3500}z^6 - \frac{2617}{3150}z^3 + \frac{23}{3150},$$

$$h_4(z) = \frac{27}{20\,000}z^{10} - \frac{46\,631}{147\,000}z^7 + \frac{3889}{4620}z^4 - \frac{1159}{115\,500}z,$$

9.3.30.

$$l_0(z) = \frac{3}{5}z^2 - \frac{1}{5},$$

$$l_1(z) = -\frac{131}{140}z^4 + \frac{1}{5}z,$$

$$l_2(z) = -\frac{9}{500}z^8 + \frac{5437}{4500}z^5 - \frac{593}{3150}z^2,$$

$$l_3(z) = \frac{369}{7000}z^9 - \frac{999\,443}{693\,000}z^6 + \frac{31\,727}{173\,250}z^3 + \frac{947}{346\,500}.$$

9.3.31. $$J_\nu(\nu) \sim \frac{a}{\nu^{1/3}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\nu^{2k}}\right\} - \frac{b}{\nu^{5/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta_k}{\nu^{2k}},$$

9.3.32. $$Y_\nu(\nu) \sim -\frac{3^{1/2}a}{\nu^{1/3}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\nu^{2k}}\right\} - \frac{3^{1/2}b}{\nu^{5/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta_k}{\nu^{2k}},$$

9.3.33. $$J'_\nu(\nu) \sim \frac{b}{\nu^{2/3}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\nu^{2k}}\right\} - \frac{a}{\nu^{4/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta_k}{\nu^{2k}},$$

9.3.34. $$Y'_\nu(\nu) \sim \frac{3^{1/2}b}{\nu^{2/3}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\nu^{2k}}\right\} + \frac{3^{1/2}a}{\nu^{4/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta_k}{\nu^{2k}},$$

где

$$a = \frac{2^{1/3}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} = 0.44730\,73184,$$

$$3^{1/2}a = 0.77475\,90021,$$

$$b = \frac{2^{2/3}}{3^{1/3}\Gamma(1/3)} = 0.41085\,01939,$$

$$3^{1/2}b = 0.71161\,34101,$$

$$\alpha_0 = 1, \qquad \alpha_1 = -\frac{1}{225} = -0.004,$$

$$\alpha_2 = 0.00069\,3735\ldots, \quad \alpha_3 = -0.00035\,38\ldots,$$

$$\beta_0 = \frac{1}{70} = 0.01428\,57143\ldots,$$

$$\beta_1 = -\frac{1213}{10\,23750} = -0.00118\,48596\ldots,$$

$$\beta_2 = 0.00043\,78\ldots, \quad \beta_3 = -0.00038\ldots,$$

$$\gamma_0 = 1, \ \gamma_1 = \frac{23}{3150} = 0.00730\,15873\ldots,$$

$$\gamma_2 = -0.00093\,7300\ldots, \quad \gamma_3 = 0.00044\,40\ldots,$$

$$\delta_0 = \frac{1}{5}, \ \delta_1 = -\frac{947}{3\,46500} = -0.00273\,30447\ldots,$$

$$\delta_2 = 0.00060\,47\ldots, \qquad \delta_3 = -0.00038\ldots$$

Равномерные асимптотические разложения *)

9.3.35. $$J_\nu(\nu z) \sim \left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{1/4}\left\{\frac{\mathrm{Ai}(\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{1/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(\zeta)}{\nu^{2k}} + \frac{\mathrm{Ai}'(\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{5/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k(\zeta)}{\nu^{2k}}\right\}.$$

9.3.36. $$Y_\nu(\nu z) \sim -\left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{1/4}\left\{\frac{\mathrm{Bi}(\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{1/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(\zeta)}{\nu^{2k}} + \frac{\mathrm{Bi}'(\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{5/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k(\zeta)}{\nu^{2k}}\right\}.$$

9.3.37. $$H_\nu^{(1)}(\nu z) \sim 2e^{-\pi i/3}\left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{1/4} \times$$

$$\times\left\{\frac{\mathrm{Ai}(e^{2\pi i/3}\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{1/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(\zeta)}{\nu^{2k}} + \frac{e^{2\pi i/3}\mathrm{Ai}'(e^{2\pi i/3}\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{5/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k(\zeta)}{\nu^{2k}}\right\}.$$

Когда $\nu \to +\infty$, эти разложения равномерны по z в секторе $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. Соответствующее разложение для $H_\nu^{(2)}(\nu z)$ получается из разложения 9.3.37 изменением знака перед i на противоположный.

Здесь

*) Эти разложения, имеющие более сложный вид, обладают лучшими аппроксимирующими свойствами. Когда аргумент равен порядку, они сводятся к 9.3.31 и 9.3.32.

9.3.38. $\frac{2}{3}\zeta^{3/2}=\int\limits_z^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,dt=\ln\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}-\sqrt{1-z^2},$

аналогично

9.3.39. $\frac{2}{3}(-\zeta)^{3/2}=\int\limits_1^z \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\,dt=\sqrt{z^2-1}-\arccos\left(\frac{1}{z}\right).$

Ветви выбраны так, что ζ — действительное число, когда z положительно. Коэффициенты имеют вид

9.3.40.

$$a_k(\zeta)=\sum_{s=0}^{2k}\mu_s\zeta^{-3s/2}u_{2k-s}\{(1-z^2)^{-1/2}\},$$

$$b_k(\zeta)=-\zeta^{-1/2}\sum_{s=0}^{2k+1}\lambda_s\,\zeta^{-3s/2}u_{2k-s+1}\{(1-z^2)^{-1/2}\},$$

где u_k задано формулами 9.3.9 и 9.3.10, $\lambda_0=\mu_0=1$ и

9.3.41. $\lambda_s=\frac{(2s+1)(2s+3)\dots(6s-1)}{s!\,(144)^s},$

$$\mu_s=-\frac{6s+1}{6s-1}\lambda_s.$$

Таким образом, $a_0(\zeta)=1$,

9.3.42.

$$b_0(\zeta)=-\frac{5}{48\zeta^2}+\frac{1}{\zeta^{1/2}}\left\{\frac{5}{24(1-z^2)^{3/2}}-\frac{1}{8(1-z^2)^{1/2}}\right\}=$$

$$=-\frac{5}{48\zeta^2}+\frac{1}{(-\zeta)^{1/2}}\left\{\frac{5}{24(z^2-1)^{3/2}}+\frac{1}{8(z^2-1)^{1/2}}\right\}.$$

Таблицы первых коэффициентов даны ниже. Более полные таблицы коэффициентов и остаточные члены разложений 9.3.35 и 9.3.36 см. в [9.38].

Равномерные разложения производных

В соответствии с условиями предыдущего раздела имеем

9.3.43*). $J'_\nu(\nu z)\sim$

$$\sim-\frac{2}{z}\left(\frac{1-z^2}{4\zeta}\right)^{1/4}\left\{\frac{\mathrm{Ai}(\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{4/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k(\zeta)}{\nu^{2k}}+\frac{\mathrm{Ai}'(\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{2/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k(\zeta)}{\nu^{2k}}\right\},$$

9.3.44*). $Y'_\nu(\nu z)\sim\frac{2}{z}\left(\frac{1-z^2}{4\zeta}\right)^{1/4}\left\{\frac{\mathrm{Bi}(\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{4/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k(\zeta)}{\nu^{2k}}+\frac{\mathrm{Bi}'(\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{2/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k(\zeta)}{\nu^{2k}}\right\},$

9.3.45. $H_\nu^{(1)\prime}(\nu z)\sim\frac{4e^{2\pi i/3}}{z}\left(\frac{1-z^2}{4\zeta}\right)^{1/4}\left\{\frac{\mathrm{Ai}(e^{2\pi i/3}\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{4/3}}\times\right.$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k(\zeta)}{\nu^{2k}}+\frac{e^{2\pi i/3}\,\mathrm{Ai}'(e^{2\pi i/3}\nu^{2/3}\zeta)}{\nu^{2/3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k(\zeta)}{\nu^{2k}}\right\},$$

*) Оценки остаточных членов см. в [9.38].

где $c_k(\zeta)$ и $d_k(\zeta)$ выражаются формулами 9.3.46, а v_k — формулами 9.3.13 и 9.3.14.

9.3.46.

$$c_k(\zeta)=-\zeta^{1/2}\sum_{s=0}^{2k+1}\mu_s\zeta^{-3s/2}v_{2k-s+1}\{(1-z^2)^{-1/2}\},$$

$$d_k(\zeta)=\sum_{s=0}^{2k}\lambda_s\zeta^{-3s/2}v_{2k-s}\{(1-z^2)^{-1/2}\}$$

ζ	$b_0(\zeta)$	$a_1(\zeta)$	$c_0(\zeta)$	$d_1(\zeta)$
0	0.0180	−0.004	0.1587	0.007
1	0.0278	−0.004	0.1785	0.009
2	0.0351	−0.001	0.1862	0.007
3	0.0366	+0.002	0.1927	0.005
4	0.0352	0.003	0.2031	0.004
5	0.0331	0.004	0.2155	0.003
6	0.0311	0.004	0.2284	0.003
7	0.0294	0.004	0.2413	0.003
8	0.0278	0.004	0.2539	0.003
9	0.0265	0.004	0.2662	0.003
10	0.0253	0.004	0.2781	0.003

$-\zeta$	$b_0(\zeta)$	$a_1(\zeta)$	$c_0(\zeta)$	$d_1(\zeta)$
0	0.0180	−0.004	0.1587	0.007
1	0.0109	−0.003	0.1323	0.004
2	0.0067	−0.002	0.1087	0.002
3	0.0044	−0.001	0.0903	0.001
4	0.0031	−0.001	0.0764	0.001
5	0.0022	−0.000	0.0658	0.000
6	0.0017	−0.000	0.0576	0.000
7	0.0013	−0.000	0.0511	0.000
8	0.0011	−0.000	0.0459	0.000
9	0.0009	−0.000	0.0415	0.000
10	0.0007	−0.000	0.0379	0.000

При $\zeta>10$ берутся

$$b_0(\zeta)\sim\frac{1}{12}\zeta^{-1/2}-0.104\zeta^{-2},\quad a_1(\zeta)=0.003,$$

$$c_0(\zeta)\sim\frac{1}{12}\zeta^{1/2}+0.146\zeta^{-1},\quad d_1(\zeta)=0.003.$$

При $\zeta<-10$ берутся

$$b_0(\zeta)\sim\frac{1}{12}\zeta^{-2},\qquad a_1(\zeta)=0.000,$$

$$c_0(\zeta)\sim-\frac{5}{12}\zeta^{-1}-1.33(-\zeta)^{-5/2},\quad d_1(\zeta)=0.000.$$

Коэффициенты более высокого порядка имеют следующие максимальные значения:

$$|b_1(\zeta)|=0.003,\quad |a_2(\zeta)|=0.0008,\quad |d_2(\zeta)|=0.001,$$

при $\zeta<10$ $|c_1(\zeta)|=0.008$,

при $\zeta\to+\infty$ $c_1(\zeta)\sim-0.003\,\zeta^{1/2}$.

9.4. АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ *)

9.4.1. $-3 \leqslant x \leqslant 3$,

$$J_0(x) = 1 - 2.24999\,97(x/3)^2 + 1.26562\,08(x/3)^4 - 0.31638\,66(x/3)^6 + 0.04444\,79(x/3)^8 - 0.00394\,44(x/3)^{10} + 0.00021\,00(x/3)^{12} + \varepsilon,$$
$$|\varepsilon| < 5 \cdot 10^{-8}.$$

9.4.2. $0 < x \leqslant 3$,

$$Y_0(x) = (2/\pi)\ln(x/2)\,J_0(x) + 0.36746\,691 + 0.60559\,366(x/3)^2 - 0.74350\,384(x/3)^4 + 0.25300\,117(x/3)^6 - 0.04261\,214(x/3)^8 + 0.00427\,916(x/3)^{10} - 0.00024\,846(x/3)^{12} + \varepsilon,$$
$$|\varepsilon| < 1.4 \cdot 10^{-8}.$$

9.4.3. $3 \leqslant x < \infty$,

$$J_0(x) = x^{-1/2} f_0 \cos\theta_0, \quad Y_0(x) = x^{-1/2} f_0 \sin\theta_0,$$
$$f_0 = 0.79788\,456 - 0.00000\,077(3/x) - 0.00552\,740(3/x)^2 - 0.00009\,512(3/x)^3 + 0.00137\,237(3/x)^4 - 0.00072\,805(3/x)^5 + 0.00014\,476(3/x)^6 + \varepsilon,$$
$$|\varepsilon| < 1.6 \cdot 10^{-8},$$
$$\theta_0 = x - 0.78539\,816 - 0.04166\,397(3/x) - 0.00003\,954(3/x)^2 + 0.00262\,573(3/x)^3 - 0.00054\,125(3/x)^4 - 0.00029\,333(3/x)^5 + 0.00013\,558(3/x)^6 + \varepsilon,$$
$$|\varepsilon| < 7 \cdot 10^{-8}.$$

9.4.4. $-3 \leqslant x \leqslant 3$,

$$x^{-1}J_1(x) = 1/2 - 0.56249\,985(x/3)^2 + 0.21093\,573(x/3)^4 - 0.03954\,289(x/3)^6 + 0.00443\,319(x/3)^8 - 0.00031\,761(x/3)^{10} + 0.00001\,109(x/3)^{12} + \varepsilon,$$
$$|\varepsilon| < 1.3 \cdot 10^{-8}.$$

9.4.5. $0 < x \leqslant 3$,

$$xY_1(x) = (2/\pi)\,x\ln(x/2)\,J_1(x) - 0.63661\,98 + 0.22120\,91(x/3)^2 + 2.16827\,09(x/3)^4 - 1.31648\,27(x/3)^6 + 0.31239\,51(x/3)^8 - 0.04009\,76(x/3)^{10} + 0.00278\,73(x/3)^{12} + \varepsilon,$$
$$|\varepsilon| < 1.1 \cdot 10^{-7}.$$

9.4.6. $3 \leqslant x < \infty$,

$$J_1(x) = x^{-1/2} f_1 \cos\theta_1, \quad Y_1(x) = x^{-1/2} f_1 \sin\theta_1,$$
$$f_1 = 0.79788\,456 + 0.00000\,156(3/x) + 0.01659\,667(3/x)^2 + 0.00017\,105(3/x)^3 - 0.00249\,511(3/x)^4 + 0.00113\,653(3/x)^5 - 0.00020\,033(3/x)^6 + \varepsilon,$$
$$|\varepsilon| < 4 \cdot 10^{-8},$$
$$\theta_1 = x - 2.35619\,449 + 0.12499\,612(3/x) + 0.00005\,650(3/x)^2 - 0.00637\,879(3/x)^3 + 0.00074\,348(3/x)^4 + 0.00079\,824(3/x)^5 - 0.00029\,166(3/x)^6 + \varepsilon,$$
$$|\varepsilon| < 9 \cdot 10^{-8}.$$

Разложения функций $J_0(x)$, $Y_0(x)$, $J_1(x)$ и $Y_1(x)$ по многочленам Чебышева в областях $0 \leqslant x \leqslant 8$ и $0 \leqslant 8/x \leqslant 1$ см. в [9.37].

9.5. НУЛИ

Действительные нули

Когда ν — действительное, каждая из функций $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ и $Y'_\nu(z)$ имеет бесконечное множество действительных нулей.

Все нули простые, за исключением, быть может, точки $z = 0$. Для неотрицательных ν s-е положительные нули этих функций обозначаются $j_{\nu,s}$, $j'_{\nu,s}$, $y_{\nu,s}$ и $y'_{\nu,s}$ соответственно; исключение составляет функция $J'_0(z)$, для которой $z = 0$ считается первым нулем. Так как $J'_0(z) = -J_1(z)$, то

9.5.1. $j'_{0,1} = 0, \quad j'_{0,s} = j_{1,s-1} \quad (s = 2, 3, \ldots)$.

Нули перемежаются согласно неравенствам

9.5.2. $j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < j_{\nu,3} < \ldots,$

$$y_{\nu,1} < y_{\nu+1,1} < y_{\nu,2} < y_{\nu+1,2} < y_{\nu,3} < \ldots,$$
$$\nu \leqslant j'_{\nu,1} < y_{\nu,1} < y'_{\nu,1} < j_{\nu,1} < j'_{\nu,2} < y_{\nu,2} < y'_{\nu,2} < j_{\nu,2} < j'_{\nu,3} < \ldots$$

Положительные нули двух линейно независимых действительных цилиндрических функций одного порядка перемежаются. Положительные нули любой действительной цилиндрической функции $\mathscr{C}_\nu(z)$ (см. 9.1.27) и смежной функции $\mathscr{C}_{\nu+1}(z)$ также перемежаются.

*) Приближения 9.4.1 — 9.4.6 и 9.8.1 — 9.8.8, взятые из [9.1] и [9.2], были проконтролированы в Национальной физической лаборатории. В результате этой проверки были получены новые оценки точности ε, которые даны здесь.

Если ρ_ν — нуль цилиндрической функции

9.5.3. $\mathscr{C}_\nu(z) = J_\nu(z)\cos(\pi t) + Y_\nu(z)\sin(\pi t)$, где t — параметр, то

9.5.4. $\mathscr{C}'_\nu(\rho_\nu) = \mathscr{C}_{\nu-1}(\rho_\nu) = -\mathscr{C}_{\nu+1}(\rho_\nu)$.

Если σ_ν — нуль $\mathscr{C}'_\nu(z)$, то

9.5.5. $\mathscr{C}_\nu(\sigma_\nu) = \dfrac{\sigma_\nu}{\nu}\mathscr{C}_{\nu-1}(\sigma_\nu) = \dfrac{\sigma_\nu}{\nu}\mathscr{C}_{\nu+1}(\sigma_\nu)$.

Параметр t может рассматриваться как непрерывная переменная, а ρ_ν и σ_ν как функции $\rho_\nu(t)$, $\sigma_\nu(t)$ от t. Если эти функции фиксируются условиями

9.5.6. $\rho_\nu(0) = 0$, $\sigma_\nu(0) = j'_{\nu,1}$, то имеют место соотношения

9.5.7. $j_{\nu,s} = \rho_\nu(s)$, $y_{\nu,s} = \rho_\nu\left(s - \dfrac{1}{2}\right)$ $(s = 1, 2, \ldots)$,

9.5.8. $j'_{\nu,s} = \sigma_\nu(s-1)$, $y'_{\nu,s} = \sigma_\nu\left(s - \dfrac{1}{2}\right)$ $(s = 1, 2, \ldots)$,

9.5.9. $\mathscr{C}'_\nu(\rho_\nu) = \left(\dfrac{\rho_\nu}{2}\dfrac{d\rho_\nu}{dt}\right)^{-1/2}$,

$$\mathscr{C}_\nu(\sigma_\nu) = \left(\frac{\sigma_\nu^2 - \nu^2}{2\sigma_\nu}\frac{d\sigma_\nu}{dt}\right)^{-1/2}.$$

Бесконечные произведения

9.5.10. $$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\prod_{s=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{j_{\nu,s}^2}\right).$$

9.5.11. $$J'_\nu(z) = \frac{(z/2)^{\nu-1}}{2\Gamma(\nu)}\prod_{s=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{j'^2_{\nu,s}}\right) \quad (\nu > 0).$$

Разложения Макмагона для больших нулей
(ν фиксировано, $s \gg \nu$, $\mu = 4\nu^2$)

9.5.12. $$j_{\nu,s},\ y_{\nu,s} \sim \beta - \frac{\mu-1}{8\beta} - \frac{4(\mu-1)(7\mu-31)}{3(8\beta)^3} - \frac{32(\mu-1)(83\mu^2-982\mu+3779)}{15(8\beta)^5} - \frac{64(\mu-1)(6949\mu^3-1\,53855\mu^2+15\,85743\mu-62\,77237)}{105(8\beta)^7} - \ldots,$$

где $\beta = \left(s + \dfrac{1}{2}\nu - \dfrac{1}{4}\right)\pi$ для $j_{\nu,s}$, $\beta = \left(s + \dfrac{1}{2}\nu - \dfrac{3}{4}\right)\pi$ для $y_{\nu,s}$. В случае $\beta = \left(t + \dfrac{1}{2}\nu - \dfrac{1}{4}\right)\pi$ правая часть 9.5.12 — асимптотическое разложение $\rho_\nu(t)$ при больших значениях t.

9.5.13. $$j'_{\nu,s},\ y'_{\nu,s} \sim \beta' - \frac{\mu+3}{8\beta'} - \frac{4(7\mu^2+82\mu-9)}{3(8\beta')^3} - \frac{32(83\mu^3+2075\mu^2-3039\mu+3537)}{15(8\beta')^5} - \frac{64(6949\mu^4+2\,96492\mu^3-1248002\mu^2+74\,14380\mu)}{105(8\beta')^7} - \frac{64\cdot 58\,53627}{105(8\beta')^7} - \ldots,$$

где $\beta' = \left(s + \dfrac{1}{2}\nu - \dfrac{3}{4}\right)\pi$ для $j'_{\nu,s}$, $\beta' = \left(s + \dfrac{1}{2}\nu - \dfrac{1}{4}\right)\pi$ для $y'_{\nu,s}$, $\beta' = \left(t + \dfrac{1}{2}\nu + \dfrac{1}{4}\right)\pi$ для $\sigma_\nu(t)$. Члены более высоких порядков разложений 9.5.12 и 9.5.13 см. в [9.4], [9.40].

Асимптотические разложения нулей и связанных с ними величин при больших значениях порядка

9.5.14. $j_{\nu,1} \sim \nu + 1.85575\,71\nu^{1/3} + 1.03315\,0\nu^{-1/3} - 0.00397\nu^{-1} - 0.0908\nu^{-5/3} + 0.043\nu^{-7/3} + \ldots$

9.5.15. $y_{\nu,1} \sim \nu + 0.93157\,68\nu^{1/3} + 0.26035\,1\nu^{-1/3} + 0.01198\nu^{-1} - 0.0060\nu^{-5/3} - 0.001\nu^{-7/3} + \ldots$

9.5.16. $j'_{\nu,1} \sim \nu + 0.80861\,65\nu^{1/3} + 0.07249\,0\nu^{-1/3} - 0.05097\nu^{-1} + 0.0094\nu^{-5/3} + \ldots$

9.5.17. $y'_{\nu,1} \sim \nu + 1.82109\,80\nu^{1/3} + 0.94000\,7\nu^{-1/3} - 0.05808\nu^{-1} - 0.0540\nu^{-5/3} + \ldots$

9.5.18. $J'_\nu(j_{\nu,1}) \sim -1.11310\,28\nu^{-2/3}/(1 + 1.48460\,6\nu^{-2/3} + 0.43294\nu^{-4/3} - 0.1943\nu^{-2} + 0.019\nu^{-8/3} + \ldots)$.

9.5.19. $Y'_\nu(y_{\nu,1}) \sim 0.95554\,86\nu^{-2/3}/(1 + 0.74526\,1\nu^{-2/3} + 0.10910\nu^{-4/3} - 0.0185\nu^{-2} - 0.003\nu^{-8/3} + \ldots)$.

9.5.20. $J_\nu(j'_{\nu,1}) \sim 0.67488\,51\nu^{-1/3}(1 - 0.16172\,3\nu^{-2/3} + 0.02918\nu^{-4/3} - 0.0068\nu^{-2} + \ldots)$.

9.5.21. $Y_\nu(y'_{\nu,1}) \sim 0.57319\,40\nu^{-1/3}(1 - 0.36422\,0\nu^{-2/3} + 0.09077\nu^{-4/3} + 0.0237\nu^{-2} + \ldots)$.

Соответствующие разложения для $s = 2, 3$ даны в [9.40]. С возрастанием s точность этих разложений понижается. Приведенные ниже разложения не имеют этого недостатка.

Равномерные асимптотические разложения нулей и связанных с ними величин при больших значениях порядка

9.5.22. $$j_{\nu,s} \sim \nu z(\zeta) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k(\zeta)}{\nu^{2k-1}} \text{ при } \zeta = \nu^{-2/3}a_s.$$

9.5.23. $$J'_\nu(j_{\nu,s}) \sim -\frac{2}{\nu^{2/3}}\frac{\mathrm{Ai}'(a_s)}{z(\zeta)\,h(\zeta)} \times \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k(\zeta)}{\nu^{2k}}\right\}$$
при $\zeta = \nu^{-2/3}a'_s$.

9.5.24. $j'_{\nu,s} \sim \nu z(\zeta) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(\zeta)}{\nu^{2k-1}}$ при $\zeta = \nu^{-2/3} a'_s$,

9.5.25. $J_\nu(j'_{\nu,s}) \sim \mathrm{Ai}(a'_s)\, \frac{h(\zeta)}{\nu^{1/3}} \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_k(\zeta)}{\nu^{2k}}\right\}$

при $\zeta = \nu^{-2/3} a'_s$.

Здесь a_s, a'_s — s-е отрицательные нули функций $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Ai}'(z)$ (см. 10.4), $z = z(\zeta)$ — обратная функция, определенная неявно соотношением 9.3.39, и

9.5.26. $h(\zeta) = \{4\zeta/(1-z^2)\}^{1/4}$,

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{2} z(\zeta)\, \{h(\zeta)\}^2\, b_0(\zeta),$$

$$g_1(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta^{-1} z(\zeta)\, \{h(\zeta)\}^2\, c_0(\zeta),$$

где $b_0(\zeta)$, $c_0(\zeta)$ определены формулами 9.3.42 и 9.3.46. Ниже приводятся таблицы первых коэффициентов. Более полные таблицы см. в [9.40].

Разложения для $y_{\nu,s}$, $Y'_\nu(y_{\nu,s})$, $y'_{\nu,s}$ и $Y_\nu(y'_{\nu,s})$, аналогичные 9.5.22 — 9.5.25, получаются заменой символов j, J, Ai, Ai′, a_s и a'_s соответственно на y, Y, —Bi, —Bi′, b_s и b'_s.

$-\zeta$	$z(\zeta)$	$h(\zeta)$	$f_1(\zeta)$	$F_1(\zeta)$	$(-\zeta)\, g_1(\zeta)$	$(-\zeta)^3\, g_2(\zeta)$	$(-\zeta)^2\, G_1(\zeta)$
0.0	1.000000	1.25992	0.0143	−0.007	−0.1260•	−0.010	0.000
0.2	1.166284	1.22076	0.0142	−0.005	−0.1335	−0.010	0.002
0.4	1.347557	1.18337	0.0139	−0.004	−0.1399	−0.009	0.004
0.6	1.543615	1.14780	0.0135	−0.003	−0.1453	−0.009	0.005
0.8	1.754187	1.11409	0.0131	−0.003	−0.1498	−0.008	0.006
1.0	1.978963	1.08220	0.0126	−0.002	−0.1533	−0.008	0.006

$-\zeta$	$z(\zeta)$	$h(\zeta)$	$f_1(\zeta)$	$F_1(\zeta)$	$g_1(\zeta)$	$g_2(\zeta)$	$G_1(\zeta)$
1.0	1.978963	1.08220	0.0126	−0.002	−0.1533	−0.008	0.006
1.2	2.217607	1.05208	0.0121	−0.002	−0.1301	−0.004	0.004
1.4	2.469770	1.02367	0.0115	−0.001	−0.1130	−0.002	0.003
1.6	2.735103	0.99687	0.0110	−0.001	−0.0998	−0.001	0.002
1.8	3.013256	0.97159	0.0105	−0.001	−0.0893	−0.001	0.002
2.0	3.303889	0.94775	0.0100	−0.001	−0.0807	−0.001	0.001
2.2	3.606673	0.92524	0.0095	−0.001	−0.0734		0.001
2.4	3.921292	0.90397	0.0091		−0.0673		0.001
2.6	4.247441	0.88387	0.0086		−0.0619		0.001
2.8	4.584833	0.86484	0.0082		−0.0573		0.001
3.0	4.933192	0.84681	0.0078		−0.0533		
3.2	5.292257	0.82972	0.0075		−0.0497		
3.4	5.661780	0.81348	0.0071		−0.0464		
3.6	6.041525	0.79806	0.0068		−0.0436		
3.8	6.431269	0.78338	0.0065		−0.0410		
4.0	6.830800	0.76939	0.0062		−0.0386		
4.2	7.239917	0.75605	0.0060		−0.0365		
4.4	7.658427	0.74332	0.0057		−0.0345		
4.6	8.086150	0.73115	0.0055		−0.0328		
4.8	8.522912	0.71951	0.0052		−0.0311		
5.0	8.968548	0.70836	0.0050		−0.0296		
5.2	9.422900	0.69768	0.0048		−0.0282		
5.4	9.885820	0.68742	0.0047		−0.0270		
5.6	10.357162	0.67758	0.0045		−0.0258		
5.8	10.836791	0.66811	0.0043		−0.0246		
6.0	11.324575	0.65901	0.0042		−0.0236		
6.2	11.820388	0.65024	0.0040		−0.0227		
6.4	12.324111	0.64180	0.0039		−0.0218		
6.6	12.835627	0.63366	0.0037		−0.0209		
6.8	13.354826	0.62580	0.0036		−0.0201		
7.0	13.881601	0.61821	0.0035		−0.0194		

$(-\zeta)^{-1/2}$	$z(\zeta)-\frac{2}{3}(-\zeta)^{3/2}$	$(-\zeta)^{1/2}h(\zeta)$	$f_1(\zeta)$	$g_1(\zeta)$
0.40	1.528915	1.62026	0.0040	−0.0224
0.35	1.541532	1.65351	0.0029	−0.0158
0.30	1.551741	1.68067	0.0020	−0.0104
0.25	1.559490	1.70146	0.0012	−0.0062
0.20	1.564907	1.71607	0.0006	−0.0033
0.15	1.568285	1.72523	0.0003	−0.0014
0.10	1.570048	1.73002	0.0001	−0.0004
0.05	1.570703	1.73180	0.0000	−0.0001
0.00	1.570796	1.73205	0.0000	−0.0000

Максимальные значения коэффициентов более высокого порядка

$$|f_2(\zeta)| = 0.001, \quad |F_2(\zeta)| = 0.0004 \quad (0 \leqslant -\zeta < \infty),$$

$$|g_2(\zeta)| = 0.001, \quad |G_2(\zeta)| = 0.0007 \quad (1 \leqslant -\zeta < \infty),$$

$$|(-\zeta)^5 g_2(\zeta)| = 0.002, \quad |(-\zeta)^4 G_2(\zeta)| = 0.0007\,(0 \leqslant -\zeta \leqslant 1).$$

Комплексные нули функции $J_\nu(z)$

Когда $\nu \geqslant -1$, все нули функции $J_\nu(z)$ действительны. Если $\nu < -1$ и ν — нецелое, число комплексных нулей функции $J_\nu(z)$ в два раза больше $[-\nu]$. Если $[-\nu]$ — нечетное число, то два из этих нулей лежат на мнимой оси. **Если $\nu \geqslant 0$, все нули $J'_\nu(z)$ — действительные числа.**

Комплексные нули функции $Y_\nu(z)$

Когда ν — действительное, общая картина расположения комплексных нулей функций $Y_\nu(z)$ и $Y'_\nu(z)$ зависит от величины $\{\nu\}$. Ограничимся здесь случаем, когда $\nu = n$ — целое положительное или нуль.

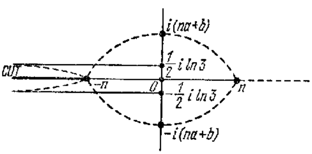


Рис. 9.5. Нули $Y_n(z)$ и $Y'_n(z)$; $|\arg z| \leqslant \pi$.

Рис. 9.5 показывает приблизительное расположение комплексных нулей функций $Y_n(z)$ в области $|\arg z| \leqslant \pi$. Фигура, изображенная на рисунке, симметрична относительно действительной оси. Две бесконечные кривые имеют асимптоты

$$\operatorname{Im} z = \pm \frac{1}{2} \ln 3 = \pm 0.54931\ldots$$

Вблизи каждой из этих кривых имеется бесконечное число нулей.

Две кривые, расположенные между точками $z = -n$ и $z = n$, пересекают мнимую ось в точках $\pm i(na + b)$, где

$$a = \sqrt{t_0^2 - 1} = 0.66274\ldots,$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{1 - t_0^{-2}}\ln 2 = 0.19146\ldots$$

и $t_0 = 1.19968\ldots$ — положительный корень уравнения $\operatorname{cth} t = t$. Вблизи каждой из этих кривых имеется n нулей. Асимптотические разложения этих нулей для больших n даются правой частью разложения 9.5.22 при $\nu = n$ и $\zeta = n^{-2/3}\beta_s$ или $\zeta = n^{-2/3}\bar{\beta}_s$, где β_s и $\bar{\beta}_s$ — комплексные нули функции $\mathrm{Bi}(z)$ (см. 10.4).

Рис. 9.5 демонстрирует также расположение нулей функции $Y'_n(z)$. Как и в предыдущем случае, имеется бесконечное число нулей вблизи бесконечных кривых. Около каждой из конечных кривых имеется n нулей, асимптотические разложения которых для больших n даются правой частью формулы 9.5.24 при $\nu = n$ и $\zeta = n^{-2/3}\beta'_s$ или $\zeta = n^{-2/3}\bar{\beta}'_s$, где β'_s и $\bar{\beta}'_s$ — комплексные нули функции $\mathrm{Bi}'(z)$.

Численные значения трех наименьших комплексных нулей функций $Y_0(z)$, $Y_1(z)$ и $Y'_1(z)$ в области $0 < \arg z < \pi$ даны ниже. Более подробно об этих нулях см. в [9.36] и [9.13]. (В [9.13] имеются таблицы, которые облегчают их вычисления.)

Комплексные нули функций Ханкеля

Приблизительное расположение нулей функции $H_n^{(1)}(z)$ и ее производной в области $|\arg z| \leqslant \pi$ показано на рис. 9.6. Асимптота бесконечной кривой задается уравнением

$$\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2} \ln 2 = -0.34657\ldots$$

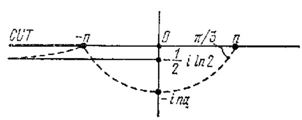


Рис. 9.6. Нули $H_n^{(1)}(z)$ и $H_n^{(1)\prime}(z)$; $|\arg z| \leqslant \pi$.

Вблизи конечной кривой, расположенной между точками $z = -n$ и $z = n$, имеется n нулей каждой функции. Асимптотические разложения этих нулей для больших n задаются правой частью формулы 9.5.22. (при $\zeta = e^{-2\pi i/3} n^{-2/3} a_s$) или формулы 9.5.24 (при $\zeta = e^{-2\pi i/3} n^{-2/3} a'_s$). **В обоих случаях $\nu = n$.**

Нули функции $Y_0(z)$ и значения функции $Y_1(z)$ в этих нулях (см. [9.36])

Нуль		Y_1	
Действительная часть	Мнимая часть	Действительная часть	Мнимая часть
−2.40301 6632	+0.53988 2313	+0.10074 7689	−0.88196 7710
−5.51987 6702	+0.54718 0011	−0.02924 6418	+0.58716 9503
−8.65367 2403	+0.54841 2067	+0.01490 8063	−0.46945 8752

Нули функции $Y_1(z)$ и значения функции $Y_0(z)$ в этих нулях

Нуль		Y_0	
Действительная часть	Мнимая часть	Действительная часть	Мнимая часть
−0.50274 3273	+0.78624 3714	−0.45952 7684	+1.31710 1937
−3.83353 5193	+0.56235 6538	+0.04830 1909	−0.69251 2884
−7.01590 3683	+0.55339 3046	−0.02012 6949	+0.51864 2833

Нули функции $Y_1'(z)$ и значения функции $Y_1(z)$ в этих нулях

Нуль		Y_1	
Действительная часть	Мнимая часть	Действительная часть	Мнимая часть
+0.57678 5129	+0.90398 4792	−0.76349 7088	+0.58924 4865
−1.94047 7342	+0.72118 5919	+0.16206 4006	−0.95202 7886
−5.33347 8617	+0.56721 9637	−0.03179 4008	+0.59685 3673

Нули произведений функций

Если ν — действительное, а λ — положительное, то нули функции

9.5.27. $J_\nu(z)\,Y_\nu(\lambda z) - J_\nu(\lambda z)\,Y_\nu(z)$

являются действительными и простыми. Если $\lambda > 1$, асимптотическое разложение s-го нуля имеет вид

9.5.28. $$\beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q-p^2}{\beta^3} + \frac{r-4pq+2p^3}{\beta^5} + \ldots,$$

где $\mu = 4\nu^2$ и

9.5.29. $\beta = s\pi/(\lambda - 1)$,

$$p = \frac{\mu-1}{8\lambda}, \quad q = \frac{(\mu-1)(\mu-25)(\lambda^3-1)}{6(4\lambda)^3(\lambda-1)},$$

$$r = \frac{(\mu-1)(\mu^2-114\mu+1073)(\lambda^5-1)}{5(4\lambda)^5(\lambda-1)}.$$

Асимптотическое разложение больших положительных нулей (не обязательно s-го нуля) функции

9.5.30. $J_\nu'(z)\,Y_\nu'(\lambda z) - J_\nu'(\lambda z)\,Y_\nu'(z)$ $(\lambda > 1)$

задается разложением 9.5.28 с тем же значением β и при

9.5.31. $$p = \frac{\mu+3}{8\lambda}, \quad q = \frac{(\mu^2+46\mu-63)(\lambda^3-1)}{6(4\lambda)^3(\lambda-1)},$$

$$r = \frac{(\mu^3+185\mu^2-2053\mu+1899)(\lambda^5-1)}{5(4\lambda)^5(\lambda-1)}.$$

Асимптотическое разложение больших положительных нулей функции

9.5.32. $J_\nu'(z)\,Y_\nu(\lambda z) - Y_\nu'(z)\,J_\nu(\lambda z)$

задается формулой 9.5.28, где

9.5.33. $$\beta = \left(s - \frac{1}{2}\right)\pi/(\lambda - 1),$$

$$p = \frac{(\mu+3)\lambda - (\mu-1)}{8\lambda(\lambda-1)},$$

$$q = \frac{(\mu^2+46\mu-63)\lambda^3 - (\mu-1)(\mu-25)}{6(4\lambda)^3(\lambda-1)},$$

$$5(4\lambda)^5(\lambda-1)\,r = (\mu^3+185\mu^2-2053\mu+1899)\lambda^5 - (\mu-1)(\mu^2-114\mu+1073).$$

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ I И K

9.6. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

Дифференциальное уравнение

9.6.1. $$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} - (z^2+\nu^2)\,w = 0.$$

Решениями этого уравнения являются функции $I_{\pm\nu}(z)$ и $K_\nu(z)$, каждая из них — регулярная функция z на всей z-плоскости, разрезанной вдоль отрицательной действительной оси. Для фиксированного z $(z \neq 0)$ эти функции являются целыми функциями ν. Для $\nu = \pm n$ $I_\nu(z)$ — целая функция z.

$I_\nu(z)$ $(\mathrm{Re}\,\nu \geqslant 0)$ ограничена при $z \to 0$, если область изменения $\arg z$ ограничена. $I_\nu(z)$ и $I_{-\nu}(z)$ линейно независимы, если ν не является целым числом.

$K_\nu(z)$ стремится к нулю, когда $|z| \to \infty$ в секторе $|\arg z| < \pi/2$. $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ линейно независимы для всех значений ν. $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ действительны и положительны, когда $\nu > -1$ и $z > 0$.

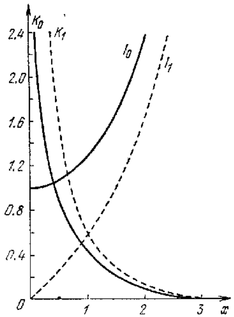


Рис. 9.7. $I_0(x)$, $K_0(x)$, $I_1(x)$ и $K_1(x)$.

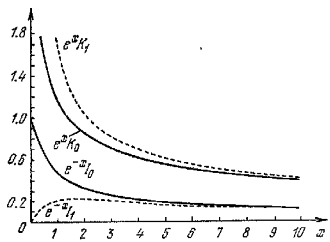


Рис. 9.8. $e^{-x}I_0(x)$, $e^{-x}I_1(x)$, $e^xK_0(x)$ и $e^xK_1(x)$.

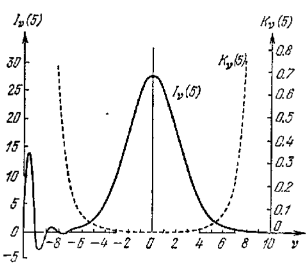


Рис. 9.9. $I_\nu(5)$ и $K_\nu(5)$.

Соотношения между решениями

9.6.2. $K_\nu(z) = \pi/2\, \dfrac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}$.

Правая часть этого уравнения заменяется ее предельным значением, если ν — целое или нуль.

9.6.3.

$$I_\nu(z) = e^{-\pi\nu i/2} J_\nu(z e^{\pi i/2}) \quad (-\pi < \arg z \leqslant \pi/2),$$

$$I_\nu(z) = e^{3\nu\pi i/2} J_\nu(z e^{-3\pi i/2}) \quad (\pi/2 < \arg z \leqslant \pi).$$

9.6.4.

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi i e^{\nu\pi i/2} H_\nu^{(1)}(z e^{\pi i/2}) \quad (-\pi < \arg z \leqslant \pi/2),$$

$$K_\nu(z) = -\frac{1}{2}\pi i e^{-\nu\pi i/2} H_\nu^{(2)}(z e^{-\pi i/2}) \quad (-\pi/2 < \arg z \leqslant \pi).$$

9.6.5. $Y_\nu(z e^{\pi i/2}) = e^{(\nu+1)\pi i/2} I_\nu(z) - (2/\pi)\, e^{-\nu\pi i/2} K_\nu(z)$ $(-\pi < \arg z \leqslant \pi/2)$.

9.6.6. $I_{-n}(z) = I_n(z)$, $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$.

С помощью этих соотношений большинство свойств модифицированных функций Бесселя может быть получено непосредственно из свойств обыкновенных функций Бесселя.

Пределы при малых значениях аргумента

(ν фиксировано и $z \to 0$)

9.6.7. $I_\nu(z) \sim (z/2)^\nu/\Gamma(\nu+1)$ $(\nu \neq -1, -2, \ldots)$.

9.6.8. $K_0(z) \sim -\ln z$.

9.6.9. $K_\nu(z) \sim \dfrac{1}{2}\Gamma(\nu)\,(z/2)^{-\nu}$ $(\mathrm{Re}\,\nu > 0)$.

Разложения в степенной ряд

9.6.10. $I_\nu(z) = (z/2)^\nu \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$.

9.6.11.

$$K_n(z) = \frac{1}{2}(z/2)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}(-z^2/4)^k + (-1)^{n+1} \ln(z/2)\, I_n(z) + \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)\} \frac{(z^2/4)^k}{k!(n+k)!},$$

где $\psi(n)$ определена формулой 6.3.2.

9.6.12. $I_0(z) = 1 + \dfrac{z^2/4}{(1!)^2} + \dfrac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \dfrac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \ldots$

9.6.13.

$$K_0(z) = -\{\ln(z/2) + \gamma\}\, I_0(z) + \frac{z^2/4}{(1!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \ldots$$

Вронскианы

9.6.14. $W\{I_\nu(z), I_{-\nu}(z)\} = I_\nu(z)\, I_{-(\nu+1)}(z) - I_{\nu+1}(z)\, I_{-\nu}(z) =$
$= -2\sin(\nu\pi)/(\pi z).$

9.6.15. $W\{K_\nu(z),\ I_\nu(z)\} =$
$= I_\nu(z)\, K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z)\, K_\nu(z) = 1/z.$

Интегральные представления

9.6.16. $$I_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\pm z\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch}(z\cos\theta)\,d\theta.$$

9.6.17. $$K_0(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\pm z\cos\theta}\{\gamma + \ln(2z\sin^2\theta)\}\,d\theta.$$

9.6.18. $$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\pi e^{\pm z\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\,d\theta =$$
$$= \frac{(z/2)^\nu}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{\pm zt}\,dt \qquad (\operatorname{Re}\nu > -1/2).$$

9.6.19. $$I_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{z\cos\theta}\cos(n\theta)\,d\theta.$$

9.6.20. $$I_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{z\cos\theta}\cos(\nu\theta)\,d\theta -$$
$$-\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}t-\nu t}\,dt \qquad (|\arg z| < \pi/2).$$

9.6.21. $$K_0(x) = \int_0^\infty \cos(x\operatorname{sh}t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$
$$(x > 0).$$

9.6.22. $$K_\nu(x) = \sec\left(\frac{1}{2}\nu\pi\right)\int_0^\infty \cos(x\operatorname{sh}t)\operatorname{ch}(\nu t)\,dt =$$
$$= \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\nu\pi\right)\int_0^\infty \sin(x\operatorname{sh}t)\operatorname{sh}(\nu t)\,dt$$
$$(|\operatorname{Re}\nu| < 1,\ x > 0).$$

9.6.23. $$K_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}t}\operatorname{sh}^{2\nu}t\,dt =$$
$$= \frac{\pi^{1/2}(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt$$
$$(\operatorname{Re}\nu > -1/2,\ |\arg z| < \pi/2).$$

9.6.24. $$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}t}\operatorname{ch}(\nu t)\,dt \qquad (|\arg z| < \pi/2).$$

9.6.25. $$K_\nu(xz) = \frac{\Gamma(\nu+1/2)(2z)^\nu}{\pi^{1/2}x^\nu}\int_0^\infty \frac{\cos(xt)\,dt}{(t^2+z^2)^{\nu+1/2}}$$
$$(\operatorname{Re}\nu \geqslant -1/2,\ x > 0,\ |\arg z| < \pi/2).$$

Рекуррентные соотношения

9.6.26.
$$\mathscr{Z}_{\nu-1}(z) - \mathscr{Z}_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\mathscr{Z}_\nu(z),$$
$$\mathscr{Z}'_\nu(z) = \mathscr{Z}_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}\mathscr{Z}_\nu(z),$$
$$\mathscr{Z}_{\nu-1}(z) + \mathscr{Z}_{\nu+1}(z) = 2\mathscr{Z}'_\nu(z),$$
$$\mathscr{Z}'_\nu(z) = \mathscr{Z}_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z}\mathscr{Z}_\nu(z).$$

$\mathscr{Z}_\nu$ означает I_ν, $e^{\nu\pi i}K_\nu$ или любую линейную комбинацию этих функций, коэффициенты которой не зависят от z и ν.

9.6.27. $I'_0(z) = I_1(z),\ \ K'_0(z) = -K_1(z).$

Производные

9.6.28. $$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\{z^\nu\mathscr{Z}_\nu(z)\} = z^{\nu-k}\mathscr{Z}_{\nu-k}(z),$$
$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\{z^{-\nu}\mathscr{Z}_\nu(z)\} = z^{-\nu-k}\mathscr{Z}_{\nu+k}(z)\ \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

9.6.29. $$\mathscr{Z}_\nu^{(k)}(z) = \frac{1}{2^k}\left\{\mathscr{Z}_{\nu-k}(z) + \binom{k}{1}\mathscr{Z}_{\nu-k+2}(z) + \right.$$
$$\left. + \binom{k}{2}\mathscr{Z}_{\nu-k+4}(z) + \ldots + \mathscr{Z}_{\nu+k}(z)\right\}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Аналитическое продолжение
(m — целое, ν — действительное)

9.6.30. $I_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{m\nu\pi i}\, I_\nu(z).$

9.6.31. $K_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{-m\nu\pi i}K_\nu(z) -$
$- \pi i\sin(m\nu\pi)\operatorname{cosec}(\nu\pi)\, I_\nu(z).$

9.6.32. $I_\nu(\bar z) = \overline{I_\nu(z)},\ \ K_\nu(\bar z) = \overline{K_\nu(z)}.$

Производящая функция и связанные с ней ряды

9.6.33. $$e^{\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k I_k(z) \qquad (t \neq 0).$$

9.6.34. $$e^{z\cos\theta} = I_0(z) + 2\sum_{k=1}^\infty I_k(z)\cos(k\theta).$$

9.6.35. $e^{z\sin\theta} = I_0(z) + 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k I_{2k+1}(z) \times$

$$\times \sin\{(2k+1)\theta\} + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k I_{2k}(z)\cos(2k\theta).$$

9.6.36. $1 = I_0(z) - 2I_2(z) + 2I_4(z) - 2I_6(z) + \ldots$

9.6.37. $e^z = I_0(z) + 2I_1(z) + 2I_2(z) + 2I_3(z) + \ldots$

9.6.38. $e^{-z} = I_0(z) - 2I_1(z) + 2I_2(z) - 2I_3(z) + \ldots$

9.6.39. $\operatorname{ch} z = I_0(z) + 2I_2(z) + 2I_4(z) + 2I_6(z) + \ldots$

9.6.40. $\operatorname{sh} z = 2I_1(z) + 2I_3(z) + 2I_5(z) + \ldots$

Другие дифференциальные уравнения

Уравнения для модифицированных функций Бесселя получаются заменой в уравнениях 9.1.49 — 9.1.54 и 9.1.56 величины λ^2 на $-\lambda^2$. При этом в решениях символ $\mathscr{C}$ заменяется на $\mathscr{Z}$.

9.6.41. $z^2w'' + z(1 \pm 2z)w' + (\pm z - \nu^2)w = 0,$

$$w = e^{\mp z}\mathscr{Z}_\nu(z).$$

Дифференциальные уравнения для произведений могут быть получены из 9.1.57 — 9.1.59 заменой z на iz.

Производные относительно порядка

9.6.42. $\frac{\partial}{\partial\nu} I_\nu(z) =$

$$= I_\nu(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\frac{(z^2/4)^k}{k!}.$$

9.6.43. $\frac{\partial}{\partial\nu} K_\nu(z) =$

$$= \frac{1}{2}\pi\operatorname{cosec}(\nu\pi)\left\{\frac{\partial}{\partial\nu}I_{-\nu}(z) - \frac{\partial}{\partial\nu}I_\nu(z)\right\} -$$

$$- \pi\operatorname{ctg}(\nu\pi)K_\nu(z)\ (\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

9.6.44. $(-1)^n\left[\frac{\partial}{\partial\nu}I_\nu(z)\right]_{\nu=n} =$

$$= -K_n(z) + \frac{n!(z/2)^{-n}}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(z/2)^k I_k(z)}{(n-k)\,k!}.$$

9.6.45. $\left[\frac{\partial}{\partial\nu}K_\nu(z)\right]_{\nu=n} = \frac{n!(z/2)^{-n}}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(z/2)^k K_k(z)}{(n-k)k!}.$

9.6.46. $\left[\frac{\partial}{\partial\nu}I_\nu(z)\right]_{\nu=0} = -K_0(z),\quad \left[\frac{\partial}{\partial\nu}K_\nu(z)\right]_{\nu=0} = 0.$

Выражения через гипергеометрические функции

9.6.47. $I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_0F_1(\nu+1;\ z^2/4) =$

$$= \frac{(z/2)^\nu e^{-z}}{\Gamma(\nu+1)}M\left(\nu+\frac{1}{2},\ 2\nu+1,\ 2z\right) =$$

$$= \frac{z^{-1/2}M_{0,\nu}(2z)}{2^{2\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}.$$

9.6.48. $K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} W_{0,\nu}(2z).$

${}_0F_1$ — обобщенная гипергеометрическая функция; о функциях $M(a, b, z)$, $M_{0,\nu}(z)$ и $W_{0,\nu}(z)$ см. в гл. 13.

Связь с функциями Лежандра

Если μ и z фиксированы, $\operatorname{Re} z > 0$ и $\nu \to \infty$, принимая действительные положительные значения, то

9.6.49. $\lim\left\{\nu^\mu P_\nu^{-\mu}\left(\operatorname{ch}\frac{z}{\nu}\right)\right\} = I_\mu(z),$

9.6.50. $\lim\left\{\nu^{-\mu}e^{-\mu\pi i}Q_\nu^\mu\left(\operatorname{ch}\frac{z}{\nu}\right)\right\} = K_\mu(z).$

Определения $P_\nu^{-\mu}$ и Q_ν^μ см. в гл. 8.

Теоремы умножения

9.6.51. $\mathscr{Z}_\nu(\lambda z) = \lambda^{\pm\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2-1)^k(z/2)^k}{k!}\mathscr{Z}_{\nu\pm k}(z)$

$$(|\lambda^2 - 1| < 1).$$

Если $\mathscr{Z} = I$ и взяты верхние знаки, ограничение на λ не нужно.

9.6.52. $I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}J_{\nu+k}(z),$

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k!}I_{\nu+k}(z).$$

Ряды Неймана для $K_n(z)$

9.6.53. $K_n(z) = (-1)^{n-1}\{\ln(z/2) - \psi(n+1)\}I_n(z) +$

$$+ \frac{n!(z/2)^{-n}}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(z/2)^k I_k(z)}{(n-k)\,k!} +$$

$$+ (-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+2k)\,I_{n+2k}(z)}{k(n+k)}.$$

9.6.54. $K_0(z) = -\{\ln(z/2) + \gamma\}I_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_{2k}(z)}{k}.$

Нули

Свойства нулей функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ могут быть получены соответственно из свойств нулей функций $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$ с помощью соотношений 9.6.3 и 9.6.4.

Если $-2k < \nu < -(2k-1)$ (k — целое положительное), то функция $I_\nu(z)$ имеет два действительных нуля. Для всех остальных действительных ν нули функции $I_\nu(z)$ комплексные.

Приблизительное расположение нулей функции $K_n(z)$ в области $-3\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$ получим, если повернем рис. 9.6 на угол $-\pi/2$ так, чтобы разрез приходился на положительную часть мнимой оси. Нули, находящиеся в области $-\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant 3\pi/2$ являются сопряженными с нулями, расположенными в области $-3\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$. Функция $K_n(z)$ не имеет нулей в области $|\arg z| \leqslant \pi/2$. Это справедливо и для функции $K_\nu(z)$ любого действительного порядка. ν

9.7. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Асимптотические разложения при больших значениях аргумента

Пусть ν фиксировано, $|z|$ — большое число и $\mu = 4\nu^2$. Тогда

9.7.1. $$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left\{1 - \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \ldots\right\} \quad (|\arg z| < \pi/2),$$

9.7.2. $$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left\{1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \ldots\right\} \quad (|\arg z| < 3\pi/2),$$

9.7.3. $$I'_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left\{1 - \frac{\mu+3}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu+15)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu+35)}{3!(8z)^3} + \ldots\right\} \quad (|\arg z| < \pi/2),$$

9.7.4. $$K'_\nu(z) \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left\{1 + \frac{\mu+3}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu+15)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu+35)}{3!(8z)^3} + \ldots\right\}$$
$$(|\arg z| < 3\pi/2).$$

Общие члены разложений 9.7.3 и 9.7.4 могут быть выписаны из соотношений 9.2.15 и 9.2.16.

Пусть ν — действительное неотрицательное, z — положительное и в разложении 9.7.2 взято k членов. Тогда остаточный член этого разложения по абсолютной величине не превосходит $(k+1)$-го члена и имеет тот же знак при $k \geqslant \nu - 1/2$.

9.7.5. $$I_\nu(z)\, K_\nu(z) \sim \frac{1}{2z}\left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{\mu-1}{(2z)^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{(\mu-1)(\mu-9)}{(2z)^4} - \ldots\right\} \quad (|\arg z| < \pi/2).$$

9.7.6. $$I'_\nu(z)\, K'_\nu(z) \sim -\frac{1}{2z}\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{\mu-3}{(2z)^2} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\,\frac{(\mu-1)(\mu-45)}{(2z)^4} + \ldots\right\} \quad (|\arg z| < \pi/2).$$

Общие члены могут быть получены с помощью соотношений 9.2.28 и 9.2.30.

Равномерные асимптотические разложения при больших значениях порядка

9.7.7. $$I_\nu(\nu z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\,\frac{e^{\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(t)}{\nu^k}\right\}.$$

9.7.8. $$K_\nu(\nu z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\,\frac{e^{-\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{u_k(t)}{\nu^k}\right\}.$$

9.7.9. $$I'_\nu(\nu z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\,\frac{(1+z^2)^{1/4}}{z}\, e^{\nu\eta}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(t)}{\nu^k}\right\}.$$

9.7.10. $$K'_\nu(\nu z) \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\,\frac{(1+z^2)^{1/4}}{z}\, e^{-\nu\eta}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{v_k(t)}{\nu^k}\right\}.$$

Когда $\nu \to +\infty$, эти разложения равномерны по z в секторе $|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число.

Здесь

9.7.11. $$t = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \eta = \sqrt{1+z^2} + \ln\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}$$

и $u_k(t)$, $v_k(t)$ задаются формулами 9.3.9, 9.3.10, 9.3.13 и 9.3.14. В [9.38] см. таблицы для η, $u_k(t)$, $v_k(t)$, а также оценки остаточных членов разложений 9.7.7 — 9.7.10.

9.8. АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ *)

В уравнениях 9.8.1 — 9.8.4 $t = x/3.75$.

9.8.1. $-3.75 \leqslant x \leqslant 3.75$,

$$I_0(x) = 1 + 3.51562\,29t^2 + 3.08994\,24t^4 + 1.20674\,92t^6 + 0.26597\,32t^8 + 0.03607\,68t^{10} + 0.00458\,13t^{12} + \varepsilon,$$
$$|\varepsilon| < 1.6\cdot 10^{-7}.$$

9.8.2. $3.75 \leqslant x < \infty$,

$$x^{1/2}e^{-x}I_0(x) = 0.39894\,228 + 0.01328\,592t^{-1} + 0.00225\,319t^{-2} - 0.00157\,565t^{-3} + 0.00916\,281t^{-4} - 0.02057\,706t^{-5} + 0.02635\,537t^{-6} - 0.01647\,633t^{-7} + 0.00392\,377t^{-8} + \varepsilon,$$
$$|\varepsilon| < 1.9\cdot 10^{-7}.$$

9.8.3. $-3.75 \leqslant x \leqslant 3.75$,

$$x^{-1}I_1(x) = \frac{1}{2} + 0.87890\,594t^2 + 0.51498\,869t^4 + 0.15084\,934t^6 + 0.02658\,733t^8 + 0.00301\,532t^{10} + 0.00032\,411t^{12} + \varepsilon,$$
$$|\varepsilon| < 8\cdot 10^{-9}.$$

*) См. сноску на стр. 191.

9.8.4. $3.75 \leqslant x < \infty$,

$$x^{1/2}e^{-x}I_1(x) = 0.39894\,228 - 0.03988\,024t^{-1} - 0.00362\,018t^{-2} + 0.00163\,801t^{-3} - 0.01031\,555t^{-4} + 0.02282\,967t^{-5} - 0.02895\,312t^{-6} + 0.01787\,654t^{-7} - 0.00420\,059t^{-8} + \varepsilon,$$

$$|\varepsilon| < 2.2\cdot 10^{-7}.$$

9.8.5. $0 < x \leqslant 2$,

$$K_0(x) = -\ln(x/2)\,I_0(x) - 0.57721\,566 + 0.42278\,420(x/2)^2 + 0.23069\,756(x/2)^4 + 0.03488\,590(x/2)^6 + 0.00262\,698(x/2)^8 + 0.00010\,750(x/2)^{10} + 0.00000\,740(x/2)^{12} + \varepsilon,$$

$$|\varepsilon| < 1\cdot 10^{-8}.$$

9.8.6. $2 \leqslant x < \infty$,

$$x^{1/2}e^{x}K_0(x) = 1.25331\,414 - 0.07832\,358(2/x) + 0.02189\,568(2/x)^2 - 0.01062\,446(2/x)^3 + 0.00587\,872(2/x)^4 - 0.00251\,540(2/x)^5 + 0.00053\,208(2/x)^6 + \varepsilon,$$

$$|\varepsilon| < 1.9\cdot 10^{-7}.$$

9.8.7. $0 < x \leqslant 2$,

$$xK_1(x) = x\ln(x/2)I_1(x) + 1 + 0.15443\,144(x/2)^2 - 0.67278\,579(x/2)^4 - 0.18156\,897(x/2)^6 - 0.01919\,402(x/2)^8 - 0.00110\,404(x/2)^{10} - 0.00004\,686(x/2)^{12} + \varepsilon,$$

$$|\varepsilon| < 8\cdot 10^{-9}.$$

9.8.8. $2 \leqslant x < \infty$,

$$x^{1/2}e^{x}K_1(x) = 1.25331\,414 + 0.23498\,619(2/x) - 0.03655\,620(2/x)^2 + 0.01504\,268(2/x)^3 - 0.00780\,353(2/x)^4 + 0.00325\,614(2/x)^5 - 0.00068\,245(2/x)^6 + \varepsilon,$$

$$|\varepsilon| < 2.2\cdot 10^{-7}.$$

Разложения функций $I_0(x)$, $K_0(x)$, $I_1(x)$ и $K_1(x)$ по многочленам Чебышева для областей $0 \leqslant x \leqslant 8$ и $0 \leqslant 8/x \leqslant 1$ см. в [9.37].

ФУНКЦИИ КЕЛЬВИНА

9.9. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

В этом и следующих разделах ν — действительное, x — действительное неотрицательное, а n — целое положительное или нуль.

Определения

9.9.1. $$\operatorname{ber}_\nu x + i\operatorname{bei}_\nu(x) = J_\nu(xe^{3\pi i/4}) = e^{\nu\pi i}J_\nu(xe^{-\pi i/4}) = e^{\nu\pi i/2}I_\nu(xe^{\pi i/4}) = e^{3\nu\pi i/2}I_\nu(xe^{-3\pi i/4}).$$

9.9.2. $$\operatorname{ker}_\nu x + i\operatorname{kei}_\nu x = e^{-\nu\pi i/2}K_\nu(xe^{\pi i/4}) = \frac{1}{2}\pi i\,H_\nu^{(1)}(xe^{3\pi i/4}) = -\frac{1}{2}\pi i e^{-\nu\pi i}H_\nu^{(2)}(xe^{-\pi i/4}).$$

В случае $\nu = 0$ индекс ν у функций Кельвина обычно не пишется.

Дифференциальные уравнения

9.9.3. $$x^2w'' + xw' - (ix^2 + \nu^2)\,w = 0,$$

$$w = \operatorname{ber}_\nu x + i\operatorname{bei}_\nu x,\ \operatorname{ber}_{-\nu} x + i\operatorname{bei}_{-\nu} x,$$
$$\operatorname{ker}_\nu x + i\operatorname{kei}_\nu x,\ \operatorname{ker}_{-\nu} x + i\operatorname{kei}_{-\nu} x.$$

9.9.4. $$x^4w^{\mathrm{IV}} + 2x^3w''' - (1 + 2\nu^2)(x^2w'' - xw') + (\nu^4 - 4\nu^2 + x^4)\,w = 0,$$

$$w = \operatorname{ber}_{\pm\nu} x,\ \operatorname{bei}_{\pm\nu} x,\ \operatorname{ker}_{\pm\nu} x,\ \operatorname{kei}_{\pm\nu} x.$$

Соотношения между решениями

9.9.5. $$\operatorname{ber}_{-\nu} x = \cos(\nu\pi)\operatorname{ber}_\nu x + \sin(\nu\pi)\operatorname{bei}_\nu x + (2/\pi)\sin(\nu\pi)\operatorname{ker}_\nu x,$$

$$\operatorname{bei}_{-\nu} x = -\sin(\nu\pi)\operatorname{ber}_\nu x + \cos(\nu\pi)\operatorname{bei}_\nu x + (2/\pi)\sin(\nu\pi)\operatorname{kei}_\nu x.$$

9.9.6. $$\operatorname{ker}_{-\nu} x = \cos(\nu\pi)\operatorname{ker}_\nu x - \sin(\nu\pi)\operatorname{kei}_\nu x,$$

$$\operatorname{kei}_{-\nu} x = \sin(\nu\pi)\operatorname{ker}_\nu x + \cos(\nu\pi)\operatorname{kei}_\nu x.$$

9.9.7. $\operatorname{ber}_{-n} x = (-1)^n\operatorname{ber}_n x$, $\operatorname{bei}_{-n} x = (-1)^n\operatorname{bei}_n x$.

9.9.8. $\operatorname{ker}_{-n} x = (-1)^n\operatorname{ker}_n x$, $\operatorname{kei}_{-n} x = (-1)^n\operatorname{kei}_n x$.

Разложения в степенной ряд

9.9.9.

$$\operatorname{ber}_\nu x = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left\{\left(\frac{3}{4}\nu + \frac{1}{2}k\right)\pi\right\}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k,$$

$$\operatorname{bei}_\nu x = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left\{\left(\frac{3}{4}\nu + \frac{1}{2}k\right)\pi\right\}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k.$$

9.9.10.

$$\operatorname{ber} x = 1 - \frac{(x^2/4)^2}{(2!)^2} + \frac{(x^2/4)^4}{(4!)^2} - \ldots,$$

$$\operatorname{bei} x = \frac{x^2}{4} - \frac{(x^2/4)^3}{(3!)^2} + \frac{(x^2/4)^5}{(5!)^2} - \ldots$$

9.9.11. $$\operatorname{ker}_n x = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left\{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{2}k\right)\pi\right\}\times \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ber}_n x + \frac{1}{4}\pi\operatorname{bei}_n x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\cos\left\{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{2}k\right)\pi\right\}\times \frac{\{\psi(k+1)+\psi(n+k+1)\}}{k!(n+k)!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k,$$

$$\operatorname{kei}_n x = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left\{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{2}k\right)\pi\right\}\times \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{bei}_n x - \frac{1}{4}\pi\operatorname{ber}_n x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\sin\left\{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{2}k\right)\pi\right\}\times \frac{\{\psi(k+1)+\psi(n+k+1)\}}{k!(n+k)!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k,$$

где $\psi(n)$ определена формулой 6.3.2.

9.9.12. $$\operatorname{ker} x = -\ln\frac{x}{2}\operatorname{ber} x + \frac{1}{4}\pi\operatorname{bei} x + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\psi(2k+1)}{\{(2k)!\}^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{2k},$$

$$\operatorname{kei} x = -\ln\frac{x}{2}\operatorname{bei} x - \frac{1}{4}\pi\operatorname{ber} x + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\psi(2k+2)}{\{(2k+1)!\}^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{2k+1}.$$

Функции от отрицательного аргумента

Вообще говоря, функции Кельвина имеют точку ветвления при $x=0$; при этом функции аргумента $xe^{\pm\pi i}$ являются комплексными. Однако, когда ν — целое, у функций ber_ν и bei_ν точка ветвления отсутствует и

9.9.13. $\operatorname{ber}_n(-x)=(-1)^n\operatorname{ber}_n x,\quad \operatorname{bei}_n(-x)=(-1)^n\operatorname{bei}_n x.$

Рекуррентные соотношения

9.9.14. $$f_{\nu+1}+f_{\nu-1} = -\frac{\nu\sqrt{2}}{x}(f_\nu - g_\nu),$$

$$f'_\nu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(f_{\nu+1}+g_{\nu+1}-f_{\nu-1}-g_{\nu-1}),$$

$$f'_\nu - \frac{\nu}{x}f_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{\nu+1}+g_{\nu+1}),$$

$$f'_\nu + \frac{\nu}{x}f_\nu = -\frac{1}{\sqrt{2}}(f_{\nu-1}+g_{\nu-1}),$$

где решениями являются пары функций

9.9.15. $$\left.\begin{aligned} f_\nu &= \operatorname{ber}_\nu x\\ g_\nu &= \operatorname{bei}_\nu x\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} f_\nu &= \operatorname{bei}_\nu x\\ g_\nu &= -\operatorname{ber}_\nu x\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} f_\nu &= \operatorname{ker}_\nu x\\ g_\nu &= \operatorname{kei}_\nu x\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} f_\nu &= \operatorname{kei}_\nu x\\ g_\nu &= -\operatorname{ker}_\nu x\end{aligned}\right\}.$$

9.9.16. $$\sqrt{2}\operatorname{ber}' x = \operatorname{ber}_1 x + \operatorname{bei}_1 x,$$

$$\sqrt{2}\operatorname{bei}' x = -\operatorname{ber}_1 x + \operatorname{bei}_1 x.$$

9.9.17. $$\sqrt{2}\operatorname{ker}' x = \operatorname{ker}_1 x + \operatorname{kei}_1 x,$$

$$\sqrt{2}\operatorname{kei}' x = -\operatorname{ker}_1 x + \operatorname{kei}_1 x.$$

Рекуррентные формулы для произведений функций

Если

9.9.18. $$p_\nu = \operatorname{ber}_\nu^2 x + \operatorname{bei}_\nu^2 x,$$

$$q_\nu = \operatorname{ber}_\nu x\operatorname{bei}'_\nu x - \operatorname{ber}'_\nu x\operatorname{bei}_\nu x,$$

$$r_\nu = \operatorname{ber}_\nu x\operatorname{ber}'_\nu x + \operatorname{bei}_\nu x\operatorname{bei}'_\nu x,$$

$$s_\nu = \operatorname{ber}'^2_\nu x + \operatorname{bei}'^2_\nu x,$$

то

9.9.19. $$p_{\nu+1} = p_{\nu-1} - \frac{4\nu}{x}r_\nu,$$

$$q_{\nu+1} = -\frac{\nu}{x}p_\nu + r_\nu = -q_{\nu-1} + 2r_\nu,$$

$$r_{\nu+1} = -\frac{(\nu+1)}{x}p_{\nu+1} + q_\nu,$$

$$s_\nu = \frac{1}{2}p_{\nu+1} + \frac{1}{2}p_{\nu-1} - \frac{\nu^2}{x^2}p_\nu.$$

9.9.20. $p_\nu s_\nu = r_\nu^2 + q_\nu^2.$

Формулы остаются такими же, если повсюду заменить ber и bei соответственно на ker и kei.

Неопределенные интегралы

В приведенных ниже интегралах f_ν, g_ν — любая из пар функций, заданных формулами 9.9.15, а f^*_ν, g^*_ν — либо та же самая пара, либо любая другая.

9.9.21. $$\int x^{1+\nu}f_\nu\,dx = -\frac{x^{1+\nu}}{\sqrt{2}}(f_{\nu+1}-g_{\nu+1}) = -x^{1+\nu}\left(\frac{\nu}{x}g_\nu - g'_\nu\right).$$

9.9.22. $$\int x^{1-\nu}f_\nu\,dx = \frac{x^{1-\nu}}{\sqrt{2}}(f_{\nu-1}-g_{\nu-1}) = x^{1-\nu}\left(\frac{\nu}{x}g_\nu + g'_\nu\right).$$

9.9.23. $$\int x(f_\nu g^*_\nu - g_\nu f^*_\nu)\,dx = \frac{x}{2\sqrt{2}}\{f^*_\nu(f_{\nu+1}+g_{\nu+1}) - g^*_\nu(f_{\nu+1}-g_{\nu+1}) - f_\nu(f^*_{\nu+1}+g^*_{\nu+1}) + g_\nu(f^*_{\nu+1}-g^*_{\nu+1})\} = \frac{x}{2}(f'_\nu f^*_\nu - f_\nu f^{*\prime}_\nu + g'_\nu g^*_\nu - g_\nu g^{*\prime}_\nu).$$

9.9.24. $\displaystyle\int x(f_\nu g_\nu^* + g_\nu f_\nu^*)\,dx = \frac{1}{4}x^2(2f_\nu g_\nu^* - f_{\nu-1}g_{\nu+1}^* -$

$$- f_{\nu+1}g_{\nu-1}^* + 2g_\nu f_\nu^* - g_{\nu-1}f_{\nu+1}^* - g_{\nu+1}f_{\nu-1}^*).$$

9.9.25. $\displaystyle\int x(f_\nu^2 + g_\nu^2)\,dx = x(f_\nu g_\nu' - f_\nu' g_\nu) =$

$$= -(x/\sqrt{2})\,(f_\nu f_{\nu+1} + g_\nu g_{\nu+1} - f_\nu g_{\nu+1} + f_{\nu+1}g_\nu).$$

9.9.26. $\displaystyle\int x f_\nu g_\nu\,dx = \frac{1}{4}x^2(2f_\nu g_\nu - f_{\nu-1}g_{\nu+1} - f_{\nu+1}g_{\nu-1}).$

9.9.27. $\displaystyle\int x(f_\nu^2 - g_\nu^2)\,dx =$

$$= \frac{1}{2}x^2(f_\nu^2 - f_{\nu-1}f_{\nu+1} - g_\nu^2 + g_{\nu-1}g_{\nu+1})$$

Разложения произведений функций в степенной ряд

9.9.28. $\mathrm{ber}_\nu^2 x + \mathrm{bei}_\nu^2 x =$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2/4)^{2k}}{\Gamma(\nu+k+1)\,\Gamma(\nu+2k+1)\,k!}.$$

9.9.29. $\mathrm{ber}_\nu x\,\mathrm{bei}_\nu' x - \mathrm{ber}_\nu' x\,\mathrm{bei}_\nu x =$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2/4)^{2k}}{\Gamma(\nu+k+1)\,\Gamma(\nu+2k+2)\,k!}.$$

9.9.30. $\mathrm{ber}_\nu x\,\mathrm{ber}_\nu' x + \mathrm{bei}_\nu x\,\mathrm{bei}_\nu' x =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2/4)^{2k}}{\Gamma(\nu+k+1)\,\Gamma(\nu+2k)\,k!}.$$

9.9.31. $\mathrm{ber}_\nu'^2 x + \mathrm{bei}_\nu'^2 x =$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k^2+2\nu k+\nu^2/4)}{\Gamma(\nu+k+1)\,\Gamma(\nu+2k+1)}\,\frac{(x^2/4)^{2k}}{k!}$$

Разложения по функциям Бесселя

9.9.32. $\displaystyle\mathrm{ber}_\nu x + i\,\mathrm{bei}_\nu x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(3\nu+k)\pi i/4}\,x^k J_{\nu+k}(x)}{2^{k/2}k!} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(3\nu+3k)\pi i/4}\,x^k I_{\nu+k}(x)}{2^{k/2}k!}.$$

9.9.33. $\displaystyle\mathrm{ber}_n(x\sqrt{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+k}J_{n+2k}(x)\,I_{2k}(x),$

$$\mathrm{bei}_n(x\sqrt{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+k}J_{n+2k+1}(x)\,I_{2k+1}(x)$$

Нули функций нулевого порядка *)

	ber x	bei x	ker x	kei x
1-й нуль	2.84892	5.02622	1.71854	3.91467
2-й нуль	7.23883	9.45541	6.12728	9.34422
3-й нуль	11.67396	13.89349	10.56294	12.78256
4-й нуль	16.11356	18.33398	15.00269	17.22314
5-й нуль	20.55463	22.77544	19.44381	21.66464
	ber′ x	**bei′ x**	**ker′ x**	**kei′ x**
1-й нуль	6.03871	3.77320	2.66584	4.93181
2-й нуль	10.51364	8.28099	7.17212	9.40405
3-й нуль	14.96844	12.74215	11.63218	13.85827
4-й нуль	19.41758	17.19343	16.08312	18.30717
5-й нуль	23.86430	21.64114	20.53068	22.75379

9.10. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Асимптотические разложения при больших значениях аргумента

(ν фиксировано, x — большое)

9.10.1. $\displaystyle\mathrm{ber}_\nu x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}}\{f_\nu(x)\cos\alpha + g_\nu(x)\sin\alpha\} -$

$$- \{\sin(2\nu\pi)\,\mathrm{ker}_\nu x + \cos(2\nu\pi)\,\mathrm{kei}_\nu x\}/\pi.$$

9.10.2. $\displaystyle\mathrm{bei}_\nu x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}}\{f_\nu(x)\sin\alpha - g_\nu(x)\cos\alpha\} +$

$$+ \{\cos(2\nu\pi)\,\mathrm{ker}_\nu x - \sin(2\nu\pi)\,\mathrm{kei}_\nu x\}/\pi.$$

9.10.3. $\mathrm{ker}_\nu x =$

$$= \sqrt{\pi/(2x)}\,e^{-x/\sqrt{2}}\{f_\nu(-x)\cos\beta - g_\nu(-x)\sin\beta\}$$

9.10.4. $\mathrm{kei}_\nu x =$

$$= \sqrt{\pi/(2x)}\,e^{-x/\sqrt{2}}\{-f_\nu(-x)\sin\beta - g_\nu(-x)\cos\beta\},$$

где

9.10.5. $\alpha = (x/\sqrt{2}) + (\nu/2 - 1/8)\pi,$

$$\beta = (x/\sqrt{2}) + (\nu/2 + 1/8)\pi = \alpha + \pi/4.$$

Обозначая $4\nu^2$ через μ, имеем

9.10.6. $f_\nu(\pm x) \sim 1 +$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(\mp 1)^k\frac{(\mu-1)(\mu-9)\ldots\{\mu-(2k-1)^2\}}{k!\,(8x)^k}\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right),$$

9.10.7. $g_\nu(\pm x) \sim$

$$\sim \sum_{k=1}^{\infty}(\mp 1)^k\frac{(\mu-1)(\mu-9)\ldots\{\mu-(2k-1)^2\}}{k!\,(8x)^k}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right).$$

Члены разложения **), содержащие $\mathrm{ker}_\nu x$ и $\mathrm{kei}_\nu x$ в разложениях 9.10.1 и 9.10.2, незначительны по сравнению с другими членами, но их включение в вычисления улучшает точность.

---

*) В [9.22] даются значения также и следующих пяти нулей каждой из этих функций, точность 5D.

**) Коэффициенты этих членов, данные в [9.17], неверны. Настоящие результаты получены Миллером.

Соответствующие ряды для $\mathrm{ber}'_\nu x$, $\mathrm{bei}'_\nu x$, $\mathrm{ker}'_\nu x$ и $\mathrm{kei}'_\nu (x)$ могут быть получены из 9.2.11 и 9.2.13 при $z = xe^{3\pi i/4}$. Дополнительные члены в разложениях $\mathrm{ber}'_\nu x$ и $\mathrm{bei}'_\nu x$ соответственно таковы:

$$-(1/\pi)\{\sin(2\nu\pi)\,\mathrm{ker}'_\nu x + \cos(2\nu\pi)\,\mathrm{kei}'_\nu x\},$$
$$(1/\pi)\{\cos(2\nu\pi)\,\mathrm{ker}'_\nu x - \sin(2\nu\pi)\,\mathrm{kei}'_\nu x\}.$$

Модуль и фаза

9.10.8. $M_\nu = \sqrt{\mathrm{ber}_\nu^2 x + \mathrm{bei}_\nu^2 x}$, $\theta_\nu = \operatorname{arctg}(\mathrm{bei}_\nu x/\mathrm{ber}_\nu x)$.

9.10.9. $\mathrm{ber}_\nu x = M_\nu \cos\theta_\nu$, $\mathrm{bei}_\nu x = M_\nu \sin\theta_\nu$.

9.10.10. $M_{-n} = M_n$, $\theta_{-n} = \theta_n - n\pi$.

9.10.11. $\mathrm{ber}'_\nu x =$

$$= \frac{1}{2} M_{\nu+1}\cos(\theta_{\nu+1} - \pi/4) - \frac{1}{2} M_{\nu-1}\cos(\theta_{\nu-1} - \pi/4) =$$
$$= (\nu/x) M_\nu \cos\theta_\nu + M_{\nu+1}\cos(\theta_{\nu+1} - \pi/4) =$$
$$= -(\nu/x) M_\nu \cos\theta_\nu - M_{\nu-1}\cos(\theta_{\nu-1} - \pi/4).$$

9.10.12. $\mathrm{bei}'_\nu x =$

$$= \frac{1}{2} M_{\nu+1}\sin(\theta_{\nu+1} - \pi/4) - \frac{1}{2} M_{\nu-1}\sin(\theta_{\nu-1} - \pi/4) =$$
$$= (\nu/x) M_\nu \sin\theta_\nu + M_{\nu+1}\sin(\theta_{\nu+1} - \pi/4) =$$
$$= -(\nu/x) M_\nu \sin\theta_\nu - M_{\nu-1}\sin(\theta_{\nu-1} - \pi/4).$$

9.10.13. $\mathrm{ber}' x = M_1 \cos(\theta_1 - \pi/4)$,

$\mathrm{bei}' x = M_1 \sin(\theta_1 - \pi/4)$.

9.10.14. $M'_\nu = (\nu/x) M_\nu + M_{\nu+1}\cos(\theta_{\nu+1} - \theta_\nu - \pi/4) =$

$$= -(\nu/x) M_\nu - M_{\nu-1}\cos(\theta_{\nu-1} - \theta_\nu - \pi/4).$$

9.10.15. $\theta'_\nu = (M_{\nu+1}/M_\nu)\sin(\theta_{\nu+1} - \theta_\nu - \pi/4) =$

$$= -(M_{\nu-1}/M_\nu)\sin(\theta_{\nu-1} - \theta_\nu - \pi/4).$$

9.10.16. $M'_0 = M_1 \cos(\theta_1 - \theta_0 - \pi/4)$,

$\theta'_0 = (M_1/M_0)\sin(\theta_1 - \theta_0 - \pi/4)$.

9.10.17. $d(xM_\nu^2\theta'_\nu)/dx = xM_\nu^2$,

$$x^2 M''_\nu + xM'_\nu - \nu^2 M_\nu = x^2 M_\nu \theta_\nu'^2$$

9.10.18. $N_\nu = \sqrt{\mathrm{ker}_\nu^2 x + \mathrm{kei}_\nu^2 x}$,

$\Phi_\nu = \operatorname{arctg}(\mathrm{kei}_\nu x/\mathrm{ker}_\nu x)$.

9.10.19. $\mathrm{ker}_\nu x = N_\nu \cos\Phi_\nu$, $\mathrm{kei}_\nu x = N_\nu \sin\Phi_\nu$.

Уравнения 9.10.11 – 9.10.17 остаются в силе, если в них заменить ber, bei, M, θ на ker, kei, N, Φ соответственно. Вместо 9.10.10 имеем

9.10.20. $N_{-\nu} = N_\nu$, $\Phi_{-\nu} = \Phi_\nu + \nu\pi$.

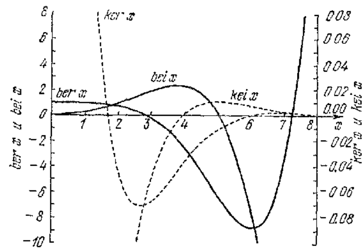


Рис. 9.10. ber x, bei x, ker x и kei x.

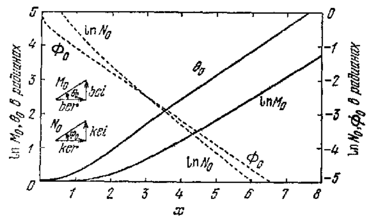


Рис. 9.11. ln $M_0(x)$, $\theta_0(x)$, ln $N_0(x)$ и $\Phi_0(x)$.

Асимптотические разложения для модуля и фазы

(ν фиксировано, x — большое и $\mu = 4\nu^2$)

9.10.21. $$M_\nu = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}}\left\{1 - \frac{\mu-1}{8\sqrt{2}}\frac{1}{x} + \frac{(\mu-1)^2}{256}\frac{1}{x^2} - \frac{(\mu-1)(\mu^2+14\mu-399)}{6144\sqrt{2}}\frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right\}.$$

9.10.22. $$\ln M_\nu = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(2\pi x) - \frac{\mu-1}{8\sqrt{2}}\frac{1}{x} - \frac{(\mu-1)(\mu-25)}{384\sqrt{2}}\frac{1}{x^3} - \frac{(\mu-1)(\mu-13)}{128}\frac{1}{x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

9.10.23. $$\theta_\nu = \frac{x}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{8}\right)\pi + \frac{\mu-1}{8\sqrt{2}}\frac{1}{x} + \frac{\mu-1}{16}\frac{1}{x^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-25)}{384\sqrt{2}}\frac{1}{x^3} O + \left(\frac{1}{x^5}\right).$$

9.10.24. $$N_\nu = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x/\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{\mu-1}{8\sqrt{2}}\frac{1}{x} + \frac{(\mu-1)^2}{256}\frac{1}{x^2} + \frac{(\mu-1)(\mu^2+14\mu-399)}{6144\sqrt{2}}\frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right\}.$$

9.10.25. $\ln N_\nu = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2x}\right) + \frac{\mu-1}{8\sqrt{2}}\frac{1}{x} + \frac{(\mu-1)(\mu-25)}{384\sqrt{2}}\frac{1}{x^3} - \frac{(\mu-1)(\mu-13)}{128}\frac{1}{x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right).$

9.10.26. $\Phi_\nu = -\frac{x}{\sqrt{2}} - \left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{8}\right)\pi - \frac{\mu-1}{8\sqrt{2}}\frac{1}{x} + \frac{\mu-1}{16}\frac{1}{x^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-25)}{384\sqrt{2}}\frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^5}\right).$

Асимптотические разложения для произведений функций
(x — большое)

9.10.27. $\mathrm{ber}^2 x + \mathrm{bei}^2 x \sim \frac{e^{x\sqrt{2}}}{2\pi x}\left(1 + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{x} + \frac{1}{64}\frac{1}{x^2} - \frac{33}{256\sqrt{2}}\frac{1}{x^3} - \frac{1797}{8192}\frac{1}{x^4} + \ldots\right).$

9.10.28. $\mathrm{ber}\, x\,\mathrm{bei}'\, x - \mathrm{ber}'\, x\,\mathrm{bei}\, x \sim$

$$\sim \frac{e^{x\sqrt{2}}}{2\pi x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8}\frac{1}{x} + \frac{9}{64\sqrt{2}}\frac{1}{x^2} + \frac{39}{512}\frac{1}{x^3} + \frac{75}{8192\sqrt{2}}\frac{1}{x^4} + \ldots\right).$$

9.10.29. $\mathrm{ber}\, x\,\mathrm{ber}'\, x + \mathrm{bei}\, x\,\mathrm{bei}'\, x \sim$

$$\sim \frac{e^{x\sqrt{2}}}{2\pi x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{8}\frac{1}{x} - \frac{15}{64\sqrt{2}}\frac{1}{x^2} - \frac{45}{512}\frac{1}{x^3} + \frac{315}{8192\sqrt{2}}\frac{1}{x^4} + \ldots\right).$$

9.10.30. $\mathrm{ber}'^2 x + \mathrm{bei}'^2 x \sim \frac{e^{x\sqrt{2}}}{2\pi x}\left(1 - \frac{3}{4\sqrt{2}}\frac{1}{x} + \frac{9}{64}\frac{1}{x^2} + \frac{75}{256\sqrt{2}}\frac{1}{x^3} + \frac{2475}{8192}\frac{1}{x^4} + \ldots\right).$

9.10.31. $\mathrm{ker}^2 x + \mathrm{kei}^2 x \sim \frac{\pi}{2x}e^{-x\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{x} + \frac{1}{64}\frac{1}{x^2} + \frac{33}{256\sqrt{2}}\frac{1}{x^3} - \frac{1797}{8192}\frac{1}{x^4} + \ldots\right).$

9.10.32. $\mathrm{ker}\, x\,\mathrm{kei}'\, x - \mathrm{ker}'\, x\,\mathrm{kei}\, x \sim$

$$\sim -\frac{\pi}{2x}e^{-x\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8}\frac{1}{x} + \frac{9}{64\sqrt{2}}\frac{1}{x^2} - \frac{39}{512}\frac{1}{x^3} + \frac{75}{8192\sqrt{2}}\frac{1}{x^4} + \ldots\right).$$

9.10.33. $\mathrm{ker}\, x\,\mathrm{ker}'\, x + \mathrm{kei}\, x\,\mathrm{kei}'\, x \sim$

$$\sim -\frac{\pi}{2x}e^{-x\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} - \frac{15}{64\sqrt{2}}\frac{1}{x^2} + \frac{45}{512}\frac{1}{x^3} + \frac{315}{8192\sqrt{2}}\frac{1}{x^4} + \ldots\right).$$

9.10.34. $\mathrm{ker}'^2 x + \mathrm{kei}'^2 x \sim \frac{\pi}{2x}e^{-x\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3}{4\sqrt{2}}\frac{1}{x} + \frac{9}{64}\frac{1}{x^2} - \frac{75}{256\sqrt{2}}\frac{1}{x^3} + \frac{2475}{8192}\frac{1}{x^4} + \ldots\right).$

Асимптотические разложения больших нулей

Пусть

9.10.35. $f(\delta) = \frac{\mu-1}{16\delta} + \frac{\mu-1}{32\delta^2} + \frac{(\mu-1)(5\mu+19)}{1536\delta^3} + \frac{3(\mu-1)^2}{512\delta^4} + \ldots,$

где $\mu = 4\nu^2$. Тогда, если s — большое положительное целое число, то

9.10.36.

Нули функции

$\mathrm{ber}_\nu x \sim \sqrt{2}\{\delta - f(\delta)\}, \quad \delta = (s - \nu/2 - 3/8)\pi;$

нули функции

$\mathrm{bei}_\nu x \sim \sqrt{2}\{\delta - f(\delta)\}, \quad \delta = (s - \nu/2 + 1/8)\pi;$

нули функции

$\mathrm{ker}_\nu x \sim \sqrt{2}\{\delta + f(-\delta)\}, \quad \delta = (s - \nu/2 - 5/8)\pi;$

нули функции

$\mathrm{kei}_\nu x \sim \sqrt{2}\{\delta + f(-\delta)\}, \quad \delta = (s - \nu/2 - 1/8)\pi.$

Для $\nu = 0$ эти разложения дают s-й нуль каждой из функций; для других значений ν представленные нули могут быть и не s-ми.

Равномерные асимптотические разложения при больших значениях порядка

Когда ν — большое положительное число, тогда

9.10.37. $\mathrm{ber}_\nu(\nu x) + i\,\mathrm{bei}_\nu(\nu x) \sim$

$$\sim \frac{e^{\nu\xi}}{\sqrt{2\pi\nu\xi}}\left(\frac{xe^{3\pi i/4}}{1+\xi}\right)^\nu\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(\xi^{-1})}{\nu^k}\right\}.$$

9.10.38. $\mathrm{ker}_\nu(\nu x) + i\,\mathrm{kei}_\nu(\nu x) \sim$

$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{2\nu\xi}}\,e^{-\nu\xi}\left(\frac{xe^{3\pi i/4}}{1+\xi}\right)^{-\nu}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{u_k(\xi^{-1})}{\nu^k}\right\}.$$

9.10.39. $\mathrm{ber}'_\nu(\nu x) + i\,\mathrm{bei}'_\nu(\nu x) \sim$

$$\sim \sqrt{\frac{\xi}{2\pi\nu}}\,\frac{e^{\nu\xi}}{x}\left(\frac{xe^{3\pi i/4}}{1+\xi}\right)^\nu\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(\xi^{-1})}{\nu^k}\right\}.$$

9.10.40. $\mathrm{ker}'_\nu(\nu x) + i\,\mathrm{kei}'_\nu(\nu x) \sim$

$$\sim -\sqrt{\frac{\pi\xi}{2\nu}}\,\frac{e^{-\nu\xi}}{x}\left(\frac{xe^{3\pi i/4}}{1+\xi}\right)^{-\nu}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{v_k(\xi^{-1})}{\nu^k}\right\},$$

где

9.10.41. $\xi = \sqrt{1 + ix^2}$

и $u_k(t)$, $v_k(t)$ даются формулами 9.3.9 и 9.3.13. Все дробные степени принимают свои главные значения.

9.11. АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ

9.11.1. $-8 \leqslant x \leqslant 8$,

$$\begin{aligned}\operatorname{ber} x = 1 &- 64(x/8)^4 + 113.77777\,774(x/8)^8 - \\ &- 32.36345\,652(x/8)^{12} + 2.64191\,397(x/8)^{16} - \\ &- 0.08349\,609(x/8)^{20} + 0.00122\,552(x/8)^{24} - \\ &- 0.00000\,901(x/8)^{28} + \varepsilon,\end{aligned}$$

$$|\varepsilon| < 1 \cdot 10^{-9}.$$

9.11.2. $-8 \leqslant x \leqslant 8$,

$$\begin{aligned}\operatorname{bei} x = 16(x/8)^2 &- 113.77777\,774(x/8)^6 + \\ &+ 72.81777\,742(x/8)^{10} - 10.56765\,779(x/8)^{14} + \\ &+ 0.52185\,615(x/8)^{18} - 0.01103\,667(x/8)^{22} + \\ &+ 0.00011\,346(x/8)^{26} + \varepsilon,\end{aligned}$$

$$|\varepsilon| < 6 \cdot 10^{-9}.$$

9.11.3. $0 < x \leqslant 8$,

$$\begin{aligned}\operatorname{ker} x = -\ln(x/2) \operatorname{ber} x + (\pi/4) \operatorname{bei} x &- 0.57721\,566 - \\ &- 59.05819\,744(x/8)^4 + \\ &+ 171.36272\,133(x/8)^8 - 60.60977\,451(x/8)^{12} + \\ &+ 5.65539\,121(x/8)^{16} - 0.19636\,347(x/8)^{20} + \\ &+ 0.00309\,699(x/8)^{24} - 0.00002\,458(x/8)^{28} + \varepsilon,\end{aligned}$$

$$|\varepsilon| < 1 \cdot 10^{-8}.$$

9.11.4. $0 < x \leqslant 8$,

$$\begin{aligned}\operatorname{kei} x = -\ln(x/2) \operatorname{bei} x &- (\pi/4) \operatorname{ber} x + \\ &+ 6.76454\,936(x/8)^2 - 142.91827\,687(x/8)^6 + \\ &+ 124.23569\,650(x/8)^{10} - 21.30060\,904(x/8)^{14} + \\ &+ 1.17509\,064(x/8)^{18} - 0.02695\,875(x/8)^{22} + \\ &+ 0.00029\,532(x/8)^{26} + \varepsilon,\end{aligned}$$

$$|\varepsilon| < 3 \cdot 10^{-9}.$$

9.11.5. $-8 \leqslant x \leqslant 8$,

$$\begin{aligned}\operatorname{ber}' x = x[-4(x/8)^2 &+ 14.22222\,222(x/8)^6 - \\ &- 6.06814\,810(x/8)^{10} + 0.66047\,849(x/8)^{14} - \\ &- 0.02609\,253(x/8)^{18} + 0.00045\,957(x/8)^{22} - \\ &- 0.00000\,394(x/8)^{26}] + \varepsilon,\end{aligned}$$

$$|\varepsilon| < 2.\ 1 \cdot 10^{-8}.$$

9.11.6. $-8 \leqslant x \leqslant 8$,

$$\begin{aligned}\operatorname{bei}' x = x[1/2 &- 10.66666\,666(x/8)^4 + \\ &+ 11.37777\,772(x/8)^8 - 2.31167\,514(x/8)^{12} + \\ &+ 0.14677\,204(x/8)^{16} - 0.00379\,386(x/8)^{20} + \\ &+ 0.00004\,609(x/8)^{24}] + \varepsilon,\end{aligned}$$

$$|\varepsilon| < 7 \cdot 10^{-8}.$$

9.11.7. $0 < x \leqslant 8$,

$$\begin{aligned}\operatorname{ker}' x = -\ln(x/2) \operatorname{ber}' x &- x^{-1} \operatorname{ber} x + (\pi/4) \operatorname{bei}' x + \\ &+ x[-3.69113\,734(x/8)^2 + 21.42034\,017(x/8)^6 - \\ &- 11.36433\,272(x/8)^{10} + 1.41384\,780(x/8)^{14} - \\ &- 0.06136\,358(x/8)^{18} + 0.00116\,137(x/8)^{22} - \\ &- 0.00001\,075(x/8)^{26}] + \varepsilon,\end{aligned}$$

$$|\varepsilon| < 8 \cdot 10^{-8}.$$

9.11.8. $0 < x \leqslant 8$,

$$\begin{aligned}\operatorname{kei}' x = -\ln(x/2) \operatorname{bei}' x &- x^{-1} \operatorname{bei} x - (\pi/4) \operatorname{ber}' x + \\ &+ x[0.21139\,217 - 13.39858\,846(x/8)^4 + \\ &+ 19.41182\,758(x/8)^8 - 4.65950\,823(x/8)^{12} + \\ &+ 0.33049\,424(x/8)^{16} - 0.00926\,707(x/8)^{20} + \\ &+ 0.00011\,997(x/8)^{24}] + \varepsilon,\end{aligned}$$

$$|\varepsilon| < 7 \cdot 10^{-8}.$$

9.11.9. $8 \leqslant x < \infty$,

$$\operatorname{ker} x + i \operatorname{kei} x = f(x)(1 + \varepsilon_1),$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp\left[-\frac{1+i}{\sqrt{2}} x + \theta(-x)\right],$$

$$|\varepsilon_1| < 1 \cdot 10^{-7}.$$

9.11.10. $8 \leqslant x < \infty$,

$$\operatorname{ber} x + i \operatorname{bei} x - (i/\pi)(\operatorname{ker} x + i \operatorname{kei} x) = g(x)(1 + \varepsilon_2),$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}} x + \theta(x)\right],$$

$$|\varepsilon_2| < 3 \cdot 10^{-7},$$

где

9.11.11.

$$\begin{aligned}(x) = (0.00000\,00 &- 0.39269\,91i) + \\ &+ (0.01104\,86 - 0.01104\,85i)(8/x) + \\ &+ (0.00000\,00 - 0.00097\,65i)(8/x)^2 + \\ &+ (-0.00009\,06 - 0.00009\,01i)(8/x)^3 + \\ &+ (-0.00002\,52 - 0.00000\,00i)(8/x)^4 + \\ &+ (-0.00000\,34 + 0.00000\,51i)(8/x)^5 + \\ &+ (0.00000\,06 + 0.00000\,19i)(8/x)^6.\end{aligned}$$

9.11.12. $8 \leqslant x < \infty$,

$$\operatorname{ker}' x + i \operatorname{kei}' x = -f(x)\, \Phi(-x)(1 + \varepsilon_3),$$

$$|\varepsilon_3| < 2 \cdot 10^{-7}.$$

9.11.13. $8 \leqslant x < \infty$,

$$\operatorname{ber}' x + i \operatorname{bei}' x - (i/\pi)(\operatorname{ker}' x + i \operatorname{kei}' x) = g(x)\Phi(x)(1 + \varepsilon_4),$$

$$|\varepsilon_4| < 3 \cdot 10^{-7},$$

где

9.11.14.

$$\begin{aligned}\Phi(x) = (0.70710\,68 &+ 0.70710\,68i) + \\ &+ (-0.06250\,01 - 0.00000\,01i)(8/x) + \\ &+ (-0.00138\,13 + 0.00138\,11i)(8/x)^2 + \\ &+ (0.00000\,05 + 0.00024\,52i)(8/x)^3 + \\ &+ (0.00003\,46 + 0.00003\,38i)(8/x)^4 + \\ &+ (0.00001\,17 - 0.00000\,24i)(8/x)^5 + \\ &+ (0.00000\,16 - 0.00000\,32i)(8/x)^6.\end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Вычислить $J_n(1.55)$ $(n=0, 1, 2, \ldots, 9)$ с 5D. Рекуррентное соотношение

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = (2n/x)\, J_n(x)$$

может быть использовано для последовательного вычисления $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, ..., если $n < x$. В противном случае будет иметь место быстрое накопление ошибок округления. Так как, однако, $J_n(x)$ — убывающая функция n, то при $n > x$ рекуррентный процесс может быть выполнен в направлении убывания n.

Из табл. 9.2 видно, что значения J_n (1.55) для $n > 7$ меньше 10^{-6}. Зададим для J_8 и J_9 произвольные значения: $J_9 = 0$, $J_8 = 1$ и, исходя из них, вычислим по рекуррентной формуле соответствующие значения для $n = 7, 6, \ldots, 0$. Эти числа (пробные значения) составляют вторую колонку данной ниже таблицы. Они округлены до ближайшего целого.

n	Пробные значения	$J_n(1.55)$	n	Пробные значения	$J_n(1.55)$
9	0	0.00000	4	4292	0.01331
8	1	0.00000	3	21473	0.06661
7	10	0.00003	2	78829	0.24453
6	89	0.00028	1	181957	0.56442
5	679	0.00211	0	155954	0.48376

Нормируем результаты, используя уравнения 9.1.46, а именно:

$$J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \ldots = 1.$$

Получаем нормирующий множитель $1/322376 = 0.00000310197$. Умножая пробные значения на этот множитель, получим в третьей колонке искомые результаты. Для контроля можно проинтерполировать значение $J_0(1.55)$ в табл. 9.1.

Примечания. (I) В этом примере можно было непосредственно из таблиц оценить значение $n = N$, с которого начинать рекуррентный процесс. Когда же такой возможности нет, приходится брать произвольное значение N. Число верных значащих цифр в окончательных значениях то же самое, что и число знаков в соответствующих пробных значениях. Если выбранное N слишком мало, пробные значения имеют мало знаков и точность полученных результатов недостаточна. В этом случае вычисления следует повторить заново, начиная с большего значения N. С другой стороны, если N слишком велико, выполняются лишние вычисления. Это можно до некоторой степени возместить отбрасыванием последних значащих цифр в пробных значениях. При этом следует оставить столько значащих цифр, сколько их требуется в искомых значениях J_n.

(II) Предположим, что требуется найти $J_0(1.55)$, $J_1(1.55)$, ..., $J_{10}(1.55)$ с 5S. Для этого можно найти истинные значения $J_{10}(1.55)$ и $J_{11}(1.55)$ с 5S интерполяцией в табл. 9.3, а затем вычислить требуемые J_9, J_8, ..., J_0 по рекуррентной формуле. Но можно начинать рекуррентный процесс с более высоких значений N и сохранять только 5S в пробных значениях для $n \leqslant 10$.

(III) Аналогичные методы могут быть применены к вычислению модифицированной функции Бесселя $I_n(x)$ с помощью формул 9.6.26 и 9.6.36. Однако, если x велико, то при использовании соотношения 9.6.36 произойдет значительная потеря значащих цифр. Поэтому для нормирования лучше использовать формулу 9.6.37.

Пример 2. Вычислить $Y_n(1.55)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, 10)$ с 5S.

Рекуррентная формула $Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = (2n/x)\, Y_n(x)$ может быть применена для вычисления $Y_n(x)$ в направлении возрастания n как для $n < x$, так и для $n > x$, потому что $Y_n(x)$ — возрастающая функция n.

Вычислим $Y_0(1.55)$ и $Y_1(1.55)$ интерполяцией в табл. 9.1, значения $Y_2(1.55)$, $Y_3(1.55)$, ..., $Y_{10}(1.55)$ получим по рекуррентной формуле и проверим $Y_{10}(1.55)$ интерполяцией в табл. 9.3.

n	$Y_n(1.55)$	n	$Y_n(1.55)$
0	$+0.40225$	6	-1.9917×10^2
1	-0.37970	7	-1.5100×10^3
2	-0.89218	8	-1.3440×10^4
3	-1.9227	9	-1.3722×10^5
4	-6.5505	10	-1.5801×10^6
5	-31.886		

Примечания. (I) Если имеются значения функции $J_0(x)$, $J_2(x)$, $J_4(x)$, ... (см. пример 1), то вычисление значения $Y_0(x)$ можно сделать, применяя формулу 9.1.89. Второе начальное значение для рекуррентного процесса — $Y_1(x)$ — можно получить из вронскиана $J_1(x)\, Y_0(x) - J_0(x)\, Y_1(x) = 2/(\pi x)$. Эта процедура удобна при использовании вычислительной машины.

(II) Аналогичные методы могут быть применены для вычисления модифицированной функции Бесселя $K_n(x)$ посредством рекуррентного соотношения 9.6.26 и формулы 9.6.54.

Если же x — большое, то для вычисления $K_0(x)$ вместо 9.6.54 (из-за потери значащих цифр) предпочтительно применение асимптотического разложения 9.7.2 или аппроксимации многочленами 9.8.6.

Пример 3. Вычислить $J_0(0{,}36)$ и $Y_0(0{,}36)$ с 5D, применяя теорему умножения.

Из 9.1.74 имеем

$$\mathscr{C}_0(\lambda z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathscr{C}_k(z),$$

где
$$a_k = \frac{(-1)^k (\lambda^2 - 1)^k (z/2)^k}{k!}.$$

Берем $z = 0.4$. Тогда $\lambda = 0.9$, $(\lambda^2 - 1)(z/2) = -0.038$ и, выбирая необходимые значения $J_k(0.4)$ и $Y_k(0.4)$ из табл. 9.1 и 9.2, вычисляем нужные результаты следующим образом:

k	a_k	$a_kJ_k(0.4)$	$a_kY_k(0.4)$
0	$+1.0$	$+0.96040$	-0.60602
1	$+0.038$	$+0.00745$	-0.06767
2	$+0.7220\times10^{-3}$	$+0.00001$	-0.00599
3	$+0.914\times10^{-5}$		-0.00074
4	$+0.87\times10^{-7}$		-0.00011
5	$+0.7\times10^{-9}$		-0.00002

$$J_0(0.36) = +0.96786 \quad Y_0(0.36) = -0.68055$$

Примечание. Эта процедура эквивалентна интерполяции посредством ряда Тейлора

$$\mathscr{C}_0(z+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\, \mathscr{C}_0^{(k)}(z)$$

при $z = 0.4$. Производные $\mathscr{C}_0^{(l)}(z)$ выражаются через $\mathscr{C}_k(z)$ с помощью рекуррентных формул и дифференциального уравнения для функции Бесселя.

Пример 4. Вычислить $J_\nu(x)$, $J'_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ и $Y'_\nu(x)$ для $\nu = 50$, $x = 75$ с 6D.

Используем асимптотические разложения 9.3.35, 9.3.36, 9.3.43 и 9.3.44. Здесь $z = x/\nu = 3/2$.

Из 9.3.39 находим

$$(2/3)(-\zeta)^{3/2} = \sqrt{5}/2 - \arccos(2/3) = +0.2769653.$$

Следовательно,

$$\zeta = -0.5567724 \text{ и } \left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{1/4} = +1.155332.$$

Затем

$$\nu^{1/3} = 3.684031, \quad \nu^{2/3}\zeta = -7.556562.$$

Интерполируя в табл. 10.11, находим, что

$$\mathrm{Ai}\,(\nu^{2/3}\zeta) = +0.299953,$$
$$\mathrm{Ai}'(\nu^{2/3}\zeta) = +0.451441,$$
$$\mathrm{Bi}\,(\nu^{2/3}\zeta) = -0.160565,$$
$$\mathrm{Bi}'(\nu^{2/3})\zeta = +0.819542.$$

Для контроля интерполяции используем равенство $\mathrm{AiBi}' - \mathrm{Ai}'\mathrm{Bi} = 1/\pi$.

Интерполируя в таблице, которая следует за формулой 9.3.46, получим

$$b_0(\zeta) = +0.0136, \quad c_0(\zeta) = +0.1442.$$

Членами, содержащими $a_1(\zeta)$ и $d_1(\zeta)$, можно пренебречь. Подставляя найденные величины в асимптотические разложения, находим

$$J_{50}(75) = +1.155332(50^{-1/3} \times 0.299953 + 50^{-5/3} \times 0.451441 \times 0.0136) = +0.094077,$$

$$J'_{50}(75) = -(4/3)\,(1.155332)^{-1}\,(50^{-4/3} \times 0.299953 \times 0.1442 + 50^{-2/3} \times 0.451441) = -0.038658,$$

$$Y_{50}(75) = -1.155332(-50^{-1/3} \times 0.160565 + 50^{-5/3} \times 0.819542 \times 0.0136) = +0.050335,$$

$$Y'_{50}(75) = +(4/3)\,(1.155332)^{-1}\,(-50^{-4/3} \times 0.160565 \times 0.1442 + 50^{-2/3} \times 0.819542) = +0.069543.$$

Для контроля используется тождество

$$JY' - J'Y = 2/(75\pi).$$

Примечание. В этом примере можно также использовать разложения Дебая 9.3.15, 9.3.16, 9.3.19 и 9.3.20. По сравнению с вычислениями, проведенными выше, где было взято по 2 члена, в каждом из разложений Дебая требуется брать по 4 члена. Когда значения аргумента и порядка близки по величине, разложения Дебая становятся мало эффективными. В этом случае результаты с небольшой точностью дадут разложения 9.3.23, 9.3.24, 9.3.27 и 9.3.28; для получения высокой точности снова используются равномерные асимптотические разложения.

Пример 5. Вычислить пятый положительный нуль функции $J_{10}(x)$ и соответствующее значение $J'_{10}(x)$ с 5D.

Используем асимптотические разложения 9.5.22 и 9.5.23, полагая $\nu = 10$, $s = 5$. Из табл. 10.11 находим

$$a_5 = -7.944134, \quad \mathrm{Ai}'(a_5) = +0.947336.$$

Следовательно,

$$\zeta = 10^{-2/3}a_5 = 0.21544347a_5 = -1.7115118.$$

Интерполируя величины, определенные формулами 9.5.26 в таблице, следующей за этой формулой, получим

$$z(\zeta) = +2.888631, \quad h(\zeta) = +0.98259,$$
$$f_1(\zeta) = +0.0107, \quad F_1(\zeta) = -0.001.$$

Оценки, данные в таблице, показывают, что вклад членов высшего порядка асимптотических рядов незначителен. Следовательно,

$$j_{10,5} = 28.88631 + 0.00107 + \ldots = 28.88738,$$

$$J'_{10}(j_{10,5}) = -\frac{2}{10^{2/3}}\,\frac{0.947336}{2.888631 \times 0.98259} \times (1 - 0.00001 + \ldots) = -0.14381.$$

Пример 6. Вычислить первый корень уравнения

$$J_0(x)\,Y_0(\lambda x) - Y_0(x)\,J_0(\lambda x) = 0$$

для $\lambda = 3/2$ с 4S.

Пусть $\alpha_\lambda^{(1)}$ обозначает корень. Прямая интерполяция в табл. 9.7 невозможна, так как расходятся разности. Анализ разложения 9.5.28 показывает, что $(\lambda-1)\alpha_\lambda^{(1)}$ — более гладкая функция. Используя табл. 9.7, получаем следующие значения:

$1/\lambda$	$(\lambda-1)\,\alpha_\lambda^{(1)}$	δ	δ^2
0.4	3.110		
		+21	
0.6	3.131		−12
		+9	
0.8	3.140		−7
		+2	
1.0	3.142(π)		

Интерполируя для $1/\lambda = 0.667$, получаем $(\lambda-1)\,\alpha_\lambda^{(1)} = 3.134$ и, следовательно, искомый корень $\alpha_{1.5}^{(1)} = 6.268$.

Пример 7. Вычислить $\mathrm{ber}_n\,1.55$, $\mathrm{bei}_n\,1.55$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, 9$) с 5D.

Используем рекуррентную формулу

$$J_{n-1}(xe^{3\pi i/4}) + J_{n+1}(xe^{3\pi i/4}) = -\frac{n\sqrt{2}}{x}(1+i)\;J_n(xe^{3\pi i/4}),$$

выбирая произвольно значения — нуль для $J_9(xe^{3\pi i/4})$ и $1 + 0\,i$ для $J_8(xe^{3\pi i/4})$ (см. пример 1).

n	Действительные пробные значения	Мнимые пробные значения	$\mathrm{ber}_n\,x$	$\mathrm{bei}_n\,x$
9	0	0	0.00000	0.00000
8	+1	0	0.00000	0.00000
7	−7	−7	−0.00002	−0.00003
6	−1	+89	−0.00003	+0.00030
5	+500	−475	+0.00181	−0.00148
4	−4447	−203	−0.01494	−0.00180
3	+14989	+17446	+0.04614	+0.06258
2	+11172	−88578	+0.05994	−0.29580
1	−197012	+123804	−0.69531	+0.36781
0	+281539	+155373	+0.91004	+0.59461
Σ	+106734	+207449	+0.30763	+0.72619

Значения $\mathrm{ber}_n\,x$ и $\mathrm{bei}_n\,x$ вычисляются умножением пробных значений на нормирующий множитель:

$$1/(294989 - 22011i) = (0.337119 + 0.025155i) \times 10^{-5},$$

полученный из соотношения

$$J_0(xe^{3\pi i/4}) + 2J_2(xe^{3\pi i/4}) + 2J_4(xe^{3\pi i/4}) + \ldots = 1.$$

Достаточный контроль обеспечивается интерполяцией в табл. 9.12 для ber 1.55 и bei 1.55 и применением обыкновенного суммирования при нормализации.

Предположим, что нужно вычислить $\mathrm{ker}_n\,x$ и $\mathrm{kei}_n\,x$. Следует воспользоваться рекурсией по формуле 9.9.14. Начальные значения для $n = 0$ и $n = 1$ выбираются из табл. 9.12 (см. пример 2). Для контроля можно использовать асимптотическое разложение 9.10.38.

Таблица 9.1. Функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$
0.0	1.00000 00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
0.1	0.99750 15620 66040	0.04993 75260	0.00124 89587
0.2	0.99002 49722 39576	0.09950 08326	0.00498 33542
0.3	0.97762 62465 38296	0.14831 88163	0.01116 58619
0.4	0.96039 82266 59563	0.19602 65780	0.01973 46631
0.5	0.93846 98072 40813	0.24226 84577	0.03060 40235
0.6	0.91200 48634 97211	0.28670 09881	0.04366 50967
0.7	0.88120 08886 07405	0.32899 57415	0.05878 69444
0.8	0.84628 73527 50480	0.36884 20461	0.07581 77625
0.9	0.80752 37981 22545	0.40594 95461	0.09458 63043
1.0	0.76519 76865 57967	0.44005 05857	0.11490 34849
1.1	0.71962 20185 27511	0.47090 23949	0.13656 41540
1.2	0.67113 27442 64363	0.49828 90576	0.15934 90183
1.3	0.62008 59895 61509	0.52202 32474	0.18302 66988
1.4	0.56685 51203 74289	0.54194 77139	0.20735 58995
1.5	0.51182 76717 35918	0.55793 65079	0.23208 76721
1.6	0.45540 21676 39381	0.56989 59353	0.25696 77514
1.7	0.39798 48594 46109	0.57776 52315	0.28173 89424
1.8	0.33998 64110 42558	0.58151 69517	0.30614 35353
1.9	0.28181 85593 74385	0.58115 70727	0.32992 57277
2.0	0.22389 07791 41236	0.57672 48078	0.35283 40286
2.1	0.16660 69803 31990	0.56829 21358	0.37462 36252
2.2	0.11036 22669 22174	0.55596 30498	0.39505 86875
2.3	0.05553 97844 45602	0.53987 25326	0.41391 45917
2.4	+0.00250 76832 97244	0.52018 52682	0.43098 00402
2.5	−0.04838 37764 68198	0.49709 41025	0.44605 90584
2.6	−0.09680 49543 97038	0.47081 82665	0.45897 28517
2.7	−0.14244 93700 46012	0.44160 13791	0.46956 15027
2.8	−0.18503 60333 64387	0.40970 92469	0.47768 54954
2.9	−0.22431 15457 91968	0.37542 74818	0.48322 70505
3.0	−0.26005 19549 01933	0.33905 89585	0.48609 12606
3.1	−0.29206 43476 50698	0.30092 11331	0.48620 70142
3.2	−0.32018 81696 57123	0.26134 32488	0.48352 77001
3.3	−0.34429 62603 98885	0.22066 34530	0.47803 16865
3.4	−0.36429 55967 62000	0.17922 58517	0.46972 25683
3.5	−0.38012 77399 87263	0.13737 75274	0.45862 91842
3.6	−0.39176 89837 00798	0.09546 55472	0.44480 53988
3.7	−0.39923 02033 71191	0.05383 39877	0.42832 96562
3.8	−0.40255 64101 78564	+0.01282 10029	0.40930 43065
3.9	−0.40182 60148 87640	−0.02724 40396	0.38785 47125
4.0	−0.39714 98098 63847	−0.06604 33280	0.36412 81459
4.1	−0.38866 96798 35854	−0.10327 32577	0.33829 24809
4.2	−0.37655 70543 67568	−0.13864 69421	0.31053 47010
4.3	−0.36101 11172 36535	−0.17189 65602	0.28105 92288
4.4	−0.34225 67900 03886	−0.20277 55219	0.25008 60982
4.5	−0.32054 25089 85121	−0.23106 04319	0.21784 89837
4.6	−0.29613 78165 74141	−0.25655 28361	0.18459 31052
4.7	−0.26933 07894 19753	−0.27908 07358	0.15057 30295
4.8	−0.24042 53272 91183	−0.29849 98581	0.11605 03864
4.9	−0.20973 83275 85326	−0.31469 46710	0.08129 15231
5.0	−0.17759 67713 14338	−0.32757 91376	0.04656 51163
	$\begin{bmatrix}(-4)6\\11\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)5\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)3\\7\end{bmatrix}$

$$J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x)$$

Таблица 9.1. Функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$Y_2(x)$
0.0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0.1	−1.53423 86514	−6.45895 10947	−127.64478 324
0.2	−1.08110 53224	−3.32382 49881	− 32.15714 456
0.3	−0.80727 35778	−2.29310 51384	− 14.48009 401
0.4	−0.60602 45684	−1.78087 20443	− 8.29833 565
0.5	−0.44451 87335	−1.47147 23927	− 5.44137 084
0.6	−0.30850 98701	−1.26039 13472	− 3.89279 462
0.7	−0.19066 49293	−1.10324 98719	− 2.96147 756
0.8	−0.08680 22797	−0.97814 41767	− 2.35855 816
0.9	+0.00562 83066	−0.87312 65825	− 1.94590 960
1.0	0.08825 69642	−0.78121 28213	− 1.65068 261
1.1	0.16216 32029	−0.69811 95601	− 1.43147 149
1.2	0.22808 35032	−0.62113 63797	− 1.26331 080
1.3	0.28653 53572	−0.54851 97300	− 1.13041 186
1.4	0.33789 51297	−0.47914 69742	− 1.02239 081
1.5	0.38244 89238	−0.41230 86270	− 0.93219 376
1.6	0.42042 68964	−0.34757 80083	− 0.85489 941
1.7	0.45202 70002	−0.28472 62451	− 0.78699 905
1.8	0.47743 17149	−0.22366 48682	− 0.72594 824
1.9	0.49681 99713	−0.16440 57723	− 0.66987 868
2.0	0.51037 56726	−0.10703 24315	− 0.61740 810
2.1	0.51829 37375	−0.05167 86121	− 0.56751 146
2.2	0.52078 42854	+0.00148 77893	− 0.51943 175
2.3	0.51807 53962	0.05227 73158	− 0.47261 686
2.4	0.51041 47487	0.10048 89383	− 0.42667 397
2.5	0.49807 03596	0.14591 81380	− 0.38133 585
2.6	0.48133 05906	0.18836 35444	− 0.33643 556
2.7	0.46050 35491	0.22763 24459	− 0.29188 692
2.8	0.43591 59856	0.26354 53936	− 0.24766 928
2.9	0.40791 17692	0.29594 00546	− 0.20381 518
3.0	0.37685 00100	0.32467 44248	− 0.16040 039
3.1	0.34310 28894	0.34962 94823	− 0.11753 548
3.2	0.30705 32501	0.37071 13384	− 0.07535 866
3.3	0.26909 19951	0.38785 29310	− 0.03402 961
3.4	0.22961 53372	0.40101 52921	+ 0.00627 601
3.5	0.18902 19439	0.41018 84179	0.04537 144
3.6	0.14771 00126	0.41539 17621	0.08306 319
3.7	0.10607 43153	0.41667 43727	0.11915 508
3.8	0.06450 32467	0.41411 46893	0.15345 185
3.9	+0.02337 59082	0.40782 00193	0.18576 256
4.0	−0.01694 07393	0.39792 57106	0.21590 359
4.1	−0.05609 46266	0.38459 40348	0.24370 147
4.2	−0.09375 12013	0.36801 28079	0.26899 540
4.3	−0.12959 59029	0.34839 37583	0.29163 951
4.4	−0.16333 64628	0.32597 06708	0.31150 495
4.5	−0.19470 50086	0.30099 73231	0.32848 160
4.6	−0.22345 99526	0.27374 52415	0.34247 962
4.7	−0.24938 76472	0.24450 12968	0.35343 075
4.8	−0.27230 37945	0.21356 51673	0.36128 928
4.9	−0.29205 45942	0.18124 66920	0.36603 284
5.0	−0.30851 76252	0.14786 31434	0.36766 288

$$Y_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}Y_n(x)-Y_{n-1}(x)$$

Таблица 9.1. Функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$
5.0	−0.17759 67713 14338	−0.32757 91376	0.04656 51163
5.1	−0.14433 47470 60501	−0.33709 72020	+0.01213 97659
5.2	−0.11029 04397 90987	−0.34322 30059	−0.02171 84086
5.3	−0.07580 31115 85584	−0.34596 08338	−0.05474 81465
5.4	−0.04121 01012 44991	−0.34534 47908	−0.08669 53768
5.5	−0.00684 38694 17819	−0.34143 82154	−0.11731 54816
5.6	+0.02697 08846 85114	−0.33433 28363	−0.14637 54691
5.7	0.05992 00097 24037	−0.32414 76802	−0.17365 60379
5.8	0.09170 25675 74816	−0.31102 77443	−0.19895 35139
5.9	0.12203 33545 92823	−0.29514 24447	−0.22208 16409
6.0	0.15064 52572 50997	−0.27668 38581	−0.24287 32100
6.1	0.17729 14222 42744	−0.25586 47726	−0.26118 15116
6.2	0.20174 72229 48904	−0.23291 65671	−0.27688 15994
6.3	0.22381 20061 32191	−0.20808 69402	−0.28987 13522
6.4	0.24331 06048 23407	−0.18163 75090	−0.30007 23264
6.5	0.26009 46055 81606	−0.15384 13014	−0.30743 03906
6.6	0.27404 33606 24146	−0.12498 01652	−0.31191 61379
6.7	0.28506 47377 10576	−0.09534 21180	−0.31352 50715
6.8	0.29309 56031 04273	−0.06521 86634	−0.31227 75629
6.9	0.29810 20354 04820	−0.03490 20961	−0.30821 85850
7.0	0.30007 92705 19556	−0.00468 28235	−0.30141 72201
7.1	0.29905 13805 01550	+0.02515 32743	−0.29196 59511
7.2	0.29507 06914 00958	0.05432 74202	−0.27997 97413
7.3	0.28821 69476 35014	0.08257 04305	−0.26559 49119
7.4	0.27859 62326 57478	0.10962 50949	−0.24896 78286
7.5	0.26633 96578 80378	0.13524 84276	−0.23027 34105
7.6	0.25160 18338 49976	0.15921 37684	−0.20970 34737
7.7	0.23455 91395 86464	0.18131 27153	−0.18746 49278
7.8	0.21540 78077 46263	0.20135 68728	−0.16377 78404
7.9	0.19436 18448 41278	0.21917 93999	−0.13887 33892
8.0	0.17165 08071 37554	0.23463 63469	−0.11299 17204
8.1	0.14751 74540 44378	0.24760 77670	−0.08637 97336
8.2	0.12221 53017 84138	0.25799 85976	−0.05928 88146
8.3	0.09600 61008 95010	0.26573 93020	−0.03197 25341
8.4	0.06915 72616 56985	0.27078 62683	−0.00468 43406
8.5	0.04193 92518 42935	0.27312 19637	+0.02232 47396
8.6	+0.01462 29912 78741	0.27275 48445	0.04880 83679
8.7	−0.01252 27374 49665	0.26971 90241	0.07452 71058
8.8	−0.03923 38031 76542	0.26407 37032	0.09925 05539
8.9	−0.06525 32468 51244	0.25590 23714	0.12275 93977
9.0	−0.09033 36111 82876	0.24531 17866	0.14484 73415
9.1	−0.11423 92326 83199	0.23243 07450	0.16532 29129
9.2	−0.13674 83707 64864	0.21740 86550	0.18401 11218
9.3	−0.15765 51899 43403	0.20041 39278	0.20075 49594
9.4	−0.17677 15727 51508	0.18163 22040	0.21541 67225
9.5	−0.19392 87476 87422	0.16126 44308	0.22787 91542
9.6	−0.20897 87183 68872	0.13952 48117	0.23804 63875
9.7	−0.22179 54820 31723	0.11663 86479	0.24584 46878
9.8	−0.23227 60275 79367	0.09284 00911	0.25122 29849
9.9	−0.24034 11055 34760	0.06836 98323	0.25415 31929
10.0	−0.24593 57644 51348	0.04347 27462	0.25463 03137
	$\left[\begin{matrix}(-4)4\\11\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)4\\8\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)1\\7\end{matrix}\right]$

$$J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x)$$

Таблица 9.1. Функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$Y_2(x)$
5.0	−0.30851 76252	0.14786 31434	0.36766 288
5.1	−0.32160 24491	0.11373 64420	0.36620 498
5.2	−0.33125 09348	0.07919 03430	0.36170 876
5.3	−0.33743 73011	0.04454 76191	0.35424 772
5.4	−0.34016 78783	+0.01012 72667	0.34391 872
5.5	−0.33948 05929	−0.02375 82390	0.33084 123
5.6	−0.33544 41812	−0.05680 56144	0.31515 646
5.7	−0.32815 71408	−0.08872 33405	0.29702 614
5.8	−0.31774 64300	−0.11923 41135	0.27663 122
5.9	−0.30436 59300	−0.14807 71525	0.25417 029
6.0	−0.28819 46840	−0.17501 03443	0.22985 790
6.1	−0.26943 49304	−0.19981 22045	0.20392 273
6.2	−0.24830 99505	−0.22228 36406	0.17660 555
6.3	−0.22506 17496	−0.24224 95005	0.14815 715
6.4	−0.19994 85953	−0.25955 98934	0.11883 613
6.5	−0.17324 24349	−0.27409 12740	0.08890 666
6.6	−0.14522 62172	−0.28574 72791	0.05863 613
6.7	−0.11619 11427	−0.29445 93130	+0.02829 284
6.8	−0.08643 38683	−0.30018 68758	−0.00185 639
6.9	−0.05625 36922	−0.30291 76343	−0.03154 852
7.0	−0.02594 97440	−0.30266 72370	−0.06052 661
7.1	+0.00418 17932	−0.29947 88746	−0.08854 204
7.2	0.03385 04048	−0.29342 25939	−0.11535 668
7.3	0.06277 38864	−0.28459 43719	−0.14074 495
7.4	0.09068 08802	−0.27311 49598	−0.16449 573
7.5	0.11731 32861	−0.25912 85105	−0.18641 422
7.6	0.14242 85247	−0.24280 10021	−0.20632 353
7.7	0.16580 16324	−0.22431 84743	−0.22406 617
7.8	0.18722 71733	−0.20388 50954	−0.23950 540
7.9	0.20652 09481	−0.18172 10773	−0.25252 628
8.0	0.22352 14894	−0.15806 04617	−0.26303 660
8.1	0.23809 13287	−0.13314 87960	−0.27096 757
8.2	0.25011 80276	−0.10724 07223	−0.27627 430
8.3	0.25951 49638	−0.08059 75035	−0.27893 605
8.4	0.26622 18674	−0.05348 45084	−0.27895 627
8.5	0.27020 51054	−0.02616 86794	−0.27636 244
8.6	0.27145 77123	+0.00108 39918	−0.27120 562
8.7	0.26999 91703	0.02801 09592	−0.26355 987
8.8	0.26587 49418	0.05435 55633	−0.25352 140
8.9	0.25915 57617	0.07986 93974	−0.24120 758
9.0	0.24993 66983	0.10431 45752	−0.22675 568
9.1	0.23833 59921	0.12746 58820	−0.21032 151
9.2	0.22449 36870	0.14911 27879	−0.19207 786
9.3	0.20857 00676	0.16906 13071	−0.17221 280
9.4	0.19074 39189	0.18713 56847	−0.15092 782
9.5	0.17121 06262	0.20317 98994	−0.12843 591
9.6	0.15018 01353	0.21705 89660	−0.10495 952
9.7	0.12787 47920	0.22866 00298	−0.08072 839
9.8	0.10452 70840	0.23789 32421	−0.05597 744
9.9	0.08037 73052	0.24469 24113	−0.03094 449
10.0	0.05567 11673	0.24901 54242	−0.00586 808
	$\begin{bmatrix}(-4)4\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\6\end{bmatrix}$

$$Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Y_n(x) - Y_{n-1}(x)$$

Таблица 9.1. Функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$
10.0	−0.24593 57644 51348	0.04347 27462	0.25463 03137
10.1	−0.24902 96505 80910	+0.01839 55155	0.25267 23269
10.2	−0.24961 70698 54127	−0.00661 57433	0.24831 98653
10.3	−0.24771 68134 82244	−0.03131 78295	0.24163 56815
10.4	−0.24337 17507 14207	−0.05547 27618	0.23270 39119
10.5	−0.23664 81944 62347	−0.07885 00142	0.22162 91441
10.6	−0.22763 50476 20693	−0.10122 86626	0.20853 53000
10.7	−0.21644 27399 23818	−0.12239 94239	0.19356 43429
10.8	−0.20320 19671 12039	−0.14216 65683	0.17687 48248
10.9	−0.18806 22459 63342	−0.16034 96867	0.15864 02851
11.0	−0.17119 03004 07196	−0.17678 52990	0.13904 75188
11.1	−0.15276 82954 35677	−0.19132 82878	0.11829 47301
11.2	−0.13299 19368 59575	−0.20385 31459	0.09658 95894
11.3	−0.11206 84561 09807	−0.21425 50262	0.07414 72125
11.4	−0.09021 45002 47520	−0.22245 05864	0.05118 80816
11.5	−0.06765 39481 11665	−0.22837 86207	0.02793 59271
11.6	−0.04461 56740 94438	−0.23200 04746	+0.00461 55923
11.7	−0.02133 12813 88500	−0.23330 02408	−0.01854 91017
11.8	+0.00196 71733 06740	−0.23228 47343	−0.04133 74673
11.9	0.02504 94416 99590	−0.22898 32497	−0.06353 40215
12.0	0.04768 93107 96834	−0.22344 71045	−0.08493 04949
12.1	0.06966 67736 06807	−0.21574 89734	−0.10532 77609
12.2	0.09077 01231 70505	−0.20598 20217	−0.12453 76677
12.3	0.11079 79503 07585	−0.19425 88480	−0.14238 47549
12.4	0.12956 10265 17502	−0.18071 02469	−0.15870 78405
12.5	0.14688 40547 00421	−0.16548 38046	−0.17336 14634
12.6	0.16260 72717 45511	−0.14874 23434	−0.18621 71675
12.7	0.17658 78885 61499	−0.13066 22290	−0.19716 46175
12.8	0.18870 13547 80683	−0.11143 15593	−0.20611 25359
12.9	0.19884 24371 36331	−0.09124 82522	−0.21298 94530
13.0	0.20692 61023 77068	−0.07031 80521	−0.21774 42642
13.1	0.21288 81975 22060	−0.04885 24733	−0.22034 65904
13.2	0.21668 59222 58564	−0.02706 67028	−0.22078 69378
13.3	0.21829 80903 19277	−0.00517 74806	−0.21907 66588
13.4	0.21772 51787 31184	+0.01659 90199	−0.21524 77131
13.5	0.21498 91658 80401	0.03804 92921	−0.20935 22337
13.6	0.21013 31613 69248	0.05896 45572	−0.20146 19030
13.7	0.20322 08326 33007	0.07914 27651	−0.19166 71443
13.8	0.19433 56352 15629	0.09839 05167	−0.18007 61400
13.9	0.18357 98554 57870	0.11652 48904	−0.16681 36842
14.0	0.17107 34761 10459	0.13337 51547	−0.15201 98826
14.1	0.15695 28770 32601	0.14878 43513	−0.13584 87137
14.2	0.14136 93846 57129	0.16261 07342	−0.11846 64643
14.3	0.12448 76852 83919	0.17472 90520	−0.10005 00556
14.4	0.10648 41184 90342	0.18503 16616	−0.08078 52766
14.5	0.08754 48680 10376	0.19342 94636	−0.06086 49420
14.6	0.06786 40683 23379	0.19985 26514	−0.04048 69928
14.7	0.04764 18459 01522	0.20425 12683	−0.01985 25577
14.8	0.02708 23145 85872	0.20659 55672	+0.00083 60053
14.9	+0.00639 15448 90853	0.20687 61718	0.02137 70688
15.0	−0.01422 44728 26781	0.20510 40386	0.04157 16780
	$\left[{(-4)3 \atop 11}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 7}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 7}\right]$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

Таблица 9.1. Функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$Y_2(x)$
10.0	0.05567 11673	0.24901 54242	−0.00586 808
10.1	0.03065 73806	0.25084 44363	+0.01901 478
10.2	+0.00558 52273	0.25018 58292	0.04347 082
10.3	−0.01929 78497	0.24706 99395	0.06727 260
10.4	−0.04374 86190	0.24155 05610	0.09020 065
10.5	−0.06753 03725	0.23370 42284	0.11204 546
10.6	−0.09041 51548	0.22362 92892	0.13260 936
10.7	−0.11218 58897	0.21144 47763	0.15170 828
10.8	−0.13263 83844	0.19728 90905	0.16917 340
10.9	−0.15158 31932	0.18131 85097	0.18485 264
11.0	−0.16884 73239	0.16370 55374	0.19861 197
11.1	−0.18427 57716	0.14463 71102	0.21033 651
11.2	−0.19773 28675	0.12431 26795	0.21993 156
11.3	−0.20910 34295	0.10294 21889	0.22732 329
11.4	−0.21829 37073	0.08074 39654	0.23245 932
11.5	−0.22523 21117	0.05794 25471	0.23530 908
11.6	−0.22986 97260	0.03476 64663	0.23586 394
11.7	−0.23218 05930	+0.01144 60113	0.23413 718
11.8	−0.23216 17790	−0.01178 90120	0.23016 364
11.9	−0.22983 32139	−0.03471 14983	0.22399 935
12.0	−0.22523 73126	−0.05709 92183	0.21572 078
12.1	−0.21843 83806	−0.07873 69315	0.20542 401
12.2	−0.20952 18128	−0.09941 84171	0.19322 371
12.3	−0.19859 30946	−0.11894 84033	0.17925 189
12.4	−0.18577 66153	−0.13714 43766	0.16365 655
12.5	−0.17121 43068	−0.15383 82565	0.14660 019
12.6	−0.15506 41238	−0.16887 79186	0.12825 810
12.7	−0.13749 83780	−0.18212 85528	0.10881 672
12.8	−0.11870 19463	−0.19347 38454	0.08847 166
12.9	−0.09887 03702	−0.20281 69743	0.06742 588
13.0	−0.07820 78645	−0.21008 14084	0.04588 765
13.1	−0.05692 52568	−0.21521 15060	0.02406 854
13.2	−0.03523 78771	−0.21817 29066	+0.00218 138
13.3	−0.01336 34191	−0.21895 27145	−0.01956 180
13.4	+0.00848 02072	−0.21755 94728	−0.04095 177
13.5	0.03007 70090	−0.21402 29303	−0.06178 411
13.6	0.05121 50115	−0.20839 36044	−0.08186 113
13.7	0.07168 83040	−0.20074 21453	−0.10099 373
13.8	0.09129 90143	−0.19115 85095	−0.11900 315
13.9	0.10985 91895	−0.17975 09511	−0.13572 264
14.0	0.12719 25686	−0.16664 48419	−0.15099 897
14.1	0.14313 62286	−0.15198 13335	−0.16469 386
14.2	0.15754 20895	−0.13591 58742	−0.17668 517
14.3	0.17027 82640	−0.11861 65967	−0.18686 800
14.4	0.18123 02411	−0.10026 25924	−0.19515 560
14.5	0.19030 18912	−0.08104 20909	−0.20148 011
14.6	0.19741 62858	−0.06115 05609	−0.20579 307
14.7	0.20251 63238	−0.04078 87536	−0.20806 581
14.8	0.20556 51604	−0.02016 07059	−0.20828 958
14.9	0.20654 64347	+0.00052 82751	−0.20647 553
15.0	0.20546 42960	0.02107 36280	−0.20265 448
	$\left[{(-4)3 \atop 8}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 8}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 6}\right]$

$$Y_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}Y_n(x)-Y_{n-1}(x)$$

Таблица 9.1. Функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$
15.0	−0.01422 44728 26781	0.20510 40386	0.04157 16780
15.1	−0.03456 18514 55565	0.20131 02204	0.06122 54568
15.2	−0.05442 07968 44039	0.19554 54359	0.08015 04595
15.3	−0.07360 75449 51123	0.18787 94498	0.09816 69502
15.4	−0.09193 62278 62321	0.17840 02717	0.11510 50943
15.5	−0.10923 06509 00050	0.16721 31804	0.13080 65451
15.6	−0.12532 59640 22481	0.15443 95871	0.14512 59111
15.7	−0.14007 02118 29049	0.14021 57469	0.15793 20904
15.8	−0.15332 57477 60686	0.12469 13334	0.16910 94608
15.9	−0.16497 04994 85671	0.10802 78901	0.17855 89133
16.0	−0.17489 90739 83629	0.09039 71757	0.18619 87209
16.1	−0.18302 36924 65310	0.07197 94186	0.19196 52352
16.2	−0.18927 49469 77945	0.05296 14991	0.19581 34037
16.3	−0.19360 23723 28377	0.03353 50765	0.19771 71056
16.4	−0.19597 48267 91007	+0.01389 46807	0.19766 93020
16.5	−0.19638 06929 36861	−0.00576 42137	0.19568 20004
16.6	−0.19482 78558 05566	−0.02524 71116	0.19178 60351
16.7	−0.19134 35295 25189	−0.04436 24008	0.18603 06671
16.8	−0.18597 38653 47601	−0.06292 32177	0.17848 30061
16.9	−0.17878 33878 91219	−0.08074 92543	0.16922 72631
17.0	−0.16985 42521 51184	−0.09766 84928	0.15836 38412
17.1	−0.15928 53315 32265	−0.11351 88483	0.14600 82733
17.2	−0.14719 11467 66030	−0.12814 97057	0.13229 00182
17.3	−0.13370 06470 75764	−0.14142 33355	0.11735 11285
17.4	−0.11895 58563 36348	−0.15321 61760	0.10134 48016
17.5	−0.10311 03982 28686	−0.16341 99694	0.08443 38303
	$\begin{bmatrix}(-4)2\\11\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\7\end{bmatrix}$

$$J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x)$$

Таблица 9.1. Модуль и фаза функций Бесселя порядков 0, 1 и 2

$J_n(x)=M_n(x)\cos\theta_n(x)$ $\qquad$ $Y_n(x)=M_n(x)\sin\theta_n(x)$

x^{-1}	$x^{\frac{1}{2}}M_0(x)$	$\theta_0(x)-x$	$x^{\frac{1}{2}}M_1(x)$	$\theta_1(x)-x$	$x^{\frac{1}{2}}M_2(x)$	$\theta_2(x)-x$	$\langle x\rangle$
0.10	0.79739 375	−0.79783 499	0.79936 575	−2.31885 508	0.80542 555	−3.73985 605	10
0.09	0.79748 584	−0.79660 186	0.79908 654	−2.32256 201	0.80398 367	−3.75850 527	11
0.08	0.79756 868	−0.79536 548	0.79883 586	−2.32627 732	0.80269 711	−3.77717 539	13
0.07	0.79764 214	−0.79412 617	0.79861 398	−2.33000 016	0.80156 472	−3.79586 377	14
0.06	0.79770 609	−0.79288 426	0.79842 116	−2.33372 965	0.80058 549	−3.81456 786	17
0.05	0.79776 040	−0.79164 009	0.79825 761	−2.33746 488	0.79975 851	−3.83326 521	20
0.04	0.79780 498	−0.79039 402	0.79812 353	−2.34120 495	0.79908 299	−3.85201 346	25
0.03	0.79783 975	−0.78914 641	0.79801 908	−2.34494 891	0.79855 829	−3.87075 034	33
0.02	0.79786 463	−0.78789 764	0.79794 438	−2.34869 580	0.79818 387	−3.88949 363	50
0.01	0.79787 957	−0.78664 810	0.79789 952	−2.35244 465	0.79795 937	−3.90824 117	100
0.00	0.79788 456	−0.78539 816	0.79788 456	−2.35619 449	0.79788 456	−3.92699 082	∞
	$\begin{bmatrix}(-6)1\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-7)4\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)4\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)1\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)2\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)3\\4\end{bmatrix}$	

$\langle x\rangle$ — целое число, ближайшее к x.

Таблица 9.1. Функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$Y_2(x)$
15.0	0.20546 42960	0.02107 36280	−0.20265 448
15.1	0.20234 32292	0.04127 35340	−0.19687 654
15.2	0.19722 76821	0.06093 08736	−0.18921 046
15.3	0.19018 15001	0.07985 51269	−0.17974 292
15.4	0.18128 71741	0.09786 41973	−0.16857 754
15.5	0.17064 49112	0.11478 61425	−0.15583 380
15.6	0.15837 15368	0.13046 07959	−0.14164 579
15.7	0.14459 92412	0.14474 12638	−0.12616 086
15.8	0.12947 41833	0.15749 52835	−0.10953 807
15.9	0.11315 49657	0.16860 64314	−0.09194 661
16.0	0.09581 09971	0.17797 51689	−0.07356 410
16.1	0.07762 07587	0.18551 97173	−0.05457 483
16.2	0.05876 99918	0.19117 67538	−0.03516 792
16.3	0.03944 98249	0.19490 19240	−0.01553 548
16.4	0.01985 48596	0.19667 01648	+0.00412 931
16.5	+0.00018 12325	0.19647 58378	0.02363 402
16.6	−0.01937 53254	0.19433 26715	0.04278 890
16.7	−0.03862 14147	0.19027 35142	0.06140 866
16.8	−0.05736 78596	0.18434 99015	0.07931 428
16.9	−0.07543 15476	0.17663 14431	0.09633 468
17.0	−0.09263 71984	0.16720 50361	0.11230 838
17.1	−0.10881 90473	0.15617 39131	0.12708 500
17.2	−0.12382 24237	0.14365 65362	0.14052 667
17.3	−0.13750 52134	0.12978 53467	0.15250 930
17.4	−0.14973 91883	0.11470 53859	0.16292 372
17.5	−0.16041 11925	0.09857 27987	0.17167 666
	$\begin{bmatrix}(-4)2\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\6\end{bmatrix}$

$$Y_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}Y_n(x)-Y_{n-1}(x)$$

Таблица 9.1. Вспомогательные функции для малых значений аргумента

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
0.0	−0.07380 430	−0.63661 977	1.0	0.08825 696	−0.78121 282
0.1	−0.07202 984	−0.63857 491	1.1	0.11849 917	−0.79936 142
0.2	−0.06672 574	−0.64437 529	1.2	0.15018 546	−0.81476 705
0.3	−0.05794 956	−0.65382 684	1.3	0.18296 470	−0.82642 473
0.4	−0.04579 663	−0.66660 964	1.4	0.21647 200	−0.83332 875
0.5	−0.03039 904	−0.68228 315	1.5	0.25033 233	−0.83449 074
0.6	−0.01192 435	−0.70029 342	1.6	0.28416 437	−0.82895 780
0.7	+0.00942 612	−0.71998 221	1.7	0.31758 436	−0.81583 036
0.8	0.03341 927	−0.74059 789	1.8	0.35020 995	−0.79427 978
0.9	0.05979 263	−0.76130 792	1.9	0.38166 415	−0.76356 508
1.0	0.08825 696	−0.78121 282	2.0	0.41157 912	−0.72304 896
	$\begin{bmatrix}(-4)4\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)5\\7\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-4)2\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)1\\6\end{bmatrix}$

$$Y_0(x)=f_1(x)+\frac{2}{\pi}J_0(x)\ln x \qquad Y_1(x)=\frac{1}{x}f_2(x)+\frac{2}{\pi}J_1(x)\ln x$$

Таблица 9.2. Функции Бесселя порядков 3—9

x	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_6(x)$	$J_7(x)$	$J_8(x)$	$J_9(x)$
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	(-4) 1.6625	(-6) 4.1583	(-8) 8.3195	(-9) 1.3869	(-11) 1.9816	(-13) 2.4774	(-15) 2.7530
0.4	(-3) 1.3201	(-5) 6.6135	(-6) 2.6489	(-8) 8.8382	(-9) 2.5270	(-11) 6.3210	(-12) 1.4053
0.6	(-3) 4.3997	(-4) 3.3147	(-5) 1.9948	(-7) 9.9956	(-8) 4.2907	(-9) 1.6110	(-11) 5.3755
0.8	(-2) 1.0247	(-3) 1.0330	(-5) 8.3084	(-6) 5.5601	(-7) 3.1864	(-8) 1.5967	(-10) 7.1092
1.0	(-2) 1.9563	(-3) 2.4766	(-4) 2.4976	(-5) 2.0938	(-6) 1.5023	(-8) 9.4223	(-9) 5.2493
1.2	(-2) 3.2874	(-3) 5.0227	(-4) 6.1010	(-5) 6.1541	(-6) 5.3093	(-7) 4.0021	(-8) 2.6788
1.4	(-2) 5.0498	(-3) 9.0629	(-3) 1.2901	(-4) 1.5231	(-5) 1.5366	(-6) 1.3538	(-7) 1.0587
1.6	(-2) 7.2523	(-2) 1.4995	(-3) 2.4524	(-4) 3.3210	(-5) 3.8397	(-6) 3.8744	(-7) 3.4687
1.8	(-2) 9.8802	(-2) 2.3197	(-3) 4.2936	(-4) 6.5690	(-5) 8.5712	(-6) 9.7534	(-7) 9.8426
2.0	0.12894	(-2) 3.3996	(-3) 7.0396	(-3) 1.2024	(-4) 1.7494	(-5) 2.2180	(-6) 2.4923
2.2	0.16233	(-2) 4.7647	(-2) 1.0937	(-3) 2.0660	(-4) 3.3195	(-5) 4.6434	(-6) 5.7535
2.4	0.19811	(-2) 6.4307	(-2) 1.6242	(-3) 3.3669	(-4) 5.9274	(-5) 9.0756	(-5) 1.2300
2.6	0.23529	(-2) 8.4013	(-2) 2.3207	(-3) 5.2461	(-3) 1.0054	(-4) 1.6738	(-5) 2.4647
2.8	0.27270	(-1) 1.0667	(-2) 3.2069	(-3) 7.8634	(-3) 1.6314	(-4) 2.9367	(-5) 4.6719
3.0	0.30906	0.13203	(-2) 4.3028	(-2) 1.1394	(-3) 2.5473	(-4) 4.9344	(-5) 8.4395
3.2	0.34307	0.15972	(-2) 5.6238	(-2) 1.6022	(-3) 3.8446	(-4) 7.9815	(-4) 1.4515
3.4	0.37339	0.18920	(-2) 7.1785	(-2) 2.1934	(-3) 5.6301	(-3) 1.2482	(-4) 2.4382
3.6	0.39876	0.21980	(-2) 8.9680	(-2) 2.9311	(-3) 8.0242	(-3) 1.8940	(-4) 3.9339
3.8	0.41803	0.25074	(-1) 1.0984	(-2) 3.8316	(-2) 1.1159	(-3) 2.7966	(-4) 6.1597
4.0	0.43017	0.28113	0.13209	(-2) 4.9088	(-2) 1.5176	(-3) 4.0287	(-4) 9.3860
4.2	0.43439	0.31003	0.15614	(-2) 6.1725	(-2) 2.0220	(-3) 5.6739	(-3) 1.3952
4.4	0.43013	0.33645	0.18160	(-2) 7.6279	(-2) 2.6433	(-3) 7.8267	(-3) 2.0275
4.6	0.41707	0.35941	0.20799	(-2) 9.2745	(-2) 3.3953	(-2) 1.0591	(-3) 2.8852
4.8	0.39521	0.37796	0.23473	(-1) 1.1105	(-2) 4.2901	(-2) 1.4079	(-3) 4.0270
5.0	0.36483	0.39123	0.26114	0.13105	(-2) 5.3376	(-2) 1.8405	(-3) 5.5203
5.2	0.32652	0.39847	0.28651	0.15252	(-2) 6.5447	(-2) 2.3689	(-3) 7.4411
5.4	0.28113	0.39906	0.31007	0.17515	(-2) 7.9145	(-2) 3.0044	(-3) 9.8734
5.6	0.22978	0.39257	0.33103	0.19856	(-2) 9.4455	(-2) 3.7577	(-2) 1.2907
5.8	0.17382	0.37877	0.34862	0.22230	(-1) 1.1131	(-2) 4.6381	(-2) 1.6639
6.0	0.11477	0.35764	0.36209	0.24584	0.12959	(-2) 5.6532	(-2) 2.1165
6.2	+0.05428	0.32941	0.37077	0.26860	0.14910	(-2) 6.8077	(-2) 2.6585
6.4	-0.00591	0.29453	0.37408	0.28996	0.16960	(-2) 8.1035	(-2) 3.2990
6.6	-0.06406	0.25368	0.37155	0.30928	0.19077	(-2) 9.5385	(-2) 4.0468
6.8	-0.11847	0.20774	0.36288	0.32590	0.21224	(-1) 1.1107	(-2) 4.9093
7.0	-0.16756	0.15780	0.34790	0.33920	0.23358	0.12797	(-2) 5.8921
7.2	-0.20987	0.10509	0.32663	0.34857	0.25432	0.14594	(-2) 6.9987
7.4	-0.24420	+0.05097	0.29930	0.35349	0.27393	0.16476	(-2) 8.2300
7.6	-0.26958	-0.00313	0.26629	0.35351	0.29188	0.18417	(-2) 9.5830
7.8	-0.28535	-0.05572	0.22820	0.34828	0.30762	0.20385	(-1) 1.1054
8.0	-0.29113	-0.10536	0.18577	0.33758	0.32059	0.22345	0.12632
8.2	-0.28692	-0.15065	0.13994	0.32131	0.33027	0.24257	0.14303
8.4	-0.27302	-0.19033	0.09175	0.29956	0.33619	0.26075	0.16049
8.6	-0.25005	-0.22326	+0.04237	0.27253	0.33790	0.27755	0.17847
8.8	-0.21896	-0.24854	-0.00699	0.24060	0.33508	0.29248	0.19670
9.0	-0.18094	-0.26547	-0.05504	0.20432	0.32746	0.30507	0.21488
9.2	-0.13740	-0.27362	-0.10053	0.16435	0.31490	0.31484	0.23266
9.4	-0.08997	-0.27284	-0.14224	0.12152	0.29737	0.32138	0.24965
9.6	-0.04034	-0.26326	-0.17904	0.07676	0.27499	0.32427	0.26546
9.8	+0.00970	-0.24528	-0.20993	+0.03107	0.24797	0.32318	0.27967
10.0	0.05838	-0.21960	-0.23406	-0.01446	0.21671	0.31785	0.29186

Таблица 9.2. Функции Бесселя порядков 3—9

x	$Y_3(x)$	$Y_4(x)$	$Y_5(x)$	$Y_6(x)$	$Y_7(x)$	$Y_8(x)$	$Y_9(x)$
0.0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0.2	(2)-6.3982	(4)-1.9162	(5)-7.6586	(7)-3.8274	(9)-2.2957	(11)-1.6066	(13)-1.2850
0.4	(1)-8.1202	(3)-1.2097	(4)-2.4114	(5)-6.0163	(7)-1.8025	(8)-6.3027	(10)-2.5193
0.6	(1)-2.4692	(2)-2.4302	(3)-3.2156	(4)-5.3351	(6)-1.0638	(7)-2.4769	(8)-6.5943
0.8	(1)-1.0815	(1)-7.8751	(2)-7.7670	(3)-9.6300	(5)-1.4367	(6)-2.5046	(7)-4.9949
1.0	-5.8215	(1)-3.3278	(2)-2.6041	(3)-2.5708	(4)-3.0589	(5)-4.2567	(6)-6.7802
1.2	-3.5899	(1)-1.6686	(2)-1.0765	(2)-8.8041	(3)-8.6964	(5)-1.0058	(6)-1.3323
1.4	-2.4420	-9.4432	(1)-5.1519	(2)-3.5855	(3)-3.0218	(4)-2.9859	(5)-3.3823
1.6	-1.7897	-5.8564	(1)-2.7492	(2)-1.6597	(3)-1.2173	(4)-1.0485	(5)-1.0364
1.8	-1.3896	-3.9059	(1)-1.5970	(1)-8.4816	(2)-5.4947	(3)-4.1889	(4)-3.6685
2.0	-1.1278	-2.7659	-9.9360	(1)-4.6914	(2)-2.7155	(3)-1.8539	(4)-1.4560
2.2	-0.94591	-2.0603	-6.5462	(1)-2.7695	(2)-1.4452	(2)-8.9196	(3)-6.3425
2.4	-0.81161	-1.6024	-4.5296	(1)-1.7271	(1)-8.1825	(2)-4.6004	(3)-2.9851
2.6	-0.70596	-1.2927	-3.2716	(1)-1.1290	(1)-4.8837	(2)-2.5168	(3)-1.5000
2.8	-0.61736	-1.0752	-2.4548	-7.6918	(1)-3.0510	(2)-1.4486	(2)-7.9725
3.0	-0.53854	-0.91668	-1.9059	-5.4365	(1)-1.9840	(1)-8.7150	(2)-4.4496
3.2	-0.46491	-0.79635	-1.5260	-3.9723	(1)-1.3370	(1)-5.4522	(2)-2.5924
3.4	-0.39363	-0.70092	-1.2556	-2.9920	-9.3044	(1)-3.5320	(2)-1.5691
3.6	-0.32310	-0.62156	-1.0581	-2.3177	-6.6677	(1)-2.3612	(1)-9.8275
3.8	-0.25259	-0.55227	-0.91009	-1.8427	-4.9090	(1)-1.6243	(1)-6.3483
4.0	-0.18202	-0.48894	-0.79585	-1.5007	-3.7062	(1)-1.1471	(1)-4.2178
4.2	-0.11183	-0.42875	-0.70484	-1.2494	-2.8650	-8.3005	(1)-2.8756
4.4	-0.04278	-0.36985	-0.62967	-1.0612	-2.2645	-6.1442	(1)-2.0078
4.6	+0.02406	-0.31109	-0.56509	-0.91737	-1.8281	-4.6463	(1)-1.4333
4.8	0.08751	-0.25190	-0.50735	-0.80507	-1.5053	-3.5855	(1)-1.0446
5.0	0.14627	-0.19214	-0.45369	-0.71525	-1.2629	-2.8209	-7.7639
5.2	0.19905	-0.13204	-0.40218	-0.64139	-1.0780	-2.2608	-5.8783
5.4	0.24463	-0.07211	-0.35146	-0.57874	-0.93462	-1.8444	-4.5302
5.6	0.28192	-0.01310	-0.30063	-0.52375	-0.82168	-1.5304	-3.5510
5.8	0.31001	+0.04407	-0.24922	-0.47377	-0.73099	-1.2907	-2.8295
6.0	0.32825	0.09839	-0.19706	-0.42683	-0.65659	-1.1052	-2.2907
6.2	0.33622	0.14877	-0.14426	-0.38145	-0.59403	-0.95990	-1.8831
6.4	0.33383	0.19413	-0.09117	-0.33658	-0.53992	-0.84450	-1.5713
6.6	0.32128	0.23344	-0.03833	-0.29151	-0.49169	-0.75147	-1.3301
6.8	0.29909	0.26576	+0.01357	-0.24581	-0.44735	-0.67521	-1.1414
7.0	0.26808	0.29031	0.06370	-0.19931	-0.40537	-0.61144	-0.99220
7.2	0.22934	0.30647	0.11119	-0.15204	-0.36459	-0.55689	-0.87293
7.4	0.18420	0.31385	0.15509	-0.10426	-0.32416	-0.50902	-0.77643
7.6	0.13421	0.31228	0.19450	-0.05635	-0.28348	-0.46585	-0.69726
7.8	0.08106	0.30186	0.22854	-0.00886	-0.24217	-0.42581	-0.63128
8.0	+0.02654	0.28294	0.25640	+0.03756	-0.20006	-0.38767	-0.57528
8.2	-0.02753	0.25613	0.27741	0.08218	-0.15716	-0.35049	-0.52673
8.4	-0.07935	0.22228	0.29104	0.12420	-0.11361	-0.31355	-0.48363
8.6	-0.12723	0.18244	0.29694	0.16284	-0.06973	-0.27635	-0.44440
8.8	-0.16959	0.13789	0.29495	0.19728	-0.02593	-0.23853	-0.40777
9.0	-0.20509	0.09003	0.28512	0.22677	+0.01724	-0.19995	-0.37271
9.2	-0.23262	+0.04037	0.26773	0.25064	0.05920	-0.16056	-0.33843
9.4	-0.25136	-0.00951	0.24326	0.26830	0.09925	-0.12048	-0.30433
9.6	-0.26079	-0.05804	0.21243	0.27932	0.13672	-0.07994	-0.26995
9.8	-0.26074	-0.10366	0.17612	0.28338	0.17087	-0.03928	-0.23499
10.0	-0.25136	-0.14495	0.13540	0.28035	0.20102	+0.00108	-0.19930

Таблица 9.2. Функции Бесселя порядков 3—9

x	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_6(x)$	$J_7(x)$	$J_8(x)$	$J_9(x)$
10.0	0.05838	-0.21960	-0.23406	-0.01446	0.21671	0.31785	0.29186
10.2	0.10400	-0.18715	-0.25078	-0.05871	0.18170	0.30811	0.30161
10.4	0.14497	-0.14906	-0.25964	-0.10059	0.14358	0.29386	0.30852
10.6	0.17992	-0.10669	-0.26044	-0.13901	0.10308	0.27515	0.31224
10.8	0.20768	-0.06150	-0.25323	-0.17297	0.06104	0.25210	0.31244
11.0	0.22735	-0.01504	-0.23829	-0.20158	+0.01838	0.22497	0.30886
11.2	0.23835	+0.03110	-0.21614	-0.22408	-0.02395	0.19414	0.30130
11.4	0.24041	0.07534	-0.18754	-0.23985	-0.06494	0.16010	0.28964
11.6	0.23359	0.11621	-0.15345	-0.24849	-0.10361	0.12344	0.27388
11.8	0.21827	0.15232	-0.11500	-0.24978	-0.13901	0.08485	0.25407
12.0	0.19514	0.18250	-0.07347	-0.24372	-0.17025	0.04510	0.23038
12.2	0.16515	0.20576	-0.03023	-0.23053	-0.19653	+0.00501	0.20310
12.4	0.12951	0.22138	+0.01331	-0.21064	-0.21716	-0.03453	0.17260
12.6	0.08963	0.22890	0.05571	-0.18469	-0.23160	-0.07264	0.13935
12.8	0.04702	0.22815	0.09557	-0.15349	-0.23947	-0.10843	0.10393
13.0	+0.00332	0.21928	0.13162	-0.11803	-0.24057	-0.14105	0.06698
13.2	-0.03984	0.20268	0.16267	-0.07944	-0.23489	-0.16969	+0.02921
13.4	-0.08085	0.17905	0.18774	-0.03894	-0.22261	-0.19364	-0.00860
13.6	-0.11822	0.14931	0.20605	+0.00220	-0.20411	-0.21231	-0.04567
13.8	-0.15059	0.11460	0.21702	0.04266	-0.17993	-0.22520	-0.08117
14.0	-0.17681	0.07624	0.22038	0.08117	-0.15080	-0.23197	-0.11431
14.2	-0.19598	+0.03566	0.21607	0.11650	-0.11762	-0.23246	-0.14432
14.4	-0.20747	-0.00566	0.20433	0.14756	-0.08136	-0.22666	-0.17048
14.6	-0.21094	-0.04620	0.18563	0.17335	-0.04315	-0.21472	-0.19216
14.8	-0.20637	-0.08450	0.16069	0.19308	-0.00415	-0.19700	-0.20883
15.0	-0.19402	-0.11918	0.13046	0.20615	+0.03446	-0.17398	-0.22005
15.2	-0.17445	-0.14901	0.09603	0.21219	0.07149	-0.14634	-0.22553
15.4	-0.14850	-0.17296	0.05865	0.21105	0.10580	-0.11487	-0.22514
15.6	-0.11723	-0.19021	+0.01968	0.20283	0.13634	-0.08047	-0.21888
15.8	-0.08188	-0.20020	-0.01949	0.18787	0.16217	-0.04417	-0.20690
16.0	-0.04385	-0.20264	-0.05747	0.16672	0.18251	-0.00702	-0.18953
16.2	-0.00461	-0.19752	-0.09293	0.14016	0.19675	+0.02987	-0.16725
16.4	+0.03432	-0.18511	-0.12462	0.10913	0.20447	0.06542	-0.14065
16.6	0.07146	-0.16596	-0.15144	0.07473	0.20546	0.09855	-0.11047
16.8	0.10542	-0.14083	-0.17248	0.03817	0.19974	0.12829	-0.07756
17.0	0.13493	-0.11074	-0.18704	+0.00072	0.18755	0.15374	-0.04286
17.2	0.15891	-0.07685	-0.19466	-0.03632	0.16932	0.17414	-0.00733
17.4	0.17651	-0.04048	-0.19512	-0.07166	0.14570	0.18889	+0.02799
17.6	0.18712	-0.00300	-0.18848	-0.10410	0.11751	0.19757	0.06210
17.8	0.19041	+0.03417	-0.17505	-0.13251	0.08571	0.19993	0.09400
18.0	0.18632	0.06964	-0.15537	-0.15596	0.05140	0.19593	0.12276
18.2	0.17510	0.10209	-0.13022	-0.17364	+0.01573	0.18574	0.14756
18.4	0.15724	0.13033	-0.10058	-0.18499	-0.02007	0.16972	0.16766
18.6	0.13351	0.15334	-0.06756	-0.18966	-0.05481	0.14841	0.18247
18.8	0.10487	0.17031	-0.03240	-0.18755	-0.08731	0.12253	0.19159
19.0	0.07249	0.18065	+0.00357	-0.17877	-0.11648	0.09294	0.19474
19.2	0.03764	0.18403	0.03904	-0.16370	-0.14135	0.06063	0.19187
19.4	+0.00170	0.18039	0.07269	-0.14292	-0.16110	+0.02667	0.18309
19.6	-0.03395	0.16994	0.10331	-0.11723	-0.17508	-0.00783	0.16869
19.8	-0.06791	0.15313	0.12978	-0.08759	-0.18287	-0.04171	0.14916
20.0	-0.09890	0.13067	0.15117	-0.05589	-0.18422	-0.07387	0.12513
	$\left[\begin{matrix}(-3)1\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-3)1\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-3)1\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)9\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)8\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)8\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)8\\5\end{matrix}\right]$

Таблица 9.2. Функции Бесселя порядков 3—9

x	$Y_3(x)$	$Y_4(x)$	$Y_5(x)$	$Y_6(x)$	$Y_7(x)$	$Y_8(x)$	$Y_9(x)$
10.0	−0.25136	−0.14495	0.13540	0.28035	0.20102	0.00108	−0.19930
10.2	−0.23314	−0.18061	0.09148	0.27030	0.22652	0.04061	−0.16282
10.4	−0.20686	−0.20954	+0.04567	0.25346	0.24678	0.07874	−0.12563
10.6	−0.17359	−0.23087	−0.00065	0.23025	0.26131	0.11488	−0.08791
10.8	−0.13463	−0.24397	−0.04609	0.20130	0.26975	0.14838	−0.04993
11.0	−0.09148	−0.24851	−0.08925	0.16737	0.27184	0.17861	−0.01205
11.2	−0.04577	−0.24445	−0.12884	0.12941	0.26750	0.20496	+0.02530
11.4	+0.00082	−0.23203	−0.16365	0.08848	0.25678	0.22687	0.06163
11.6	0.04657	−0.21178	−0.19262	0.04573	0.23992	0.24384	0.09640
11.8	0.08981	−0.18450	−0.21489	+0.00238	0.21732	0.25545	0.12906
12.0	0.12901	−0.15122	−0.22982	−0.04030	0.18952	0.26140	0.15902
12.2	0.16277	−0.11317	−0.23698	−0.08107	0.15724	0.26151	0.18573
12.4	0.18994	−0.07175	−0.23623	−0.11875	0.12130	0.25571	0.20865
12.6	0.20959	−0.02845	−0.22766	−0.15223	0.08268	0.24409	0.22728
12.8	0.22112	+0.01518	−0.21163	−0.18052	0.04240	0.22689	0.24122
13.0	0.22420	0.05759	−0.18876	−0.20279	+0.00157	0.20448	0.25010
13.2	0.21883	0.09729	−0.15987	−0.21840	−0.03868	0.17738	0.25369
13.4	0.20534	0.13289	−0.12600	−0.22692	−0.07722	0.14625	0.25184
13.6	0.18432	0.16318	−0.08833	−0.22813	−0.11296	0.11185	0.24454
13.8	0.15666	0.18712	−0.04819	−0.22204	−0.14489	0.07505	0.23190
14.0	0.12350	0.20393	−0.00697	−0.20891	−0.17209	+0.03682	0.21417
14.2	0.08615	0.21308	+0.03390	−0.18921	−0.19380	−0.00186	0.19170
14.4	0.04605	0.21434	0.07303	−0.16363	−0.20939	−0.03994	0.16501
14.6	+0.00477	0.20775	0.10907	−0.13305	−0.21842	−0.07640	0.13470
14.8	−0.03613	0.19364	0.14080	−0.09850	−0.22067	−0.11024	0.10149
15.0	−0.07511	0.17261	0.16717	−0.06116	−0.21610	−0.14053	0.06620
15.2	−0.11072	0.14550	0.18730	−0.02228	−0.20489	−0.16644	+0.02969
15.4	−0.14165	0.11339	0.20055	+0.01684	−0.18743	−0.18723	−0.00710
15.6	−0.16678	0.07750	0.20652	0.05489	−0.16430	−0.20234	−0.04322
15.8	−0.18523	+0.03920	0.20507	0.09059	−0.13627	−0.21134	−0.07775
16.0	−0.19637	−0.00007	0.19633	0.12278	−0.10425	−0.21399	−0.10975
16.2	−0.19986	−0.03885	0.18067	0.15038	−0.06928	−0.21025	−0.13838
16.4	−0.19566	−0.07571	0.15873	0.17250	−0.03251	−0.20025	−0.16286
16.6	−0.18402	−0.10930	0.13135	0.18843	+0.00487	−0.18432	−0.18253
16.8	−0.16547	−0.13841	0.09956	0.19767	0.04164	−0.16297	−0.19685
17.0	−0.14078	−0.16200	0.06455	0.19996	0.07660	−0.13688	−0.20543
17.2	−0.11098	−0.17924	+0.02761	0.19529	0.10864	−0.10686	−0.20805
17.4	−0.07725	−0.18956	−0.00990	0.18387	0.13671	−0.07387	−0.20464
17.6	−0.04094	−0.19265	−0.04663	0.16616	0.15991	−0.03895	−0.19533
17.8	−0.00347	−0.18846	−0.08123	0.14282	0.17752	−0.00320	−0.18039
18.0	+0.03372	−0.17722	−0.11249	0.11472	0.18897	+0.03225	−0.16030
18.2	0.06920	−0.15942	−0.13928	0.08289	0.19393	0.06629	−0.13566
18.4	0.10163	−0.13580	−0.16067	0.04848	0.19229	0.09782	−0.10722
18.6	0.12977	−0.10731	−0.17593	+0.01272	0.18414	0.12587	−0.07586
18.8	0.15261	−0.07506	−0.18455	−0.02310	0.16980	0.14955	−0.04252
19.0	0.16930	−0.04031	−0.18628	−0.05773	0.14982	0.16812	−0.00824
19.2	0.17927	−0.00440	−0.18111	−0.08993	0.12490	0.18100	+0.02593
19.4	0.18221	+0.03131	−0.16930	−0.11857	0.09595	0.18782	0.05895
19.6	0.17805	0.06546	−0.15134	−0.14267	0.06399	0.18838	0.08979
19.8	0.16705	0.09678	−0.12794	−0.16139	+0.03013	0.18270	0.11750
20.0	0.14967	0.12409	−0.10004	−0.17411	−0.00443	0.17101	0.14124
	$\begin{bmatrix}(-3)1\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)1\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)1\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)9\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)9\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)8\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)8\\5\end{bmatrix}$

Таблица 9.3. Функции Бесселя порядков 10, 11, 20 и 21

x	$10^{10}x^{-10}J_{10}(x)$	$10^{11}x^{-11}J_{11}(x)$	$10^{-9}x^{10}Y_{10}(x)$	$10^{25}x^{-20}J_{20}(x)$	$10^{27}x^{-21}J_{21}(x)$	$10^{-23}x^{20}Y_{20}(x)$
0.0	2.69114 446	1.22324 748	−0.11828 049	3.91990	9.33311	−0.406017
0.1	2.69053 290	1.22299 266	−0.11831 335	3.91944	9.33205	−0.406071
0.2	2.68869 898	1.22222 850	−0.11841 200	3.91804	9.32886	−0.406231
0.3	2.68564 500	1.22095 588	−0.11857 661	3.91571	9.32357	−0.406499
0.4	2.68137 477	1.21917 626	−0.11880 750	3.91244	9.31615	−0.406873
0.5	2.67589 362	1.21689 169	−0.11910 510	3.90825	9.30663	−0.407355
0.6	2.66920 838	1.21410 481	−0.11946 998	3.90314	9.29500	−0.407945
0.7	2.66132 738	1.21081 883	−0.11990 282	3.89710	9.28128	−0.408644
0.8	2.65226 043	1.20703 750	−0.12040 444	3.89015	9.26546	−0.409452
0.9	2.64201 878	1.20276 518	−0.12097 581	3.88228	9.24758	−0.410369
1.0	2.63061 512	1.19800 675	−0.12161 801	3.87350	9.22762	−0.411397
1.1	2.61806 358	1.19276 764	−0.12233 229	3.86383	9.20562	−0.412536
1.2	2.60437 963	1.18705 385	−0.12312 002	3.85325	9.18157	−0.413788
1.3	2.58958 012	1.18087 185	−0.12398 273	3.84179	9.15550	−0.415153
1.4	2.57368 323	1.17422 867	−0.12492 212	3.82945	9.12743	−0.416632
1.5	2.55670 842	1.16713 182	−0.12594 004	3.81624	9.09737	−0.418228
1.6	2.53867 639	1.15958 931	−0.12703 852	3.80216	9.06534	−0.419940
1.7	2.51960 907	1.15160 961	−0.12821 977	3.78723	9.03137	−0.421771
1.8	2.49952 955	1.14320 168	−0.12948 616	3.77146	8.99546	−0.423722
1.9	2.47846 207	1.13437 488	−0.13084 030	3.75485	8.95766	−0.425795
2.0	2.45643 192	1.12513 904	−0.13228 497	3.73742	8.91797	−0.427992
2.1	2.43346 545	1.11550 438	−0.13382 319	3.71918	8.87643	−0.430315
2.2	2.40959 000	1.10548 152	−0.13545 821	3.70015	8.83306	−0.432764
2.3	2.38483 384	1.09508 144	−0.13719 351	3.68032	8.78790	−0.435344
2.4	2.35922 612	1.08431 551	−0.13903 284	3.65973	8.74096	−0.438056
2.5	2.33279 682	1.07319 540	−0.14098 022	3.63837	8.69228	−0.440902
2.6	2.30557 673	1.06173 312	−0.14303 997	3.61627	8.64189	−0.443885
2.7	2.27759 732	1.04994 098	−0.14521 672	3.59344	8.58981	−0.447007
2.8	2.24889 074	1.03783 155	−0.14751 543	3.56989	8.53609	−0.450272
2.9	2.21948 976	1.02541 767	−0.14994 141	3.54564	8.48076	−0.453682
3.0	2.18942 770	1.01271 242	−0.15250 037	3.52071	8.42385	−0.457241
3.1	2.15873 836	0.99972 906	−0.15519 840	3.49510	8.36539	−0.460951
3.2	2.12745 598	0.98648 108	−0.15804 206	3.46885	8.30542	−0.464816
3.3	2.09561 517	0.97298 213	−0.16103 836	3.44195	8.24397	−0.468840
3.4	2.06325 085	0.95924 599	−0.16419 482	3.41444	8.18110	−0.473027
3.5	2.03039 820	0.94528 659	−0.16751 951	3.38633	8.11682	−0.477379
3.6	1.99709 260	0.93111 794	−0.17102 110	3.35763	8.05119	−0.481902
3.7	1.96336 956	0.91675 415	−0.17470 889	3.32837	7.98424	−0.486600
3.8	1.92926 467	0.90220 939	−0.17859 286	3.29855	7.91600	−0.491476
3.9	1.89481 352	0.88749 785	−0.18268 376	3.26821	7.84653	−0.496537
4.0	1.86005 168	0.87263 375	−0.18699 314	3.23736	7.77586	−0.501786
4.1	1.82501 462	0.85763 130	−0.19153 346	3.20601	7.70403	−0.507229
4.2	1.78973 765	0.84250 469	−0.19631 812	3.17419	7.63108	−0.512872
4.3	1.75425 588	0.82726 806	−0.20136 159	3.14192	7.55707	−0.518719
4.4	1.71860 416	0.81193 548	−0.20667 950	3.10921	7.48202	−0.524777
4.5	1.68281 701	0.79652 093	−0.21228 873	3.07608	7.40598	−0.531051
4.6	1.64692 860	0.78103 829	−0.21820 757	3.04256	7.32900	−0.537549
4.7	1.61097 267	0.76550 130	−0.22445 582	3.00866	7.25112	−0.544276
4.8	1.57498 249	0.74992 357	−0.23105 498	2.97440	7.17238	−0.551240
4.9	1.53899 084	0.73431 852	−0.23802 840	2.93981	7.09282	−0.558448
5.0	1.50302 991	0.71869 942	−0.24540 147	2.90490	7.01250	−0.565907
	$\begin{bmatrix}(-4)2\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)6\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)1\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)3\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)3\\3\end{bmatrix}$

$$J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x) \qquad Y_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}Y_n(x)-Y_{n-1}(x)$$

Таблица 9.3. Функции Бесселя порядков 10, 11, 20 и 21

x	$10^{10}x^{-10}J_{10}(x)$	$10^{11}x^{-11}J_{11}(x)$	$10^{-10}x^{10}Y_{10}(x)$	$10^{25}x^{-20}J_{20}(x)$	$10^{27}x^{-21}J_{21}(x)$	$10^{-23}x^{20}Y_{20}(x)$
5.0	1.50302 991	0.71869 942	-0.24540 147	2.90490	7.01250	-0.565907
5.1	1.46713 132	0.70307 931	-0.25320 186	2.86969	6.93145	-0.573626
5.2	1.43132 603	0.68747 104	-0.26145 975	2.83421	6.84971	-0.581612
5.3	1.39564 431	0.67188 722	-0.27020 813	2.79846	6.76734	-0.589875
5.4	1.36011 571	0.65634 019	-0.27948 304	2.76248	6.68437	-0.598423
5.5	1.32476 904	0.64084 205	-0.28932 400	2.72628	6.60085	-0.607266
5.6	1.28963 229	0.62540 463	-0.29977 431	2.68988	6.51682	-0.616414
5.7	1.25473 264	0.61003 945	-0.31088 154	2.65330	6.43233	-0.625876
5.8	1.22009 642	0.59475 774	-0.32269 795	2.61656	6.34742	-0.635663
5.9	1.18574 907	0.57957 041	-0.33528 105	2.57967	6.26213	-0.645788
6.0	1.15171 513	0.56448 805	-0.34869 413	2.54267	6.17651	-0.656261
6.1	1.11801 822	0.54952 091	-0.36300 693	2.50556	6.09059	-0.667094
6.2	1.08468 098	0.53467 890	-0.37829 631	2.46837	6.00443	-0.678301
6.3	1.05172 510	0.51997 158	-0.39464 698	2.43111	5.91806	-0.689895
6.4	1.01917 129	0.50540 814	-0.41215 232	2.39381	5.83152	-0.701890
6.5	0.98703 926	0.49099 740	-0.43091 524	2.35647	5.74485	-0.714300
6.6	0.95534 769	0.47674 781	-0.45104 907	2.31913	5.65810	-0.727140
6.7	0.92411 427	0.46266 745	-0.47267 855	2.28179	5.57131	-0.740427
6.8	0.89335 363	0.44876 400	-0.49594 084	2.24448	5.48451	-0.754178
6.9	0.86308 740	0.43504 477	-0.52098 648	2.20721	5.39775	-0.768410
7.0	0.83332 414	0.42151 665	-0.54798 051	2.17000	5.31106	-0.783140
7.1	0.80407 941	0.40818 616	-0.57710 346	2.13286	5.22448	-0.798389
7.2	0.77536 570	0.39505 943	-0.60855 234	2.09582	5.13805	-0.814177
7.3	0.74719 450	0.38214 216	-0.64254 159	2.05888	5.05181	-0.830524
7.4	0.71957 626	0.36943 970	-0.67930 390	2.02206	4.96579	-0.847452
7.5	0.69252 040	0.35695 696	-0.71909 088	1.98539	4.88002	-0.864985
7.6	0.66603 536	0.34469 850	-0.76217 356	1.94887	4.79455	-0.883147
7.7	0.64012 854	0.33266 845	-0.80884 258	1.91252	4.70940	-0.901963
7.8	0.61480 640	0.32087 058	-0.85940 807	1.87635	4.62461	-0.921460
7.9	0.59007 439	0.30930 826	-0.91419 914	1.84038	4.54021	-0.941665
8.0	0.56593 704	0.29798 448	-0.97356 279	1.80462	4.45624	-0.962608
8.1	0.54239 791	0.28690 187	-1.03786 231	1.76908	4.37272	-0.984319
8.2	0.51945 967	0.27606 265	-1.10747 485	1.73378	4.28968	-1.006831
8.3	0.49712 408	0.26546 873	-1.18278 826	1.69874	4.20716	-1.030178
8.4	0.47539 201	0.25512 162	-1.26419 685	1.66395	4.12518	-1.054394
8.5	0.45426 352	0.24502 250	-1.35209 608	1.62944	4.04377	-1.079518
8.6	0.43373 779	0.23517 220	-1.44687 598	1.59521	3.96296	-1.105589
8.7	0.41381 323	0.22557 121	-1.54891 312	1.56128	3.88277	-1.132647
8.8	0.39448 748	0.21621 969	-1.65856 097	1.52765	3.80323	-1.160736
8.9	0.37575 740	0.20711 750	-1.77613 854	1.49434	3.72436	-1.189902
9.0	0.35761 917	0.19826 418	-1.90191 706	1.46136	3.64619	-1.220192
9.1	0.34006 823	0.18965 897	-2.03610 452	1.42872	3.56873	-1.251657
9.2	0.32309 939	0.18130 082	-2.17882 801	1.39641	3.49201	-1.284351
9.3	0.30670 683	0.17318 839	-2.33011 366	1.36447	3.41606	-1.318328
9.4	0.29088 411	0.16532 010	-2.48986 396	1.33288	3.34088	-1.353647
9.5	0.27562 422	0.15769 409	-2.65783 251	1.30166	3.26651	-1.390372
9.6	0.26091 963	0.15030 825	-2.83359 602	1.27082	3.19294	-1.428567
9.7	0.24676 227	0.14316 025	-3.01652 353	1.24036	3.12022	-1.468301
9.8	0.23314 362	0.13624 751	-3.20574 283	1.21029	3.04834	-1.509646
9.9	0.22005 470	0.12956 726	-3.40010 421	1.18061	2.97733	-1.552680
10.0	0.20748 611	0.12311 653	-3.59814 152	1.15134	2.90720	-1.597484
	$\left[{(-5)8 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)3 \atop 5}\right]$	$\left[{(-3)1 \atop 7}\right]$	$\left[{(-5)5 \atop 3}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 3}\right]$	$\left[{(-1)2 \atop 4}\right]$

Таблица 9.3. Функции Бесселя порядков 10, 11, 20 и 21

x	$J_{10}(x)$	$J_{11}(x)$	$Y_{10}(x)$	$10^{25}x^{-20}J_{20}(x)$	$10^{27}x^{-21}J_{21}(x)$	$10^{-23}x^{20}Y_{20}(x)$
10.0	0.20748 611	0.12311 653	-0.35981 415	1.151337	2.907199	- 1.59748
10.1	0.21587 417	0.13041 285	-0.34383 078	1.122469	2.837961	- 1.64414
10.2	0.22413 707	0.13787 866	-0.32793 809	1.094012	2.769629	- 1.69275
10.3	0.23223 256	0.14549 509	-0.31207 433	1.065970	2.702215	- 1.74339
10.4	0.24011 699	0.15324 123	-0.29618 615	1.038347	2.635729	- 1.79618
10.5	0.24774 554	0.16109 407	-0.28022 819	1.011148	2.570182	- 1.85121
10.6	0.25507 240	0.16902 861	-0.26416 276	0.984374	2.505582	- 1.90861
10.7	0.26205 109	0.17701 780	-0.24795 949	0.958030	2.441939	- 1.96848
10.8	0.26863 466	0.18503 266	-0.23159 513	0.932118	2.379259	- 2.03097
10.9	0.27477 603	0.19304 230	-0.21505 324	0.906639	2.317550	- 2.09619
11.0	0.28042 823	0.20101 401	-0.19832 403	0.881596	2.256817	- 2.16430
11.1	0.28554 479	0.20891 340	-0.18140 409	0.856989	2.197065	- 2.23544
11.2	0.29007 999	0.21670 446	-0.16429 620	0.832821	2.138299	- 2.30977
11.3	0.29398 925	0.22434 974	-0.14700 917	0.809092	2.080523	- 2.38746
11.4	0.29722 944	0.23181 048	-0.12955 753	0.785801	2.023738	- 2.46870
11.5	0.29975 923	0.23904 680	-0.11196 142	0.762950	1.967947	- 2.55367
11.6	0.30153 946	0.24601 789	-0.09424 628	0.740539	1.913152	- 2.64257
11.7	0.30253 343	0.25268 218	-0.07644 263	0.718565	1.859352	- 2.73563
11.8	0.30270 737	0.25899 761	-0.05858 580	0.697029	1.806548	- 2.83307
11.9	0.30203 061	0.26492 183	-0.04071 566	0.675930	1.754740	- 2.93513
12.0	0.30047 604	0.27041 248	-0.02287 631	0.655266	1.703925	- 3.04208
12.1	0.29802 036	0.27542 744	-0.00511 577	0.635035	1.654102	- 3.15419
12.2	0.29464 445	0.27992 508	+0.01251 441	0.615236	1.605267	- 3.27175
12.3	0.29033 357	0.28386 459	0.02995 946	0.595866	1.557418	- 3.39509
12.4	0.28507 771	0.28720 623	0.04716 182	0.576923	1.510551	- 3.52453
12.5	0.27887 175	0.28991 166	0.06406 154	0.558403	1.464660	- 3.66044
12.6	0.27171 575	0.29194 422	0.08059 668	0.540305	1.419743	- 3.80321
12.7	0.26361 509	0.29326 923	0.09670 381	0.522625	1.375791	- 3.95323
12.8	0.25458 064	0.29385 431	0.11231 845	0.505359	1.332800	- 4.11095
12.9	0.24462 889	0.29366 968	0.12737 554	0.488504	1.290762	- 4.27684
13.0	0.23378 201	0.29268 843	0.14180 995	0.472056	1.249671	- 4.45140
13.1	0.22206 793	0.29088 684	0.15555 698	0.456011	1.209520	- 4.63518
13.2	0.20952 032	0.28824 464	0.16855 286	0.440365	1.170299	- 4.82874
13.3	0.19617 859	0.28474 526	0.18073 529	0.425114	1.132001	- 5.03272
13.4	0.18208 776	0.28037 612	0.19204 392	0.410252	1.094617	- 5.24778
13.5	0.16729 840	0.27512 884	0.20242 090	0.395776	1.058137	- 5.47464
13.6	0.15186 646	0.26899 942	0.21181 137	0.381681	1.022552	- 5.71407
13.7	0.13585 302	0.26198 851	0.22016 393	0.367961	0.987853	- 5.96691
13.8	0.11932 411	0.25410 149	0.22743 118	0.354612	0.954028	- 6.23405
13.9	0.10235 036	0.24534 866	0.23357 014	0.341628	0.921067	- 6.51646
14.0	0.08500 671	0.23574 535	0.23854 273	0.329005	0.888960	- 6.81520
14.1	0.06737 200	0.22531 197	0.24231 614	0.316736	0.857694	- 7.13138
14.2	0.04952 862	0.21407 407	0.24486 329	0.304816	0.827260	- 7.46624
14.3	0.03156 199	0.20206 238	0.24616 313	0.293240	0.797644	- 7.82110
14.4	+0.01356 013	0.18931 275	0.24620 100	0.282001	0.768835	- 8.19739
14.5	-0.00438 689	0.17586 611	0.24496 888	0.271095	0.740821	- 8.59667
14.6	-0.02218 745	0.16176 836	0.24246 568	0.260516	0.713590	- 9.02062
14.7	-0.03974 898	0.14707 028	0.23869 741	0.250257	0.687129	- 9.47109
14.8	-0.05697 854	0.13182 729	0.23367 730	0.240312	0.661426	- 9.95006
14.9	-0.07378 344	0.11609 931	0.22742 597	0.230676	0.636467	-10.45971
15.0	-0.09007 181	0.09995 048	0.21997 141	0.221343	0.612240	-11.00239
	$\begin{bmatrix}(-4)1\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)1\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)6\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)1\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)4\\4\end{bmatrix}$

Таблица 9.3. Функции Бесселя порядков 10, 11, 20 и 21

x	$J_{10}(x)$	$J_{11}(x)$	$Y_{10}(x)$	$10^{25}x^{-20}J_{20}(x)$	$10^{27}x^{-21}J_{21}(x)$	$10^{-23}x^{20}Y_{20}(x)$
15.0	−0.09007 181	0.09995 048	0.21997 141	0.22134 33	0.61224 04	− 11.0024
15.1	−0.10575 330	0.08344 886	0.21134 904	0.21230 71	0.58873 25	− 11.5807
15.2	−0.12073 964	0.06666 618	0.20160 159	0.20356 16	0.56593 06	− 12.1974
15.3	−0.13494 535	0.04967 738	0.19077 902	0.19510 08	0.54382 12	− 12.8555
15.4	−0.14828 828	0.03256 035	0.17893 834	0.18691 87	0.52239 14	− 13.5585
15.5	−0.16069 032	+0.01539 539	0.16614 338	0.17900 91	0.50162 76	− 14.3098
15.6	−0.17207 791	−0.00173 513	0.15246 453	0.17136 62	0.48151 66	− 15.1136
15.7	−0.18238 269	−0.01874 731	0.13797 838	0.16398 38	0.46204 52	− 15.9742
15.8	−0.19154 204	−0.03555 621	0.12276 733	0.15685 60	0.44319 99	− 16.8962
15.9	−0.19949 958	−0.05207 632	0.10691 918	0.14997 67	0.42496 74	− 17.8849
16.0	−0.20620 569	−0.06822 215	0.09052 660	0.14334 00	0.40733 43	− 18.9460
16.1	−0.21161 797	−0.08390 874	0.07368 666	0.13694 00	0.39028 75	− 20.0855
16.2	−0.21570 160	−0.09905 224	0.05650 016	0.13077 08	0.37381 35	− 21.3104
16.3	−0.21842 977	−0.11357 046	0.03907 110	0.12482 65	0.35789 93	− 22.6279
16.4	−0.21978 394	−0.12738 344	0.02150 600	0.11910 14	0.34253 16	− 24.0462
16.5	−0.21975 411	−0.14041 403	+0.00391 319	0.11358 96	0.32769 75	− 25.5740
16.6	−0.21833 905	−0.15258 841	−0.01359 786	0.10828 55	0.31338 39	− 27.2209
16.7	−0.21554 637	−0.16383 668	−0.03091 729	0.10318 34	0.29957 78	− 28.9975
16.8	−0.21139 267	−0.17409 338	−0.04793 557	0.09827 77	0.28626 66	− 30.9150
16.9	−0.20590 350	−0.18329 797	−0.06454 431	0.09356 30	0.27343 76	− 32.9859
17.0	−0.19911 332	−0.19139 539	−0.08063 696	0.08903 37	0.26107 81	− 35.2237
17.1	−0.19106 538	−0.19833 646	−0.09610 960	0.08468 45	0.24917 57	− 37.6429
17.2	−0.18181 155	−0.20407 831	−0.11086 170	0.08051 02	0.23771 82	− 40.2594
17.3	−0.17141 203	−0.20858 485	−0.12479 683	0.07650 53	0.22669 32	− 43.0904
17.4	−0.15993 505	−0.21182 701	−0.13782 343	0.07266 49	0.21608 89	− 46.1543
17.5	−0.14745 649	−0.21378 318	−0.14985 544	0.06898 37	0.20589 33	− 49.4711
17.6	−0.13405 943	−0.21443 935	−0.16081 304	0.06545 69	0.19609 48	− 53.0622
17.7	−0.11983 363	−0.21378 944	−0.17062 321	0.06207 96	0.18668 17	− 56.9506
17.8	−0.10487 499	−0.21183 538	−0.17922 038	0.05884 68	0.17764 27	− 61.1611
17.9	−0.08928 492	−0.20858 727	−0.18654 691	0.05575 39	0.16896 66	− 65.7197
18.0	−0.07316 966	−0.20406 341	−0.19255 365	0.05279 63	0.16064 24	− 70.6543
18.1	−0.05663 961	−0.19829 032	−0.19720 030	0.04996 93	0.15265 91	− 75.9946
18.2	−0.03980 852	−0.19130 265	−0.20045 582	0.04726 85	0.14500 62	− 81.7717
18.3	−0.02279 278	−0.18314 307	−0.20229 875	0.04468 96	0.13767 32	− 88.0182
18.4	−0.00571 052	−0.17386 213	−0.20271 742	0.04222 83	0.13064 97	− 94.7683
18.5	+0.01131 917	−0.16351 793	−0.20171 011	0.03988 04	0.12392 57	−102.0574
18.6	0.02817 711	−0.15217 591	−0.19928 520	0.03764 17	0.11749 14	−109.9219
18.7	0.04474 490	−0.13990 845	−0.19546 113	0.03550 84	0.11133 69	−118.3992
18.8	0.06090 579	−0.12679 446	−0.19026 637	0.03347 64	0.10545 28	−127.5270
18.9	0.07654 556	−0.11291 893	−0.18373 930	0.03154 21	0.09982 98	−137.3432
19.0	0.09155 333	−0.09837 240	−0.17592 797	0.02970 16	0.09445 89	−147.8850
19.1	0.10582 247	−0.08325 039	−0.16688 985	0.02795 15	0.08933 10	−159.1885
19.2	0.11925 134	−0.06765 283	−0.15669 143	0.02628 80	0.08443 76	−171.2882
19.3	0.13174 416	−0.05168 334	−0.14540 785	0.02470 79	0.07977 01	−184.2155
19.4	0.14321 168	−0.03544 863	−0.13312 231	0.02320 78	0.07532 03	−197.9980
19.5	0.15357 193	−0.01905 771	−0.11992 560	0.02178 44	0.07108 01	−212.6582
19.6	0.16275 039	−0.00262 120	−0.10591 538	0.02043 46	0.06704 16	−228.2122
19.7	0.17068 305	+0.01374 948	−0.09119 555	0.01915 54	0.06319 71	−244.6678
19.8	0.17731 198	0.02994 285	−0.07587 548	0.01794 37	0.05953 92	−262.0226
19.9	0.18259 079	0.04584 818	−0.06006 922	0.01679 67	0.05606 06	−280.2622
20.0	0.18648 256	0.06135 630	−0.04389 465	0.01571 16	0.05275 42	−299.3574
	$\left[{(-4)2 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)2 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)2 \atop 6}\right]$	$\left[{(-5)4 \atop 4}\right]$	$\left[{(-5)9 \atop 1}\right]$	$\left[{(-1)1 \atop 5}\right]$

Таблица 9.3. Модуль и фаза функций Бесселя порядков 10, 11, 20 и 21

$J_n(x)=M_n(x)\cos\theta_n(x)$ $Y_n(x)=M_n(x)\sin\theta_n(x)$

x^{-1}	$x^{\frac{1}{2}}M_{10}(x)$	$\theta_{10}(x)-x$	$x^{\frac{1}{2}}M_{11}(x)$	$\theta_{11}(x)-x$	$\langle x\rangle$
0.050	0.85676 701	−13.94798 864	0.87222 790	−14.96758 686	20
0.048	0.85136 682	−14.05389 581	0.86513 271	−15.09771 672	21
0.046	0.84633 336	−14.15926 984	0.85857 314	−15.22701 466	22
0.044	0.84164 245	−14.26413 968	0.85250 587	−15.35552 901	23
0.042	0.83727 251	−14.36853 333	0.84689 281	−15.48330 635	24
0.040	0.83320 419	−14.47247 807	0.84170 044	−15.61039 144	25
0.038	0.82942 012	−14.57600 035	0.83689 917	−15.73682 771	26
0.036	0.82590 472	−14.67912 589	0.83246 283	−15.86265 679	28
0.034	0.82264 403	−14.78187 967	0.82836 826	−15.98791 896	29
0.032	0.81962 546	−14.88428 611	0.82459 496	−16.11265 291	31
0.030	0.81683 775	−14.98636 880	0.82112 469	−16.23689 620	33
0.028	0.81427 076	−15.08815 085	0.81794 133	−16.36068 504	36
0.026	0.81191 546	−15.18965 477	0.81503 056	−16.48405 469	38
0.024	0.80976 370	−15.29090 253	0.81237 970	−16.60703 912	42
0.022	0.80780 825	−15.39191 569	0.80997 751	−16.72967 149	45
0.020	0.80604 267	−15.49271 527	0.80781 410	−16.85198 406	50
0.018	0.80446 127	−15.59332 192	0.80588 079	−16.97400 835	56
0.016	0.80305 902	−15.69375 598	0.80416 997	−17.09577 505	63
0.014	0.80183 156	−15.79403 741	0.80267 505	−17.21731 438	71
0.012	0.80077 512	−15.89418 589	0.80139 036	−17.33865 590	83
0.010	0.79988 647	−15.99422 093	0.80031 114	−17.45982 880	100
0.008	0.79916 297	−16.09416 168	0.79943 341	−17.58086 166	125
0.006	0.79860 244	−16.19402 726	0.79875 398	−17.70178 301	167
0.004	0.79820 323	−16.29383 652	0.79827 039	−17.82262 084	250
0.002	0.79796 417	−16.39360 832	0.79798 093	−17.94340 316	500
0.000	0.79788 456	−16.49336 143	0.79788 456	−18.06415 776	∞
	$\left[{(-5)5 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)7 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)7 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 6}\right]$	

x^{-1}	$x\,M_{20}(x)$	$\theta_{20}(x)-x$	$x\,M_{21}(x)$	$\theta_{21}(x)-x$	$\langle x\rangle$
0.050	1.474083	−21.047407	1.791133	−21.290925	20
0.048	1.320938	−21.606130	1.525581	−21.927545	21
0.046	1.211667	−22.149524	1.347435	−22.550082	22
0.044	1.131459	−22.676802	1.224460	−23.154248	23
0.042	1.070845	−23.188535	1.136653	−23.738936	24
0.040	1.023762	−23.685951	1.071741	−24.304948	25
0.038	0.986284	−24.170500	1.022171	−24.853951	26
0.036	0.955823	−24.643620	0.983229	−25.387848	28
0.034	0.930635	−25.106640	0.951902	−25.908478	29
0.032	0.909513	−25.560748	0.926211	−26.417500	31
0.030	0.891605	−26.006988	0.904821	−26.916369	33
0.028	0.876293	−26.446280	0.886799	−27.406346	36
0.026	0.863121	−26.879433	0.871483	−27.888527	38
0.024	0.851743	−27.307159	0.858385	−28.363869	42
0.022	0.841895	−27.730098	0.847145	−28.833211	45
0.020	0.833375	−28.148822	0.837487	−29.297299	50
0.018	0.826019	−28.563847	0.829198	−29.756800	56
0.016	0.819702	−28.975650	0.822114	−30.212318	63
0.014	0.814321	−29.384666	0.816105	−30.664405	71
0.012	0.809796	−29.791303	0.811069	−31.113569	83
0.010	0.806062	−30.195941	0.806925	−31.560285	100
0.008	0.803071	−30.598942	0.803612	−32.005000	125
0.006	0.800781	−31.000652	0.801081	−32.448139	167
0.004	0.799165	−31.401404	0.799297	−32.890109	250
0.002	0.798204	−31.801522	0.798237	−33.331307	500
0.000	0.797885	−32.201325	0.797885	−33.772121	∞
	$\left[{(-3)5 \atop 7}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 7}\right]$	$\left[{(-2)1 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 7}\right]$	

$\langle x\rangle$ — целое число, ближайшее к x.

Таблица 9.4. Функции Бесселя различных порядков

n	$J_n(1)$	$J_n(2)$	$J_n(5)$
0	(−1) 7.65197 6866	(−1) 2.23890 7791	(−1) −1.77596 7713
1	(−1) 4.40050 5857	(−1) 5.76724 8078	(−1) −3.27579 1376
2	(−1) 1.14903 4849	(−1) 3.52834 0286	(−2) +4.65651 1628
3	(−2) 1.95633 5398	(−1) 1.28943 2495	(−1) 3.64831 2306
4	(−3) 2.47663 8964	(−2) 3.39957 1981	(−1) 3.91232 3605
5	(−4) 2.49757 7302	(−3) 7.03962 9756	(−1) 2.61140 5461
6	(−5) 2.09383 3800	(−3) 1.20242 8972	(−1) 1.31048 7318
7	(−6) 1.50232 5817	(−4) 1.74944 0749	(−2) 5.33764 1016
8	(−8) 9.42234 4173	(−5) 2.21795 5229	(−2) 1.84052 1665
9	(−9) 5.24925 0180	(−6) 2.49234 3435	(−3) 5.52028 3139
10	(−10) 2.63061 5124	(−7) 2.51538 6283	(−3) 1.46780 2647
11	(−11) 1.19800 6746	(−8) 2.30428 4758	(−4) 3.50927 4498
12	(−13) 4.99971 8179	(−9) 1.93269 5149	(−5) 7.62781 3166
13	(−14) 1.92561 6764	(−10) 1.49494 2010	(−5) 1.52075 8221
14	(−16) 6.88540 8200	(−11) 1.07294 6448	(−6) 2.80129 5810
15	(−17) 2.29753 1532	(−13) 7.18301 6356	(−7) 4.79674 3278
16	(−19) 7.18639 6587	(−14) 4.50600 5896	(−8) 7.67501 5694
17	(−20) 2.11537 5568	(−15) 2.65930 7805	(−8) 1.15266 7666
18	(−22) 5.88034 4574	(−16) 1.48173 7249	(−9) 1.63124 4339
19	(−23) 1.54847 8441	(−18) 7.81924 3273	(−10) 2.18282 5842
20	(−25) 3.87350 3009	(−19) 3.91897 2805	(−11) 2.77033 0052
30	(−42) 3.48286 9794	(−33) 3.65025 6266	(−21) 2.67117 7278
40	(−60) 1.10791 5851	(−48) 1.19607 7458	(−33) 8.70224 1617
50	(−80) 2.90600 4948	(−65) 3.22409 5839	(−45) 2.29424 7616
100	(−189) 8.43182 8790	(−158) 1.06095 3112	(−119) 6.26778 9396

n	$J_n(10)$	$J_n(50)$	$J_n(100)$
0	(−1) −2.45935 7645	(−2) +5.58123 2767	(−2) +1.99858 5030
1	(−2) +4.34727 4617	(−2) −9.75118 2813	(−2) −7.71453 5201
2	(−1) +2.54630 3137	(−2) −5.97128 0079	(−2) −2.15287 5734
3	(−2) +5.83793 7931	(−2) +9.27348 0406	(−2) +7.62842 0172
4	(−1) −2.19602 6861	(−2) +7.08409 7728	(−2) +2.61058 0945
5	(−1) −2.34061 5282	(−2) −8.14002 4770	(−2) −7.41957 3696
6	(−2) −1.44588 4208	(−2) −8.71210 2682	(−2) −3.35253 8314
7	(−1) +2.16710 9177	(−2) +6.04912 0126	(−2) +7.01726 9099
8	(−1) 3.17854 1268	(−1) +1.04058 5632	(−2) +4.33495 5988
9	(−1) 2.91855 6853	(−2) −2.71924 6104	(−2) −6.32367 6141
10	(−1) 2.07486 1066	(−1) −1.13847 8491	(−2) −5.47321 7694
11	(−1) 1.23116 5280	(−2) −1.83466 7862	(−2) +5.22903 2602
12	(−2) 6.33702 5497	(−1) +1.05775 3106	(−2) +6.62360 4866
13	(−2) 2.89720 8393	(−2) +6.91188 2768	(−2) −3.63936 7434
14	(−2) 1.19571 6324	(−2) −6.98335 2016	(−2) −7.56984 0399
15	(−3) 4.50797 3144	(−1) −1.08225 5990	(−2) +1.51981 2122
16	(−3) 1.56675 6192	(−3) +4.89816 0778	(−2) +8.02578 4036
17	(−4) 5.05646 6697	(−1) +1.11360 4219	(−2) +1.04843 8769
18	(−4) 1.52442 4853	(−2) +7.08269 2610	(−2) −7.66931 4854
19	(−5) 4.31462 7752	(−2) −6.03650 3508	(−2) −3.80939 2116
20	(−5) 1.15133 6925	(−1) −1.16704 3528	(−2) +6.22174 5850
30	(−12) 1.55109 6078	(−2) +4.84342 5725	(−2) +8.14601 2958
40	(−21) 6.03089 5312	(−1) −1.38176 2812	(−2) +7.27017 5482
50	(−30) 1.78451 3608	(−1) +1.21409 0219	(−2) −3.86983 3973
100	(−89) 6.59731 6064	(−21) +1.11592 7368	(−2) +9.63666 7330

Таблица 9.4. **Функции Бесселя различных порядков**

n	$Y_n(1)$	$Y_n(2)$	$Y_n(5)$
0	(− 2)+8.82569 6422	(− 1)+5.10375 6726	(− 1)−3.08517 6252
1	(− 1)−7.81212 8213	(− 1)−1.07032 4315	(− 1)+1.47863 1434
2	(0)−1.65068 2607	(− 1)−6.17408 1042	(− 1)+3.67662 8826
3	(0)−5.82151 7606	(0)−1.12778 3777	(− 1)+1.46267 1627
4	(1)−3.32784 2303	(0)−2.76594 3226	(− 1)−1.92142 2874
5	(2)−2.60405 8666	(0)−9.93598 9128	(− 1)−4.53694 8225
6	(3)−2.57078 0243	(1)−4.69140 0242	(− 1)−7.15247 3576
7	(4)−3.05889 5705	(2)−2.71548 0254	(0)−1.26289 8836
8	(5)−4.25674 6185	(3)−1.85392 2175	(0)−2.82086 9383
9	(6)−6.78020 4939	(4)−1.45598 2938	(0)−7.76388 3188
10	(8)−1.21618 0143	(5)−1.29184 5422	(1)−2.51291 1010
11	(9)−2.42558 0081	(6)−1.27728 5593	(1)−9.27525 5719
12	(10)−5.32411 4376	(7)−1.39209 5698	(2)−3.82982 1416
13	(12)−1.27536 1870	(8)−1.65774 1981	(3)−1.74556 1722
14	(13)−3.31061 6748	(9)−2.14114 3619	(3)−8.69393 8814
15	(14)−9.25697 3276	(10)−2.98102 3647	(4)−4.69404 9564
16	(16)−2.77378 1366	(11)−4.45012 4034	(5)−2.72949 0350
17	(17)−8.86684 3398	(12)−7.09038 8217	(6)−1.69993 3328
18	(19)−3.01195 2974	(14)−1.20091 5873	(7)−1.12865 9760
19	(21)−1.08341 6386	(15)−2.15455 8183	(7)−7.95635 6938
20	(22)−4.11397 0315	(16)−4.08165 1389	(8)−5.93396 5297
30	(39)−3.04812 8783	(30)−2.91322 3848	(18)−4.02856 8419
40	(57)−7.18487 4797	(45)−6.66154 1236	(29)−9.21681 6572
50	(77)−2.19114 2813	(62)−1.97615 0577	(42)−2.78883 7018
100	(185)−3.77528 7810	(155)−3.00082 6049	(115)−5.08486 3916

n	$Y_n(10)$	$Y_n(50)$	$Y_n(100)$
0	(−2)+5.56711 6728	(− 2)−9.80649 9547	(−2)−7.72443 1337
1	(−1)+2.49015 4242	(− 2)−5.67956 6856	(−2)−2.03723 1200
2	(−3)−5.86808 2442	(− 2)+9.57931 6873	(−2)+7.68368 6713
3	(−1)−2.51362 6572	(− 2)+6.44591 2206	(−2)+2.34457 8669
4	(−1)−1.44949 5119	(− 2)−8.80580 7408	(−2)−7.54301 1992
5	(−1)+1.35403 0477	(− 2)−7.85484 1391	(−2)−2.94801 9628
6	(−1)+2.80352 5596	(− 2)+7.23483 9130	(−2)+7.24821 0030
7	(−1)+2.01020 0238	(− 2)+9.59120 2782	(−2)+3.81780 4832
8	(−3)+1.07547 3734	(− 2)−4.54930 2351	(−2)−6.71371 7353
9	(−1)−1.99299 2658	(− 1)−1.10469 7953	(−2)−4.89199 9608
10	(−1)−3.59814 1522	(− 3)+5.72389 7182	(−2)+5.83315 7424
11	(−1)−5.20329 0386	(− 1)+1.12759 3542	(−2)+6.05863 1093
12	(−1)−7.84909 7327	(− 2)+4.38902 1867	(−2)−4.50025 8583
13	(0)−1.36345 4320	(− 2)−9.16920 4926	(−2)−7.13869 3153
14	(0)−2.76007 1499	(− 2)−9.15700 8429	(−2)+2.64419 8363
15	(0)−6.36474 5877	(− 2)+4.04128 0205	(−2)+7.87906 8695
16	(1)−1.63341 6613	(− 1)+1.15817 7655	(−3)−2.80477 7550
17	(1)−4.59045 8575	(− 2)+3.37105 6788	(−2)−7.96882 1576
18	(2)−1.39741 4254	(− 2)−9.28945 7936	(−2)−2.42892 1581
19	(2)−4.57164 5457	(− 1)−1.00594 6650	(−2)+7.09440 9807
20	(3)−1.59748 3848	(− 2)+1.64426 3395	(−2)+5.12479 7308
30	(9)−7.25614 2316	(− 1)−1.16457 2349	(−3)+6.13883 9272
40	(18)−1.36280 3297	(− 2)−4.53080 1120	(−2)+4.07468 5217
50	(27)−3.64106 6502	(− 1)−2.10316 5546	(−2)+7.65052 6394
100	(85)−4.84914 8271	(+18)−3.29380 0188	(−1)−1.66921 4114

Таблица 9.5. Нули и связанные с ними значения функций Бесселя и их производных

s	$j_{0,s}$	$J'_0(j_{0,s})$	$j_{1,s}$	$J'_1(j_{1,s})$	$j_{2,s}$	$J'_2(j_{2,s})$
1	2.40482 55577	−0.51914 74973	3.83171	−0.40276	5.13562	−0.33967
2	5.52007 81103	+0.34026 48065	7.01559	+0.30012	8.41724	+0.27138
3	8.65372 79129	−0.27145 22999	10.17347	−0.24970	11.61984	−0.23244
4	11.79153 44391	+0.23245 98314	13.32369	+0.21836	14.79595	+0.20654
5	14.93091 77086	−0.20654 64331	16.47063	−0.19647	17.95982	−0.18773
6	18.07106 39679	+0.18772 88030	19.61586	+0.18006	21.11700	+0.17326
7	21.21163 66299	−0.17326 58942	22.76008	−0.16718	24.27011	−0.16170
8	24.35247 15308	+0.16170 15507	25.90367	+0.15672	27.42057	+0.15218
9	27.49347 91320	−0.15218 12138	29.04683	−0.14801	30.56920	−0.14417
10	30.63460 64684	+0.14416 59777	32.18968	+0.14061	33.71652	+0.13730
11	33.77582 02136	−0.13729 69434	35.33231	−0.13421	36.86286	−0.13132
12	36.91709 83537	+0.13132 46267	38.47477	+0.12862	40.00845	+0.12607
13	40.05842 57646	−0.12606 94971	41.61709	−0.12367	43.15345	−0.12140
14	43.19979 17132	+0.12139 86248	44.75932	+0.11925	46.29800	+0.11721
15	46.34118 83717	−0.11721 11989	47.90146	−0.11527	49.44216	−0.11343
16	49.48260 98974	+0.11342 91926	51.04354	+0.11167	52.58602	+0.10999
17	52.62405 18411	−0.10999 11430	54.18555	−0.10839	55.72963	−0.10685
18	55.76551 07550	+0.10684 78883	57.32753	+0.10537	58.87302	+0.10396
19	58.90698 39261	−0.10395 95729	60.46946	−0.10260	62.01622	−0.10129
20	62.04846 91902	+0.10129 34989	63.61136	+0.10004	65.15927	+0.09882

s	$j_{3,s}$	$J'_3(j_{3,s})$	$j_{4,s}$	$J'_4(j_{4,s})$	$j_{5,s}$	$J'_5(j_{5,s})$
1	6.38016	−0.29827	7.58834	−0.26836	8.77148	−0.24543
2	9.76102	+0.24942	11.06471	+0.23188	12.33860	+0.21743
3	13.01520	−0.21828	14.37254	−0.20636	15.70017	−0.19615
4	16.22347	+0.19644	17.61597	+0.18766	18.98013	+0.17993
5	19.40942	−0.18005	20.82693	−0.17323	22.21780	−0.16712
6	22.58273	+0.16718	24.01902	+0.16168	25.43034	+0.15669
7	25.74817	−0.15672	27.19909	−0.15217	28.62662	−0.14799
8	28.90835	+0.14801	30.37101	+0.14416	31.81172	+0.14059
9	32.06485	−0.14060	33.53714	−0.13729	34.98878	−0.13420
10	35.21867	+0.13421	36.69900	+0.13132	38.15987	+0.12861
11	38.37047	−0.12862	39.85763	−0.12607	41.32638	−0.12366
12	41.52072	+0.12367	43.01374	+0.12140	44.48932	+0.11925
13	44.66974	−0.11925	46.16785	−0.11721	47.64940	−0.11527
14	47.81779	+0.11527	49.32036	+0.11343	50.80717	+0.11167
15	50.96503	−0.11167	52.47155	−0.10999	53.96303	−0.10838
16	54.11162	+0.10839	55.62165	+0.10685	57.11730	+0.10537
17	57.25765	−0.10537	58.77084	−0.10396	60.27025	−0.10260
18	60.40322	+0.10260	61.91925	+0.10129	63.42205	+0.10003
19	63.54840	−0.10004	65.06700	−0.09882	66.57289	−0.09765
20	66.69324	+0.09765	68.21417	+0.09652	69.72289	+0.09543

s	$j_{6,s}$	$J'_6(j_{6,s})$	$j_{7,s}$	$J'_7(j_{7,s})$	$j_{8,s}$	$J'_8(j_{8,s})$
1	9.93611	−0.22713	11.08637	−0.21209	12.22509	−0.19944
2	13.58929	+0.20525	14.82127	+0.19479	16.03777	+0.18569
3	17.00382	−0.18726	18.28758	−0.17942	19.55454	−0.17244
4	20.32079	+0.17305	21.64154	+0.16688	22.94517	+0.16130
5	23.58608	−0.16159	24.93493	−0.15657	26.26681	−0.15196
6	26.82015	+0.15212	28.19119	+0.14792	29.54566	+0.14404
7	30.03372	−0.14413	31.42279	−0.14055	32.79580	−0.13722
8	33.23304	+0.13727	34.63709	+0.13418	36.02562	+0.13127
9	36.42202	−0.13131	37.83872	−0.12859	39.24045	−0.12603
10	39.60324	+0.12606	41.03077	+0.12365	42.44389	+0.12137
11	42.77848	−0.12139	44.21541	−0.11924	45.63844	−0.11719
12	45.94902	+0.11721	47.39417	+0.11526	48.82593	+0.11342
13	49.11577	−0.11343	50.56818	−0.11165	52.00769	−0.10998
14	52.27945	+0.10999	53.73833	+0.10838	55.18475	+0.10684
15	55.44059	−0.10685	56.90525	−0.10537	58.35789	−0.10395
16	58.59961	+0.10396	60.06948	+0.10260	61.52774	+0.10129
17	61.75682	−0.10129	63.23142	−0.10003	64.69478	−0.09882
18	64.91251	+0.09882	66.39141	+0.09765	67.85943	+0.09652
19	68.06689	−0.09652	69.54971	−0.09543	71.02200	−0.09438
20	71.22013	+0.09438	72.70655	+0.09336	74.18277	+0.09237

Таблица 9.5. Нули и связанные с ними значения функций Бесселя и их производных

s	$y_{0,s}$	$Y'_0(y_{0,s})$	$y_{1,s}$	$Y'_1(y_{1,s})$	$y_{2,s}$	$Y'_2(y_{2,s})$
1	0.89357 697	+0.87942 080	2.19714	+0.52079	3.38424	+0.39921
2	3.95767 842	−0.40254 267	5.42968	−0.34032	6.79381	−0.29992
3	7.08605 106	+0.30009 761	8.59601	+0.27146	10.02348	+0.24967
4	10.22234 504	−0.24970 124	11.74915	−0.23246	13.20999	−0.21835
5	13.36109 747	+0.21835 830	14.89744	+0.20655	16.37897	+0.19646
6	16.50092 244	−0.19646 494	18.04340	−0.18773	19.53904	−0.18006
7	19.64130 970	+0.18006 318	21.18807	+0.17327	22.69396	+0.16718
8	22.78202 805	−0.16718 450	24.33194	−0.16170	25.84561	−0.15672
9	25.92295 765	+0.15672 493	27.47529	+0.15218	28.99508	+0.14801
10	29.06403 025	−0.14801 108	30.61829	−0.14417	32.14300	−0.14061
11	32.20520 412	+0.14060 578	33.76102	+0.13730	35.28979	+0.13421
12	35.34645 231	−0.13421 123	36.90356	−0.13132	38.43573	−0.12862
13	38.48775 665	+0.12861 661	40.04594	+0.12607	41.58101	+0.12367
14	41.62910 447	−0.12366 795	43.18822	−0.12140	44.72578	−0.11925
15	44.77048 661	+0.11924 981	46.33040	+0.11721	47.87012	+0.11527
16	47.91189 633	−0.11527 369	49.47251	−0.11343	51.01413	−0.11167
17	51.05332 855	+0.11167 049	52.61455	+0.10999	54.15785	+0.10839
18	54.19477 936	−0.10838 535	55.75654	−0.10685	57.30135	−0.10537
19	57.33624 570	+0.10537 405	58.89850	+0.10396	60.44464	+0.10260
20	60.47772 516	−0.10260 057	62.04041	−0.10129	63.58777	−0.10004

s	$y_{3,s}$	$Y'_3(y_{3,s})$	$y_{4,s}$	$Y'_4(y_{4,s})$	$y_{5,s}$	$Y'_5(y_{5,s})$
1	4.52702	+0.33256	5.64515	+0.28909	6.74718	+0.25795
2	8.09755	−0.27081	9.36162	−0.24848	10.59718	−0.23062
3	11.39647	+0.23232	12.73014	+0.21805	14.03380	+0.20602
4	14.62308	−0.20650	15.99963	−0.19635	17.34709	−0.18753
5	17.81846	+0.18771	19.22443	+0.18001	20.60290	+0.17317
6	20.99728	−0.17326	22.42481	−0.16716	23.82654	−0.16165
7	24.16624	+0.16170	25.61027	+0.15671	27.03013	+0.15215
8	27.32880	−0.15218	28.78589	−0.14800	30.22034	−0.14415
9	30.48699	+0.14416	31.95469	+0.14060	33.40111	+0.13729
10	33.64205	−0.13730	35.11853	−0.13421	36.57497	−0.13132
11	36.79479	+0.13132	38.27867	+0.12861	39.74363	+0.12606
12	39.94577	−0.12607	41.43596	−0.12367	42.90825	−0.12140
13	43.09537	+0.12140	44.59102	+0.11925	46.06968	+0.11721
14	46.24387	−0.11721	47.74429	−0.11527	49.22854	−0.11343
15	49.39150	+0.11343	50.89611	+0.11167	52.38531	+0.10999
16	52.53840	−0.10999	54.04673	−0.10838	55.54035	−0.10685
17	55.68470	+0.10685	57.19635	+0.10537	58.69393	+0.10396
18	58.83049	−0.10396	60.34513	−0.10260	61.84628	−0.10129
19	61.97586	+0.10129	63.49320	+0.10003	64.99759	+0.09882
20	65.12086	−0.09882	66.64065	−0.09765	68.14799	−0.09652

s	$y_{6,s}$	$Y'_6(y_{6,s})$	$y_{7,s}$	$Y'_7(y_{7,s})$	$y_{8,s}$	$Y'_8(y_{8,s})$
1	7.83774	+0.23429	8.91961	+0.21556	9.99463	+0.20027
2	11.81104	−0.21591	13.00771	−0.20352	14.19036	−0.19289
3	15.31362	+0.19571	16.57392	+0.18672	17.81789	+0.17880
4	18.67070	−0.17975	19.97434	−0.17283	21.26093	−0.16662
5	21.95829	+0.16703	23.29397	+0.16148	24.61258	+0.15643
6	25.20621	−0.15664	26.56676	−0.15206	27.91052	−0.14785
7	28.42904	+0.14796	29.80953	+0.14409	31.17370	+0.14051
8	31.63488	−0.14058	33.03177	−0.13725	34.41286	−0.13415
9	34.82864	+0.13419	36.23927	+0.13130	37.63465	+0.12857
10	38.01347	−0.12860	39.43579	−0.12605	40.84342	−0.12364
11	41.19152	+0.12366	42.62391	+0.12138	44.04215	+0.11923
12	44.36427	−0.11924	45.80544	−0.11720	47.23298	−0.11526
13	47.53282	+0.11527	48.98171	+0.11342	50.41746	+0.11166
14	50.69796	−0.11167	52.15369	−0.10999	53.59675	−0.10838
15	53.86031	+0.10838	55.32215	+0.10684	56.77177	+0.10537
16	57.02034	−0.10537	58.48767	−0.10396	59.94319	−0.10260
17	60.17842	+0.10260	61.65071	+0.10129	63.11158	+0.10003
18	63.33485	−0.10003	64.81164	−0.09882	66.27738	−0.09765
19	66.48986	+0.09765	67.97075	+0.09652	69.44095	+0.09543
20	69.64364	−0.09543	71.12830	−0.09438	72.60259	−0.09336

Таблица 9.5. Нули и связанные с ними значения функций Бесселя и их производных

s	$j'_{0,s}$	$J_0(j'_{0,s})$	$j'_{1,s}$	$J_1(j'_{1,s})$	$j'_{2,s}$	$J_2(j'_{2,s})$
1	0.00000 00000	+1.00000 00000	1.84118	+0.58187	3.05424	+0.48650
2	3.83170 59702	−0.40275 93957	5.33144	−0.34613	6.70613	−0.31353
3	7.01558 66698	+0.30011 57525	8.53632	+0.27330	9.96947	+0.25474
4	10.17346 81351	−0.24970 48771	11.70600	−0.23330	13.17037	−0.22088
5	13.32369 19363	+0.21835 94072	14.86359	+0.20701	16.34752	+0.19794
6	16.47063 00509	−0.19646 53715	18.01553	−0.18802	19.51291	−0.18101
7	19.61585 85105	+0.18006 33753	21.16437	+0.17346	22.67158	+0.16784
8	22.76008 43806	−0.16718 46005	24.31133	−0.16184	25.82604	−0.15720
9	25.90367 20876	+0.15672 49863	27.45705	+0.15228	28.97767	+0.14836
10	29.04682 85349	−0.14801 11100	30.60192	−0.14424	32.12733	−0.14088
11	32.18967 99110	+0.14060 57982	33.74618	+0.13736	35.27554	+0.13443
12	35.33230 75501	−0.13421 12403	36.88999	−0.13137	38.42265	−0.12879
13	38.47476 62348	+0.12861 66221	40.03344	+0.12611	41.56893	+0.12381
14	41.61709 42128	−0.12366 79608	43.17663	−0.12143	44.71455	−0.11937
15	44.75931 89977	+0.11924 98120	46.31960	+0.11724	47.85964	+0.11537
16	47.90146 08872	−0.11527 36941	49.46239	−0.11345	51.00430	−0.11176
17	51.04353 51836	+0.11167 04969	52.60504	+0.11001	54.14860	+0.10846
18	54.18555 36411	−0.10838 53489	55.74757	−0.10687	57.29260	−0.10544
19	57.32752 54379	+0.10537 40554	58.89000	+0.10397	60.43635	+0.10266
20	60.46945 78453	−0.10260 05671	62.03235	−0.10131	63.57989	−0.10008

s	$j'_{3,s}$	$J_3(j'_{3,s})$	$j'_{4,s}$	$J_4(j'_{4,s})$	$j'_{5,s}$	$J_5(j'_{5,s})$
1	4.20119	+0.43439	5.31755	+0.39965	6.41562	+0.37409
2	8.01524	−0.29116	9.28240	−0.27438	10.51986	−0.26109
3	11.34592	+0.24074	12.68191	+0.22959	13.98719	+0.22039
4	14.58585	−0.21097	15.96411	−0.20276	17.31284	−0.19580
5	17.78875	+0.19042	19.19603	+0.18403	20.57551	+0.17849
6	20.97248	−0.17505	22.40103	−0.16988	23.80358	−0.16533
7	24.14490	+0.16295	25.58976	+0.15866	27.01031	+0.15482
8	27.31006	−0.15310	28.76784	−0.14945	30.20285	−0.14616
9	30.47027	+0.14487	31.93854	+0.14171	33.38544	+0.13885
10	33.62695	−0.13784	35.10392	−0.13509	36.56078	−0.13256
11	36.78102	+0.13176	38.26532	+0.12932	39.73064	+0.12707
12	39.93311	−0.12643	41.42367	−0.12425	42.89627	−0.12223
13	43.08365	+0.12169	44.57962	+0.11973	46.05857	+0.11790
14	46.23297	−0.11746	47.73367	−0.11568	49.21817	−0.11402
15	49.38130	+0.11364	50.88616	+0.11202	52.37559	+0.11049
16	52.52882	−0.11017	54.03737	−0.10868	55.53120	−0.10728
17	55.67567	+0.10700	57.18752	+0.10563	58.68528	+0.10434
18	58.82195	−0.10409	60.33677	−0.10283	61.83809	−0.10163
19	61.96775	+0.10141	63.48526	+0.10023	64.98980	+0.09912
20	65.11315	−0.09893	66.63309	−0.09783	68.14057	−0.09678

s	$j'_{6,s}$	$J_6(j'_{6,s})$	$j'_{7,s}$	$J_7(j'_{7,s})$	$j'_{8,s}$	$J_8(j'_{8,s})$
1	7.50127	+0.35414	8.57784	+0.33793	9.64742	+0.32438
2	11.73494	−0.25017	12.93239	−0.24096	14.11552	−0.23303
3	15.26818	+0.21261	16.52937	+0.20588	17.77401	+0.19998
4	18.63744	−0.18978	19.94185	−0.18449	21.22906	−0.17979
5	21.93172	+0.17363	23.26805	+0.16929	24.58720	+0.16539
6	25.18393	−0.16127	26.54503	−0.15762	27.88927	−0.15431
7	28.40978	+0.15137	29.79075	+0.14823	31.15533	+0.14537
8	31.61788	−0.14317	33.01518	−0.14044	34.39663	−0.13792
9	34.81339	+0.13623	36.22438	+0.13381	37.62008	+0.13158
10	37.99964	−0.13024	39.42227	−0.12808	40.83018	−0.12608
11	41.17885	+0.12499	42.61152	+0.12305	44.03001	+0.12124
12	44.35258	−0.12035	45.79400	−0.11859	47.22176	−0.11695
13	47.52196	+0.11620	48.97107	+0.11460	50.40702	+0.11309
14	50.68782	−0.11246	52.14375	−0.11099	53.58700	−0.10960
15	53.85079	+0.10906	55.31282	+0.10771	56.76260	+0.10643
16	57.01138	−0.10596	58.47887	−0.10471	59.93454	−0.10352
17	60.16995	+0.10311	61.64239	+0.10195	63.10340	+0.10084
18	63.32681	−0.10049	64.80374	−0.09940	66.26961	−0.09837
19	66.48221	+0.09805	67.96324	+0.09704	69.43356	+0.09607
20	69.63635	−0.09579	71.12113	−0.09484	72.59554	−0.09393

Таблица 9.5. Нули и связанные с ними значения функций Бесселя и их производных

s	$y'_{0,s}$	$Y_0(y'_{0,s})$	$y'_{1,s}$	$Y_1(y'_{1,s})$	$y'_{2,s}$	$Y_2(y'_{2,s})$
1	2.19714 133	+0.52078 641	3.68302	+0.41673	5.00258	+0.36766
2	5.42968 104	-0.34031 805	6.94150	-0.30317	8.35072	-0.27928
3	8.59600 587	+0.27145 988	10.12340	+0.25091	11.57420	+0.23594
4	11.74915 483	-0.23246 177	13.28576	-0.21897	14.76091	-0.20845
5	14.89744 213	+0.20654 711	16.44006	+0.19683	17.93129	+0.18890
6	18.04340 228	-0.18772 909	19.59024	-0.18030	21.09289	-0.17405
7	21.18806 893	+0.17326 604	22.73803	+0.16735	24.24923	+0.16225
8	24.33194 257	-0.16170 163	25.88431	-0.15684	27.40215	-0.15259
9	27.47529 498	+0.15218 126	29.02958	+0.14810	30.55271	+0.14448
10	30.61828 649	-0.14416 600	32.17412	-0.14067	33.70159	-0.13754
11	33.76101 780	+0.13729 696	35.31813	+0.13427	36.84921	+0.13152
12	36.90355 532	-0.13132 464	38.46175	-0.12866	39.99589	-0.12623
13	40.04594 464	+0.12606 951	41.60507	+0.12370	43.14182	+0.12153
14	43.18821 810	-0.12139 863	44.74814	-0.11928	46.28716	-0.11732
15	46.33039 925	+0.11721 120	47.89101	+0.11530	49.43202	+0.11352
16	49.47250 568	-0.11342 920	51.03373	-0.11169	52.57649	-0.11007
17	52.61455 077	+0.10999 115	54.17632	+0.10840	55.72063	+0.10692
18	55.75654 488	-0.10684 789	57.31880	-0.10539	58.86450	-0.10402
19	58.89849 617	+0.10395 957	60.46118	+0.10261	62.00814	+0.10135
20	62.04041 115	-0.10129 350	63.60349	-0.10005	65.15159	-0.09887

s	$y'_{3,s}$	$Y_3(y'_{3,s})$	$y'_{4,s}$	$Y_4(y'_{4,s})$	$y'_{5,s}$	$Y_5(y'_{5,s})$
1	6.25363	+0.33660	7.46492	+0.31432	8.64956	+0.29718
2	9.69879	-0.26195	11.00517	-0.24851	12.28087	-0.23763
3	12.97241	+0.22428	14.33172	+0.21481	15.66080	+0.20687
4	16.19045	-0.19987	17.58444	-0.19267	18.94974	-0.18650
5	19.38239	+0.18223	20.80106	+0.17651	22.19284	+0.17151
6	22.55979	-0.16867	23.99700	-0.16397	25.40907	-0.15980
7	25.72821	+0.15779	27.17989	+0.15384	28.60804	+0.15030
8	28.89068	-0.14881	30.35396	-0.14543	31.79520	-0.14236
9	32.04898	+0.14122	33.52180	+0.13828	34.97389	+0.13559
10	35.20427	-0.13470	36.68505	-0.13211	38.14631	-0.12973
11	38.35728	+0.12901	39.84483	+0.12671	41.31392	+0.12458
12	41.50855	-0.12399	43.00191	-0.12193	44.47779	-0.12001
13	44.65845	+0.11952	46.15686	+0.11765	47.63867	+0.11591
14	47.80725	-0.11550	49.31009	-0.11380	50.79713	-0.11221
15	50.95515	+0.11186	52.46191	+0.11031	53.95360	+0.10885
16	54.10232	-0.10855	55.61257	-0.10712	57.10841	-0.10578
17	57.24887	+0.10552	58.76225	+0.10420	60.26183	+0.10295
18	60.39491	-0.10273	61.91110	-0.10151	63.41407	-0.10035
19	63.54050	+0.10015	65.05925	+0.09901	66.56530	+0.09793
20	66.68571	-0.09775	68.20679	-0.09669	69.71565	-0.09568

s	$y'_{6,s}$	$Y_6(y'_{6,s})$	$y'_{7,s}$	$Y_7(y'_{7,s})$	$y'_{8,s}$	$Y_8(y'_{8,s})$
1	9.81480	+0.28339	10.96515	+0.27194	12.10364	+0.26220
2	13.53281	-0.22854	14.76569	-0.22077	15.98284	-0.21402
3	16.96553	+0.20007	18.25012	+0.19414	19.51773	+0.18891
4	20.29129	-0.18111	21.61275	-0.17634	22.91696	-0.17207
5	23.56186	+0.16708	24.91131	+0.16311	26.24370	+0.15953
6	26.79950	-0.15607	28.17105	-0.15269	29.52596	-0.14962
7	30.01567	+0.14709	31.40518	+0.14417	32.77857	+0.14149
8	33.21697	-0.13957	34.62140	-0.13700	36.01026	-0.13463
9	36.40752	+0.13313	37.82455	+0.13085	39.22658	+0.12874
10	39.59002	-0.12753	41.01785	-0.12549	42.43122	-0.12359
11	42.76632	+0.12260	44.20351	+0.12076	45.62678	+0.11904
12	45.93775	-0.11822	47.38314	-0.11654	48.81512	-0.11497
13	49.10528	+0.11428	50.55791	+0.11275	51.99761	+0.11131
14	52.26963	-0.11072	53.72870	-0.10931	55.17529	-0.10798
15	55.43136	+0.10748	56.89619	+0.10618	58.34899	+0.10494
16	58.59089	-0.10451	60.06092	-0.10330	61.51933	-0.10216
17	61.74857	+0.10177	63.22331	+0.10065	64.68681	+0.09958
18	64.90468	-0.09925	66.38370	-0.09820	67.85185	-0.09720
19	68.05943	+0.09690	69.54237	+0.09592	71.01478	+0.09498
20	71.21301	-0.09471	72.69955	-0.09379	74.17587	-0.09291

Таблица 9.6. **Функции Бесселя $J_0(j_{0,s}\,x)$**

x	$J_0(j_{0,1}x)$	$J_0(j_{0,2}x)$	$J_0(j_{0,3}x)$	$J_0(j_{0,4}x)$	$J_0(j_{0,5}x)$
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.02	0.99942	0.99696	0.99253	0.98614	0.97783
0.04	0.99769	0.98785	0.97027	0.94515	0.91280
0.06	0.99480	0.97276	0.93373	0.87872	0.80920
0.08	0.99077	0.95184	0.88372	0.78961	0.67388
0.10	0.98559	0.92526	0.82136	0.68146	0.51568
0.12	0.97929	0.89328	0.74804	0.55871	0.34481
0.14	0.97186	0.85617	0.66537	0.42632	0.17211
0.16	0.96333	0.81429	0.57518	0.28958	+0.00827
0.18	0.95370	0.76800	0.47943	0.15386	−0.13693
0.20	0.94300	0.71773	0.38020	+0.02438	−0.25533
0.22	0.93124	0.66392	0.27960	−0.09404	−0.34090
0.24	0.91844	0.60706	0.17976	−0.19716	−0.39013
0.26	0.90463	0.54766	+0.08277	−0.28155	−0.40225
0.28	0.88982	0.48623	−0.00942	−0.34466	−0.37917
0.30	0.87405	0.42333	−0.09498	−0.38498	−0.32527
0.32	0.85734	0.35950	−0.17226	−0.40207	−0.24698
0.34	0.83972	0.29529	−0.23986	−0.39653	−0.15223
0.36	0.82122	0.23126	−0.29664	−0.36998	−0.04980
0.38	0.80187	0.16795	−0.34171	−0.32493	+0.05137
0.40	0.78171	0.10590	−0.37453	−0.26467	0.14293
0.42	0.76077	+0.04562	−0.39482	−0.19304	0.21767
0.44	0.73908	−0.01240	−0.40264	−0.11431	0.27011
0.46	0.71669	−0.06769	−0.39835	−0.03289	0.29684
0.48	0.69362	−0.11983	−0.38259	+0.04684	0.29671
0.50	0.66993	−0.16840	−0.35628	0.12078	0.27086
0.52	0.64565	−0.21306	−0.32056	0.18527	0.22252
0.54	0.62081	−0.25349	−0.27678	0.23725	0.15667
0.56	0.59547	−0.28941	−0.22648	0.27445	+0.07960
0.58	0.56967	−0.32062	−0.17130	0.29541	−0.00168
0.60	0.54345	−0.34692	−0.11295	0.29959	−0.08007
0.62	0.51685	−0.36821	−0.05320	0.28731	−0.14891
0.64	0.48992	−0.38441	+0.00622	0.25977	−0.20259
0.66	0.46270	−0.39551	0.06363	0.21892	−0.23697
0.68	0.43524	−0.40152	0.11745	0.16735	−0.24965
0.70	0.40758	−0.40255	0.16625	0.10814	−0.24019
0.72	0.37977	−0.39871	0.20878	+0.04470	−0.21003
0.74	0.35186	−0.39019	0.24399	−0.01945	−0.16237
0.76	0.32389	−0.37721	0.27107	−0.08082	−0.10179
0.78	0.29591	−0.36003	0.28945	−0.13618	−0.03389
0.80	0.26796	−0.33896	0.29882	−0.18270	+0.03525
0.82	0.24009	−0.31433	0.29915	−0.21808	0.09960
0.84	0.21234	−0.28652	0.29063	−0.24067	0.15369
0.86	0.18476	−0.25591	0.27374	−0.24957	0.19306
0.88	0.15739	−0.22293	0.24914	−0.24461	0.21464
0.90	0.13027	−0.18800	0.21774	−0.22637	0.21694
0.92	0.10346	−0.15157	0.18059	−0.19613	0.20021
0.94	0.07698	−0.11411	0.13891	−0.15580	0.16630
0.96	0.05089	−0.07605	0.09399	−0.10779	0.11854
0.98	0.02521	−0.03787	0.04722	−0.05486	0.06138
1.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	$\begin{bmatrix}(-4)1\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)8\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)2\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)3\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)5\\6\end{bmatrix}$

Таблица 9.7. Нули некоторых выражений, содержащих функции Бесселя

Нули функции $xJ_1(x)-\lambda J_0(x)$

$\lambda \backslash s$	1	2	3	4	5
0.00	0.0000	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237
0.02	0.1995	3.8369	7.0184	10.1754	13.3252
0.04	0.2814	3.8421	7.0213	10.1774	13.3267
0.06	0.3438	3.8473	7.0241	10.1794	13.3282
0.08	0.3960	3.8525	7.0270	10.1813	13.3297
0.10	0.4417	3.8577	7.0298	10.1833	13.3312
0.20	0.6170	3.8835	7.0440	10.1931	13.3387
0.40	0.8516	3.9344	7.0723	10.2127	13.3537
0.60	1.0184	3.9841	7.1004	10.2322	13.3686
0.80	1.1490	4.0325	7.1282	10.2516	13.3835
1.00	1.2558	4.0795	7.1558	10.2710	13.3984

$\lambda^{-1} \backslash s$	1	2	3	4	5	$\langle\lambda\rangle$
1.00	1.2558	4.0795	7.1558	10.2710	13.3984	1
0.80	1.3659	4.1361	7.1898	10.2950	13.4169	1
0.60	1.5095	4.2249	7.2453	10.3346	13.4476	2
0.40	1.7060	4.3818	7.3508	10.4118	13.5079	3
0.20	1.9898	4.7131	7.6177	10.6223	13.6786	5
0.10	2.1795	5.0332	7.9569	10.9363	13.9580	10
0.08	2.2218	5.1172	8.0624	11.0477	14.0666	13
0.06	2.2656	5.2085	8.1852	11.1864	14.2100	17
0.04	2.3108	5.3068	8.3262	11.3575	14.3996	25
0.02	2.3572	5.4112	8.4840	11.5621	14.6433	50
0.00	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309	∞

Нули функции $J_1(x)-\lambda x J_0(x)$

$\lambda \backslash s$	1	2	3	4	5
0.5	0.0000	5.1356	8.4172	11.6198	14.7960
0.6	1.1231	5.2008	8.4569	11.6486	14.8185
0.7	1.4417	5.2476	8.4853	11.6691	14.8346
0.8	1.6275	5.2826	8.5066	11.6845	14.8467
0.9	1.7517	5.3098	8.5231	11.6964	14.8561
1.0	1.8412	5.3314	8.5363	11.7060	14.8636

$\lambda^{-1} \backslash s$	1	2	3	4	5	$\langle\lambda\rangle$
1.00	1.8412	5.3314	8.5363	11.7060	14.8636	1
0.80	1.9844	5.3702	8.5600	11.7232	14.8771	1
0.60	2.1092	5.4085	8.5836	11.7404	14.8906	2
0.40	2.2192	5.4463	8.6072	11.7575	14.9041	3
0.20	2.3171	5.4835	8.6305	11.7745	14.9175	5
0.10	2.3621	5.5019	8.6421	11.7830	14.9242	10
0.08	2.3709	5.5055	8.6445	11.7847	14.9256	13
0.06	2.3795	5.5092	8.6468	11.7864	14.9269	17
0.04	2.3880	5.5128	8.6491	11.7881	14.9282	25
0.02	2.3965	5.5165	8.6514	11.7898	14.9296	50
0.00	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309	∞

$\langle\lambda\rangle$ — целое число, ближайшее к λ.

Таблица 9.7. Нули некоторых выражений, содержащих функции Бесселя

Нули функции $J_0(x)Y_0(\lambda x) - Y_0(x)J_0(\lambda x)$

$\lambda^{-1}\backslash s$	1	2	3	4	5	$\langle\lambda\rangle$
0.80	12.55847 031	25.12877	37.69646	50.26349	62.83026	1
0.60	4.69706 410	9.41690	14.13189	18.84558	23.55876	2
0.40	2.07322 886	4.17730	6.27537	8.37167	10.46723	3
0.20	0.76319 127	1.55710	2.34641	3.13403	3.92084	5
0.10	0.33139 387	0.68576	1.03774	1.38864	1.73896	10
0.08	0.25732 649	0.53485	0.81055	1.08536	1.35969	13
0.06	0.18699 458	0.39079	0.59334	0.79522	0.99673	17
0.04	0.12038 637	0.25340	0.38570	0.51759	0.64923	25
0.02	0.05768 450	0.12272	0.18751	0.25214	0.31666	50
0.00	0.00000 000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	∞

Нули функции $J_1(x)Y_1(\lambda x) - Y_1(x)J_1(\lambda x)$

$\lambda^{-1}\backslash s$	1	2	3	4	5	$\langle\lambda\rangle$
0.80	12.59004 151	25.14465	37.70706	50.27145	62.83662	1
0.60	4.75805 426	9.44837	14.15300	18.86146	23.57148	2
0.40	2.15647 249	4.22309	6.30658	8.39528	10.48619	3
0.20	0.84714 961	1.61108	2.38532	3.16421	3.94541	5
0.10	0.39409 416	0.73306	1.07483	1.41886	1.76433	10
0.08	0.31223 576	0.57816	0.84552	1.11437	1.38440	13
0.06	0.23235 256	0.42843	0.62483	0.82207	1.02001	17
0.04	0.15400 729	0.28296	0.41157	0.54044	0.66961	25
0.02	0.07672 788	0.14062	0.20409	0.26752	0.33097	50
0.00	0.00000 000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	∞

Нули функции $J_1(x)Y_0(\lambda x) - Y_1(x)J_0(\lambda x)$

$\lambda^{-1}\backslash s$	1	2	3	4	5	$\langle\lambda\rangle$
0.80	6.56973 310	18.94971	31.47626	44.02544	56.58224	1
0.60	2.60328 138	7.16213	11.83783	16.53413	21.23751	2
0.40	1.24266 626	3.22655	5.28885	7.36856	9.45462	3
0.20	0.51472 663	1.24657	2.00959	2.78326	3.56157	5
0.10	0.24481 004	0.57258	0.90956	1.25099	1.59489	10
0.08	0.19461 772	0.45251	0.71635	0.98327	1.25203	13
0.06	0.14523 798	0.33597	0.53005	0.72594	0.92301	17
0.04	0.09647 602	0.22226	0.34957	0.47768	0.60634	25
0.02	0.04813 209	0.11059	0.17353	0.23666	0.29991	50
0.00	0.00000 000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	∞

$\langle\lambda\rangle$ — целое число, ближайшее к λ.

Таблица 9.8. Модифицированные функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$x^{-2}I_2(x)$
0.0	1.00000 00000	0.00000 00000	0.12500 00000
0.1	0.90710 09258	0.04529 84468	0.12510 41992
0.2	0.82693 85516	0.08228 31235	0.12541 71878
0.3	0.75758 06252	0.11237 75606	0.12594 01407
0.4	0.69740 21706	0.13676 32243	0.12667 50222
0.5	0.64503 52704	0.15642 08032	0.12762 45967
0.6	0.59932 72031	0.17216 44195	0.12879 24416
0.7	0.55930 55265	0.18466 99828	0.13018 29658
0.8	0.52414 89419	0.19449 86934	0.13180 14318
0.9	0.49316 29661	0.20211 65309	0.13365 39819
1.0	0.46575 96076	0.20791 04154	0.13574 76698
1.1	0.44144 03775	0.21220 16132	0.13809 04952
1.2	0.41978 20789	0.21525 68594	0.14069 14455
1.3	0.40042 49127	0.21729 75878	0.14356 05405
1.4	0.38306 25154	0.21850 75924	0.14670 88837
1.5	0.36743 36091	0.21903 93874	0.15014 87192
1.6	0.35331 49977	0.21901 94899	0.15389 34944
1.7	0.34051 56880	0.21855 28066	0.15795 79288
1.8	0.32887 19497	0.21772 62788	0.16235 80900
1.9	0.31824 31629	0.21661 19112	0.16711 14772
2.0	0.30850 83226	0.21526 92892	0.17223 71119
2.1	0.29956 30945	0.21374 76721	0.17775 56370
2.2	0.29131 73331	0.21208 77327	0.18368 94251
2.3	0.28369 29857	0.21032 30051	0.19006 26964
2.4	0.27662 23231	0.20848 10887	0.19690 16460
2.5	0.27004 64416	0.20658 46495	0.20423 45837
2.6	0.26391 39959	0.20465 72543	0.21209 20841
2.7	0.25818 01236	0.20269 90640	0.22050 71509
2.8	0.25280 55337	0.20073 74113	0.22951 53938
2.9	0.24775 57305	0.19877 72816	0.23915 52213
3.0	0.24300 03542	0.19682 67133	0.24946 80490
3.1	0.23851 26187	0.19489 21309	0.26049 85252
3.2	0.23426 88317	0.19297 86229	0.27229 47757
3.3	0.23024 79845	0.19109 01728	0.28490 86686
3.4	0.22643 14012	0.18922 98512	0.29839 61010
3.5	0.22280 24380	0.18739 99766	0.31281 73100
3.6	0.21934 62245	0.18560 22484	0.32823 72078
3.7	0.21604 94417	0.18383 78580	0.34472 57467
3.8	0.21290 01308	0.18210 75811	0.36235 83128
3.9	0.20988 75279	0.18041 18543	0.38121 61528
4.0	0.20700 19212	0.17875 08395	0.40138 68359
4.1	0.20423 45273	0.17712 44761	0.42296 47539
4.2	0.20157 73841	0.17553 25261	0.44605 16629
4.3	0.19902 32571	0.17397 46090	0.47075 72701
4.4	0.19656 55589	0.17245 02337	0.49719 98689
4.5	0.19419 82776	0.17095 88223	0.52550 70272
4.6	0.19191 59152	0.16949 97312	0.55581 63319
4.7	0.18971 34329	0.16807 22681	0.58827 61978
4.8	0.18758 62042	0.16667 57058	0.62304 67409
4.9	0.18552 99721	0.16530 92936	0.66030 07270
5.0	0.18354 08126	0.16397 22669	0.70022 45988
	$\begin{bmatrix}(-3)2\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)1\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)3\\7\end{bmatrix}$

$$I_{n+1}(x)=-\frac{2n}{x}I_n(x)+I_{n-1}(x)$$

Таблица 9.8. Модифицированные функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$e^xK_0(x)$	$e^xK_1(x)$	$x^2K_2(x)$
0.0	∞	∞	2.00000 0000
0.1	2.68232 61023	10.89018 2683	1.99503 9646
0.2	2.14075 73233	5.83338 6037	1.98049 7172
0.3	1.85262 73007	4.12515 7762	1.95711 6625
0.4	1.66268 20891	3.25867 3880	1.92580 8202
0.5	1.52410 93857	2.73100 97082	1.88754 5888
0.6	1.41673 76214	2.37392 00376	1.84330 9881
0.7	1.33012 36562	2.11501 13128	1.79405 1681
0.8	1.25820 31216	1.91793 02990	1.74067 2762
0.9	1.19716 33803	1.76238 82197	1.68401 1992
1.0	1.14446 30797	1.63615 34863	1.62483 8899
1.1	1.09833 02828	1.53140 37541	1.56385 0953
1.2	1.05748 45322	1.44289 75522	1.50167 3576
1.3	1.02097 31613	1.36698 72841	1.43886 2011
1.4	0.98806 99961	1.30105 37400	1.37590 4446
1.5	0.95821 00533	1.24316 58736	1.31322 5917
1.6	0.93094 59808	1.19186 75654	1.25119 2681
1.7	0.90591 81386	1.14603 92462	1.19011 6819
1.8	0.88283 35270	1.10480 53726	1.13026 0897
1.9	0.86145 06168	1.06747 09298	1.07184 2567
2.0	0.84156 82151	1.03347 68471	1.01503 9018
2.1	0.82301 71525	1.00236 80527	0.95999 1226
2.2	0.80565 39812	0.97377 01679	0.90680 7952
2.3	0.78935 61312	0.94737 22250	0.85556 9487
2.4	0.77401 81407	0.92291 36650	0.80633 1113
2.5	0.75954 86903	0.90017 44239	0.75912 6289
2.6	0.74586 82430	0.87896 72806	0.71396 9565
2.7	0.73290 71515	0.85913 18867	0.67085 9227
2.8	0.72060 41251	0.84053 00604	0.62977 9698
2.9	0.70890 49774	0.82304 20403	0.59070 3688
3.0	0.69776 15980	0.80656 34800	0.55359 4126
3.1	0.68713 11010	0.79100 30157	0.51840 5885
3.2	0.67697 51139	0.77628 02824	0.48508 7306
3.3	0.66725 91831	0.76232 42864	0.45358 1550
3.4	0.65795 22725	0.74907 20613	0.42382 7789
3.5	0.64902 63377	0.73646 75480	0.39576 2241
3.6	0.64045 59647	0.72446 06608	0.36931 9074
3.7	0.63221 80591	0.71300 65010	0.34443 1194
3.8	0.62429 15812	0.70206 46931	0.32103 0914
3.9	0.61665 73147	0.69159 88206	0.29905 0529
4.0	0.60929 76693	0.68157 50452	0.27842 2808
4.1	0.60219 65064	0.67196 61952	0.25908 1398
4.2	0.59533 89889	0.66274 24110	0.24096 1165
4.3	0.58871 14486	0.65387 98395	0.22399 8474
4.4	0.58230 12704	0.64535 58689	0.20813 1411
4.5	0.57609 67897	0.63714 97988	0.19327 9963
4.6	0.57008 72022	0.62924 26383	0.17944 6150
4.7	0.56426 24840	0.62161 69312	0.16651 4127
4.8	0.55861 33194	0.61425 66003	0.15445 0249
4.9	0.55313 10397	0.60714 68131	0.14320 3117
5.0	0.54780 75643	0.60027 38587	0.13272 3593

$$K_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}K_n(x)+K_{n-1}(x)$$

$$\begin{bmatrix}(-3)1\\ 11\end{bmatrix}$$

Таблица 9.8. **Модифицированные функции Бесселя порядков 0, 1 и 2**

x	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$e^{-x}I_2(x)$
5.0	0.18354 08126	0.16397 22669	0.11795 1906
5.1	0.18161 51021	0.16266 38546	0.11782 5355
5.2	0.17974 94883	0.16138 32850	0.11767 8994
5.3	0.17794 08646	0.16012 97913	0.11751 4528
5.4	0.17618 63475	0.15890 26150	0.11733 3527
5.5	0.17448 32564	0.15770 10090	0.11713 7435
5.6	0.17282 90951	0.15652 42405	0.11692 7581
5.7	0.17122 15362	0.15537 15922	0.11670 5188
5.8	0.16965 84061	0.15424 23641	0.11647 1384
5.9	0.16813 76726	0.15313 58742	0.11622 7207
6.0	0.16665 74327	0.15205 14593	0.11597 3613
6.1	0.16521 59021	0.15098 84754	0.11571 1484
6.2	0.16381 14064	0.14994 62978	0.11544 1633
6.3	0.16244 23718	0.14892 43212	0.11516 4809
6.4	0.16110 73175	0.14792 19595	0.11488 1705
6.5	0.15980 48490	0.14693 86457	0.11459 2958
6.6	0.15853 36513	0.14597 38314	0.11429 9157
6.7	0.15729 24831	0.14502 69866	0.11400 0845
6.8	0.15608 01720	0.14409 75991	0.11369 8525
6.9	0.15489 56090	0.14318 51745	0.11339 2660
7.0	0.15373 77447	0.14228 92347	0.11308 3678
7.1	0.15260 55844	0.14140 93186	0.11277 1974
7.2	0.15149 81855	0.14054 49809	0.11245 7913
7.3	0.15041 46530	0.13969 57915	0.11214 1833
7.4	0.14935 41371	0.13886 13353	0.11182 4046
7.5	0.14831 58301	0.13804 12115	0.11150 4840
7.6	0.14729 89636	0.13723 50333	0.11118 4481
7.7	0.14630 28062	0.13644 24270	0.11086 3215
7.8	0.14532 66611	0.13566 30318	0.11054 1268
7.9	0.14436 98642	0.13489 64995	0.11021 8852
8.0	0.14343 17818	0.13414 24933	0.10989 6158
8.1	0.14251 18095	0.13340 06883	0.10957 3368
8.2	0.14160 93695	0.13267 07705	0.10925 0645
8.3	0.14072 39098	0.13195 24362	0.10892 8142
8.4	0.13985 49027	0.13124 53923	0.10860 6000
8.5	0.13900 18430	0.13054 93551	0.10828 4348
8.6	0.13816 42474	0.12986 40505	0.10796 3305
8.7	0.13734 16526	0.12918 92134	0.10764 2983
8.8	0.13653 36147	0.12852 45873	0.10732 3481
8.9	0.13573 97082	0.12786 99242	0.10700 4894
9.0	0.13495 95247	0.12722 49839	0.10668 7306
9.1	0.13419 26720	0.12658 95342	0.10637 0796
9.2	0.13343 87740	0.12596 33501	0.10605 5437
9.3	0.13269 74691	0.12534 62139	0.10574 1294
9.4	0.13196 84094	0.12473 79145	0.10542 8428
9.5	0.13125 12609	0.12413 82477	0.10511 6893
9.6	0.13054 57016	0.12354 70154	0.10480 6740
9.7	0.12985 14223	0.12296 40258	0.10449 8015
9.8	0.12916 81248	0.12238 90929	0.10419 0759
9.9	0.12849 55220	0.12182 20364	0.10388 5010
10.0	0.12783 33371	0.12126 26814	0.10358 0801
	$\left[\begin{matrix}(-6)8\\6\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-6)3\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-6)2\\5\end{matrix}\right]$

Таблица 9.8. Модифицированные функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$e^xK_0(x)$	$e^xK_1(x)$	$e^xK_2(x)$
5.0	0.54780 75643	0.60027 38587	0.78791 711
5.1	0.54263 53519	0.59362 50463	0.77542 949
5.2	0.53760 73540	0.58718 86062	0.76344 913
5.3	0.53271 69744	0.58095 36085	0.75194 475
5.4	0.52795 80329	0.57490 98871	0.74088 762
5.5	0.52332 47316	0.56904 79741	0.73025 127
5.6	0.51881 16252	0.56335 90393	0.72001 128
5.7	0.51441 35938	0.55783 48348	0.71014 511
5.8	0.51012 58183	0.55246 76495	0.70063 190
5.9	0.50594 37583	0.54725 02639	0.69145 232
6.0	0.50186 31309	0.54217 59104	0.68258 843
6.1	0.49787 98929	0.53723 82386	0.67402 358
6.2	0.49399 02237	0.53243 12833	0.66574 225
6.3	0.49019 05093	0.52774 94344	0.65773 001
6.4	0.48647 73291	0.52318 74101	0.64997 339
6.5	0.48284 74413	0.51874 02336	0.64245 982
6.6	0.47929 77729	0.51440 32108	0.63517 753
6.7	0.47582 54066	0.51017 19097	0.62811 553
6.8	0.47242 75723	0.50604 21421	0.62126 350
6.9	0.46910 16370	0.50200 99471	0.61461 177
7.0	0.46584 50959	0.49807 15749	0.60815 126
7.1	0.46265 55657	0.49422 34737	0.60187 345
7.2	0.45953 07756	0.49046 22755	0.59577 030
7.3	0.45646 85618	0.48678 47842	0.58983 426
7.4	0.45346 68594	0.48318 79648	0.58405 820
7.5	0.45052 36991	0.47966 89336	0.57843 541
7.6	0.44763 71996	0.47622 49486	0.57295 955
7.7	0.44480 55636	0.47285 33995	0.56762 463
7.8	0.44202 70724	0.46955 18010	0.56242 497
7.9	0.43930 00819	0.46631 77847	0.55735 522
8.0	0.43662 30185	0.16314 90928	0.55241 029
8.1	0.43399 43754	0.46004 35709	0.54758 538
8.2	0.43141 27084	0.45699 91615	0.54287 592
8.3	0.42887 66329	0.45401 39001	0.53827 757
8.4	0.42638 48214	0.45108 59089	0.53378 623
8.5	0.42393 59993	0.44821 33915	0.52939 797
8.6	0.42152 89433	0.44539 46295	0.52510 909
8.7	0.41916 24781	0.44262 79775	0.52091 604
8.8	0.41683 54743	0.43991 18594	0.51681 544
8.9	0.41454 68462	0.43724 47648	0.51280 410
9.0	0.41229 55493	0.43462 52454	0.50887 894
9.1	0.41008 05783	0.43205 19116	0.50503 704
9.2	0.40790 09662	0.42952 34301	0.50127 562
9.3	0.40575 57809	0.42703 85204	0.49759 202
9.4	0.40364 41245	0.42459 59520	0.49398 369
9.5	0.40156 51322	0.42219 45430	0.49044 819
9.6	0.39951 79693	0.41983 31565	0.48698 321
9.7	0.39750 18313	0.41751 06989	0.48358 651
9.8	0.39551 59416	0.41522 61179	0.48025 597
9.9	0.39355 95506	0.41297 84003	0.47698 953
10.0	0.39163 19344	0.41076 65704	0.47378 525
	$\left[{(-5)2 \atop 6}\right]$	$\left[{(-5)3 \atop 6}\right]$	$\left[{(-5)6 \atop 5}\right]$

Таблица 9.8. Модифицированные функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$e^{-x}I_2(x)$
10.0	0.12783 33371	0.12126 26814	0.10358 0801
10.2	0.12653 91639	0.12016 64024	0.10297 7124
10.4	0.12528 35822	0.11909 89584	0.10237 9936
10.6	0.12406 47082	0.11805 91273	0.10178 9401
10.8	0.12288 07840	0.11704 57564	0.10120 5644
11.0	0.12173 01682	0.11605 77582	0.10062 8758
11.2	0.12061 13250	0.11509 41055	0.10005 8806
11.4	0.11952 28165	0.11415 38276	0.09949 5829
11.6	0.11846 32942	0.11323 60059	0.09893 9845
11.8	0.11743 14923	0.11233 97710	0.09839 0853
12.0	0.11642 62212	0.11146 42993	0.09784 8838
12.2	0.11544 63616	0.11060 88096	0.09731 3770
12.4	0.11449 08594	0.10977 25611	0.09678 5608
12.6	0.11355 87206	0.10895 48501	0.09626 4300
12.8	0.11264 90074	0.10815 50080	0.09574 9787
13.0	0.11176 08338	0.10737 23993	0.09524 2003
13.2	0.11089 33621	0.10660 64190	0.09474 0874
13.4	0.11004 57995	0.10585 64916	0.09424 6323
13.6	0.10921 73954	0.10512 20685	0.09375 8268
13.8	0.10940 74378	0.10440 26267	0.09327 6622
14.0	0.10761 52517	0.10369 76675	0.09280 1299
14.2	0.10684 01959	0.10300 67148	0.09233 2208
14.4	0.10608 16613	0.10232 93142	0.09186 9257
14.6	0.10533 90688	0.10166 50311	0.09141 2352
14.8	0.10461 18671	0.10101 34506	0.09096 1401
15.0	0.10389 95314	0.10037 41751	0.09051 6308
15.2	0.10320 15618	0.09974 68245	0.09007 6980
15.4	0.10251 74813	0.09913 10348	0.08964 3321
15.6	0.10184 68351	0.09852 64572	0.08921 5238
15.8	0.10118 91887	0.09793 27574	0.08879 2637
16.0	0.10054 41273	0.09734 96147	0.08837 5426
16.2	0.09991 12544	0.09677 67216	0.08796 3511
16.4	0.09929 01906	0.09621 37828	0.08755 6802
16.6	0.09868 05729	0.09566 05145	0.08715 5210
16.8	0.09808 20539	0.09511 66444	0.08675 8644
17.0	0.09749 43005	0.09458 19107	0.08636 7017
17.2	0.09691 69938	0.09405 60614	0.08598 0242
17.4	0.09634 98277	0.09353 88542	0.08559 8235
17.6	0.09579 25085	0.09303 00560	0.08522 0911
17.8	0.09524 47546	0.09252 94423	0.08484 8188
18.0	0.09470 62952	0.09203 67968	0.08447 9984
18.2	0.09417 68703	0.09155 19113	0.08411 6221
18.4	0.09365 62299	0.09107 45848	0.08375 6819
18.6	0.09314 41336	0.09060 46237	0.08340 1701
18.8	0.09264 03503	0.09014 18411	0.08305 0793
19.0	0.09214 46572	0.08968 60569	0.08270 4020
19.2	0.09165 68400	0.08923 70968	0.08236 1309
19.4	0.09117 66923	0.08879 47929	0.08202 2590
19.6	0.09070 40151	0.08835 89829	0.08168 7792
19.8	0.09023 86167	0.08792 95099	0.08135 6848
20.0	0.08978 03119	0.08750 62222	0.08102 9690
	$\begin{bmatrix}(-6)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)4\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-7)9\\5\end{bmatrix}$

Таблица 9.8. Модифицированные функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$e^xK_0(x)$	$e^xK_1(x)$	$e^xK_2(x)$
10.0	0.39163 19344	0.41076 65704	0.47378 525
10.2	0.38786 02539	0.40644 68479	0.46755 571
10.4	0.38419 55846	0.40225 98277	0.46155 324
10.6	0.38063 29549	0.39819 88825	0.45576 482
10.8	0.37716 77125	0.39425 78391	0.45017 842
11.0	0.37379 54971	0.39043 09362	0.44478 294
11.2	0.37051 22156	0.38671 27920	0.43956 807
11.4	0.36731 40243	0.38309 83725	0.43452 427
11.6	0.36419 73076	0.37958 29618	0.42964 265
11.8	0.36115 86616	0.37616 21391	0.42491 496
12.0	0.35819 48784	0.37283 17534	0.42033 350
12.2	0.35530 29318	0.36958 79032	0.41589 111
12.4	0.35247 99643	0.36642 69191	0.41158 108
12.6	0.34972 32746	0.36334 53438	0.40739 714
12.8	0.34703 03081	0.36033 99192	0.40333 342
13.0	0.34439 86455	0.35740 75702	0.39938 443
13.2	0.34182 59943	0.35454 53922	0.39554 499
13.4	0.33931 01806	0.35175 06397	0.39181 028
13.6	0.33684 91405	0.34902 07143	0.38817 572
13.8	0.33444 09142	0.34635 31558	0.38463 702
14.0	0.33208 36383	0.34374 56322	0.38119 016
14.2	0.32977 55402	0.34119 59314	0.37783 131
14.4	0.32751 49332	0.33870 19539	0.37455 687
14.6	0.32530 02091	0.33626 17039	0.37136 346
14.8	0.32312 98364	0.33387 32858	0.36824 785
15.0	0.32100 23534	0.33153 48949	0.36520 701
15.2	0.31891 63655	0.32924 48132	0.36223 805
15.4	0.31687 05405	0.32700 14043	0.35933 826
15.6	0.31486 36051	0.32480 31080	0.35650 503
15.8	0.31289 43424	0.32264 84361	0.35373 592
16.0	0.31096 15880	0.32053 59682	0.35102 858
16.2	0.30906 42269	0.31846 43471	0.34838 081
16.4	0.30720 11919	0.31643 22766	0.34579 049
16.6	0.30537 14592	0.31443 85164	0.34325 562
16.8	0.30357 40487	0.31248 18807	0.34077 427
17.0	0.30180 80193	0.31056 12340	0.33834 464
17.2	0.30007 24678	0.30867 54888	0.33596 497
17.4	0.29836 65276	0.30682 36027	0.33363 361
17.6	0.29668 93657	0.30500 45765	0.33134 898
17.8	0.29504 01817	0.30321 74518	0.32910 956
18.0	0.29341 82062	0.30146 13089	0.32691 391
18.2	0.29182 26987	0.29973 52642	0.32476 064
18.4	0.29025 29472	0.29803 84697	0.32264 843
18.6	0.28870 82654	0.29637 01096	0.32057 602
18.8	0.28718 79933	0.29472 94003	0.31854 218
19.0	0.28569 14944	0.29311 55877	0.31654 577
19.2	0.28421 81554	0.29152 79458	0.31458 565
19.4	0.28276 73848	0.28996 57766	0.31266 076
19.6	0.28133 86117	0.28842 84068	0.31077 008
19.8	0.27993 12862	0.28691 51886	0.30891 262
20.0	0.27854 48766	0.28542 54970	0.30708 743
	$\begin{bmatrix}(-5)1\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)2\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)3\\5\end{bmatrix}$

Вспомогательные таблицы для больших значений аргумента

x^{-1}	$x^{\frac{1}{2}}e^{-x}I_0(x)$	$x^{\frac{1}{2}}e^{-x}I_1(x)$	$x^{\frac{1}{2}}e^{-x}I_2(x)$	$\pi^{-1}x^{\frac{1}{2}}e^{x}K_0(x)$	$\pi^{-1}x^{\frac{1}{2}}e^{x}K_1(x)$	$\pi^{-1}x^{\frac{1}{2}}e^{x}K_2(x)$	$\langle x\rangle$
0.050	0.40150 9761	0.39133 9722	0.36237 579	0.39651 5620	0.40631 0355	0.43714 666	20
0.048	0.40140 4058	0.39164 8743	0.36380 578	0.39661 0241	0.40601 9771	0.43558 814	21
0.046	0.40129 8619	0.39195 7336	0.36523 854	0.39670 5057	0.40572 8854	0.43403 211	22
0.044	0.40119 3443	0.39226 5502	0.36667 408	0.39680 0069	0.40543 7604	0.43247 858	23
0.042	0.40108 8526	0.39257 3245	0.36811 237	0.39689 5278	0.40514 6017	0.43092 754	24
0.040	0.40098 3868	0.39288 0567	0.36955 342	0.39699 0686	0.40485 4094	0.42937 901	25
0.038	0.40087 9466	0.39318 7470	0.37099 722	0.39708 6293	0.40456 1832	0.42783 299	26
0.036	0.40077 5319	0.39349 3958	0.37244 375	0.39718 2101	0.40426 9230	0.42628 949	28
0.034	0.40067 1424	0.39380 0032	0.37389 302	0.39727 8110	0.40397 6286	0.42474 850	29
0.032	0.40056 7781	0.39410 5695	0.37534 502	0.39737 4322	0.40368 2998	0.42321 003	31
0.030	0.40046 4387	0.39441 0950	0.37679 973	0.39747 0738	0.40338 9365	0.42167 410	33
0.028	0.40036 1241	0.39471 5798	0.37825 716	0.39756 7359	0.40309 5386	0.42014 070	36
0.026	0.40025 8340	0.39502 0243	0.37971 729	0.39766 4186	0.40280 1058	0.41860 984	38
0.024	0.40015 5684	0.39532 4286	0.38118 012	0.39776 1221	0.40250 6380	0.41708 153	42
0.022	0.40005 3270	0.39562 7929	0.38264 564	0.39785 8465	0.40221 1349	0.41555 576	45
0.020	0.39995 1098	0.39593 1176	0.38411 385	0.39795 5918	0.40191 5965	0.41403 256	50
0.018	0.39984 9164	0.39623 4028	0.38558 474	0.39805 3583	0.40162 0226	0.41251 191	56
0.016	0.39974 7469	0.39653 6487	0.38705 830	0.39815 1460	0.40132 4130	0.41099 383	63
0.014	0.39964 6009	0.39683 8556	0.38853 453	0.39824 9551	0.40102 7674	0.40947 833	71
0.012	0.39954 4785	0.39714 0236	0.39001 342	0.39834 7857	0.40073 0858	0.40796 540	83
0.010	0.39944 3793	0.39744 1530	0.39149 496	0.39844 6379	0.40043 3679	0.40645 505	100
0.008	0.39934 3033	0.39774 2440	0.39297 915	0.39854 5119	0.40013 6136	0.40494 730	125
0.006	0.39924 2503	0.39804 2968	0.39446 599	0.39864 4077	0.39983 8226	0.40344 214	167
0.004	0.39914 2202	0.39834 3116	0.39595 546	0.39874 3256	0.39953 9949	0.40193 958	250
0.002	0.39904 2128	0.39864 2886	0.39744 756	0.39884 2657	0.39924 1300	0.40043 962	500
0.000	0.39894 2280	0.39894 2280	0.39894 228	0.39894 2280	0.39894 2280	0.39894 228	∞
	$\left[\begin{smallmatrix}(-8)3\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-8)5\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-7)3\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-8)3\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-8)5\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-7)3\\3\end{smallmatrix}\right]$	

Заметим, что при интерполяции вблизи $x^{-1}=0$, если

$$f_n(x^{-1}) = x^{1/2}e^{-x}I_n(x),\ \text{то}\ f_n(-x^{-1}) = \pi^{-1}x^{1/2}e^{x}K_n(x);$$

$\langle x\rangle$ — целое число, ближайшее к x.

Вспомогательные таблицы для малых значений аргумента

x	$K_0(x)+I_0(x)\ln x$	$x[K_1(x)-I_1(x)\ln x]$	x	$K_0(x)+I_0(x)\ln x$	$x[K_1(x)-I_1(x)\ln x]$
0.0	0.11593 152	1.00000 000	1.0	0.42102 444	0.60190 723
0.1	0.11872 387	0.99691 180	1.1	0.49199 896	0.49390 093
0.2	0.12713 128	0.98754 448	1.2	0.57261 444	0.36514 944
0.3	0.14174 511	0.97158 819	1.3	0.66373 364	0.21236 381
0.4	0.16121 862	0.94852 090	1.4	0.76632 938	+0.03176 677
0.5	0.18726 857	0.91759 992	1.5	0.88149 436	−0.18096 553
0.6	0.21967 734	0.87784 980	1.6	1.01045 200	−0.43076 964
0.7	0.25879 579	0.82804 659	1.7	1.15456 879	−0.72326 976
0.8	0.30504 682	0.76669 810	1.8	1.31536 786	−1.06486 242
0.9	0.35892 957	0.69201 997	1.9	1.49454 429	−1.46281 214
1.0	0.42102 444	0.60190 723	2.0	1.69398 200	−1.92535 914
	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)1\\6\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)2\\7\end{smallmatrix}\right]$		$\left[\begin{smallmatrix}(-3)3\\7\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)8\\7\end{smallmatrix}\right]$

Таблица 9.9. Модифицированные функции Бесселя порядков 3—9

x	$e^{-x}I_3(x)$	$e^{-x}I_4(x)$	$e^{-x}I_5(x)$	$e^{-x}I_6(x)$	$e^{-x}I_7(x)$	$e^{-x}I_8(x)$	$e^{-x}I_9(x)$
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	(-4)1.3680	(-6)3.4182	(8)6.8341	(-9)1.1388	(-11)1.6265	(-13)2.0328	(-15)2.2585
0.4	(-4)9.0273	(-5)4.5047	(-6)1.7995	(-8)5.9925	(- 9)1.7109	(-11)4.2750	(-13)9.4957
0.6	(-3)2.5257	(-4)1.8858	(-5)1.1281	(-7)5.6286	(- 8)2.4084	(-10)9.0201	(-11)3.0037
0.8	(-3)4.9877	(4)4.9483	(-5)3.9377	(-6)2.6152	(- 7)1.4902	(- 9)7.4343	(-10)3.2983
1.0	(-3)8.1553	(-3)1.0069	(-5)9.9866	(-6)8.2731	(- 7)5.8832	(- 8)3.6643	(- 9)2.0301
1.2	(-2)1.1855	(-3)1.7471	(-4)2.0719	(-5)2.0544	(- 6)1.7497	(- 7)1.3058	(- 9)8.6707
1.4	(-2)1.5911	(-3)2.7189	(-4)3.7459	(-5)4.3203	(- 6)4.2831	(- 7)3.7225	(- 8)2.8797
1.6	(-2)2.0168	(-3)3.9110	(-4)6.1288	(-5)8.0504	(- 6)9.0974	(- 7)9.0178	(- 8)7.9596
1.8	(-2)2.4495	(-3)5.3023	(-4)9.2978	(-4)1.3686	(- 5)1.7349	(- 6)1.9302	(- 7)1.9131
2.0	(-2)2.8791	(-3)6.8654	(-3)1.3298	(-4)2.1656	(- 5)3.0402	(- 6)3.7487	(- 7)4.1199
2.2	(-2)3.2978	(-3)8.5701	(-3)1.8142	(-4)3.2349	(- 5)4.9776	(- 6)6.7325	(- 7)8.1206
2.4	(-2)3.7001	(-2)1.0386	(-3)2.3819	(-4)4.6097	(- 5)7.7080	(- 5)1.1339	(- 6)1.4883
2.6	(-2)4.0823	(-2)1.2283	(-3)3.0293	(-4)6.3166	(- 4)1.1395	(- 5)1.8099	(- 6)2.5669
2.8	(-2)4.4421	(-2)1.4234	(-3)3.7511	(-4)8.3747	(- 4)1.6197	(- 5)2.7609	(- 6)4.2048
3.0	(-2)4.7783	(-2)1.6216	(-3)4.5409	(-3)1.0796	(- 4)2.2265	(- 5)4.0512	(- 6)6.5905
3.2	(-2)5.0907	(-2)1.8206	(-3)5.3913	(-3)1.3584	(- 4)2.9735	(- 5)5.7482	(- 6)9.9425
3.4	(-2)5.3795	(-2)2.0188	(-3)6.2947	(-3)1.6738	(- 4)3.8725	(- 5)7.9208	(- 5)1.4507
3.6	(-2)5.6454	(-2)2.2145	(-3)7.2431	(-3)2.0249	(- 4)4.9334	(- 4)1.0638	(- 5)2.0556
3.8	(-2)5.8893	(-2)2.4065	(-3)8.2288	(-3)2.4106	(- 4)6.1640	(- 4)1.3965	(- 5)2.8380
4.0	(-2)6.1124	(-2)2.5940	(-3)9.2443	(-3)2.8291	(- 4)7.5698	(- 4)1.7968	(- 5)3.8284
4.2	(-2)6.3161	(-2)2.7761	(-2)1.0283	(-3)3.2785	(- 4)9.1545	(- 4)2.2703	(- 5)5.0587
4.4	(-2)6.5015	(-2)2.9523	(-2)1.1337	(-3)3.7566	(- 3)1.0919	(- 4)2.8224	(- 5)6.5607
4.6	(-2)6.6699	(-2)3.1221	(-2)1.2402	(-3)4.2609	(- 3)1.2864	(- 4)3.4578	(- 5)8.3667
4.8	(-2)6.8227	(-2)3.2854	(-2)1.3471	(-3)4.7890	(- 3)1.4986	(- 4)4.1806	(- 4)1.0508
5.0	(-2)6.9611	(-2)3.4419	(-2)1.4540	(-3)5.3384	(- 3)1.7282	(- 4)4.9939	(- 4)1.3015
5.2	(-2)7.0861	(-2)3.5916	(-2)1.5605	(-3)5.9065	(- 3)1.9747	(- 4)5.9005	(- 4)1.5916
5.4	(-2)7.1989	(-2)3.7346	(-2)1.6662	(-3)6.4909	(- 3)2.2374	(- 4)6.9020	(- 4)1.9240
5.6	(-2)7.3005	(-2)3.8708	(-2)1.7707	(-3)7.0892	(- 3)2.5157	(- 4)7.9996	(- 4)2.3010
5.8	(-2)7.3917	(-2)4.0005	(-2)1.8738	(-3)7.6990	(- 3)2.8087	(- 4)9.1937	(- 4)2.7249
6.0	(-2)7.4736	(-2)4.1238	(-2)1.9752	(-3)8.3181	(- 3)3.1156	(- 3)1.0484	(- 4)3.1978
6.2	(-2)7.5468	(-2)4.2408	(-2)2.0747	(-3)8.9445	(- 3)3.4355	(- 3)1.1870	(- 4)3.7214
6.4	(-2)7.6121	(-2)4.3518	(-2)2.1723	(-3)9.5763	(- 3)3.7674	(- 3)1.3351	(- 4)4.2971
6.6	(-2)7.6702	(-2)4.4570	(-2)2.2677	(-2)1.0212	(- 3)4.1105	(- 3)1.4924	(- 4)4.9261
6.8	(-2)7.7216	(-2)4.5567	(-2)2.3608	(-2)1.0849	(- 3)4.4637	(- 3)1.6587	(- 4)5.6094
7.0	(-2)7.7670	(-2)4.6509	(-2)2.4516	(-2)1.1486	(- 3)4.8261	(- 3)1.8337	(- 4)6.3475
7.2	(-2)7.8068	(-2)4.7401	(-2)2.5401	(-2)1.2122	(- 3)5.1969	(- 3)2.0172	(- 4)7.1409
7.4	(-2)7.8416	(-2)4.8244	(-2)2.6261	(-2)1.2756	(- 3)5.5750	(- 3)2.2089	(- 4)7.9897
7.6	(-2)7.8717	(-2)4.9040	(-2)2.7096	(-2)1.3387	(- 3)5.9596	(- 3)2.4084	(- 4)8.8937
7.8	(-2)7.8975	(-2)4.9791	(-2)2.7907	(-2)1.4012	(- 3)6.3499	(- 3)2.6152	(- 4)9.8527
8.0	(-2)7.9194	(-2)5.0500	(-2)2.8694	(-2)1.4633	(- 3)6.7449	(- 3)2.8292	(- 3)1.0866
8.2	(-2)7.9378	(-2)5.1169	(-2)2.9456	(-2)1.5247	(- 3)7.1440	(- 3)3.0497	(- 3)1.1933
8.4	(-2)7.9528	(-2)5.1800	(-2)3.0195	(-2)1.5854	(- 3)7.5464	(- 3)3.2766	(- 3)1.3053
8.6	(-2)7.9649	(-2)5.2395	(-2)3.0909	(-2)1.6453	(- 3)7.9513	(- 3)3.5093	(- 3)1.4224
8.8	(-2)7.9741	(-2)5.2954	(-2)3.1601	(-2)1.7045	(- 3)8.3582	(- 3)3.7475	(- 3)1.5446
9.0	(-2)7.9808	(-2)5.3482	(-2)3.2269	(-2)1.7627	(- 3)8.7663	(- 3)3.9907	(- 3)1.6716
9.2	(-2)7.9852	(-2)5.3978	(-2)3.2915	(-2)1.8201	(- 3)9.1750	(- 3)4.2386	(- 3)1.8035
9.4	(-2)7.9875	(-2)5.4445	(-2)3.3539	(-2)1.8765	(- 3)9.5839	(- 3)4.4908	(- 3)1.9399
9.6	(-2)7.9878	(-2)5.4883	(-2)3.4141	(-2)1.9319	(- 3)9.9924	(- 3)4.7470	(- 3)2.0808
9.8	(-2)7.9862	(-2)5.5296	(-2)3.4723	(-2)1.9864	(- 2)1.0400	(- 3)5.0066	(- 3)2.2260
10.0	(-2)7.9830	(-2)5.5683	(-2)3.5284	(-2)2.0398	(- 2)1.0806	(- 3)5.2694	(- 3)2.3753
10.5	(-2)7.9687	(-2)5.6549	(-2)3.6602	(-2)2.1690	(- 2)1.1814	(- 3)5.9380	(- 3)2.7653
11.0	(-2)7.9465	(-2)5.7284	(-2)3.7804	(-2)2.2916	(- 2)1.2805	(- 3)6.6192	(- 3)3.1769
11.5	(-2)7.9182	(-2)5.7985	(-2)3.8900	(-2)2.4078	(- 2)1.3775	(- 3)7.3082	(- 3)3.6073
12.0	(-2)7.8848	(-2)5.8425	(-2)3.9898	(-2)2.5176	(- 2)1.4722	(- 3)8.0010	(- 3)4.0537
12.5	(-2)7.8474	(-2)5.8857	(-2)4.0805	(-2)2.6212	(- 2)1.5642	(- 3)8.6939	(- 3)4.5134
13.0	(-2)7.8067	(-2)5.9211	(-2)4.1630	(-2)2.7188	(- 2)1.6533	(- 3)9.3836	(- 3)4.9837
13.5	(-2)7.7635	(-2)5.9497	(-2)4.2378	(-2)2.8106	(- 2)1.7394	(- 2)1.0068	(- 3)5.4622
14.0	(-2)7.7183	(-2)5.9723	(-2)4.3056	(-2)2.8969	(- 2)1.8225	(- 2)1.0744	(- 3)5.9469
14.5	(-2)7.6716	(-2)5.9896	(-2)4.3670	(-2)2.9779	(- 2)1.9025	(- 2)1.1410	(- 3)6.4354
15.0	(-2)7.6236	(-2)6.0022	(-2)4.4225	(-2)3.0538	(- 2)1.9794	(- 2)1.2064	(- 3)6.9260
15.5	(-2)7.5749	(-2)6.0106	(-2)4.4726	(-2)3.1251	(- 2)2.0532	(- 2)1.2705	(- 3)7.4171
16.0	(-2)7.5256	(-2)6.0155	(-2)4.5179	(-2)3.1918	(- 2)2.1240	(- 2)1.3333	(- 3)7.9071
16.5	(-2)7.4759	(-2)6.0170	(-2)4.5585	(-2)3.2543	(- 2)2.1918	(- 2)1.3946	(- 3)8.3947
17.0	(-2)7.4260	(-2)6.0158	(-2)4.5951	(-2)3.3128	(- 2)2.2567	(- 2)1.4543	(- 3)8.8788
17.5	(-2)7.3761	(-2)6.0119	(-2)4.6278	(-2)3.3675	(- 2)2.3187	(- 2)1.5125	(- 3)9.3584
18.0	(-2)7.3263	(-2)6.0059	(-2)4.6571	(-2)3.4186	(- 2)2.3780	(- 2)1.5691	(- 3)9.8324
18.5	(-2)7.2768	(-2)5.9978	(-2)4.6831	(-2)3.4664	(- 2)2.4346	(- 2)1.6240	(- 2)1.0300
19.0	(-2)7.2275	(-2)5.9880	(-2)4.7062	(-2)3.5111	(- 2)2.4886	(- 2)1.6774	(- 2)1.0761
19.5	(-2)7.1785	(-2)5.9767	(-2)4.7266	(-2)3.5528	(- 2)2.5402	(- 2)1.7291	(- 2)1.1215
20.0	(-2)7.1300	(-2)5.9640	(-2)4.7444	(-2)3.5917	(- 2)2.5894	(- 2)1.7792	(- 2)1.1661

Таблица 9.9. Модифицированные функции Бесселя порядков 3—9

x	$e^xK_3(x)$	$e^xK_4(x)$	$e^xK_5(x)$	$e^xK_6(x)$	$e^xK_7(x)$	$e^xK_8(x)$	$e^xK_9(x)$
0.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0.2	(3)1.2153	(4)3.6520	(6)1.4620	(7)7.3138	(9)4.3897	(11)3.0735	(13)2.4593
0.4	(2)1.8282	(3)2.7602	(4)5.5388	(6)1.3875	(7)4.1679	(9)1.4602	(10)5.8448
0.6	(1)6.4573	(2)6.5506	(3)8.7987	(5)1.4730	(6)2.9548	(7)6.9092	(9)1.8454
0.8	(1)3.2183	(2)2.4743	(3)2.5064	(4)3.1578	(5)4.7618	(6)8.3647	(8)1.6777
1.0	(1)1.9303	(2)1.2024	(2)9.8119	(3)9.9322	(5)1.2017	(6)1.6923	(7)2.7197
1.2	(1)1.2984	(1)6.8382	(2)4.6886	(3)3.9756	(4)4.0225	(5)4.7326	(6)6.3504
1.4	(0)9.4345	(1)4.3280	(2)2.5675	(3)1.8772	(4)1.6347	(5)1.6535	(6)1.9061
1.6	(0)7.2438	(1)2.9585	(2)1.5517	(2)9.9939	(3)7.6506	(4)6.7942	(5)6.8707
1.8	(0)5.7946	(1)2.1426	(2)1.0102	(2)5.8265	(3)3.9853	(4)3.1580	(5)2.8469
2.0	(0)4.7836	(1)1.6226	(1)6.9687	(2)3.6466	(3)2.2576	(4)1.6168	(5)1.3160
2.2	(0)4.0481	(1)1.2731	(1)5.0344	(2)2.4157	(3)1.3680	(3)8.9469	(4)6.6436
2.4	(0)3.4948	(1)1.0280	(1)3.7762	(2)1.6762	(2)8.7586	(3)5.2768	(4)3.6055
2.6	(0)3.0667	(0)8.4989	(1)2.9217	(2)1.2087	(2)5.8709	(3)3.2821	(4)2.0785
2.8	(0)2.7276	(0)7.1659	(1)2.3202	(1)9.0029	(2)4.0904	(3)2.1352	(4)1.2610
3.0	(0)2.4539	(0)6.1432	(1)1.8836	(1)6.8929	(2)2.9455	(3)1.4435	(3)7.9932
3.2	(0)2.2290	(0)5.3415	(1)1.5583	(1)5.4037	(2)2.1822	(3)1.0088	(3)5.2620
3.4	(0)2.0415	(0)4.7013	(1)1.3103	(1)4.3240	(2)1.6572	(2)7.2560	(3)3.5803
3.6	(0)1.8833	(0)4.1817	(1)1.1176	(1)3.5226	(2)1.2860	(2)5.3532	(3)2.5078
3.8	(0)1.7482	(0)3.7541	(0)9.6515	(1)2.9153	(2)1.0171	(2)4.0388	(3)1.8023
4.0	(0)1.6317	(0)3.3976	(0)8.4268	(1)2.4465	(1)8.1821	(2)3.1084	(3)1.3252
4.2	(0)1.5303	(0)3.0971	(0)7.4295	(1)2.0786	(1)6.6819	(2)2.4352	(2)9.9450
4.4	(0)1.4414	(0)2.8412	(0)6.6072	(1)1.7858	(1)5.5310	(2)1.9384	(2)7.6019
4.6	(0)1.3[illegible]29	(0)2.6213	(0)5.9217	(1)1.5495	(1)4.6342	(2)1.5654	(2)5.9082
4.8	(0)1.2931	(0)2.4309	(0)5.3445	(1)1.3565	(1)3.9258	(2)1.2807	(2)4.6615
5.0	(0)1.2306	(0)2.2646	(0)4.8540	(1)1.1973	(1)3.3589	(2)1.0682	(2)3.7285
5.2	(0)1.1745	(0)2.1186	(0)4.4338	(1)1.0645	(1)2.9000	(1)8.8721	(2)3.0199
5.4	(0)1.1237	(0)1.9895	(0)4.0711	(0)9.5285	(1)2.5245	(1)7.4980	(2)2.4741
5.6	(0)1.0777	(0)1.8746	(0)3.7557	(0)8.5813	(1)2.2144	(1)6.3942	(2)2.0483
5.8	(0)1.0357	(0)1.7720	(0)3.4798	(0)7.7717	(1)1.9559	(1)5.4983	(2)1.7124
6.0	(-1)9.9723	(0)1.6798	(0)3.2370	(0)7.0748	(1)1.7387	(1)4.7644	(2)1.4444
6.2	(-1)9.6194	(0)1.5967	(0)3.0221	(0)6.4711	(1)1.5547	(1)4.1577	(2)1.2284
6.4	(-1)9.2942	(0)1.5213	(0)2.8311	(0)5.9448	(1)1.3978	(1)3.6521	(2)1.0528
6.6	(-1)8.9936	(0)1.4528	(0)2.6603	(0)5.4835	(1)1.2630	(1)3.2275	(1)9.0873
6.8	(-1)8.7149	(0)1.3902	(0)2.5071	(0)5.0771	(1)1.1467	(1)2.8685	(1)7.8960
7.0	(-1)8.4559	(0)1.3329	(0)2.3689	(0)4.7171	(1)1.0455	(1)2.5628	(1)6.9034
7.2	(-1)8.2145	(0)1.2803	(0)2.2440	(0)4.3970	(0)9.5723	(1)2.3010	(1)6.0705
7.4	(-1)7.9890	(0)1.2318	(0)2.1306	(0)4.1110	(0)8.7970	(1)2.0754	(1)5.3671
7.6	(-1)7.7778	(0)1.1870	(0)2.0273	(0)3.8544	(0)8.1132	(1)1.8800	(1)4.7692
7.8	(-1)7.5797	(0)1.1455	(0)1.9328	(0)3.6235	(0)7.5074	(1)1.7098	(1)4.2581
8.0	(-1)7.3935	(0)1.1069	(0)1.8463	(0)3.4148	(0)6.9684	(1)1.5610	(1)3.8188
8.2	(-1)7.2182	(0)1.0710	(0)1.7667	(0)3.2256	(0)6.4871	(1)1.4301	(1)3.4392
8.4	(-1)7.0527	(0)1.0376	(0)1.6934	(0)3.0535	(0)6.0556	(1)1.3146	(1)3.1096
8.6	(-1)6.8963	(0)1.0062	(0)1.6257	(0)2.8966	(0)5.6674	(1)1.2123	(1)2.8221
8.8	(-1)6.7483	(-1)9.7693	(0)1.5629	(0)2.7530	(0)5.3170	(1)1.1212	(1)2.5702
9.0	(-1)6.6079	(-1)9.4941	(0)1.5047	(0)2.6213	(0)4.9998	(1)1.0399	(1)2.3486
9.2	(-1)6.4746	(-1)9.2354	(0)1.4505	(0)2.5002	(0)4.7117	(0)9.6702	(1)2.1529
9.4	(-1)6.3480	(-1)8.9918	(0)1.4001	(0)2.3886	(0)4.4493	(0)9.0153	(1)1.9794
9.6	(-1)6.2274	(-1)8.7620	(0)1.3529	(0)2.2855	(0)4.2098	(0)8.4247	(1)1.8251
9.8	(-1)6.1125	(-1)8.5449	(0)1.3088	(0)2.1900	(0)3.9904	(0)7.8906	(1)1.6873
10.0	(-1)6.0028	(-1)8.3395	(0)1.2674	(0)2.1014	(0)3.7891	(0)7.4062	(1)1.5639
10.5	(-1)5.7493	(-1)7.8717	(0)1.1747	(0)1.9059	(0)3.3529	(0)6.3764	(1)1.3069
11.0	(-1)5.5217	(-1)7.4597	(0)1.0947	(0)1.7411	(0)2.9941	(0)5.5518	(1)1.1070
11.5	(-1)5.3161	(-1)7.0942	(0)1.0251	(0)1.6008	(0)2.6956	(0)4.8824	(0)9.4885
12.0	(-1)5.1294	(-1)6.7680	(-1)9.6415	(0)1.4803	(0)2.4444	(0)4.3321	(0)8.2205
12.5	(-1)4.9591	(-1)6.4751	(-1)9.1031	(0)1.3758	(0)2.2310	(0)3.8745	(0)7.1904
13.0	(-1)4.8030	(-1)6.2106	(-1)8.6249	(0)1.2845	(0)2.0482	(0)3.4902	(0)6.3439
13.5	(-1)4.6593	(-1)5.9706	(-1)8.1974	(0)1.2043	(0)1.8902	(0)3.1645	(0)5.6407
14.0	(-1)4.5266	(-1)5.7519	(-1)7.8133	(0)1.1333	(0)1.7527	(0)2.8860	(0)5.0510
14.5	(-1)4.4036	(-1)5.5517	(-1)7.4666	(0)1.0701	(0)1.6323	(0)2.6461	(0)4.5521
15.0	(-1)4.2892	(-1)5.3678	(-1)7.1520	(0)1.0136	(0)1.5261	(0)2.4379	(0)4.1265
15.5	(-1)4.1826	(-1)5.1982	(-1)6.8656	(-1)9.6276	(0)1.4319	(0)2.2561	(0)3.7608
16.0	(-1)4.0829	(-1)5.0414	(-1)6.6036	(-1)9.1686	(0)1.3480	(0)2.0964	(0)3.4444
16.5	(-1)3.9895	(-1)4.8959	(-1)6.3633	(-1)8.7524	(0)1.2729	(0)1.9552	(0)3.1689
17.0	(-1)3.9017	(-1)4.7605	(-1)6.1420	(-1)8.3734	(0)1.2053	(0)1.8299	(0)2.9275
17.5	(-1)3.8191	(-1)4.6343	(-1)5.9376	(-1)8.0272	(0)1.1442	(0)1.7181	(0)2.7150
18.0	(-1)3.7411	(-1)4.5162	(-1)5.7483	(-1)7.7097	(0)1.0888	(0)1.6178	(0)2.5269
18.5	(-1)3.6674	(-1)4.4055	(-1)5.5725	(-1)7.4176	(0)1.0384	(0)1.5276	(0)2.3595
19.0	(-1)3.5976	(-1)4.3015	(-1)5.4087	(-1)7.1482	(-1)9.9234	(0)1.4460	(0)2.2100
19.5	(-1)3.5313	(-1)4.2037	(-1)5.2559	(-1)6.8990	(-1)9.5015	(0)1.3721	(0)2.0759
20.0	(-1)3.4684	(-1)4.1114	(-1)5.1130	(-1)6.6679	(-1)9.1137	(0)1.3048	(0)1.9552

Таблица 9.10. Модифицированные функции Бесселя порядков 10, 11, 20 и 21

x	$10^{9}x^{-10}I_{10}(x)$	$10^{11}x^{-11}I_{11}(x)$	$10^{-8}x^{10}K_{10}(x)$	$10^{24}x^{-20}I_{20}(x)$	$10^{26}x^{-21}I_{21}(x)$	$10^{-22}x^{20}K_{20}(x)$
0.0	0.26911 445	1.22324 748	1.85794 560	0.391990	0.933311	6.37771
0.2	0.26935 920	1.22426 724	1.85588 251	0.392177	0.933736	6.37435
0.4	0.27009 468	1.22733 125	1.84970 867	0.392738	0.935008	6.36429
0.6	0.27132 457	1.23245 366	1.83947 021	0.393674	0.937136	6.34757
0.8	0.27305 504	1.23965 820	1.82524 326	0.394988	0.940123	6.32424
1.0	0.27529 480	1.24897 831	1.80713 290	0.396684	0.943974	6.29437
1.2	0.27805 517	1.26045 740	1.78527 169	0.398766	0.948703	6.25807
1.4	0.28135 012	1.27414 918	1.75981 781	0.401239	0.954321	6.21545
1.6	0.28519 648	1.29011 798	1.73095 297	0.404112	0.960843	6.16665
1.8	0.28961 396	1.30843 932	1.69887 992	0.407392	0.968285	6.11184
2.0	0.29462 538	1.32920 036	1.66381 982	0.411087	0.976669	6.05118
2.2	0.30025 682	1.35250 061	1.62600 944	0.415209	0.986016	5.98488
2.4	0.30653 784	1.37845 262	1.58569 822	0.419768	0.996351	5.91314
2.6	0.31350 170	1.40718 285	1.54314 529	0.424778	1.007703	5.83620
2.8	0.32118 565	1.43883 260	1.49861 645	0.430253	1.020101	5.75428
3.0	0.32963 121	1.47355 907	1.45238 126	0.436209	1.033581	5.66764
3.2	0.33888 455	1.51153 657	1.40471 020	0.442662	1.048178	5.57655
3.4	0.34899 681	1.55295 782	1.35587 192	0.449632	1.063935	5.48128
3.6	0.36002 459	1.59803 551	1.30613 075	0.457139	1.080893	5.38210
3.8	0.37203 039	1.64700 388	1.25574 432	0.465205	1.099102	5.27932
4.0	0.38508 316	1.70012 064	1.20496 150	0.473853	1.118613	5.17321
4.2	0.39925 889	1.75766 896	1.15402 052	0.483111	1.139481	5.06408
4.4	0.41464 125	1.81995 978	1.10314 736	0.493006	1.161768	4.95224
4.6	0.43132 237	1.88733 435	1.05255 442	0.503569	1.185538	4.83797
4.8	0.44940 362	1.96016 700	1.00243 944	0.514832	1.210861	4.72159
5.0	0.46899 655	2.03886 82	0.95298 465	0.526830	1.237813	4.60339
5.2	0.49022 387	2.12388 83	0.90435 626	0.539601	1.266475	4.48367
5.4	0.51322 061	2.21572 08	0.85670 405	0.553186	1.296933	4.36272
5.6	0.53813 536	2.31490 71	0.81016 129	0.567630	1.329281	4.24084
5.8	0.56513 169	2.42204 09	0.76484 483	0.582979	1.363622	4.11830
6.0	0.59438 965	2.53777 36	0.72085 532	0.599284	1.400061	3.99537
6.2	0.62610 759	2.66282 00	0.67827 767	0.616599	1.438715	3.87234
6.4	0.66050 400	2.79796 48	0.63718 161	0.634984	1.479709	3.74945
6.6	0.69781 972	2.94406 93	0.59762 235	0.654501	1.523176	3.62695
6.8	0.73832 033	3.10208 00	0.55964 137	0.675219	1.569259	3.50507
7.0	0.78229 881	3.27303 69	0.52326 729	0.697210	1.618113	3.38405
7.2	0.83007 864	3.45808 34	0.48851 672	0.720554	1.669904	3.26411
7.4	0.88201 663	3.65847 74	0.45539 529	0.745333	1.724808	3.14543
7.6	0.93850 764	3.87560 29	0.42389 854	0.771639	1.783016	3.02821
7.8	0.99998 773	4.11098 38	0.39401 295	0.799570	1.844734	2.91264
8.0	1.06693 936	4.36629 90	0.36571 690	0.829231	1.910180	2.79887
8.2	1.13989 641	4.64339 88	0.33898 159	0.860735	1.979593	2.68705
8.4	1.21945 007	4.94432 35	0.31377 202	0.894204	2.053225	2.57733
8.6	1.30625 534	5.27132 42	0.29004 783	0.929769	2.131351	2.46983
8.8	1.40103 829	5.62688 64	0.26776 418	0.967571	2.214264	2.36466
9.0	1.50460 429	6.01375 48	0.24687 251	1.007764	2.302281	2.26193
9.2	1.61784 713	6.43496 31	0.22732 134	1.050510	2.395741	2.16172
9.4	1.74175 933	6.89386 57	0.20905 690	1.095988	2.495011	2.06411
9.6	1.87744 369	7.39417 36	0.19202 382	1.144389	2.600488	1.96916
9.8	2.02612 620	7.93999 51	0.17616 568	1.195919	2.712593	1.87692
10.0	2.18917 062	8.53588 02	0.16142 553	1.250800	2.831786	1.78744
	$\begin{bmatrix}(-3)2\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)6\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)9\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)8\\4\end{bmatrix}$

$$I_{n+1}(x)=-\frac{2n}{x}I_n(x)+I_{n-1}(x) \qquad K_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}K_n(x)+K_{n-1}(x)$$

Таблица 9.10. Модифицированные функции Бесселя порядков 10, 11, 20 и 21

x	$e^{-x}I_{10}(x)$	$e^{-x}I_{11}(x)$	$e^{x}K_{10}(x)$	$10^{24}x^{-20}I_{20}(x)$	$10^{26}x^{-21}I_{21}(x)$	$10^{-22}x^{20}K_{20}(x)$
10.0	0.00099 38819	0.00038 75284	35.55633 91	1.25080	2.83179	1.787443
10.2	0.00107 29935	0.00042 45861	32.60759 68	1.30927	2.95856	1.700753
10.4	0.00115 52835	0.00046 37417	29.98423 91	1.37160	3.09345	1.616873
10.6	0.00124 06973	0.00050 50080	27.64297 29	1.43806	3.23703	1.535814
10.8	0.00132 91744	0.00054 83934	25.54714 23	1.50895	3.38992	1.457578
11.0	0.00142 06490	0.00059 39013	23.66558 79	1.58462	3.55278	1.382160
11.2	0.00151 50508	0.00064 15309	21.97172 20	1.66540	3.72634	1.309546
11.4	0.00161 23051	0.00069 12768	20.44277 46	1.75169	3.91139	1.239714
11.6	0.00171 23339	0.00074 31298	19.05917 72	1.84390	4.10876	1.172637
11.8	0.00181 50559	0.00079 70766	17.80405 56	1.94249	4.31937	1.108279
12.0	0.00192 03870	0.00085 31003	16.66281 24	2.04795	4.54421	1.046601
12.2	0.00202 82412	0.00091 11805	15.62277 97	2.16080	4.78434	0.987556
12.4	0.00213 85303	0.00097 12937	14.67293 16	2.28162	5.04093	0.931095
12.6	0.00225 11650	0.00103 34132	13.80364 34	2.41105	5.31521	0.877164
12.8	0.00236 60548	0.00109 75097	13.00649 01	2.54975	5.60856	0.825703
13.0	0.00248 31086	0.00116 35512	12.27407 71	2.69846	5.92244	0.776652
13.2	0.00260 22347	0.00123 15035	11.59989 74	2.85799	6.25845	0.729947
13.4	0.00272 33415	0.00130 13301	10.97821 07	3.02921	6.61832	0.685520
13.6	0.00284 63375	0.00137 29926	10.40394 07	3.21306	7.00393	0.643305
13.8	0.00297 11314	0.00144 64509	9.87258 79	3.41058	7.41731	0.603230
14.0	0.00309 76327	0.00152 16634	9.38015 52	3.62289	7.86068	0.565225
14.2	0.00322 57518	0.00159 85870	8.92308 36	3.85121	8.33644	0.529218
14.4	0.00335 53999	0.00167 71776	8.49819 79	4.09686	8.84722	0.495137
14.6	0.00348 64894	0.00175 73898	8.10265 95	4.36131	9.39585	0.462910
14.8	0.00361 89341	0.00183 91776	7.73392 53	4.64613	9.98543	0.432464
15.0	0.00375 26491	0.00192 24942	7.38971 31	4.95305	10.61932	0.403728
15.2	0.00388 75510	0.00200 72921	7.06797 04	5.28394	11.30119	0.376630
15.4	0.00402 35583	0.00209 35235	6.76684 87	5.64087	12.03503	0.351101
15.6	0.00416 05908	0.00218 11403	6.48467 94	6.02608	12.82520	0.327070
15.8	0.00429 85705	0.00227 00942	6.21995 46	6.44202	13.67643	0.304470
16.0	0.00443 74209	0.00236 03366	5.97130 87	6.89137	14.59389	0.283235
16.2	0.00457 70675	0.00245 18192	5.73750 35	7.37705	15.58322	0.263299
16.4	0.00471 74378	0.00254 44936	5.51741 43	7.90228	16.65059	0.244598
16.6	0.00485 84612	0.00263 83118	5.31001 78	8.47055	17.80271	0.227071
16.8	0.00500 00690	0.00273 32259	5.11438 19	9.08571	19.04691	0.210658
17.0	0.00514 21947	0.00282 91884	4.92965 63	9.75197	20.39124	0.195301
17.2	0.00528 47735	0.00292 61523	4.75506 40	10.47392	21.84444	0.180944
17.4	0.00542 77427	0.00302 40709	4.58989 42	11.25663	23.41611	0.167532
17.6	0.00557 10418	0.00312 28982	4.43349 60	12.10562	25.11674	0.155012
17.8	0.00571 46119	0.00322 25887	4.28527 20	13.02697	26.95781	0.143336
18.0	0.00585 83964	0.00332 30977	4.14467 40	14.02734	28.95188	0.132454
18.2	0.00600 23403	0.00342 43808	4.01119 75	15.11406	31.11272	0.122321
18.4	0.00614 63909	0.00352 63948	3.88437 85	16.29515	33.45541	0.112891
18.6	0.00629 04971	0.00362 90969	3.76378 89	17.57946	35.99648	0.104124
18.8	0.00643 46098	0.00373 24450	3.64903 41	18.97668	38.75407	0.095978
19.0	0.00657 86817	0.00383 63982	3.53974 93	20.49749	41.74804	0.088414
19.2	0.00672 26672	0.00394 09161	3.43559 74	22.15363	45.00024	0.081397
19.4	0.00686 65226	0.00404 59590	3.33626 62	23.95803	48.53460	0.074892
19.6	0.00701 02059	0.00415 14885	3.24146 65	25.92489	52.37745	0.068865
19.8	0.00715 36768	0.00425 74667	3.15093 00	28.06989	56.55768	0.063285
20.0	0.00729 68965	0.00436 38567	3.06440 75	30.41029	61.10706	0.058124
	$\begin{bmatrix}(-7)4\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-7)3\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)4\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)2\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\4\end{bmatrix}$

Таблица 9.10. Вспомогательные таблицы для больших значений аргумента

x^{-1}	$\ln[x^{\frac{1}{2}}e^{-x}I_{10}(x)]$	$\ln[x^{\frac{1}{2}}e^{-x}I_{11}(x)]$	$\ln[\pi^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}e^{x}K_{10}(x)]$	$\ln[x^{\frac{1}{2}}e^{-x}I_{20}(x)]$	$\ln[x^{\frac{1}{2}}e^{-x}I_{21}(x)]$	$\ln[\pi^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}e^{x}K_{20}(x)]$	$\langle x\rangle$
0,050	−3,42244 002	−3,93653 292	1,47299 048	−10,434749	−11,346341	8,250182	20
0,049	−3,37318 689	−3,87762 888	1,42771 939	−10,263511	−11,160467	8,088946	20
0,048	−3,32386 306	−3,81861 524	1,38232 785	−10,091302	−10,973471	7,926737	21
0,047	−3,27447 055	−3,75949 454	1,33681 644	− 9,918126	−10,785351	7,763551	21
0,046	−3,22501 139	−3,70026 938	1,29118 575	− 9,743983	−10,596108	7,599386	22
0,045	−3,17548 766	−3,64094 242	1,24543 642	− 9,568876	−10,405744	7,434240	22
0,044	−3,12590 147	−3,58151 639	1,19956 910	− 9,392809	−10,214259	7,268110	23
0,043	−3,07625 496	−3,52199 408	1,15358 449	− 9,215785	−10,021658	7,100994	23
0,042	−3,02655 033	−3,46237 835	1,10748 332	− 9,037810	− 9,827944	6,932893	24
0,041	−2,97678 979	−3,40267 211	1,06126 635	− 8,858889	− 9,633121	6,763806	24
0,040	−2,92697 559	−3,34287 833	1,01493 437	− 8,679029	− 9,437195	6,593733	25
0,039	−2,87711 002	−3,28300 006	0,96848 822	− 8,498236	− 9,240173	6,422673	26
0,038	−2,82719 539	−3,22304 039	0,92192 874	− 8,316519	− 9,042063	6,250630	26
0,037	−2,77723 405	−3,16300 246	0,87525 686	− 8,133888	− 8,842873	6,077603	27
0,036	−2,72722 837	−3,10288 949	0,82847 349	− 7,950352	− 8,642612	5,903597	28
0,035	−2,67718 076	−3,04270 472	0,78157 961	− 7,765923	− 8,441293	5,728614	29
0,034	−2,62709 365	−2,98245 146	0,73457 624	− 7,580613	− 8,238927	5,552659	29
0,033	−2,57696 948	−2,92213 308	0,68746 441	− 7,394434	− 8,035529	5,375732	30
0,032	−2,52681 074	−2,86175 298	0,64024 520	− 7,207403	− 7,831113	5,197843	31
0,031	−2,47661 992	−2,80131 461	0,59291 975	− 7,019533	− 7,625695	5,018998	32
0,030	−2,42639 955	−2,74082 147	0,54548 920	− 6,830842	− 7,419294	4,839203	33
0,029	−2,37615 216	−2,68027 709	0,49795 475	− 6,641348	− 7,211929	4,658466	34
0,028	−2,32588 032	−2,61968 504	0,45031 764	− 6,451070	− 7,003620	4,476796	36
0,027	−2,27558 659	−2,55904 894	0,40257 915	− 6,260027	− 6,794389	4,294202	37
0,026	−2,22527 356	−2,49837 243	0,35474 059	− 6,068243	− 6,584261	4,110696	38
0,025	−2,17494 384	−2,43765 918	0,30680 331	− 5,875738	− 6,373261	3,926290	40
0,024	−2,12460 002	−2,37691 291	0,25876 871	− 5,682539	− 6,161416	3,740995	42
0,023	−2,07424 475	−2,31613 733	0,21063 822	− 5,488669	− 5,948754	3,554826	43
0,022	−2,02388 063	−2,25533 620	0,16241 332	− 5,294155	− 5,735305	3,367799	45
0,021	−1,97351 031	−2,19451 329	0,11409 551	− 5,099025	− 5,521102	3,179929	48
0,020	−1,92313 643	−2,13367 239	0,06568 636	− 4,903309	− 5,306177	2,991233	50
0,019	−1,87276 162	−2,07281 731	+0,01718 745	− 4,707035	− 5,090565	2,801730	53
0,018	−1,82238 853	−2,01195 186	−0,03139 959	− 4,510235	− 4,874302	2,611440	56
0,017	−1,77201 979	−1,95107 986	−0,08007 306	− 4,312943	− 4,657427	2,420383	59
0,016	−1,72165 806	−1,89020 514	−0,12883 128	− 4,115190	− 4,439978	2,228582	63
0,015	−1,67130 595	−1,82933 153	−0,17767 247	− 3,917011	− 4,221995	2,036059	67
0,014	−1,62096 610	−1,76846 286	−0,22659 485	− 3,718443	− 4,003521	1,842840	71
0,013	−1,57064 113	−1,70760 295	−0,27559 659	− 3,519520	− 3,784599	1,648949	77
0,012	−1,52033 365	−1,64675 564	−0,32467 581	− 3,320281	− 3,565272	1,454415	83
0,011	−1,47004 626	−1,58592 472	−0,37383 061	− 3,120763	− 3,345586	1,259264	91
0,010	−1,41978 154	−1,52511 400	−0,42305 904	− 2,921004	− 3,125587	1,063526	100
0,009	−1,36954 207	−1,46432 725	−0,47235 911	− 2,721043	− 2,905322	0,867231	111
0,008	−1,31933 040	−1,40356 824	−0,52172 881	− 2,520921	− 2,684838	0,670412	125
0,007	−1,26914 908	−1,34284 072	−0,57116 608	− 2,320676	− 2,464184	0,473099	143
0,006	−1,21900 063	−1,28214 841	−0,62066 881	− 2,120350	− 2,243408	0,275328	167
0,005	−1,16888 754	−1,22149 499	−0,67023 489	− 1,919982	− 2,022558	+0,077133	200
0,004	−1,11881 229	−1,16088 414	−0,71986 215	− 1,719613	− 1,801685	−0,121451	250
0,003	−1,06877 735	−1,10031 949	−0,76954 839	− 1,519284	− 1,580838	−0,320388	333
0,002	−1,01878 514	−1,03980 463	−0,81929 138	− 1,319036	− 1,360065	−0,519640	500
0,001	−0,96883 808	−0,97934 314	−0,86908 886	− 1,118907	− 1,139416	−0,719170	1000
0,000	−0,91893 853	−0,91893 853	−0,91893 853	− 0,918939	− 0,918939	−0,918939	∞
	$\left[{(-6)9 \atop 4}\right]$	$\left[{(-5)1 \atop 4}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 4}\right]$	

$\langle x\rangle$ — целое число, ближайшее к x.

Таблица 9.11. Модифицированные функции Бесселя различных порядков

n	$I_n(1)$	$I_n(2)$	$I_n(5)$
0	(0)1.26606 5878	(0)2.27958 5302	(1)2.72398 7182
1	(−1)5.65159 1040	(0)1.59063 6855	(1)2.43356 4214
2	(−1)1.35747 6698	(−1)6.88948 4477	(1)1.75056 1497
3	(−2)2.21684 2492	(−1)2.12739 9592	(1)1.03311 5017
4	(−3)2.73712 0221	(−2)5.07285 6998	(0)5.10823 4764
5	(−4)2.71463 1560	(−3)9.82567 9323	(0)2.15797 4547
6	(−5)2.24886 6148	(−3)1.60017 3364	(−1)7.92285 6690
7	(−6)1.59921 8231	(−4)2.24639 1420	(−1)2.56488 9417
8	(−8)9.96062 4033	(−5)2.76993 6951	(−2)7.41166 3216
9	(−9)5.51838 5863	(−6)3.04418 5903	(−2)1.93157 1882
10	(−10)2.75294 8040	(−7)3.01696 3879	(−3)4.58004 4419
11	(−11)1.24897 8308	(−8)2.72220 2336	(−4)9.95541 1401
12	(−13)5.19576 1153	(−9)2.25413 0978	(−4)1.99663 4027
13	(−14)1.99563 1678	(−10)1.72451 6264	(−5)3.71568 0720
14	(−16)7.11879 0054	(−11)1.22598 3451	(−6)6.44800 5272
15	(−17)2.37046 3051	(−13)8.13943 2531	(−6)1.04797 7675
16	(−19)7.40090 0286	(−14)5.06857 1401	(−7)1.60139 2190
17	(−20)2.17495 9747	(−15)2.97182 8970	(−8)2.30866 7371
18	(−22)6.03714 4636	(−16)1.64621 5204	(−9)3.14983 7806
19	(−23)1.58767 8369	(−18)8.64160 3385	(−10)4.07841 5017
20	(−25)3.96683 5986	(−19)4.31056 0576	(−11)5.02423 9358
30	(−42)3.53950 0588	(−33)3.89351 9664	(−21)3.99784 4971
40	(−60)1.12150 9741	(−48)1.25586 9192	(−32)1.18042 6980
50	(−80)2.93463 5309	(−65)3.35304 2830	(−45)2.93146 9647
100	(−189)8.47367 4008	(−158)1.08217 1475	(−119)7.09355 1489

n	$I_n(10)$	$I_n(50)$	$I_n(100)$
0	(3)2.81571 6628	(20)2.93255 378	(42)1.07375 171
1	(3)2.67098 8304	(20)2.90307 859	(42)1.06836 939
2	(3)2.28151 8968	(20)2.81643 064	(42)1.05238 432
3	(3)1.75838 0717	(20)2.67776 414	(42)1.02627 402
4	(3)1.22649 0538	(20)2.49509 894	(41)9.90807 878
5	(2)7.77188 2864	(20)2.27854 831	(41)9.47009 387
6	(2)4.49302 2514	(20)2.03938 928	(41)8.96106 940
7	(2)2.38025 5848	(20)1.78909 488	(41)8.39476 555
8	(2)1.16066 4327	(20)1.53844 272	(41)7.78580 222
9	(1)5.23192 9250	(20)1.29679 321	(41)7.14903 719
10	(1)2.18917 0616	(20)1.07159 716	(41)6.49897 552
11	(0)8.53588 0176	(19)8.68154 347	(41)5.84924 209
12	(0)3.11276 9776	(19)6.89609 247	(41)5.21214 227
13	(0)1.06523 2713	(19)5.37141 909	(41)4.59832 794
14	(−1)3.43164 7223	(19)4.10295 454	(41)4.01657 700
15	(−1)1.04371 4907	(19)3.07376 455	(41)3.47368 638
16	(−2)3.00502 5016	(19)2.25869 581	(41)2.97447 109
17	(−3)8.21069 0206	(19)1.62819 923	(41)2.52185 563
18	(−3)2.13390 3457	(19)1.15152 033	(41)2.11704 017
19	(−4)5.28637 7589	(18)7.99104 593	(41)1.75972 117
20	(−4)1.25079 9736	(18)5.44200 840	(41)1.44834 613
30	(−12)7.78756 9783	(16)4.27499 365	(40)1.20615 487
40	(−20)2.04212 3274	(13)6.00717 897	(38)3.84170 550
50	(−30)4.75689 4561	(+10)1.76508 024	(36)4.82195 809
100	(−88)1.08234 4202	(−16)2.72788 795	(21)4.64153 494

Таблица 9.11. Модифицированные функции Бесселя различных порядков

n	$K_n(1)$	$K_n(2)$	$K_n(5)$
0	(−1)4.21024 4382	(−1)1.13893 8728	(−3)3.69109 8334
1	(−1)6.01907 2302	(−1)1.39865 8818	(−3)4.04461 3445
2	(0)1.62483 8899	(−1)2.53759 7546	(−3)5.30894 3712
3	(0)7.10126 2826	(−1)6.47385 3909	(−3)8.29176 8415
4	(1)4.42324 1585	(0)2.19591 5927	(−2)1.52590 6581
5	(2)3.60960 5896	(0)9.43104 9101	(−2)3.27062 7371
6	(3)3.65383 8312	(1)4.93511 6143	(−2)8.06716 1323
7	(4)4.42070 2033	(2)3.05538 0177	(−1)2.26318 1455
8	(5)6.22552 1230	(3)2.18811 7285	(−1)7.14362 4206
9	(7)1.00050 4099	(4)1.78104 7630	(0)2.51227 7891
10	(8)1.80713 2899	(5)1.62482 4040	(0)9.75856 2829
11	(9)3.62427 0839	(6)1.64263 4516	(1)4.15465 2921
12	(10)7.99146 7175	(7)1.82314 6208	(2)1.92563 2913
13	(12)1.92157 6393	(8)2.20420 1795	(2)9.65850 3277
14	(13)5.00409 0088	(9)2.88369 3795	(3)5.21498 4995
15	(15)1.40306 6801	(10)4.05921 3332	(4)3.01697 6630
16	(16)4.21420 4494	(11)6.11765 6935	(5)1.86233 5828
17	(18)1.34994 8505	(12)9.82884 3230	(6)1.22206 4696
18	(19)4.59403 9121	(14)1.67702 1006	(6)8.49627 3517
19	(21)1.65520 4032	(15)3.02846 6654	(7)6.23952 3402
20	(22)6.29436 9360	(16)5.77085 6853	(8)4.82700 0521
30	(39)4.70614 5527	(30)4.27112 5755	(18)4.11213 2063
40	(58)1.11422 0651	(45)9.94083 9886	(30)1.05075 6722
50	(77)3.40689 6854	(62)7.97998 1740	(42)3.39432 2243
100	(185)5.90033 3184	(155)4.61941 5978	(115)7.03986 0193

n	$K_n(10)$	$K_n(50)$	$K_n(100)$
0	(−5)1.77800 6232	(−23)3.41016 774	(−45)4.65662 823
1	(−5)1.86487 7345	(−23)3.44410 222	(−45)4.67985 373
2	(−5)2.15098 1701	(−23)3.54793 183	(−45)4.75022 530
3	(−5)2.72527 0026	(−23)3.72793 677	(−45)4.86986 274
4	(−5)3.78614 3716	(−23)3.99528 424	(−45)5.04241 707
5	(−5)5.75418 4999	(−23)4.36718 224	(−45)5.27325 611
6	(−5)9.54032 8715	(−23)4.86872 069	(−45)5.56974 268
7	(−4)1.72025 7946	(−23)5.53567 521	(−45)5.94162 523
8	(−4)3.36239 3995	(−23)6.41870 975	(−45)6.40157 021
9	(−4)7.10008 8338	(−23)7.58966 233	(−45)6.96587 646
10	(−3)1.61425 5300	(−23)9.15098 819	(−45)7.65542 797
11	(−3)3.93851 9435	(−22)1.12500 576	(−45)8.49696 206
12	(−2)1.02789 9806	(−22)1.41010 135	(−45)9.52475 963
13	(−2)2.86081 1477	(−22)1.80185 441	(−44)1.07829 044
14	(−2)8.46600 9646	(−22)2.34706 565	(−44)1.23283 148
15	(−1)2.65656 3849	(−22)3.11621 117	(−44)1.42348 325
16	(−1)8.81629 2510	(−22)4.21679 235	(−44)1.65987 645
17	(0)3.08686 9988	(−22)5.81495 828	(−44)1.95464 371
18	(1)1.13769 8721	(−22)8.17096 398	(−44)2.32445 531
19	(1)4.40440 2395	(−21)1.16980 523	(−44)2.79144 763
20	(2)1.78744 2782	(−21)1.70614 838	(−44)3.38520 541
30	(9)2.03024 7813	(−19)2.00581 681	(−43)3.97060 205
40	(17)5.93822 4681	(−16)1.29986 971	(−41)1.20842 080
50	(27)2.06137 3775	(−13)4.00601 347	(−40)9.27452 265
100	(85)4.59667 4084	(+13)1.63940 352	(−25)7.61712 963

Таблица 9.12. Функции Кельвина порядков 0 и 1

x	ber x	bei x	$\mathrm{ber}_1\, x$	$\mathrm{bei}_1\, x$
0.0	1.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
0.1	0.99999 84375	0.00249 99996	-0.03539 95148	0.03531 11265
0.2	0.99997 50000	0.00999 99722	-0.07106 36418	0.07035 65360
0.3	0.99987 34379	0.02249 96836	-0.10725 47768	0.10486 83082
0.4	0.99960 00044	0.03999 82222	-0.14423 08645	0.13857 41359
0.5	0.99902 34640	0.06249 32184	-0.18224 31238	0.17119 51797
0.6	0.99797 51139	0.08997 97504	-0.22153 37177	0.20244 39824
0.7	0.99624 88284	0.12244 89390	-0.26233 33470	0.23202 24623
0.8	0.99360 11377	0.15988 62295	-0.30485 87511	0.25962 00070
0.9	0.98975 13567	0.20226 93635	-0.34931 01000	0.28491 16898
1.0	0.98438 17812	0.24956 60400	-0.39586 82610	0.30755 66314
1.1	0.97713 79732	0.30173 12692	-0.44469 19268	0.32719 65305
1.2	0.96762 91558	0.35870 44199	-0.49591 45913	0.34345 43903
1.3	0.95542 87468	0.42040 59656	-0.54964 13636	0.35593 34649
1.4	0.94007 50567	0.48673 39336	-0.60594 56099	0.36421 64560
1.5	0.92107 21835	0.55756 00623	-0.66486 54180	0.36786 49890
1.6	0.89789 11386	0.63272 56770	-0.72639 98786	0.36641 93986
1.7	0.86997 12370	0.71203 72924	-0.79050 51846	0.35939 88584
1.8	0.83672 17942	0.79526 19548	-0.85709 05470	0.34630 18876
1.9	0.79752 41670	0.88212 23406	-0.92601 39357	0.32660 72722
2.0	0.75173 41827	0.97229 16273	-0.99707 76519	0.29977 54370
2.1	0.69868 50014	1.06538 81608	-1.07002 37462	0.26525 03092
2.2	0.63769 04571	1.16096 99438	-1.14452 92997	0.22246 17120
2.3	0.56804 89261	1.25852 89751	-1.22020 15903	0.17082 83322
2.4	0.48904 77721	1.35748 54765	-1.29657 31717	0.10976 13027
2.5	0.39996 84171	1.45718 20442	-1.37309 68976	+0.03866 84440
2.6	0.30009 20903	1.55687 77737	-1.44914 09315	-0.04304 07916
2.7	0.18870 63040	1.65574 24073	-1.52398 37854	-0.13594 96285
2.8	+0.06511 21084	1.75285 05638	-1.59680 94413	-0.24062 74875
2.9	-0.07136 78258	1.84717 61157	-1.66670 26139	-0.35762 26713
3.0	-0.22138 02496	1.93758 67853	-1.73264 42211	-0.48745 41770
3.1	-0.38553 14550	2.02283 90420	-1.79350 71373	-0.63060 25952
3.2	-0.56437 64305	2.10157 33881	-1.84805 23125	-0.78750 00586
3.3	-0.75840 70121	2.17231 01315	-1.89492 53482	-0.95851 92089
3.4	-0.96803 89953	2.23344 57503	-1.93265 36306	-1.14396 11510
3.5	-1.19359 81796	2.28324 99669	-1.95964 41313	-1.34404 23731
3.6	-1.43530 53217	2.31986 36548	-1.97418 19924	-1.55888 06139
3.7	-1.69325 99843	2.34129 77145	-1.97443 00262	-1.78847 96677
3.8	-1.96742 32727	2.34543 30614	-1.95842 92665	-2.03271 31257
3.9	-2.25759 94661	2.33002 18823	-1.92410 07174	-2.29130 70630
4.0	-2.56341 65573	2.29269 03227	-1.86924 84590	-2.56382 16886
4.1	-2.88430 57320	2.23094 27803	-1.79156 42730	-2.84963 19932
4.2	-3.21947 98323	2.14216 79867	-1.68863 39648	-3.14790 74393
4.3	-3.56791 08628	2.02364 70694	-1.55794 55649	-3.45759 07560
4.4	-3.92830 66215	1.87256 37958	-1.39689 95997	-3.77737 59182
4.5	-4.29908 65516	1.68601 72036	-1.20282 16315	-4.10568 54084
4.6	-4.67835 69372	1.46103 68359	-0.97297 72697	-4.44064 68813
4.7	-5.06388 55867	1.19460 07968	-0.70458 98649	-4.78006 93721
4.8	-5.45307 61749	0.88365 68537	-0.39486 10961	-5.12141 92170
4.9	-5.84294 24419	0.52514 68109	-0.04099 46681	-5.46179 58790
5.0	-6.23008 24787	0.11603 43816	+0.35977 66668	-5.79790 79018
	$\left[{(-3)2 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)6 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)6 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 8}\right]$

Вспомогательные таблицы для малых значений аргумента

x	$\mathrm{ker}\, x + \mathrm{ber}\, x \ln x$	$\mathrm{kei}\, x + \mathrm{bei}\, x \ln x$	$x(\mathrm{ker}_1\, x + \mathrm{ber}_1\, x \ln x)$	$x(\mathrm{kei}_1\, x + \mathrm{bei}_1\, x \ln x)$
0.0	0.11593 1516	-0.78539 8163	-0.70710 6781	-0.70710 6781
0.1	0.11789 2485	-0.78260 7108	-0.70651 7131	-0.70215 4903
0.2	0.12374 5076	-0.77421 9267	-0.70486 2164	-0.68733 0339
0.3	0.13339 8210	-0.76019 0919	-0.70248 3157	-0.66272 8003
0.4	0.14669 9682	-0.74045 0212	-0.69994 6658	-0.62851 1738
0.5	0.16343 5574	-0.71489 8693	-0.69804 1049	-0.58492 2770
	$\left[{(-4)5 \atop 7}\right]$	$\left[{(-4)8 \atop 7}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 7}\right]$	$\left[{(-3)1 \atop 7}\right]$

Таблица 9.12. Функции Кельвина порядков 0 и 1

x	$\mathrm{ker}\, x$	$\mathrm{kei}\, x$	$\mathrm{ker}_1\, x$	$\mathrm{kei}_1\, x$
0.0	∞	−0.78539 8163	−∞	−∞
0.1	2.42047 3980	−0.77685 0646	−7.14668 1711	−6.94024 2153
0.2	1.73314 2752	−0.76812 4933	−3.63868 3342	−3.32341 7218
0.3	1.33721 8637	−0.73310 1912	−2.47074 2357	−2.08283 4751
0.4	1.06262 3902	−0.70380 0212	−1.88202 4050	−1.44430 5150
0.5	0.85590 5872	−0.67158 1695	−1.52240 3406	−1.05118 2085
0.6	0.69312 0695	−0.63744 9494	−1.27611 7712	−0.78373 8860
0.7	0.56137 8274	−0.60217 5451	−1.09407 2943	−0.59017 5251
0.8	0.45288 2093	−0.56636 7650	−0.95203 2751	−0.44426 9985
0.9	0.36251 4812	−0.53051 1122	−0.83672 7829	−0.33122 6820
1.0	0.28670 6208	−0.49499 4636	−0.74032 2276	−0.24199 5966
1.1	0.22284 4513	−0.46012 9528	−0.65791 0729	−0.17068 4462
1.2	0.16894 5592	−0.42616 3604	−0.58627 4386	−0.11325 6800
1.3	0.12345 5395	−0.39329 1826	−0.52321 5989	−0.06683 2622
1.4	0.08512 6048	−0.36166 4781	−0.46718 3076	−0.02928 3749
1.5	0.05293 4915	−0.33139 5562	−0.41704 4285	+0.00100 8681
1.6	0.02602 9861	−0.30256 5474	−0.37195 1238	0.02530 6776
1.7	+0.00369 1104	−0.27522 8834	−0.33125 0485	0.04461 5190
1.8	−0.01469 6087	−0.24941 7069	−0.29442 5803	0.05974 7779
1.9	−0.02966 1407	−0.22514 2235	−0.26105 9495	0.07137 3592
2.0	−0.04166 4514	−0.20240 0068	−0.23080 5929	0.08004 9398
2.1	−0.05110 6500	−0.18117 2644	−0.20337 3135	0.08624 3202
2.2	−0.05833 8834	−0.16143 0701	−0.17850 9812	0.09035 1619
2.3	−0.06367 0454	−0.14313 5677	−0.15599 6054	0.09271 2940
2.4	−0.06737 3493	−0.12624 1488	−0.13563 6638	0.09361 7161
2.5	−0.06968 7972	−0.11069 6099	−0.11725 6136	0.09331 3788
2.6	−0.07082 5700	−0.09644 2891	−0.10069 5314	0.09201 8037
2.7	−0.07097 3560	−0.08342 1858	−0.08580 8451	0.08991 5810
2.8	−0.07029 6321	−0.07157 0648	−0.07246 1339	0.08716 7762
2.9	−0.06893 9052	−0.06082 5473	−0.06052 9755	0.08391 2666
3.0	−0.06702 9233	−0.05112 1884	−0.04989 8308	0.08027 0223
3.1	−0.06467 8610	−0.04239 5446	−0.04045 9533	0.07634 3451
3.2	−0.06198 4833	−0.03458 2313	−0.03211 3183	0.07222 0724
3.3	−0.05903 2916	−0.02761 9697	−0.02476 5662	0.06797 7529
3.4	−0.05589 6550	−0.02144 6287	−0.01832 9556	0.06367 7999
3.5	−0.05263 9277	−0.01600 2568	−0.01272 3249	0.05937 6256
3.6	−0.04931 5556	−0.01123 1096	−0.00787 0585	0.05511 7592
3.7	−0.04597 1723	−0.00707 6704	−0.00370 0576	0.05093 9514
3.8	−0.04264 6864	−0.00348 6665	−0.00014 7138	0.04687 2681
3.9	−0.03937 3608	−0.00041 0809	+0.00285 1155	0.04294 1728
4.0	−0.03617 8848	+0.00219 8399	0.00535 1296	0.03916 6011
4.1	−0.03308 4395	0.00438 5818	0.00740 6063	0.03556 0272
4.2	−0.03010 7574	0.00619 3613	0.00906 4226	0.03213 5235
4.3	−0.02726 1764	0.00766 1269	0.01037 0752	0.02889 8142
4.4	−0.02455 6892	0.00882 5624	0.01136 6998	0.02585 3229
4.5	−0.02199 9875	0.00972 0918	0.01209 0904	0.02300 2160
4.6	−0.01959 5024	0.01037 8865	0.01257 7182	0.02034 4409
4.7	−0.01734 4409	0.01082 8725	0.01285 7498	0.01787 7607
4.8	−0.01524 8188	0.01109 7399	0.01296 0651	0.01559 7847
4.9	−0.01330 4899	0.01120 9526	0.01291 2753	0.01349 9960
5.0	−0.01151 1727	0.01118 7587	0.01273 7390	0.01157 7754

Вспомогательные таблицы для малых значений аргумента

x	$\mathrm{ker}\, x+\mathrm{ber}\, x \ln x$	$\mathrm{kei}\, x+\mathrm{bei}\, x \ln x$	$x(\mathrm{ker}_1\, x+\mathrm{ber}_1\, x \ln x)$	$x(\mathrm{kei}_1\, x+\mathrm{bei}_1\, x \ln x)$
0.5	0.16343 5574	−0.71489 8693	−0.69804 1049	−0.58492 2770
0.6	0.18332 9435	−0.68341 3456	−0.69777 1567	−0.53229 1460
0.7	0.20604 1279	−0.64584 9920	−0.70035 3648	−0.47105 2294
0.8	0.23116 6407	−0.60204 5231	−0.70720 4389	−0.40176 2012
0.9	0.25823 4099	−0.55182 2327	−0.71993 1903	−0.32512 0736
1.0	0.28670 6208	−0.49499 4636	−0.74032 2276	−0.24199 5966
	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)4\\7\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)8\\7\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)1\\7\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)1\\7\end{smallmatrix}\right]$

Таблица 9.12. Модули и фазы

$\mathrm{ber}\, x = M_0(x)\cos\theta_0(x)$ $\mathrm{ber}_1\, x = M_1(x)\cos\theta_1(x)$

$\mathrm{bei}\, x = M_0(x)\sin\theta_0(x)$ $\mathrm{bei}_1\, x = M_1(x)\sin\theta_1(x)$

x	$M_0(x)$	$\theta_0(x)$	$M_1(x)$	$\theta_1(x)$
0.0	1.000000	0.000000	0.000000	2.356194
0.2	1.000025	0.010000	0.100000	2.361194
0.4	1.000400	0.039993	0.200013	2.376194
0.6	1.002023	0.089919	0.300101	2.401189
0.8	1.006383	0.159548	0.400427	2.436166
1.0	1.015525	0.248294	0.501301	2.481086
1.2	1.031976	0.354999	0.603235	2.535872
1.4	1.058608	0.477755	0.706982	2.600386
1.6	1.098431	0.613860	0.813585	2.674406
1.8	1.154359	0.759999	0.924407	2.757605
2.0	1.229006	0.912639	1.041167	2.849536
2.2	1.324576	1.068511	1.165949	2.949617
2.4	1.442891	1.225011	1.301211	3.057139
2.6	1.585536	1.380379	1.449780	3.171285
2.8	1.754059	1.533667	1.614838	3.291160
3.0	1.950193	1.684559	1.799908	3.415839
3.2	2.176036	1.833156	2.008844	3.544415
3.4	2.434210	1.979784	2.245840	3.676044
3.6	2.727979	2.124854	2.515453	3.809981
3.8	3.061341	2.268771	2.822653	3.945601
4.0	3.439118	2.411887	3.172896	4.082407
4.2	3.867032	2.554483	3.572227	4.220023
4.4	4.351791	2.696771	4.027393	4.358179
4.6	4.901189	2.838893	4.545990	4.496691
4.8	5.524209	2.980942	5.136619	4.635441
5.0	6.231163	3.122970	5.809060	4.774362
5.2	7.033841	3.265002	6.574474	4.913417
5.4	7.945700	3.407044	7.445618	5.052589
5.6	8.982083	3.549094	8.437083	5.191872
5.8	10.160473	3.691142	9.565568	5.331267
6.0	11.500794	3.833179	10.850182	5.470772
6.2	13.025757	3.975197	12.312791	5.610390
6.4	14.761257	4.117190	13.978402	5.750117
6.6	16.736836	4.259152	15.875614	5.889950
6.8	18.986208	4.401083	18.037122	6.029884
7.0	21.547863	4.542982	20.500302	6.169913
	$\left[\begin{smallmatrix}(-2)4\\7\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)2\\8\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-2)4\\6\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)1\\6\end{smallmatrix}\right]$

Модули и фазы для больших значений аргумента

x^{-1}	$x^{\frac12}e^{-x/\sqrt{2}}M_0(x)$	$\theta_0(x)-(x/\sqrt{2})$	$x^{\frac12}e^{-x/\sqrt{2}}M_1(x)$	$\theta_1(x)-(x/\sqrt{2})$	$\langle x\rangle$
0.15	0.40418	−0.40758	0.38359	1.22254	7
0.14	0.40383	−0.40644	0.38457	1.21922	7
0.13	0.40349	−0.40534	0.38556	1.21598	8
0.12	0.40315	−0.40427	0.38655	1.21280	8
0.11	0.40281	−0.40323	0.38755	1.20968	9
0.10	0.40246	−0.40221	0.38856	1.20660	10
0.09	0.40211	−0.40119	0.38957	1.20356	11
0.08	0.40176	−0.40019	0.39060	1.20057	13
0.07	0.40141	−0.39921	0.39162	1.19762	14
0.06	0.40106	−0.39824	0.39266	1.19471	17
0.05	0.40071	−0.39728	0.39369	1.19184	20
0.04	0.40035	−0.39634	0.39474	1.18901	25
0.03	0.40000	−0.39541	0.39578	1.18622	33
0.02	0.39965	−0.39449	0.39683	1.18348	50
0.01	0.39930	−0.39359	0.39789	1.18077	100
0.00	0.39894	−0.39270	0.39894	1.17810	∞
	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)1\\2\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)1\\2\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-6)3\\2\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)1\\2\end{smallmatrix}\right]$	

$\langle x\rangle$ — целое число ближайшее к x.

Таблица 9.12. Модули и фазы

$\operatorname{ker} x = N_0(x)\cos\phi_0(x)$ $\quad$ $\operatorname{ker}_1 x = N_1(x)\cos\phi_1(x)$

$\operatorname{kei} x = N_0(x)\sin\phi_0(x)$ $\quad$ $\operatorname{kei}_1 x = N_1(x)\sin\phi_1(x)$

x	$N_0(x)$	$\phi_0(x)$	$N_1(x)$	$\phi_1(x)$
0,0	∞	0,000000	∞	−2,356194
0,2	1,891702	−0,412350	4,927993	−2,401447
0,4	1,274560	−0,584989	2,372347	−2,487035
0,6	0,941678	−0,743582	1,497572	−2,590827
0,8	0,725172	−0,896284	1,050591	−2,704976
1,0	0,572032	−1,045803	0,778870	−2,825662
1,2	0,458430	−1,193368	0,597114	−2,950763
1,4	0,371548	−1,339631	0,468100	−3,078993
1,6	0,303683	−1,484977	0,372811	−3,209526
1,8	0,249850	−1,629650	0,300427	−3,341804
2,0	0,206644	−1,773813	0,244293	−3,475437
2,2	0,171649	−1,917579	0,200073	−3,610143
2,4	0,143095	−2,061029	0,164807	−3,745715
2,6	0,119656	−2,204225	0,136407	−3,881994
2,8	0,100319	−2,347212	0,113353	−4,018860
3,0	0,084299	−2,490025	0,094515	−4,156217
3,2	0,070979	−2,632692	0,079039	−4,293990
3,4	0,059870	−2,775236	0,066264	−4,432118
3,6	0,050578	−2,917672	0,055677	−4,570551
3,8	0,042789	−3,060017	0,046873	−4,709250
4,0	0,036246	−3,202283	0,039530	−4,848179
4,2	0,030738	−3,344478	0,033389	−4,987312
4,4	0,026095	−3,486612	0,028242	−5,126623
4,6	0,022174	−3,628692	0,023918	−5,266093
4,8	0,018859	−3,770724	0,020280	−5,405705
5,0	0,016052	−3,912712	0,017213	−5,545443
5,2	0,013674	−4,054662	0,014624	−5,685295
5,4	0,011656	−4,196576	0,012435	−5,825250
5,6	0,009942	−4,338460	0,010583	−5,965298
5,8	0,008485	−4,480314	0,009013	−6,105430
6,0	0,007246	−4,622142	0,007682	−6,245638
6,2	0,006191	−4,763947	0,006551	−6,385917
6,4	0,005292	−4,905730	0,005590	−6,526260
6,6	0,004526	−5,047493	0,004773	−6,666662
6,8	0,003872	−5,189238	0,004077	−6,807119
7,0	0,003315	−5,330966	0,003485	−6,947625

Модули и фазы для больших значений аргумента

x^{-1}	$x^{\frac{1}{2}}e^{x/\sqrt{2}}N_0(x)$	$\phi_0(x)+(x/\sqrt{2})$	$x^{\frac{1}{2}}e^{x/\sqrt{2}}N_1(x)$	$\phi_1(x)+(x/\sqrt{2})$	$\langle x\rangle$
0,15	1,23695	−0,38070	1,30377	−1,99943	7
0,14	1,23802	−0,38142	1,30039	−1,99725	7
0,13	1,23909	−0,38217	1,29701	−1,99505	8
0,12	1,24017	−0,38291	1,29363	−1,99281	8
0,11	1,24125	−0,38367	1,29024	−1,99055	9
0,10	1,24233	−0,38444	1,28687	−1,98825	10
0,09	1,24342	−0,38522	1,28349	−1,98592	11
0,08	1,24451	−0,38600	1,28012	−1,98357	13
0,07	1,24560	−0,38680	1,27675	−1,98118	14
0,06	1,24670	−0,38761	1,27339	−1,97876	17
0,05	1,24779	−0,38843	1,27002	−1,97630	20
0,04	1,24889	−0,38926	1,26667	−1,97381	25
0,03	1,25000	−0,39010	1,26332	−1,97128	33
0,02	1,25110	−0,39096	1,25998	−1,96872	50
0,01	1,25221	−0,39182	1,25664	−1,96613	100
0,00	1,25331	−0,39270	1,25331	−1,96350	∞
	$\left[\begin{matrix}(-6)1\\2\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-6)3\\2\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-6)3\\2\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-6)5\\2\end{matrix}\right]$	

$\langle x\rangle$ — целое число, ближайшее к x.

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

9.1. Allen E. E. Analytical approximations. — Math. Tables Aids Comp., 1954, **8**, p. 240—241.

9.2. Allen E. E. Polynomial approximations to some modified Bessel functions. — Math. Tables Aids Comp., 1956, **10**, p. 162—164.

9.3. Bateman H., Archibald R. C. A guide to tables of Bessel functions. — Math. Tables Aids Comp., 1944, **1**, p. 205—308.

9.4. Bickley W. G. Bessel functions and formulae. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1953.

9.5. Carslaw H. S., Jaeqer J. C. Conduction of heat in solids. — L.: Oxford Univ. Press, 1947.

9.6. Copson E. T. An introduction to the teory of functions of a complex variable. — L.: Oxford Univ. Press, 1935.

9.7. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V. 2, Ch. 7. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974, Т. II.

9.8. Goodwin E. T. Recurrence relations for cross-products of Bessel functions. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 1949, **2**, p. 72—74.

9.9. Gray A., Mathews G. B., MacRobert T. M. A treatise on the theory of Bessel functions. — L.: Macmillan Co., 1931. Русский перевод: Грей Э., Мэтьюз Г. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. — М.: ИЛ, 1953.

9.10. Magnus W., Oberhettinger F. Formeln und Sätze für die speziellen Functionen der mathematischen Physik. — B.: Springer-Verlag, 1948.

9.11. McLachlan N. W. Bessel functions for engineers. — Oxford: Clarendon Press, 1955.

9.12. Olver F. W. J. Some new asymptotic expansions for Bessel functions of large orders. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, **48**, p. 414—427.

9.13. Olver F. W. J. The asymptotic expansion of Bessel functions of large order. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1954, **A247**, p. 328—368.

9.14. Petiau G. La théorie des fonctions de Bessel. — P.: Centre National de la Recherche Scientifique, 1955.

9.15. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1958. Русский перевод: Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949. Ч. 1, 2.

9.16. Weyrich R. Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. — Leipzig: Teubner, 1937.

9.17. Whitehead C. S. On a generalization of the functions ber x, bei x, ker x, kei x. — Quart. J. Pure Appl. Math., 1911, **42**, p. 316—342.

9.18. Whittaker E. T., Watson G. N. A course of modern analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952. Русский перевод: Уиттекер Э. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1962, Т. I; 1963, Т. II.

Таблицы

9.19. Bridge J. F., Angrist S. W. An extended table of roots of $J_n'(x)Y_n'(\beta x) - J_n'(\beta x)Y_n(x) = 0$. — Math. Comp., 1962, **16**, p. 198—204.

9.20. British Association for the Advancement of Science. Bessel functions, P. I. Functions of orders zero and unity. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1950. — (Mathematical tables; V. 6).

9.21. British Association for the Advancement of Science. Bessel functions. P. II. Functions of positive integer order. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952. — (Mathematical tables; V. 10). Русский перевод: Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса. — М.: ВЦ АН СССР, 1960. — (БМТ; Вып. 12).

9.22. British Association for the Advancement of Science. — Annual Report (J. R. Airey), 1927, № 254.

9.23. Cambi E. Eleven and fifteen-place tables of Bessel functions of the first kind, to all significant orders. — N.Y.: Dover Publications, 1948.

9.24. Чистова Э. А. Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.

9.25. Dwight H. B. Tables of integrals and other mathematical data. — N.Y.: Macmillan Co., 1957. Русский перевод: Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977.

9.26. Dwight H. B. Table of roots for natural frequencies in coaxial type cavities. — J. Math. Phys., 1948, **27**, p. 84—89.

9.27. Фаддеева В. Н., Гавурин М. К. Таблицы функций Бесселя целых номеров от 0 до 120. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

9.28. Fox L. A short table for Bessel functions of integer orders and large arguments. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1954. — (Royal Society Shorter Mathematical Tables; № 3).

9.29. Goodwin E. T., Staton J. Table of $J_0(j_{0,n}, r)$. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, **1**, p. 220—224.

9.30. Harvard Computation Laboratory. Tables of the Bessel functions of the first kind of orders 0 through 135. — Cambridge: Harvard Univ. Press, 1947—1951, 3—14.

9.31. Hayashi K. Tafeln der Besselschen, Theta, Kugel und anderer Funktionen. — B.: Springer, 1930.

9.32. Jahnke E., Emde F., Lösch F. Tables of higher functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1960, Ch. IX. Русский перевод: Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

9.33. Кармазина Л. Н., Чистова Э. А. Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.

9.34. Mathematical tables project. Table of $f_n(x) = n!(x/2)^{-n} \times J_n(x)$. — J. Math. Phys., 1944, **23**, p.45 — 60.

9.35. National Bureau of Standards. Table of the Bessel functions $J_0(z)$ and $J_1(z)$ for complex arguments. — N.Y.: Columbia Univ. Press, 1947. Русский перевод: Таблицы функций Бесселя $J_0(z)$ и $J_1(z)$ в комплексной области. — М.: ВЦ АН СССР, 1963. — (БМТ; Вып. 22).

9.36. National Bureau of Standards. Tables of the Bessel functions $Y_0(z)$ and $Y_1(z)$ for complex arguments. — N.Y.: Columbia Univ. Press, 1950. Русский перевод: Таблицы функций Бесселя $Y_0(z)$ и $Y_1(z)$ в комплексной области. — М.: ВЦ АН СССР, 1963. — (БМТ; Вып. 23).

9.37. National Physical Laboratory. Mathematical tables, V. 5. Chebyshev series for mathematical functions/ C. W. Clenshaw. — L.: Her Majesty's Stationery Office, 1962.

9.38. National Physical Laboratory. Mathematical tables, V. 6. Tables for Bessel functions of moderate or large orders/ F. W. J. Olver. — L.: Her Majesty's Stationery Office, 1962.

9.39. Носова Л. Н. Таблицы функций Томпсона и их первых производных. — М.: Изд-во АН СССР, 1960.

9.40. Royal Society Mathematical Tables., V. 7. Bessel functions, P. III. Zeros and associated values. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960. Русский перевод: Таблицы нулей функций Бесселя. — М.: ВЦ АН СССР, 1967. — (БМТ; Вып 44).

9.41. Royal Society Mathematical tables, V. 10. Bessel functions, P. IV. Kelvin functions / A. Young, A. Kirk. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1963. Русский перевод: Таблицы функций Кельвина. — М.: ВЦ АН СССР, 1966. — (БМТ; Вып. 41).

9.42. Sibagaki W. 0.01% tables of modified Bessel functions, with the account of the methods used in the calculation. — T.: Baifukan, 1955.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

9.43. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.; Л.: Физматгиз, 1963.

Таблицы

9.44. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.

9.45. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. — М.; Л.: ГТТИ, 1933.

Глава 10

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Х. АНТОСЕВИЧ

СОДЕРЖАНИЕ

10.1. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Дифференциальное уравнение

10.1.1. $z^2w'' + 2zw' + [z^2 - n(n+1)]\,w = 0$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Частными решениями этого уравнения являются *сферические функции Бесселя первого рода*

$$j_n(z) = \sqrt{\pi/(2z)}\,J_{n+1/2}(z),$$

второго рода

$$y_n(z) = \sqrt{\pi/(2z)}\,Y_{n+1/2}(z)$$

и *третьего рода*

$$h_n^{(1)}(z) = j_n(z) + iy_n(z) = \sqrt{\pi/(2z)}\,H_{n+1/2}^{(1)}(z),$$

$$h_n^{(2)}(z) = j_n(z) - iy_n(z) = \sqrt{\pi/(2z)}\,H_{n+1/2}^{(2)}(z).$$

Пары функций $j_n(z)$, $y_n(z)$ и $h_n^{(1)}(z)$, $h_n^{(2)}(z)$ являются линейно независимыми решениями уравнения 10.1.1 для любого n. Об общих свойствах решений см. в 9.11.

Разложения в степенной ряд (см. 9.1.2, 9.1.10)

10.1.2. $$j_n(z) = \frac{z^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}\times$$
$$\times\left\{1 - \frac{z^2/2}{1!(2n+3)} + \frac{(z^2/2)^2}{2!(2n+3)(2n+5)} - \ldots\right\}.$$

10.1.3. $$y_n(z) = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{z^{n+1}}\times$$
$$\times\left\{1 - \frac{z^2/2}{1!(1-2n)} + \frac{(z^2/2)^2}{2!(1-2n)(3-2n)} - \ldots\right\}$$
$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Пределы при $z \to 0$

10.1.4. $$z^{-n}j_n(z) \to \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}.$$

10.1.5. $z^{n+1}y_n(z) \to -1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$

Вронскианы

10.1.6. $W\{j_n(z),\ y_n(z)\} = z^{-2}$.

10.1.7. $W\{h_n^{(1)}(z),\ h_n^{(2)}(z)\} = -2iz^{-2}\quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$

Выражения через элементарные функции

10.1.8. $$j_n(z) = z^{-1}[P(n+1/2,\ z)\sin(z - n\pi/2) + Q(n+1/2,\ z)\cos(z - n\pi/2)].$$

10.1.9. $$y_n(z) = (-1)^{n+1}z^{-1}[P(n+1/2,\ z)\cos(z + n\pi/2) - Q(n+1/2,\ z)\sin(z + n\pi/2)],$$

$$P(n+1/2,\ z) = 1 - \frac{(n+2)!}{2!\Gamma(n-1)}(2z)^{-2} + \frac{(n+4)!}{4!\Gamma(n-3)}(2z)^{-4} - \ldots = \sum_0^{[n/2]}(-1)^k(n+1/2,\ 2k)(2z)^{-2k},$$

$$Q(n+1/2,\ z) = \frac{(n+1)!}{1!\Gamma(n)}(2z)^{-1} - \frac{(n+3)!}{3!\Gamma(n-2)}(2z)^{-3} + \frac{(n+5)!}{5!\Gamma(n-4)}(2z)^{-5} - \ldots = \sum_0^{[(n-1)/2]}(-1)^k(n+1/2,\ 2k+1)(2z)^{-2k-1}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

$$(n+1/2,\ k)=\frac{(n+k)!}{k!\Gamma(n-k+1)}$$

n \ k	1	2	3	4	5
1	2				
2	6	12			
3	12	60	120		
4	20	180	840	1680	
5	30	420	3360	15120	30240

10.1.10. $j_n(z)=f_n(z)\sin z+(-1)^{n+1}f_{-n-1}(z)\cos z,$

$$f_0(z)=z^{-1},\ f_1(t)=z^{-2},$$

$$f_{n-1}(z)+f_{n+1}(z)=(2n+1)z^{-1}f_n(z)$$

$$(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Функции $j_n(z)$, $y_n(z)$ для $n=0,\ 1,\ 2$

10.1.11. $j_0(z)=\dfrac{\sin z}{z},$

$$j_1(z)=\frac{\sin z}{z^2}-\frac{\cos z}{z},$$

$$j_2(z)=\left(\frac{3}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\sin z-\frac{3}{z^2}\cos z.$$

10.1.12. $y_0(z)=-j_{-1}(z)=-\dfrac{\cos z}{z},$

$$y_1(z)=j_{-2}(z)=-\frac{\cos z}{z^2}-\frac{\sin z}{z},$$

$$y_2(z)=-j_{-3}(z)=\left(-\frac{3}{z^3}+\frac{1}{z}\right)\cos z-\frac{3}{z^2}\sin z.$$

Интеграл Пуассона и обобщение Гегенбауера
$(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$

10.1.13. $j_n(z)=\dfrac{z^n}{2^{n+1}n!}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(z\cos\theta)\sin^{2n+1}\theta\,d\theta$

(см. 9.1.20).

10.1.14. $j_n(z)=\dfrac{(-i)^n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}e^{iz\cos\theta}P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta.$

Сферические функции Бесселя второго и третьего рода

10.1.15. $y_n(z)=(-1)^{n+1}j_{-n-1}(z)\quad(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$

10.1.16. $h_n^{(1)}(z)=i^{-n-1}z^{-1}e^{iz}\displaystyle\sum_0^n(n+1/2,\ k)(-2iz)^{-k}.$

10.1.17. $h_n^{(2)}(z)=i^{n+1}z^{-1}e^{-iz}\displaystyle\sum_0^n(n+1/2,\ k)(2iz)^{-k}.$

10.1.18. $h_{-n-1}^{(1)}(z)=i(-1)^nh_n^{(1)}(z),$

$$h_{-n-1}^{(2)}(z)=-i(-1)^nh_n^{(2)}(z)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

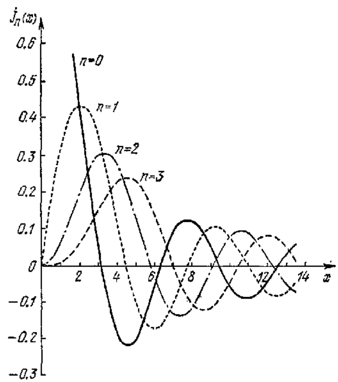


Рис. 10.1. $j_n(x)$; $n=0(1)3$.

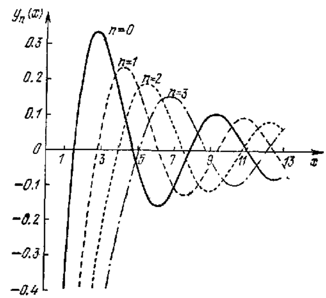


Рис. 10.2. $y_n(x)$; $n=0(1)3$.

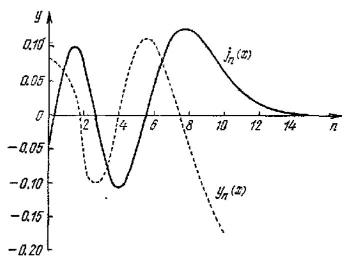


Рис. 10.3. $j_n(x)$, $y_n(x)$; $x=10$.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА

Рекуррентные соотношения

$f_n(z): j_n(z),\ y_n(z),\ h_n^{(1)}(z),\ h_n^{(2)}(z) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

10.1.19. $f_{n-1}(z) + f_{n+1}(z) = (2n+1) z^{-1} f_n(z).$

10.1.20. $n f_{n-1}(z) - (n+1) f_{n+1}(z) = (2n+1) \dfrac{d}{dz} f_n(z).$

10.1.21. $\dfrac{n+1}{z} f_n(z) + \dfrac{d}{dz} f_n(z) = f_{n-1}(z)$

(см. 10.1.23).

10.1.22. $\dfrac{n}{z} f_n(z) - \dfrac{d}{dz} f_n(z) = f_{n+1}(z)$

(см. 10.1.24).

Производные

$f_n(z): \ j_n(z),\ y_n(z),\ h_n^{(1)}(z),\ h_n^{(2)}(z)$
$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

10.1.23. $\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{d}{dz}\right)^m [z^{n+1} f_n(z)] = z^{n-m+1} f_{n-m}(z).$

10.1.24. $\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{d}{dz}\right)^m [z^{-n} f_n(z)] = (-1)^m z^{-n-m} f_{n+m}(z)$

$(m = 1, 2, 3, \ldots).$

Формулы Релея

10.1.25. $j_n(z) = z^n \left(-\dfrac{1}{z}\dfrac{d}{dz}\right)^n \dfrac{\sin z}{z}.$

10.1.26. $y_n(z) = -z^n \left(-\dfrac{1}{z}\dfrac{d}{dz}\right)^n \dfrac{\cos z}{z} \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$

Модуль и фаза

$$j_n(z) = \sqrt{\pi/(2z)}\, M_{n+1/2}(z) \cos \theta_{n+1/2}(z),$$
$$y_n(z) = \sqrt{\pi/(2z)}\, M_{n+1/2}(z) \sin \theta_{n+1/2}(z)$$

(см. 9.2.17).

10.1.27. $[\pi/(2z)]\, M_{n+1/2}^2(z) =$

$$= \frac{1}{z^2} \sum_0^n \frac{(2n-k)!\,(2n-2k)!}{k![(n-k)!]^2} (2z)^{2k-2n}$$

(см. 9.2.28).

10.1.28. $[\pi/(2z)]\, M_{1/2}^2(z) = j_0^2(z) + y_0^2(z) = z^{-2}.$

10.1.29. $[\pi/(2z)]\, M_{3/2}^2(z) = j_1^2(z) + y_1^2(z) = z^{-2} + z^{-4}.$

10.1.30. $[\pi/(2z)]\, M_{5/2}^2(z) = j_2^2(z) + y_2^2(z) = z^{-2} + 3z^{-4} + 9z^{-6}.$

Произведения функций

10.1.31. $j_n(z)\, y_{n-1}(z) - j_{n-1}(z)\, y_n(z) = z^{-2}.$

10.1.32. $j_{n+1}(z)\, y_{n-1}(z) - j_{n-1}(z)\, y_{n+1}(z) = (2n+1) z^{-3}.$

10.1.33. $j_0(z)\, j_n(z) + y_0(z)\, y_n(z) =$

$$= z^{-2} \sum_0^{[n/2]} (-1)^k 2^{n-2k} \left(k + \frac{1}{2}\right)_{n-2k} \binom{n-k}{k} z^{2k-n}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots).$

Аналитическое продолжение

10.1.34. $j_n(z e^{m\pi i}) = e^{mn\pi i} j_n(z).$

10.1.35. $y_n(z e^{m\pi i}) = (-1)^m e^{mn\pi i} y_n(z).$

10.1.36. $h_n^{(1)}(z e^{(2m+1)\pi i}) = (-1)^n h_n^{(2)}(z).$

10.1.37. $h_n^{(2)}(z e^{(2m+1)\pi i}) = (-1)^n h_n^{(1)}(z).$

10.1.38. $h_n^{(l)}(z e^{2m\pi i}) = h_n^{(l)}(z)$

$(l = 1, 2;\ m, n = 0, 1, 2, \ldots).$

Производящие функции

10.1.39. $\dfrac{1}{z} \sin \sqrt{z^2 + 2zt} = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-t)^n}{n!} y_{n-1}(z)$

$(2|t| < |z|).$

10.1.40. $\dfrac{1}{z} \cos \sqrt{z^2 - 2zt} = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} j_{n-1}(z).$

Производные относительно порядка

10.1.41. $\left[\dfrac{\partial}{\partial \nu} j_\nu(x)\right]_{\nu=0} [\pi/(2x)] \{\mathrm{Ci}(2x) \sin x -$

$- \mathrm{Si}(2x) \cos x\}.$

10.1.42. $\left[\dfrac{\partial}{\partial \nu} j_\nu(x)\right]_{\nu=-1} =$

$= [\pi/(2x)] \{\mathrm{Ci}(2x) \cos x + \mathrm{Si}(2x) \sin x\}.$

10.1.43. $\left[\dfrac{\partial}{\partial \nu} y_\nu(x)\right]_{\nu=0} =$

$= [\pi/(2x)] \{\mathrm{Ci}(2x) \cos x + [\mathrm{Si}(2x) - \pi] \sin x\}.$

10.1.44. $\left[\dfrac{\partial}{\partial \nu} y_\nu(x)\right]_{\nu=-1} =$

$= [\pi/(2x)] \{\mathrm{Ci}(2x) \sin x - [\mathrm{Si}(2x) - \pi] \cos x\}.$

Теоремы сложения и вырожденные формы

$(r, \rho, \theta, \lambda$ — произвольные комплексные;
$R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta})$

10.1.45. $\dfrac{\sin \lambda R}{\lambda R} = \displaystyle\sum_0^\infty (2n+1)\, j_n(\lambda r)\, j_n(\lambda \rho)\, P_n(\cos \theta).$

10.1.46. $-\dfrac{\cos \lambda R}{\lambda R} = \displaystyle\sum_0^\infty (2n+1)\, j_n(\lambda r)\, y_n(\lambda \rho)\, P_n(\cos \theta),$

$|re^{\pm i\theta}| < |\rho|.$

10.1.47. $e^{iz\cos\theta} = \displaystyle\sum_0^\infty (2n+1)\, e^{n\pi i/2} j_n(z)\, P_n(\cos \theta).$

10.1.48. $J_0(z \sin \theta) = \displaystyle\sum_0^\infty (4n+1) \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} j_{2n}(z)\, P_{2n}(\cos \theta).$

Формула удвоения

10.1.49. $j_n(2z) =$

$$= -n! z^{n+1} \sum_0^n \frac{2n-2k+1}{k!(2n-k+1)!} j_{n-k}(z)\, y_{n-k}(z).$$

Некоторые бесконечные ряды, содержащие $j_n^2(z)$

10.1.50. $\sum_0^\infty (2n+1) j_n^2(z) = 1.$

10.1.51. $\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) j_n^2(z) = \frac{\sin 2z}{2z}.$

10.1.52. $\sum_0^\infty j_n^2(z) = \frac{\mathrm{Si}\,(2z)}{2z}.$

Интегралы Френеля

10.1.53. $C\sqrt{2x/\pi} =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x J_{-1/2}(t)\,dt = \sqrt{2}\left[\cos\frac{x}{2}\sum_0^\infty (-1)^n J_{2n+1/2}\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2}\sum_0^\infty (-1)^n J_{2n+3/2}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

10.1.54. $S(\sqrt{2x/\pi}) = \frac{1}{2}\int_0^x J_{1/2}(t)\,dt =$

$$= \sqrt{2}\left[\sin\frac{x}{2}\sum_0^\infty (-1)^n J_{2n+1/2}\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\frac{x}{2}\sum_0^\infty (-1)^n J_{2n+3/2}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

(См. также 11.1.1, 11.1.2.)

Нули и их асимптотические разложения

Функции $j_n(x)$ и $y_n(x)$ имеют те же нули, что и функции $J_{n+1/2}(x)$ и $Y_{n+1/2}(x)$ соответственно. Поэтому для нулей функций $j_n(x)$ и $y_n(x)$ справедливы формулы раздела 9.5, в которых нужно положить $\nu = n + 1/2$. Однако там нет простых соотношений для нулей производных. Поэтому здесь даются формулы для $a'_{n,s}$, $b'_{n,s}$ — s-х положительных нулей функций $j'_n(z)$ и $y'_n(z)$ соответственно; $z = 0$ считается первым нулем функции $j'_0(z)$. (Таблицы значений $a'_{n,s}$, $b'_{n,s}$, $j_n(a'_{n,s})$, $y_n(b'_{n,s})$ см. в [10.31].)

Элементарные соотношения

$$f_n(z) = j_n(z)\cos\pi t + y_n(z)\sin\pi t$$

(t — действительный параметр, $0 \leqslant t \leqslant 1$). Если τ_n — нуль функции $f'_n(z)$, то

10.1.55. $f_n(\tau_n) = [\tau_n/(n+1)]\, f_{n-1}(\tau_n)$

(см. 10.1.21).

10.1.56. $f_n(\tau_n) = (\tau_n/n)\, f_{n+1}(\tau_n)$

(см. 10.1.22).

10.1.57. $f_n(\tau_n) = \left\{\frac{1}{\pi}\,[\tau_n^2 - n(n+1)]\,\frac{d\tau_n}{d\tau}\right\}^{-1/2}.$

Разложения Макмагона для фиксированного n и большого s

10.1.58. $a'_{n,s},\ b'_{n,s} \sim \beta - (\mu+7)(8\beta)^{-1} -$

$$- \frac{4}{3}(7\mu^2 + 154\mu + 95)(8\beta)^{-3} - \frac{32}{15}(85\mu^3 + 3535\mu^2 + 3561\mu + 6133)(8\beta)^{-5} - \frac{64}{105}(6949\mu^4 + 474908\mu^3 + 330638\mu^2 + 9046780\mu - 5075147)(8\beta)^{-7} - \ldots,$$

где $\beta = \pi\left(s + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)$ для $a'_{n,s}$, $\quad \beta = \pi\left(s + \frac{1}{2}n\right)$ для $b'_{n,s}$, $\mu = (2n+1)^2$.

Асимптотические разложения нулей и связанных с ними величин при больших значениях порядка n

10.1.59. $a'_{n,1} \sim \left(n+\frac{1}{2}\right) + 0.8086165\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/3} -$

$$- 0.236680\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1/3} - 0.20736\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1} + 0.0233\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-5/3} + \ldots$$

10.1.60. $b'_{n,1} \sim \left(n+\frac{1}{2}\right) + 1.8210980\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/3} +$

$$+ 0.802728\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1/3} - 0.11740\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1} + 0.0249\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-5/3} + \ldots$$

10.1.61. $j_n(a'_{n,1}) \sim$

$$\sim 0.8458430\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-5/6}\left\{1 - 0.566032\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} + 0.38081\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-4/3} - 0.2203\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2} + \ldots\right\}.$$

10.1.62. $y_n(b'_{n,1}) \sim$

$$\sim 0.7183921\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-5/6}\left\{1 - 1.274769\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} + 1.23038\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-4/3} - 1.0070\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2} + \ldots\right\}.$$

Соответствующие разложения для $s = 2$ и $s = 3$ см. в [10.31].

Равномерные асимптотические разложения нулей и связанных с ними величин при больших значениях порядка n

10.1.63. $a'_{n,s} \sim \left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{z\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} a'_s\right] + \sum_{k=1}^\infty h_k\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} a'_s\right]\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2k}\right\}.$

10.1.64. $b'_{n,s} \sim \left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{z\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} b'_s\right] + \sum_{k=1}^{\infty} h_k\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} b'_s\right]\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2k}\right\}.$

10.1.65. $j_n(a'_{n,s}) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{Ai}(a'_s)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-5/6} \times h\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} a'_s\right]\left(z\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} a'_s\right]\right)^{-1/2} \times \left\{1+\sum_{k=1}^{\infty} H_k\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} a'_s\right]\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2k}\right\}.$

10.1.66. $y_n(b'_{n,s}) \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{Bi}(b'_s)\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-5/6} \times h\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} b'_s\right]\left(z\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} b'_s\right]\right)^{-1/2} \times \left\{1+\sum_{k=1}^{\infty} H_k\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2/3} b'_s\right]\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2k}\right\}.$

$h(\zeta)$, $z(\zeta)$ определены, как и в 9.5.26, 9.3.38, 9.3.39. a'_s, b'_s — s-е отрицательные действительные нули функций $\mathrm{Ai}'(z)$ и $\mathrm{Bi}'(z)$ соответственно (см. 10.4.95, 10.4.99).

Комплексные нули $h_n^{(1)}(z)$, $h_n^{(1)\prime}(z)$

Функции $h_n^{(1)}(z)$ и $h_n^{(1)\prime}(ze^{2m\pi i})$ (m — любое целое число) имеют одни и те же нули.

$h_n^{(1)}(z)$ n имеет нулей, симметричных относительно мнимой оси и располагающихся примерно по конечной дуге, соединяющей точки $z=-n$ и $z=n$ и изображенной на рис. 9.6. Если n — нечетное, то один нуль лежит на мнимой оси.

$h_n^{(1)\prime}(z)$ имеет $(n+1)$ нулей, лежащих вблизи той же кривой. Если n — четное, один нуль лежит на мнимой оси.

$-\zeta$	$(-\zeta)h_1(\zeta)$	$(-\zeta)h_2(\zeta)$	$(-\zeta)h_3(\zeta)$	$(-\zeta)^2 H_1(\zeta)$	$(-\zeta)^4 H_2(\zeta)$	$(-\zeta)^6 H_3(\zeta)$
0.0	−0.4409724	−0.122500	−0.06806	0.000000	0.00000	0.0000
0.2	−0.4572444	−0.114201	−0.05986	0.027518	0.00575	0.0023
0.4	−0.4702250	−0.107243	−0.05279	0.049069	0.01118	0.0043
0.6	−0.4802184	−0.101318	−0.04674	0.065677	0.01592	0.0061
0.8	−0.4875705	−0.096159	−0.04160	0.078255	0.01983	0.0075
1.0	−0.4926355	−0.091561	−0.03725	0.087587	0.02290	0.0085

$-\zeta$	$h_1(\zeta)$	$h_2(\zeta)$	$h_3(\zeta)$	$H_1(\zeta)$	$H_2(\zeta)$	
1.0	−0.4926355	−0.09156	−0.037	0.087587	0.0229	
1.2	−0.4131280	−0.05056	−0.014	0.065507	0.0121	
1.4	−0.3551700	−0.03043	−0.006	0.050524	0.0070	
1.6	−0.3108548	−0.01950	−0.003	0.039890	0.0042	
1.8	−0.2757704	−0.01310	−0.001	0.032085	0.0027	
2.0	−0.2472521	−0.00914		0.026206	0.0018	
2.2	−0.2235898	−0.00658		0.021682	0.0012	
2.4	−0.2036314	−0.00485		0.018141	0.0008	
2.6	−0.1865701	−0.00366		0.015326	0.0006	
2.8	−0.1718217	−0.00280		0.013061	0.0004	
3.0	−0.1589519	−0.00219		0.011217	0.0003	
3.2	−0.1476304	−0.00173		0.009701	0.0002	
3.4	−0.1376005	−0.00138		0.008443	0.0002	
3.6	−0.1286601	−0.00112		0.007391	0.0001	
3.8	−0.1206469	−0.00091		0.006505	0.0001	
4.0	−0.1134296	−0.00075		0.005753		
4.2	−0.1069004	−0.00062		0.005111		
4.4	−0.1009699	−0.00052		0.004560		
4.6	−0.0955634	−0.00044		0.004085		
4.8	−0.0906180	−0.00037		0.003672		
5.0	−0.0860804	−0.00032		0.003313		
5.2	−0.0819049	−0.00027		0.002998		
5.4	−0.0780523	−0.00023		0.002722		
5.6	−0.0744888	−0.00020		0.002478		
5.8	−0.0711850	−0.00018		0.002262		

Продолжение таблицы

$-\zeta$	$h_1(\zeta)$	$h_2(\zeta)$	$h_3(\zeta)$	$H_1(\zeta)$	$H_2(\zeta)$	
6.0	−0.0681152	−0.00015		0.002070		
6.2	−0.0652570	−0.00013		0.001899		
6.4	−0.0625905	−0.00012		0.001746		
6.6	−0.0600985	−0.00010		0.001609		
6.8	−0.0577653	−0.00009		0.001486		
7.0	−0.0555773	−0.00008		0.001375		

$(-\zeta)^{-1/2}$	$h_1(\zeta)$	$h_2(\zeta)$	$H_1(\zeta)$	$(-\zeta)^{-1/2}$	$h_1(\zeta)$	$h_2(\zeta)$	$H_1(\zeta)$
0.40	−0.0645731	−0.00013	0.001859	0.20	−0.0091416		0.000037
0.36	−0.0487592	−0.00005	0.001056	0.16	−0.0047276		0.000010
0.32	−0.0352949	−0.00002	0.000551	0.12	−0.0020068		0.000002
0.28	−0.0242415	−0.00001	0.000259	0.08	−0.0005965		
0.24	−0.0155683		0.000106	0.04	−0.0000747		
				0.00	−0.0000000		

10.2. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Дифференциальное уравнение

10.2.1. $z^2w'' + 2zw' - [z^2 + n(n+1)]\,w = 0$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Частные решения этого уравнения — *модифицированные сферические функции Бесселя первого рода*:

10.2.2. $\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{n+1/2}(z) = e^{-n\pi i/2} j_n(ze^{\pi i/2})$

$$(-\pi < \arg z \leqslant \pi/2),$$

$$\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{n+1/2}(z) = e^{3n\pi i/2} j_n(ze^{-3\pi i/2}) \quad (\pi/2 < \arg z \leqslant \pi),$$

второго рода:

10.2.3. $\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{-n-1/2}(z) = e^{3(n+1)\pi i/2} y_n(ze^{\pi i/2})$

$$(-\pi < \arg z \leqslant \pi/2),$$

$$\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{-n-1/2}(z) = e^{-(n+1)\pi i/2} y_n(ze^{-3\pi i/2})$$

$$(\pi/2 < \arg z \leqslant \pi),$$

третьего рода:

10.2.4. $\sqrt{\pi/(2z)}\,K_{n+1/2}(z) =$

$$= (\pi/2)\,(-1)^{n+1}\sqrt{\pi/(2z)}\,[I_{n+1/2}(z) - I_{-n-1/2}(z)].$$

Пары функций

$$\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{n+1/2}(z), \quad \sqrt{\pi/(2z)}\,I_{-n-1/2}(z);$$

$$\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{n+1/2}(z), \quad \sqrt{\pi/(2z)}\,K_{n+1/2}(z)$$

являются линейно независимыми решениями уравнения 10.2.1 для каждого n.

Большинство свойств модифицированных сферических функций Бесселя может быть получено из свойств сферических функций Бесселя с помощью вышеуказанных соотношений.

Разложения в степенной ряд

10.2.5. $\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{n+1/2}(z) = \dfrac{z^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)} \times$

$$\times\left\{1 + \frac{z^2/2}{1!(2n+3)} + \frac{(z^2/2)^2}{2!(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right\}.$$

10.2.6. $\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{-n-1/2} = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{(-1)^n z^{n+1}} \times$

$$\times\left\{1 + \frac{z^2/2}{1!(1-2n)} + \frac{(z^2/2)^2}{2!(1-2n)(3-2n)} + \ldots\right\}$$

Вронскианы

10.2.7. $W\{\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{n+1/2}(z),\ \sqrt{\pi/(2z)}\,I_{-n-1/2}(z)\} =$

$$= (-1)^{n+1}z^{-2}.$$

10.2.8. $W\{\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{n+1/2},\ \sqrt{\pi/(2z)}\,K_{n+1/2}(z)\} = -\pi z^{-2}/2.$

Выражения через элементарные функции

10.2.9. $\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{n+1/2}(z) =$

$$= (2z)^{-1}\,[R(n+1/2,\ -z)\,e^z - (-1)^n R(n+1/2,\ z)\,e^{-z}].$$

10.2.10. $\sqrt{\pi/(2z)}\,I_{-n-1/2}(z) =$

$$= (2z)^{-1}\,[R(n+1/2,\ -z)\,e^z + (-1)^n R(n+1/2,\ z)\,e^{-z}].$$

10.2.11. $R(n+1/2,\ z) =$

$$= 1 + \frac{(n+1)!}{1!\,\Gamma(n)}(2z)^{-1} + \frac{(n+2)!}{2!\,\Gamma(n-1)}(2z)^{-2} + \ldots =$$

$$= \sum_0^n (n+1/2,\ k)\,(2z)^{-k} \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

(см. 10.1.9).

10.2.12. $\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{n+1/2}(z) = g_n(z)\,\mathrm{sh}\, z + g_{-n-1}(z)\,\mathrm{ch}\, z,$

$$g_0(z) = z^{-1}, \quad g_1(z) = -z^{-2},$$

$$g_{n-1}(z) - g_{n+1}(z) = (2n+1)\, z^{-1} g_n(z) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Функции $\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{\pm(n+1/2)}(z),\ n = 0,\ 1,\ 2$

10.2.13. $\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{1/2}(z) = \dfrac{\mathrm{sh}\, z}{z},$

$$\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{3/2}(z) = -\frac{\mathrm{sh}\, z}{z^2} + \frac{\mathrm{ch}\, z}{z},$$

$$\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{5/2}(z) = \left(\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z}\right)\mathrm{sh}\, z - \frac{3}{z^2}\,\mathrm{ch}\, z.$$

10.2.14. $\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{-1/2}(z) = \dfrac{\mathrm{ch}\, z}{z},$

$$\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{-3/2}(z) = \frac{\mathrm{sh}\, z}{z} - \frac{\mathrm{ch}\, z}{z^2},$$

$$\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{-5/2}(z) = -\frac{3}{z^2}\,\mathrm{sh}\, z + \left(\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z}\right)\mathrm{ch}\, z.$$

Модифицированные сферические функции Бесселя третьего рода

10.2.15. $\sqrt{\pi/(2z)}\, K_{n+1/2}(z) = \dfrac{1}{2}\,\pi i e^{(n+1)\pi i/2} h_n^{(1)}(z e^{\pi i/2})$

$$(-\pi < \arg z \leqslant \pi/2),$$

$$\sqrt{\pi/(2z)}\, K_{n+1/2}(z) = -\frac{1}{2}\,\pi i e^{-(n+1)\pi i/2} h_n^{(2)}(z e^{-\pi i/2})$$

$$(\pi/2 < \arg z \leqslant \pi),$$

$$\sqrt{\pi/(2z)}\, K_{n+1/2}(z) = \frac{\pi}{2z}\, e^{-z} \sum_{0}^{n} \left(n + \frac{1}{2},\ k\right)(2z)^{-k}.$$

10.2.16. $K_{n+1/2}(z) = K_{-n-1/2}(z) \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$

Функции $\sqrt{\pi/(2z)}\, K_{n+1/2}(z),\ n = 0,\ 1,\ 2$

10.2.17. $\sqrt{\pi/(2z)}\, K_{1/2}(z) = [\pi/(2z)]\, e^{-z},$

$$\sqrt{\pi/(2z)}\, K_{3/2}(z) = [\pi/(2z)]\, e^{-z}(1 + z^{-1}),$$

$$\sqrt{\pi/(2z)}\, K_{5/2}(z) = [\pi/(2z)]\, e^{-z}(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2}).$$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА

Рекуррентные соотношения

$f_n(z)$: $\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{n+1/2}(z),$

$(-1)^{n+1}\sqrt{\pi/2(z)}\, K_{n+1/2}(z) \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$

10.2.18. $f_{n-1}(z) - f_{n+1}(z) = (2n+1) z^{-1} f_n(z).$

10.2.19. $n f_{n-1}(z) + (n+1) f_{n+1}(z) = (2n+1)\dfrac{d}{dz} f_n(z).$

10.2.20. $\dfrac{n+1}{z} f_n(z) + \dfrac{d}{dz} f_n(z) = f_{n-1}(z)$

(см. 10.2.22).

10.2.21. $-\dfrac{n}{z} f_n(z) + \dfrac{d}{dz} f_n(z) = f_{n+1}(z)$

(см. 10.2.23).

Производные

$f_n(z)$: $\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{n+1/2}(z),\ (-1)^{n+1}\sqrt{\pi/(2z)}\, K_{n+1/2}(z)$

$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$

10.2.22. $\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{d}{dz}\right)^m [z^{n+1} f_n(z)] = z^{n-m+1} f_{n-m}(z).$

10.2.23. $\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{d}{dz}\right)^m [z^{-n} f_n(z)] = z^{-n-m} f_{n+m}(z)$

$$(m = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

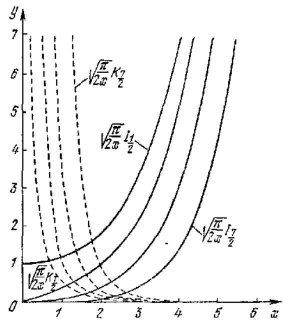


Рис. 10.4. $\sqrt{\pi/(2x)}\, I_{n+1/2}(x),$ $\sqrt{\pi/(2x)}\, K_{n+1/2}(x);\ n = 0(1)3.$

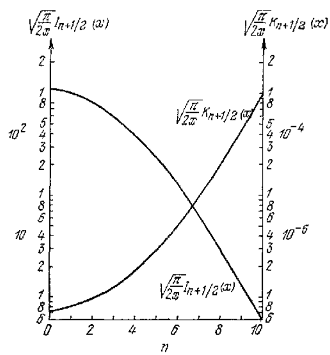


Рис. 10.5. $\sqrt{\pi/(2x)}\, I_{n+1/2}(x),$ $\sqrt{\pi/(2x)}\, K_{n+1/2}(x);\ x = 10.$

Формулы типа Релея

10.2.24. $\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{n+1/2}(z) = z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \frac{\operatorname{sh} z}{z}$.

10.2.25. $\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{-n-1/2}(z) = z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \frac{\operatorname{ch} z}{z}$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Формулы для $I^2_{n+1/2}(z) - I^2_{-n-1/2}(z)$

10.2.26. $(\pi/2z)\,[I^2_{n+1/2}(z) - I^2_{-n-1/2}(z)] =$

$$= \frac{1}{z^2}\sum_{0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(2n-k)!\,(2n-2k)!}{k!\,[(n-k)!]^2}(2z)^{2k-2n}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

10.2.27. $[\pi/(2z)]\,[I^2_{1/2}(z) - I^2_{-1/2}(z)] = -z^{-2}$.

10.2.28. $[\pi/(2z)]\,[I^2_{3/2}(z) - I^2_{-3/2}(z)] = z^{-2} - z^{-4}$.

10.2.29. $[\pi/(2z)]\,[I^2_{5/2}(z) - I^2_{-5/2}(z)] = -z^{-2} + 3z^{-4} - 9z^{-6}$.

Производящие функции

10.2.30. $\frac{1}{z}\operatorname{sh}\sqrt{z^2 - 2izt} = \sum_{0}^{\infty}\frac{(-it)^n}{n!}[\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{-n+1/2}(z)]$

$(2|t| < |z|)$.

10.2.31. $\frac{1}{z}\operatorname{ch}\sqrt{z^2 + 2izt} = \sum_{0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}[\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{n-1/2}(z)]$.

Производные относительно порядка

10.2.32. $\left[\frac{\partial}{\partial\nu} I_\nu(x)\right]_{\nu=1/2} =$

$$= -\frac{1}{2\pi x}[\operatorname{Ei}(2x)\, e^{-x} - E_1(-2x)\, e^{x}].$$

10.2.33. $\left[\frac{\partial}{\partial\nu} I_\nu(x)\right]_{\nu=-1/2} =$

$$= \frac{1}{2\pi x}[\operatorname{Ei}(2x)\, e^{-x} + E_1(-2x)\, e^{x}].$$

10.2.34. $\left[\frac{\partial}{\partial\nu} K_\nu(x)\right]_{\nu=\pm 1/2} = \mp\sqrt{\pi/(2x)}\operatorname{Ei}(-2x)\, e^{x}$.

Функции $E_1(x)$ и $\operatorname{Ei}(x)$ см. в 5.1.1, 5.1.2.

Теоремы сложения и вырожденные формы

(r, ρ, θ, λ — произвольные комплексные;
$R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\theta}$)

10.2.35. $\frac{e^{-\lambda R}}{\lambda R} = \frac{2}{\pi}\sum_{0}^{\infty}(2n+1)\,[\sqrt{\pi/(2\lambda r)}\, I_{n+1/2}(\lambda r)] \times$

$\times [\sqrt{\pi/(2\lambda\rho)}\, K_{n+1/2}(\lambda\rho)]\, P_n(\cos\theta)$.

10.2.36. $e^{z\cos\theta} = \sum_{0}^{\infty}(2n+1)\,[\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{n+1/2}(z)]\, P_n(\cos\theta)$.

10.2.37. $e^{-z\cos\theta} =$

$$= \sum_{0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,[\sqrt{\pi/(2z)}\, I_{n+1/2}(z)]\, P_n(\cos\theta).$$

Формула удвоения

10.2.38. $K_{n+1/2}(2z) =$

$$= n!\,\pi^{-1/2} z^{n+1/2}\sum_{0}^{n}\frac{(-1)^k(2n-2k+1)}{k!\,(2n-k+1)!}K^2_{n-k+1/2}(z).$$

10.3. ФУНКЦИИ РИККАТИ—БЕССЕЛЯ

Дифференциальное уравнение

10.3.1. $z^2 w'' + [z^2 - n(n+1)]\, w = 0$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Пары линейно независимых решений этого уравнения имеют вид:

$$zj_n(z),\quad zy_n(z);$$

$$zh_n^{(1)}(z),\quad zh_n^{(2)}(z).$$

Все свойства этих функций следуют непосредственно из свойств сферических функций Бесселя.

Функции $zj_n(z)$, $zy_n(z)$, $n = 0, 1, 2$

10.3.2. $zj_0(z) = \sin z$, $zj_1(z) = z^{-1}\sin z - \cos z$,

$zj_2(z) = (3z^{-2} - 1)\sin z - 3z^{-1}\cos z$.

10.3.3. $zy_0(z) = -\cos z$, $zy_1(z) = -\sin z - z^{-1}\cos z$,

$zy_2(z) = -3z^{-1}\sin z - (3z^{-2} - 1)\cos z$.

Вронскианы

10.3.4. $W\{zj_n(z), zy_n(z)\} = 1$.

10.3.5. $W\{zh_n^{(1)}(z), zh_n^{(2)}(z)\} = -2i$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

10.4. ФУНКЦИИ ЭЙРИ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА

Дифференциальное уравнение

10.4.1. $w'' - zw = 0.$

Пары линейно независимых решений этого уравнения таковы:

$$\mathrm{Ai}(z),\quad \mathrm{Bi}(z);$$
$$\mathrm{Ai}(z),\quad \mathrm{Ai}(ze^{2\pi i/3});$$
$$\mathrm{Ai}(z),\quad \mathrm{Ai}(ze^{-2\pi i/3}).$$

Разложения в степенной ряд

10.4.2. $\mathrm{Ai}\,(z) = c_1 f(z) - c_2 g(z).$

10.4.3. $\mathrm{Bi}\,(z) = \sqrt{3}\,[c_1 f(z) + c_2 g(z)],$

$$f(z) = 1 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1\cdot 4}{6!}z^6 + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}z^9 + \ldots = \sum_0^\infty 3^k\left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{z^{3k}}{(3k)!},$$

$$g(z) = z + \frac{2}{4!}z^4 + \frac{2\cdot 5}{7!}z^7 + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}z^{10} + \ldots = \sum_0^\infty 3^k\left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{z^{3k+1}}{(3k+1)!},$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)_0 = 1,$$

$$3^k\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)_k = (3\alpha + 1)(3\alpha + 4)\ldots(3\alpha + 3k - 2)$$

(α — произвольное; $k = 1, 2, 3, \ldots$) (см. 6.1.22).

10.4.4. $c_1 = \mathrm{Ai}(0) = \mathrm{Bi}(0)/\sqrt{3} = 3^{-2/3}/\Gamma(2/3) = 0.35502\,80538\,87817.$

10.4.5. $c_2 = -\mathrm{Ai}'(0) = \mathrm{Bi}'(0)/\sqrt{3} = 3^{-1/3}/\Gamma(1/3) = 0.25881\,94037\,92807.$

Соотношения между решениями

10.4.6. $\mathrm{Bi}(z) = e^{\pi i/6}\,\mathrm{Ai}(ze^{2\pi i/3}) + e^{-\pi i/6}\,\mathrm{Ai}(ze^{-2\pi i/3}).$

10.4.7. $\mathrm{Ai}(z) + e^{2\pi i/3}\,\mathrm{Ai}(ze^{2\pi i/3}) + e^{-2\pi i/3}\,\mathrm{Ai}(ze^{-2\pi i/3}) = 0.$

10.4.8. $\mathrm{Bi}(z) + e^{2\pi i/3}\,\mathrm{Bi}(ze^{2\pi i/3}) + e^{-2\pi i/3}\,\mathrm{Bi}(ze^{-2\pi i/3}) = 0.$

10.4.9. $\mathrm{Ai}(ze^{\pm 2\pi i/3}) = \dfrac{1}{2}e^{\pm\pi i/3}[\mathrm{Ai}(z) \mp i\,\mathrm{Bi}(z)].$

Вронскианы

10.4.10. $W\{\mathrm{Ai}\,(z),\ \mathrm{Bi}\,(z)\} = \pi^{-1}.$

10.4.11. $W\{\mathrm{Ai}\,(z),\ \mathrm{Ai}\,(ze^{2\pi i/3})\} = \dfrac{1}{2}\pi^{-1}e^{-\pi i/6}.$

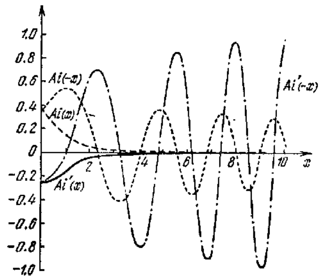


Рис. 10.6. $\mathrm{Ai}(\pm x)$, $\mathrm{Ai}'(\pm x)$.

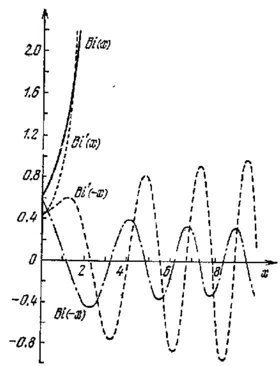


Рис. 10.7. $\mathrm{Bi}(\pm x)$, $\mathrm{Bi}'(\pm x)$.

10.4.12. $W\{\mathrm{Ai}\,(z),\ \mathrm{Ai}\,(ze^{-2\pi i/3})\} = \dfrac{1}{2}\pi^{-1}e^{\pi i/6}.$

10.4.13. $W\{\mathrm{Ai}\,(ze^{2\pi i/3}),\ \mathrm{Ai}\,(ze^{-2\pi i/3})\} = \dfrac{1}{2}i\pi^{-1}.$

Выражения через функции Бесселя

$$\left(\zeta = \frac{2}{3}z^{3/2}\right)$$

10.4.14. $\mathrm{Ai}\,(z) = \dfrac{1}{3}\sqrt{z}\,[I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)] = \pi^{-1}\sqrt{z/3}\;K_{1/3}(\zeta).$

10.4.15. $\mathrm{Ai}\,(-z) = \dfrac{1}{3}\sqrt{z}\,[J_{1/3}(\zeta) + J_{-1/3}(\zeta)] = \dfrac{1}{2}\sqrt{z/3}\,[e^{\pi i/6}H^{(1)}_{1/3}(\zeta) + e^{-\pi i/6}H^{(2)}_{1/3}(\zeta)].$

10.4.16. $-\mathrm{Ai}'(z) = \frac{1}{3} z[I_{-2/3}(\zeta) - I_{2/3}(\zeta)] = \pi^{-1}(z/\sqrt{3})\, K_{2/3}(\zeta).$

10.4.17. $\mathrm{Ai}'(-z) = -\frac{1}{3} z[J_{-2/3}(\zeta) - J_{2/3}(\zeta)] = \frac{1}{2}(z/\sqrt{3})\,[e^{-\pi i/6}H^{(1)}_{2/3}(\zeta) + e^{\pi i/6}H^{(2)}_{2/3}(\zeta)].$

10.4.18. $\mathrm{Bi}(z) = \sqrt{z/3}\,[I_{-1/3}(\zeta) + I_{1/3}(\zeta)].$

10.4.19. $\mathrm{Bi}(-z) = \sqrt{z/3}\,[J_{-1/3}(\zeta) - J_{1/3}(\zeta)] = \frac{1}{2}\, i\sqrt{z/3}\,[e^{\pi i/6}H^{(1)}_{1/3}(\zeta) - e^{-\pi i/6}H^{(2)}_{1/3}(\zeta)].$

10.4.20. $\mathrm{Bi}'(z) = (z/\sqrt{3})\,[I_{-2/3}(\zeta) + I_{2/3}(\zeta)].$

10.4.21. $\mathrm{Bi}'(-z) = (z/\sqrt{3})\,[J_{-2/3}(\zeta) + J_{2/3}(\zeta)] = \frac{1}{2}\, i(z/\sqrt{3})\,[e^{-\pi i/6}H^{(1)}_{2/3}(\zeta) - e^{\pi i/6}H^{(2)}_{2/3}(\zeta)].$

Выражения функций Бесселя через функции Эйри

$$z = \left(\frac{3}{2}\zeta\right)^{2/3}$$

10.4.22. $J_{\pm 1/3}(\zeta) = \frac{1}{2}\sqrt{3/z}\,[\sqrt{3}\,\mathrm{Ai}(-z) \mp \mathrm{Bi}(-z)].$

10.4.23. $H^{(1)}_{\pm 1/3}(\zeta) = e^{\mp\pi i/6}\sqrt{3/z}\,[\mathrm{Ai}(-z) - i\,\mathrm{Bi}(-z)].$

10.4.24. $H^{(2)}_{\pm 1/3}(\zeta) = e^{\pm\pi i/6}\sqrt{3/z}\,[\mathrm{Ai}(-z) + i\,\mathrm{Bi}(-z)].$

10.4.25. $I_{\pm 1/3}(\zeta) = \frac{1}{2}\sqrt{3/z}\,[\mp\sqrt{3}\,\mathrm{Ai}(z) + \mathrm{Bi}(z)].$

10.4.26. $K_{\pm 1/3}(\zeta) = \pi\sqrt{3/z}\,\mathrm{Ai}(z).$

10.4.27. $J_{\pm 2/3}(\zeta) = \frac{\sqrt{3}}{2z}\,[\pm\sqrt{3}\,\mathrm{Ai}'(-z) + \mathrm{Bi}'(-z)].$

10.4.28. $H^{(1)}_{2/3}(\zeta) = e^{-2\pi i/3}H^{(1)}_{-2/3}(\zeta) = e^{\pi i/6}(\sqrt{3}/z)\,[\mathrm{Ai}'(-z) - i\,\mathrm{Bi}'(-z)].$

10.4.29. $H^{(2)}_{2/3}(\zeta) = e^{2\pi i/3}H^{(2)}_{-2/3}(\zeta) = e^{-\pi i/6}(\sqrt{3}/z)\,[\mathrm{Ai}'(-z) + i\,\mathrm{Bi}'(-z)].$

10.4.30. $I_{\pm 2/3}(\zeta) = \frac{\sqrt{3}}{2z}\,[\pm\sqrt{3}\,\mathrm{Ai}'(z) + \mathrm{Bi}'(z)].$

10.4.31. $K_{\pm 2/3}(\zeta) = -\pi(\sqrt{3}/z)\,\mathrm{Ai}'(z).$

Интегральные представления

10.4.32. $(3a)^{-1/3}\pi\,\mathrm{Ai}\,[\pm(3a)^{-1/3}x] = \int\limits_0^\infty \cos(at^3 \pm xt)\,dt.$

10.4.33. $(3a)^{-1/3}\pi\,\mathrm{Bi}[\pm(3a)^{-1/3}x] = \int\limits_0^\infty [\exp(-at^3 \pm xt) + \sin(at^3 \pm xt)]\,dt.$

Интегралы $\int\limits_0^z \mathrm{Ai}(\pm t)\,dt$, $\int\limits_0^z \mathrm{Bi}(\pm t)\,dt$

$$\left(\zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}\right)$$

10.4.34. $\int\limits_0^z \mathrm{Ai}(t)\,dt = \frac{1}{3}\int\limits_0^\zeta [I_{-1/3}(t) - I_{1/3}(t)]\,dt.$

10.4.35. $\int\limits_0^z \mathrm{Ai}(-t)\,dt = \frac{1}{3}\int\limits_0^\zeta [J_{-1/3}(t) + J_{1/3}(t)]\,dt.$

10.4.36. $\int\limits_0^z \mathrm{Bi}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_0^\zeta [I_{-1/3}(t) + I_{1/3}(t)]\,dt.$

10.4.37. $\int\limits_0^z \mathrm{Bi}(-t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_0^\zeta [J_{-1/3}(t) - J_{1/3}(t)]\,dt.$

Разложение интегралов $\int\limits_0^z \mathrm{Ai}(\pm t)\,dt$, $\int\limits_0^z \mathrm{Bi}(\pm t)\,dt$ в степенной ряд

10.4.38. $\int\limits_0^z \mathrm{Ai}(t)\,dt = c_1 F(z) - c_2 G(z)$

(см. 10.4.2).

10.4.39. $\int\limits_0^z \mathrm{Ai}(-t)\,dt = -c_1 F(-z) + c_2 G(-z).$

10.4.40. $\int\limits_0^z \mathrm{Bi}(t)\,dt = \sqrt{3}\,[c_1 F(z) + c_2 G(z)]$

(см. 10.4.3).

10.4.41. $\int\limits_0^z \mathrm{Bi}(-t)\,dt = -\sqrt{3}\,[c_1 F(-z) + c_2 G(-z)].$

В формулах 10.4.38 — 10.4.41

$$F(z) = z + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{1\cdot 4}{7!}z^7 + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{10!}z^{10} + \ldots = \sum_0^\infty 3^k\left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{z^{3k+1}}{(3k+1)!},$$

$$G(z) = \frac{1}{2!}z^2 + \frac{2}{5!}z^5 + \frac{2\cdot 5}{8!}z^8 + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{11!}z^{11} + \ldots = \sum_0^\infty 3^k\left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{z^{3k+2}}{(3k+2)!}.$$

Константы c_1, c_2 определены формулами 10.4.4 и 10.4.5.

Функции $\mathrm{Gi}(z)$, $\mathrm{Hi}(z)$

10.4.42. $$\mathrm{Gi}(z) = \pi^{-1}\int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{3}t^3 + zt\right)dt = \frac{1}{3}\mathrm{Bi}(z) + \int_0^z [\mathrm{Ai}(z)\,\mathrm{Bi}(t) - \mathrm{Ai}(t)\,\mathrm{Bi}(z)]\,dt.$$

10.4.43. $$\mathrm{Gi}'(z) = \frac{1}{3}\mathrm{Bi}'(z) + \int_0^z [\mathrm{Ai}'(z)\,\mathrm{Bi}(t) - \mathrm{Ai}(t)\,\mathrm{Bi}'(z)]\,dt.$$

10.4.44. $$\mathrm{Hi}(z) = \pi^{-1}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{3}t^3 + zt\right)dt = \frac{2}{3}\mathrm{Bi}(z) + \int_0^z [\mathrm{Ai}(t)\,\mathrm{Bi}(z) - \mathrm{Ai}(z)\,\mathrm{Bi}(t)]\,dt.$$

10.4.45. $$\mathrm{Hi}'(z) = \frac{2}{3}\mathrm{Bi}'(z) + \int_0^z [\mathrm{Ai}(t)\,\mathrm{Bi}'(z) - \mathrm{Ai}'(z)\,\mathrm{Bi}(t)]\,dt.$$

10.4.46. $\mathrm{Gi}(z) + \mathrm{Hi}(z) = \mathrm{Bi}(z)$.

Выражения интегралов $\int_0^z \mathrm{Ai}(\pm t)\,dt$, $\int_0^z \mathrm{Bi}(\pm t)\,dt$ **через** $\mathrm{Gi}(\pm z)$, $\mathrm{Hi}(\pm z)$

10.4.47. $$\int_0^z \mathrm{Ai}(t)\,dt = \frac{1}{3} + \pi[\mathrm{Ai}'(z)\,\mathrm{Gi}(z) - \mathrm{Ai}(z)\,\mathrm{Gi}'(z)].$$

10.4.48. $$\int_0^z \mathrm{Ai}(t)\,dt = -\frac{2}{3} - \pi[\mathrm{Ai}'(z)\,\mathrm{Hi}(z) - \mathrm{Ai}(z)\,\mathrm{Hi}'(z)].$$

10.4.49. $$\int_0^z \mathrm{Ai}(-t)\,dt = -\frac{1}{3} - \pi[\mathrm{Ai}'(-z)\,\mathrm{Gi}(-z) - \mathrm{Ai}(-z)\,\mathrm{Gi}'(-z)].$$

10.4.50. $$\int_0^z \mathrm{Ai}(-t)\,dt = \frac{2}{3} + \pi[\mathrm{Ai}'(-z)\,\mathrm{Hi}(-z) - \mathrm{Ai}(-z)\,\mathrm{Hi}'(-z)].$$

10.4.51. $$\int_0^z \mathrm{Bi}(t)\,dt = \pi[\mathrm{Bi}'(z)\mathrm{Gi}(z) - \mathrm{Bi}(z)\mathrm{Gi}'(z)].$$

10.4.52. $$\int_0^z \mathrm{Bi}(t)\,dt = -\pi[\mathrm{Bi}'(z)\,\mathrm{Hi}(z) - \mathrm{Bi}(z)\,\mathrm{Hi}'(z)].$$

10.4.53. $$\int_0^z \mathrm{Bi}(-t)\,dt = -\pi[\mathrm{Bi}'(-z)\,\mathrm{Gi}(-z) - \mathrm{Bi}(-z)\,\mathrm{Gi}'(-z)].$$

10.4.54. $$\int_0^z \mathrm{Bi}(-t)\,dt = \pi[\mathrm{Bi}'(-z)\,\mathrm{Hi}(-z) - \mathrm{Bi}(-z)\,\mathrm{Hi}'(-z)].$$

Дифференциальные уравнения для $\mathrm{Gi}(z)$, $\mathrm{Hi}(z)$

10.4.55. $w'' - zw = -\pi^{-1}$,

$$w(0) = \frac{1}{3}\mathrm{Bi}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Ai}(0) = 0.20497\ 55424\ 78,$$

$$w'(0) = \frac{1}{3}\mathrm{Bi}'(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Ai}'(0) = 0.14942\ 94524\ 49,$$

$$w(z) = \mathrm{Gi}(z).$$

10.4.56. $w'' - zw = \pi^{-1}$,

$$w(0) = \frac{2}{3}\mathrm{Bi}(0) = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Ai}(0) = 0.40995\ 10849\ 56,$$

$$w'(0) = \frac{2}{3}\mathrm{Bi}'(0) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Ai}'(0) = 0.29885\ 89048\ 98,$$

$$w(z) = \mathrm{Hi}(z).$$

Дифференциальные уравнения для произведений функций Эйри

10.4.57. $w''' - 4zw' - 2w = 0$.

Его линейно независимыми решениями являются функции $\mathrm{Ai}^2(z)$, $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$, $\mathrm{Bi}^2(z)$.

Вронскиан произведений функций Эйри

10.4.58. $W\{\mathrm{Ai}^2(z),\ \mathrm{Ai}(z)\,\mathrm{Bi}(z),\ \mathrm{Bi}^2(z)\} = 2\pi^{-3}$.

Асимптотические разложения при больших значениях $|z|$

$c_0 = 1$,

$$c_k = \frac{\Gamma(3k + 1/2)}{54^k k!\,\Gamma(k + 1/2)} = \frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(6k-1)}{216^k k!},$$

$$d_0 = 1,\quad d_k = -\frac{6k+1}{6k-1}c_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

$$\zeta = \frac{2}{3}z^{3/2}$$

10.4.59. $$\mathrm{Ai}(z) \sim \frac{1}{2}\pi^{-1/2}z^{-1/4}e^{-\zeta}\sum_0^\infty (-1)^k c_k \zeta^{-k} \quad (|\arg z| < \pi).$$

10.4.60. $\mathrm{Ai}(-z) \sim$

$$\sim \pi^{-1/2} z^{-1/4}\left[\sin\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\right)\sum_0^\infty (-1)^k c_{2k}\zeta^{-2k} - \right.$$

$$\left. - \cos\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\right)\sum_0^\infty (-1)^k c_{2k+1}\zeta^{-2k-1}\right] \quad \left(|\arg z| < \frac{2}{3}\pi\right).$$

10.4.61. $\mathrm{Ai}'(z) \sim -\frac{1}{2}\pi^{-1/2} z^{1/4} e^{-\zeta}\sum_0^\infty (-1)^k d_k \zeta^{-k}$

$$(|\arg z| < \pi)$$

10.4.62. $\mathrm{Ai}'(-z) \sim$

$$\sim -\pi^{-1/2} z^{1/4}\left[\cos\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\right)\sum_0^\infty (-1)^k d_{2k}\zeta^{-2k} + \right.$$

$$\left. + \sin\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\right)\sum_0^\infty (-1)^k d_{2k+1}\zeta^{-2k-1}\right] \quad \left(|\arg z| < \frac{2}{3}\pi\right).$$

10.4.63. $\mathrm{Bi}(z) \sim$

$$\sim \pi^{-1/2} z^{-1/4} e^{\zeta}\sum_0^\infty c_k \zeta^{-k} \quad \left(|\arg z| < \frac{1}{3}\pi\right).$$

10.4.64. $\mathrm{Bi}(-z) \sim$

$$\sim \pi^{-1/2} z^{-1/4}\left[\cos\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\right)\sum_0^\infty (-1)^k c_{2k}\zeta^{-2k} + \right.$$

$$\left. + \sin\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\right)\sum_0^\infty (-1)^k c_{2k+1}\zeta^{-2k-1}\right]$$

$$\left(|\arg z| < \frac{2}{3}\pi\right).$$

10.4.65. $\mathrm{Bi}(z e^{\pm\pi i/3}) \sim$

$$\sim \sqrt{2/\pi}\, e^{\pm\pi i/6} z^{-1/4}\left[\sin\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\mp\frac{i}{2}\ln 2\right)\times\right.$$

$$\times \sum_0^\infty (-1)^k c_{2k}\zeta^{-2k} -$$

$$\left. - \cos\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\mp\frac{i}{2}\ln 2\right)\sum_0^\infty (-1)^k c_{2k+1}\zeta^{-2k-1}\right]$$

$$\left(|\arg z| < \frac{2}{3}\pi\right).$$

10.4.66. $\mathrm{Bi}'(z) \sim \pi^{-1/2} z^{1/4} e^{\zeta}\sum_0^\infty d_k\zeta^{-k} \quad \left(|\arg z| < \frac{1}{3}\pi\right).$

10.4.67. $\mathrm{Bi}'(-z) \sim$

$$\sim \pi^{-1/2} z^{1/4}\left[\sin\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\right)\sum_0^\infty (-1)^k d_{2k}\zeta^{-2k} - \right.$$

$$\left. - \cos\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\right)\sum_0^\infty (-1)^k d_{2k+1}\zeta^{-2k-1}\right]$$

$$\left(|\arg z| < \frac{2}{3}\pi\right).$$

10.4.68. $\mathrm{Bi}'(z e^{\pm\pi i/3}) \sim \sqrt{2/\pi}\, e^{\mp\pi i/6} z^{1/4} \times$

$$\times\left[\cos\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\mp\frac{i}{2}\ln 2\right)\sum_0^\infty (-1)^k d_{2k}\zeta^{-2k} + \right.$$

$$\left. + \sin\left(\zeta+\frac{\pi}{4}\mp\frac{i}{2}\ln 2\right)\sum_0^\infty (-1)^k d_{2k+1}\zeta^{-2k-1}\right]$$

$$\left(|\arg z| < \frac{2}{3}\pi\right).$$

Модуль и фаза

10.4.69. $\mathrm{Ai}(-x) = M(x)\cos\theta(x),$

$$\mathrm{Bi}(-x) = M(x)\sin\theta(x),$$

$$M(x) = \sqrt{\mathrm{Ai}^2(-x) + \mathrm{Bi}^2(-x)},$$

$$\theta(x) = \mathrm{arctg}\,[\mathrm{Bi}(-x)/\mathrm{Ai}(-x)].$$

10.4.70. $\mathrm{Ai}'(-x) = N(x)\cos\Phi(x),$

$$\mathrm{Bi}'(-x) = N(x)\sin\Phi(x),$$

$$N(x) = \sqrt{\mathrm{Ai}'^2(-x) + \mathrm{Bi}'^2(-x)},$$

$$\Phi(x) = \mathrm{arctg}\,[\mathrm{Bi}'(-x)/\mathrm{Ai}'(-x)].$$

Дифференциальные уравнения для модуля и фазы

(Штрихи означают дифференцирование по x.)

10.4.71. $M^2\theta' = -\pi^{-1},\ N^2\Phi' = -\pi^{-1}x.$

10.4.72. $N^2 = M'^2 + M^2\theta'^2 = M'^2 + \pi^{-2}M^{-2}.$

10.4.73. $NN' = -xMM'.$

10.4.74. $\mathrm{tg}\,(\Phi - \theta) = M\theta'/M' = -(\pi MM')^{-1},$

$$MN\sin(\Phi-\theta) = \pi^{-1}.$$

10.4.75. $M'' + xM - \pi^{-2}M^{-3} = 0.$

10.4.76. $(M^2)''' + 4x(M^2)' - 2M^2 = 0.$

10.4.77. $\theta'^2 + \frac{1}{2}(\theta'''/\theta') - \frac{3}{4}(\theta''/\theta')^2 = x.$

Асимптотические разложения модуля и фазы при больших значениях x

10.4.78. $M^2(x) \sim \frac{1}{\pi}x^{-1/2}\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{12^k k!}2^{3k}\left(\frac{1}{2}\right)_{3k}(2x)^{-3k}.$

10.4.79. $\theta(x) \sim \frac{1}{4}\pi -$

$$-\frac{2}{3}x^{3/2}\left[1 - \frac{5}{4}(2x)^{-3} + \frac{1105}{96}(2x)^{-6} - \right.$$

$$\left. - \frac{82825}{128}(2x)^{-9} + \frac{12820\,31525}{14336}(2x)^{-12} - \ldots\right].$$

10.4.80. $N^2(x) \sim$

$$\sim \frac{1}{\pi} x^{1/2} \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{12^k k!} \frac{6k+1}{6k-1} 2^{3k} \left(\frac{1}{2}\right)_{3k} (2x)^{-3k}.$$

10.4.81. $\Phi(x) \sim \frac{3}{4}\pi -$

$$-\frac{2}{3} x^{3/2}\left[1 + \frac{7}{4}(2x)^{-3} - \frac{1463}{96}(2x)^{-6} + \right.$$

$$\left. + \frac{495271}{640}(2x)^{-9} - \frac{2065\,30429}{2048}(2x)^{-12} + \ldots\right].$$

Асимптотические представления интегралов

$$\int_0^x \mathrm{Ai}(\pm t)\,dt, \quad \int_0^x \mathrm{Bi}(\pm t)\,dt$$

при больших значениях x

10.4.82. $\int_0^x \mathrm{Ai}(t)\,dt \sim \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\pi^{-1/2}x^{-3/4}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right).$

10.4.83. $\int_0^x \mathrm{Ai}(-t)\,dt \sim \frac{2}{3} - \pi^{-1/2}x^{-3/4}\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$

10.4.84. $\int_0^x \mathrm{Bi}(t)\,dt \sim \pi^{-1/2}x^{-3/4}\exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right).$

10.4.85. $\int_0^x \mathrm{Bi}(-t)\,dt \sim \pi^{-1/2}x^{-3/4}\sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$

Асимптотические представления функций
$\mathrm{Gi}(\pm x)$, $\mathrm{Gi}'(\pm x)$, $\mathrm{Hi}(\pm x)$, $\mathrm{Hi}'(\pm x)$
при больших значениях x

10.4.86. $\mathrm{Gi}(x) \sim \pi^{-1}x^{-1}.$

10.4.87. $\mathrm{Gi}(-x) \sim \pi^{-1/2}x^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$

10.4.88. $\mathrm{Gi}'(x) \sim \frac{7}{96}\pi^{-1}x^{-2}.$

10.4.89. $\mathrm{Gi}'(-x) \sim \pi^{-1/2}x^{1/4}\sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$

10.4.90. $\mathrm{Hi}(x) \sim \pi^{-1/2}x^{-1/4}\exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right).$

10.4.91. $\mathrm{Hi}(-x) \sim \pi^{-1}x^{-1}.$

10.4.92. $\mathrm{Hi}'(x) \sim \pi^{-1/2}x^{1/4}\exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right).$

10.4.93. $\mathrm{Hi}'(-x) \sim -\frac{3}{2}\pi^{-1}x^{-2}.$

Нули и их асимптотические разложения

$\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Ai}'(z)$ имеют нули только на отрицательной части действительной оси. $\mathrm{Bi}(z)$, $\mathrm{Bi}'(z)$ имеют нули на отрицательной части действительной оси и в секторе $\pi/3 < |\arg z| < \pi/2$.

a_s, a'_s, b_s, b'_s — s-е отрицательные нули функций $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Ai}'(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$, $\mathrm{Bi}'(z)$ соответственно.

β_s, β'_s, $\bar\beta_s$, $\bar\beta'_s$ — s-е комплексные нули функций $\mathrm{Bi}(z)$, $\mathrm{Bi}'(z)$ в секторах $\pi/3 < \arg z < \pi/2$, $-\pi/2 < \arg z < -\pi/3$ соответственно.

10.4.94. $a_s = -f[3\pi(4s-1)/8].$

10.4.95. $a'_s = -g[3\pi(4s-3)/8)].$

10.4.96. $\mathrm{Ai}'(a_s) = (-1)^{s-1}f_1[3\pi(4s-1)/8].$

10.4.97. $\mathrm{Ai}(a'_s) = (-1)^{s-1}g_1[3\pi(4s-3)/8].$

10.4.98. $b_s = -f[3\pi(4s-3)/8].$

10.4.99. $b'_s = -g[3\pi(4s-1)/8].$

10.4.100. $\mathrm{Bi}'(b_s) = (-1)^{s-1}f_1[3\pi(4s-3)/8].$

10.4.101. $\mathrm{Bi}(b'_s) = (-1)^s g_1[3\pi(4s-1)/8].$

10.4.102. $\beta_s = e^{\pi i/3} f\left[\frac{3\pi}{8}(4s-1) + \frac{3i}{4}\ln 2\right].$

10.4.103. $\beta'_s = e^{\pi i/3} g\left[\frac{3\pi}{8}(4s-3) + \frac{3i}{4}\ln 2\right].$

10.4.104. $\mathrm{Bi}'(\beta_s) =$

$$= (-1)^s \sqrt{2} e^{-\pi i/6} f_1\left[\frac{3\pi}{8}(4s-1) + \frac{3i}{4}\ln 2\right].$$

10.4.105. $\mathrm{Bi}(\beta'_s) =$

$$= (-1)^{s-1}\sqrt{2} e^{\pi i/6} g_1\left[\frac{3\pi}{8}(4s-3) + \frac{3i}{4}\ln 2\right],$$

где $|z|$ — достаточно большое,

$$f(z) \sim z^{2/3}\left(1 + \frac{5}{48}z^{-2} - \frac{5}{36}z^{-4} + \frac{77125}{82944}z^{-6} - \right.$$

$$\left. - \frac{1080\,56875}{69\,67296}z^{-8} + \frac{1623755\,96875}{3344\,30208}z^{-10} - \ldots\right),$$

$$g(z) \sim z^{2/3}\left(1 - \frac{7}{48}z^{-2} + \frac{35}{288}z^{-4} - \frac{181223}{207360}z^{-6} + \right.$$

$$\left. + \frac{186\,83371}{12\,44160}z^{-8} - \frac{9\,11458\,84361}{1911\,02976}z^{-10} + \ldots\right),$$

$$f_1(z) \sim \pi^{-1/2}z^{1/6}\left(1 + \frac{5}{48}z^{-2} - \frac{1525}{4608}z^{-4} + \right.$$

$$\left. + \frac{23\,97875}{6\,63552}z^{-6} - \ldots\right),$$

$$g_1(z) \sim \pi^{-1/2}z^{-1/6}\left(1 - \frac{7}{96}z^{-2} + \frac{1673}{6144}z^{-4} - \right.$$

$$\left. - \frac{843\,94709}{265\,42080}z^{-6} + \ldots\right).$$

Формальные и асимптотические решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками ветвления

Рассмотрим уравнение

10.4.106. $W'' + a(z, \lambda) W' + b(z, \lambda) W = 0,$

в котором λ — действительный или комплексный параметр, $a(z,\lambda)$ — аналитическая функция z (для фиксированного λ), а $b(z,\lambda)$ — непрерывная функция z в той же области z-плоскости.

Преобразованием

10.4.107. $W(z) = w(z) \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{z} a(t, \lambda)\, dt\right)$

уравнение 10.4.106 может быть приведено к виду

10.4.108. $w'' + \varphi(z, \lambda)\, w = 0,$

$$\varphi(z, \lambda) = b(z, \lambda) - \frac{1}{4} a^2(z, \lambda) - \frac{1}{2}\frac{d}{dz} a(z, \lambda).$$

Если $\varphi(z, \lambda)$ может быть записана в виде

10.4.109. $\varphi(z, \lambda) = \lambda^2 p(z) + q(z, \lambda),$

где $q(z,\lambda)$ ограничена в области R плоскости z, то нули функции $p(z)$ в области R являются так называемыми точками ветвления уравнения 10.4.108.

Частный случай $w'' + [\lambda^2 z + q(z, \lambda)]\, w = 0$

Пусть $\lambda = |\lambda|\, e^{i\omega}$ изменяется в области S:

$$|\lambda| \geqslant \lambda_0 (>0), \quad \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2.$$

Предполагается, что $q(z, \lambda)$ непрерывна по z для $|z| < r$ при λ, принадлежащих S, и $q(z, \lambda) \sim \sum_0^\infty q_n(z)\, \lambda^{-n}$ при $\lambda \to \infty$ в области S.

Формальное решение в виде ряда

10.4.110. $w(z) = u(z) \sum_0^\infty \varphi_n(z)\, \lambda^{-n} + \lambda^{-1} u'(z) \sum_0^\infty \psi_n(z)\, \lambda^{-n},$

где $u'' + \lambda^2 z u = 0,$

$$\varphi_0(z) = c_0, \quad \psi_0(z) = z^{-1/2} c_1, \quad c_0,\ c_1 \text{ — константы},$$

$$\varphi_{n+1}(z) = -\frac{1}{2}\psi_n'(z) - \frac{1}{2}\int_0^z \sum_0^n q_{n-k}(t)\, \psi_k(t)\, dt,$$

$$\psi_n(z) = \frac{1}{2} z^{-1/2} \int_0^z t^{-1/2}\left[\varphi_n''(t) + \sum_0^n q_{n-k}(t)\, \varphi_k(t)\right] dt$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Равномерные асимптотические разложения решений

Пусть z принимает действительные значения. Уравнение имеет вид

10.4.111. $y'' + [\lambda^2 x + q(x, \lambda)]\, y = 0,$

где x изменяется на ограниченном интервале $a \leqslant x \leqslant b$, содержащем начало координат, а $q(x, \lambda)$ непрерывна по x на интервале $a \leqslant x \leqslant b$ для каждого фиксированного λ из области S. Тогда имеют место следующие асимптотические представления:

(I) Если λ — действительное положительное, то при $\lambda \to \infty$ существуют такие решения $y_0(x)$ и $y_1(x)$, для которых имеют место равномерные по x асимптотические разложения: на интервале $a \leqslant x \leqslant 0$

10.4.112. $y_0(x) = \mathrm{Ai}(-\lambda^{2/3}x)\,[1 + O(\lambda^{-1})],$

$$y_1(x) = \mathrm{Bi}(-\lambda^{2/3}x)\,[1 + O(\lambda^{-1})],$$

а на интервале $0 \leqslant x \leqslant b$

10.4.113. $y_0(x) = \mathrm{Ai}(-\lambda^{2/3}x)\,[1 + O(\lambda^{-1})] + \mathrm{Bi}(-\lambda^{2/3}x)\, O(\lambda^{-1}),$

$$y_1(x) = \mathrm{Bi}(-\lambda^{2/3}x)[1 + O(\lambda^{-1})] + \mathrm{Ai}(-\lambda^{2/3}x)\, O(\lambda^{-1}).$$

(II) Если $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, $|\lambda| \to \infty$, то имеются такие решения $y_0(x)$, $y_1(x)$, для которых следующие разложения равномерны по x на интервале $a \leqslant x \leqslant b$:

10.4.114. $y_0(x) = \mathrm{Ai}(-\lambda^{2/3}x)\,[1 + O(\lambda^{-1})],$

$$y_1(x) = \mathrm{Bi}(-\lambda^{2/3}x)\,[1 + O(\lambda^{-1})].$$

Другие представления см. в [10.4].

Если z — комплексное (ограниченное или неограниченное), то при некоторых условиях формальное решение в виде ряда 10.4.110 переходит в равномерное асимптотическое разложение. Эти условия рассмотрены в [10.12] для случая, когда $q(z,\lambda)$ не зависит от λ и $\lambda \to \infty$ при фиксированном ω, а также в [10.14] — когда λ лежит в любой области комплексной плоскости. См. также [10.2; 10.9; 10.10].

Общий случай $w'' + [\lambda^2 p(z) + q(z, \lambda)]\, w = 0$

Пусть $\lambda = |\lambda|\, e^{i\omega}$, где $|\lambda| \geqslant \lambda_0 (>0)$ и $-\pi \leqslant \omega < \pi$. Предположим, что $p(z)$ — аналитическая функция в области R и имеет в этой области нуль $z = z_0$. Кроме того, для фиксированного λ функция $q(z, \lambda)$ аналитическая по z (z принадлежит R). Тогда преобразование $\xi = \xi(z)$, $v = [p(z)/\xi]^{1/4} w(z)$, где ξ определяется как (единственное) решение уравнения

10.4.115. $\xi\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 = p(z),$

приводит к частному случаю

10.4.116. $\frac{d^2 v}{d\xi^2} + [\lambda^2 \xi + f(\xi, \lambda)]\, v = 0,$

$$f(\xi, \lambda) = \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^{-2} q(z, \lambda) - \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^{-1/2} \frac{d^2}{d\xi^2}\left[\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^{1/2}\right].$$

Пример. Рассмотрим уравнение

10.4.117. $y'' + \left[\lambda^2 - \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) x^{-2}\right] y = 0,$

для которого точки $x = 0$, ∞ являются особыми точками и $x = 1$ — точкой ветвления. Частными решениями этого уравнения являются функции $x^{1/2} J_\lambda(\lambda x)$, $x^{1/2} Y_\lambda(\lambda x)$ (см. 9.1.49).

Уравнение 10.4.115 принимает вид

$$\xi\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2=\frac{x^2-1}{x^2},$$

откуда

$$2/3(-\xi)^{3/2}=-\sqrt{1-x^2}+\ln x^{-1}(1+\sqrt{1-x^2})\quad (0<x\leqslant 1),$$

$$2/3\,\xi^{3/2}=\sqrt{x^2-1}-\arccos x^{-1}\quad (1\leqslant x<\infty).$$

Таким образом,

10.4.118. $v(\xi)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2\xi}\right)^{1/2}y(x)$

удовлетворяет уравнению

10.4.119. $\dfrac{d^2v}{d\xi^2}+\left[\lambda^2\xi-\dfrac{5}{16\xi^2}+\dfrac{\xi^2}{4}\,\dfrac{x^2(x^2+4)}{(x^2-1)^3}\right]v=0,$

которое сводится к уравнению 10.4.111, если в последнем заменить x на ξ, а $q(\xi,\lambda)$ не зависит от λ.

Предположим, что $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Согласно первому из соотношений 10.4.114 уравнение 10.4.119 имеет решение $v_0(\xi)$ (т.е. решение $y_0(x)$ уравнения **10.4.117**), для которого представление

10.4.120. $v_0(\xi)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2\xi}\right)^{1/4}y_0(x)=$

$$=\operatorname{Ai}(-\lambda^{2/3}\xi)\,[1+O(\lambda^{-1})]$$

является равномерным по x на отрезке $0<x<\infty$ при $\lambda\to\infty$. Чтобы выразить решение $y_0(x)$ через функции $x^{1/2}J_\lambda(\lambda x)$, $x^{1/2}Y_\lambda(\lambda x)$, ограничим x пределами $0<x\leqslant b<1$ (при этом согласно 10.4.118 ξ отрицательно) и заменим функцию Эйри ее асимптотическим представлением 10.4.59. Получим

10.4.121. $y_0(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2\xi}\right)^{-1/4}\dfrac{1}{2}\,\pi^{-1/2}\lambda^{-1/6}(-\xi)^{1/4}\times$

$$\times\exp\left(\frac{2}{3}\lambda(-\xi)^{3/2}\right)[1+O(\lambda^{-1})]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\pi^{-1/2}\lambda^{-1/6}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{-1/4}\exp\left(\frac{2}{3}\lambda(-\xi)^{3/2}\right)[1+O(\lambda^{-1})].$$

Пусть теперь в **10.4.121** λ фиксировано и $x\to 0$. Тогда

10.4.122. $y_0(x)\sim\dfrac{1}{2}\,\pi^{-1/2}\lambda^{-1/6}x^{1/2}\left(\dfrac{1}{2}\,x\right)^{\lambda}e^{\lambda}.$

С другой стороны, $y_0(x)$ — решение уравнения **10.4.117** и, следовательно, может быть записано в виде

10.4.123. $y_0(x)=x^{1/2}[c_1J_\lambda(\lambda x)+c_2Y_\lambda(\lambda x)].$

Учитывая 9.1.7, для фиксированного λ и $x\to 0$ имеем

$$J_\lambda(\lambda x)\sim\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda x\right)^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)},$$

$$Y_\lambda(\lambda x)\sim\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda x\right)^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\operatorname{ctg}\lambda\pi-\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda x\right)^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}\operatorname{cosec}\lambda\pi.$$

Таким образом, полагая $x\to 0$ в 10.4.123 и сравнивая полученное соотношение с 10.4.122, находим, что $c_2=0$ и

10.4.124. $y_0(x)=\dfrac{1}{2}\,\pi^{-1/2}\lambda^{-\lambda-1/6}\,e^{\lambda}\,\Gamma(\lambda+1)\,x^{1/2}J_\lambda(\lambda x).$

Из 10.4.120 следует, что при $|\lambda|\to\infty$ представление

10.4.125. $J_\lambda(\lambda x)=$

$$=\frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(\lambda+1)}\,\lambda^{\lambda+1/6}e^{-\lambda}\left(\frac{x^2-1}{\xi}\right)^{-1/4}\operatorname{Ai}(-\lambda^{2/3}\xi)\,[1+O(\lambda^{-1})]$$

равномерно по x на интервале $0<x<\infty$.

ПРИМЕРЫ

Сферические функции Бесселя

Чтобы вычислить $j_n(x)$, $y_n(x)$, $n=0,1,2$, для значений x, выходящих за пределы табл. 10.1, используем формулы 10.1.11, 10.1.12. Значения тригонометрических функций возьмем из табл. 4.6. — 4.8.

Пример 1. Вычислить $j_1(x)$ для $x=11.425$. Согласно формуле 10.1.11

$$j_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}.$$

Используя табл. 4.6 и 4.8, получим

$$j_1(11.425)=-\frac{0.90920\;500}{(11.425)^2}-\frac{0.41634\;873}{11.425}=$$

$$=-0.00696\;54535-0.03644\;1902=-0.04340\;7356.$$

Чтобы вычислить $j_n(x)$, $11\leqslant n\leqslant 20$, для значения x, входящего в область изменения аргумента табл. 10.3, сначала непосредственно из табл. 10.3 или с помощью линейной интерполяции получим значения $j_{21}(x)$, $j_{20}(x)$. Затем используем их в качестве начальных значений для рекуррентного процесса по формуле 10.1.19 при убывающих n.

Миллером предложена другая процедура [9.20], которая часто дает лучшую точность и которую можно применить для вычислений $j_n(x)$ и тогда, когда оба параметра n и x выходят за пределы табл. 10.1.

Допустим, что $F_{N+1}=0$, $F_N=1$ для некоторого индекса N, большего, чем требуемое значение n.

Используем рекуррентную формулу 10.1.19 в направлении убывания N. Получим последовательность $F_{N-1},\ldots,F_0$. Если N было выбрано достаточно большим, каждый член этой последовательности вплоть до F_a пропорционален (с определенной точностью) соответствующему члену в последовательности $j_{N-1}(x),\ldots,j_0(x)$ истинных значений. Множитель пропорциональности p может быть получен сравнением, скажем, F_0 с истинным значением $j_0(x)$, вычисленным отдельно. Члены последовательности $pF, \ldots, p_0F_n$ имеют в таком случае столько точных значащих цифр, сколько их имеется в предположительных значениях F. Если полученная точность неудовлетворительна, процесс может быть начат заново с большего значения N.

Пример 2. Вычислить $j_{15}(x)$ для $x = 24.6$.

Интерполяция в табл. 10.3 дает для $x = 24.6$

$$x^{-21}e^{x^2/86}j_{21}(x) = (-28)3.934616,$$

$$x^{-20}e^{x^2/82}j_{20}(x) = (-27)9.4868\dot{3},$$

следовательно,

$$j_{21}(24.6) = 0.05604\,29, \quad j_{20}(24.6) = 0.03896\,98.$$

В результате рекуррентного процесса по формуле 10.1.19 имеем

$$j_{19}(24.6) = 0.00890\,67660 \quad [0.00890\,70],$$
$$j_{18}(24.6) = -0.02484\,93173 \quad [-0.02485\,90],$$
$$j_{17}(24.6) = -0.04628\,17554 \quad [-0.04628\,16],$$
$$j_{16}(24.6) = -0.04099\,87086 \quad [-0.04099\,88],$$
$$j_{15}(24.6) = -0.00871\,65122 \quad [-0.00871\,67].$$

Для сравнения точные значения показаны в квадратных скобках.

Чтобы вычислить $j_{15}(x)$ для $x = 24.6$ способом Миллера, возьмем, например, $N = 39$ и допустим, что $F_{40} = 0$, $F_{39} = 1$. Используя формулу 10.1.19 в направлении убывания N: $F_{N-1} = [(2N+1)/x]\,F_N - F_{N+1}$, $N = 39, 38, \ldots, 1, 0$, получим последовательность $F_{38}, F_{37}, \ldots, F_1, F_0$. Вычислим значение $j_0(24.6) = (\sin 24.6)\,/\,24 = -0.02064\,620296$ и получим множитель пропорциональности

$$p = j_0(24.6)/F_0 = 0.00000\,03839\,17642.$$

Значение pF_{15} равно $j_{15}(24.6)$ с точностью до 8D. Последняя часть вычислений показана в следующей таблице, в которой для сравнения даны также точные значения.

N	F_N	pF_N	$j_N(24.6)$
15	$-\ 22704.71107$	$-0.00871\,67391$	$-0.00871\,674$
14	$+\ 78178.88236$	$+0.03001\,42522$	$+0.03001\,425$
13	$+114866.80811$	$+0.04409\,93941$	$+0.04409\,939$
12	$+\ 47894.44353$	$+0.01838\,75218$	$+0.01838\,752$
11	$-\ 66193.59317$	$-0.02541\,28882$	$-0.02541\,289$
10	-109782.76234	$-0.04214\,75392$	$-0.04214\,754$
9	$-\ 27523.39903$	$-0.01056\,67185$	$-0.01056\,672$
8	$+\ 88524.85252$	$+0.03398\,62526$	$+0.03398\,625$
7	$+\ 88699.11017$	$+0.03405\,31532$	$+0.03405\,315$
6	$-\ 34440.02929$	$-0.01322\,21348$	$-0.01322\,213$
5	-106899.12565	$-0.04104\,04602$	$-0.04104\,046$
4	$-\ 13360.39272$	$-0.00512\,92905$	$-0.00512\,929$
3	$+102011.17704$	$+0.03916\,38905$	$+0.03916\,389$
2	$+\ 42387.96341$	$+0.01627\,34870$	$+0.01627\,349$
1	$-\ 93395.73728$	$-0.03585\,62712$	$-0.03585\,627$
0	$-\ 53777.68747$	$-0.02064\,62030$	$-0.02064\,620$

Заметим, что нормализация последовательности F_N, $F_{N-1}, \ldots, F_0$ может быть также получена применением формулы 10.1.50. Вычисляя сумму $\sigma = \sum\limits_{0}^{\infty} (2k+1)F_k^2$, находим $p = 1/\sqrt{\sigma}$. Для рассмотренного выше примера, таким образом, получаем $p = 1/\sqrt{\sigma} = 0.0000\,03839\,177$.

Модифицированные сферические функции Бесселя

Чтобы вычислить

$$\sqrt{\pi/(2x)}\; I_{n+1/2}(x), \quad \sqrt{\pi/(2x)}\; K_{n+1/2}(x), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

для значений x, входящих в область изменения аргумента табл. 10.8, используем формулы 10.2.13, 10.2.14 и 10.2.4. Значения гиперболических и экспоненциальных функций возьмем из табл. 4.4 и 4.15. В том случае, когда значения

$$\sqrt{\pi/(2x)}\; I_{n+1/2}(x) \ \text{и}\ \sqrt{\pi/(2x)}\; I_{-n-1/2}(x)$$

приблизительно равны, т.е. когда x достаточно велико, вычисляем $\sqrt{\pi/(2x)}\; K_{n+1/2}(x)$ по формуле 10.2.15. Значения коэффициентов $(n+1/2, k)$ даны в табл. 10.1.9.

Пример 3. Вычислить $\sqrt{\pi/(2x)}\; I_{5/2}(x)$ и $\sqrt{\pi/(2x)}\, K_{5/2}(x)$ для $x = 16.2$.

В соответствии с 10.2.13 имеем

$$\sqrt{\pi/(2x)}\; I_{5/2}(x) = [(3 + x^2)\,\mathrm{sh}\, x]/x^3 - (3\,\mathrm{ch}\, x)/x^2.$$

Из табл. 4.4 находим ch 16.2 = (6)5.4267 59950 и равное ему с таким числом значащих цифр значение sh 16.2. Следовательно,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/16.2}\; I_{5/2}(16.2) = (0.06243\,402371 -$$
$$- 0.01143\,118427)\,[(6)5.4267\,59950] =$$
$$= 338814.4594 - 62034.29298 = 276780.1664.$$

Чтобы вычислить $\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/16.2}\; K_{5/2}(16.2)$, используем формулу 10.2.17 и получим

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/16.2}\; K_{5/2}(16.2) = \pi e^{-16.2}\left[\frac{1}{32.4} + \frac{6}{(32.4)^2} + \frac{12}{(32.4)^3}\right] =$$
$$= (-7)\,2.8945\,38069[0.036932\,60400] =$$
$$= (-8)\,1.0690\,28283.$$

Чтобы вычислить $\sqrt{\pi/(2x)}\, I_{n+1/2}(x)$, $3 \leqslant n \leqslant 8$, для значений x, лежащих в области применения табл. 10.9, выберем из этой таблицы значения функций $\sqrt{\pi/(2x)}\; I_{19/2}(x)$ и $\sqrt{\pi/(2x)}\, I_{21/2}(x)$ для заданных значений x и используем эти значения в качестве начальных в рекуррентном процессе по формуле 10.2.18 при убывании n.

Чтобы вычислить $\sqrt{\pi/(2x)}\, K_{n+1/2}(x)$ для некоторого целого n вне области изменения аргумента табл. 10.9, с помощью формулы 10.2.15 или табл. 10.8 найдем величины $\sqrt{\pi/(2x)}\; K_{1/2}(x)$, $\sqrt{\pi/(2x)}\; K_{3/2}(x)$, для требуемого значения x. Используем эти величины как начальные значения при вычислении по рекуррентной формуле 10.2.18 при возрастании n. Если x лежит внутри области изменения аргумента табл. 10.9 и $n > 10$, то рекуррентный процесс может быть начат с $\sqrt{\pi/(2x)}\; K_{19/2}(x)$ и $\sqrt{\pi/(2x)}\; K_{21/2}(x)$, полученных по табл. 10.9.

Пример 4. Вычислить $\sqrt{\pi/(2x)}\,K_{11/2}(x)$, для $x = 3.6$. Для $x = 3.6$ из табл. 10.8 получим

$$\sqrt{\pi/(2x)}\,K_{1/2}(x) = 0.01192\,222,$$

$$\sqrt{\pi/(2x)}\,K_{3/2}(x) = 0.01523\,3952.$$

Рекуррентное соотношение 10.2.18 дает последовательно

$$-\sqrt{\frac{1}{2}\pi/3.6}\;K_{5/2}(3.6) = -0.01192\,222 - \frac{3}{3.6}(0.01523\,3952) = -0.02461\,718,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\pi/3.6}\;K_{7/2}(3.6) = 0.01523\,3952 + \frac{5}{3.6}(0.02461\,718) = 0.04942\,4480,$$

$$-\sqrt{\frac{1}{2}\pi/3.6}\,K_{9/2}(3.6) = -0.02461\,718 - \frac{7}{3.6}(0.04942\,4480) = -0.12072\,034,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\pi/3.6}\,K_{11/2}(3.6) = 0.04942\,4480 + \frac{9}{3.6}(0.12072\,034) = 0.35122\,533.$$

Для контроля рекуррентный процесс может выполняться до $n = 9$ и значение $\sqrt{\frac{1}{2}\pi/3.6}\;K_{19/2}(3.6)$, полученное таким образом, можно сравнить с соответствующим значением из табл. 10.9.

Чтобы вычислить $\sqrt{\pi/(2x)}\,I_{n+1/2}(x)$, когда n и x находятся вне области табличных аргументов табл. 10.9, используем метод, описанный в работе [9.20].

Функции Эйри

Когда x больше единицы, для вычисления $\mathrm{Ai}(x)$ и $\mathrm{Bi}(x)$ используются вспомогательные функции из табл 10.11.

Пример 5. Вычислить $\mathrm{Ai}(x)$ для $x = 4.5$. Прежде всего, для $x = 4.5$ имеем

$$\xi = \frac{2}{3}x^{3/2} = 6.36396\,1029,\quad \xi^{-1} = 0.15713\,48403.$$

Теперь в табл. 10.11 находим $f(-\xi) = 0.55848\,24$ и, следовательно,

$$\mathrm{Ai}(4.5) = \frac{1}{2}(4.5)^{-1/4}(0.55848\,24)\exp(-6.36396\,1029) = \frac{1}{2}(0.68658\,905)(0.55848\,24)(0.00172\,25302) = 0.00033\,02503.$$

Чтобы вычислить нули c, c' решения $y(x)$ уравнения $y'' - xy = 0$ и его производной $y'(x)$ соответственно, могут быть использованы следующие формулы, в которых d и d' означают приближения к c и c'. Кроме того, $u = y(d)/y'(d)$, $v = y'(d')/d'^2 y(d')$:

$$c = d - u - 2d\frac{u^3}{3!} + 2\frac{u^4}{4!} - 24d^2\frac{u^5}{5!} + 88d\frac{u^6}{6!} - (88 + 720d^3)\frac{u^7}{7!} + 5856d^2\frac{u^8}{8!} - (16640d + 40320d^4)\frac{u^9}{9!} + \ldots,$$

$$c' = d'\left\{1 - v - \frac{v^2}{2!} - (3 + 2d'^3)\frac{v^3}{3!} - (15 + 10d'^3)\frac{v^4}{4!} - (105 + 76d'^3 + 24d'^6)\frac{v^5}{5!} - (945 + 756d'^3 + 272d'^6)\frac{v^6}{6!} - \ldots\right\},$$

$$y'(c) = y'(d)\left\{1 - d\frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} - 3d^2\frac{u^4}{4!} + 14d\frac{u^5}{5!} - (14 + 45d^3)\frac{u^6}{6!} + 471d^2\frac{u^7}{7!} - (1432d + 1575d^4)\frac{u^8}{8!} + \ldots\right\},$$

$$y(c') = y(d')\left\{1 - d'^2\frac{v^2}{2!} - d'^4\frac{v^3}{3!} - (3d'^3 + 3d'^6)\frac{v^4}{4!} - (15d'^5 + 14d'^8)\frac{v^5}{5!} - (105d'^4 + 101d'^7 + 45d'^{10})\frac{v^6}{6!} - \ldots\right\}.$$

Пример 6. Вычислить нуль функции $y(x) = \mathrm{Ai}(x) - \mathrm{Bi}(x)$ вблизи $d = -0.4$.

Из табл. 10.11 находим

$$y(-0.4) = 0.02420\,467,\quad y'(-0.4) = -0.71276\,627,$$

откуда $u = y(-0.4)/y'(-0.4) = -0.03395\,8776$.

По формуле, приведенной выше, имеем

$$c = -0.4 + 0.03395\,8776 - 0.00000\,5221 + 0.00000\,0111 + 0.00000\,0001 = -0.36604\,6333,$$

$$y'(c) = (-0.71276\,627)(1 + 0.00023\,0640 - 0.00000\,6527 - 0.00000\,0027 + 0.00000\,0002) = (-0.71276\,627)(1.00022\,4088) = -0.71292\,599.$$

Таблица 10.1. Сферические функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$j_0(x)$	$j_1(x)$	$j_2(x)$	$y_0(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$
0.0	1.00000 000	0.00000 0000	0.00000 000000	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0.1	0.99833 417	0.03330 0012	0.00066 619061	−9.95004 17	−100.49875	−3005.0125
0.2	0.99334 665	0.06640 0381	0.00265 90561	−4.90033 29	−25.495011	−377.52483
0.3	0.98506 736	0.09910 2888	0.00596 15249	−3.18445 50	−11.599917	−112.81472
0.4	0.97354 586	0.13121 215	0.01054 5302	−2.30265 25	−6.73017 71	−48.173676
0.5	0.95885 108	0.16253 703	0.01637 1107	−1.75516 51	−4.46918 13	−25.059923
0.6	0.94107 079	0.19289 196	0.02338 8995	−1.37555 94	−3.23366 97	−14.792789
0.7	0.92031 098	0.22209 828	0.03153 8780	−1.09263 17	−2.48121 34	−9.54114 00
0.8	0.89669 511	0.24998 551	0.04075 0531	−0.87088 339	−1.98529 93	−6.57398 92
0.9	0.87036 323	0.27639 252	0.05094 5155	−0.69067 774	−1.63778 29	−4.76859 87
1.0	0.84147 098	0.30116 868	0.06203 5052	−0.54030 231	−1.38177 33	−3.60501 76
1.1	0.81018 851	0.32417 490	0.07392 4849	−0.41236 011	−1.18506 13	−2.81962 54
1.2	0.77669 924	0.34528 457	0.08651 2186	−0.30196 480	−1.02833 66	−2.26887 66
1.3	0.74119 860	0.36438 444	0.09968 8571	−0.20576 833	−0.89948 193	−1.86995 92
1.4	0.70389 266	0.38137 537	0.11334 028	−0.12140 510	−0.79061 059	−1.57276 05
1.5	0.66499 666	0.39617 297	0.12734 928	−0.04715 8134	−0.69643 541	−1.34571 27
1.6	0.62473 350	0.40870 814	0.14159 426	+0.01824 9701	−0.61332 744	−1.16823 87
1.7	0.58333 224	0.41892 749	0.15595 157	0.07579 0879	−0.53874 937	−1.02652 51
1.8	0.54102 646	0.42679 364	0.17029 628	0.12622 339	−0.47090 236	−0.91106 065
1.9	0.49805 268	0.43228 539	0.18450 320	0.17015 240	−0.40849 878	−0.81515 048
2.0	0.45464 871	0.43539 778	0.19844 795	0.20807 342	−0.35061 200	−0.73399 142
2.1	0.41105 208	0.43614 199	0.21200 791	0.24040 291	−0.29657 450	−0.66408 077
2.2	0.36749 837	0.43454 522	0.22506 330	0.26750 051	−0.24590 723	−0.60282 854
2.3	0.32421 966	0.43065 030	0.23749 812	0.28968 523	−0.19826 956	−0.54829 769
2.4	0.28144 299	0.42451 529	0.24920 113	0.30724 738	−0.15342 325	−0.49902 644
2.5	0.23938 886	0.41621 299	0.26006 673	0.32045 745	−0.11120 588	−0.45390 450
2.6	0.19826 976	0.40583 020	0.26999 585	0.32957 260	−0.07151 1067	−0.41208 537
2.7	0.15828 884	0.39346 703	0.27889 675	0.33484 153	−0.03427 3462	−0.37292 316
2.8	0.11963 863	0.37923 606	0.28668 572	0.33650 798	+0.00054 2796	−0.33592 641
2.9	0.08249 9769	0.36326 136	0.29328 784	0.33481 316	0.03295 3045	−0.30072 380
3.0	0.04704 0003	0.34567 750	0.29863 750	0.32999 750	0.06295 9164	−0.26703 834
3.1	+0.01341 3117	0.32662 847	0.30267 895	0.32230 166	0.09055 5161	−0.23466 763
3.2	−0.01824 1920	0.30626 652	0.30536 678	0.31196 712	0.11573 164	−0.20346 870
3.3	−0.04780 1726	0.28475 092	0.30666 620	0.29923 629	0.13847 939	−0.17334 594
3.4	−0.07515 9148	0.26224 678	0.30655 336	0.28435 241	0.15879 221	−0.14424 164
3.5	−0.10022 378	0.23892 369	0.30501 551	0.26755 905	0.17666 922	−0.11612 829
3.6	−0.12292 235	0.21495 446	0.30205 107	0.24909 956	0.19211 667	−0.08900 2337
3.7	−0.14319 896	0.19051 380	0.29766 961	0.22921 622	0.20514 929	−0.06287 8964
3.8	−0.16101 523	0.16577 697	0.29189 179	0.20814 940	0.21579 139	−0.03778 7773
3.9	−0.17635 030	0.14091 846	0.28474 912	0.18613 649	0.22407 760	−0.01376 9102
4.0	−0.18920 062	0.11611 075	0.27628 369	0.16341 091	0.23005 335	+0.00912 9107
4.1	−0.19957 978	0.09152 2967	0.26654 781	0.14020 096	0.23377 514	0.03085 4018
4.2	−0.20751 804	0.06731 9710	0.25560 355	0.11672 877	0.23531 060	0.05135 0236
4.3	−0.21306 185	0.04365 9843	0.24352 220	0.09320 9110	0.23473 838	0.07056 1855
4.4	−0.21627 320	+0.02069 5380	0.23038 368	0.06984 8380	0.23214 783	0.08843 4232
4.5	−0.21722 892	−0.00142 95812	0.21627 586	0.04684 3511	0.22763 858	0.10491 554
4.6	−0.21601 978	−0.02257 9838	0.20129 380	0.02438 0984	0.22132 000	0.11995 814
4.7	−0.21274 963	−0.04262 9993	0.18553 900	+0.00263 5886	0.21331 046	0.13351 972
4.8	−0.20753 429	−0.06146 5266	0.16911 850	−0.01822 8955	0.20373 659	0.14556 433
4.9	−0.20050 053	−0.07898 2225	0.15214 407	−0.03806 3749	0.19273 242	0.15606 319
5.0	−0.19178 485	−0.09508 9408	0.13473 121	−0.05673 2437	0.18043 837	0.16499 546
	$\left[\begin{matrix}(-4)4\\6\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)3\\6\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)2\\6\end{matrix}\right]$			

$$j_n(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x) \qquad y_n(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,Y_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^{n+1}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)$$

Таблица 10.1. Сферические функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$j_0(x)$	$j_1(x)$	$j_2(x)$	$y_0(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$
5.0	(-1)-1.9178	(-2)-9.5089	(-1) 1.3473	(-2)-5.6732	(-1) 1.8044	(-1) 1.6500
5.1	(-1)-1.8153	(-1)-1.0971	(-1) 1.1700	(-2)-7.4113	(-1) 1.6700	(-1) 1.7235
5.2	(-1)-1.6990	(-1)-1.2277	(-2) 9.9065	(-2)-9.0099	(-1) 1.5257	(-1) 1.7812
5.3	(-1)-1.5703	(-1)-1.3423	(-2) 8.1054	(-1)-1.0460	(-1) 1.3730	(-1) 1.8231
5.4	(-1)-1.4310	(-1)-1.4404	(-2) 6.3084	(-1)-1.1754	(-1) 1.2134	(-1) 1.8495
5.5	(-1)-1.2828	(-1)-1.5217	(-2) 4.5277	(-1)-1.2885	(-1) 1.0485	(-1) 1.8604
5.6	(-1)-1.1273	(-1)-1.5862	(-2) 2.7749	(-1)-1.3849	(-2) 8.7995	(-1) 1.8563
5.7	(-2)-9.6611	(-1)-1.6339	(-2)+1.0617	(-1)-1.4644	(-2) 7.0920	(-1) 1.8377
5.8	(-2)-8.0104	(-1)-1.6649	(-3)-6.0100	(-1)-1.5268	(-2) 5.3780	(-1) 1.8049
5.9	(-2)-6.3365	(-1)-1.6794	(-2)-2.2024	(-1)-1.5720	(-2) 3.6725	(-1) 1.7567
6.0	(-2)-4.6569	(-1)-1.6779	(-2)-3.7326	(-1)-1.6003	(-2) 1.9898	(-1) 1.6998
6.1	(-2)-2.9863	(-1)-1.6609	(-2)-5.1819	(-1)-1.6119	(-3)+3.4379	(-1) 1.6288
6.2	(-2)-1.3402	(-1)-1.6289	(-2)-6.5418	(-1)-1.6073	(-2)-1.2523	(-1) 1.5467
6.3	(-3)+2.6689	(-1)-1.5828	(-2)-7.8042	(-1)-1.5871	(-2)-2.7861	(-1) 1.4544
6.4	(-2) 1.8211	(-1)-1.5234	(-2)-8.9620	(-1)-1.5519	(-2)-4.2458	(-1) 1.3528
6.5	(-2) 3.3095	(-1)-1.4515	(-1)-1.0009	(-1)-1.5024	(-2)-5.6210	(-1) 1.2430
6.6	(-2) 4.7203	(-1)-1.3682	(-1)-1.0940	(-1)-1.4397	(-2)-6.9018	(-1) 1.1260
6.7	(-2) 6.0425	(-1)-1.2746	(-1)-1.1750	(-1)-1.3648	(-2)-8.0795	(-1) 1.0030
6.8	(-2) 7.2664	(-1)-1.1717	(-1)-1.2435	(-1)-1.2785	(-2)-9.1466	(-2) 8.7500
6.9	(-2) 8.3832	(-1)-1.0607	(-1)-1.2995	(-1)-1.1822	(-1)-1.0097	(-2) 7.4323
7.0	(-2) 9.3855	(-2)-9.4292	(-1)-1.3427	(-1)-1.0770	(-1)-1.0924	(-2) 6.0883
7.1	(-1) 1.0267	(-2)-8.1954	(-1)-1.3730	(-2)-9.6415	(-1)-1.1625	(-2) 4.7295
7.2	(-1) 1.1023	(-2)-6.9183	(-1)-1.3906	(-2)-8.4493	(-1)-1.2197	(-2) 3.3674
7.3	(-1) 1.1650	(-2)-5.6107	(-1)-1.3956	(-2)-7.2065	(-1)-1.2637	(-2) 2.0132
7.4	(-1) 1.2145	(-2)-4.2851	(-1)-1.3882	(-2)-5.9263	(-1)-1.2946	(-3)+6.7812
7.5	(-1) 1.2507	(-2)-2.9542	(-1)-1.3688	(-2)-4.6218	(-1)-1.3123	(-3)-6.2736
7.6	(-1) 1.2736	(-2)-1.6303	(-1)-1.3379	(-2)-3.3061	(-1)-1.3171	(-2)-1.8929
7.7	(-1) 1.2833	(-3)-3.2520	(-1)-1.2960	(-2)-1.9919	(-1)-1.3092	(-2)-3.1089
7.8	(-1) 1.2802	(-3)+9.4953	(-1)-1.2437	(-3)-6.9174	(-1)-1.2891	(-2)-4.2662
7.9	(-1) 1.2645	(-2) 2.1829	(-1)-1.1816	(-3)+5.8231	(-1)-1.2571	(-2)-5.3561
8.0	(-1) 1.2367	(-2) 3.3646	(-1)-1.1105	(-2) 1.8188	(-1)-1.2140	(-2)-6.3711
8.1	(-1) 1.1974	(-2) 4.4850	(-1)-1.0313	(-2) 3.0067	(-1)-1.1603	(-2)-7.3040
8.2	(-1) 1.1472	(-2) 5.5351	(-2)-9.4473	(-2) 4.1360	(-1)-1.0968	(-2)-8.1487
8.3	(-1) 1.0870	(-2) 6.5069	(-2)-8.5177	(-2) 5.1973	(-1)-1.0243	(-2)-8.8997
8.4	(-1) 1.0174	(-2) 7.3932	(-2)-7.5334	(-2) 6.1820	(-2)-9.4378	(-2)-9.5527
8.5	(-2) 9.3940	(-2) 8.1877	(-2)-6.5042	(-2) 7.0825	(-2)-8.5607	(-1)-1.0104
8.6	(-2) 8.5395	(-2) 8.8851	(-2)-5.4401	(-2) 7.8921	(-2)-7.6218	(-1)-1.0551
8.7	(-2) 7.6203	(-2) 9.4810	(-2)-4.3510	(-2) 8.6051	(-2)-6.6312	(-1)-1.0892
8.8	(-2) 6.6468	(-2) 9.9723	(-2)-3.2471	(-2) 9.2170	(-2)-5.5994	(-1)-1.1126
8.9	(-2) 5.6294	(-1) 1.0357	(-2)-2.1385	(-2) 9.7240	(-2)-4.5369	(-1)-1.1253
9.0	(-2) 4.5791	(-1) 1.0632	(-2)-1.0349	(-1) 1.0124	(-2)-3.4542	(-1)-1.1275
9.1	(-2) 3.5066	(-1) 1.0800	(-4)+5.3818	(-1) 1.0415	(-2)-2.3621	(-1)-1.1193
9.2	(-2) 2.4227	(-1) 1.0859	(-2) 1.1184	(-1) 1.0596	(-2)-1.2710	(-1)-1.1011
9.3	(-2) 1.3382	(-1) 1.0813	(-2) 2.1498	(-1) 1.0669	(-3)-1.9101	(-1)-1.0731
9.4	(-3)+2.6357	(-1) 1.0663	(-2) 3.1395	(-1) 1.0635	(-3)+8.6782	(-1)-1.0358
9.5	(-3)-7.9106	(-1) 1.0413	(-2) 4.0795	(-1) 1.0497	(-2) 1.8960	(-2)-9.8978
9.6	(-2)-1.8159	(-1) 1.0068	(-2) 4.9622	(-1) 1.0257	(-2) 2.8844	(-2)-9.3558
9.7	(-2)-2.8017	(-2) 9.6325	(-2) 5.7808	(-2) 9.9213	(-2) 3.8245	(-2)-8.7385
9.8	(-2)-3.7396	(-2) 9.1126	(-2) 6.5291	(-2) 9.4941	(-2) 4.7084	(-2)-8.0528
9.9	(-2)-4.6216	(-2) 8.5149	(-2) 7.2018	(-2) 8.9817	(-2) 5.5288	(-2)-7.3063
10.0	(-2)-5.4402	(-2) 7.8467	(-2) 7.7942	(-2) 8.3907	(-2) 6.2793	(-2)-6.5069

$$j_n(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x) \qquad y_n(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,Y_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^{n+1}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)$$

Таблица 10.2 Сферические функции Бесселя порядков 3—10

x	$j_3(x)$	$j_4(x)$	$j_5(x)$	$j_6(x)$	$j_7(x)$	$j_8(x)$	$10^9x^{-9}j_9(x)$	$10^{11}x^{-10}j_{10}(x)$
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.52734 93	7.27309 19
0.1	(-6)9.5185	(-7)1.0577	(-10)9.6163	(-12)7.3975	(-14)4.9319	(-16)2.9012	1.52698 56	7.27151 10
0.2	(-5)7.6021	(-6)1.6900	(- 8)3.0737	(-10)4.7297	(-12)6.3072	(-14)7.4212	1.52589 53	7.26677 00
0.3	(-4)2.5586	(-6)8.5364	(- 7)2.3296	(- 9)5.3784	(-10)1.0761	(-12)1.8995	1.52407 96	7.25887 47
0.4	(-4)6.0413	(-5)2.6894	(- 7)9.7904	(- 8)3.0149	(-10)8.0448	(-11)1.8938	1.52154 09	7.24783 46
0.5	(-3)1.1740	(-5)6.5390	(- 6)2.9775	(- 7)1.1467	(- 9)3.8259	(-10)1.1261	1.51828 26	7.23366 29
0.6	(-3)2.0163	(-4)1.3491	(- 6)7.3776	(- 7)3.4113	(- 8)1.3665	(-10)4.8282	1.51430 88	7.21637 65
0.7	(-3)3.1787	(-4)2.4847	(- 5)1.5866	(- 7)8.5649	(- 8)4.0046	(- 9)1.6515	1.50962 48	7.19599 61
0.8	(-3)4.7053	(-4)4.2098	(- 5)3.0755	(- 6)1.8989	(- 7)1.0153	(- 9)4.7873	1.50423 66	7.17254 61
0.9	(-3)6.6361	(-4)6.6912	(- 5)5.5059	(- 6)3.8277	(- 7)2.3040	(- 8)1.2228	1.49815 12	7.14605 44
1.0	(-3)9.0066	(-3)1.0110	(- 5)9.2561	(- 6)7.1569	(- 7)4.7901	(- 8)2.8265	1.49137 65	7.11655 26
1.1	(-2)1.1847	(-3)1.4661	(- 4)1.4786	(- 5)1.2590	(- 7)9.2769	(- 8)6.0254	1.48392 11	7.08407 57
1.2	(-2)1.5183	(-3)2.0546	(- 4)2.2643	(- 5)2.1058	(- 6)1.6942	(- 7)1.2013	1.47579 48	7.04866 21
1.3	(-2)1.9033	(-3)2.7976	(- 4)3.3461	(- 5)3.3756	(- 6)2.9451	(- 7)2.2640	1.46700 80	7.01035 39
1.4	(-2)2.3411	(-3)3.7164	(- 4)4.7963	(- 5)5.2181	(- 6)4.9082	(- 7)4.0669	1.45757 18	6.96919 61
1.5	(-2)2.8325	(-3)4.8324	(- 4)6.6962	(- 5)7.8174	(- 6)7.8875	(- 7)7.0086	1.44749 84	6.92523 71
1.6	(-2)3.3774	(-3)6.1667	(- 4)9.1354	(- 4)1.1395	(- 5)1.2279	(- 6)1.1649	1.43680 05	6.87852 85
1.7	(-2)3.9754	(-3)7.7397	(- 3)1.2212	(- 4)1.6212	(- 5)1.8587	(- 6)1.8756	1.42549 17	6.82912 49
1.8	(-2)4.6252	(-3)9.5709	(- 3)1.6031	(- 4)2.2577	(- 5)2.7444	(- 6)2.9356	1.41358 63	6.77708 37
1.9	(-2)5.3249	(-2)1.1679	(- 3)2.0705	(- 4)3.0840	(- 5)3.9632	(- 6)4.4800	1.40109 93	6.72246 53
2.0	(-2)6.0722	(-2)1.4079	(- 3)2.6352	(- 4)4.1404	(- 5)5.6097	(- 6)6.6832	1.38804 63	6.66533 28
2.1	(-2)6.8639	(-2)1.6788	(- 3)3.3094	(- 4)5.4720	(- 5)7.7975	(- 6)9.7670	1.37444 35	6.60575 19
2.2	(-2)7.6962	(-2)1.9817	(- 3)4.1059	(- 4)7.1289	(- 4)1.0661	(- 5)1.4009	1.36030 78	6.54379 07
2.3	(-2)8.5650	(-2)2.3176	(- 3)5.0375	(- 4)9.1665	(- 4)1.4358	(- 5)1.9754	1.34565 67	6.47951 98
2.4	(-2)9.4654	(-2)2.6872	(- 3)6.1171	(- 3)1.1645	(- 4)1.9071	(- 5)2.7420	1.33050 81	6.41301 19
2.5	(-1)1.0392	(-2)3.0911	(- 3)7.3576	(- 3)1.4630	(- 4)2.5009	(- 5)3.7516	1.31488 05	6.34434 22
2.6	(-1)1.1339	(-2)3.5292	(- 3)8.7717	(- 3)1.8192	(- 4)3.2410	(- 5)5.0647	1.29879 28	6.27358 74
2.7	(-1)1.2301	(-2)4.0014	(- 2)1.0372	(- 3)2.2404	(- 4)4.1542	(- 5)6.7532	1.28226 44	6.20082 63
2.8	(-1)1.3270	(-2)4.5071	(- 2)1.2169	(- 3)2.7345	(- 4)5.2705	(- 5)8.9013	1.26531 50	6.12613 95
2.9	(-1)1.4241	(-2)5.0454	(- 2)1.4174	(- 3)3.3096	(- 4)6.6231	(- 4)1.1607	1.24796 48	6.04960 91
3.0	(-1)1.5205	(-2)5.6150	(- 2)1.6397	(- 3)3.9744	(- 4)8.2484	(- 4)1.4983	1.23023 41	5.97131 85
3.1	(-1)1.6156	(-2)6.2142	(- 2)1.8848	(- 3)4.7374	(- 3)1.0187	(- 4)1.9160	1.21214 38	5.89135 26
3.2	(-1)1.7087	(-2)6.8409	(- 2)2.1532	(- 3)5.6074	(- 3)1.2481	(- 4)2.4283	1.19371 48	5.80979 75
3.3	(-1)1.7989	(-2)7.4929	(- 2)2.4457	(- 3)6.5935	(- 3)1.5177	(- 4)3.0520	1.17496 82	5.72674 00
3.4	(-1)1.8857	(-2)8.1673	(- 2)2.7626	(- 3)7.7045	(- 3)1.8326	(- 4)3.8056	1.15592 54	5.64226 82
3.5	(-1)1.9681	(-2)8.8610	(- 2)3.1042	(- 3)8.9491	(- 3)2.1980	(- 4)4.7098	1.13660 79	5.55647 05
3.6	(-1)2.0456	(-2)9.5706	(- 2)3.4705	(- 2)1.0336	(- 3)2.6195	(- 4)5.7875	1.11703 73	5.46943 61
3.7	(-1)2.1174	(-1)1.0292	(- 2)3.8614	(- 2)1.1873	(- 3)3.1030	(- 4)7.0639	1.09723 52	5.38125 47
3.8	(-1)2.1829	(-1)1.1022	(- 2)4.2765	(- 2)1.3569	(- 3)3.6544	(- 4)8.5665	1.07722 33	5.29201 62
3.9	(-1)2.2414	(-1)1.1756	(- 2)4.7151	(- 2)1.5429	(- 3)4.2801	(- 3)1.0325	1.05702 31	5.20181 05
4.0	(-1)2.2924	(-1)1.2489	(- 2)5.1766	(- 2)1.7462	(- 3)4.9865	(- 3)1.2372	1.03665 63	5.11072 78
4.1	(-1)2.3354	(-1)1.3217	(- 2)5.6596	(- 2)1.9673	(- 3)5.7801	(- 3)1.4743	1.01614 44	5.01885 80
4.2	(-1)2.3697	(-1)1.3935	(- 2)6.1630	(- 2)2.2065	(- 3)6.6676	(- 3)1.7473	0.99550 88	4.92629 07
4.3	(-1)2.3951	(-1)1.4637	(- 2)6.6851	(- 2)2.4645	(- 3)7.6554	(- 3)2.0603	0.97477 06	4.83311 51
4.4	(-1)2.4110	(-1)1.5319	(- 2)7.2242	(- 2)2.7413	(- 3)8.7501	(- 3)2.4174	0.95395 10	4.73942 00
4.5	(-1)2.4174	(-1)1.5976	(- 2)7.7780	(- 2)3.0371	(- 3)9.9581	(- 3)2.8229	0.93307 06	4.64529 34
4.6	(-1)2.4138	(-1)1.6602	(- 2)8.3444	(- 2)3.3520	(- 2)1.1286	(- 3)3.2814	0.91215 01	4.55082 25
4.7	(-1)2.4001	(-1)1.7193	(- 2)8.9207	(- 2)3.6857	(- 2)1.2739	(- 3)3.7976	0.89120 97	4.45609 35
4.8	(-1)2.3763	(-1)1.7743	(- 2)9.5043	(- 2)4.0381	(- 2)1.4322	(- 3)4.3763	0.87026 94	4.36119 18
4.9	(-1)2.3423	(-1)1.8247	(- 1)1.0092	(- 2)4.4086	(- 2)1.6042	(- 3)5.0226	0.84934 88	4.26620 13
5.0	(-1)2.2982	(-1)1.8702	(- 1)1.0681	(- 2)4.7967	(- 2)1.7903	(- 3)5.7414	0.82846 70	4.17120 50
							$\begin{bmatrix}(-5)9\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\4\end{bmatrix}$

$$j_n(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

Таблица 10.2. Сферические функции Бесселя порядков 3—10

x	$y_3(x)$	$y_4(x)$	$y_5(x)$	$y_6(x)$	$y_7(x)$	$y_8(x)$	$10^{-8}x^{10}y_9(x)$	$10^{-9}x^{11}y_{10}(x)$
0.0	−∞	−∞	−∞	∞	−∞	−∞	−0.34459 42	−0.65472 90
0.1	(5)−1.5015	(7)−1.0507	(8)−9.4553	(11)−1.0400	(13)−1.3519	(15)−2.0277	−0.34469 56	−0.65490 14
0.2	(3)−9.4126	(5)−3.2906	(7)−1.4798	(8)−8.1359	(10)−5.2868	(12)−3.9643	−0.34499 99	−0.65541 86
0.3	(3)−1.8686	(4)−4.3489	(6)−1.3028	(7)−4.7726	(9)−2.0668	(11)−1.0329	−0.34550 77	−0.65628 18
0.4	(2)−5.9544	(4)−1.0372	(5)−2.3278	(6)−6.3910	(8)−2.0747	(9)−7.7739	−0.34622 02	−0.65749 23
0.5	(2)−2.4613	(3)−3.4208	(4)−6.1328	(6)−1.3458	(7)−3.4929	(9)−1.0465	−0.34713 86	−0.65905 23
0.6	(2)−1.2004	(3)−1.3857	(4)−2.0665	(5)−3.7747	(6)−8.1579	(8)−2.0357	−0.34826 48	−0.66096 47
0.7	(1)−6.5670	(2)−6.4716	(3)−8.2549	(5)−1.2907	(6)−2.3888	(7)−5.1060	−0.34960 12	−0.66323 28
0.8	(1)−3.9102	(2)−3.3557	(3)−3.7361	(4)−5.1035	(5)−8.2559	(7)−1.5429	−0.35115 04	−0.66586 06
0.9	(1)−2.4854	(2)−1.8854	(3)−1.8606	(4)−2.2552	(5)−3.2389	(6)−5.3756	−0.35291 56	−0.66885 29
1.0	(1)−1.6643	(2)−1.1290	(2)−9.9944	(4)−1.0881	(5)−1.4045	(6)−2.0959	−0.35490 04	−0.67221 50
1.1	(1)−1.1631	(1)−7.1198	(2)−5.7090	(3)−5.6378	(4)−6.6058	(5)−8.9515	−0.35710 89	−0.67595 30
1.2	(0)−8.4253	(1)−4.6879	(2)−3.4317	(3)−3.0988	(4)−3.3227	(5)−4.1224	−0.35954 56	−0.68007 37
1.3	(0)−6.2927	(1)−3.2014	(2)−2.1534	(3)−1.7901	(4)−1.7686	(5)−2.0227	−0.36221 57	−0.68458 47
1.4	(0)−4.8264	(1)−2.2559	(2)−1.4020	(3)−1.0790	(3)−9.8790	(5)−1.0477	−0.36512 46	−0.68949 42
1.5	(0)−3.7893	(1)−1.6338	(1)−9.4236	(2)−6.7473	(3)−5.7534	(4)−5.6859	−0.36827 87	−0.69481 14
1.6	(0)−3.0374	(1)−1.2120	(1)−6.5140	(2)−4.3572	(3)−3.4751	(4)−3.2143	−0.37168 46	−0.70054 60
1.7	(0)−2.4804	(0)−9.1871	(1)−4.6157	(2)−2.8948	(3)−2.1675	(4)−1.8835	−0.37534 96	−0.70670 90
1.8	(0)−2.0598	(0)−7.0994	(1)−3.3437	(2)−1.9724	(3)−1.3911	(4)−1.1395	−0.37928 17	−0.71331 20
1.9	(0)−1.7366	(0)−5.5830	(1)−2.4709	(2)−1.3747	(2)−9.1587	(3)−7.0931	−0.38348 96	−0.72036 75
2.0	(0)−1.4844	(0)−4.4613	(1)−1.8591	(1)−9.7792	(2)−6.1705	(3)−4.5301	−0.38798 26	−0.72780 93
2.1	(0)−1.2846	(0)−3.6178	(1)−1.4220	(1)−7.0870	(2)−4.2450	(3)−2.9613	−0.39277 08	−0.73589 19
2.2	(0)−1.1242	(0)−2.9740	(1)−1.1042	(1)−5.2238	(2)−2.9764	(3)−1.9771	−0.39786 50	−0.74439 11
2.3	(−1)−9.9368	(0)−2.4760	(0)−8.6948	(1)−3.9108	(2)−2.1235	(3)−1.3458	−0.40327 71	−0.75340 38
2.4	(−1)−8.8622	(0)−2.0858	(0)−6.9354	(1)−2.9702	(2)−1.5395	(2)−9.3247	−0.40901 97	−0.76294 81
2.5	(−1)−7.9660	(0)−1.7766	(0)−5.5991	(1)−2.2859	(2)−1.1327	(2)−6.5676	−0.41510 62	−0.77304 34
2.6	(−1)−7.2096	(0)−1.5290	(0)−4.5716	(1)−1.7812	(1)−8.4491	(2)−4.6963	−0.42155 14	−0.78371 06
2.7	(−1)−6.5632	(0)−1.3287	(0)−3.7725	(1)−1.4041	(1)−6.3832	(2)−3.4058	−0.42837 10	−0.79497 18
2.8	(−1)−6.0041	(0)−1.1651	(0)−3.1446	(1)−1.1189	(1)−4.8802	(2)−2.5025	−0.43558 18	−0.80685 08
2.9	(−1)−5.5144	(0)−1.0303	(0)−2.6462	(0)−9.0069	(1)−3.7729	(2)−1.8615	−0.44320 20	−0.81937 31
3.0	(−1)−5.0802	(−1)−9.1835	(0)−2.2470	(0)−7.3207	(1)−2.9476	(2)−1.4006	−0.45125 11	−0.83256 59
3.1	(−1)−4.6905	(−1)−8.2448	(0)−1.9246	(0)−6.0048	(1)−2.3257	(2)−1.0653	−0.45975 01	−0.84645 82
3.2	(−1)−4.3365	(−1)−7.4514	(0)−1.6621	(0)−4.9682	(1)−1.8521	(1)−8.1850	−0.46872 14	−0.86108 11
3.3	(−1)−4.0112	(−1)−6.7752	(0)−1.4467	(0)−4.1447	(1)−1.4881	(1)−6.3496	−0.47818 95	−0.87646 78
3.4	(−1)−3.7091	(−1)−6.1940	(0)−1.2687	(0)−3.4851	(1)−1.2057	(1)−4.9707	−0.48818 03	−0.89265 39
3.5	(−1)−3.4257	(−1)−5.6901	(0)−1.1206	(0)−2.9528	(0)−9.8471	(1)−3.9249	−0.49872 20	−0.90967 72
3.6	(−1)−3.1573	(−1)−5.2492	(−1)−9.9657	(0)−2.5201	(0)−8.1040	(1)−3.1246	−0.50984 49	−0.92757 84
3.7	(−1)−2.9012	(−1)−4.8600	(−1)−8.9204	(0)−2.1660	(0)−6.7182	(1)−2.5070	−0.52158 17	−0.94640 10
3.8	(−1)−2.6551	(−1)−4.5131	(−1)−8.0339	(0)−1.8743	(0)−5.6086	(1)−2.0265	−0.53396 75	−0.96619 15
3.9	(−1)−2.4173	(−1)−4.2011	(−1)−7.2774	(0)−1.6325	(0)−4.7139	(1)−1.6498	−0.54704 05	−0.98699 97
4.0	(−1)−2.1864	(−1)−3.9175	(−1)−6.6280	(0)−1.4310	(0)−3.9878	(1)−1.3523	−0.56084 19	−1.00887 91
4.1	(−1)−1.9615	(−1)−3.6574	(−1)−6.0670	(0)−1.2620	(0)−3.3947	(1)−1.1158	−0.57541 63	−1.03188 69
4.2	(−1)−1.7418	(−1)−3.4165	(−1)−5.5793	(0)−1.1196	(0)−2.9075	(0)−9.2642	−0.59081 20	−1.05608 44
4.3	(−1)−1.5269	(−1)−3.1913	(−1)−5.1525	(−1)−9.9895	(0)−2.5048	(0)−7.7389	−0.60708 14	−1.08153 78
4.4	(−1)−1.3165	(−1)−2.9788	(−1)−4.7765	(−1)−8.9625	(0)−2.1704	(0)−6.5027	−0.62478 15	−1.10831 79
4.5	(−1)−1.1107	(−1)−2.7768	(−1)−4.4430	(−1)−8.0839	(0)−1.8910	(0)−5.4951	−0.64247 43	−1.13650 10
4.6	(−2)−9.0931	(−1)−2.5833	(−1)−4.1450	(−1)−7.3286	(0)−1.6566	(0)−4.6692	−0.66172 73	−1.16616 90
4.7	(−2)−7.1268	(−1)−2.3966	(−1)−3.8766	(−1)−6.6763	(0)−1.4590	(0)−3.9887	−0.68211 42	−1.19741 05
4.8	(−2)−5.2107	(−1)−2.2155	(−1)−3.6331	(−1)−6.1102	(0)−1.2915	(0)−3.4251	−0.70371 55	−1.23032 08
4.9	(−2)−3.3484	(−1)−2.0390	(−1)−3.4102	(−1)−5.6166	(0)−1.1491	(0)−2.9560	−0.72661 94	−1.26500 29
5.0	(−2)−1.5443	(−1)−1.8662	(−1)−3.2047	(−1)−5.1841	(0)−1.0274	(0)−2.5638	−0.75092 23	−1.30156 80
							$\begin{bmatrix}(-4)2\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\5\end{bmatrix}$

$$y_n(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,Y_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^{n+1}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)$$

Таблица 10.2. Сферические функции Бесселя порядков 3—10

x	$j_3(x)$	$j_4(x)$	$j_5(x)$	$j_6(x)$	$j_7(x)$	$j_8(x)$	$10^9x^{-9}j_9(x)$	$10^{11}x^{-10}j_{10}(x)$
5.0	(-1) 2.2982	(-1) 1.8702	(-1) 1.0681	(-2) 4.7967	(-2) 1.7903	(-3) 5.7414	0.82846 70	4.17120 50
5.1	(-1) 2.2441	(-1) 1.9102	(-1) 1.1268	(-2) 5.2015	(-2) 1.9908	(-3) 6.5379	0.80764 29	4.07628 42
5.2	(-1) 2.1803	(-1) 1.9443	(-1) 1.1849	(-2) 5.6221	(-2) 2.2061	(-3) 7.4172	0.78689 50	3.98151 88
5.3	(-1) 2.1069	(-1) 1.9722	(-1) 1.2421	(-2) 6.0573	(-2) 2.4365	(-3) 8.3843	0.76624 10	3.88698 72
5.4	(-1) 2.0245	(-1) 1.9935	(-1) 1.2980	(-2) 6.5057	(-2) 2.6821	(-3) 9.4443	0.74569 86	3.79276 59
5.5	(-1) 1.9335	(-1) 2.0078	(-1) 1.3522	(-2) 6.9660	(-2) 2.9429	(-2) 1.0602	0.72528 47	3.69892 98
5.6	(-1) 1.8340	(-1) 2.0150	(-1) 1.4044	(-2) 7.4364	(-2) 3.2191	(-2) 1.1862	0.70501 58	3.60555 18
5.7	(-1) 1.7270	(-1) 2.0147	(-1) 1.4542	(-2) 7.9151	(-2) 3.5104	(-2) 1.3229	0.68490 78	3.51270 30
5.8	(-1) 1.6131	(-1) 2.0069	(-1) 1.5011	(-2) 8.4000	(-2) 3.8166	(-2) 1.4707	0.66497 60	3.42045 23
5.9	(-1) 1.4928	(-1) 1.9913	(-1) 1.5448	(-2) 8.8889	(-2) 4.1374	(-2) 1.6299	0.64523 54	3.32886 66
6.0	(-1) 1.3669	(-1) 1.9679	(-1) 1.5850	(-2) 9.3796	(-2) 4.4722	(-2) 1.8010	0.62570 01	3.23801 06
6.1	(-1) 1.2361	(-1) 1.9367	(-1) 1.6213	(-2) 9.8696	(-2) 4.8205	(-2) 1.9842	0.60638 37	3.14794 66
6.2	(-1) 1.1014	(-1) 1.8977	(-1) 1.6533	(-1) 1.0356	(-2) 5.1815	(-2) 2.1797	0.58729 93	3.05873 50
6.3	(-2) 9.6346	(-1) 1.8509	(-1) 1.6807	(-1) 1.0837	(-2) 5.5543	(-2) 2.3877	0.56845 94	2.97043 34
6.4	(-2) 8.2324	(-1) 1.7966	(-1) 1.7033	(-1) 1.1309	(-2) 5.9379	(-2) 2.6084	0.54987 57	2.88309 73
6.5	(-2) 6.8161	(-1) 1.7349	(-1) 1.7206	(-1) 1.1769	(-2) 6.3311	(-2) 2.8417	0.53155 94	2.79677 98
6.6	(-2) 5.3947	(-1) 1.6661	(-1) 1.7325	(-1) 1.2214	(-2) 6.7327	(-2) 3.0876	0.51352 10	2.71153 12
6.7	(-2) 3.9773	(-1) 1.5905	(-1) 1.7388	(-1) 1.2642	(-2) 7.1412	(-2) 3.3461	0.49577 04	2.62739 98
6.8	(-2) 2.5729	(-1) 1.5084	(-1) 1.7391	(-1) 1.3049	(-2) 7.5551	(-2) 3.6168	0.47831 68	2.54443 09
6.9	(-2)+1.1905	(-1) 1.4203	(-1) 1.7335	(-1) 1.3432	(-2) 7.9728	(-2) 3.8996	0.46116 89	2.46266 76
7.0	(-3)-1.6120	(-1) 1.3265	(-1) 1.7217	(-1) 1.3789	(-2) 8.3923	(-2) 4.1940	0.44433 45	2.38215 03
7.1	(-2)-1.4736	(-1) 1.2277	(-1) 1.7036	(-1) 1.4117	(-2) 8.8118	(-2) 4.4994	0.42782 11	2.30291 70
7.2	(-2)-2.7385	(-1) 1.1243	(-1) 1.6793	(-1) 1.4412	(-2) 9.2292	(-2) 4.8154	0.41163 52	2.22500 27
7.3	(-2)-3.9479	(-1) 1.0170	(-1) 1.6486	(-1) 1.4672	(-2) 9.6425	(-2) 5.1412	0.39578 30	2.14844 05
7.4	(-2)-5.0945	(-2) 9.0628	(-1) 1.6117	(-1) 1.4895	(-1) 1.0049	(-2) 5.4759	0.38026 97	2.07326 03
7.5	(-2)-6.1713	(-2) 7.9285	(-1) 1.5685	(-1) 1.5077	(-1) 1.0448	(-2) 5.8188	0.36510 02	1.99948 99
7.6	(-2)-7.1719	(-2) 6.7736	(-1) 1.5193	(-1) 1.5217	(-1) 1.0835	(-2) 6.1686	0.35027 86	1.92715 45
7.7	(-2)-8.0904	(-2) 5.6051	(-1) 1.4642	(-1) 1.5312	(-1) 1.1209	(-2) 6.5244	0.33580 85	1.85627 66
7.8	(-2)-8.9217	(-2) 4.4300	(-1) 1.4033	(-1) 1.5360	(-1) 1.1568	(-2) 6.8849	0.32169 28	1.78687 63
7.9	(-2)-9.6613	(-2) 3.2552	(-1) 1.3370	(-1) 1.5361	(-1) 1.1908	(-2) 7.2486	0.30793 39	1.71897 14
8.0	(-1)-1.0305	(-2) 2.0880	(-1) 1.2654	(-1) 1.5312	(-1) 1.2227	(-2) 7.6143	0.29453 36	1.65257 72
8.1	(-1)-1.0851	(-3)+9.3549	(-1) 1.1890	(-1) 1.5212	(-1) 1.2524	(-2) 7.9804	0.28149 30	1.58770 64
8.2	(-1)-1.1296	(-3)-1.9533	(-1) 1.1081	(-1) 1.5060	(-1) 1.2795	(-2) 8.3451	0.26881 29	1.52436 97
8.3	(-1)-1.1638	(-2)-1.2975	(-1) 1.0231	(-1) 1.4857	(-1) 1.3039	(-2) 8.7069	0.25649 33	1.46257 53
8.4	(-1)-1.1877	(-2)-2.3644	(-2) 9.3440	(-1) 1.4601	(-1) 1.3252	(-2) 9.0640	0.24453 39	1.40232 92
8.5	(-1)-1.2014	(-2)-3.3894	(-2) 8.4249	(-1) 1.4292	(-1) 1.3434	(-2) 9.4145	0.23293 38	1.34363 53
8.6	(-1)-1.2048	(-2)-4.3664	(-2) 7.4784	(-1) 1.3932	(-1) 1.3581	(-2) 9.7564	0.22169 16	1.28649 51
8.7	(-1)-1.1982	(-2)-5.2894	(-2) 6.5099	(-1) 1.3520	(-1) 1.3693	(-1) 1.0088	0.21080 54	1.23090 84
8.8	(-1)-1.1817	(-2)-6.1529	(-2) 5.5245	(-1) 1.3059	(-1) 1.3767	(-1) 1.0407	0.20027 29	1.17687 25
8.9	(-1)-1.1558	(-2)-6.9520	(-2) 4.5278	(-1) 1.2548	(-1) 1.3801	(-1) 1.0712	0.19009 14	1.12438 32
9.0	(-1)-1.1207	(-2)-7.6819	(-2) 3.5255	(-1) 1.1991	(-1) 1.3795	(-1) 1.1000	0.18025 78	1.07343 42
9.1	(-1)-1.0770	(-2)-8.3387	(-2) 2.5233	(-1) 1.1389	(-1) 1.3746	(-1) 1.1270	0.17076 84	1.02401 72
9.2	(-1)-1.0252	(-2)-8.9186	(-2) 1.5269	(-1) 1.0744	(-1) 1.3655	(-1) 1.1520	0.16161 93	0.97612 24
9.3	(-2)-9.6572	(-2)-9.4187	(-3)+5.4232	(-1) 1.0060	(-1) 1.3520	(-1) 1.1747	0.15280 62	0.92973 83
9.4	(-2)-8.9931	(-2)-9.8365	(-3)-4.2485	(-2) 9.3394	(-1) 1.3341	(-1) 1.1949	0.14432 46	0.88485 16
9.5	(-2)-8.2662	(-1)-1.0170	(-2)-1.3689	(-2) 8.5853	(-1) 1.3117	(-1) 1.2126	0.13616 93	0.84144 75
9.6	(-2)-7.4836	(-1)-1.0419	(-2)-2.2842	(-2) 7.8016	(-1) 1.2849	(-1) 1.2275	0.12833 53	0.79950 99
9.7	(-2)-6.6527	(-1)-1.0582	(-2)-3.1654	(-2) 6.9921	(-1) 1.2536	(-1) 1.2394	0.12081 68	0.75902 10
9.8	(-2)-5.7814	(-1)-1.0659	(-2)-4.0072	(-2) 6.1608	(-1) 1.2180	(-1) 1.2482	0.11360 83	0.71996 20
9.9	(-2)-4.8776	(-1)-1.0651	(-2)-4.8048	(-2) 5.3120	(-1) 1.1780	(-1) 1.2537	0.10670 35	0.68231 26
10.0	(-2)-3.9496	(-1)-1.0559	(-2)-5.5535	(-2) 4.4501	(-1) 1.1339	(-1) 1.2558	0.10009 64	0.64605 15
							$\left[\begin{smallmatrix}(-5)5\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)2\\5\end{smallmatrix}\right]$

$$j_n(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

Таблица 10.2. Сферические функции Бесселя порядков 3—10

x	$y_3(x)$	$y_4(x)$	$y_5(x)$	$y_6(x)$	$y_7(x)$	$y_8(x)$	$10^{-8}x^{10}y_9(x)$	$10^{-9}x^{11}y_{10}(x)$
5.0	(-2)-1.5443	(-1)-1.8662	(-1)-3.2047	(-1)-5.1841	(0)-1.0274	(0)-2.5638	-0.75092 23	-1.30156 80
5.1	(-3)+1.9691	(-1)-1.6965	(-1)-3.0134	(-1)-4.8031	(-1)-9.2298	(0)-2.2343	-0.77673 01	-1.34013 68
5.2	(-2) 1.8700	(-1)-1.5295	(-1)-2.8341	(-1)-4.4658	(-1)-8.3305	(0)-1.9564	-0.80415 92	-1.38083 98
5.3	(-2) 3.4698	(-1)-1.3649	(-1)-2.6647	(-1)-4.1656	(-1)-7.5528	(0)-1.7210	-0.83333 74	-1.42381 86
5.4	(-2) 4.9908	(-1)-1.2025	(-1)-2.5033	(-1)-3.8967	(-1)-6.8777	(0)-1.5208	-0.86440 56	-1.46922 70
5.5	(-2) 6.4276	(-1)-1.0424	(-1)-2.3484	(-1)-3.6545	(-1)-6.2895	(0)-1.3499	-0.89751 90	-1.51723 25
5.6	(-2) 7.7750	(-2)-8.8447	(-1)-2.1990	(-1)-3.4349	(-1)-5.7750	(0)-1.2034	-0.93284 85	-1.56801 75
5.7	(-2) 9.0279	(-2)-7.2898	(-1)-2.0538	(-1)-3.2345	(-1)-5.3232	(0)-1.0774	-0.97058 31	-1.62178 08
5.8	(-1) 1.0182	(-2)-5.7610	(-1)-1.9121	(-1)-3.0503	(-1)-4.9248	(-1)-9.6863	-1.01093 09	-1.67873 97
5.9	(-1) 1.1232	(-2)-4.2612	(-1)-1.7732	(-1)-2.8799	(-1)-4.5723	(-1)-8.7446	-1.05412 18	-1.73913 16
6.0	(-1) 1.2175	(-2)-2.7936	(-1)-1.6365	(-1)-2.7210	(-1)-4.2589	(-1)-7.9262	-1.10040 93	-1.80321 67
6.1	(-1) 1.3007	(-2)-1.3619	(-1)-1.5017	(-1)-2.5717	(-1)-3.9791	(-1)-7.2128	-1.15007 32	-1.87128 02
6.2	(-1) 1.3726	(-4)+2.9727	(-1)-1.3683	(-1)-2.4306	(-1)-3.7281	(-1)-6.5889	-1.20342 16	-1.94363 49
6.3	(-1) 1.4329	(-2) 1.3770	(-1)-1.2362	(-1)-2.2961	(-1)-3.5018	(-1)-6.0416	-1.26079 38	-2.02062 45
6.4	(-1) 1.4815	(-2) 2.6754	(-1)-1.1052	(-1)-2.1672	(-1)-3.2969	(-1)-5.5598	-1.32256 26	-2.10262 69
6.5	(-1) 1.5183	(-2) 3.9204	(-2)-9.7544	(-1)-2.0428	(-1)-3.1101	(-1)-5.1344	-1.38913 71	-2.19005 78
6.6	(-1) 1.5432	(-2) 5.1073	(-2)-8.4678	(-1)-1.9220	(-1)-2.9390	(-1)-4.7576	-1.46096 57	-2.28337 46
6.7	(-1) 1.5564	(-2) 6.2315	(-2)-7.1937	(-1)-1.8042	(-1)-2.7813	(-1)-4.4227	-1.53853 78	-2.38308 14
6.8	(-1) 1.5580	(-2) 7.2886	(-2)-5.9337	(-1)-1.6887	(-1)-2.6351	(-1)-4.1239	-1.62238 69	-2.48973 26
6.9	(-1) 1.5482	(-2) 8.2743	(-2)-4.6896	(-1)-1.5751	(-1)-2.4985	(-1)-3.8565	-1.71309 24	-2.60393 95
7.0	(-1) 1.5273	(-2) 9.1846	(-2)-3.4641	(-1)-1.4628	(-1)-2.3703	(-1)-3.6163	-1.81128 11	-2.72637 44
7.1	(-1) 1.4956	(-1) 1.0016	(-2)-2.2599	(-1)-1.3517	(-1)-2.2489	(-1)-3.3996	-1.91762 85	-2.85777 73
7.2	(-1) 1.4535	(-1) 1.0764	(-2)-1.0801	(-1)-1.2414	(-1)-2.1334	(-1)-3.2032	-2.03285 95	-2.99896 17
7.3	(-1) 1.4016	(-1) 1.1427	(-4)+7.1768	(-1)-1.1319	(-1)-2.0228	(-1)-3.0246	-2.15774 75	-3.15082 08
7.4	(-1) 1.3404	(-1) 1.2001	(-2) 1.1922	(-1)-1.0229	(-1)-1.9162	(-1)-2.8613	-2.29311 31	-3.31433 45
7.5	(-1) 1.2705	(-1) 1.2485	(-2) 2.2774	(-2)-9.1449	(-1)-1.8129	(-1)-2.7112	-2.43982 13	-3.49057 53
7.6	(-1) 1.1925	(-1) 1.2877	(-2) 3.3235	(-2)-8.0665	(-1)-1.7122	(-1)-2.5726	-2.59877 67	-3.68071 56
7.7	(-1) 1.1073	(-1) 1.3176	(-2) 4.3267	(-2)-6.9945	(-1)-1.6136	(-1)-2.4439	-2.77091 77	-3.88603 37
7.8	(-1) 1.0156	(-1) 1.3380	(-2) 5.2830	(-2)-5.9299	(-1)-1.5166	(-1)-2.3236	-2.95720 73	-4.10791 96
7.9	(-2) 9.1812	(-1) 1.3491	(-2) 6.1887	(-2)-4.8741	(-1)-1.4209	(-1)-2.2106	-3.15862 24	-4.34788 05
8.0	(-2) 8.1577	(-1) 1.3509	(-2) 7.0400	(-2)-3.8290	(-1)-1.3262	(-1)-2.1038	-3.37613 93	-4.60754 55
8.1	(-2) 7.0941	(-1) 1.3435	(-2) 7.8334	(-2)-2.7968	(-1)-1.2322	(-1)-2.0022	-3.61071 67	-4.88866 85
8.2	(-2) 5.9992	(-1) 1.3270	(-2) 8.5654	(-2)-1.7798	(-1)-1.1387	(-1)-1.9050	-3.86327 49	-5.19312 95
8.3	(-2) 4.8821	(-1) 1.3017	(-2) 9.2329	(-3)-7.8077	(-1)-1.0456	(-1)-1.8115	-4.13466 98	-5.52293 51
8.4	(-2) 3.7517	(-1) 1.2679	(-2) 9.8330	(-3)+1.9747	(-2)-9.5274	(-1)-1.7211	-4.42566 38	-5.88021 45
8.5	(-2) 2.6172	(-1) 1.2259	(-1) 1.0363	(-2) 1.1519	(-2)-8.6015	(-1)-1.6331	-4.73689 09	-6.26721 41
8.6	(-2) 1.4876	(-1) 1.1762	(-1) 1.0821	(-2) 2.0793	(-2)-7.6780	(-1)-1.5471	-5.06881 69	-6.68628 70
8.7	(-3)+3.7160	(-1) 1.1191	(-1) 1.1205	(-2) 2.9765	(-2)-6.7573	(-1)-1.4627	-5.42169 35	-7.13987 95
8.8	(-3)-7.2210	(-1) 1.0551	(-1) 1.1513	(-2) 3.8403	(-2)-5.8403	(-1)-1.3795	-5.79550 68	-7.63051 13
8.9	(-2)-1.7852	(-2) 9.8492	(-1) 1.1745	(-2) 4.6672	(-2)-4.9278	(-1)-1.2973	-6.18991 88	-8.16074 96
9.0	(-2)-2.8097	(-2) 9.0898	(-1) 1.1899	(-2) 5.4540	(-2)-4.0214	(-1)-1.2156	-6.60420 33	-8.73317 65
9.1	(-2)-3.7880	(-2) 8.2794	(-1) 1.1976	(-2) 6.1976	(-2)-3.1227	(-1)-1.1345	-7.03717 50	-9.35034 96
9.2	(-2)-4.7130	(-2) 7.4246	(-1) 1.1976	(-2) 6.8948	(-2)-2.2335	(-1)-1.0536	-7.48710 95	-10.01475 2
9.3	(-2)-5.5782	(-2) 6.5321	(-1) 1.1900	(-2) 7.5427	(-2)-1.3560	(-2)-9.7298	-7.95166 19	-10.72873 2
9.4	(-2)-6.3774	(-2) 5.6089	(-1) 1.1748	(-2) 8.1384	(-3)-4.9250	(-2)-8.9243	-8.42777 38	-11.49443 4
9.5	(-2)-7.1053	(-2) 4.6623	(-1) 1.1522	(-2) 8.6793	(-3)+3.5462	(-2)-8.1193	-8.91157 56	-12.31371 5
9.6	(-2)-7.7572	(-2) 3.6995	(-1) 1.1225	(-2) 9.1630	(-2) 1.1827	(-2)-7.3150	-9.39828 63	-13.18805 0
9.7	(-2)-8.3288	(-2) 2.7280	(-1) 1.0860	(-2) 9.5874	(-2) 1.9892	(-2)-6.5114	-9.88210 58	-14.11841 9
9.8	(-2)-8.8169	(-2) 1.7550	(-1) 1.0429	(-2) 9.9507	(-2) 2.7712	(-2)-5.7090	-10.35610 3	-15.10518 2
9.9	(-2)-9.2189	(-3)+7.8793	(-2) 9.9352	(-1) 1.0251	(-2) 3.5259	(-2)-4.9088	-10.81210 4	-16.14793 9
10.0	(-2)-9.5327	(-3)-1.6599	(-2) 9.3834	(-1) 1.0488	(-2) 4.2506	(-2)-4.1117	-11.24057 9	-17.24536 7
							$\left[{(-3)3 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)7 \atop 6}\right]$

$$y_n(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,Y_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^{n+1}\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)$$

Таблица 10.3. Сферические функции Бесселя порядков 20 и 21

x	$10^{26} f_{20}(x)$	$10^{27} f_{21}(x)$	$10^{-24} g_{20}(x)$	$10^{-25} g_{21}(x)$
0.0	7.62597 90	1.77348 35	-0.31983 10	-1.31130 70
0.5	7.62705 91	1.77371 23	-0.31988 11	-1.31149 33
1.0	7.63028 29	1.77439 56	-0.32003 25	-1.31205 61
1.5	7.63560 15	1.77552 32	-0.32028 86	-1.31300 70
2.0	7.64293 25	1.77707 85	-0.32065 49	-1.31436 61
2.5	7.65215 99	1.77903 78	-0.32113 96	-1.31616 11
3.0	7.66313 22	1.78137 03	-0.32175 30	-1.31842 87
3.5	7.67566 19	1.78403 80	-0.32250 82	-1.32121 43
4.0	7.68952 28	1.78699 49	-0.32342 08	-1.32457 29
4.5	7.70444 90	1.79018 73	-0.32450 98	-1.32856 95
5.0	7.72013 23	1.79355 29	0.32579 69	-1.33328 02
5.5	7.73621 95	1.79702 05	0.32730 79	-1.33879 33
6.0	7.75231 00	1.80050 95	-0.32907 24	-1.34521 03
6.5	7.76795 28	1.80392 94	-0.33112 44	-1.35264 77
7.0	7.78264 38	1.80717 91	-0.33350 34	-1.36123 89
7.5	7.79582 23	1.81014 64	-0.33625 47	-1.37113 69
8.0	7.80686 80	1.81270 77	-0.33943 07	-1.38251 67
8.5	7.81509 84	1.81472 70	-0.34309 23	-1.39557 96
9.0	7.81976 53	1.81605 56	-0.34731 02	-1.41055 73
9.5	7.82005 32	1.81653 14	-0.35216 70	-1.42771 82
10.0	7.815076	1.815979	-0.35776 04	-1.447374
10.5	7.803876	1.814208	-0.36420 59	-1.469891
11.0	7.785428	1.811016	-0.37164 20	-1.495697
11.5	7.758627	1.806185	-0.38023 59	-1.525305
12.0	7.722309	1.799482	-0.39019 23	-1.559325
12.5	7.675238	1.790664	-0.40176 53	-1.598497
13.0	7.616116	1.779472	-0.41527 46	-1.643728
13.5	7.543601	1.765639	-0.43113 22	-1.696143
14.0	7.456316	1.748885	-0.44987 76	-1.757166
14.5	7.352841	1.728929	-0.47223 40	-1.828625
15.0	7.231764	1.705481	-0.49918 70	-1.912922
15.5	7.091689	1.678251	-0.53209 15	-2.013273
16.0	6.931265	1.646956	-0.57279 98	-2.134049
16.5	6.749220	1.611324	-0.62378 79	-2.281228
17.0	6.544411	1.571096	-0.68821 72	-2.4629[illegible]6
17.5	6.315851	1.526041	-0.76981 49	-2.689957
18.0	6.062784	1.475960	-0.87240 01	-2.975953
18.5	5.784739	1.420698	-0.99883 14	-3.336925
19.0	5.481584	1.360155	-1.149171	-3.789188
19.5	5.153621	1.294299	-1.317987	-4.344958
20.0	4.801647	1.223178	-1.490982	-5.004711
20.5	4.427041	1.146936	-1.641599	-5.745922
21.0	4.031843	1.065826	-1.728777	-6.508927
21.5	3.618830	0.98022 63	-1.697442	-7.182333
22.0	3.191590	0.89065 46	-1.483467	-7.592679
22.5	2.754567	0.79777 92	-1.024223	-7.504782
23.0	2.313103	0.70243 25	-0.274630	-6.640003
23.5	1.873442	0.60561 45	+0.773430	-4.717888
24.0	1.442686	0.50849 80	2.072631	-1.52185
24.5	1.028721	0.41242 27	3.508629	+3.01816
25.0	0.640055	0.31888 30	4.901591	+8.74251
	$\left[{(-3)3 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)7 \atop 5}\right]$		

$j_n(x) = f_n x^n \exp(-x^2/4n+2)$ $\qquad y_n(x) = g_n x^{-(n+1)} \exp(x^2/4n+2)$

Таблица 10.4. Модуль и фаза сферических функций Бесселя порядков 9, 10, 20 и 21

$j_n(x)=\sqrt{\frac{1}{2}\pi/x}\,M_{n+\frac{1}{2}}(x)\cos\theta_{n+\frac{1}{2}}(x)$ $\qquad$ $y_n(x)=\sqrt{\frac{1}{2}\pi/x}\,M_{n+\frac{1}{2}}(x)\sin\theta_{n+\frac{1}{2}}(x)$

x^{-1}	$\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}M_{19/2}(x)$	$\theta_{19/2}(x)-x$	$\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}M_{21/2}(x)$	$\theta_{21/2}(x)-x$	$\langle x\rangle$
0.100	1.50513 630	1.72311 121	1.84157 799	1.35401 461	10
0.095	1.41043 073	1.44562 029	1.65174 534	1.00196 372	11
0.090	1.33509 121	1.17232 718	1.50947 539	0.65310 249	11
0.085	1.27462 197	0.90378 457	1.40190 550	+0.30984 705	12
0.080	1.22560 809	0.64017 615	1.31955 792	−0.02643 915	13
0.075	1.18548 011	0.38142 613	1.25559 223	−0.35524 574	13
0.070	1.15231 423	+0.12729 416	1.20514 049	−0.67664 889	14
0.065	1.12467 134	−0.12255 277	1.16476 186	−0.99107 278	15
0.060	1.10147 221	−0.36849 087	1.13202 416	−1.29911 571	17
0.055	1.08190 340	−0.61090 826	1.10519 883	−1.60143 947	18
0.050	1.06534 781	−0.85018 673	1.08304 588	−1.89870 678	20
0.045	1.05133 389	−1.08669 229	1.06466 562	−2.19155 009	22
0.040	1.03949 892	−1.32077 114	1.04939 746	−2.48055 907	25
0.035	1.02956 235	−1.55274 891	1.03675 104	−2.76627 814	29
0.030	1.02130 658	−1.78293 175	1.02635 931	−3.04920 936	33
0.025	1.01456 304	−2.01160 832	1.01794 637	−3.32981 737	40
0.020	1.00920 210	−2.23905 224	1.01130 529	−3.60853 532	50
0.015	1.00512 574	−2.46552 469	1.00628 277	−3.88577 070	67
0.010	1.00226 240	−2.69127 701	1.00276 864	−4.16191 106	100
0.005	1.00056 327	−2.91655 326	1.00068 866	−4.43732 935	200
0.000	1.00000 000	−3.14159 265	1.00000 000	−4.71238 898	∞
	$\left[{(-3)2 \atop 9}\right]$	$\left[{(-4)6 \atop 9}\right]$	$\left[{(-3)6 \atop 9}\right]$	$\left[{(-4)9 \atop 10}\right]$	

x^{-1}	$\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}M_{41/2}(x)$	$\theta_{41/2}(x)-x$	$\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}M_{43/2}(x)$	$\theta_{43/2}(x)-x$	$\langle x\rangle$
0.040	1.31126 605	1.12909 207	1.37979 868	+0.54348 547	25
0.038	1.25741 042	0.61321 135	1.30763 025	−0.04056 472	26
0.036	1.21433 612	+0.11048 098	1.25205 767	−0.60729 830	28
0.034	1.17917 949	−0.38066 745	1.20806 627	−1.15885 172	29
0.032	1.15001 033	−0.86163 915	1.17245 178	−1.69717 688	31
0.030	1.12549 256	−1.33366 819	1.14310 153	−2.22398 514	33
0.028	1.10467 736	−1.79783 172	1.11857 851	−2.74075 480	36
0.026	1.08687 488	−2.25507 118	1.09787 629	−3.24876 024	38
0.024	1.07157 283	−2.70621 373	1.08027 122	−3.74910 503	42
0.022	1.05838 371	−3.15199 149	1.06523 083	−4.24275 239	45
0.020	1.04700 987	−3.59305 805	1.05235 561	−4.73055 105	50
0.018	1.03721 972	−4.03000 220	1.04134 092	−5.21325 651	56
0.016	1.02883 137	−4.46335 928	1.03195 154	−5.69154 843	63
0.014	1.02170 104	−4.89362 072	1.02400 423	−6.16604 479	71
0.012	1.01571 485	−5.32124 187	1.01735 560	−6.63731 350	83
0.010	1.01078 282	−5.74664 872	1.01189 351	−7.10588 196	100
0.008	1.00683 452	−6.17024 356	1.00753 093	−7.57224 522	125
0.006	1.00381 592	−6.59240 995	1.00420 153	−8.03687 285	167
0.004	1.00168 705	−7.01351 707	1.00185 654	−8.50021 498	250
0.002	1.00042 044	−7.43392 365	1.00046 253	−8.96270 770	500
0.000	1.00000 000	−7.85398 164	1.00000 000	−9.42477 796	∞
	$\left[{(-3)1 \atop 9}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 9}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 10}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 9}\right]$	

$\langle x\rangle$ — целое число, ближайшее к x.

Таблица 10.5. Сферические функции Бесселя различных порядков

$j_n(x)$

n	$x=1$	$x=2$	$x=5$
0	(− 1)8.41470 9848	(− 1)4.54648 7134	(− 1)−1.91784 8549
1	(− 1)3.01168 6789	(− 1)4.35397 7750	(− 2)−9.50894 0808
2	(− 2)6.20350 5201	(− 1)1.98447 9491	(− 1)+1.34731 2101
3	(− 3)9.00658 1117	(− 2)6.07220 9766	(− 1) 2.29820 6182
4	(− 3)1.01101 5808	(− 2)1.40793 9276	(− 1) 1.87017 6553
5	(− 5)9.25611 5861	(− 3)2.63516 9770	(− 1) 1.06811 1615
6	(− 6)7.15693 6310	(− 4)4.14040 9734	(− 2) 4.79668 9986
7	(− 7)4.79013 4199	(− 5)5.60965 5703	(− 2) 1.79027 7818
8	(− 8)2.82649 8802	(− 6)6.68320 4324	(− 3) 5.74143 4675
9	(− 9)1.49137 6503	(− 7)7.10679 7192	(− 3) 1.61809 9715
10	(− 11)7.11655 2640	(− 8)6.82530 0865	(− 4) 4.07344 2442
11	(− 12)3.09955 1855	(− 9)5.97687 1612	(− 5) 9.27461 1037
12	(− 13)1.24166 2597	(− 10)4.81014 8901	(− 5) 1.92878 6347
13	(− 15)4.60463 7678	(− 11)3.58145 1402	(− 6) 3.69320 6998
14	(− 16)1.58957 5988	(− 12)2.48104 9119	(− 7) 6.55454 3131
15	(− 18)5.13268 6115	(− 13)1.60698 2166	(− 7) 1.08428 0182
16	(− 19)1.55670 8271	(− 15)9.77323 7728	(− 8) 1.67993 9976
17	(− 21)4.45117 7504	(− 16)5.60205 9151	(− 9) 2.44802 0198
18	(− 22)1.20385 5742	(− 17)3.03657 8644	(− 10) 3.36741 6303
19	(− 24)3.08874 2364	(− 18)1.56113 3992	(− 11) 4.38678 6630
20	(− 26)7.53779 5722	(− 20)7.63264 1101	(− 12) 5.42772 6761
30	(− 43)5.56683 1267	(− 34)5.83661 7888	(− 22) 4.28273 0217
40	(− 61)1.53821 0374	(− 49)1.66097 8779	(− 33) 1.21034 7583
50	(− 81)3.61527 4717	(− 66)4.01157 5290	(− 46) 2.85747 9350
100	(−190)7.44472 7742	(−160)9.36783 2591	(−120) 5.53565 0303

n	$x=10$	$x=50$	$x=100$
0	(− 2)−5.44021 1109	(− 3)−5.24749 7074	(−3)−5.06365 6411
1	(− 2)+7.84669 4180	(− 2)−1.94042 7051	(−3)−8.67382 5287
2	(− 2)+7.79421 9363	(− 3)+4.08324 0843	(−3)+4.80344 1652
3	(− 2)−3.94958 4498	(− 2)+1.98125 9460	(−3)+8.91399 7370
4	(− 1)−1.05589 2851	(− 3)−1.30947 7600	(−3)−4.17946 1837
5	(− 2)−5.55345 1162	(− 2)−2.00483 0056	(−3)−9.29014 8935
6	(− 2)+4.45013 2233	(− 3)−3.10114 8524	(−3)+3.15754 5454
7	(− 1) 1.13386 2307	(− 2)+1.92420 0195	(−3)+9.70062 9844
8	(− 1) 1.25578 0236	(− 3)+8.87374 9108	(−3)−1.70245 0977
9	(− 1) 1.00096 4095	(− 2)−1.62249 2725	(−3)−9.99004 6510
10	(− 2) 6.46051 5449	(− 2)−1.50392 2146	(−4)−1.95657 8597
11	(− 2) 3.55744 1489	(− 3)+9.90845 4236	(−3)+9.94895 8359
12	(− 2) 1.72159 9974	(− 2)+1.95971 1041	(−3)+2.48391 8282
13	(− 3) 7.46558 4477	(− 4)−1.09899 0300	(−3)−9.32797 8789
14	(− 3) 2.94107 8342	(− 2)−1.96564 5589	(−3)−5.00247 2555
15	(− 3) 1.06354 2715	(− 2)−1.12908 4539	(−3)+7.87726 1748
16	(− 4) 3.55904 0735	(− 2)+1.26561 3175	(−3)+7.44442 3697
17	(− 4) 1.10940 7280	(− 2)+1.96438 9234	(−3)−5.42060 1928
18	(− 5) 3.23884 7439	(− 3)+1.09459 2888	(−3)−9.34163 4372
19	(− 6) 8.89662 7269	(− 2)−1.88338 9360	(−3)+1.96419 7210
20	(− 6) 2.30837 1961	(− 2)−1.57850 2990	(−2)+1.01076 7128
30	(−13) 2.51205 7385	(− 3)−1.49467 3454	(−3)+8.70062 8514
40	(−22) 8.43567 1634	(− 2)−2.60633 6952	(−2)+1.04341 0851
50	(−31) 2.23069 6023	(− 2)+1.88291 0737	(−4)+5.79714 0882
100	(−90) 5.83204 0182	(−22)+1.01901 2263	(−2)+1.08804 7701

Таблица 10.5. Сферические функции Бесселя различных порядков

$y_n(x)$

n	$x=1$	$x=2$	$x=5$
0	(-1)-5.40302 3059	(-1)+2.08073 4183	(-2)-5.67324 3709
1	(0)-1.38177 3291	(-1)-3.50612 0043	(-1)+1.80438 3675
2	(0)-3.60501 7566	(-1)-7.33991 4247	(-1)+1.64995 4576
3	(1)-1.66433 1454	(0)-1.48436 6557	(-2)-1.54429 0991
4	(2)-1.12898 1842	(0)-4.46129 1526	(-1)-1.86615 5315
5	(2)-9.99440 3434	(1)-1.85914 4531	(-1)-3.20465 0467
6	(4)-1.08809 4559	(1)-9.77916 5769	(-1)-5.18407 5714
7	(5)-1.40452 8524	(2)-6.17054 3296	(0)-1.02739 4639
8	(6)-2.09591 1840	(3)-4.53011 5815	(0)-2.56377 6345
9	(7)-3.54900 4843	(4)-3.78889 3009	(0)-7.68944 4934
10	(8)-6.72215 0083	(5)-3.55414 7201	(1)-2.66561 1441
11	(10)-1.40810 2512	(6)-3.69396 5631	(2)-1.04266 2356
12	(11)-3.23191 3629	(7)-4.21251 9003	(2)-4.52968 5692
13	(12)-8.06570 3047	(8)-5.22870 9098	(3)-2.16057 6611
14	(14)-2.17450 7909	(9)-7.01663 2092	(4)-1.12141 4513
15	(15)-6.29800 7233	(11)-1.01218 2944	(4)-6.28814 6513
16	(17)-1.95020 7734	(12)-1.56186 6932	(5)-3.78650 9387
17	(18)-6.42938 7516	(13)-2.56695 8608	(6)-2.43621 4730
18	(20)-2.24833 5423	(14)-4.47655 8894	(7)-1.66748 5217
19	(21)-8.31241 1677	(15)-8.25596 4368	(8)-1.20957 6913
20	(23)-3.23959 2219	(17)-1.60543 6493	(8)-9.26795 1403
30	(40)-2.94642 8547	(31)-1.40739 3871	(18)-7.76071 7570
40	(58)-8.02845 0851	(46)-3.72092 9322	(30)-2.05575 8716
50	(78)-2.73919 2285	(63)-1.23502 1944	(42)-6.96410 9188
100	(186)-6.68307 9463	(156)-2.65595 5830	(116)-1.79971 3983

n	$x=10$	$x=50$	$x=100$
0	(-2)+8.39071 5291	(-2)-1.92993 2057	(-3)-8.62318 8723
1	(-2)+6.27928 2638	(-3)+4.86151 0663	(-3)+4.97742 4524
2	(-2)-6.50693 0499	(-2)+1.95910 1121	(-3)+8.77251 1459
3	(-2)-9.53274 7888	(-3)-2.90240 9542	(-3)-4.53879 8951
4	(-3)-1.65993 0220	(-2)-1.99973 4855	(-3)-9.09022 7385
5	(-2)+9.38335 4168	(-4)-6.97113 1965	(-3)+3.72067 8486
6	(-1)+1.04876 8261	(-2)+1.98439 8364	(-3)+9.49950 2019
7	(-2)+4.25063 3221	(-3)+5.85654 8943	(-3)-2.48574 3224
8	(-2)-4.11173 2775	(-2)-1.80870 1896	(-3)-9.87236 3502
9	(-1)-1.12405 7894	(-2)-1.20061 3539	(-4)+8.07441 4285
10	(-1)-1.72453 6721	(-2)+1.35246 8751	(-2)+1.00257 7737
11	(-1)-2.49746 9220	(-2)+1.76865 0414	(-3)+1.29797 1820
12	(-1)-4.01964 2485	(-3)-5.38889 5605	(-3)-9.72724 3855
13	(-1)-7.55163 6993	(-2)-2.03809 5195	(-3)-3.72978 2784
14	(0)-1.63697 7739	(-3)-5.61681 8446	(-3)+8.72020 2503
15	(0)-3.99207 1745	(-2)+1.71231 9725	(-3)+6.25864 1510
16	(1)-1.07384 4467	(-2)+1.62332 0074	(-3)-6.78002 3635
17	(1)-3.14447 9567	(-3)-6.40928 4759	(-3)-8.49604 9309
18	(1)-9.93183 4017	(-2)-2.07197 0007	(-3)+3.80640 6377
19	(2)-3.36033 0630	(-3)-8.92329 3294	(-3)+9.90441 9669
20	(3)-1.21121 0605	(-2)+1.37595 3130	(-5)+5.63172 9379
30	(9)-6.90831 8646	(-2)-2.24122 6812	(-3)-5.41292 9349
40	(18)-1.51030 4919	(-5)+4.97879 7221	(-4)-7.04842 0407
50	(27)-4.52822 7272	(-2)-4.19000 0150	(-2)+1.07478 2297
100	(85)-8.57322 6309	(+18)-1.12569 2891	(-2)-2.29838 5049

Таблица 10.6. Нули функций Бесселя полуцелого порядка

$J_\nu(j_{\nu,s})=0 \qquad Y_\nu(y_{\nu,s})=0$

ν	s	$j_{\nu,s}$	$J'_\nu(j_{\nu,s})$	$y_{\nu,s}$	$(-1)^{s+1}Y'_\nu(y_{\nu,s})$
1/2	1	3.141593	−0.45015 82	1.570796	−0.63661 98
	2	6.283185	+0.31830 99	4.712389	+0.36755 26
	3	9.424778	−0.25989 89	7.853982	−0.28470 50
	4	12.566370	+0.22507 91	10.995574	+0.24061 97
	5	15.707963	−0.20131 68	14.137167	−0.21220 66
	6	18.849556	+0.18377 63	17.278760	+0.19194 81
	7	21.991149	−0.17014 38	20.420352	−0.17656 66
	8			23.561945	+0.16437 45
3/2	1	4.493409	−0.36741 35	2.798386	+0.44914 84
	2	7.725252	+0.28469 20	6.121250	−0.31827 37
	3	10.904122	−0.24061 69	9.317866	+0.25989 33
	4	14.066194	+0.21220 57	12.486454	−0.22507 76
	5	17.220755	−0.19194 77	15.644128	+0.20131 63
	6	20.371303	+0.17656 64	18.796404	−0.18377 61
	7	23.519452	−0.16437 44	21.945613	+0.17014 37
5/2	1	5.763459	−0.31710 58	3.959528	−0.36184 68
	2	9.095011	+0.25973 30	7.451610	+0.28430 75
	3	12.322941	−0.22503 59	10.715647	−0.24053 93
	4	15.514603	+0.20130 14	13.921686	+0.21218 15
	5	18.689036	−0.18376 96	17.103359	−0.19193 81
	6	21.853874	+0.17014 05	20.272369	+0.17656 19
	7			23.433926	−0.16437 21
7/2	1	6.987932	−0.28223 71	5.080498	+0.30882 36
	2	10.417119	+0.24019 23	8.733710	−0.25896 77
	3	13.698023	−0.21208 02	12.067544	+0.22485 68
	4	16.923621	+0.19189 90	15.315390	−0.20124 01
	5	20.121806	−0.17654 40	18.525210	+0.18374 36
	6	23.304247	+0.16436 28	21.714547	−0.17012 77
	7			24.891503	+0.15914 62
9/2	1	8.182561	−0.25620 49	6.197831	−0.27236 25
	2	11.704907	+0.22432 53	9.982466	+0.23908 76
	3	15.039665	−0.20107 12	13.385287	−0.21179 27
	4	18.301256	+0.18367 44	16.676625	+0.19179 35
	5	21.525418	−0.17009 46	19.916796	−0.17649 69
	6	24.727566	+0.15912 86	23.128642	+0.16453 89
11/2	1	9.355812	−0.23580 60	7.293692	+0.24538 14
	2	12.966530	+0.21109 29	11.206497	−0.22293 49
	3	16.354710	−0.19155 58	14.676387	+0.20067 86
	4	19.653152	+0.17639 49	18.011609	−0.18352 21
	5	22.904551	−0.16428 83	21.283249	+0.17002 38
	6			24.518929	−0.15909 15
13/2	1	10.512835	−0.21926 48	8.379626	−0.22441 70
	2	14.207392	+0.19983 04	12.411301	+0.20946 65
	3	17.647975	−0.18321 82	15.945983	−0.19106 59
	4	20.983463	+0.16988 82	19.324820	+0.17619 60
	5	24.262768	−0.15902 21	22.628417	−0.16419 26
15/2	1	11.657032	−0.20550 46	9.457882	+0.20754 83
	2	15.431289	+0.19008 87	13.600629	−0.19801 01
	3	18.922999	−0.17582 99	17.197777	+0.18264 01
	4	22.295348	+0.16402 38	20.619612	−0.16964 44
	5			23.955267	+0.15890 14
17/2	1	12.790782	−0.19382 82	10.529989	−0.19361 38
	2	16.641003	+0.18155 15	14.777175	+0.18810 92
	3	20.182471	−0.16922 10	18.434529	−0.17517 27
	4	23.591275	+0.15870 04	21.898570	+0.16373 75
19/2	1	13.915823	−0.18376 12	11.597038	+0.18186 42
	2	17.838643	+0.17398 80	15.942945	−0.17944 10
	3	21.428487	−0.16326 17	19.658369	+0.16849 33
	4	24.873214	+0.15383 84	23.163734	−0.15837 45
21/2	1	15.033469	−0.17496 82	12.659840	−0.17179 22
	2	19.025854	+0.16722 59	17.099480	+0.17176 97
	3	22.662721	−0.15785 09	20.870973	−0.16247 13
	4			24.416749	+0.15347 56
23/2	1	16.144743	−0.16720 39	13.719013	+0.16304 06
	2	20.203943	+0.16113 25	18.247994	−0.16491 86
	3	23.886531	−0.15290 87	22.073692	+0.15700 50
25/2	1	17.250455	−0.16028 44	14.775045	−0.15534 97
	2	21.373972	+0.15560 47	19.389462	+0.15875 20
	3			23.267630	−0.15201 34
27/2	1	18.351261	−0.15406 88	15.828325	+0.14852 56
	2	22.536817	+0.15056 00	20.524680	−0.15316 36
	3			24.453705	+0.14743 15
29/2	1	19.447703	−0.14844 69	16.879170	−0.14242 04
	2	23.693208	+0.14593 21	21.654309	+0.14806 91
31/2	1	20.540230	−0.14333 12	17.927842	+0.13691 88
	2	24.843763	+0.14166 70	22.778902	−0.14340 05
33/2	1	21.629221	−0.13865 11	18.974562	−0.13192 99
	2			23.898931	+0.13910 20
35/2	1	22.715002	−0.13434 93	20.019515	+0.12738 05
37/2	1	23.797849	−0.13037 81	21.062860	−0.12321 13
39/2	1	24.878005	−0.12669 81	22.104735	+0.11937 34

Таблица 10.7. Нули производных функций Бесселя полуцелого порядка

$J_\nu'(j_{\nu,s}')=0 \qquad Y_\nu'(y_{\nu,s}')=0$

ν	s	$j_{\nu,s}'$	$J_\nu(j_{\nu,s}')$	$y_{\nu,s}'$	$(-1)^{n+1}Y_\nu(y_{\nu,s}')$
1/2	1	1.165561	+0.679192	2.975086	−0.456186
	2	4.604217	−0.369672	6.202750	+0.319331
	3	7.789884	+0.285287	9.371475	−0.260267
	4	10.949944	−0.240870	12.526476	+0.225258
	5	14.101725	+0.212340	15.676078	−0.201419
	6	17.249782	−0.192029	18.822999	+0.183841
	7	20.395842	+0.176620	21.968393	−0.170188
	8	23.540708	−0.164412		
3/2	1	2.460536	+0.525338	4.354435	+0.388891
	2	6.029292	−0.328062	7.655545	−0.290138
	3	9.261402	+0.263295	10.856531	+0.242910
	4	12.445260	−0.226711	14.029845	−0.213417
	5	15.611585	+0.202245	17.191285	+0.192678
	6	18.769469	−0.184363	20.346496	−0.177046
	7	21.922619	+0.170542	23.498023	+0.164709
5/2	1	3.632797	+0.457398	5.634297	−0.350669
	2	7.367009	−0.301449	9.030902	+0.270006
	3	10.663561	+0.247304	12.278863	−0.229783
	4	13.883370	−0.215670	15.480655	+0.203956
	5	17.072849	+0.194015	18.661309	−0.185432
	6	20.246945	−0.177917	21.830390	+0.171262
	7	23.412100	+0.165314	24.992411	−0.159953
7/2	1	4.762196	+0.415533	6.863232	+0.324651
	2	8.653134	−0.282237	10.356373	−0.254849
	3	12.018262	+0.234875	13.656304	+0.219318
	4	15.279081	−0.206685	16.891400	−0.196124
	5	18.496200	+0.187103	20.095393	+0.179270
	6	21.690284	−0.172377	23.281796	−0.166245
	7	24.870602	+0.160741		
9/2	1	5.868420	+0.386006	8.060030	−0.305246
	2	9.904306	−0.267385	11.646354	+0.242810
	3	13.337928	+0.224788	14.999624	−0.210673
	4	16.641787	−0.199151	18.270330	+0.189472
	5	19.888934	+0.181169	21.500029	−0.173929
	6	23.105297	−0.167534	24.705942	+0.161826
11/2	1	6.959746	+0.363557	9.234274	+0.289946
	2	11.129856	−0.255385	12.909478	−0.232895
	3	14.630406	+0.216349	16.315912	+0.203344
	4	17.977886	−0.192692	19.623229	−0.183714
	5	21.256291	+0.175987	22.879980	+0.169229
	6	24.496327	−0.163244		
13/2	1	8.040535	+0.345649	10.391621	−0.277420
	2	12.335631	−0.245384	14.151399	+0.224513
	3	15.901023	+0.209127	17.610124	−0.197009
	4	19.291967	−0.187058	20.954335	+0.178651
	5	22.602185	+0.171399	24.238863	−0.165043
15/2	1	9.113402	+0.330874	11.535731	+0.266883
	2	13.525575	−0.236854	15.376058	−0.217283
	3	17.153587	+0.202841	18.885886	+0.191447
	4	20.587450	−0.182077	22.266861	−0.174147
	5	23.929631	+0.167294		
17/2	1	10.180054	+0.318378	12.669130	−0.257833
	2	14.702493	−0.229449	16.586323	+0.210950
	3	18.390930	+0.197291	20.145940	−0.186505
	4	21.866965	−0.177623	23.563314	+0.170098
19/2	1	11.241675	+0.307606	13.793646	+0.249935
	2	15.868463	−0.222927	17.784362	−0.205332
	3	19.615227	+0.192335	21.392422	+0.182067
	4	23.132584	−0.173605	24.845689	−0.166427
21/2	1	12.299124	+0.298179	14.910648	−0.242951
	2	17.025072	−0.217118	18.971857	+0.200296
	3	20.828186	+0.187870	22.627032	−0.178048
	4	24.385974	−0.169950		
23/2	1	13.353045	+0.289825	16.021196	+0.236710
	2	18.173567	−0.211893	20.150142	−0.195742
	3	22.031181	+0.183813	23.851147	+0.174383
25/2	1	14.403937	+0.282348	17.126125	−0.231081
	2	19.314945	−0.207156	21.320300	+0.191594
	3	23.225333	+0.180103		
27/2	1	15.452196	+0.275596	18.226109	+0.225965
	2	20.450018	−0.202830	22.483219	−0.187792
	3	24.411571	+0.176690		
29/2	1	16.498138	+0.269455	19.321702	−0.221286
	2	21.579459	−0.198856	23.639641	+0.184287
31/2	1	17.542024	+0.263833	20.413362	+0.216981
	2	22.703832	−0.195187	24.790191	−0.181040
33/2	1	18.584071	+0.258658	21.501477	−0.213000
	2	23.823614	−0.191783		
35/2	1	19.624460	+0.253871	22.586374	+0.209303
	2	24.939214	−0.188612		
37/2	1	20.663347	+0.249423	23.668335	−0.205855
39/2	1	21.700865	+0.245275	24.747606	+0.202629

Таблица 10.8. Модифицированные сферические функции Бесселя порядков 0, 1 и 2

x	$i_0(x)$	$i_1(x)$	$i_2(x)$	$k_0(x)$	$k_1(x)$	$k_2(x)$
0.0	1.00000 000	0.00000 000	0.00000 0000	∞	∞	∞
0.1	1.00166 750	0.03336 668	0.00066 7143	14.21315 293	156.344682	4704.5536
0.2	1.00668 001	0.06693 370	0.00267 4294	6.43029 630	38.58177 78	585.15696
0.3	1.01506 764	0.10090 290	0.00603 8668	3.87891 513	16.80863 22	171.96524
0.4	1.02688 081	0.13547 889	0.01078 9114	2.63234 067	9.21319 233	71.731283
0.5	1.04219 061	0.17087 071	0.01696 6360	1.90547 226	5.71641 679	36.203973
0.6	1.06108 930	0.20729 319	0.02462 3348	1.43678 550	3.83142 801	20.593926
0.7	1.08369 100	0.24496 858	0.03382 5678	1.11433 482	2.70624 170	12.712514
0.8	1.11013 248	0.28412 808	0.04465 2156	0.88225 536	1.98507 456	8.32628 49
0.9	1.14057 414	0.32501 361	0.05719 5452	0.70959 792	1.49804 005	5.70306 48
1.0	1.17520 119	0.36787 944	0.07156 2871	0.57786 367	1.15572 735	4.04504 57
1.1	1.21422 497	0.41299 416	0.08787 7251	0.47533 880	0.90746 4974	2.95024 33
1.2	1.25788 446	0.46064 259	0.10627 7995	0.39426 230	0.72281 4219	2.20129 78
1.3	1.30644 803	0.51112 785	0.12692 2227	0.32930 149	0.58261 0332	1.67378 69
1.4	1.36021 536	0.56477 365	0.14998 6112	0.27668 115	0.47431 0537	1.29306 09
1.5	1.41951 964	0.62192 665	0.17566 6332	0.23366 136	0.38943 5596	1.01253 25
1.6	1.48472 997	0.68295 906	0.20418 1728	0.19821 144	0.32209 3595	0.80213 693
1.7	1.55625 408	0.74827 140	0.23577 5138	0.16879 918	0.26809 2818	0.64190 415
1.8	1.63454 127	0.81829 550	0.27071 5433	0.14425 049	0.22438 9655	0.51823 325
1.9	1.72008 574	0.89349 778	0.30929 9770	0.12365 360	0.18873 4440	0.42165 535
2.0	1.81343 020	0.97438 274	0.35185 6089	0.10629 208	0.15943 8124	0.34544 927
2.1	1.91516 988	1.06149 681	0.39874 5868	0.09159 719	0.13521 4906	0.28476 135
2.2	2.02595 690	1.15543 247	0.45036 7165	0.07911 327	0.11507 3847	0.23603 215
2.3	2.14650 513	1.25683 283	0.50715 7959	0.06847 227	0.09824 2824	0.19661 508
2.4	2.27759 551	1.36639 653	0.56959 9849	0.05937 476	0.08411 4246	0.16451 757
2.5	2.42008 179	1.48488 308	0.63822 2102	0.05157 553	0.07220 5736	0.13822 241
2.6	2.57489 701	1.61311 877	0.71360 6125	0.04487 256	0.06213 1241	0.11656 246
2.7	2.74306 041	1.75200 304	0.79639 0365	0.03909 858	0.05357 9539	0.09863 140
2.8	2.92568 513	1.90251 546	0.88727 5704	0.03411 437	0.04629 8067	0.08371 944
2.9	3.12398 658	2.06572 335	0.98703 1387	0.02980 354	0.04008 0625	0.07126 626
3.0	3.33929 164	2.24279 012	1.09650 152	0.02606 845	0.03475 7931	0.06082 638
3.1	3.57304 872	2.43498 437	1.21661 224	0.02282 681	0.03019 0302	0.05204 323
3.2	3.82683 675	2.64368 983	1.34837 954	0.02000 910	0.02626 1944	0.04462 967
3.3	4.10238 723	2.87041 631	1.49291 787	0.01755 635	0.02287 6452	0.03835 312
3.4	4.40157 747	3.11681 153	1.65144 965	0.01541 841	0.01995 3243	0.03302 422
3.5	4.72646 494	3.38467 421	1.82531 562	0.01355 255	0.01742 4712	0.02848 802
3.6	5.07929 316	3.67596 831	2.01598 623	0.01192 222	0.01523 3952	0.02461 718
3.7	5.46251 092	3.99283 865	2.22507 418	0.01049 611	0.01333 2903	0.02130 658
3.8	5.87879 128	4.33762 799	2.45434 813	0.00924 735	0.01168 0862	0.01846 908
3.9	6.33105 220	4.71289 572	2.70574 780	0.00815 280	0.01024 3262	0.01603 223
4.0	6.82247 930	5.12143 838	2.98140 051	0.00719 253	0.00899 0668	0.01393 554
4.1	7.35655 060	5.56631 208	3.28363 932	0.00634 934	0.00789 7961	0.01212 834
4.2	7.93706 374	6.05085 704	3.61502 300	0.00560 833	0.00694 3650	0.01056 808
4.3	8.56816 571	6.57872 451	3.97835 791	0.00495 661	0.00610 9316	0.00921 893
4.4	9.25438 538	7.15390 628	4.37672 200	0.00438 300	0.00537 9136	0.00805 059
4.5	10.00066 914	7.78076 689	4.81349 122	0.00387 777	0.00473 9498	0.00703 744
4.6	10.81241 998	8.46407 908	5.29236 840	0.00343 248	0.00417 8666	0.00615 769
4.7	11.69554 012	9.20906 250	5.81741 513	0.00303 975	0.00368 6506	0.00539 284
4.8	12.65647 789	10.02142 620	6.39308 652	0.00269 318	0.00325 4257	0.00472 709
4.9	13.70227 889	10.90741 515	7.02426 961	0.00238 716	0.00287 4331	0.00414 695
5.0	14.84064 212	11.87386 128	7.71632 535	0.00211 679	0.00254 0146	0.00364 088
	$\left[\begin{matrix}(-2)1\\7\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-2)1\\7\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-3)8\\7\end{matrix}\right]$			

$$i_n(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\, I_{n+\frac{1}{2}}(x) \qquad k_n(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\, K_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

Таблица 10.9. **Модифицированные сферические функции Бесселя порядков 9 и 10**

x	$10^{9}x^{-9}i_9(x)$	$10^{10}x^{-10}i_{10}(x)$	$10^{-7}x^{10}k_9(x)$	$10^{-9}x^{11}k_{10}(x)$
0.0	1.52734 93	0.72730 92	5.41287 38	1.02844 60
0.1	1.52771 30	0.72746 73	5.41128 21	1.02817 54
0.2	1.52880 46	0.72794 19	5.40650 99	1.02736 41
0.3	1.53062 54	0.72873 35	5.39856 70	1.02601 35
0.4	1.53317 79	0.72984 30	5.38746 92	1.02412 59
0.5	1.53646 54	0.73127 18	5.37323 85	1.02170 47
0.6	1.54049 23	0.73302 17	5.35590 33	1.01875 42
0.7	1.54526 36	0.73509 47	5.33549 79	1.01527 95
0.8	1.55078 57	0.73749 33	5.31206 23	1.01128 67
0.9	1.55706 60	0.74022 04	5.28564 31	1.00678 27
1.0	1.56411 27	0.74327 93	5.25629 13	1.00177 53
1.1	1.57193 49	0.74667 38	5.22406 45	0.99627 31
1.2	1.58054 32	0.75040 79	5.18902 48	0.99028 56
1.3	1.58994 87	0.75448 62	5.15123 93	0.98382 30
1.4	1.60016 42	0.75891 37	5.11078 01	0.97689 61
1.5	1.61120 30	0.76369 58	5.06772 38	0.96951 68
1.6	1.62308 02	0.76883 83	5.02215 07	0.96169 72
1.7	1.63581 13	0.77434 76	4.97414 57	0.95345 03
1.8	1.64941 38	0.78023 05	4.92379 68	0.94478 97
1.9	1.66390 60	0.78649 43	4.87119 57	0.93572 94
2.0	1.67930 73	0.79314 68	4.81643 66	0.92628 41
2.1	1.69563 90	0.80019 63	4.75961 72	0.91646 88
2.2	1.71292 33	0.80765 17	4.70083 65	0.90629 89
2.3	1.73118 39	0.81552 21	4.64019 67	0.89579 04
2.4	1.75044 59	0.82381 79	4.57780 09	0.88495 95
2.5	1.77073 63	0.83254 94	4.51375 41	0.87382 25
2.6	1.79208 32	0.84172 78	4.44816 23	0.86239 63
2.7	1.81451 64	0.85136 49	4.38113 22	0.85069 78
2.8	1.83806 76	0.86147 30	4.31277 10	0.83874 39
2.9	1.86277 03	0.87206 54	4.24318 63	0.82655 20
3.0	1.88865 96	0.88315 57	4.17248 53	0.81413 92
3.1	1.91577 24	0.89475 86	4.10077 50	0.80152 28
3.2	1.94414 79	0.90688 95	4.02816 19	0.78872 01
3.3	1.97382 74	0.91956 42	3.95475 12	0.77574 83
3.4	2.00485 39	0.93279 97	3.88064 76	0.76262 45
3.5	2.03727 33	0.94661 40	3.80595 33	0.74936 56
3.6	2.07113 33	0.96102 55	3.73076 99	0.73598 84
3.7	2.10648 43	0.97605 38	3.65519 70	0.72250 95
3.8	2.14337 94	0.99171 97	3.57933 16	0.70894 53
3.9	2.18187 40	1.00804 44	3.50326 88	0.69531 19
4.0	2.22202 68	1.02505 08	3.42710 13	0.68162 50
4.1	2.26389 90	1.04276 26	3.35091 95	0.66790 02
4.2	2.30755 54	1.06120 45	3.27481 07	0.65415 25
4.3	2.35306 35	1.08040 28	3.19885 96	0.64039 66
4.4	2.40049 43	1.10038 47	3.12314 76	0.62664 70
4.5	2.44992 27	1.12117 91	3.04775 39	0.61291 75
4.6	2.50142 71	1.14281 58	2.97275 34	0.59922 16
4.7	2.55508 99	1.16532 63	2.89821 88	0.58557 24
4.8	2.61099 74	1.18874 39	2.82421 90	0.57198 25
4.9	2.66924 03	1.21310 29	2.75081 98	0.55846 39
5.0	2.72991 40	1.23843 97	2.67808 38	0.54502 82
	$\begin{bmatrix}(-4)3\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)1\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)7\\4\end{bmatrix}$

$$i_n(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,I_{n+\frac{1}{2}}(x) \qquad k_n(x)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,K_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

Таблица 10.9. Модифицированные сферические функции Бесселя порядков 9 и 10

x	$e^{-x}I_{\frac{19}{2}}(x)$	$e^{-x}I_{\frac{21}{2}}(x)$	$\frac{2}{\pi}e^{x}K_{\frac{19}{2}}(x)$	$\frac{2}{\pi}e^{x}K_{\frac{21}{2}}(x)$
5.0	(-5)6.40961	(-5)1.45387	(2)4.62276	(3)1.88159
5.1	(-5)7.16216	(-5)1.65403	(2)4.11899	(3)1.64774
5.2	(-5)7.97716	(-5)1.87488	(2)3.68187	(3)1.44818
5.3	(-5)8.85734	(-5)2.11778	(2)3.30123	(3)1.27719
5.4	(-5)9.80541	(-5)2.38413	(2)2.96863	(3)1.13013
5.5	(-4)1.08240	(-5)2.67535	(2)2.67706	(3)1.00320
5.6	(-4)1.19157	(-5)2.99285	(2)2.42066	(2)8.93250
5.7	(-4)1.30831	(-5)3.33809	(2)2.19449	(2)7.97686
5.8	(-4)1.43285	(-5)3.71252	(2)1.99441	(2)7.14360
5.9	(-4)1.56545	(-5)4.11760	(2)1.81692	(2)6.41477
6.0	(-4)1.70632	(-5)4.55480	(2)1.65905	(2)5.77537
6.1	(-4)1.85569	(-5)5.02559	(2)1.51825	(2)5.21281
6.2	(-4)2.01376	(-5)5.53143	(2)1.39236	(2)4.71647
6.3	(-4)2.18075	(-5)6.07377	(2)1.27955	(2)4.27737
6.4	(-4)2.35684	(-5)6.65407	(2)1.17821	(2)3.88791
6.5	(-4)2.54221	(-5)7.27375	(2)1.08697	(2)3.54160
6.6	(-4)2.73703	(-5)7.93423	(2)1.00464	(2)3.23292
6.7	(-4)2.94147	(-5)8.63691	(1)9.30213	(2)2.95714
6.8	(-4)3.15568	(-5)9.38317	(1)8.62775	(2)2.71019
6.9	(-4)3.37978	(-4)1.01743	(1)8.01557	(2)2.48857
7.0	(-4)3.61391	(-4)1.10117	(1)7.45880	(2)2.28926
7.1	(-4)3.85819	(-4)1.18967	(1)6.95148	(2)2.10966
7.2	(-4)4.11271	(-4)1.28304	(1)6.48840	(2)1.94748
7.3	(-4)4.37758	(-4)1.38142	(1)6.06498	(2)1.80076
7.4	(-4)4.65288	(-4)1.48492	(1)5.67717	(2)1.66777
7.5	(-4)4.93867	(-4)1.59365	(1)5.32140	(2)1.54701
7.6	(-4)5.23503	(-4)1.70773	(1)4.99452	(2)1.43717
7.7	(-4)5.54199	(-4)1.82727	(1)4.69371	(2)1.33708
7.8	(-4)5.85960	(-4)1.95236	(1)4.41649	(2)1.24573
7.9	(-4)6.18789	(-4)2.08311	(1)4.16065	(2)1.16223
8.0	(-4)6.52688	(-4)2.21961	(1)3.92420	(2)1.08577
8.1	(-4)6.87657	(-4)2.36195	(1)3.70539	(2)1.01566
8.2	(-4)7.23697	(-4)2.51020	(1)3.50262	(1)9.51284
8.3	(-4)7.60807	(-4)2.66447	(1)3.31448	(1)8.92076
8.4	(-4)7.98985	(-4)2.82481	(1)3.13970	(1)8.37549
8.5	(-4)8.38228	(-4)2.99130	(1)2.97713	(1)7.87266
8.6	(-4)8.78533	(-4)3.16400	(1)2.82574	(1)7.40835
8.7	(-4)9.19895	(-4)3.34298	(1)2.68460	(1)6.97906
8.8	(-4)9.62308	(-4)3.52828	(1)2.55287	(1)6.58165
8.9	(-3)1.00576	(-4)3.71997	(1)2.42979	(1)6.21331
9.0	(-3)1.05026	(-4)3.91809	(1)2.31467	(1)5.87149
9.1	(-3)1.09579	(-4)4.12268	(1)2.20689	(1)5.55393
9.2	(-3)1.14235	(-4)4.33377	(1)2.10586	(1)5.25858
9.3	(-3)1.18991	(-4)4.55140	(1)2.01109	(1)4.98356
9.4	(-3)1.23849	(-4)4.77560	(1)1.92209	(1)4.72722
9.5	(-3)1.28806	(-4)5.00639	(1)1.83843	(1)4.48802
9.6	(-3)1.33861	(-4)5.24378	(1)1.75973	(1)4.26461
9.7	(-3)1.39014	(-4)5.48779	(1)1.68563	(1)4.05572
9.8	(-3)1.44263	(-4)5.73844	(1)1.61578	(1)3.86022
9.9	(-3)1.49607	(-4)5.99571	(1)1.54991	(1)3.67709
10.0	(-3)1.55045	(-4)6.25963	(1)1.48772	(1)3.50537

Таблица 10.9. Модифицированные сферические функции Бесселя порядков 9 и 10

x^{-1}	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$	$g_9(x)$	$g_{10}(x)$	$\langle x \rangle$
0.100	1.10630 573	1.21411 149	0.65502 364	0.56777 303	10
0.095	1.08238 951	1.17260 877	0.68557 030	0.60351 931	11
0.090	1.06167 683	1.13650 462	0.71563 676	0.63926 956	11
0.085	1.04394 741	1.10534 464	0.74502 124	0.67473 612	12
0.080	1.02899 406	1.07872 041	0.77352 114	0.70961 813	13
0.075	1.01661 895	1.05626 085	0.80093 667	0.74360 745	13
0.070	1.00662 998	1.03762 412	0.82707 483	0.77639 538	14
0.065	0.99883 728	1.02248 982	0.85175 354	0.80768 018	15
0.060	0.99304 985	1.01055 159	0.87480 587	0.83717 510	17
0.055	0.98907 251	1.00151 009	0.89608 425	0.86461 675	18
0.050	0.98670 320	0.99506 643	0.91546 455	0.88977 340	20
0.045	0.98573 080	0.99091 634	0.93284 978	0.91245 301	22
0.040	0.98593 357	0.98874 519	0.94817 344	0.93251 041	25
0.035	0.98707 842	0.98822 421	0.96140 216	0.94985 358	29
0.030	0.98892 100	0.98900 824	0.97253 769	0.96444 830	33
0.025	0.99120 680	0.99073 519	0.98161 804	0.97632 121	40
0.020	0.99367 323	0.99302 746	0.98871 764	0.98556 077	50
0.015	0.99605 259	0.99549 538	0.99394 654	0.99231 623	67
0.010	0.99807 595	0.99774 259	0.99744 863	0.99679 434	100
0.005	0.99947 760	0.99937 316	0.99939 894	0.99925 415	200
0.000	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000	∞
	$\left[{(-4)4 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)7 \atop 7}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 7}\right]$	

$$\sqrt{2\pi x}\, I_{\frac{19}{2}}(x) = f_9(x) e^{x - 45x^{-1}}$$

$$\sqrt{2\pi x}\, I_{\frac{21}{2}}(x) = f_{10}(x) e^{x - 55x^{-1}}$$

$$\sqrt{2x/\pi}\, K_{\frac{19}{2}}(x) = g_9(x) e^{-x + 45x^{-1}}$$

$$\sqrt{2x/\pi}\, K_{\frac{21}{2}}(x) = g_{10}(x) e^{-x + 55x^{-1}}$$

$\langle x \rangle$ — целое число, ближайшее к x.

Таблица 10.10. Модифицированные сферические функции Бесселя различных порядков

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,I_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

n	$x=1$	$x=2$	$x=5$
0	(0)1.17520 1194	(0)1.81343 0204	(1)1.48406 4212
1	(-1)3.67879 4412	(-1)9.74382 7436	(1)1.18738 6128
2	(-2)7.15628 7013	(-1)3.51856 0886	(0)7.71632 5346
3	(-2)1.00650 9052	(-2)9.47425 2220	(0)4.15753 5935
4	(-3)1.10723 6461	(-2)2.02572 6087	(0)1.89577 5037
5	(-5)9.99623 7520	(-3)3.58484 8301	(-1)7.45140 8690
6	(-6)7.65033 3778	(-4)5.40595 2086	(-1)2.56465 1251
7	(-7)5.08036 0873	(-5)7.09794 4523	(-2)7.83315 4364
8	(-8)2.97924 6909	(-6)8.24936 9394	(-2)2.14704 9422
9	(-9)1.56411 2692	(-7)8.59805 3854	(-3)5.33186 3294
10	(-11)7.43279 3549	(-8)8.12182 3211	(-3)1.20941 3702
11	(-12)3.22604 7141	(-9)7.01394 8275	(-4)2.52325 7454
12	(-13)1.28851 2381	(-10)5.57826 9483	(-5)4.87152 7330
13	(-15)4.76618 7751	(-11)4.11114 2138	(-6)8.74937 8858
14	(-16)1.64168 8672	(-12)2.82275 9636	(-6)1.46862 7470
15	(-18)5.29060 2725	(-13)1.81406 6530	(-7)2.31339 5316
16	(-19)1.60182 7153	(-14)1.09565 1449	(-8)3.43223 7424
17	(-21)4.57312 0086	(-16)6.24163 9390	(-9)4.81186 1587
18	(-22)1.23512 2995	(-17)3.36455 5792	(-10)6.39343 1309
19	(-24)3.16500 3796	(-18)1.72111 7468	(-11)8.07224 1852
20	(-26)7.71514 7565	(-20)8.37672 8478	(-12)9.70826 6441
30	(-43)5.65589 8686	(-34)6.21921 4440	(-22)6.36889 3001
40	(-61)1.55685 5122	(-49)1.74298 6176	(-33)1.63577 1994
50	(-81)3.65054 5412	(-66)4.17042 9214	(-46)3.64245 9664
100	(-190)7.48149 1755	(-160)9.55425 1030	(-120)6.26113 6933

n	$x=10$	$x=50$	$x=100$
0	(3)1.10132 3287	(19)5.18470 5529	(41)1.34405 8571
1	(2)9.91190 9633	(19)5.08101 1418	(41)1.33061 7985
2	(2)8.03965 9985	(19)4.87984 4844	(41)1.30414 0031
3	(2)5.89207 9640	(19)4.59302 6934	(41)1.26541 0984
4	(2)3.91520 4237	(19)4.23682 1073	(41)1.21556 1262
5	(2)2.36839 5827	(19)3.83039 9141	(41)1.15601 0470
6	(2)1.30996 8827	(19)3.39413 3262	(41)1.08840 0111
7	(1)6.65436 3519	(19)2.94792 4492	(41)1.01451 8456
8	(1)3.11814 2991	(19)2.50975 5914	(40)9.36222 3425
9	(1)1.35352 0435	(19)2.09460 7482	(40)8.55360 6574
10	(0)5.46454 1653	(19)1.71380 5071	(40)7.73703 8176
11	(0)2.05966 6874	(19)1.37480 9352	(40)6.92882 8557
12	(-1)7.27307 8439	(19)1.08139 2769	(40)6.14340 7607
13	(-1)2.41397 2641	(18)8.34112 9672	(40)5.39297 6655
14	(-2)7.55352 3093	(18)6.30971 7670	(40)4.68730 3911
15	(-2)2.23450 9437	(18)4.68149 3423	(40)4.03365 8521
16	(-3)6.26543 8379	(18)3.40719 1747	(40)3.43686 9769
17	(-3)1.66914 7720	(18)2.43274 6870	(40)2.89949 1497
18	(-4)4.23421 3574	(18)1.70426 8938	(40)2.42204 7745
19	(-4)1.02488 6979	(18)1.17158 7856	(40)2.00333 3832
20	(-5)2.37154 3577	(17)7.90430 4104	(40)1.64074 7551
30	(-12)1.22928 4325	(15)5.67659 3929	(39)1.30147 2327
40	(-21)2.81471 5830	(12)7.34905 8082	(37)3.95371 9716
50	(-31)5.88991 6154	(+ 9)2.00489 8633	(35)4.74095 0959
100	(-90)9.54463 8661	(-17)2.34189 3740	(20)3.73598 8741

Таблица 10.10. Модифицированные сферические функции Бесселя различных порядков

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi/x}\,K_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

n	$x=1$	$x=2$	$x=5$
0	(- 1)5.77863 6749	(- 1)1.06292 0829	(- 3)2.11678 8479
1	(0)1.15572 7350	(- 1)1.59438 1243	(- 3)2.54014 6175
2	(0)4.04504 5724	(- 1)3.45449 2694	(- 3)3.64087 6184
3	(1)2.13809 5597	(0)1.02306 1298	(- 3)6.18102 2359
4	(2)1.53711 7375	(0)3.92616 3812	(- 2)1.22943 0749
5	(3)1.40478 6594	(1)1.86907 9845	(- 2)2.83107 7584
6	(4)1.56063 6427	(2)1.06725 5553	(- 2)7.45780 1433
7	(5)2.04287 5221	(2)7.12406 9079	(- 1)2.22213 6131
8	(6)3.07991 9195	(3)5.44977 7364	(- 1)7.41218 8536
9	(7)5.25629 1384	(4)4.70355 1451	(0)2.74235 7715
10	(9)1.00177 5282	(5)4.52287 1652	(1)1.11621 7817
11	(10)2.10898 4384	(6)4.79605 0749	(1)4.96235 0604
12	(11)4.86068 1836	(7)5.56068 7078	(2)2.39430 3059
13	(13)1.21727 9443	(8)6.99881 9354	(3)1.24677 5036
14	(14)3.29151 5179	(9)9.50401 2999	(3)6.97201 5499
15	(15)9.55756 6814	(11)1.38508 0704	(4)4.16844 6493
16	(17)2.96613 7227	(12)2.15637 9105	(5)2.65415 6981
17	(18)9.79781 0417	(13)3.57187 6330	(6)1.79342 8072
18	(20)3.43219 9783	(14)6.27234 7368	(7)1.28194 1220
19	(22)1.27089 3701	(16)1.16395 6139	(7)9.66570 7838
20	(23)4.95991 7633	(17)2.27598 6819	(8)7.66744 6235
30	(40)4.55045 5450	(31)2.06581 6824	(18)7.97979 3303
40	(59)1.24524 3351	(46)5.55624 8963	(30)2.35318 1718
50	(78)4.25947 0196	(63)1.86314 7755	(42)8.49795 8757
100	(87)1.04451 3645	(156)4.08894 4237	(116)2.49323 8041

n	$x=10$	$x=50$	$x=100$
0	(-6)7.13140 4291	(-24)6.05934 6353	(-46)5.84348 1679
1	(-6)7.84454 4720	(-24)6.18053 3280	(-46)5.90191 6495
2	(-6)9.48476 7707	(-24)6.43017 8350	(-46)6.02053 9173
3	(-5)1.25869 2857	(-24)6.82355 1115	(-46)6.20294 3454
4	(-5)1.82956 1771	(-24)7.38547 5506	(-46)6.45474 5215
5	(-5)2.90529 8451	(-24)8.15293 6706	(-46)6.78387 0523
6	(-5)5.02539 0067	(-24)9.17912 1581	(-46)7.20097 0973
7	(-5)9.43830 5538	(-23)1.05395 0832	(-46)7.71999 6750
8	(-4)1.91828 4837	(-23)1.23409 7408	(-46)8.35897 0485
9	(-4)4.20491 4777	(-23)1.47354 3950	(-46)9.14102 1732
10	(-4)9.90762 2914	(-23)1.79404 4109	(-45)1.00957 6461
11	(-3)2.50109 2290	(-23)2.22704 2476	(-45)1.12611 3230
12	(-3)6.74327 4558	(-23)2.81848 3648	(-45)1.26858 2504
13	(-2)1.93592 7868	(-23)3.636[illegible]8 4300	(-45)1.44325 8856
14	(-2)5.90133 2701	(-23)4.78207 7170	(-45)1.65826 2396
15	(-1)1.90497 9270	(-23)6.40988 9058	(-45)1.92415 4951
16	(-1)6.49556 9007	(-23)8.75620 8386	(-45)2.25475 0430
17	(0)2.33403 5699	(-22)1.21889 8659	(-45)2.66822 2593
18	(0)8.81868 1848	(-22)1.72884 9900	(-45)3.18862 8338
19	(1)3.49631 5854	(-22)2.49824 7585	(-45)3.84801 5078
20	(2)1.45175 0001	(-22)3.67748 3017	(-45)4.68935 4218
30	(9)1.99043 6138	(-20)4.72460 0057	(-44)5.77221 5084
40	(17)6.68871 7408	(-17)3.32175 1557	(-42)1.84121 2999
50	(27)2.59020 6572	(-13)1.10246 0162	(-40)1.47876 1633
100	(85)8.14750 7624	(+12)5.97531 1344	(-25)1.48279 6529

Таблица 10.11. Функции Эйри

x	$\mathrm{Ai}(x)$	$\mathrm{Ai}'(x)$	$\mathrm{Bi}(x)$	$\mathrm{Bi}'(x)$
0.00	0.35502 805	−0.25881 940	0.61492 663	0.44828 836
0.01	0.35243 992	−0.25880 174	0.61940 962	0.44831 926
0.02	0.34985 214	−0.25874 909	0.62389 322	0.44841 254
0.03	0.34726 505	−0.25866 197	0.62837 808	0.44856 911
0.04	0.34467 901	−0.25854 090	0.63286 482	0.44878 987
0.05	0.34209 435	−0.25838 640	0.63735 409	0.44907 570
0.06	0.33951 139	−0.25819 898	0.64184 655	0.44942 752
0.07	0.33693 047	−0.25797 916	0.64634 286	0.44984 622
0.08	0.33435 191	−0.25772 745	0.65084 370	0.45033 270
0.09	0.33177 603	−0.25744 437	0.65534 975	0.45088 787
0.10	0.32920 313	−0.25713 042	0.65986 169	0.45151 263
0.11	0.32663 352	−0.25678 613	0.66438 023	0.45220 789
0.12	0.32406 751	−0.25641 200	0.66890 609	0.45297 457
0.13	0.32150 538	−0.25600 851	0.67343 997	0.45381 357
0.14	0.31894 743	−0.25557 625	0.67798 260	0.45472 582
0.15	0.31639 395	−0.25511 565	0.68253 473	0.45571 223
0.16	0.31384 521	−0.25462 724	0.68709 709	0.45677 373
0.17	0.31130 150	−0.25411 151	0.69167 046	0.45791 125
0.18	0.30876 307	−0.25356 898	0.69625 558	0.45912 572
0.19	0.30623 020	−0.25300 013	0.70085 323	0.46041 808
0.20	0.30370 315	−0.25240 547	0.70546 420	0.46178 928
0.21	0.30118 218	−0.25178 548	0.71008 928	0.46324 026
0.22	0.29866 753	−0.25114 067	0.71472 927	0.46477 197
0.23	0.29615 945	−0.25047 151	0.71938 499	0.46638 539
0.24	0.29365 818	−0.24977 850	0.72405 726	0.46808 147
0.25	0.29116 395	−0.24906 211	0.72874 690	0.46986 119
0.26	0.28867 701	−0.24832 284	0.73345 477	0.47172 554
0.27	0.28619 757	−0.24756 115	0.73818 170	0.47367 549
0.28	0.28372 586	−0.24677 753	0.74292 857	0.47571 205
0.29	0.28126 209	−0.24597 244	0.74769 624	0.47783 623
0.30	0.27880 648	−0.24514 636	0.75248 559	0.48004 903
0.31	0.27635 923	−0.24429 976	0.75729 752	0.48235 148
0.32	0.27392 055	−0.24343 309	0.76213 292	0.48474 462
0.33	0.27149 064	−0.24254 682	0.76699 272	0.48722 946
0.34	0.26906 968	−0.24164 140	0.77187 782	0.48980 713
0.35	0.26665 787	−0.24071 730	0.77678 917	0.49247 861
0.36	0.26425 540	−0.23977 495	0.78172 770	0.49524 501
0.37	0.26186 243	−0.23881 481	0.78669 439	0.49810 741
0.38	0.25947 916	−0.23783 731	0.79169 018	0.50106 692
0.39	0.25710 574	−0.23684 291	0.79671 605	0.50412 463
0.40	0.25474 235	−0.23583 203	0.80177 300	0.50728 168
0.41	0.25238 916	−0.23480 512	0.80686 202	0.51053 920
0.42	0.25004 630	−0.23376 259	0.81198 412	0.51389 833
0.43	0.24771 395	−0.23270 487	0.81714 033	0.51736 025
0.44	0.24539 226	−0.23163 239	0.82233 167	0.52092 614
0.45	0.24308 135	−0.23054 556	0.82755 920	0.52459 717
0.46	0.24078 139	−0.22944 479	0.83282 397	0.52837 457
0.47	0.23849 250	−0.22833 050	0.83812 705	0.53225 956
0.48	0.23621 482	−0.22720 310	0.84346 952	0.53625 338
0.49	0.23394 848	−0.22606 297	0.84885 248	0.54035 729
0.50	0.23169 361	−0.22491 055	0.85427 704	0.54457 256
	$\left[{(-6)1 \atop 4}\right]$	$\left[{(-6)4 \atop 4}\right]$	$\left[{(-6)5 \atop 4}\right]$	$\left[{(-5)1 \atop 4}\right]$

x	$\mathrm{Ai}(x)$	$\mathrm{Ai}'(x)$	$\mathrm{Bi}(x)$	$\mathrm{Bi}'(x)$
0.50	0.23169 361	−0.22491 053	0.85427 704	0.54457 256
0.51	0.22945 031	−0.22374 617	0.85974 431	0.54890 049
0.52	0.22721 872	−0.22257 027	0.86525 543	0.55334 239
0.53	0.22499 894	−0.22138 322	0.87081 154	0.55789 959
0.54	0.22279 109	−0.22018 541	0.87641 381	0.56257 345
0.55	0.22059 527	−0.21897 720	0.88206 341	0.56736 532
0.56	0.21841 158	−0.21775 898	0.88776 152	0.57227 662
0.57	0.21624 012	−0.21653 112	0.89350 934	0.57730 873
0.58	0.21408 099	−0.21529 397	0.89930 810	0.58246 311
0.59	0.21193 427	−0.21404 790	0.90515 902	0.58774 120
0.60	0.20980 006	−0.21279 326	0.91106 334	0.59314 448
0.61	0.20767 844	−0.21153 041	0.91702 233	0.59867 447
0.62	0.20556 948	−0.21025 970	0.92303 726	0.60433 267
0.63	0.20347 327	−0.20898 146	0.92910 941	0.61012 064
0.64	0.20138 987	−0.20769 605	0.93524 011	0.61603 997
0.65	0.19931 937	−0.20640 378	0.94143 066	0.62209 226
0.66	0.19726 182	−0.20510 500	0.94768 241	0.62827 912
0.67	0.19521 729	−0.20380 004	0.95399 670	0.63460 222
0.68	0.19318 584	−0.20248 920	0.96037 491	0.64106 324
0.69	0.19116 752	−0.20117 281	0.96681 343	0.64765 389
0.70	0.18916 240	−0.19985 119	0.97332 866	0.65440 592
0.71	0.18717 052	−0.19852 464	0.97990 705	0.66129 109
0.72	0.18519 192	−0.19719 347	0.98655 496	0.66832 121
0.73	0.18322 666	−0.19585 798	0.99327 394	0.67549 810
0.74	0.18127 478	−0.19451 846	1.00006 542	0.68282 363
0.75	0.17933 631	−0.19317 521	1.00693 091	0.69029 970
0.76	0.17741 128	−0.19182 851	1.01387 192	0.69792 824
0.77	0.17549 975	−0.19047 865	1.02088 999	0.70571 121
0.78	0.17360 172	−0.18912 591	1.02798 667	0.71365 062
0.79	0.17171 724	−0.18777 055	1.03516 353	0.72174 849
0.80	0.16984 632	−0.18641 286	1.04242 217	0.73000 690
0.81	0.16798 899	−0.18505 310	1.04976 421	0.73842 795
0.82	0.16614 526	−0.18369 153	1.05719 128	0.74701 380
0.83	0.16431 516	−0.18232 840	1.06470 504	0.75576 663
0.84	0.16249 870	−0.18096 398	1.07230 717	0.76468 865
0.85	0.16069 588	−0.17959 851	1.07999 939	0.77378 215
0.86	0.15890 673	−0.17823 223	1.08778 340	0.78304 942
0.87	0.15713 124	−0.17686 539	1.09566 096	0.79249 282
0.88	0.15536 942	−0.17549 823	1.10363 38	0.80211 473
0.89	0.15362 128	−0.17413 097	1.11170 386	0.81191 759
0.90	0.15188 680	−0.17276 384	1.11987 281	0.82190 389
0.91	0.15016 600	−0.17139 708	1.12814 255	0.83207 615
0.92	0.14845 886	−0.17003 09[illegible]	1.13651 496	0.84243 695
0.93	0.14676 538	−0.16866 551	1.14499 193	0.85298 891
0.94	0.14508 555	−0.16730 113	1.15357 539	0.86373 470
0.95	0.14341 935	−0.16593 797	1.16226 728	0.87467 704
0.96	0.14176 678	−0.16457 623	1.17106 959	0.88581 671
0.97	0.14012 782	−0.16321 611	1.17998 433	0.89716 253
0.98	0.13850 245	−0.16185 761	1.18901 352	0.90871 137
0.99	0.13689 066	−0.16050 153	1.19815 925	0.92046 818
1.00	0.13529 242	−0.15914 744	1.20742 359	0.93243 593
	$\left[{(-6)2 \atop 4}\right]$	$\left[{(-6)1 \atop 4}\right]$	$\left[{(-5)1 \atop 4}\right]$	$\left[{(-5)3 \atop 4}\right]$

Вспомогательные функции для больших положительных значений аргумента

ζ^{-1}	x	$f(-\zeta)$	$f(\zeta)$	$g(-\zeta)$	$g(\zeta)$
1.5	1.000000	0.527027	0.619912	0.619954	0.478728
1.4	1.047069	0.528783	0.620335	0.617156	0.479925
1.3	1.100099	0.530601	0.620327	0.61427[illegible]	0.481658
1.2	1.160397	0.532488	0.619799	0.611305	0.484018
1.1	1.229700	0.534448	0.618649	0.608239	0.487107
1.0	1.310371	0.536489	0.616764	0.605068	0.491037
0.9	1.405721	0.538618	0.614022	0.601782	0.495921
0.8	1.520550	0.540844	0.610309	0.598372	0.501859
0.7	1.662119	0.543180	0.605543	0.594823	0.508909
0.6	1.842016	0.545636	0.599723	0.591120	0.517032
0.5	2.080084	0.548230	0.593015	0.587245	0.526011
	$\left[{(-3)7 \atop 9}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 6}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 6}\right]$
0.50	2.080084	0.548230	0.593015	0.587245	0.526011
0.45	2.231443	0.549584	0.589451	0.585235	0.530678
0.40	2.413723	0.550980	0.585855	0.583174	0.535345
0.35	2.638450	0.552421	0.582330	0.581056	0.539902
0.30	2.924018	0.553912	0.578985	0.578878	0.544235
0.25	3.301927	0.555456	0.575908	0.576635	0.548255
0.20	3.831547	0.557058	0.573135	0.574320	0.551930
0.15	4.641589	0.558724	0.570636	0.571927	0.555296
0.10	6.082202	0.560467	0.568343	0.569448	0.558428
0.05	9.654894	0.562280	0.566204	0.566873	0.561382
0.00	∞	0.564190	0.564190	0.564190	0.564190
		$\left[{(-5)1 \atop 4}\right]$	$\left[{(-5)4 \atop 6}\right]$	$\left[{(-5)1 \atop 4}\right]$	$\left[{(-5)4 \atop 6}\right]$

$\mathrm{Ai}(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{4}}e^{-\zeta}f(-\zeta)$ $\mathrm{Bi}(x)=x^{-\frac{1}{4}}e^{\zeta}f(\zeta)$ $\mathrm{Ai}'(x)=-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}e^{-\zeta}g(-\zeta)$ $\mathrm{Bi}'(x)=x^{\frac{1}{4}}e^{\zeta}g(\zeta)$ $\zeta=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

Таблица 10.11. Функции Эйри

x	$\mathrm{Ai}(-x)$	$\mathrm{Ai}(-x)$	$\mathrm{Bi}(-x)$	$\mathrm{Bi}(-x)$	x	$\mathrm{Ai}(-x)$	$\mathrm{Ai}(-x)$	$\mathrm{Bi}(-x)$	$\mathrm{Bi}(-x)$
0.00	0.35502 805	−0.25881 940	0.61492 663	0.44828 836	0.50	0.47572 809	−0.20408 167	0.38035 266	0.50593 371
0.01	0.35761 619	−0.25880 157	0.61044 364	0.44831 896	0.51	0.47775 692	−0.20167 409	0.37528 379	0.50784 166
0.02	0.36020 397	−0.25874 771	0.60596 005	0.44841 015	0.52	0.47976 138	−0.19920 846	0.37019 579	0.50976 123
0.03	0.36279 102	−0.25865 731	0.60147 524	0.44856 104	0.53	0.48174 089	−0.19668 449	0.36508 853	0.51169 132
0.04	0.36537 699	−0.25852 986	0.59698 863	0.44877 074	0.54	0.48369 487	−0.19410 192	0.35996 193	0.51363 080
0.05	0.36796 149	−0.25836 484	0.59249 963	0.44903 833	0.55	0.48562 274	−0.19146 050	0.35481 589	0.51557 853
0.06	0.37054 416	−0.25816 173	0.58800 767	0.44936 293	0.56	0.48752 389	−0.18875 999	0.34965 033	0.51753 339
0.07	0.37312 460	−0.25792 001	0.58351 218	0.44974 364	0.57	0.48939 774	−0.18600 016	0.34446 520	0.51949 424
0.08	0.37570 243	−0.25763 918	0.57901 261	0.45017 955	0.58	0.49124 369	−0.18318 078	0.33926 043	0.52145 991
0.09	0.37827 725	−0.25731 872	0.57450 841	0.45066 976	0.59	0.49306 115	−0.18030 166	0.33403 599	0.52342 927
0.10	0.38084 867	−0.25695 811	0.56999 904	0.45121 336	0.60	0.49484 953	−0.17736 260	0.32879 184	0.52540 115
0.11	0.38341 628	−0.25655 685	0.56548 397	0.45180 945	0.61	0.49660 821	−0.17436 341	0.32352 796	0.52737 438
0.12	0.38597 967	−0.25611 443	0.56096 268	0.45245 712	0.62	0.49833 659	−0.17130 392	0.31824 435	0.52934 780
0.13	0.38853 843	−0.25563 033	0.55643 466	0.45315 546	0.63	0.50003 408	−0.16818 399	0.31294 101	0.53132 022
0.14	0.39109 213	−0.25510 406	0.55189 940	0.45390 355	0.64	0.50170 007	−0.16500 345	0.30761 795	0.53329 046
0.15	0.39364 037	−0.25453 511	0.54735 642	0.45470 047	0.65	0.50333 395	−0.16176 218	0.30227 521	0.53525 731
0.16	0.39618 269	−0.25392 297	0.54280 523	0.45554 530	0.66	0.50493 511	−0.15846 007	0.29691 282	0.53721 964
0.17	0.39871 868	−0.25326 716	0.53824 536	0.45643 713	0.67	0.50650 295	−0.15509 701	0.29153 084	0.53917 618
0.18	0.40124 789	−0.25256 716	0.53367 634	0.45737 503	0.68	0.50803 685	−0.15167 290	0.28612 932	0.54112 575
0.19	0.40376 987	−0.25182 250	0.52909 771	0.45835 806	0.69	0.50959 620	−0.14818 768	0.28070 835	0.54306 714
0.20	0.40628 419	−0.25103 267	0.52450 903	0.45938 529	0.70	0.51100 040	−0.14464 129	0.27526 801	0.54499 912
0.21	0.40879 038	−0.25019 720	0.51990 986	0.46045 578	0.71	0.51242 882	−0.14103 366	0.26980 840	0.54692 048
0.22	0.41128 798	−0.24931 559	0.51529 977	0.46156 860	0.72	0.51382 087	−0.13736 479	0.26432 964	0.54883 000
0.23	0.41377 653	−0.24838 737	0.51067 835	0.46272 279	0.73	0.51517 591	−0.13363 464	0.25883 185	0.55072 642
0.24	0.41625 557	−0.24741 206	0.50604 518	0.46391 740	0.74	0.51649 336	−0.12984 322	0.25331 516	0.55260 852
0.25	0.41872 461	0.24638 919	0.50139 987	0.46515 148	0.75	0.51777 258	−0.12599 055	0.24777 973	0.55447 506
0.26	0.42118 319	−0.24531 828	0.49674 203	0.46642 408	0.76	0.51901 296	−0.12207 665	0.24222 571	0.55632 480
0.27	0.42363 082	−0.24419 888	0.49207 127	0.46773 423	0.77	0.52021 390	−0.11810 157	0.23665 329	0.55815 647
0.28	0.42606 701	−0.24303 053	0.48738 722	0.46908 095	0.78	0.52137 479	0.11406 538	0.23106 265	0.55996 884
0.29	0.42849 126	−0.24181 276	0.48268 953	0.47046 327	0.79	0.52249 501	−0.10996 815	0.22545 398	0.56176 063
0.30	0.43090 310	−0.24054 513	0.47797 784	0.47188 022	0.80	0.52357 395	−0.10580 999	0.21982 751	0.56353 059
0.31	0.43330 200	−0.23922 719	0.47325 181	0.47333 081	0.81	0.52461 101	−0.10159 101	0.21418 345	0.56527 745
0.32	0.43568 747	−0.23785 851	0.46851 112	0.47481 405	0.82	0.52560 557	−0.09731 134	0.20852 204	0.56699 994
0.33	0.43805 900	−0.23643 865	0.46375 543	0.47632 895	0.83	0.52655 703	−0.09297 113	0.20284 354	0.56869 679
0.34	0.44041 607	−0.23496 718	0.45898 443	0.47787 450	0.84	0.52746 479	−0.08857 055	0.19714 820	0.57036 671
0.35	0.44275 817	−0.23344 368	0.45419 784	0.47944 970	0.85	0.52832 824	−0.08410 979	0.19143 630	0.57200 845
0.36	0.44508 477	−0.23186 773	0.44939 534	0.48105 354	0.86	0.52914 678	−0.07958 904	0.18570 813	0.57362 071
0.37	0.44739 535	−0.23023 893	0.44457 667	0.48268 500	0.87	0.52991 982	−0.07500 854	0.17996 397	0.57520 220
0.38	0.44968 937	−0.22855 687	0.43974 156	0.48434 307	0.88	0.53064 676	−0.07036 852	0.17420 419	0.57675 169
0.39	0.45196 631	−0.22682 116	0.43488 973	0.48602 670	0.89	0.53132 700	−0.06566 925	0.16842 906	0.57826 777
0.40	0.45422 561	−0.22503 141	0.43002 094	0.48773 486	0.90	0.53195 995	−0.06091 100	0.16263 895	0.57974 926
0.41	0.45646 675	−0.22318 723	0.42513 495	0.48946 652	0.91	0.53254 502	−0.05609 407	0.15683 420	0.58119 484
0.42	0.45868 918	−0.22128 826	0.42023 153	0.49122 062	0.92	0.53308 163	−0.05121 879	0.15101 518	0.58260 321
0.43	0.46089 233	−0.21933 417	0.41531 047	0.49299 611	0.93	0.53356 920	−0.04628 549	0.14518 226	0.58397 309
0.44	0.46307 567	−0.21732 447	0.41037 154	0.49479 193	0.94	0.53400 715	−0.04129 452	0.13933 585	0.58530 317
0.45	0.46523 864	−0.21525 894	0.40541 457	0.49660 702	0.95	0.53439 490	−0.03624 628	0.13347 634	0.58659 217
0.46	0.46738 066	−0.21313 721	0.40043 934	0.49844 031	0.96	0.53473 189	−0.03114 116	0.12760 415	0.58783 879
0.47	0.46950 119	−0.21095 893	0.39544 570	0.50029 070	0.97	0.53501 754	−0.02597 957	0.12171 971	0.58904 174
0.48	0.47159 965	−0.20872 379	0.39043 348	0.50215 713	0.98	0.53525 129	−0.02076 197	0.11582 346	0.59019 973
0.49	0.47367 548	−0.20643 147	0.38540 251	0.50403 850	0.99	0.53543 259	−0.01548 880	0.10991 587	0.59131 145
0.50	0.47572 809	−0.20408 167	0.38035 266	0.50593 371	1.00	0.53556 088	−0.01016 057	0.10399 739	0.59237 563
	$\left[{(-6)3 \atop 4}\right]$	$\left[{(-6)7 \atop 4}\right]$	$\left[{(-6)2 \atop 4}\right]$	$\left[{(-6)8 \atop 4}\right]$		$\left[{(-6)7 \atop 4}\right]$	$\left[{(-6)8 \atop 4}\right]$	$\left[{(-6)2 \atop 4}\right]$	$\left[{(-6)6 \atop 4}\right]$

Таблица 10.11. Функции Эйри

x	$\mathrm{Ai}(-x)$	$\mathrm{Ai}'(-x)$	$\mathrm{Bi}(-x)$	$\mathrm{Bi}'(-x)$	x	$\mathrm{Ai}(-x)$	$\mathrm{Ai}'(-x)$	$\mathrm{Bi}(-x)$	$\mathrm{Bi}'(-x)$
1.0	0.53556 088	−0.01016 057	+0.10399 739	0.59237 563	5.5	+0.01778 154	0.86419 722	−0.36781 345	+0.02511 158
1.1	0.53381 051	+0.04602 915	+0.04432 659	0.60011 970	5.6	−0.06833 070	0.85003 256	−0.36017 223	−0.17783 760
1.2	0.52619 437	0.10703 157	−0.01582 137	0.60171 016	5.7	−0.15062 016	0.78781 722	−0.33245 825	−0.37440 903
1.3	0.51227 201	0.17199 181	−0.07576 964	0.59592 975	5.8	−0.22435 192	0.67943 152	−0.28589 021	−0.55300 203
1.4	0.49170 018	0.23981 912	−0.13472 406	0.58165 624	5.9	−0.28512 278	0.52962 857	−0.22282 969	−0.70247 952
1.5	0.46425 658	0.30918 697	−0.19178 486	0.55790 810	6.0	−0.32914 517	0.34593 549	−0.14669 838	−0.81289 879
1.6	0.42986 298	0.37854 219	−0.24596 320	0.52389 354	6.1	−0.35351 168	+0.13836 394	−0.06182 255	−0.87622 530
1.7	0.38860 704	0.44612 455	−0.29620 266	0.47906 134	6.2	−0.35642 107	−0.08106 856	+0.02679 081	−0.88697 896
1.8	0.34076 156	0.50999 763	−0.34140 583	0.42315 137	6.3	−0.33734 765	−0.29899 161	0.11373 701	−0.84276 110
1.9	0.28680 006	0.56809 172	−0.38046 588	0.35624 251	6.4	−0.29713 762	−0.50147 985	0.19354 136	−0.74461 387
2.0	0.22740 743	0.61825 902	−0.41230 259	0.27879 517	6.5	−0.23802 030	−0.67495 249	0.26101 266	−0.59717 067
2.1	0.16348 451	0.65834 069	−0.43590 235	0.19168 563	6.6	−0.16352 646	−0.80711 925	0.31159 995	−0.40856 734
2.2	0.09614 538	0.68624 482	−0.45036 098	+0.09622 919	6.7	−0.07831 247	−0.88790 797	0.34172 774	−0.19009 878
2.3	+0.02670 633	0.70003 366	−0.45492 823	−0.00581 106	6.8	+0.01210 457	−0.91030 401	0.34908 418	+0.04437 678
2.4	−0.04333 414	0.69801 760	−0.44905 228	−0.11223 237	6.9	0.10168 800	−0.87103 106	0.33283 784	0.27926 391
2.5	−0.11232 507	0.67885 273	−0.43242 247	−0.22042 015	7.0	0.18428 084	−0.77100 817	0.29376 207	0.49824 459
2.6	−0.17850 243	0.64163 799	−0.40500 828	−0.32739 717	7.1	0.25403 633	−0.61552 879	0.23425 088	0.68542 058
2.7	−0.24003 811	0.58600 720	−0.36709 211	−0.42989 534	7.2	0.30585 152	−0.41412 428	0.15821 739	0.82650 634
2.8	−0.29509 759	0.51271 098	−0.31929 389	−0.52445 040	7.3	0.33577 037	−0.18009 580	+0.07087 411	0.90998 427
2.9	−0.34190 510	0.42118 281	−0.26258 500	−0.60751 829	7.4	0.34132 375	+0.07027 632	−0.02159 652	0.92812 809
3.0	−0.37881 429	0.31458 377	−0.19828 963	−0.67561 122	7.5	0.32177 572	0.[illegible]1880 951	−0.11246 349	0.87780 228
3.1	−0.40438 222	0.19482 045	−0.12807 165	−0.72544 957	7.6	0.27825 023	0.[illegible]4671 882	−0.19493 376	0.76095 509
3.2	−0.41744 342	+0.06503 115	−0.05390 576	−0.75412 455	7.7	0.[illegible]1372 037	0.73605 242	−0.26267 007	0.58474 045
3.3	0.41718 094	−0.07096 362	+0.02196 800	−0.75926 518	7.8	0.13285 154	0.87115 540	−0.31030 057	0.36122 930
3.4	−0.40319 048	−0.20874 905	0.09710 619	−0.73920 163	7.9	+0.04170 188	0.94004 300	−0.33387 856	+0.10670 215
3.5	−0.37553 382	−0.34344 343	0.16893 984	−0.69311 628	8.0	−0.05270 505	0.93556 094	0.33125 158	−0.15945 050
3.6	−0.33477 748	−0.46986 797	0.23486 631	−0.62117 483	8.1	−0.14290 815	0.85621 859	−0.30230 331	−0.41615 664
3.7	−0.28201 306	−0.58272 780	0.29235 261	−0.52461 361	8.2	−0.22159 945	0.70659 870	−0.24904 019	−0.64232 293
3.8	−0.21885 598	−0.67688 257	0.33904 647	−0.40581 592	8.3	−0.28223 176	0.49727 679	−0.17550 556	−0.81860 044
3.9	−0.14741 991	−0.74755 809	0.37289 056	−0.26829 836	8.4	−0.31959 219	+0.24422 089	−0.08751 798	−0.92910 958
4.0	−0.07026 553	−0.79062 858	0.39223 471	−0.11667 057	8.5	−0.33029 024	−0.03231 335	+0.00775 444	−0.96296 917
4.1	+0.00967 698	−0.80287 254	0.39593 974	+0.04347 872	8.6	−0.31311 245	−0.30933 027	0.10235 647	−0.91547 918
4.2	0.08921 076	−0.78221 561	0.38346 736	0.20575 691	8.7	0.26920 454	−0.56297 685	0.18820 363	−0.78882 623
4.3	0.16499 781	−0.72794 081	0.35494 906	0.36320 468	8.8	−0.20205 4[illegible]	−0.77061 301	0.25778 240	−0.59221 371
4.4	0.23370 326	−0.64085 018	0.31122 860	0.50858 932	8.9	−0.11726 631	−0.91289 276	0.30483 241	−0.34136 475
4.5	0.29215 278	−0.52336 253	0.25387 266	0.63474 477	9.0	−0.02213 372	−0.97566 398	0.32494 732	−0.05740 051
4.6	0.33749 598	−0.37953 391	0.18514 576	0.73494 444	9.1	+0.07495 989	−0.95149 682	0.31603 471	+0.23484 379
4.7	0.36736 748	−0.21499 018	0.10794 695	0.80328 926	9.2	0.16526 800	−0.84067 107	0.27858 425	0.50894 402
4.8	0.38003 668	−0.03676 510	+0.02570 779	0.83508 976	9.3	0.24047 380	−0.65149 241	0.21570 835	0.73928 028
4.9	0.37453 635	+0.14695 743	−0.05774 655	0.82721 903	9.4	0.29347 756	−0.39986 237	0.13293 876	0.90348 537
5.0	0.35076 101	0.32719 282	−0.13836 913	0.77841 177	9.5	0.31910 325	−0.10809 532	+0.03778 543	0.98471 407
5.1	0.30952 600	0.49458 600	−0.21208 913	0.66948 513	9.6	0.31465 158	+0.19625 044	−0.06091 293	0.97349 918
5.2	0.25258 034	0.63990 517	−0.27502 704	0.56345 898	9.7	0.28023 750	0.48628 629	−0.15379 421	0.86898 388
5.3	0.18256 793	0.75457 542	−0.32571 608	0.40555 694	9.8	0.21886 743	0.73154 486	−0.23186 331	0.67936 774
5.4	0.10293 460	0.83122 307	−0.35531 708	0.22307 496	9.9	0.13623 503	0.90781 333	−0.28738 356	0.42147 209
5.5	0.01778 154	0.86419 722	−0.36781 345	0.02511 158	10.0	0.04024 124	0.99626 504	−0.31467 983	0.11941 411
	$\left[{(-3)2 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)5 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)5 \atop 9}\right]$		$\left[{(-3)4 \atop 9}\right]$	$\left[{(-2)1 \atop 10}\right]$	$\left[{(-3)4 \atop 9}\right]$	$\left[{(-2)1 \atop 10}\right]$

Вспомогательные функции для больших отрицательных значений аргумента

ζ^{-1}	x	$f_1(\zeta)$	$f_2(\zeta)$	$g_1(\zeta)$	$g_2(\zeta)$	$\langle\zeta\rangle$
0.05	9.654874	0.39752 21	0.40028 87	0.40092 31	0.39704 87	20
0.04	11.203512	0.39781 14	0.40002 58	0.40052 06	0.39741 99	25
0.03	13.572088	0.39809 83	0.39975 97	0.40012 11	0.39779 49	33
0.02	17.784467	0.39838 24	0.39949 03	0.39972 48	0.39817 37	50
0.01	28.231081	0.39866 38	0.39921 79	0.39933 19	0.39855 62	100
0.00	∞	0.39894 23	0.39894 23	0.39894 23	0.39894 23	∞
		$\left[{(-7)4 \atop 3}\right]$	$\left[{(-7)4 \atop 3}\right]$	$\left[{(-7)4 \atop 3}\right]$	$\left[{(-7)5 \atop 3}\right]$	

$$\mathrm{Ai}(-x)=x^{-\frac{1}{4}}[f_1(\zeta)\cos\zeta+f_2(\zeta)\sin\zeta] \qquad \mathrm{Bi}(-x)=x^{-\frac{1}{4}}[f_2(\zeta)\cos\zeta-f_1(\zeta)\sin\zeta]$$

$$\mathrm{Ai}'(-x)=x^{\frac{1}{4}}[g_1(\zeta)\sin\zeta-g_2(\zeta)\cos\zeta] \qquad \mathrm{Bi}'(-x)=x^{\frac{1}{4}}[g_1(\zeta)\cos\zeta+g_2(\zeta)\sin\zeta]$$

$\zeta=\frac{2}{3}x^{3/2}$; $\langle\zeta\rangle$ — целое число, ближайшее к ζ

Таблица 10.12. Интегралы от функций Эйри

x	$\int_0^x \mathrm{Ai}(t)\,dt$	$\int_0^x \mathrm{Ai}(-t)\,dt$	$\int_0^x \mathrm{Bi}(t)\,dt$	$\int_0^x \mathrm{Bi}(-t)\,dt$
0.0	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00
0.1	0.03421 01	−0.03679 54	0.06373 67	−0.05924 87
0.2	0.06585 15	−0.07615 70	0.13199 45	−0.11398 10
0.3	0.09497 09	−0.11602 51	0.20487 68	−0.16411 57
0.4	0.12164 06	−0.16229 44	0.28256 70	−0.20952 89
0.5	0.14595 33	−0.20880 95	0.36533 85	−0.25006 28
0.6	0.16801 79	−0.25736 07	0.45356 50	−0.28553 62
0.7	0.18795 52	0.30769 05	0.54773 36	−0.31575 56
0.8	0.20589 45	0.35944 [illegible]	0.64345 82	−0.34052 58
0.9	0.22196 97	−0.41225 [illegible]	0.75649 64	−0.35966 27
1.0	0.23631 73	−0.46567 40	0.87276 91	−0.37300 50
1.1	0.24907 33	−0.51918 94	0.99838 41	−0.38042 77
1.2	0.26037 12	−0.57224 05	1.13465 38	−0.38185 43
1.3	0.27034 09	−0.62421 79	1.28318 00	−0.37726 99
1.4	0.27910 66	−0.67447 31	1.41579 42	−0.36673 34
1.5	0.28676 67	−0.72232 88	1.62470 81	−0.35038 81
1.6	0.29349 24	−0.76709 26	1.82252 33	−0.32847 24
1.7	0.29932 75	−0.80807 24	2.04231 52	−0.30132 67
1.8	0.30438 82	−0.84459 41	2.28772 12	−0.26939 97
1.9	0.30876 29	−0.87602 06	2.56304 90	−0.23325 04
2.0	0.31253 28	−0.90177 28	2.87340 83	−0.19354 74
2.1	0.31577 11	−0.92135 09	.	−0.15106 46
2.2	0.31854 43	−0.93435 56	.	0.10667 18
2.3	0.32091 19	−0.94050 97	.	−0.06132 23
2.4	0.32292 74	−0.93967 67	.	−0.01603 45
2.5	0.32463 80	−0.93187 78	.	+0.02812 94
2.6	0.32608 57	−0.91730 54	.	0.07009 01
2.7	0.32730 74	−0.89633 20	.	0.10878 06
2.8	0.32833 55	−0.86951 37	.	0.14317 88
2.9	0.32919 83	−0.83758 77	.	0.17234 20
3.0	0.32992 04	−0.80146 29	.	0.19544 25
3.1	0.33052 31	−0.76220 32	.	0.21180 21
3.2	0.33102 49	−0.72100 37	.	0.22092 49
3.3	0.33144 15	−0.67915 91	.	0.22252 61
3.4	0.33178 65	−0.63802 56	.	0.21655 57
3.5	0.33207 15	−0.59897 71	.	0.20321 50
3.6	0.33230 63	−0.56335 61	.	0.18296 47
3.7	0.33249 93	−0.53242 25	.	0.15652 33
3.8	0.33265 76	−0.50730 05	.	0.12485 43
3.9	0.33278 70	−0.48892 77	.	0.08914 28
4.0	0.33289 27	−0.47800 75	.	+0.05076 01
4.1	0.33297 86	−0.47496 79	.	+0.01121 78
4.2	0.33304 84	−0.47992 95	.	−0.02788 79
4.3	0.33310 50	−0.49268 51	.	−0.06494 00
4.4	0.33315 07	−0.51269 28	.	−0.09837 02
4.5	0.33318 76	−0.53908 35	.	−0.12673 04
4.6	0.33321 73	−0.57068 59	.	−0.14876 50
4.7	0.33324 11	−0.60606 63	.	−0.16347 66
4.8	0.33326 02	−0.64358 51	.	−0.17018 59
4.9	0.33327 54	−0.68146 70	.	−0.16857 74
5.0	0.33378 76	−0.71788 22	.	−0.15873 09
	$\begin{bmatrix}(\ 4)3\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(\ 3)1\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)4\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)1\\6\end{bmatrix}$

x	$\int_0 \mathrm{Ai}(t)\,dt$	$\int_0^x \mathrm{Ai}(-t)\,dt$	$\int_0^x \mathrm{Bi}(-t)\,dt$
5.0	0.33328 76	−0.71788 22	−0.15873 09
5.1	0.33329 73	−0.75103 62	−0.14113 39
5.2	0.33330 50	−0.77926 27	−0.11667 30
5.3	0.33331 11	−0.80111 58	−0.08660 41
5.4	0.33331 59	−0.81545 49	−0.05250 03
5.5	0.33331 97	−0.82151 82	−0.01617 86
5.6	0.33332 27	−0.81897 90	+0.02038 99
5.7	0.33332 50	−0.80797 96	0.05518 54
5.8	0.33332 69	−0.78914 06	0.08625 18
5.9	0.33332 83	−0.76354 19	0.11181 25
6.0	0.33332 95	−0.73267 53	0.13038 11
6.1	0.33333 03	−0.69836 93	0.14086 00
6.2	0.33333 10	−0.66268 96	0.14262 05
6.3	0.33333 16	−0.62781 93	0.13555 73
6.4	0.33333 20	−0.59592 62	0.12011 15
6.5	0.33333 23	−0.56902 35	0.09726 08
6.6	0.33333 25	−0.54883 59	0.06847 29
6.7	0.33333 27	−0.53667 65	0.03562 42
6.8	0.33333 29	−0.53334 74	+0.00088 80
6.9	0.33333 30	−0.53706 98	−0.03340 40
7.0	0.33333 31	−0.55345 17	−0.06491 67
7.1	0.33333 31	−0.57549 72	−0.09147 36
7.2	0.33333 32	−0.60365 96	−0.11121 47
7.3	0.33333 32	−0.63593 60	−0.12273 90
7.4	0.33333 33	−0.66999 96	−0.12521 80
7.5	0.33333 33	−0.70336 19	−0.11847 31
7.6	.	−0.73355 34	−0.10300 57
7.7	.	−0.75830 99	−0.07997 85
7.8	.	−0.77575 13	−0.05114 35
7.9	.	−0.78453 65	−0.01872 22
8.0	.	−0.78398 26	+0.01475 64
8.1	.	−0.77413 57	0.04664 84
8.2	.	−0.75578 55	0.07440 43
8.3	.	−0.73041 93	0.09577 87
8.4	.	−0.70011 70	0.10902 22
8.5	.	−0.66739 21	0.11303 86
8.6	.	−0.63499 08	0.10749 35
8.7	.	−0.60566 32	0.09285 98
8.8	.	−0.58192 70	0.07039 64
8.9	.	−0.56584 22	0.04205 63
9.0	.	−0.55981 97	+0.01033 04
9.1	.	−0.56148 12	−0.02196 26
9.2	.	−0.57358 51	−0.05192 24
9.3	.	−0.59403 00	−0.07682 93
9.4	.	−0.62093 76	−0.09439 87
9.5	.	−0.65181 01	−0.10300 27
9.6	.	−0.68375 25	−0.10183 70
9.7	.	−0.71373 85	−0.09101 44
9.8	.	−0.73889 84	−0.07157 33
9.9	.	−0.75680 07	−0.04539 57
10.0	.	−0.76569 84	−0.01504 04
	$\begin{bmatrix}(-7)3\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)1\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(\ 3)1\\7\end{bmatrix}$

Таблица 10.13. Нули и связанные с ними значения функций Эйри и их производных

s	a_s	$\mathrm{Ai}'(a_s)$	a'_s	$\mathrm{Ai}(a'_s)$	b_s	$\mathrm{Bi}'(b_s)$	b'_s	$\mathrm{Bi}(b'_s)$
1	− 2.33810 741	+0.70121 082	− 1.01879 297	+0.53565 666	− 1.17371 322	+0.60195 789	− 2.29443 968	−0.45494 438
2	− 4.08794 944	−0.80311 137	− 3.24819 758	−0.41901 548	− 3.27109 330	−0.76031 014	− 4.07315 509	+0.39652 284
3	− 5.52055 983	+0.86520 403	− 4.82009 921	+0.38040 647	− 4.83073 784	+0.83699 101	− 5.51239 573	−0.36796 916
4	− 6.78670 809	−0.91085 074	− 6.16330 736	−0.35790 794	− 6.16985 213	−0.88947 990	− 6.78129 445	+0.34949 912
5	− 7.94413 359	+0.94733 571	− 7.37217 726	+0.34230 124	− 7.37676 208	+0.92998 364	− 7.94017 869	−0.33602 624
6	− 9.02265 085	−0.97792 281	− 8.48848 673	−0.33047 623	− 8.49194 885	−0.96323 443	− 9.01958 336	+0.32550 974
7	−10.04017 434	+1.00437 012	− 9.53544 905	+0.32102 229	− 9.53819 438	+0.99158 637	−10.03769 633	−0.31693 465
8	−11.00852 430	−1.02773 869	−10.52766 040	−0.31318 539	−10.52991 351	−1.01638 966	−11.00646 267	+0.30972 594
9	−11.93601 556	+1.04872 065	−11.47505 663	+0.30651 729	−11.47695 355	+1.03849 429	−11.93426 165	−0.30352 766
10	−12.82877 675	−1.06779 386	−12.38478 837	−0.30073 083	−12.38641 714	−1.05847 184	−12.82725 831	+0.29810 491

Комплексные нули и связанные с ними значения $\mathrm{Bi}(z)$ и $\mathrm{Bi}'(z)$. Модуль и фаза функции $e^{-\pi i/3}\beta_s$, $e^{-\pi i/3}\beta'_s$, $\mathrm{Bi}'(\beta_s)$, $\mathrm{Bi}(\beta'_s)$, $s = 1(1)5$, 3D

	$e^{-\pi i/3}\beta_s$		$\mathrm{Bi}'(\beta_s)$		$e^{-\pi i/3}\beta'_s$		$\mathrm{Bi}(\beta'_s)$	
s	*Модуль*	*Фаза*	*Модуль*	*Фаза*	*Модуль*	*Фаза*	*Модуль*	*Фаза*
1	2.354	0.095	0.993	+2.641	1.121	0.331	0.750	+0.466
2	4.093	0.042	1.136	−0.513	3.257	0.059	0.592	−2.632
3	5.524	0.027	1.224	+2.625	4.824	0.033	0.538	+0.515
4	6.789	0.020	1.288	−0.519	6.166	0.023	0.506	−2.624
5	7.946	0.015	1.340	+2.622	7.374	0.017	0.484	+0.519

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

10.1. Bateman H., Archibald R. C. A guide to tables of Bessel functions. — Math. Tables Aids Comp., 1944, **1**, p. 205—308.

10.2. Cherry T. M. Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. — Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, p. 224—257.

10.3. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V. I, II. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973, Т.I; 1974, Т.II.

10.4. Erdélyi A. Asymptotic expansions/California Institute of Technology; Dept. of Math. — Technical Report № 3. — Pasadena, 1955. Русский перевод: Эрдейи А. Асимптотические разложения. — М.: Физматгиз, 1962.

10.5. Erdélyi A. Asymptotic solutions of differential equations with transition points or singularities. — J. Math. Phys., 1960, **1**, p. 16—26.

10.6. Jeffreys H. On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order. — Proc. London Math. Soc., 1925, **23**, p. 428—436.

10.7. Jeffreys H. The effect on Love waves of heterogeneity in the lower layer. — Monthly Nat. Roy. Astr. Soc., Geophys. Suppl., 1928, **2**, p. 101—111.

10.8. Jeffreys H. On the use of asymptotic approximations of Green's type when the coefficient has zeros. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **52**, p. 61—66.

10.9. Langer R. E. On the asymptotic solutions of differential equations with an application to the Bessel functions of large complex order. — Trans. Amer. Math. Soc., 1932, **34**, p. 447—480.

10.10. Langer R. E. The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. — Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, p. 461—490.

10.11. Magnus W., Oberhettinger F. Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. — B.: Springer-Verlag, 1948.

10.12. Olver F. W. J. The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1954—1955, **A247**, p. 307—327.

10.13. Olver F. W. J. The asymptotic expansion of Bessel functions of large order. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1954, **A247**, p. 328—368.

10.14. Olver F. W. J. Uniform asymptotic expansions of solutions of linear second-order differential equations for large values of a parameter. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1958, **A250**, p. 479—517.

10.15. Wasow W. R. Turning point problems for systems of linear differential equations, P. I: The formal theory; P. II: The analytic theory. — Comm. Pure Appl. Math., 1961, **14**, p. 657—673; 1962, **15**, p. 173—187.

10.16. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1958. Русский перевод: Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949, Ч. 1, 2.

Таблицы

10.17. Crowder H. K., François G. C. Tables of spherical Bessel functions and ordinary Bessel functions of order half and odd integer of the first and second kind. — Ballistic Research Laboratory Memorandum Report № 1027. — Aberdeen Proving Ground, 1956.

10.18. Doodson A. T. Bessel functions of half integral order [Riccati — Bessel functions]. — British Assoc. Adv. Sci. Report, 1914, p. 87—102.

10.19. Doodson A. T. Riccati — Bessel functions. — British Assoc. Adv. Sci. Report, 1916, p. 97—107.

10.20. Doodson A. T. Riccati — Bessel functions. — British Assoc. Adv. Sci. Report, 1922, p. 263—270.

10.21. Harvard University. Tables of the modified Hankel functions of order one-third and of their derivatives. — Cambridge: Harvard Univ. Press, 1945. Русский перевод: Таблицы модифицированных функций Ханкеля порядка 1/3 и их производных. — М.: ВЦ АН СССР, 1965. — (БМТ; Вып. 32).

10.22. Jahnke E., Emde F., Lösch F. Tables of higher functions. N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1960, Ch. 18. Русский перевод: Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

10.23. Jones C. W. A short table for the Bessel functions $I_{n+1/2}(x)$, $(2/\pi)K_{n+1/2}(x)$. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952.

10.24. Miller J. C. P. The Airy integral. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1946. — (British Assoc. Adv. Sci. Mathematical Tables. Part-vol. B).

10.25. National Bureau of Standards. Tables of spherical Bessel functions. — N.Y.: Columbia Univ. Press, 1947, V. I, II. Русский перевод: Таблицы сферических функций Бесселя. — М.: ВЦ АН СССР, 1963, Т. 1, 2. — (БМТ; Вып. 20, 21).

10.26. National Bureau of Standards. Tables of Bessel functions of fractional order. — N.Y.: Columbia Univ. Press, 1948—1949, V. I, II. Русский перевод: Таблицы функций Бесселя дробного индекса. — М.: ВЦ АН СССР, 1959, Т. 1, 2. — (БМТ; Вып. 4, 5).

10.27. National Bureau of Standards. Integrals of Airy functions. — Washington: Government Printing Office, 1958. — (Applied Math. Series; **52**).

10.28. Proudman J., Doodson A. T., Kennedy G. Numerical results of the theory of the diffraction of a plane electromagnetic wave by a conducting sphere. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1916—1918, **A217**, p. 279—314.

10.29. Rothman M. The problem of an infinite plate under an inclined loading, with tables of the integrals of Ai $(\pm x)$, Bi $(\pm x)$. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 1954, **7**, p. 1—7.

10.30. Rothman M. Tables of the integrals and differential coefficients of Gi $(+x)$, Hi $(-x)$. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 1954, 7, p. 379—384.

10.31. Royal Society Mathematical Tables, V. 7. Bessel functions P. III. Zeros and associated values. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960. Русский перевод: Таблицы нулей функций Бесселя. — М.: ВЦ АН СССР, 1967. — (БМТ; Вып. 41).

10.32. Scorer R. S. Numerical evaluation of integrals of the form $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, e^{i\varphi(x)}\, dx$ and the tabulation of the function $\mathrm{Gi}(z) = (1/\pi) \int_0^\infty \sin(uz + 1/3u^3)\, du$.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1950, 3, p. 107—112.

10.33. Смирнов А. Д. Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций для асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.

10.34. Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1960.

10.35. Woodward P. M., Woodward A. M., Hensman R., Davies H. H., Gamble N. Four-figure tables of the Airy functions in the complex plane. — Phil. Mag., 1946, 37, № 7, p. 236—261.

Глава 11
ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Ю. ЛЮК

СОДЕРЖАНИЕ

11.1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

$$\int_0^z t^\mu J_\nu(t)\,dt$$

11.1.1. $$\int_0^z t^\mu J_\nu(t)\,dt = \frac{z^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)} \times \sum_{k=0}^\infty \frac{(\nu+2k+1)\,\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+3}{2}+k\right)} J_{\nu+2k+1}(z)$$
$$(\mathrm{Re}(\mu+\nu+1)>0).$$

11.1.2. $$\int_0^z J_\nu(t)\,dt = 2\sum_{k=0}^\infty J_{\nu+2k+1}(z)\quad (\mathrm{Re}\,\nu > -1).$$

11.1.3. $$\int_0^z J_{2n}(t)\,dt = \int_0^z J_0(t)\,dt - 2\sum_{k=0}^{n-1} J_{2k+1}(z).$$

11.1.4. $$\int_0^z J_{2n+1}(t)\,dt = 1 - J_0(z) - 2\sum_{k=0}^{n} J_{2k}(z).$$

Рекуррентные формулы

11.1.5. $$\int_0^z J_{n+1}(t)\,dt = \int_0^z J_{n-1}(t)\,dt - 2J_n(z)\quad (n>0).$$

11.1.6. $$\int_0^z J_1(t)\,dt = 1 - J_0(z).$$

$\int J_0(t)\,dt$, $\int Y_0(t)\,dt$, $\int I_0(t)\,dt$, $\int K_0(t)\,dt$

11.1.7. $$\int_0^x \mathscr{C}_0(t)\,dt = x\mathscr{C}_0(x) + \frac{1}{2}\pi x\{\mathbf{H}_0(x)\,\mathscr{C}_1(x) - \mathbf{H}_1(x)\,\mathscr{C}_0(x)\},$$
$$\mathscr{C}_\nu(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x),\quad \nu = 0,\ 1,$$
A и B — постоянные.

11.1.8. $$\int_0^x Z_0(t)\,dt = xZ_0(x) + \frac{1}{2}\pi x\{-\mathbf{L}_0(x)\,Z_1(x) + \mathbf{L}_1(x)\,Z_0(x)\},$$
$$Z_\nu(x) = AI_\nu(x) + Be^{i\nu\pi}K_\nu(x),\quad \nu = 0,\ 1,$$
A и B — постоянные, $\mathbf{H}_\nu(x)$ и $\mathbf{L}_\nu(x)$ — функции Струве (см. гл. 12).

11.1.9. $$\int_0^x K_0(t)\,dt = -\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2(2k+1)} + x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2(2k+1)^2} + x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2(2k+1)}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right),$$
где постоянная Эйлера $\gamma = 0.57721\ 56649\ \ldots$

В этом и во всех других интегралах 11.1 x предполагается действительным положительным числом, хотя все результаты остаются справедливыми для большей части комплексной плоскости.

11.1.10. $$\int_0^{-ix} K_0(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^x J_0(t)\,dt + i\,\frac{\pi}{2}\int_0^x Y_0(t)\,dt.$$

Асимптотические разложения

11.1.11. $$\int_x^\infty [J_0(t) + iY_0(t)]\,dt \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{i(x-\pi/4)} \times \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_{2k+1}x^{-2k-1} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_{2k}x^{-2k}\right].$$

11.1.12. $$a_k = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(1/2)}\sum_{s=0}^{k}\frac{\Gamma(s+1/2)}{2^s s!\,\Gamma(1/2)}.$$

11.1.13. $$2(k+1)\,a_{k+1} = 3\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{5}{6}\right)a_k - \left(k+\frac{1}{2}\right)^2\left(k-\frac{1}{2}\right)a_{k-1}.$$

11.1.14*). $$x^{1/2}e^{-x}\int_0^x I_0(t)\,dt \sim (2\pi)^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}.$$

11.1.15*). $$x^{1/2}e^{x}\int_x^\infty K_0(t)\,dt \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k x^{-k}.$$

*) a_k см. в 11.1.12.

Аппроксимация многочленами

11.1.16. (см. [11.14]). $8 \leqslant x \leqslant \infty$,
$$\int_x^\infty [J_0(t) + iY_0(t)]\,dt = x^{-1/2}e^{i(x-\pi/4)}\left[\sum_{k=0}^{7}(-1)^k a_k\left(\frac{x}{8}\right)^{-2k-1} + i\sum_{k=0}^{7}(-1)^k b_k\left(\frac{x}{8}\right)^{-2k} + \varepsilon(x)\right],$$
$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2\cdot 10^{-9}.$$

k	a_k	b_k
0	0.06233 47304	0.79788 45600
1	0.00404 03539	0.01256 42405
2	0.00100 89872	0.00178 70944
3	0.00053 66169	0.00067 40148
4	0.00039 92825	0.00041 00676
5	0.00027 55037	0.00025 43955
6	0.00012 70039	0.00011 07299
7	0.00002 68482	0.00002 26238

11.1.17. $8 \leqslant x \leqslant \infty$,
$$x^{1/2}e^{-x}\int_0^x I_0(t)\,dt = \sum_{k=0}^{6} d_k\left(\frac{x}{8}\right)^{-k} + \varepsilon(x),$$
$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2\cdot 10^{-6},$$

k	d_k	k	d_k
0	0.39894 23	4	−0.01148 58
1	0.03117 34	5	0.01774 40
2	0.00591 91	6	−0.00739 95
3	0.00559 56		

11.1.18. $7 \leqslant x \leqslant \infty$,
$$x^{1/2}e^{x}\int_x^\infty K_0(t)\,dt = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k e_k\left(\frac{x}{7}\right)^{-k} + \varepsilon(x),$$
$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2\cdot 10^{-7},$$

k	e_k	k	e_k
0	1.25331 414	4	0.00417 454
1	0.11190 289	5	0.00163 271
2	0.02576 646	6	0.00033 934
3	0.00933 994		

$\int \frac{J_0(t)\,dt}{t}$, $\int \frac{Y_0(t)\,dt}{t}$, $\int \frac{K_0(t)\,dt}{t}$

11.1.19. $$\int_0^x \frac{1 - J_0(t)}{t}\,dt = 2x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+3)[\psi(k+2) - \psi(1)]\,J_{2k+3}(x) = 1 - 2x^{-1}J_1(x) + 2x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+5)[\psi(k+3) - \psi(1) - 1]\,J_{2k+5}(x),$$
где $\psi(z)$ см. в 6.3.

11.1.20. $$\int_x^\infty \frac{J_0(t)\,dt}{t} + \gamma + \ln\frac{x}{2} = \int_0^x \frac{[1-J_0(t)]\,dt}{t} = -\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{2k(k!)^2}.$$

11.1.21. $$\int_x^\infty \frac{Y_0(t)\,dt}{t} = -\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{2\gamma}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{6}-\gamma^2\right) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{2k(k!)^2}\left\{\psi(k+1) + \frac{1}{2k} - \ln\frac{x}{2}\right\}.$$

11.1.22. $$\int_x^\infty \frac{K_0(t)\,dt}{t} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{x}{2}\right)^2 + \gamma\ln\frac{x}{2} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{\gamma^2}{2} - \sum_{k=1}^\infty \frac{(x/2)^{2k}}{2k(k!)^2}\left\{\psi(k+1) + \frac{1}{2k} - \ln\frac{x}{2}\right\}.$$

11.1.23. $$\int_{-ix}^{-i\infty} \frac{K_0(t)\,dt}{t} = \frac{i\pi}{2}\int_x^\infty \frac{J_0(t)\,dt}{t} - \frac{\pi}{2}\int_x^\infty \frac{Y_0(t)\,dt}{t}.$$

Асимптотические разложения

11.1.24. $$\int_x^\infty \frac{\mathcal{C}_0(t)\,dt}{t} = \frac{2g_1(x)\,\mathcal{C}_0(x)}{x^2} - \frac{g_0(x)\,\mathcal{C}_1(x)}{x},$$

где

$$g_0(x) \sim \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-2k} (k!)^2,$$

$$g_1(x) \sim \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-2k} k!(k+1)!.$$

11.1.25. $$g_0(x) = 2x^2\int_x^\infty \frac{g_1(t)\,dt}{t^3}.$$

11.1.26. $$x^{3/2}e^x\int_x^\infty \frac{K_0(t)\,dt}{t} \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\sum_{k=0}^\infty (-1)^k c_k x^{-k},$$

где

11.1.27. $c_0 = 1,\quad c_1 = \frac{13}{8},$

$$2(k+1)\,c_{k+1} = \left[3(k+1)^2 + \frac{1}{4}\right]c_k - \left(k+\frac{1}{2}\right)^3 c_{k-1}.$$

11.1.28. $$x^{3/2}e^{-x}\int_0^x \frac{[I_0(t)-1]\,dt}{t} \sim (2\pi)^{-1/2}\sum_{k=0}^\infty c_k x^{-k},$$

где c_k определены в 11.1.27.

Аппроксимация многочленами

11.1.29. $5 \leqslant x \leqslant \infty$,

$$\int_x^\infty \frac{\mathcal{C}_0(t)\,dt}{t} = \frac{2g_1(x)\,\mathcal{C}_0(x)}{x^2} - \frac{g_0(x)\,\mathcal{C}_1(x)}{x},$$

где

$$g_0(x) = \sum_{k=0}^9 (-1)^k a_k \left(\frac{x}{5}\right)^{-2k} + \varepsilon(x),$$

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^9 (-1)^k b_k \left(\frac{x}{5}\right)^{-2k} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2\cdot 10^{-7},$$

k	a_k	b_k
0	1.0	1.0
1	0.15999 2815	0.31998 5629
2	0.10161 9385	0.30485 8155
3	0.13081 1585	0.52324 6341
4	0.20740 4022	1.03702 0112
5	0.28330 0508	1.69980 3050
6	0.27902 9488	1.95320 6413
7	0.17891 5710	1.43132 5684
8	0.06622 8328	0.59605 4956
9	0.01070 2234	0.10702 2336

11.1.30. $4 \leqslant x \leqslant \infty$,

$$x^{3/2}e^x\int_x^\infty \frac{K_0(t)\,dt}{t} = \sum_{k=0}^6 (-1)^k d_k \left(\frac{x}{4}\right)^{-k} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 6\cdot 10^{-6},$$

k	d_k	k	d_k
0	1.25331 41	4	0.20601 26
1	0.50913 39	5	0.11103 96
2	0.32191 84	6	0.02724 00
3	0.26214 46		

11.1.31. $5 \leqslant x \leqslant \infty$,

$$x^{3/2}e^{-x}\int_0^x \frac{[I_0(t)-1]\,dt}{t} = \sum_{k=0}^{10} f_k \left(\frac{x}{5}\right)^{-k} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 1.1\cdot 10^{-5},$$

k	f_k	k	f_k
0	0.39893 14	6	−48.05241 15
1	0.13320 55	7	40.39473 40
2	−0.04938 43	8	−11.90943 95
3	1.47800 44	9	−3.51950 09
4	−8.65560 13	10	2.19454 64
5	28.12214 78		

11.2. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ $J_n(z)$ И $K_0(z)$

Кратные интегралы от функций $J_n(z)$

Пусть

11.2.1. $f_{0,n}(z) = J_n(z)$,

$$f_{1,n}(z) = \int_0^z J_n(t)\,dt,\ \ldots,\ f_{r,n}(z) = \int_0^z f_{r-1,n}(t)\,dt,$$

11.2.2. $f_{-r,n}(z) = \dfrac{d^r}{dz^r} J_n(z).$

Тогда

11.2.3. $f_{r,n}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(r)}\displaystyle\int_0^z (z-t)^{r-1} J_n(t)\,dt \quad (\mathrm{Re}\ r > 0),$

11.2.4. $f_{r,n}(z) = \dfrac{2^r}{\Gamma(r)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(k+r)}{k!} J_{n+r+2k}(z).$

Рекуррентные формулы

11.2.5. $r(r-1) f_{r+1,n}(z) = 2(r-1) z f_{r,n}(z) -$
$- [(1-r)^2 - n^2 + z^2] f_{r-1,n}(z) +$
$+ (2r-3) z f_{r-2,n}(z) - z^2 f_{r-3,n}(z).$

11.2.6. $r f_{r+1,0}(z) = z f_{r,0}(z) - (r-1) f_{r-1,0}(z) + z f_{r-2,0}(z).$

11.2.7. $f_{r+1,n+1}(z) = f_{r+1,n-1}(z) - 2 f_{r,n}(z).$

Кратные интегралы от функций $K_0(z)$

Пусть

11.2.8. $\mathrm{Ki}_0(z) = K_0(z)$,

$$\mathrm{Ki}_1(z) = \int_z^{\infty} K_0(t)\,dt,\ \ldots,\ \mathrm{Ki}_r(z) = \int_z^{\infty} \mathrm{Ki}_{r-1}(t)\,dt,$$

11.2.9. $\mathrm{Ki}_{-r}(z) = (-1)^r \dfrac{d^r}{dz^r} K_0(z).$

Тогда

11.2.10. $\mathrm{Ki}_r(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{e^{-z\,\mathrm{ch}\,t}\,dt}{\mathrm{ch}^r\,t}$

$(\mathrm{Re}\ z \geqslant 0,\ \mathrm{Re}\ r \geqslant 0,\ \mathrm{Re}\ z > 0,\ r = 0),$

11.2.11. $\mathrm{Ki}_r(z) = \dfrac{1}{\Gamma(z)}\displaystyle\int_z^{\infty} (t-z)^{r-1} K_0(t)\,dt$

$(\mathrm{Re}\ z \geqslant 0,\ \mathrm{Re}\ r > 0),$

11.2.12. $\mathrm{Ki}_{2r}(0) = \dfrac{\Gamma(r)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(r+1/2)} \quad (\mathrm{Re}\ r > 0),$

11.2.13. $\mathrm{Ki}_{2r+1}(0) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\Gamma(r+1/2)}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(r+1)} \quad (\mathrm{Re}\ r > -1/2),$

11.2.14. $r\,\mathrm{Ki}_{r+1}(z) =$
$= -z\,\mathrm{Ki}_r(z) + (r-1)\,\mathrm{Ki}_{r-1}(z) + z\,\mathrm{Ki}_{r-2}(z).$

11.3. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ ДЛЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Положим

11.3.1. $g_{\mu,\nu}(z) = \displaystyle\int^z e^{-pt}\, t^{\mu} Z_\nu(t)\,dt,$

где $Z_\nu(z)$ представляет какую-либо из функций Бесселя первого, второго или третьего рода или какую-либо из модифицированных функций Бесселя. Параметры a и b, входящие в формулы приведения и зависящие от конкретного типа функции Бесселя, даются в следующей таблице:

11.3.2.

$Z_\nu(z)$	a	b
$J_\nu(z),\ Y_\nu(z),\ H_\nu^{(1)}(z),\ H_\nu^{(2)}(z)$	1	1
$I_\nu(z)$	−1	1
$K_\nu(z)$	1	−1

11.3.3. $p g_{\mu,\nu}(z) = -e^{-pz} z^{\mu} Z_\nu(z) +$
$+ (\mu+\nu)\, g_{\mu-1,\nu}(z) - a g_{\mu,\nu+1}(z).$

11.3.4. $p g_{\mu,\nu+1}(z) = -e^{-pz} z^{\mu} Z_{\nu+1}(z) +$
$+ (\mu-\nu-1)\, g_{\mu-1,\nu+1}(z) + b g_{\mu,\nu}(z).$

11.3.5. $(p^2+ab)\, g_{\mu,\nu}(z) = a e^{-pz} z^{\mu} Z_{\nu+1}(z) +$
$+ (\mu-\nu-1)\, e^{-pz} z^{\mu-1} Z_\nu(z) - p e^{-pz} z^{\mu} Z_\nu(z) +$
$+ p(2\mu-1)\, g_{\mu-1,\nu}(z) + [\nu^2 - (\mu-1)^2]\, g_{\mu-2,\nu}(z).$

11.3.6. $a(\nu-\mu)\, g_{\mu,\nu+1}(z) = -2\nu e^{-pz} z^{\mu} Z_\nu(z) -$
$- 2\nu p g_{\mu,\nu}(z) + b(\mu+\nu)\, g_{\mu,\nu-1}(z).$

Случай 1: $p^2 + ab = 0,\ \nu = \pm(\mu - 1)$

11.3.7. $g_{\nu,\nu}(z) = \dfrac{e^{-pz} z^{\nu+1}}{2\nu+1}\left\{ Z_\nu(z) - \dfrac{a}{p} Z_{\nu+1}(z)\right\}.$

11.3.8. $g_{-\nu,\nu}(z) = -\dfrac{e^{-pz} z^{-\nu+1}}{2\nu-1}\left\{ Z_\nu(z) + \dfrac{b}{p} Z_{\nu-1}(z)\right\}.$

11.3.9. $\displaystyle\int_0^z e^{it} t^{\nu} J_\nu(t)\,dt = \dfrac{e^{iz} z^{\nu+1}}{2\nu+1}\,[J_\nu(z) - iJ_{\nu+1}(z)]$

$(\mathrm{Re}\ \nu > -1/2).$

11.3.10. $\displaystyle\int_0^z e^{it} t^{-\nu} J_\nu(t)\,dt = -\dfrac{e^{iz} z^{-\nu+1}}{2\nu-1}\,[J_\nu(z) + iJ_{\nu-1}(z)] +$

$+ \dfrac{i}{2^{\nu-1}(2\nu-1)\,\Gamma(\nu)} \quad (\nu \neq 1/2).$

11.3.11. $\displaystyle\int_0^z e^{it} t^{\nu} Y_\nu(t)\,dt = \dfrac{e^{iz} z^{\nu+1}}{2\nu+1}\,[Y_\nu(z) - iY_{\nu+1}(z)] -$

$- \dfrac{i\,2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}{\pi(2\nu+1)} \quad (\mathrm{Re}\ \nu > -1/2).$

11.3.12. $\displaystyle\int_0^z e^{\pm t}t^{\nu}I_\nu(t)\,dt=\frac{e^{\pm z}z^{\nu+1}}{2\nu+1}[I_\nu(z)\mp I_{\nu+1}(z)]$ $(\operatorname{Re}\nu>-1/2)$.

11.3.13. $\displaystyle\int_0^z e^{-t}I_n(t)\,dt=ze^{-z}[I_0(z)+I_1(z)]+ n[e^{-z}I_0(z)-1]+2e^{-z}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\,I_k(z)$.

11.3.14. $\displaystyle\int_0^z e^{\pm t}t^{-\nu}I_\nu(t)\,dt=-\frac{e^{\pm z}z^{-\nu+1}}{2\nu-1}[I_\nu(z)\mp I_{\nu-1}(z)]\mp \frac{1}{2^{\nu-1}(2\nu-1)\Gamma(\nu)}$ $(\nu\neq 1/2)$.

Интеграл Кинга (см. [11.5])

11.3.15. $\displaystyle\int_0^z e^{\pm t}t^{\nu}K_\nu(t)\,dt=\frac{e^{\pm z}z^{\nu+1}}{2\nu+1}[K_\nu(z)\pm K_{\nu+1}(z)]\mp \frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{2\nu+1}$ $(\operatorname{Re}\nu>-1/2)$.

11.3.16. $\displaystyle\int_0^z e^{t}K_0(t)dt=ze^{z}[K_0(z)+K_1(z)]-1$.

11.3.17. $\displaystyle\int_z^\infty e^{t}t^{-\nu}K_\nu(t)\,dt=\frac{e^{z}z^{-\nu+1}}{2\nu-1}[K_\nu(z)+K_{\nu-1}(z)]$ $(\operatorname{Re}\nu>1/2)$.

Случай 2: $p=0,\ \mu=\pm\nu$

11.3.18. $bg_{\nu,\nu-1}(z)=z^{\nu}Z_\nu(z)$.

11.3.19. $ag_{-\nu,\nu+1}(z)=-z^{-\nu}Z_\nu(z)$.

11.3.20. $\displaystyle\int_0^z t^{\nu}J_{\nu-1}(t)\,dt=z^{\nu}J_\nu(z)$ $(\operatorname{Re}\nu>0)$.

11.3.21. $\displaystyle\int_0^z t^{-\nu}J_{\nu+1}(t)\,dt=\frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}-z^{-\nu}J_\nu(z)$.

11.3.22. $\displaystyle 2n\int_0^z \frac{J_{2n}(t)\,dt}{t}=1-\frac{2}{z}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\,J_{2k-1}(z)=\frac{2}{z}\sum_{k=n+1}^{\infty}(2k-1)\,J_{2k-1}(z)$ $(n>0)$.

11.3.23. $\displaystyle (2n+1)\int_0^z \frac{J_{2n+1}(t)\,dt}{t}=\int_0^z J_0(t)dt-J_1(z)-\frac{4}{z}\sum_{k=1}^{n}kJ_{2k}(z)$.

11.3.24. $\displaystyle\int_0^z t^{\nu}Y_{\nu-1}(t)\,dt=z^{\nu}Y_\nu(z)+\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu)}{\pi}$ $(\operatorname{Re}\nu>0)$

11.3.25. $\displaystyle\int_0^z t^{\nu}I_{\nu-1}(t)dt=z^{\nu}I_\nu(z)$ $(\operatorname{Re}\nu>0)$.

11.3.26. $\displaystyle\int_0^z t^{-\nu}I_{\nu+1}(t)dt=z^{-\nu}I_\nu(z)-\frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$.

11.3.27. $\displaystyle\int_0^z t^{\nu}K_{\nu-1}(t)\,dt=-z^{\nu}K_\nu(z)+2^{\nu-1}\Gamma(\nu)$ $(\operatorname{Re}\nu>0)$.

11.3.28. $\displaystyle\int_z^\infty t^{-\nu}K_{\nu+1}(t)\,dt=z^{-\nu}K_\nu(z)$.

Неопределенные интегралы от произведений функций Бесселя

($\mathscr{C}_\mu(z)$ и $\mathscr{D}_\nu(z)$ — любые цилиндрические функции порядков μ и ν соответственно)

11.3.29. $\displaystyle\int^z\left\{(k^2-l^2)\,t-\frac{\mu^2-\nu^2}{t}\right\}\mathscr{C}_\mu(kt)\,\mathscr{D}_\nu(lt)\,dt= z\{k\,\mathscr{C}_{\mu+1}(kz)\,\mathscr{D}_\nu(lz)-l\,\mathscr{C}_\mu(kz)\,\mathscr{D}_{\nu+1}(lz)\}-(\mu-\nu)\,\mathscr{C}_\mu(kz)\,\mathscr{D}_\nu(lz)$.

11.3.30. $\displaystyle\int^z t^{-\mu-\nu-1}\mathscr{C}_{\mu+1}(t)\,\mathscr{D}_{\nu+1}(t)\,dt=-\frac{z^{-\mu-\nu}}{2(\mu+\nu+1)}\{\mathscr{C}_\mu(z)\,\mathscr{D}_\nu(z)+\mathscr{C}_{\mu+1}(z)\,\mathscr{D}_{\nu+1}(z)\}$.

11.3.31. $\displaystyle\int^z t^{\mu+\nu+1}\mathscr{C}_\mu(t)\,\mathscr{D}_\nu(t)\,dt=\frac{z^{\mu+\nu+2}}{2(\mu+\nu+1)}\{\mathscr{C}_\mu(z)\,\mathscr{D}_\nu(z)+\mathscr{C}_{\mu+1}(z)\,\mathscr{D}_{\nu+1}(z)\}$.

11.3.32. $\displaystyle\int_0^z tJ_{\nu-1}^2(t)\,dt=2\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+2k)\,J_{\nu+2k}^2(z)$ $(\operatorname{Re}\nu>0)$.

11.3.33. $\displaystyle\int_0^z t[J_{\nu-1}^2(t)-J_{\nu+1}^2(t)]\,dt=2\nu J_\nu^2(z)$ $(\operatorname{Re}\nu>0)$.

11.3.34. $\displaystyle\int_0^z tJ_0^2(t)\,dt=\frac{z^2}{2}[J_0^2(z)+J_1^2(z)]$.

11.3.35. $\displaystyle\int_0^z J_n(t)\,J_{n+1}(t)\,dt=\frac{1}{2}[1-J_0^2(z)]-\sum_{k=1}^{n}J_k^2(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty}J_k^2(z)$.

11.3.36. $(\mu+\nu)\int_0^z t^{-1}\mathscr{C}_\mu(t)\,\mathscr{D}_\nu(t)\,dt-$

$$-(\mu+\nu+2n)\int_0^z t^{-1}\mathscr{C}_{\mu+n}(t)\,\mathscr{D}_{\nu+n}(t)\,dt=$$
$$=-\mathscr{C}_\mu(z)\,\mathscr{D}_\nu(z)+\mathscr{C}_{\mu+n}(z)\,\mathscr{D}_{\nu+n}(z)+$$
$$+2\sum_{k=1}^{n-1}\mathscr{C}_{\mu+k}(z)\,\mathscr{D}_{\nu+k}(z).$$

Интегралы типа свертки

11.3.37. $$\int_0^z J_\mu(t)J_\nu(z-t)\,dt=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{\mu+\nu+2k+1}(z)$$

$(\operatorname{Re}\mu>-1,\ \operatorname{Re}\nu>-1)$.

11.3.38. $$\int_0^z J_\nu(t)J_{1-\nu}(z-t)\,dt=J_0(z)-\cos z$$

$(-1<\operatorname{Re}\nu<2)$.

11.3.39. $$\int_0^z J_\nu(t)\,J_{-\nu}(z-t)\,dt=\sin z \quad (|\operatorname{Re}\nu|<1).$$

11.3.40. $$\int_0^z t^{-1}J_\mu(t)\,J_\nu(z-t)\,dt=\frac{J_{\mu+\nu}(z)}{\mu}$$

$(\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1)$.

11.3.41. $$\int_0^z \frac{J_\mu(t)\,J_\nu(z-t)\,dt}{t(z-t)}=\frac{(\mu+\nu)\,J_{\mu+\nu}(z)}{\mu\nu z}$$

$(\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0)$

11.4. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Свойства ортогональности функций Бесселя

Пусть $\mathscr{C}_\nu(z)$ — цилиндрическая функция порядка ν. В частности, пусть

11.4.1. $\mathscr{C}_\nu(z)=AJ_\nu(z)+BY_\nu(z)$,

где A и B — действительные постоянные. Тогда при $0<a<b$

11.4.2.*). $$\int_a^b t\mathscr{C}_\nu(\lambda_m t)\,\mathscr{C}_\nu(\lambda_n t)\,dt=0 \quad (m\neq n),$$

$$\int_a^b t\mathscr{C}_\nu(\lambda_m t)\,\mathscr{C}_\nu(\lambda_n t)\,dt=$$
$$=\left[\frac12 t^2\left\{\left(1-\frac{\nu^2}{\lambda_n^2t^2}\right)\mathscr{C}_\nu^2(\lambda_n t)+\mathscr{C}_\nu'^2(\lambda_n t)\right\}\right]_a^b$$

$(m=n)$,

если выполняются следующие два условия:

1) λ_n — действительный нуль уравнения

11.4.3. $h_1\lambda\mathscr{C}_{\nu+1}(\lambda b)-h_2\mathscr{C}_\nu(\lambda b)=0$;

2) должны существовать такие числа k_1 и k_2 (оба не нули), что для всех n

11.4.4. $k_1\lambda_n\mathscr{C}_{\nu+1}(\lambda_n a)-k_2\mathscr{C}_\nu(\lambda_n a)=0$.

Если $a=0$, то сказанное выше справедливо, когда $B=0$. В этом случае имеем

11.4.5. $$\int_0^1 tJ_\nu(\alpha_m t)\,J_\nu(\alpha_n t)\,dt=0 \quad (m\neq n,\ \nu>-1),$$

$$\int_0^1 tJ_\nu(\alpha_m t)\,J_\nu(\alpha_n t)\,dt=$$
$$=\frac12\,[J_\nu'(\alpha_n)]^2 \quad (m=n,\ b=0,\ \nu>-1),$$

$$\int_0^1 tJ_\nu(\alpha_m t)\,J_\nu(\alpha_n t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2\alpha_n^2}\left[\frac{a^2}{b^2}+\alpha_n^2-\nu^2\right][J_\nu(\alpha_n)]^2$$

$(m=n,\ b\neq0,\ \nu\geqslant-1)$,

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ — положительные нули уравнения $aJ_\nu(x)+bxJ_\nu'(x)=0$, где a и b — действительные постоянные.

11.4.6. $$\int_0^\infty t^{-1}J_{\nu+2n+1}(t)\,J_{\nu+2m+1}(t)\,dt=0 \quad (m\neq n),$$

$$\int_0^\infty t^{-1}J_{\nu+2n+1}(t)\,J_{\nu+2m+1}(t)\,dt=\frac{1}{2(2n+\nu+1)}$$

$(m=n,\ \nu+n+m>-1)$

Определенные интегралы с конечными пределами

11.4.7. $$\int_0^{\pi/2} J_{2n}(2z\sin t)\,dt=\frac{\pi}{2}\,J_n^2(z).$$

11.4.8. $$\int_0^{\pi} J_0(2z\sin t)\cos 2nt\,dt=\pi J_n^2(z).$$

11.4.9. $$\int_0^{\pi/2} Y_0(2z\sin t)\cos 2nt\,dt=\frac{\pi}{2}\,J_n(z)\,Y_n(z).$$

11.4.10. $$\int_0^{\pi/2} J_\mu(z\sin t)\sin^{\mu+1}t\cos^{2\nu+1}t\,dt=$$
$$=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}\,J_{\mu+\nu+1}(z) \quad (\operatorname{Re}\mu>-1,\ \operatorname{Re}\nu>-1).$$

---

*) См. 11.3.29.

11.4.11. $$\int_0^{\pi/2} J_\mu(z\sin^2 t)\, J_\nu(z\cos^2 t)\,\operatorname{cosec} 2t\, dt = \frac{(\mu+\nu)}{4\mu\nu} J_{\mu+\nu}(z) \quad (\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0).$$

ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

Интегралы вида $\int_0^\infty e^{-pt} t^\mu Z_\nu(t)\, dt$

11.4.12. $$\int_0^\infty e^{it} t^{\mu-1} J_\nu(t)\, dt = \frac{e^{1/2\,\pi i(\nu+\mu)}\,\Gamma(\mu+\nu)\,\Gamma(1/2-\mu)}{\Gamma(1/2)\, 2^\mu\, \Gamma(\nu-\mu+1)}$$
$$(\operatorname{Re}\mu<1/2,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu)>0).$$

11.4.13. $$\int_0^\infty e^{-t} t^{\mu-1} I_\nu(t)\, dt = \frac{\Gamma(\mu+\nu)\,\Gamma(1/2-\mu)}{\Gamma(1/2)\, 2^\mu\, \Gamma(\nu-\mu+1)}$$
$$(\operatorname{Re}\mu<1/2,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu)>0)$$

11.4.14. $$\int_0^\infty \cos bt\, K_0(t)\, dt = \frac{\pi/2}{(1+b^2)^{1/2}} \quad (|\operatorname{Im} b|<1)$$

11.4.15. $$\int_0^\infty \sin bt\, K_0(t)\, dt = \frac{\operatorname{arcsh} b}{(1+b^2)^{1/2}} \quad (|\operatorname{Im} b|<1).$$

11.4.16. $$\int_0^\infty t^\mu J_\nu(t)\, dt = \frac{2^\mu\, \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}$$
$$(\operatorname{Re}(\mu+\nu)>-1,\ \operatorname{Re}\mu<1/2).$$

11.4.17. $$\int_0^\infty J_\nu(t)\, dt = 1 \quad (\operatorname{Re}\nu>-1).$$

11.4.18. $$\int_0^\infty \frac{[1-J_0(t)]\, dt}{t^\mu} = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)}{2^\mu\left\{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\right\}^2}$$
$$(1<\operatorname{Re}\mu<3).$$

11.4.19. $$\int_0^\infty t^\mu Y_\nu(t)\, dt = \frac{2^\mu}{\pi}\, \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)$$
$$(\operatorname{Re}(\mu\pm\nu)>-1,\ \operatorname{Re}\mu<1/2).$$

11.4.20. $$\int_0^\infty Y_\nu(t)\, dt = -\operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{2} \quad (|\operatorname{Re}\nu|<1).$$

11.4.21. $$\int_0^\infty Y_0(t)\, dt = 0.$$

11.4.22. $$\int_0^\infty t^\mu K_\nu(t)\, dt = 2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)$$
$$(\operatorname{Re}(\mu\pm\nu)>-1).$$

11.4.23. $$\int_0^\infty K_0(t)\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

11.4.24. $$\int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} J_n(t)\, dt = \frac{2(-i)^n\, T_n(\omega)}{(1-\omega^2)^{1/2}} \quad (\omega^2<1),$$
$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} J_n(t)\, dt = 0 \quad (\omega^2>1),$$

где $T_n(\omega)$ — многочлен Чебышева первого рода (см. гл. 22).

11.4.25. $$\int_{-\infty}^\infty t^{-1} e^{-i\omega t} J_n(t)\, dt = \frac{2i}{n}(-i)^n (1-\omega^2)^{1/2}\, U_{n-1}(\omega) \quad (\omega^2<1),$$
$$\int_{-\infty}^\infty t^{-1} e^{-i\omega t} J_n(t)\, dt = 0 \quad (\omega^2>1),$$

где $U_n(\omega)$ — многочлен Чебышева второго рода (см. гл. 22).

11.4.26. $$\int_{-\infty}^\infty t^{-1/2} e^{-i\omega t} J_{n+1/2}(t)\, dt = (-i)^n (2\pi)^{1/2} P_n(\omega) \quad (\omega^2<1),$$
$$\int_{-\infty}^\infty t^{-1/2} e^{-i\omega t} J_{n+1/2}(t)\, dt = 0 \quad (\omega^2>1),$$

где $P_n(\omega)$ — многочлен Лежандра (см. гл. 22).

11.4.27. $$\int_0^\infty e^{-t} t^{a/2-1} J_a[2(zt)^{1/2}]\, dt = \frac{\gamma(a,z)}{z^{a/2}}$$
$$(\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re} z>0),$$

где $\gamma(a,z)$ — неполная гамма-функция (см. гл. 6).

Интегралы вида $\int_0^\infty e^{-a^2t^2} t^\mu Z_\nu(bt)\, dt$

11.4.28. $$\int_0^\infty e^{-a^2t^2} t^{\mu-1} J_\nu(bt)\, dt = \frac{\Gamma(\nu/2+\mu/2)\,[b/(2a)]^\nu}{2a^\mu\, \Gamma(\nu+1)}\, M\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2},\ \nu+1,\ -\frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$(\operatorname{Re}(\mu+\nu)>0,\ \operatorname{Re} a^2>0),$$

где $M(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (см. гл. 13).

11.4.29. $$\int_0^\infty e^{-a^2t^2}t^{\nu+1}J_\nu(bt)\,dt = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}}e^{-b^2/4a^2}$$
$(\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}a^2 > 0)$.

11.4.30. $$\int_0^\infty e^{-a^2t^2}Y_{2\nu}(bt)\,dt = -\frac{\pi^{1/2}}{2a}e^{-b^2/8a^2}\left[I_\nu\left(\frac{b^2}{8a^2}\right)\operatorname{tg}\nu\pi + \frac{1}{\pi}K_\nu\left(\frac{b^2}{8a^2}\right)\sec\nu\pi\right]$$
$(|\operatorname{Re}\nu| < 1/2,\ \operatorname{Re}a^2 > 0)$.

11.4.31. $$\int_0^\infty e^{-a^2t^2}I_\nu(bt)\,dt = \frac{\pi^{1/2}}{2a}e^{b^2/8a^2}I_{\nu/2}\left(\frac{b^2}{8a^2}\right)$$
$(\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}a^2 > 0)$.

11.4.32. $$\int_0^\infty e^{-a^2t^2}K_0(bt)\,dt = \frac{\pi^{1/2}}{4a}e^{b^2/8a^2}K_0\left(\frac{b^2}{8a^2}\right)$$
$(\operatorname{Re}a^2 > 0)$.

Интегралы Вебера—Шафхейтлина

11.4.33. $$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at)\,J_\nu(bt)\,dt}{t^\lambda} = \frac{b^\nu\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}\right)}{2^\lambda a^{\nu-\lambda+1}\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+\lambda+1}{2}\right)}\times$$
$$\times\ {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2},\ \frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2};\ \nu+1;\ \frac{b^2}{a^2}\right)$$
$(\operatorname{Re}(\mu+\nu-\lambda+1) > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > -1,\ 0 < b < a)$.

11.4.34. $$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at)\,J_\nu(bt)\,dt}{t^\lambda} = \frac{a^\mu\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}\right)}{2^\lambda b^{\mu-\lambda+1}\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\right)}\times$$
$$\times\ {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2},\ \frac{\mu-\nu-\lambda+1}{2};\ \mu+1;\ \frac{a^2}{b^2}\right)$$
$(\operatorname{Re}(\mu+\nu-\lambda+1) > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > -1,\ 0 < a < b)$.

О функции ${}_2F_1$ см. гл. 15.

Частные случаи разрывного интеграла Вебера — Шафхейтлина

11.4.35. $\operatorname{Re}\mu > -1$,
$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at)\sin bt\,dt}{t} = \frac{1}{\mu}\sin\left[\mu\arcsin\frac{b}{a}\right]\quad (0 \leqslant b \leqslant a),$$
$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at)\sin bt\,dt}{t} = \frac{a^\mu\sin\frac{\pi\mu}{2}}{\mu[b+(b^2-a^2)^{1/2}]^\mu}\quad (b \geqslant a > 0).$$

11.4.36. $\operatorname{Re}\mu > 0$,
$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at)\cos bt\,dt}{t} = \frac{1}{\mu}\cos\left[\mu\arcsin\frac{b}{a}\right]\quad (0 \leqslant b \leqslant a),$$
$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at)\cos bt\,dt}{t} = \frac{a^\mu\cos\frac{\pi\mu}{2}}{\mu[b+(b^2-a^2)^{1/2}]^\mu}\quad (b \geqslant a > 0).$$

11.4.37. $\operatorname{Re}\mu > -1$,
$$\int_0^\infty J_\mu(at)\cos bt\,dt = \frac{\cos\left[\mu\arcsin\frac{b}{a}\right]}{(a^2-b^2)^{1/2}}\quad (0 \leqslant b < a),$$
$$\int_0^\infty J_\mu(at)\cos bt\,dt = \frac{-a^\mu\sin\frac{\pi\mu}{2}}{(b^2-a^2)^{1/2}[b+(b^2-a^2)^{1/2}]^\mu}\quad (b > a > 0)$$

11.4.38. $\operatorname{Re}\mu > -2$,
$$\int_0^\infty J_\mu(at)\sin bt\,dt = \frac{\sin\left[\mu\arcsin\frac{b}{a}\right]}{(a^2-b^2)^{1/2}}\quad (0 \leqslant b < a),$$
$$\int_0^\infty J_\mu(at)\sin bt\,dt = \frac{a^\mu\cos\frac{\pi\mu}{2}}{(b^2-a^2)^{1/2}[b+(b^2-a^2)^{1/2}]^\mu}\quad (b > a > 0).$$

11.4.39. $$\int_0^\infty e^{ibt}J_0(at)\,dt = \frac{1}{(a^2-b^2)^{1/2}}\quad (0 \leqslant b < a),$$
$$\int_0^\infty e^{ibt}J_0(at)\,dt = \frac{i}{(b^2-a^2)^{1/2}}\quad (0 < a < b)$$

11.4.40. $$\int_0^\infty e^{ibt}Y_0(at)\,dt = \frac{2i}{\pi(a^2-b^2)^{1/2}}\arcsin\frac{b}{a}\quad (0 \leqslant b < a),$$
$$\int_0^\infty e^{ibt}Y_0(at)\,dt = \frac{-1}{(b^2-a^2)^{1/2}} + \frac{2i}{\pi(b^2-a^2)^{1/2}}\times\ln\left\{\frac{b-(b^2-a^2)^{1/2}}{a}\right\}\quad (0 < a < b).$$

11.4.41. $\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > -1$,

$$\int_0^\infty t^{\mu-\nu+1} J_\mu(at)\, J_\nu(bt)\, dt = 0 \quad (0 < b < a),$$

$$\int_0^\infty t^{\mu-\nu+1} J_\mu(at)\, J_\nu(bt)\, dt = \frac{2^{\mu-\nu+1} a^\mu (b^2 - a^2)^{\nu-\mu-1}}{b^\nu \Gamma(\nu-\mu)} \quad (b > a > 0).$$

11.4.42. $\operatorname{Re}\mu > 0$,

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\, J_{\mu-1}(bt)\, dt = \frac{b^{\mu-1}}{a^\mu} \quad (0 < b < a),$$

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\, J_{\mu-1}(bt)\, dt = \frac{1}{2b} \quad (0 < b = a),$$

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\, J_{\mu-1}(bt)\, dt = 0 \quad (b > a > 0).$$

11.4.43. $$\int_0^\infty \frac{J_0(at)}{t} \{1 - J_0(bt)\}\, dt = 0 \quad (0 < b \leqslant a),$$

$$\int_0^\infty \frac{J_0(at)}{t} \{1 - J_0(bt)\}\, dt = \ln\frac{b}{a} \quad (b \geqslant a > 0).$$

Интегралы типа Ханкеля — Никольсона

11.4.44. $$\int_0^\infty \frac{t^{\nu+1} J_\nu(at)\, dt}{(t^2+z^2)^{\mu+1}} = \frac{a^\mu z^{\nu-\mu}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(az)$$

$(a > 0,\ \operatorname{Re} z > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 2\operatorname{Re}\mu + 3/2)$.

11.4.45. $$\int_0^\infty \frac{J_\nu(at)\, dt}{t^\nu(t^2+z^2)} = \frac{\pi}{2z^{\nu+1}} [I_\nu(az) - \mathbf{L}_\nu(az)]$$

$(a > 0,\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -5/2)$.

11.4.46. $$\int_0^\infty \frac{Y_0(at)\, dt}{t^2+z^2} = -\frac{K_0(az)}{z} \quad (a > 0,\ \operatorname{Re} z > 0).$$

11.4.47. $$\int_0^\infty \frac{K_\nu(at)\, dt}{t^\nu(t^2+z^2)} = \frac{\pi^2}{4z^{\nu+1}\cos\nu\pi} [\mathbf{H}_\nu(az) - Y_\nu(az)]$$

$(\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re}\nu < 1/2)$.

11.4.48. $$\int_0^\infty \frac{J_\nu(at)\, dt}{(t^2+z^2)^{1/2}} = I_{\nu/2}\left(\frac{az}{2}\right) K_{\nu/2}\left(\frac{az}{2}\right)$$

$(a > 0,\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1)$.

11.4.49. $$\int_0^\infty \frac{J_\nu(at)\, dt}{t^\nu(t^2+z^2)^{\nu+1/2}} = \frac{\left(\frac{2a}{z^2}\right)^\nu \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)} \times I_\nu\left(\frac{az}{2}\right) K_\nu\left(\frac{az}{2}\right) \quad (a > 0,\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1/2).$$

ПРИМЕРЫ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ И РАСШИРЕНИЕ ТАБЛИЦ

$$\int_0^x J_0(t)\, dt,\quad \int_0^x Y_0(t)\, dt,\quad \int_0^x I_0(t)\, dt,\quad \int_x^\infty K_0(t)\, dt$$

Для небольших значений x целесообразно использовать формулы 11.1.2 и 11.1.7 — 11.1.10. Для достаточно больших x следует использовать асимптотические разложения или аппроксимации многочленами 11.1.11 — 11.1.18.

Пример 1. Вычислить $\int_0^{3.05} J_0(t)dt$ с 5D. Используя 11.1.2 и интерполируя в табл. 9.1 и 9.2, получаем

$$\int_0^{3.05} J_0(t)\, dt = 2[0.32019\,09 + 0.31783\,69 + 0.04611\,52 + 0.00283\,19 + 0.00009\,72 + 0.00000\,21] = 1.37415.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^{3.05} J_0(t)\, dt$ с 5D с помощью интерполяции в табл. 11.1, используя формулу Тейлора.

Имеем

$$\int_0^{x+h} J_0(t)\, dt = \int_0^x J_0(t)\, dt + hJ_0(x) - \frac{h^2}{2} J_1(x) + \frac{h^3}{12}[J_2(x) - J_0(x)] + \frac{h^4}{96}[3J_1(x) - J_3(x)] + \ldots$$

Тогда при $x = 3.0$ и $h = 0.05$ находим

$$\int_0^{3.05} J_0(t)\, dt = 1.387567 + (0.05)(-0.260052) - (0.00125)(0.339059) + (0.000010)(0.746143) = 1.37415.$$

Это значение легко проверить, используя $x = 3.1$ и $h = -0.05$. $|J_0(x)| \leqslant 1$ для всех x и $|J_n(x)| < 2^{-1/2}$, $n \geqslant 1$, для всех x. В табл. 11.1 можно всегда выбрать $|h| \leqslant 0.05$. Таким образом, если пренебречь членами порядка $O(h^4)$ и более высоких порядков, то абсолютная погрешность для всех x при $|h| \leqslant 0.05$ не превысит $2^{1/2}h^4/48 < 0.2 \cdot 10^{-6}$. Аналогично, абсолютная погрешность при квадратичной интерполяции не превышает $h^3(2^{1/2} + 2)/24 < 0.2 \cdot 10^{-4}$.

Пример 3. Интерполяция интеграла $\int_0^x J_0(t)\,dt$ с применением формулы Симпсона осуществляется следующим образом:

$$\int_0^{x+h} J_0(t)\,dt = \int_0^x J_0(t)\,dt + \int_x^{x+h} J_0(t)\,dt,$$

$$\int_x^{x+h} J_0(t)\,dt = \frac{h}{6}\left[J_0(x) + 4J_0\left(x+\frac{h}{2}\right) + J_0(x+h)\right] + R,$$

$$R = -\frac{h^5}{2880} J_0^{(4)}(\xi), \quad x < \xi < x+h.$$

Далее,

$$J_0^{(4)}(x) = \frac{1}{8}\,[J_4(x) - 4J_2(x) + 3J_0(x)],$$

$$|J_0^{(4)}(x)| < \frac{6+5\sqrt{2}}{16} < 0.82.$$

Следовательно, при $|h| \leqslant 0.05$ имеет место оценка $|R| < 0.9 \cdot 10^{-10}$.

Таким образом, если $x = 3$ и $h = 0.05$, то

$$\int_0^{3.05} J_0(t)dt = 1.38756\,72520 + \frac{0.05}{6}[-0.26005\,19549 + 4(-0.26841\,13883) - 0.27653\,49599] = 1.37414\,86481$$

с точностью до 10D. Изложенная выше процедура дает высокую точность. Однако приходится дважды интерполировать функцию $J_0(x)$ для вычисления $J_0\left(x+\frac{h}{2}\right)$ и $J_0(x+h)$. Аналогичная процедура, основанная на применении формулы трапеций, менее точна, но при этом требуется только одна интерполяция функции $J_0(x)$.

Пример 4. Вычислить $\int_0^3 J_0(t)\,dt$ и $\int_0^3 Y_0(t)\,dt$ с 5D, используя представление через функции Струве и таблицы гл. 9 и 12.

Для $x = 3$ из табл. 9.1 и 12.1 имеем

$$J_0 = -0.260052, \quad J_1 = 0.339059,$$
$$Y_0 = 0.376850, \quad Y_1 = 0.324674,$$
$$\mathbf{H}_0 = 0.574306, \quad \mathbf{H}_1 = 1.020110.$$

Используя формулу 11.1.7, получим

$$\int_0^3 J_0(t)\,dt = 3(-0.260052) + \frac{3\pi}{2}[(0.574306)(0.339059) - (1.020110)(-0.260052)] = 1.38757.$$

Аналогично,

$$\int_0^3 Y_0(t)dt = 0.19766.$$

Используя формулу 11.1.8 и табл. 9.8 и 12.1, можно вычислить $\int_0^x I_0(t)\,dt$, $\int_0^x K_0(t)\,dt$.

$$\int_x^\infty \frac{J_0(t)\,dt}{t}, \quad \int_x^\infty \frac{Y_0(t)\,dt}{t},$$

$$\int_0^x \frac{[I_0(t)-1]\,dt}{t}, \quad \int_x^\infty \frac{K_0(t)\,dt}{t}$$

Для небольших значений x применяем формулы 11.1.19 — 11.1.23, для достаточно больших x — асимптотические разложения или аппроксимации многочленами 11.1.24 — 11.1.31.

Кратные интегралы от функции $J_0(x)$

Для небольших значений x и r используем формулу 11.2.4. Если $r = 1$, см. пример 1. Для небольших значений x используем рекуррентную формулу 11.2.5. Случай, когда x — большое и $x \gg r$, рассматривается ниже.

Пример 5. Вычислить $f_{r,0}(x) = f_r(x)$ с 5D для $x = 2$ и $r = 0(1)5$ при помощи соотношения 11.2.6. Имеем

$$rf_{r+1}(x) = xf_r(x) - (r-1)\,f_{r-1}(x) + xf_{r-2}(x),$$

$$f_{-1}(x) = -J_1(x), \; f_0(x) = J_0(x), \; f_1(x) = \int_0^x J_0(t)\,dt.$$

Функции последней строки протабулированы и для $x = 2$:

$$f_{-1} = -0.57672\,48, \quad f_0 = 0.22389\,08, \quad f_1 = 1.42577\,03.$$

Рекуррентная формула дает

$$f_2 = 2(f_1 + f_{-1}) = 1.69809\,10.$$

Аналогично,

$$f_3 = 1.20909\,66, \; f_4 = 0.62451\,73, \; f_5 = 0.25448\,17.$$

Когда $x \gg r$, удобно воспользоваться вспомогательной функцией

$$g_r(x) = (r-1)!\,x^{-r+1} f_r(x),$$

которая удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x^2 g_{r+1}(x) = x^2 g_r(x) - (r-1)^2\, g_{r-1}(x) + (r-1)\,(r-2)\, g_{r-2}(x), \quad r \geqslant 3,$$

$$g_1(x) = \int_0^x J_0(t)\,dt,$$

$$g_2(x) = g_1(x) - J_1(x),$$

$$g_3(x) = [x^2 g_2(x) - g_1(x) + xJ_0(x)]/x^2.$$

Пример 6. Вычислить $g_r(x)$ с 5D для $x = 10$ и $r = 0(1)\,6$. Для $x = 10$ имеем

$$J_0 = -0.24593\,58,\ J_1 = 0.04347\,27,\ g_1 = 1.06701\,13.$$

Таким образом,

$$g_2 = 1.02353\,86,\ g_3 = 0.98827\,49$$

и рекуррентный процесс для возрастающих значений индекса дает

$$g_4 = 0.96867\,36,\ g_5 = 0.94114\,12,\ g_6 = 0.90474\,64.$$

Таблицы функции $2^{-r}f_r(x)$ см. в [11.16].

Кратные интегралы от функции $K_0(x)$

Для небольших значений x и всех значений r используется рекуррентная формула 11.2.14.

Пример 7. Вычислить $\mathrm{Ki}_r(x)$ с 5D для $x = 2$ и $r = 0(1)\,5$. Имеем

$$r\,\mathrm{Ki}_{r+1}(x) = -x\,\mathrm{Ki}_r(x) + (r-1)\,\mathrm{Ki}_{r-1}(x) + x\,\mathrm{Ki}_{r-2}(x),$$

$$\mathrm{Ki}_{-1}(x) = K_1(x),\quad \mathrm{Ki}_0(x) = K_0(x),$$

$$\mathrm{Ki}_1(x) = \int_x^\infty K_0(t)\,dt.$$

Функции, стоящие в двух последних строках, протабулированы. Таким образом, для $x = 2$:

$$K_0 = 0.11389\,39,\ K_1 = 0.13986\,59,\ \mathrm{Ki}_1 = 0.09712\,06$$

и

$$\mathrm{Ki}_2 = -2\mathrm{Ki}_1 + 2K_1 = 0.08549\,06.$$

Аналогично,

$$\mathrm{Ki}_3 = 0.07696\,36,\ \mathrm{Ki}_4 = 0.07043\,17,\ \mathrm{Ki}_5 = 0.06525\,22.$$

Если отношение x/r небольшое, начальные значения следует брать с запасными знаками, чтобы компенсировать рост ошибки округления в рекуррентном процессе.

Таблицы $\mathrm{Ki}_r(x)$ см. в [11.11].

$$f_m(x) = x^{-m}\int_0^x t^m K_0(t)\,dt$$

Пусть

$$f_0(x) = \int_0^x K_0(t)\,dt,\ \ f_1(x) = [1 - xK_1(x)]/x.$$

Последнее равенство следует из соотношения 11.3.27, если $\nu = 1$. Пусть в формуле 11.3.5 $a = 1$, $b = -1$, $p = 0$, $\nu = 0$ и $\mu = m$. Тогда

$$f_m(x) = [(m-1)^2 f_{m-2}(x) - x^2K_1(x) - x(m-1)\,K_0(x)]/x^2 \qquad (m > 1).$$

Используя табличные значения f_0 и f_1, по этой формуле можно последовательно вычислить $f_2, f_3, \ldots$ при условии, что m/x — небольшое.

Пример 8. Вычислить $f_m(x)$ с 5D для $x = 5$ и $m = 0(1)6$. Удерживая два дополнительных десятичных знака, получаем

$$K_0 = 0.00369\,11,\quad K_1 = 0.00404\,46,$$

$$f_0 = 1.56738\,74,\quad f_1 = 0.19595\,54.$$

Таким образом,

$$f_2 = 0.05791\,27,\quad f_4 = 0.01458\,93,\quad f_6 = 0.00685\,36.$$

Аналогично, начиная с f_1, можно вычислить f_3 и f_5.

Если $m > x$, применим рекуррентную формулу для убывающих значений индекса и запишем

$$f_{m-2}(x) = [x^2f_m(x) + x^2K_1(x) + x(m-1)\,K_0(x)]/(m-1)^2.$$

В последнем выражении заменим f_m на g_m и зафиксируем x. Возьмем $r > m$ и предположим, что $g_r = 0$. Вычислим g_{r-2}, g_{r-4} и т.д. Тогда

$$\lim_{r\to\infty} g_{r-2k}(x) = f_m(x),\quad m = r - 2k.$$

Значение r, которое требуется выбрать, чтобы получить нужную точность при заданных x и m, можно определить заранее. Пусть

$$\varepsilon_r = |g_r - f_r|.$$

Тогда

$$\varepsilon_{r-2k} = \frac{x^{2k}\varepsilon_r}{(r-1)^2(r-3)^2\ldots(r-2k+1)^2},$$

$$\varepsilon_r \leqslant \frac{x^2K_1(x) + x(r-1)\,K_0(x)}{(r-1)^2},$$

так как для фиксированного x функция $f_r(x)$ положительна и убывает, когда r возрастает.

Пример 9. Вычислить $f_m(x)$ с 5D для $x = 3$ и $m = 0(2)\,10$. Имеем

$$K_0 = 0.03473\,95,\quad K_1 = 0.04015\,64.$$

Если $r = 16$, то $\varepsilon_{16} < 0.86\cdot 10^{-2}$, $\varepsilon_{10} < 1.4\cdot 10^{-6}$.

Полагая $g_{16} = 0$, вычислим следующие значения величин $g_{14}, g_{12}, \ldots, g_0$ рекуррентным способом. Таким образом, требуемые значения получаются с 5D.

m	g_m	f_m	m	g_m	f_m
14	0.00855 42		6	0.02548 09	0.02548
12	0.01061 09		4	0.04447 31	0.04447
10	0.01325 05	0.01325	2	0.11936 90	0.11937
8	0.01751 39	0.01751	0	1.53994 71	1.53995

Таблицы $f_m(x)$ см. в [11.21].

Таблица 11.1. Интегралы от функций Бесселя

x	$\int_0^x J_0(t)\,dt$	$\int_0^x Y_0(t)\,dt$	$e^{-x}\int_0^x I_0(t)\,dt$	$e^x\int_x^\infty K_0(t)\,dt$
0.0	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00	1.57079 63
0.1	0.09991 66979	−0.21743 05666	0.09055 92	1.35784 82
0.2	0.19933 43325	−0.34570 88380	0.16429 28	1.25032 54
0.3	0.29775 75802	−0.43928 31758	0.22391 79	1.17280 09
0.4	0.39469 85653	−0.50952 48283	0.27172 46	1.11171 28
0.5	0.48968 05066	−0.56179 54559	0.30964 29	1.06127 17
0.6	0.58224 12719	−0.59927 15570	0.33929 99	1.01836 48
0.7	0.67193 68094	−0.62409 96341	0.36206 71	0.98109 70
0.8	0.75834 44308	−0.63786 88991	0.37910 05	0.94821 80
0.9	0.84106 59149	−0.64184 01770	0.39137 42	0.91885 56
1.0	0.91973 04101	−0.63706 93766	0.39970 88	0.89237 52
1.1	0.99399 71082	−0.62447 91607	0.40479 52	0.86829 97
1.2	1.06355 76711	−0.60490 26964	0.40721 52	0.84626 10
1.3	1.12813 83885	−0.57911 12548	0.40745 78	0.82596 89
1.4	1.18750 20495	−0.54783 19295	0.40593 39	0.80719 04
1.5	1.24144 95144	−0.51175 90340	0.40298 85	0.78973 57
1.6	1.28982 09734	−0.47156 13039	0.39891 09	0.77344 80
1.7	1.33249 68829	−0.42788 62338	0.39394 29	0.75819 62
1.8	1.36939 85727	−0.38136 24134	0.38828 68	0.74386 97
1.9	1.40048 85208	−0.33260 04453	0.38211 11	0.73037 44
2.0	1.42577 02932	−0.28219 28501	0.37555 57	0.71762 95
2.1	1.44528 81525	−0.23071 32490	0.36873 67	0.70556 50
2.2	1.45912 63387	−0.17871 50399	0.36174 98	0.69412 02
2.3	1.46740 90303	−0.12672 97284	0.35467 38	0.68324 16
2.4	1.47029 39949	−0.07526 50420	0.34757 29	0.67288 26
2.5	1.46798 09446	−0.02480 29261	0.34049 93	0.66300 15
2.6	1.46069 96081	+0.02420 24953	0.33349 48	0.65356 16
2.7	1.44871 25408	0.07132 69288	0.32659 30	0.64452 98
2.8	1.43231 16899	0.11617 78353	0.31981 99	0.63587 68
2.9	1.41181 57386	0.15839 62206	0.31319 59	0.62757 60
3.0	1.38756 72520	0.19765 82565	0.30673 62	0.61960 34
3.1	1.35992 96508	0.23367 66986	0.30045 18	0.61193 74
3.2	1.32928 40386	0.26620 20748	0.29435 04	0.60455 84
3.3	1.29602 59125	0.29502 36222	0.28843 67	0.59744 84
3.4	1.26056 17835	0.31996 99576	0.28271 31	0.59059 11
3.5	1.22330 57382	0.34090 94657	0.27718 02	0.58397 14
3.6	1.18467 59706	0.35775 03989	0.27183 70	0.57757 57
3.7	1.14509 13136	0.37044 06831	0.26668 11	0.57139 13
3.8	1.10496 78009	0.37896 74266	0.26170 94	0.56540 66
3.9	1.06471 52877	0.38335 61369	0.25691 78	0.55961 09
4.0	1.02473 41595	0.38366 96479	0.25230 18	0.55399 42
4.1	0.98541 21560	0.38000 67672	0.24785 61	0.54854 72
4.2	0.94712 13375	0.37250 06552	0.24357 56	0.54326 15
4.3	0.91021 52175	0.36131 69475	0.23945 46	0.53812 91
4.4	0.87502 60866	0.34665 16398	0.23548 74	0.53314 27
4.5	0.84186 25481	0.32872 87513	0.23166 83	0.52829 52
4.6	0.81100 72858	0.30779 77892	0.22799 15	0.52358 03
4.7	0.78271 50802	0.28413 10351	0.22445 13	0.51899 19
4.8	0.75721 10902	0.25802 06786	0.22104 21	0.51452 43
4.9	0.73468 94106	0.22977 58227	0.21775 83	0.51017 24
5.0	0.71531 19178	0.19971 93876	0.21459 46	0.50593 10
	$\begin{bmatrix}(-4)7\\7\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-3)2\\6\end{bmatrix}$	

Таблица 11.1. Интегралы от функций Бесселя

x	$\int_0^x J_0(t)\,dt$	$\int_0^x Y_0(t)\,dt$	$e^{-x}\int_0^x I_0(t)\,dt$	$e^x\int_x^\infty K_0(t)\,dt$
5.0	0.71531 19178	0.19971 93876	0.21459 46	0.50593 10
5.1	0.69920 74098	0.16818 49405	0.21154 58	0.50179 55
5.2	0.68647 10457	0.13551 34784	0.20860 68	0.49776 16
5.3	0.67716 40870	0.10205 01932	0.20577 28	0.49382 50
5.4	0.67131 39407	0.06814 12463	0.20303 89	0.48998 19
5.5	0.66891 44989	0.03413 05806	0.20040 08	0.48622 86
5.6	0.66992 67724	+0.00035 67983	0.19785 40	0.48256 16
5.7	0.67427 98068	−0.03284 98697	0.19539 44	0.47897 75
5.8	0.68187 18713	−0.06517 04775	0.19301 81	0.47547 34
5.9	0.69257 19078	−0.09630 01348	0.19072 13	0.47204 60
6.0	0.70622 12236	−0.12595 06129	0.18850 02	0.46869 29
6.1	0.72263 54100	−0.15385 27646	0.18635 16	0.46541 11
6.2	0.74160 64692	−0.17975 87372	0.18427 20	0.46219 83
6.3	0.76290 51256	−0.20344 39625	0.18225 84	0.45905 20
6.4	0.78628 33012	−0.22470 89068	0.18030 78	0.45596 99
6.5	0.81147 67291	−0.24338 05692	0.17841 74	0.45294 98
6.6	0.83820 76824	−0.25931 37161	0.17658 44	0.44998 97
6.7	0.86618 77897	−0.27239 18447	0.17480 64	0.44708 76
6.8	0.89512 09137	−0.28252 78684	0.17308 09	0.44424 15
6.9	0.92470 60635	−0.28966 45218	0.17140 55	0.44144 97
7.0	0.95464 03155	−0.29377 44843	0.16977 82	0.43871 05
7.1	0.98462 17153	−0.29486 02239	0.16819 68	0.43602 22
7.2	1.01435 21344	−0.29295 35658	0.16665 93	0.43338 34
7.3	1.04354 00558	−0.28811 49927	0.16516 39	0.43079 23
7.4	1.07190 32638	−0.28043 26862	0.16370 89	0.42824 76
7.5	1.09917 14142	−0.27002 13202	0.16229 24	0.42574 81
7.6	1.12508 84628	−0.25702 06208	0.16091 30	0.42329 20
7.7	1.14941 49299	−0.24159 37080	0.15956 91	0.42087 86
7.8	1.17192 99830	−0.22392 52368	0.15825 93	0.41850 63
7.9	1.19243 33198	−0.20421 93575	0.15698 21	0.41617 40
8.0	1.21074 68348	−0.18269 75150	0.15573 64	0.41388 07
8.1	1.22671 60587	−0.15959 61109	0.15452 08	0.41162 52
8.2	1.24021 13565	−0.13516 40494	0.15333 42	0.40940 65
8.3	1.25112 88778	−0.10966 01934	0.15217 55	0.40722 37
8.4	1.25939 12520	−0.08335 07540	0.15104 36	0.40507 56
8.5	1.26494 80240	−0.05650 66385	0.14993 74	0.40296 15
8.6	1.26777 58297	−0.02940 07834	0.14885 61	0.40088 04
8.7	1.26787 83120	−0.00230 54965	0.14779 88	0.39883 15
8.8	1.26528 57796	+0.02451 01664	0.14676 44	0.39681 40
8.9	1.26005 46162	0.05078 29664	0.14575 23	0.39482 69
9.0	1.25226 64460	0.07625 79635	0.14476 16	0.39286 97
9.1	1.24202 70675	0.10069 08937	0.14379 16	0.39094 15
9.2	1.22946 51666	0.12385 04194	0.14284 16	0.38904 17
9.3	1.21473 08237	0.14552 02334	0.14191 08	0.38716 95
9.4	1.19799 38314	0.16550 09969	0.14099 87	0.38532 41
9.5	1.17944 18392	0.18361 20962	0.14010 46	0.38350 53
9.6	1.15927 83464	0.19969 32017	0.13922 78	0.38171 20
9.7	1.13772 05614	0.21360 56169	0.13836 79	0.37994 39
9.8	1.11499 71504	0.22523 34059	0.13752 43	0.37820 03
9.9	1.09134 58985	0.23448 42919	0.13669 65	0.37648 06
10.0	1.06701 13040	0.24129 03183	0.13588 40	0.37478 43
	$\begin{bmatrix}(-4)4\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)1\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)1\\4\end{bmatrix}$

Таблица 11.2. Интегралы от функций Бесселя

x	$\int_0^x \frac{1-J_0(t)}{t}\,dt$	$\int_x^\infty \frac{Y_0(t)}{t}\,dt$	$e^{-x}\int_0^x \frac{I_0(t)-1}{t}\,dt$	$xe^x\int_x^\infty \frac{K_0(t)}{t}\,dt$
0.0	0.00000 000	$-\infty$	0.00000 000	0.000000
0.1	0.00124 961	−1.34138 382	0.00113 140	0.368126
0.2	0.00499 375	−0.43423 067	0.00409 877	0.460111
0.3	0.01121 841	−0.05107 832	0.00835 768	0.506394
0.4	0.01990 030	+0.15238 037	0.01347 363	0.532910
0.5	0.03100 699	0.26968 854	0.01910 285	0.548819
0.6	0.04449 711	0.33839 213	0.02497 622	0.558366
0.7	0.06032 057	0.37689 807	0.03088 584	0.563828
0.8	0.07841 882	0.39543 866	0.03667 383	0.566545
0.9	0.09872 519	0.40022 301	0.04222 295	0.567355
1.0	0.12116 525	0.39527 290	0.04744 889	0.566811
1.1	0.14565 721	0.38332 909	0.05229 376	0.565291
1.2	0.17211 240	0.36633 694	0.05672 080	0.563058
1.3	0.20043 570	0.34572 398	0.06070 995	0.560302
1.4	0.23052 610	0.32256 701	0.06425 420	0.557163
1.5	0.26227 724	0.29769 696	0.06735 663	0.553745
1.6	0.29557 796	0.27176 713	0.07002 797	0.550126
1.7	0.33031 288	0.24529 896	0.07228 458	0.546364
1.8	0.36636 308	0.21871 360	0.07414 688	0.542506
1.9	0.40360 666	0.19235 409	0.07563 806	0.538587
2.0	0.44191 940	0.16650 135	0.07678 298	0.534635
2.1	0.48117 541	0.14138 594	0.07760 744	0.530670
2.2	0.52124 775	0.11719 681	0.07813 746	0.526711
2.3	0.56200 913	0.09408 798	0.07839 884	0.522768
2.4	0.60333 248	0.07218 365	0.07841 674	0.518854
2.5	0.64509 164	0.05158 229	0.07821 544	0.514976
2.6	0.68716 194	0.03235 987	0.07781 809	0.511139
2.7	0.72942 081	+0.01457 248	0.07724 664	0.507350
2.8	0.77174 836	−0.00174 144	0.07652 168	0.503610
2.9	0.81402 795	−0.01655 931	0.07566 245	0.499924
3.0	0.85614 669	−0.02987 272	0.07468 681	0.496292
3.1	0.89799 596	−0.04168 613	0.07361 124	0.492717
3.2	0.93947 188	−0.05201 554	0.07245 090	0.489198
3.3	0.98047 571	−0.06088 740	0.07121 963	0.485736
3.4	1.02091 428	−0.06833 756	0.06993 006	0.482332
3.5	1.06070 032	−0.07441 025	0.06859 360	0.478984
3.6	1.09975 277	−0.07915 722	0.06722 060	0.475694
3.7	1.13799 707	−0.08263 683	0.06582 033	0.472459
3.8	1.17536 536	−0.08491 323	0.06440 109	0.469280
3.9	1.21179 667	−0.08605 553	0.06297 029	0.466155
4.0	1.24723 707	−0.08613 706	0.06153 450	0.463085
4.1	1.28163 975	−0.08523 459	0.06009 952	0.460067
4.2	1.31496 504	−0.08342 762	0.05867 042	0.457100
4.3	1.34718 044	−0.08079 769	0.05725 166	0.454185
4.4	1.37826 060	−0.07742 769	0.05584 708	0.451320
4.5	1.40818 716	−0.07340 123	0.05446 000	0.448503
4.6	1.43694 870	−0.06880 199	0.05309 325	0.445734
4.7	1.46454 052	−0.06371 317	0.05174 921	0.443012
4.8	1.49096 446	−0.05821 690	0.05042 989	0.440335
4.9	1.51622 864	−0.05239 371	0.04913 691	0.437703
5.0	1.54034 722	−0.04632 205	0.04787 161	0.435114
	$\left[\begin{matrix}(-4)3\\6\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-4)2\\7\end{matrix}\right]$	

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

11.1. Bateman H., Archibald R. C. A guide to tables of Bessel functions. — Math. Tables Aids Comp., 1943, **1**, p. 247 — 252. См. также дополнения I, II, IV в том же журнале: 1943, **1**, с. 403 — 404; 1946, **2**, с. 59; 1946,**2**, с. 190.

11.2. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V. 2, Ch. 7. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974, Т.II.

11.3. Erdélyi A. et al. Tables of integral transforms. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1954, V. I, 2. Русский перевод: Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. — М.: Наука, 1969, Т.I.

11.4. Gröbner Q., Hofreiter N. Integraltafel. II Teil. — Wien: Springer-Verlag, 1949 — 1950.

11.5. King L. V. On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluid. — Trans. Roy. Soc. London, 1914, **A214**, p. 373 — 432.

11.6. Luke Y. L. Some notes on integrals involving Bessel functions. — J. Math. Phys., 1950, **29**, p. 27 — 30.

11.7. Luke Y. L. An associated Bessel functions. — J. Math. Phys., 1952, **31**, p. 131 — 138.

11.8. Oberhettinger F. On some expansions for Bessel integral functions. — J. Research NBS, 1957, **59**, p. 197 — 201. — Report № 2786.

11.9. Petiau G. La théorie des fonctions de Bessel. — P.: Centre National de la Recherche Scientifique, 1955.

11.10. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1958. Русский перевод: Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949, Ч. 1.

Таблицы

11.11. Bickley W. G., Nayler J. A short table of the functions $\mathrm{Ki}_n(x)$, from $n = 1$ to $n = 16$. — Phil. Mag., 1935, **7**, № 20, p. 343 — 347.

$$\mathrm{Ki}_1(x) = \int_x^\infty K_0(t)\,dt,\quad \mathrm{Ki}_n(x) = \int_x^\infty \mathrm{Ki}_{n-1}(t)\,dt,$$

$n = 1(1)16$, $x = 0(0.05)\ 0.2(0.1)\ 2,\ 3$, 9D.

11.12. Бурсиан В. Р., Фок В. Таблицы функций

$$\int_x^\infty K_0(x)\,dx,\ \int_0^x I_0(x)\,dx,\ e^x\int_x^\infty K_0(x)\,dx,\ e^{-x}\int_0^x I_0(x)\,dx. —$$

Труды ин-та физики и математики АН СССР, 1931, **2**, с. 6 — 10.

$$\int_0^\infty K_0(t)\,dt,\ x = 0(0.1)12,\ 7D;\ e^x\int_x^\infty K_0(t)\,dt,\ x = 0(0.1)16,\ 7D;\ \int_0^x I_0(t)\,dt,\ x = 0(0.1)6,\ 7D;$$

$$e^{-x}\int_0^x I_0(t)\,dt,\ x = 0(0.1)16,\ 7D.$$

11.13. Чистова Э. А. Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.

$$J_n(x),\ Y_n(x),\ \int_x^\infty \frac{J_n(t)}{t}\,dt,\ \int_x^\infty \frac{Y_n(t)}{t}\,dt,$$

$n = 0,1$; $x = 0(0.001)\ 15(0.01)\ 100$, 7D.

11.14. Hitchcock A. J. M. Polynomial approximations to Bessel functions of order zero and one and to related functions. — Math. Tables Aids Comp., 1957, **11**, p. 86 — 88.

Аппроксимации многочленами для $\int_0^x J_0(t)\,dt$ и $\int_x^\infty K_0(t)\,dt$.

11.15. Horton C. W. A short table of Struve functions and of some integrals involving Bessel and Struve functions. — J. Math., Phys., 1950, **29**, p. 56 — 58.

$$C_n(x) = \int_0^x t^n J_n(t)\,dt,\ n = 1(1)4,\ x = 0(0.1)10,\ 4D;$$

$$D_n(x) = \int_0^x t^n\,\mathbf{H}_n(t)\,dt\ \ n = 0(1)4,\ x = 0(0.1)10,\ 4D,$$

где $\mathbf{H}_n(x)$ — функция Струве, см. гл. **12**.

11.16. Jaeger J. C. Repeated integrals of Bessel functions and the theory of transients in filter circuits. — J. Math. Phys., 1948, **27**, p. 210 — 219.

$$f_1(x) = \int_0^x J_0(t)\,dt,\ f_r(x) = \int_0^x f_{r-1}(t)\,dt,\ 2^{-r}f_r(x),\ r = 1(1)7,\ x = 0(1)42,\ 8D;\ \Phi_n(x) = \int_0^\infty J_0[2(xt)^{1/2}] \times J_n(t)\,dt,\ \Phi_n(x),\ \Phi_n'(x),\ n = 1(1)7,\ x = 0(1)24,\ 4D.$$

11.17. Кармазина Л. Н., Чистова Э. А. Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.

$$e^{-x}I_0(x),\ e^{-x}I_1(x),\ e^xK_0(x),\ e^xK_1(x),\ e^x,\ e^{-x},\ \int_0^x I_0(t)\,dt,$$

$$e^x\int_x^\infty K_0(t)\,dt,\ x = 0(0.001)\ 5(0.005)\ 15(0.01)100,$$

7D, кроме e^x, для которой даны 7S. Для удобства интерполяции около нуля протабулированы вспомогательные функции.

11.18. Knudsen H. L. Ridrag til teorien for antennesystemer med hel eller delvis rotations-symmetri. — Copenhagen: I Kommission Has Teknisk Forlag, 1953.

$$\int_0^x J_n(t)\,dt,\ n = 0(1)8,\ x = 0(0.01)10,\ 5D;$$

$$\int_0^x J_n(t)\,e^{i\alpha}\,dt,\ \alpha = t,\ \alpha = x - t.$$

11.19. Luke Y. L., Ufford D. Tables of the function $\overline{K}_0(x) = \int_0^x K_0(t)\,dt$. — Math. Tables Aids Comp., 129.

$K_0(x) = -[\gamma + \ln(x/2)]\,A_1(x) + A_2(x)$,

$A_1(x),\ A_2(x);\ x = 0(0.01)\,0.5(0.05)1,\ 8D.$

11.20. Mack C., Castle M., Tables of $\int_0^\alpha I_0(x)\,dx$ and $\int_\alpha^\infty K_0(x)\,dx$. — Roy Soc. Unpublished Math. Table File № 6.

$\alpha = 0(0.02)\,2(0.1)4,\ 9D.$

11.21. Muller G. M. Table of the function $\mathrm{Ki}_n(x) = x^{-n}\int_0^x u^n\,K_0(u)\,du$. Office of Technical Services. — Washington: Department of Commerce, 1954.

$n = 0(1)31,\ x = 0(0.01)2(0.02)5,\ 8S.$

11.22. National Bureau of Standards. Tables of functions and zeros of functions. — Washington: Government Printing Office, 1954. — (Applied Math. Series; 37)

1) p. 21—31: $\int_0^x J_0(t)\,dt, \int_0^x Y_0(t)\,dt,\ x=0(0.01)10,\ 10D;$

2) p. 33—39: $\int_x^\infty J_0(t)\,dt/t,\ x = 0(0.1)10(1)22,\ 10D;$

$$F(x) = \int_x^\infty J_0(t)\,dt/t + \ln(x/2),\ x=0(0.1)3,\ 10D;$$

$F^{(n)}(x)/n!,\ x = 10(1)22,\quad n = 0(1)13,\ 12D.$

11.23. National Physical Laboratory. Integrals of Bessel functions. — Roy. Soc. Unpublished Math. Table File № 17.

$$\int_0^x J_0(t)\,dt,\ \int_0^x Y_0(t)\,dt,\ x = 0(0.5)50,\ 10D.$$

11.24. M. Rothman. Table of $\int_0^x I_0(x)\,dx$ for 0(0.1)20(1)25. — Guart. J. Mech., Appl. Math., 1949, **2**, p. 212—217. 8S—9S.

11.25. Schmidt P. W. Tables of $\int_0^x J_0(t)\,dt$ for large x. — J. Math. Phys., 1955, **34**, p. 169—172. $x = 10(0.2)40,\ 6D.$

11.26. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1958. Table VIII, p. 752.

$$\frac{1}{2}\int_0^x J_0(t)\,dt,\ \frac{1}{2}\int_0^x Y_0(t)\,dt,\ x = 0(0.02)1,\ 7D$$

with the first 16 maxima and minima of the integrals to 7D.

Русский перевод: Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949, Ч.2, Табл. VIII.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

11.27. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.

Глава 12

ФУНКЦИИ СТРУВЕ И РОДСТВЕННЫЕ ИМ ФУНКЦИИ

М. АБРАМОВИЦ

СОДЕРЖАНИЕ

12.1. ФУНКЦИЯ СТРУВЕ $\mathbf{H}_\nu(z)$

Дифференциальное уравнение и его общее решение

12.1.1. $$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = \frac{4(z/2)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)}.$$

Общим решением является функция

12.1.2. $$w = aJ_\nu(z) + bY_\nu(z) + \mathbf{H}_\nu(z),$$

где a, b — постоянные, $z^{-\nu}\mathbf{H}_\nu(z)$ — целая функция z.

Разложения в степенной ряд

12.1.3. $$\mathbf{H}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(z/2)^{2k}}{\Gamma(k + 3/2)\,\Gamma(k + \nu + 3/2)}.$$

12.1.4. $$\mathbf{H}_0(z) = \frac{2}{\pi}\left[z - \frac{z^3}{1^2\cdot 3^2} + \frac{z^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2} - \dots\right].$$

12.1.5. $$\mathbf{H}_1(z) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{z^2}{1^2\cdot 3} - \frac{z^4}{1^2\cdot 3^2\cdot 5} + \frac{z^6}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7} - \dots\right].$$

Интегральные представления

($\operatorname{Re} \nu > -1/2$)

12.1.6. $$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \sin(zt)\,dt.$$

12.1.7. $$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^{\pi/2} \sin(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta.$$

12.1.8. $$\mathbf{H}_\nu(z) = Y_\nu(z) + \frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\infty e^{-zt}(1+t^2)^{\nu-1/2}\,dt$$

($|\arg z| < \pi/2$)

Рекуррентные соотношения

12.1.9. $$\mathbf{H}_{\nu-1} + \mathbf{H}_{\nu+1} = \frac{2\nu}{z}\mathbf{H}_\nu + \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+3/2)}.$$

12.1.10. $$\mathbf{H}_{\nu-1} - \mathbf{H}_{\nu+1} = 2\mathbf{H}'_\nu - \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+3/2)}.$$

12.1.11. $$\mathbf{H}'_0 = \left(\frac{2}{\pi}\right) - \mathbf{H}_1.$$

12.1.12. $$\frac{d}{dz}(z^\nu \mathbf{H}_\nu) = z^\nu \mathbf{H}_{\nu-1}.$$

12.1.13. $$\frac{d}{dz}(z^{-\nu}\mathbf{H}_\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,2^\nu\Gamma(\nu+3/2)} - z^{-\nu}\mathbf{H}_{\nu+1}.$$

Некоторые свойства

12.1.14. $\mathbf{H}_\nu(x) \geqslant 0$ ($x > 0$ и $\nu \geqslant 1/2$).

12.1.15. $\mathbf{H}_{-(n+1/2)}(z) = (-1)^n J_{n+1/2}(z)$

(n — целое положительное или нуль).

12.1.16. $$\mathbf{H}_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}(1-\cos z).$$

12.1.17. $$\mathbf{H}_{3/2}(z) = \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{1/2}\left(1+\frac{2}{z^2}\right) - \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \times \left(\sin z + \frac{\cos z}{z}\right).$$

12.1.18. $\mathbf{H}_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{m(\nu+1)\pi i}\mathbf{H}_\nu(z)$ (m — целое).

12.1.19. $$\mathbf{H}_0(z) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_{2k+1}(z)}{2k+1}.$$

12.1.20. $$\mathbf{H}_1(z) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}J_0(z) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{J_{2k}(z)}{4k^2-1}.$$

12.1.21. $$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2(z/2)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+3/2)}\,{}_1F_2\left(1;\ \frac{3}{2}+\nu,\ \frac{3}{2};\ -\frac{z^2}{4}\right).$$

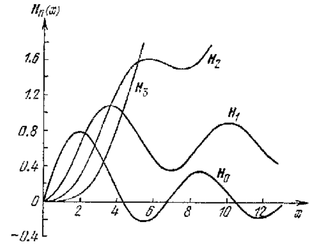


Рис. 12.1. Функции Струве $\mathbf{H}_n(x)$; $n = 0(1)3$.

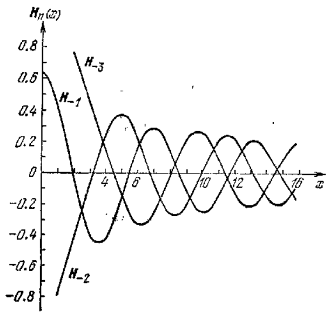


Рис. 12.2. Функции Струве $\mathbf{H}_n(x)$; $-n = 1(1)3$.

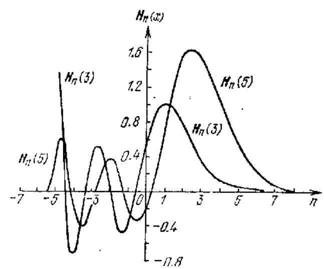


Рис. 12.3. Функции Струве $\mathbf{H}_n(x)$; $x = 3, 5$.

Интегралы (см. гл. 11)

12.1.22. $$\int_0^\infty t^{-1}\mathbf{H}_0(t)dt = \frac{\pi}{2}.$$

12.1.23. $$\int_0^z \mathbf{H}_0(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{1^2\cdot 3^2\cdot 4} + \frac{z^6}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 6} - \cdots\right].$$

12.1.24. $$\int_0^z t^{-\nu}\mathbf{H}_{\nu+1}(t)\,dt = \frac{z}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+3/2)} - z^{-\nu}\mathbf{H}_\nu(z).$$

Интеграл Струве

12.1.25. $$\frac{4}{\pi}\int_z^\infty t^{-2}\mathbf{H}_1(t)\,dt = \frac{2}{\pi z}\mathbf{H}_1(z) + \frac{2}{\pi}\int_z^\infty t^{-1}\mathbf{H}_0(t)\,dt.$$

12.1.26. $$\frac{2}{\pi}\int_z^\infty t^{-1}\mathbf{H}_0(t)\,dt = 1 - \frac{4}{\pi^2}\left[z - \frac{z^3}{1^2\cdot 3^2\cdot 3} + \frac{z^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 5} - \cdots\right].$$

12.1.27. $$\int_0^\infty t^{\mu-\nu-1}\mathbf{H}_\nu(t)\,dt = \frac{\Gamma(\mu/2)2^{\mu-\nu-1}\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{\Gamma(\nu-(\mu/2)+1)}$$
$$(|\operatorname{Re}\mu| < 1,\ \operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu - 3/2)$$

12.1.28. Если $f_\nu(z) = \int_0^z \mathbf{H}_\nu(t)\,t^\nu dt$, то
$$_{\nu+1} = (2\nu+1)f_\nu(z) - z^{\nu+1}\mathbf{H}_\nu(z) + \frac{z^{2\nu+2}}{(\nu+1)\,2^{\nu+1}\Gamma(1/2)\,\Gamma(\nu+3/2)} \quad (\operatorname{Re}\nu > -1/2).$$

Асимптотические разложения для больших $|z|$

12.1.29. $$\mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(\nu+1/2-k)\,(z/2)^{2k-\nu+1}} + R_m,$$
$$(|\arg z| < \pi),\quad R_m = O(|z|^{\nu-2m-1}).$$

Если ν — действительное, z — положительное и $m + 1/2 - \nu \geqslant 0$, то остаток R_m по абсолютной величине меньше, чем первый отброшенный член, и имеет тот же знак.

12.1.30. $$\mathbf{H}_0(z) - Y_0(z) \sim \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} + \frac{1^2\cdot 3^2}{z^5} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{z^7} + \dots\right] \quad (|\arg z| < \pi).$$

12.1.31. $$\mathbf{H}_1(z) - Y_1(z) \sim \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{1}{z^2} - \frac{1^2\cdot 3}{z^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{z^6} - \dots\right] \quad (|\arg z| < \pi).$$

12.1.32. $$\int_0^z [\mathbf{H}_0(t) - Y_0(t)]\,dt - \frac{2}{\pi}[\ln(2z) + \gamma] \sim \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}(2k)!\,(2k-1)!}{(k!)^2(2z)^{2k}}$$
$$(|\arg z| < \pi),$$

где $\gamma = 0.57721\ 56649\ldots$ — постоянная Эйлера.

12.1.33. $$\int_z^\infty t^{-1}[\mathbf{H}_0(t) - Y_0(t)]\,dt \sim \frac{2}{\pi z}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k[(2k)!]^2}{(k!)^2(2k+1)(2z)^{2k}}$$
$$(|\arg z| < \pi).$$

Асимптотические разложения для больших порядков

12.1.34. $$\mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z) \sim \frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\sum_{k=0}^\infty \frac{k!\,b_k}{z^{k+1}}$$
$$(|\arg z| < \pi/2,\ |\nu| < |z|),$$
$$b_0 = 1,\ b_1 = \frac{2\nu}{z},\quad b_2 = 6\left(\frac{\nu}{z}\right)^2 - \frac{1}{2},$$
$$b_3 = 20\left(\frac{\nu}{z}\right)^3 - 4\left(\frac{\nu}{z}\right).$$

12.1.35. $$\mathbf{H}_\nu(z) + iJ_\nu(z) \sim \frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\sum_{k=0}^\infty \frac{k!\,b_k}{z^{k+1}}$$
$$(|\nu| > |z|).$$

12.2. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ СТРУВЕ $\mathbf{L}_\nu(z)$

Разложение в ряд

12.2.1. $$\mathbf{L}_\nu(z) = -ie^{-i\nu\pi/2}\mathbf{H}_\nu(iz) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}\sum_{k=0}^\infty \frac{(z/2)^{2k}}{\Gamma(k+3/2)\Gamma(k+\nu+3/2)}.$$

Интегральные представления

12.2.2. $$\mathbf{L}_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sh}(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta$$
$$(\operatorname{Re}\nu > -1/2).$$

12.2.3. $I_{-\nu}(x) - \mathbf{L}_\nu(x) =$

$$= \frac{2(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\infty \sin(tx)\,(1+t^2)^{\nu-1/2}\,dt$$

$$(\operatorname{Re}\nu < 1/2,\ x > 0)$$

Рекуррентные соотношения

12.2.4. $\mathbf{L}_{\nu-1} - \mathbf{L}_{\nu+1} = \dfrac{2\nu}{z}\mathbf{L}_\nu + \dfrac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+3/2)}.$

12.2.5. $\mathbf{L}_{\nu-1} + \mathbf{L}_{\nu+1} = 2\mathbf{L}'_\nu - \dfrac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+3/2)}.$

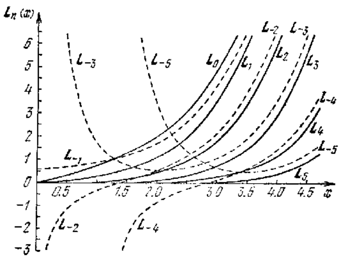


Рис. 12.4. Модифицированные функции Струве $\mathbf{L}_n(x)$; $\pm n = 0(1)5$.

Асимптотическое разложение для больших $|z|$

12.2.6. $\mathbf{L}_\nu(z) - I_{-\nu}(z) \sim$

$$\sim \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\,\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(\nu+1/2-k)\,(z/2)^{2k-\nu+1}}$$

$$(|\arg z| < \pi/2).$$

Интегралы

12.2.7. $\displaystyle\int_0^z \mathbf{L}_0(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{1^2\cdot 3^2\cdot 4} + \frac{z^6}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 6} + \ldots\right].$

12.2.8. $\displaystyle\int_0^z [I_0(t) - \mathbf{L}_0(t)]\,dt - \frac{2}{\pi}[\ln(2z) + \gamma] \sim$

$$\sim -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!\,(2k-1)!}{(k!)^2\,(2z)^{2k}} \quad (|\arg z| < \pi/2).$$

12.2.9. $\displaystyle\int_0^z \mathbf{L}_1(t)\,dt = \mathbf{L}_0(z) - \frac{2}{\pi}z.$

Связь с модифицированными сферическими функциями Бесселя

12.2.10. $\mathbf{L}_{-(n+1/2)}(z) = I_{n+1/2}(z)$ (n — положительное или нуль).

12.3. ФУНКЦИИ АНГЕРА И ВЕБЕРА

Функция Ангера

12.3.1. $\mathbf{J}_\nu(z) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(\nu\theta - z\sin\theta)\,d\theta.$

12.3.2. $\mathbf{J}_n(z) = J_n(z)$ (n — целое).

Функция Вебера

12.3.3. $\mathbf{E}_\nu(z) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin(\nu\theta - z\sin\theta)\,d\theta.$

Соотношения между функциями Ангера и Вебера

12.3.4. $\sin(\nu\pi)\,\mathbf{J}_\nu(z) = \cos(\nu\pi)\,\mathbf{E}_\nu(z) - \mathbf{E}_{-\nu}(z).$

12.3.5. $\sin(\nu\pi)\,\mathbf{E}_\nu(z) = \mathbf{J}_{-\nu}(z) - \cos(\nu\pi)\,\mathbf{J}_\nu(z).$

Соотношения между функциями Вебера и Струве
(n — целое положительное или нуль)

12.3.6. $\mathbf{E}_n(z) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{\Gamma(k+1/2)\,(z/2)^{n-2k-1}}{\Gamma(n+1/2-k)} - \mathbf{H}_n(z).$

12.3.7. $\mathbf{E}_{-n}(z) =$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{\Gamma(n-k-1/2)\,(z/2)^{-n+2k+1}}{\Gamma(k+3/2)} - \mathbf{H}_{-n}(z).$$

12.3.8. $\mathbf{E}_0(z) = -\mathbf{H}_0(z).$

12.3.9. $\mathbf{E}_1(z) = \dfrac{2}{\pi} - \mathbf{H}_1(z).$

12.3.10. $\mathbf{E}_2(z) = \dfrac{2z}{3\pi} - \mathbf{H}_2(z).$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Вычислить $\mathbf{L}_0(2)$ с 6D. Из табл. 12.1 имеем $I_0(2) - \mathbf{L}_0(2) = 0.342152$, из табл. 9.11 имеем $I_0(2) = 2.279585$, так что $\mathbf{L}_0(2) = 1.937433$.

Пример 2. Вычислить $\mathbf{H}_0(10)$ с 6D. В табл. 12.2 находим для $x^{-1} = 0.1$ $\mathbf{H}_0(10) - Y_0(10) = 0.063072$. Из табл. 9.1 имеем $Y_0(10) = 0.055671$. Следовательно, $\mathbf{H}_0(10) = 0.118743$.

Пример 3. Вычислить $\int\limits_0^x \mathbf{H}_0(t)\,dt$ для $x = 6$ с 5D.

Используя табл. 12.2, 11.1 и 4.2, получаем

$$\int\limits_0^6 \mathbf{H}_0(t)\,dt - \int\limits_0^6 Y_0(t)\,dt + \frac{2}{\pi}\ln 6 + f_1(6) =$$

$$= -0.125951 + (0.636620)\,(1.791759) + 0.816764 = 1.83148.$$

Пример 4. Вычислить $\mathbf{H}_n(x)$ для $x = 4$, $-n = 0(1)8$, с 6S. Из табл. 12.1 имеем $\mathbf{H}_0(4) = 0.1350146$, $\mathbf{H}_1(4) = 1.0697267$. Используя 12.1.9, находим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}_{-1}(4) = -0.433107, && \mathbf{H}_{-5}(4) = 0.689652,\\
&\mathbf{H}_{-2}(4) = 0.240694, && \mathbf{H}_{-6}(4) = -1.21906,\\
&\mathbf{H}_{-3}(4) = 0.152624, && \mathbf{H}_{-7}(4) = 2.82066,\\
&\mathbf{H}_{-4}(4) = -0.439789, && \mathbf{H}_{-8}(4) = -8.24933.
\end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить $\mathbf{H}_n(x)$ для $n = 0(1)10$ с 7S. Начиная со значений $\mathbf{H}_0(4)$ и $\mathbf{H}_1(4)$ и используя рекуррентную формулу 12.1.9 для возрастающих значений n, получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}_0(4) = 0.13501\,46, && \mathbf{H}_6(4) = 0.05433\,54,\\
&\mathbf{H}_1(4) = 1.06972\,67, && \mathbf{H}_7(4) = 0.01510\,37,\\
&\mathbf{H}_2(4) = 1.24867\,51, && \mathbf{H}_8(4) = 0.00367\,33,\\
&\mathbf{H}_3(4) = 0.85800\,95, && \mathbf{H}_9(4) = 0.00080\,02,\\
&\mathbf{H}_4(4) = 0.42637\,41, && \mathbf{H}_{10}(4) = 0.00018\,25.\\
&\mathbf{H}_5(4) = 0.16719\,87, &&
\end{aligned}$$

Заметим, что при $n > 6$ происходит быстрая потеря верных значащих цифр. Поэтому, используя 12.1.3 для $x = 4$, находим

$$\mathbf{H}_9(4) = 0.00079\,35729, \quad \mathbf{H}_{10}(4) = 0.00015\,447630$$

и применяем рекуррентную формулу 12.1.9 для убывающих значений n. Получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}_8(4) = 0.00367\,1495, && \mathbf{H}_3(4) = 0.85800\,94,\\
&\mathbf{H}_7(4) = 0.01510\,315, && \mathbf{H}_2(4) = 1.24867\,6,\\
&\mathbf{H}_6(4) = 0.05433\,519, && \mathbf{H}_1(4) = 1.06972\,7,\\
&\mathbf{H}_5(4) = 0.16719\,87, && \mathbf{H}_0(4) = 0.13501\,4.\\
&\mathbf{H}_4(4) = 0.42637\,43, &&
\end{aligned}$$

Пример 6. Вычислить $\mathbf{L}_n(0.5)$ для $n = 0(1)5$ с 8S. Из формулы 12.2.1 находим $\mathbf{L}_5(0.5) = 9.6307462 \cdot 10^{-7}$, $\mathbf{L}_4(0.5) = 2.1212342 \cdot 10^{-5}$. Затем с помощью рекуррентной формулы 12.2.4 получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_3(0.5) = 3.82465\,03 \cdot 10^{-4},\\
&\mathbf{L}_2(0.5) = 5.36867\,34 \cdot 10^{-3},\\
&\mathbf{L}_1(0.5) = 0.05394\,2181,\\
&\mathbf{L}_0(0.5) = 0.32724\,068.
\end{aligned}$$

Пример 7. Вычислить $\mathbf{L}_n(0.5)$ для $-n = 0(1)5$ с 6S. Из табл. 12.1 и 9.8 находим $\mathbf{L}_0(0.5) = 0.327240$ и $\mathbf{L}_1(0.5) = 0.053942$. Используя рекуррентную формулу 12.2.4 для убывающих значений индекса, получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_{-1}(0.5) = 0.690562, && \mathbf{L}_{-4}(0.5) = -75.1418,\\
&\mathbf{L}_{-2}(0.5) = -1.16177, && \mathbf{L}_{-5}(0.5) = 1056.92.\\
&\mathbf{L}_{-3}(0.5) = 7.43824, &&
\end{aligned}$$

Пример 8. Вычислить $\mathbf{L}_n(x)$ для $x = 6$ и $-n = 0(1)6$ с 8S. Из табл. 12.2 и 9.8 находим $\mathbf{L}_0(6) = 67.124454$, $\mathbf{L}_1(6) = 60.725011$. Используя 12.2.4, находим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_{-1}(6) = 61.361631, && \mathbf{L}_{-4}(6) = 16.6266028,\\
&\mathbf{L}_{-2}(6) = 46.776680, && \mathbf{L}_{-5}(6) = 7.984089,\\
&\mathbf{L}_{-3}(6) = 30.159494, && \mathbf{L}_{-6}(6) = 3.32780.
\end{aligned}$$

Отметим, что существенной потери точности не происходит до $n = -6$. Однако для следующих значений n рекуррентная процедура становится неустойчивой. В этом случае прибегают к приему, аналогичному описанному в примерах 5 и 6.

Таблица 12.1. Функции Струве

x	$\mathbf{H}_0(x)$	$\mathbf{H}_1(x)$	$\int_0^x \mathbf{H}_0(t)dt$	$I_0(x)-\mathbf{L}_0(x)$	$I_1(x)-\mathbf{L}_1(x)$	$f_0(x)$	$\frac{2}{\pi}\int_x^\infty \frac{\mathbf{H}_0(t)}{t}dt$
0.0	0.00000 00	0.00000 00	0.000000	1.000000	0.000000	0.00000	1.000000
0.1	0.06359 13	0.00212 07	0.003181	0.938769	0.047939	0.09690	0.959487
0.2	0.12675 90	0.00846 57	0.012704	0.882134	0.091990	0.18791	0.919063
0.3	0.18908 29	0.01898 43	0.028505	0.829724	0.132480	0.27347	0.878819
0.4	0.25014 97	0.03359 25	0.050479	0.781198	0.169710	0.35398	0.838843
0.5	0.30955 59	0.05217 37	0.078480	0.736243	0.203952	0.42982	0.799223
0.6	0.36691 14	0.07457 97	0.112322	0.694573	0.235457	0.50134	0.760044
0.7	0.42184 24	0.10063 17	0.151781	0.655927	0.264454	0.56884	0.721389
0.8	0.47399 44	0.13012 25	0.196597	0.620063	0.291151	0.63262	0.683341
0.9	0.52303 50	0.16281 75	0.246476	0.586763	0.315740	0.69294	0.645976
1.0	0.56865 66	0.19845 73	0.301090	0.555823	0.338395	0.75005	0.609371
1.1	0.61057 87	0.23675 97	0.360084	0.527058	0.359276	0.80418	0.573596
1.2	0.64855 00	0.27742 18	0.423074	0.500300	0.378530	0.85553	0.538719
1.3	0.68235 03	0.32012 31	0.489655	0.475391	0.396290	0.90430	0.504803
1.4	0.71179 25	0.36452 80	0.559399	0.452188	0.412679	0.95066	0.471907
1.5	0.73672 35	0.41028 85	0.631863	0.430561	0.427810	0.99479	0.440086
1.6	0.75702 55	0.45704 72	0.706590	0.410388	0.441783	1.03682	0.409388
1.7	0.77261 68	0.50444 07	0.783111	0.391558	0.454694	1.07691	0.379857
1.8	0.78345 23	0.55210 21	0.860954	0.373970	0.466629	1.11518	0.351533
1.9	0.78952 36	0.59966 45	0.939643	0.357530	0.477666	1.15174	0.324450
2.0	0.79085 88	0.64676 37	1.018701	0.342152	0.487877	1.18672	0.298634
2.1	0.78752 22	0.69304 18	1.097659	0.327756	0.497329	1.22020	0.274109
2.2	0.77961 35	0.73814 96	1.176053	0.314270	0.506083	1.25230	0.250891
2.3	0.76726 65	0.78174 98	1.253434	0.301627	0.514194	1.28309	0.228992
2.4	0.75064 85	0.82351 98	1.329364	0.289765	0.521712	1.31265	0.208417
2.5	0.72995 77	0.86315 42	1.403427	0.278627	0.528685	1.34106	0.189168
2.6	0.70542 23	0.90036 74	1.475227	0.268162	0.535156	1.36840	0.171238
2.7	0.67729 77	0.93489 57	1.544392	0.258319	0.541164	1.39472	0.154618
2.8	0.64586 46	0.96649 98	1.610577	0.249056	0.546746	1.42008	0.139293
2.9	0.61142 64	0.99496 63	1.673465	0.240332	0.551933	1.44455	0.125242
3.0	0.57430 61	1.02010 96	1.732773	0.232107	0.556757	1.46816	0.112439
3.1	0.53484 44	1.04177 30	1.788248	0.224348	0.561246	1.49098	0.100857
3.2	0.49339 57	1.05983 03	1.839675	0.217022	0.565426	1.51305	0.090460
3.3	0.45032 57	1.07418 63	1.886873	0.210099	0.569319	1.53440	0.081212
3.4	0.40600 80	1.08477 74	1.929699	0.203553	0.572948	1.55508	0.073071
3.5	0.36082 08	1.09157 23	1.968046	0.197357	0.576333	1.57512	0.065992
3.6	0.31514 40	1.09457 16	2.001847	0.191488	0.579492	1.59456	0.059928
3.7	0.26935 59	1.09380 77	2.031071	0.185924	0.582442	1.61343	0.054829
3.8	0.22382 98	1.08934 44	2.055726	0.180646	0.585199	1.63176	0.050642
3.9	0.17893 12	1.08127 62	2.075858	0.175634	0.587776	1.64957	0.047311
4.0	0.13501 46	1.06972 67	2.091545	0.170872	0.590187	1.66689	0.044781
4.1	0.09242 08	1.05484 79	2.102905	0.166343	0.592445	1.68375	0.042994
4.2	0.05147 40	1.03681 86	2.110084	0.162032	0.594560	1.70017	0.041891
4.3	+0.01247 93	1.01584 22	2.113265	0.157926	0.596542	1.71616	0.041414
4.4	−0.02427 98	0.99214 51	2.112655	0.154012	0.598402	1.73176	0.041502
4.5	−0.05854 33	0.96597 44	2.108492	0.150279	0.600147	1.74697	0.042096
4.6	−0.09007 71	0.93759 56	2.101037	0.146714	0.601787	1.76182	0.043139
4.7	−0.11867 42	0.90729 01	2.090574	0.143309	0.603328	1.77632	0.044571
4.8	−0.14415 67	0.87535 28	2.077406	0.140053	0.604777	1.79049	0.046335
4.9	−0.16637 66	0.84208 90	2.061852	0.136938	0.606142	1.80434	0.048376
5.0	−0.18521 68	0.80781 19	2.044244	0.133955	0.607426	1.81788	0.050640
	$\left[{(-4)6 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)5 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)8 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)6 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)5 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)7 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)2 \atop 4}\right]$

$$\int_0^x [I_0(t)-\mathbf{L}_0(t)]dt=f_0(x)$$

Функции $\mathbf{H}_0(x)$, $\mathbf{H}_1(x)$, $\mathbf{L}_0(x)$, $\mathbf{L}_1(x)$ взяты из [12.11].

Функции $\int\limits_0^x \mathbf{H}_0(t)\,dt$, $\int\limits_0^x [I_0(t)-\mathbf{L}_0(t)]\,dt$, $\frac{2}{\pi}\int\limits_x^\infty \frac{\mathbf{H}_0(t)}{t}\,dt$ взяты из [12.8].

Таблица 12.2. **Функ Струвеции при больших значениях аргумента**

x^{-1}	$\mathbf{H}_0(x)-Y_0(x)$	$\mathbf{H}_1(x)-Y_1(x)$	$f_1(x)$	$I_0(x)-\mathbf{L}_0(x)$	$I_1(x)-\mathbf{L}_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$\langle x\rangle$
0.20	0.123301	0.659949	0.819924	0.133955	0.607426	0.793280	0.125868	5
0.19	0.117449	0.657819	0.818935	0.126683	0.610467	0.794902	0.119694	5
0.18	0.111556	0.655774	0.817981	0.119468	0.613348	0.796448	0.113505	6
0.17	0.105625	0.653818	0.817062	0.112319	0.616060	0.797910	0.107299	6
0.16	0.099655	0.651952	0.816182	0.105242	0.618598	0.799279	0.101079	6
0.15	0.093647	0.650180	0.815341	0.098241	0.620955	0.800551	0.094843	7
0.14	0.087602	0.648504	0.814541	0.091318	0.623129	0.801721	0.088593	7
0.13	0.081521	0.646927	0.813785	0.084474	0.625119	0.802787	0.082328	8
0.12	0.075404	0.645452	0.813074	0.077706	0.626927	0.803750	0.076051	8
0.11	0.069254	0.644081	0.812411	0.071010	0.628558	0.804611	0.069761	9
0.10	0.063072	0.642817	0.811796	0.064379	0.630018	0.805374	0.063460	10
0.09	0.056860	0.641663	0.811232	0.057805	0.631315	0.806047	0.057147	11
0.08	0.050620	0.640622	0.810722	0.051279	0.632457	0.806634	0.050824	13
0.07	0.044354	0.639696	0.810266	0.044793	0.633450	0.807140	0.044492	14
0.06	0.038064	0.638888	0.809866	0.038340	0.634302	0.807572	0.038152	17
0.05	0.031753	0.638200	0.809525	0.031912	0.635016	0.807933	0.031805	20
0.04	0.025425	0.637634	0.809244	0.025506	0.635596	0.808225	0.025451	25
0.03	0.019082	0.637191	0.809023	0.019116	0.636045	0.808450	0.019093	33
0.02	0.012727	0.636874	0.808865	0.012738	0.636365	0.808611	0.012731	50
0.01	0.006366	0.636683	0.808770	0.006367	0.636556	0.808706	0.006366	100
0.00	0.000000	0.636620	0.808738	0.000000	0.636620	0.808738	0.000000	∞
	$\left[{(-6)5 \atop 3}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 3}\right]$	$\left[{(-6)8 \atop 3}\right]$	$\left[{(-5)1 \atop 3}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 3}\right]$	$\left[{(-5)1 \atop 3}\right]$	$\left[{(-6)2 \atop 3}\right]$	

$$\int_0^x [\mathbf{H}_0(t)-Y_0(t)]dt=\frac{2}{\pi}\ln x+f_1(x)$$

$$\int_0^x [\mathbf{L}_0(t)-I_0(t)]dt=\frac{2}{\pi}\ln x+f_2(x)$$

$$\int_x^\infty \left[\frac{\mathbf{H}_0(t)-Y_0(t)}{t}\right]dt=f_3(x)$$

$\langle x\rangle$ — ближайшее к x целое число.

Рекуррентная формула 12.1.9 с начальными значаениями $\mathbf{H}_0(x)$ и $\mathbf{H}_1(x)$ может применяться для вычисления $\mathbf{H}_n(x)$ при $n<0$. Если $n<x/2$, $\mathbf{H}_n(x)$ можно вычислять рекурренцией «вперед». При $n>x/2$ этот метод неустойчив. В этом случае выбирая $k\gg x$, вычисляют $\mathbf{H}_k(x)$ и $\mathbf{H}_{k+1}(x)$ по формуле 12.1.3 и затем применяют 12.1.9 «назад».

Если $n>0$, $\mathbf{L}_n(x)$ может вычисляться с помощью рекуррснции «вперед». При $n<0$ для $\mathbf{L}_n(x)$ применяется рекуррснция «назад», если $\mathbf{L}_n(x)$ возрастает, и рекуррснция «вперед», если $\mathbf{L}_n(x)$ убывает.

См. примеры 4 — 8.

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

12.1. Cook R. K. Some properties of Struve functions. — J. Washington Acad. Sci., 1957, **47**, № 11, p. 365—368.

12.2. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V. 2, Ch. 7. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974, Т.II.

12.3. Gray A. Mathews G. B. A treatise on Bessel functions. — N.Y.: Macmillan Co., 1931, Ch. 14. Русский перевод: Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. — М.: ИЛ, 1953.

12.4. McLachlan N. W. Bessel functions for engineers. — Oxford: Ch. 4 Clarendon Press, 1955, Ch. 4.

12.5. Oberhettinger F. On some expansions for Bessel integral functions. — J. Research NBS, 1957, **59**. — Report № 2786.

12.6. Petiau G. La théorie des fonctions de Bessel. — P.: Centre National de la Recherchs Scientifique, 1955, Ch. 10.

12.7. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1958, Ch. 10. Русский перевод: Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949, Ч.1.

Таблицы

12.8. Abramowitz M. Tables of integrals of Struve functions. — J. Math. Phys., 1950, **29**, p. 49—51.

12.9. Horton C. W. On the extension of some Lommel integrals to Struve functions with an application to acoustic radiation. — J. Math. Phys., 1950, **29**, p. 31—37.

12.10. Horton C. W. A short table of Struve functions and of some integrals involving Bessel and Struve functions. — J. Math. Phys., 1950, **29**, p. 56—58.

12.11. Mathematical Tables Project. Table of the Struve functions $\mathbf{L}_\nu(x)$ and $\mathbf{H}_\nu(x)$. — J. Math. Phys., 1946, **25**, 252—259.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

12.12. Карпов К. А., Киреева И. Е. Таблицы функций Вебера. — М.: ВЦ АН СССР, 1959, Т.I.

12.13. Карпов К. А., Чистова Э. А. Таблицы функций Вебера. — М.: ВЦ АН СССР, 1961, Т.II; 1963, Т.III.

12.14. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

Глава 13

ВЫРОЖДЕННЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Л. СЛЕЙТЕР

СОДЕРЖАНИЕ

13.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ КУММЕРА И ФУНКЦИЙ УИТТЕКЕРА

Уравнение Куммера

13.1.1. $z\dfrac{d^2w}{dz^2} + (b - z)\dfrac{dw}{dz} - aw = 0.$

Это уравнение имеет регулярную особенность при $z = 0$ и иррегулярную особенность в точке ∞. Первым линейно независимым решением является

Функция Куммера

13.1.2. $M(a, b, z) =$

$$= 1 + \frac{az}{b} + \frac{(a)_2 z^2}{(b)_2 2!} + \ldots + \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} + \ldots,$$

где $(a)_n = a(a + 1)(a + 2)\ldots(a + n - 1)$, $(a)_0 = 1$.

Второе решение имеет вид

13.1.3. $U(a, b, z) =$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi b}\left\{\frac{M(a, b, z)}{\Gamma(1 + a - b)\Gamma(b)} - z^{1-b}\frac{M(1 + a - b, 2 - b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2 - b)}\right\}.$$

Параметры (m, n — положительные целые)	$M(a, b, z)$
$b \neq -n,\ a \neq -m$	сходящийся ряд для всех значений a, b, z
$b \neq -n,\ a = -m$	многочлен степени m относительно z
$b = -n,\ a \neq -m$ $b = -n,\ a = -m$ $m > n$	простой полюс при $b = -n$
$b = -n,\ a = -m$ $m \leqslant n$	не определена

Функция $U(a, b, z)$ определена также и при $b \to \pm n$. При $|z| \to \infty$

13.1.4. $M(a, b, z) = \dfrac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b}[1 + O(|z|^{-1})]$

$(\mathrm{Re}\, z > 0)$,

13.1.5. $M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}(-z)^{-a}[1+O(|z|^{-1})]$ $(\mathrm{Re}\, z < 0)$.

Функция $U(a, b, z)$ является многозначной. Ее главная ветвь определяется условием $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

Логарифмическое решение

13.1.6.
$$U(a, n+1, z) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!\Gamma(a-n)}\Bigg[M(a, n+1, z)\ln z + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r z^r}{(n+1)_r r!}\{\psi(a+r)-\psi(1+r)-\psi(1+n+r)\}\Bigg] + \frac{(n-1)!}{\Gamma(a)} z^{-n} M(a-n, 1-n, z)_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Последняя функция представляет собой сумму n слагаемых. Полагают, что она равна нулю при $n = 0$, кроме того, $\psi(a) = \Gamma'(a)/\Gamma(a)$.

13.1.7. $U(a, 1-n, z) = z^n U(a+n, 1+n, z)$.

При $\mathrm{Re}\, z \to \infty$

13.1.8. $U(a, b, z) = z^{-a}[1 + O(|z|^{-1})]$.

Аналитическое продолжение

13.1.9.
$$U(a, b, ze^{\pm\pi i}) = \frac{\pi}{\sin \pi b} e^{-z}\left\{\frac{M(b-a, b, z)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - \frac{e^{\pm\pi i(1-b)} z^{1-b} M(1-a, 2-b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)}\right\}.$$

Нужно взять либо верхний, либо нижний знак в обеих частях равенства.

13.1.10.
$$U(a, b, ze^{2\pi in}) = [1 - e^{-2\pi ibn}]\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} M(a, b, z) + e^{-2\pi ibn} U(a, b, z).$$

Другие обозначения

Вместо обозначения $M(a, b, z)$ иногда употребляются обозначения ${}_1F_1(a; b; z)$ или $\Phi(a; b; z)$, а вместо $U(a, b, z)$ — обозначения $z^{-a}{}_2F_0\left(a, 1+a-b; -\frac{1}{z}\right)$ или $\Psi(a; b; z)$.

Общее решение

13.1.11. $y = AM(a, b, z) + BU(a, b, z)$,

где A и B — произвольные постоянные, $b \neq -n$.

Частные решения

13.1.12. $y_1 = M(a, b, z)$.

13.1.13. $y_2 = z^{1-b} M(1+a-b, 2-b, z)$.

13.1.14. $y_3 = e^z M(b-a, b, -z)$.

13.1.15. $y_4 = z^{1-b} e^z M(1-a, 2-b, -z)$.

13.1.16. $y_5 = U(a, b, z)$.

13.1.17. $y_6 = z^{1-b} U(1+a-b, 2-b, z)$.

13.1.18. $y_7 = e^z U(b-a, b, -z)$.

13.1.19. $y_8 = z^{1-b} e^z U(1-a, 2-b, -z)$.

Вронскианы

Если $W\{m, n\} = y_m y_n' - y_n y_m'$ и

$$\varepsilon = \mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}\, z) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathrm{Im}\, z > 0, \\ -1 & \text{при } \mathrm{Im}\, z \leqslant 0, \end{cases}$$

то имеют место формулы

13.1.20. $W\{1, 2\} = W\{3, 4\} = W\{1, 4\} = -W\{2, 3\} = (1-b) z^{-b} e^z$.

13.1.21. $W\{1, 3\} = W\{2, 4\} = W\{5, 6\} = W\{7, 8\} = 0$.

13.1.22. $W\{1, 5\} = -\Gamma(b) z^{-b} e^z / \Gamma(a)$.

13.1.23. $W\{1, 7\} = \Gamma(b) e^{\varepsilon\pi ib} z^{-b} e^z / \Gamma(b-a)$.

13.1.24. $W\{2, 5\} = -\Gamma(2-b) z^{-b} e^z / \Gamma(1+a-b)$.

13.1.25. $W\{2, 7\} = -\Gamma(2-b) z^{-b} e^z / \Gamma(1-a)$.

13.1.26. $W\{5, 7\} = e^{\varepsilon\pi i(b-a)} z^{-b} e^z$.

Преобразования Куммера

13.1.27. $M(a, b, z) = e^z M(b-a, b, -z)$.

13.1.28. $z^{1-b} M(1+a-b, 2-b, z) = z^{1-b} e^z M(1-a, 2-b, -z)$.

13.1.29. $U(a, b, z) = z^{1-b} U(1+a-b, 2-b, z)$.

13.1.30. $e^z U(b-a, b, -z) = e^{\varepsilon\pi i(1-b)} e^z z^{1-b} U(1-a, 2-b, -z)$.

Уравнение Уиттекера

13.1.31.
$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{(1/4 - \mu^2)}{z^2}\right] w = 0.$$

Его решениями являются

Функции Уиттекера

13.1.32. $M_{k,\mu}(z) = e^{-z/2} z^{1/2+\mu} M\left(\frac{1}{2} + \mu - k, 1 + 2\mu, z\right)$.

13.1.33. $W_{k,\mu}(z) = e^{-z/2} z^{1/2+\mu} U\left(\frac{1}{2} + \mu - k, 1 + 2\mu, z\right)$

$(-\pi < \arg z \leqslant \pi,\ k = b/2 - a,\ \mu = b/2 - 1/2)$.

13.1.34.
$$W_{k,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - k\right)} M_{k,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - k\right)} M_{k,-\mu}(z).$$

Общее вырожденное уравнение

13.1.35.
$$w'' + \left[\frac{2A}{Z} + 2f' + \frac{bh'}{h} - h' - \frac{h''}{h'}\right] w' + \left[\left(\frac{bh'}{h} - h' - \frac{h''}{h'}\right)\left(\frac{A}{Z} + f'\right) + \frac{A(A-1)}{Z^2} + \frac{2Af'}{Z} + f'' + f'^2 - \frac{ah'^2}{h}\right] w = 0.$$

Его решениями являются функции

13.1.36. $Z^{-A} e^{-f(Z)} M(a, b, h(Z))$,

13.1.37. $Z^{-A} e^{-f(Z)} U(a, b, h(Z))$.

13.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Re b > Re a > 0

13.2.1. $$\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(b)}M(a,\ b,\ z)=\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}\,dt.$$

13.2.2. $$\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(b)}M(a,\ b,\ z)=2^{1-b}e^{z/2}\int_{-1}^{+1} e^{-zt/2}(1+t)^{b-a-1}(1-t)^{a-1}\,dt.$$

13.2.3. $$\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(b)}M(a,\ b,\ z)=2^{1-b}e^{z/2}\int_0^{\pi} e^{(-z/2)\cos\theta}\sin^{b-1}\theta\,\mathrm{ctg}^{b-2a}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta.$$

13.2.4. $$\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(b)}M(a,\ b,\ z)=e^{-Az}\int_A^B e^{zt}(t-A)^{a-1}(B-t)^{b-a-1}\,dt.$$

Re a > 0, Re z > 0, $A=B-1$

13.2.5. $$\Gamma(a)\,U(a,\ b,\ z)=\int_0^{\infty} e^{-zt}t^{a-1}(1+t)^{b-a-1}\,dt.$$

13.2.6. $$\Gamma(a)\,U(a,\ b,\ z)=e^{z}\int_1^{\infty} e^{-zt}(t-1)^{a-1}t^{b-a-1}\,dt.$$

13.2.7. $$\Gamma(a)\,U(a,\ b,\ z)=2^{1-b}e^{z/2}\int_0^{\infty} e^{-z\,\mathrm{ch}\,\theta/2}\,\mathrm{sh}^{b-1}\,\mathrm{cth}^{b-2a}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta.$$

13.2.8. $$\Gamma(a)\,U(a,\ b,\ z)=e^{Az}\int_A^{\infty} e^{-zt}(t-A)^{a-1}(t+B)^{b-a-1}\,dt.$$

$$(A=1-B).$$

Аналогичные интегралы для $M_{k,\mu}(z)$ и $W_{k,\mu}(z)$ можно получить при помощи 13.1.32 и 13.1.33.

Контурные интегралы типа Барнса

13.2.9. $$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)}M(a,\ b,\ z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)}{\Gamma(b+s)}(-z)^s\,ds,$$

где $|\arg(-z)|<\frac{\pi}{2}$, $a,\ b\neq 0,\ -1,\ -2,\ldots$ Контур должен отделять полюсы функции $\Gamma(-s)$ от полюсов функции $\Gamma(a+s)$; c принимает конечные значения.

13.2.10. $$\Gamma(a)\Gamma(1+a-b)z^a\,U(a,\ b,\ z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(-s)\,\Gamma(a+s)\,\Gamma(1+a-b+s)z^{-s}\,ds,$$

где $|\arg z|<\frac{3\pi}{2}$, $a\neq 0,\ -1,\ -2,\ldots,\ b-a\neq 1,\ 2,\ 3,\ldots$ Контур должен отделять полюсы функции $\Gamma(-s)$ от полюсов функций $\Gamma(a+s)$ и $\Gamma(1+a-b+s)$.

13.3. СВЯЗЬ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ (СМ. ГЛ. 9 И 10)

Функции Бесселя как предельные случаи (b и z фиксированы)

13.3.1. $$\lim_{a\to\infty}\{M(a,\ b,\ z/a)/\Gamma(b)\}=z^{(1-b)/2}I_{b-1}(2\sqrt{z}).$$

13.3.2. $$\lim_{a\to\infty}\{M(a,\ b,\ -z/a)/\Gamma(b)\}=z^{(1-b)/2}J_{b-1}(2\sqrt{z}).$$

13.3.3. $$\lim_{a\to\infty}\{\Gamma(1+a-b)\,U(a,b,z/a)\}=2z^{(1-b)/2}K_{b-1}(2\sqrt{z}).$$

13.3.4. $$\lim_{a\to\infty}\{\Gamma(1+a-b)\,U(a,\ b,\ -z/a)\}=-\pi i e^{\pi ib}z^{(1-b)/2}H^{(1)}_{b-1}(2\sqrt{z})\quad(\mathrm{Im}\,z>0).$$

13.3.5. $$\lim_{a\to\infty}\{\Gamma(1+a-b)\,U(a,\ b,\ -z/a)\}=\pi i e^{-\pi ib}z^{(1-b)/2}H^{(2)}_{b-1}(2\sqrt{z})\quad(\mathrm{Im}\,z<0).$$

Разложения по функциям Бесселя

13.3.6. $$M(a,\ b,\ z)=e^{z/2}\Gamma\left(b-a-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{4}\right)^{a-b+1/2}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2b-2a-1)_n(b-2a)_n(b-a-1/2+n)}{n!(b)_n}\times(-1)^n I_{b-a-1/2+n}\left(\frac{z}{2}\right)\quad(b\neq 0,\ -1,\ -2,\ldots).$$

13.3.7. $$\frac{M(a,\ b,\ z)}{\Gamma(b)}=e^{z/2}\left(\frac{1}{2}bz-az\right)^{1/2-b/2}\times\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{1}{2}z\right)^{n/2}(b-2a)^{-n/2}J_{b-1+n}(\sqrt{2zb-4za}),$$

где

$$A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ A_2 = \frac{1}{2} b,$$

$$(n+1) A_{n+1} = (n+b-1) A_{n-1} + (2a-b) A_{n-2},$$

a — действительное

13.3.8. $$\frac{M(a,\ b,\ z)}{\Gamma(b)} = e^{hz} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n (-az)^{(1-b-n)/2} \times J_{b-1+n}(2\sqrt{-az}),$$

где

$$C_0,\ C_1 = -bh,\ C_2 = -\frac{1}{2}(2h-1)a + \frac{1}{2} b(b+1)h^2,$$

$$(n+1) C_{n+1} = [(1-2h)n - bh] C_n + [(1-2h)a - h(h-1)(b+n-1)] C_{n-1} - h(h-1) a C_{n-2},$$

h — действительное.

13.3.9. $M(a,\ b,\ z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(a,\ b) I_n(z),$

где

$$C_0 = 1,\ C_1(a,\ b) = 2a/b,$$

$$C_{n+1}(a,\ b) = 2aC_n(a+1,\ b+1)/b - C_{n-1}(a,\ b).$$

13.4. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

13.4.1. $(b-a) M(a-1, b, z) + (2a-b+z) M(a, b, z) - aM(a+1,\ b,\ z) = 0.$

13.4.2. $b(b-1) M(a,\ b-1,\ z) + b(1-b-z) M(a,\ b,\ z) + z(b-a) M(a,\ b+1,\ z) = 0.$

13.4.3. $(1+a-b) M(a,\ b,\ z) - aM(a+1,\ b,\ z) + (b-1) M(a,\ b-1,\ z) = 0.$

13.4.4. $bM(a,\ b,\ z) - bM(a-1,\ b,\ z) - zM(a,\ b+1,\ z) = 0.$

13.4.5. $b(a+z) M(a,\ b,\ z) + z(a-b) M(a,\ b+1,\ z) - abM(a+1,\ b,\ z) = 0.$

13.4.6. $(a-1+z) M(a, b, z) + (b-a) M(a-1, b, z) + (1-b) M(a,\ b-1,\ z) = 0.$

13.4.7. $b(1-b+z) M(a,\ b,\ z) + b(b-1) M(a-1, b-1,\ z) - azM(a+1,\ b+1,\ z) = 0$

13.4.8. $M'(a,\ b,\ z) = \frac{a}{b} M(a+1,\ b+1,\ z).$

13.4.9. $\frac{d^n}{dz^n}\{M(a,\ b,\ z)\} = \frac{(a)_n}{(b)_n} M(a+n,\ b+n,\ z).$

13.4.10. $aM(a+1,\ b,\ z) = aM(a,\ b,\ z) + zM'(a,\ b,\ z).$

13.4.11. $(b-a) M(a-1,\ b,\ z) = (b-a-z) M(a,\ b,\ z) + zM'(a,\ b,\ z).$

13.4.12. $(b-a) M(a,\ b+1,\ z) = bM(a,\ b,\ z) - bM'(a,\ b,\ z).$

13.4.13. $(b-1) M(a,\ b-1,\ z) = (b-1) M(a,\ b,\ z) + zM'(a,\ b,\ z).$

13.4.14. $(b-1) M(a-1,\ b-1,\ z) = (b-1-z) M(a,\ b,\ z) + zM'(a,\ b,\ z).$

13.4.15. $U(a-1,\ b,\ z) + (b-2a-z) U(a,\ b,\ z) + a(1+a-b) U(a+1,\ b,\ z) = 0.$

13.4.16. $(b-a-1) U(a,\ b-1,\ z) + (1-b-z) U(a,\ b,\ z) + zU(a,\ b+1,\ z) = 0.$

13.4.17. $U(a, b, z) - aU(a+1, b, z) - U(a, b-1, z) = 0$

13.4.18. $(b-a) U(a,\ b,\ z) + U(a-1,\ b,\ z) - zU(a,\ b+1,\ z) = 0.$

13.4.19. $(a+z) U(a,\ b,\ z) - zU(a,\ b+1,\ z) + a(b-a-1) U(a+1,\ b,\ z) = 0.$

13.4.20. $(a+z-1) U(a,\ b,\ z) - U(a-1,\ b,\ z) + (1+a-b) U(a,\ b-1,\ z) = 0.$

13.4.21. $U'(a,\ b,\ z) = -aU(a+1,\ b+1,\ z).$

13.4.22. $\frac{d^n}{dz^n}\{U(a, b, z)\} = (-1)^n (a)_n U(a+n,\ b+n,\ z).$

13.4.23. $a(1+a-b) U(a+1,\ b,\ z) = aU(a,\ b,\ z) + zU'(a,\ b,\ z).$

13.4.24. $(1+a-b) U(a,\ b-1,\ z) = (1-b) U(a,\ b,\ z) - zU'(a,\ b,\ z).$

13.4.25. $U(a,\ b+1,\ z) = U(a,\ b,\ z) - U'(a,\ b,\ z).$

13.4.26. $U(a-1,\ b,\ z) = (a-b+z) U(a,\ b,\ z) - zU'(a,\ b,\ z).$

13.4.27. $U(a-1,\ b-1,\ z) = (1-b+z) U(a,\ b,\ z) - zU'(a,\ b,\ z).$

13.4.28. $2\mu M_{k-1/2,\ \mu-1/2}(z) - z^{1/2} M_{k,\ \mu}(z) = 2\mu M_{k+1/2,\ \mu-1/2}(z).$

13.4.29. $(1+2\mu+2k) M_{k+1,\ \mu}(z) - (1+2\mu-2k) M_{k-1,\ \mu}(z) = 2(2k-z)\ M_{k,\mu}(z)$

13.4.30. $W_{k+1/2,\,\mu}(z) - z^{1/2}W_{k,\,\mu+1/2}(z) + (k+\mu)\,W_{k-1/2,\,\mu}(z) = 0.$

13.4.31. $(2k - z)\,W_{k,\mu}(z) + W_{k+1,\mu}(z) = \left(\mu - k + \frac{1}{2}\right)\left(\mu + k - \frac{1}{2}\right)W_{k-1,\,\mu}(z).$

13.4.32. $zM'_{k,\mu}(z) = \left(\frac{z}{2} - k\right)M_{k,\mu}(z) + \left(\frac{1}{2} + \mu + k\right)M_{k+1,\,\mu}(z).$

13.4.33. $zW'_{k,\mu}(z) = \left(\frac{z}{2} - k\right)W_{k,\mu}(z) - W_{k+1,\,\mu}(z).$

13.5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Разложения при больших $|z|$
(a, b фиксированы)

13.5.1.
$$\frac{M(a,b,z)}{\Gamma(b)} = \frac{e^{\pm i\pi a}z^{-a}}{\Gamma(b-a)} \times \left\{\sum_{n=0}^{R-1}\frac{(a)_n(1+a-b)_n}{n!}(-z)^{-n} + O(|z|^{-R})\right\} + \frac{e^z z^{a-b}}{\Gamma(a)}\left\{\sum_{n=0}^{S-1}\frac{(b-a)_n(1-a)_n}{n!}z^{-n} + O(|z|^{-S})\right\},$$

где верхний знак берется при $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$, а нижний знак — при $-3\pi/2 < \arg z \leqslant -\pi/2$.

13.5.2.
$$U(a,b,z) = z^{-a}\left\{\sum_{n=0}^{R-1}\frac{(a)_n(1+a-b)_n}{n!}(-z)^{-n} + O(|z|^{-R})\right\} \quad \left(-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right).$$

Множители сходимости для остаточных членов

13.5.3.
$$O(|z|^{-R}) = \frac{(a)_R(1+a-b)_R}{R!}(-z)^{-R} \times \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{8} + \frac{b}{4} - \frac{a}{2} + \frac{z}{4} - \frac{R}{4}}{z} + O(|z|^{-2})\right],$$

13.5.4.
$$O(|z|^{-S}) = \frac{(b-a)_S(1-a)_S}{S!}z^{-S} \times \left[\frac{2}{3} - b + 2a + z - S + O(|z|^{-1})\right],$$

члены являются наименьшими в разложениях 13.5.1 и 13.5.2.

Представления при малых z
(a, b фиксированы)

13.5.5. При $|z| \to 0$ имеем $M(a, b, z) \to 1$ $(b \neq n)$.

13.5.6.
$$U(a,b,z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}z^{1-b} + O(|z|^{\operatorname{Re} b-2}) \quad (\operatorname{Re} b \geqslant 2,\ b \neq 2).$$

13.5.7.
$$U(a,b,z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}z^{1-b} + O(|\ln z|) \ (b = 2).$$

13.5.8.
$$U(a,b,z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}z^{1-b} + O(1) \quad (1 < \operatorname{Re} b < 2).$$

13.5.9.
$$U(a,b,z) = -\frac{1}{\Gamma(a)}[\ln z + \psi(a)] + O(|z\ln z|) \quad (b = 1).$$

13.5.10.
$$U(a,b,z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} + O(|z|^{1-\operatorname{Re} b}) \quad (0 < \operatorname{Re} b < 1).$$

13.5.11.
$$U(a,b,z) = \frac{1}{\Gamma(1+a)} + O(|z\ln z|) \quad (b = 0).$$

13.5.12.
$$U(a,b,z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} + O(|z|) \quad (\operatorname{Re} b \leqslant 0,\ b \neq 0).$$

Представления при больших a
(b, z фиксированы)

13.5.13.
$$M(a,b,z) = \Gamma(b)\,e^{z/2}\left(\frac{bz}{2} - az\right)^{1/2-b/2} \times J_{b-1}(\sqrt{2bz - 4az})\left[1 + O\left(\left|\frac{b}{2} - a\right|^{-\sigma}\right)\right],$$

где $|z| = \left|\frac{b}{2} - a\right|^{\rho}$ и $\sigma = \min\left(1 - \rho,\ \frac{1}{2} - \frac{3\rho}{2}\right)$ $(0 \leqslant \rho < 1/3)$.

13.5.14.
$$M(a,b,x) = \Gamma(b)\,e^{x/2}\left(\frac{bx}{2} - ax\right)^{1/4-b/2} \times \pi^{-1/2}\cos\left(\sqrt{2bx - 4ax} - \frac{b\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \times \left[1 + O\left(\left|\frac{b}{2} - a\right|^{-1/2}\right)\right]$$

($a \to -\infty$, b — ограниченное, x — действительное).

13.5.15.
$$U(a,b,z) = \Gamma\left(\frac{b}{2} - a + \frac{1}{2}\right)e^{z/2}z^{1/2-b/2}\left[\cos(a\pi)\,J_{b-1}(\sqrt{2bz - 4az}) - \sin(a\pi)\,Y_{b-1}(\sqrt{2bz - 4az})\right]\left[1 + O\left(\left|\frac{b}{2} - a\right|^{-\sigma}\right)\right],$$

где σ определено в 13.5.13.

13.5.16. $U(a, b, x) =$

$$= \Gamma\left(\frac{b}{2} - a + \frac{1}{4}\right) \pi^{-1/2} e^{x/2} x^{1/4-b/2} \times$$

$$\times \cos\left(\sqrt{2bx - 4ax} - \frac{b\pi}{2} + a\pi + \frac{\pi}{4}\right) \times$$

$$\times \left[1 + O\left(\left|\frac{b}{2} - a\right|^{-1/2}\right)\right]$$

$a \to -\infty$, b — ограниченное, x — действительное).

Представления при больших действительных a, b, x

Если $\operatorname{ch}^2 \theta = x/(2b - 4a)$, так что $x \gg 2b - a \gg 1$, то

13.5.17. $M(a, b, x) = \Gamma(b) \sin(a\pi) \times$

$$\times \exp\left[(b - 2a)\left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\theta - \theta + \operatorname{ch}^2 \theta\right)\right] \times$$

$$\times [(b - 2a) \operatorname{ch} \theta]^{1-b} \left[\pi\left(\frac{b}{2} - a\right) \operatorname{sh} 2\theta\right]^{-1/2} \times$$

$$\times \left[1 + O\left(\left|\frac{b}{2} - a\right|^{-1}\right)\right].$$

13.5.18. $U(a, b, x) =$

$$= \exp\left[(b - 2a)\left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\theta - \theta + \operatorname{ch}^2 \theta\right)\right] \times$$

$$\times [(b - 2a) \operatorname{ch} \theta]^{1-b} \left[\left(\frac{b}{2} - a\right) \operatorname{sh} 2\theta\right]^{-1/2} \times$$

$$\times \left[1 \quad O\left(\left|\frac{b}{2} - a\right|^{-1}\right)\right].$$

Если $x = (2b - 4a)[1 + t/(b - 2a)^{2/3}]$, так что $x \sim 2b - 4a$, то

13.5.19. $M(a, b, x) = e^{x/2}(b - 2a)^{2/3-b}\Gamma(b) \times$

$$\times [\operatorname{Ai}(t) \cos(a\pi) + \operatorname{Bi}(t) \sin(a\pi) +$$

$$+ O\left(\left|\frac{b}{2} - a\right|^{-2/3}\right)\right].$$

13.5.20. $U(a, b, x) = e^{x/2+a-b/2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \pi^{-1/2} \times$

$$\times x6^{-1/6}\left\{1 - t\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)(bx - 2ax)^{-1/3} 3^{1/3} \pi^{-1/2} +\right.$$

$$\left. + O\left(\left|\frac{b}{2} - a\right|^{-2/3}\right)\right\}.$$

Если $\cos^2 \theta = x/(2b - 4a)$, так что $2b - 4a > x > 0$, то

13.5.21. $M(a, b, x) =$

$$= \Gamma(b) \exp\{(b - 2a) \cos^2 \theta\} \times$$

$$\times [(b - 2a) \cos \theta]^{1-b} \left[\pi\left(\frac{b}{2} - a\right) \sin 2\theta\right]^{-1/2} \times$$

$$\times \left[\sin(a\pi) + \sin\left\{\left(\frac{b}{2} - a\right)(2\theta - \sin 2\theta) + \frac{\pi}{4}\right\} +\right.$$

$$\left. + O\left(\left|\frac{b}{2} - a\right|^{-1}\right)\right].$$

13.5.22. $U(a, b, x) = \exp[(b - 2a) \cos^2 \theta] \times$

$$\times [(b - 2a) \cos \theta]^{1-b} \left[\left(\frac{b}{2} - a\right) \sin 2\theta\right]^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{\sin\left[\left(\frac{b}{2} - a\right)(2\theta - \sin 2\theta) + \frac{\pi}{4}\right] +\right.$$

$$\left. + O\left(\left|\frac{b}{2} - a\right|^{-1}\right)\right\}.$$

13.6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

	$M(a, b, x)$			Соотношения	Функции
	a	b	x		
13.6.1.	$\nu + \frac{1}{2}$	$2\nu + 1$	$2iz$	$\Gamma(1 + \nu) e^{iz} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(x)$	Бесселя
13.6.2.	$-\nu + \frac{1}{2}$	$-2\nu + 1$	$2iz$	$\Gamma(1 - \nu) e^{iz} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} [\cos(\nu\pi) J_\nu(z) - \sin(\nu\pi) Y_\nu(z)]$	«
13.6.3.	$\nu + \frac{1}{2}$	$2\nu + 1$	$2z$	$\Gamma(1 + \nu) e^{z} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} I_\nu(z)$	Модифицированная Бесселя
13.6.4.	$n + 1$	$2n + 2$	$2iz$	$\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right) e^{iz} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1/2} J_{n+1/2}(z)$	Сферическая Бесселя
13.6.5.	$-n$	$-2n$	$2iz$	$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) e^{iz} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1/2} J_{-n-1/2}(z)$	«
13.6.6.	$n + 1$	$2n + 2$	$2z$	$\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right) e^{z} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1/2} I_{n+1/2}(z)$	«

Продолжение таблицы

	$M(a,\ b,\ z)$			Соотношения	Функции
	a	b	z		
13.6.7.	$n+\frac{1}{2}$	$2n+1$	$-2\sqrt{ix}$	$\Gamma(1+n)\, e^{-2x\pi}\left(\frac{ix\pi}{2}\right)^{n} (\mathrm{ber}_n x + i\,\mathrm{bei}_n x)$	**Кельвина**
13.6.8.	$L+1-i\eta$	$2L+2$	$2ix$	$e^{ix}F_L(\eta,\ x)\, x^{-L-1}/C_L(\eta)$	**Волновые Кулона**
13.6.9.	$-n$	$\alpha+1$	x	$\frac{n!}{(\alpha+1)_n} L_n^{(\alpha)}(x)$	**Лагерра**
13.6.10.	a	$a+1$	$-x$	$ax^{-a}\gamma(a,\ x)$	**Неполная гамма-функция**
13.6.11.	$-n$	$1+\nu-n$	x	$\frac{(n!)^{1/2}x^{n/2}}{(1+\nu-n)_n}\, \rho_n(\nu,\ x)$	**Пуассона — Шарлье**
13.6.12.	a	a	z	e^z	**Экспоненциальная**
13.6.13.	1	2	$-2iz$	$\frac{e^{-iz}}{z} \sin z$	**Тригонометрическая**
13.6.14.	1	2	$2z$	$\frac{e^z}{z}\, \mathrm{sh}\, z$	**Гиперболическая**
13.6.15.	$-\frac{\nu}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{z^2}{2}$	$2^{-1/2}\exp\left(\frac{z^2}{4}\right)E_\nu^{(0)}(z)$	**Вебера или параболического цилиндра**
13.6.16.	$\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{z^2}{2}$	$\frac{\exp\left(\frac{z^2}{4}\right)}{2z}\, E_\nu^{(1)}(z)$	
13.6.17.	$-n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{n!}{(2n)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n} He_{2n}(x)$	**Эрмита**
13.6.18.	$-n$	$\frac{3}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{n!}{(2n+1)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n}\frac{1}{x}\, He_{2n+1}(x)$	«
13.6.19.	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-x^2$	$\frac{\pi^{1/2}}{2x}\, \mathrm{erf}\, x$	**Интеграл вероятностей**
13.6.20.	$\frac{m}{2}+\frac{1}{2}$	$1+n$	r^2	$\frac{n!\ r^{-2n+m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}\, e^{r^2}T(m,\ n,\ r)$	**Торонто**

	$U(a,\ b,\ z)$			Соотношения	Функции
	a	b	z		
13.6.21.	$\nu+\frac{1}{2}$	$2\nu+1$	$2z$	$\pi^{-1/2}e^z(2z)^{-\nu}K_\nu(z)$	**Модифицированная Бесселя**
13.6.22.	$\nu+\frac{1}{2}$	$2\nu+1$	$-2iz$	$\frac{1}{2}\,\pi^{1/2}e^{i[\pi(\nu+1/2)-z]}\,(2z)^{-\nu}\, H_\nu^{(1)}(z)$	**Ханкеля**
13.6.23.	$\nu+\frac{1}{2}$	$2\nu+1$	$2iz$	$\frac{1}{2}\,\pi^{1/2}e^{-i[\pi(\nu+1/2)-z]}\,(2z)^{-\nu}\, H_\nu^{(2)}(z)$	«
13.6.24.	$n+1$	$2n+2$	$2z$	$\pi^{-1/2}e^z(2z)^{-n-1/2}\, K_{n+1/2}(z)$	**Сферическая Бесселя**
13.6.25.	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}z^{3/2}$	$\pi^{1/2}z^{-1}\exp\left(\frac{2z^{3/2}}{3}\right)2^{-2/3}3^{5/6}\,\mathrm{Ai}(z)$	**Эйри**

Продолжение таблицы

	$U(a, b, z)$			Соотношения	Функции
	a	b	z		
13.6.26.	$n+\frac{1}{2}$	$2n+1$	$\sqrt{i}x$	$i^n\pi^{-1/2}e^{\sqrt{i}x}(2\sqrt{i}\,x)^{-n}[\mathrm{ker}_n x + i\,\mathrm{kei}_n x]$	**Кельвина**
13.6.27.	$-n$	$\alpha+1$	x	$(-1)^n n!\, L_n^{(\alpha)}(x)$	**Лагерра**
13.6.28.	$1-a$	$1-a$	x	$e^x\Gamma(a, x)$	Неполная гамма-функция
13.6.29.	1	1	$-x$	$-e^{-x}\,\mathrm{Ei}\,x$	Интегральная показательная
13.6.30.	1	1	x	$e^x E_1(x)$	«
13.6.31.	1	1	$-\ln x$	$-\frac{1}{2}\,\mathrm{li}\,x$	Интегральный логарифм
13.6.32.	$\frac{m}{2}-n$	$1+m$	x	$\Gamma\left(1+n-\frac{m}{2}\right)e^{x-\pi i(m/2-n)}\omega_{n,m}(x)$	Каннингема
13.6.33.	$-\frac{\nu}{2}$	0	$2x$	$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)e^x k_\nu(x),\ x>0$	Бейтмена
13.6.34.	1	1	ix	$e^{ix}\left[-\frac{\pi i}{2}+i\,\mathrm{Si}\,(x)-\mathrm{Ci}\,(x)\right]$	Интегральные синус и косинус
13.6.35.	1	1	$-ix$	$e^{-ix}\left[\frac{\pi i}{2}-i\,\mathrm{Si}\,x-\mathrm{Ci}\,(x)\right]$	«
13.6.36.	$-\frac{\nu}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{z^2}{2}$	$2^{-\nu/2}e^{z^2/4}D_\nu(z)$	
13.6.37.	$\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{z^2}{2}$	$2^{1/2-\nu/2}e^{z^2/4}D_\nu(x)/z$	Вебера или параболического цилиндра
13.6.38.	$\frac{1}{2}-\frac{n}{2}$	$\frac{3}{2}$	x^2	$2^{-n}H_n(x)/x$	Эрмита
13.6.39.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	x^2	$\sqrt{\pi}\exp(x^2)\,\mathrm{erfc}\,x$	Интеграл вероятностей

13.7. НУЛИ И ТОЧКИ ПОВОРОТА

Если $j_{b-1,r}$ — r-й положительный нуль функции $J_{b-1}(x)$, то первое приближение X_0 к r-му положительному нулю функции $M(a, b, x)$ имеет вид

13.7.1. $$X_0 = j^2_{b-1,r}\left\{1/(2b-4a) + O\left(1\Big/\left(\frac{b}{2}-a\right)^3\right)\right\}.$$

13.7.2. $$X_0 \approx \frac{\pi^2\left(r+\frac{b}{2}-\frac{3}{4}\right)^2}{2b-4a}.$$

Более точное приближение вычисляется по формуле

13.7.3. $X_1 = X_0 - M(a, b, X_0)/M'(a, b, X_0)$.

Для производной получаем

13.7.4. $M'(a, b, X_1) =$
$$= M'(a, b, X_0)\left\{1+(b-X_0)\frac{M(a, b, X_0)}{M'(a, b, X_0)}\right\}.$$

Если X_0' есть первое приближение к точке поворота функции $M(a, b, x)$, т.е. к нулю функции $M'(a, b, x)$, то лучшее приближение можно получить по формуле

13.7.5. $$X_1' = X_0' - \frac{X_0' M'(a, b, X_0')}{aM(a, b, X_0')}.$$

Самосопряженное уравнение 13.1.1 можно записать также в виде

13.7.6. $$\frac{d}{dz}\left[z^b e^{-z}\frac{dw}{dz}\right] = az^{b-1}e^{-z}w.$$

Теорема Сонина—Пойа

Максимумы и минимумы функции $|w|$ образуют возрастающую или убывающую последовательность в зависимости от того, является ли $-ax^{2b-1}e^{-2x}$ возрастающей или убывающей функцией x, т.е. они образуют возрастающую последовательность для $M(a,b,x)$, если $a>0$, $x<b-\frac{1}{2}$ или $a<0, x>b-\frac{1}{2}$, и убывающую последовательность, если $a>0$ и $x>b-\frac{1}{2}$ или $a<0$ и $x<b-\frac{1}{2}$.

Точки поворота функции $|w|$ располагаются вблизи кривой

$$\textbf{13.7.7.}\quad w=\pm\Gamma(b)\,\pi^{-1/2}e^{x/2}\left(\frac{bx}{2}-ax\right)^{1/4-b/2}\times\left(1-\frac{x}{2b-4a}\right)^{-1/4}.$$

ПРИМЕРЫ

13.8. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ И РАСШИРЕНИЕ ТАБЛИЦ

Вычисление функции $M(a,b,x)$

Преобразование Куммера

Пример 1. Вычислить $M(0.3, 0.2, -0.1)$ с 7S.

Используем 13.1.27 и табл. 4.4 и 13.1. Полагая $a=0.3$, $b=0.2$, получаем $M(0.3, 0.2, -0.1)=e^{-0.1}M(-0.1, 0.2, 0.1)=0.85784\,90$. Таким образом, 13.1.27 можно использовать для расширения табл. 13.1 в область отрицательных значений x. Если a и b велики и приблизительно равны, при больших или малых x также можно использовать преобразование Куммера.

Пример 2. Вычислить $M(17, 16, 1)$ с 7S.

Здесь $a=17$, $b=16$ и $M(17,16,1)=e^1M(-1,16,-1)=$ $=2.71828\,18\times1.06250\,00=2.88817\,44$.

Рекуррентные соотношения

Пример 3. Вычислить $M(-1.3, 1.2, 0.1)$ с 7S. Используем 13.4.1 и табл. 13.1. Полагая $a=-0.3$, $b=0.2$, получаем $M(-1.3, 0.2, 0.1)=2[0.7M(-0.3, 0.2, 0.1)-$ $-0.3M(0.7, 0.2, 0.1)]=0.35821\,23$. По формуле 13.4.5 при $a=-1.3$ и $b=0.2$ имеем $M(-1.3, 1.2, 0.1)=$ $=[0.26M(-0.3, 0.2, 0.1)-0.24M(-1.3, 0.2, 0.1)]/0.15=$ $=0.89241\,08$.

Аналогично, при $a=-0.3$ и $b=0.2$ получаем $M(-0.3, 1.2, 0.1)=0.97459\,52$.

Проверим по формуле 13.4.6: $M(-1.3, 1.2, 0.1)=$ $=[0.2\,M(-0.3, 0.2, 0.1)+1.2\,M(-0.3, 1.2, 0.1)]/1.5=$ $=0.89241\,08$. Таким же образом можно использовать 13.4.1—13.4.7 совместно с 13.1.27 для расширения табл. 13.1 на интервалы $-10\leqslant a\leqslant 10$, $-10\leqslant b\leqslant 10$, $-10\leqslant x\leqslant 10$. Десятикратное применение этих рекуррентных формул в любом направлении ведет к потере примерно одной значащей цифры. Все рекуррентные соотношения устойчивы, за исключением следующих случаев: a) $a<0$, $b<0$ и $|a|>|b|$, $x>0$ или b) $b<a$, $b<0$, $|b-a|>|b|$, $x<0$, когда колебания функции становятся большими, особенно если $|x|$ тоже велико.

В полосе $b=-n\pm0.1$, где функция численно слишком велика, нельзя применить ни интерполирование, ни рекуррентные соотношения. В частности, $M(a,b,x)$ нельзя вычислить в окрестности точек $a=-m$, $b=-n$, $m\leqslant n$, так как вблизи этих точек малое изменение a, b или x влечет за собой очень большое изменение численного значения функции $M(a,b,x)$.

Пример 4. В точке $(-1,-1,x)$ функция $M(a,b,x)$ не определена. Если $a=-1$, то для всех x имеем $M(-1,b,x)=1-\frac{x}{b}$. Следовательно, $\lim\limits_{b\to-1}M(-1,b,x)=$ $=1+x$.

Однако $M(b,b,x)=e^x$ для всех x при $a=b$. Поэтому $\lim\limits_{b\to-1}M(b,b,x)=e^x$. В первом случае $b\to-1$ вдоль линии $a=-1$, а во втором случае $b\to-1$ вдоль линии $a=b$.

Производные

Пример 5. Вычислить $M'(-0.7, -0.6, 0.5)$ с 7S. При $a=-0.7$ и $b=-0.6$ по формуле 13.4.8 имеем

$$M'(-0.7, -0.6, 0.5)=\frac{-0.7}{-0.6}M(0.3, 0.4, 0.5)=1.724128.$$

Асимптотические формулы

Для $x\geqslant 10$ и малых a и b функцию $M(a,b,x)$ можно вычислить по формуле 13.5.1, используя множители сходимости 13.5.3 и 13.5.4, которые позволяют в случае необходимости улучшить точность.

Пример 6. Вычислить $M(0.9, 0.1, 10)$ с 7S, используя 13.5.1.

$$M(0.9, 0.1, 10)=$$

$$=\frac{\Gamma(0.1)}{\Gamma(-0.8)}e^{0.9\pi i}10^{-0.9}\sum_{n=0}^{N}\frac{(0.9)_n(1.8)_n}{n!(-10)^n}+$$

$$+\frac{\Gamma(0.1)}{\Gamma(0.9)}e^{10}10^{0.8}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-0.8)_n(0.1)_n}{n!10^n}+O(10^{-N})=$$

$$=-0.198(0.869)+1237253(0.99190\,285)+$$

$$+O(1)=1227235.23-0.17+O(1)=1227235+O(1).$$

Для контроля по табл. 13.1 находим $M(0.9, 0.1, 10)=$ $=1\,227\,235$.

Для вычисления $M(a,b,x)$ при больших a, малых x и малых или больших b следует использовать 13.5.13 и 13.5.14.

Пример 7. Вычислить $M(-52.5, 0.1, 1)$ с 3S, используя формулу 13.5.14.

$$M(-52.5, 0.1, 1)=\Gamma(0.1)\,e^{0.5}(0.05+52.5)^{0.25-0.05}\times$$

$$\times0.5642\cos[(0.2-4(-52.5))^{0.5}-0.05\pi+0.25\pi]\times$$

$$\times[1+O((0.05+52.5)^{-0.5})]=-16.34+O(0.2).$$

Непосредственным применением рекуррентного соотношения для $M(-52.5, 0.1, 1)$ получается значение -16.447.

Для вычисления $M(a,b,x)$ при больших x, a и (или) b следует применить 13.5.17, 13.5.19 или 13.5.21.

Пример 8. Вычислить $M(-52.5, 0.1, 1)$ с 3S, используя 13.5.21 при $\cos\theta = \sqrt{1/210.2}$.

$$M(-52.5,\ 0.1,\ 1) = \Gamma(0.1)\, e^{105.1 \cos^2\theta}[105.1 \cos\theta]^{1-0.1} \times$$
$$\times 0.5641 \cdot 52 \cdot 55^{-1/2} \sin 2\theta^{-1/2} [\sin(-52.5\pi) +$$
$$+ \sin\left\{52.55(2\theta - \sin 2\theta) + \frac{\pi}{4}\right\} +$$
$$+ O((52.55)^{-1})] = -16.47 + O(0.02).$$

Полный набор асимптотических формул, которые давали бы результат во всех возможных случаях, пока не известен.

Вычисление функции $U(a, b, x)$

При $-10 \leqslant x \leqslant 10$, $-10 \leqslant a \leqslant 10$, $-10 \leqslant b \leqslant 10$ это можно сделать по формуле 13.1.3, используя табл. 13.1 и рекуррентные соотношения 13.4.15—13.4.20.

Пример 9. Вычислить $U(1.1, 0.2, 1)$ с 5S. Используя табл. 13.1, 4.12 и 6.1 и формулу 13.1.3, получаем

$$U(0.1,\ 0.2,\ 1) =$$
$$= \frac{\pi}{\sin(0.2\pi)}\left\{\frac{M(0.1,\ 0.2,\ 1)}{\Gamma(0.9)\,\Gamma(0.2)} - \frac{M(0.9,\ 1.8,\ 1)}{\Gamma(0.1)\,\Gamma(1.8)}\right\}.$$

По формуле 13.4.4 имеем

$$M(0.9, 1.8, 1) = 0.8[M(0.9, 0.8, 1) - M(-0.1, 0.8, 1)] = 1.72329.$$

Следовательно, $U(0.1,\ 0.2,\ 1) = 5.344799\,(0.371765 - 0.194486) = 0.94752$.

Аналогично,

$$U(-0.9, 0.2, 1) = 0.91272.$$

Теперь по формуле 13.4.15 получаем $U(1.1, 0.2, 1) = [U(0.1,\ 0.2,\ 1) - U(-0.9,\ 0.2,\ 1)]/0.09 = 0.38664$.

Пример 10. Вычислить $U'(-0.9, -0.8, 1)$ с 5S. По формуле 13.4.21 имеем

$$U'(-0.9,\ -0.8,\ 1) = 0.9\, U(0.1,\ 0.2,\ 1) =$$
$$= (0.9)\,(0.94752) = 0.85276.$$

Асимптотические формулы

Пример 11. Вычислить $U(1, 0.1, 100)$ с 5S. Используя 13.5.2, получим

$$U(1,\ 0.1,\ 100) =$$
$$= \frac{1}{100}\left\{1 - \frac{1.9}{100} + \frac{1.9}{100}\,\frac{2.9}{100} - \right.$$
$$\left. - \frac{1.9}{100}\,\frac{2.9}{100}\,\frac{3.9}{100} + O(10^{-9})\right\} =$$
$$= 0.01\{1 - 0.019 + 0.000551 - 0.0000\,21 + O(10^{-9})\} =$$
$$= 0.00981\,53.$$

Пример 12. Вычислить $U(0.1, 0.2, 0.01)$. При малых x следует применить 13.5.6—13.5.12. Используя 13.5.10, получаем результат с 3 значащими цифрами:

$$U(0.1,\ 0.2,\ 0.01) = \frac{\Gamma(1-0.2)}{\Gamma(1.1-0.2)} + O((0.01)^{1-0.2}) =$$
$$= \frac{\Gamma(0.8)}{\Gamma(0.9)} + O\,((0.01)^{0.8}) = 1.09.$$

Для вычисления $U(a, b, x)$ при больших a, малых x и малых или больших b следует использовать 13.5.15 или 13.5.16.

Для вычисления $U(a, b, x)$, когда x, a и (или) b велики, следует использовать формулы 13.5.18, 13.5.20 или 13.5.22. Во всех этих случаях по величине остаточного члена можно судить о том, сколько можно получить верных значащих цифр.

Вычисление функций Уиттекера

Пример 13. Вычислить $M_{0.0,\,-0.4}(1)$ и $W_{0.0,\,-0.4}(1)$ с 5S. По формулам 13.1.32 и 13.1.33 и табл. 13.1, 4.4 находим

$$M_{0.0,-0.4}(1) = e^{-0.5}\, M(0.1,\ 0.2,\ 1) = 1.10622,$$
$$W_{0.0,-0.4}(1) = e^{-0.5}\, U(0.1,\ 0.2,\ 1) = 0.57469.$$

Таким образом, значения $M_{k,\mu}(x)$ и $W_{k,\mu}(x)$ всегда можно найти, если известны значения $M(a, b, x)$ и $U(a, b, x)$.

13.9. ВЫЧИСЛЕНИЕ НУЛЕЙ И ТОЧЕК ПОВОРОТА

Пример 14. Вычислить наименьший положительный нуль функции $M(-4, 0.6, x)$. Он расположен вне пределов табл. 13.2. Используя 13.7.2, получаем первое приближение

$$X_0 = \frac{(0.55\,\pi)^2}{17.2} = 0.174.$$

Используя 13.7.3, имеем

$$X_1 = X_0 - M(-4,\ 0.6,\ X_0)/M'(-4,\ 0.6,\ X_0).$$

По формуле 13.4.8 получаем

$$M'(-4,\ 0.6,\ X_0) = -(0.15)^{-1}\, M(-3,\ 1.6,\ X_0).$$

Итак, в качестве второго приближения находим

$$X_1 = X_0 + 0.15 M(-4,\ 0.6,\ X_0)/M(-3,\ 1.6,\ X_0) =$$
$$= 0.174 + (0.15)\,(0.030004) = 0.17850.$$

Повторяя эти вычисления, получаем искомое значение с 7S:

$$X_2 = X_1 + 0.00002\,99 = 0.17852\,99.$$

Вычисление максимумов и минимумов

Пример 15. Вычислить значение x, при котором функция $M(-1.8, -0.2, x)$ имеет точку поворота. Используя 13.4.8 и табл. 13.2, находим $M'(-1.8, -0.2, x) = 9M(-0.8, 0.8, x) = 0$ при $x = 0.94291\,59$. Таким же образом, $M''(-1.8, -0.2, x) = 9M'(-0.8, 0.8, x) = -9M(0.2, 1.8, x)$ и, следовательно, $M(0.2, 1.8, 0.94291\,59) > 0$.

Таким образом, $M(-1.8, -0.2, x)$ имеет максимум по x при $x = 0.94291\,59$.

Пример 16. Вычислить наименьшее положительное значение x, при котором $M(-3, 0.6, x)$ имеет точку пово-

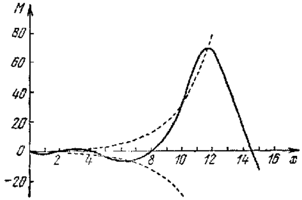


Рис. 13.1. $M(-4.5,\ 1,\ x)$.

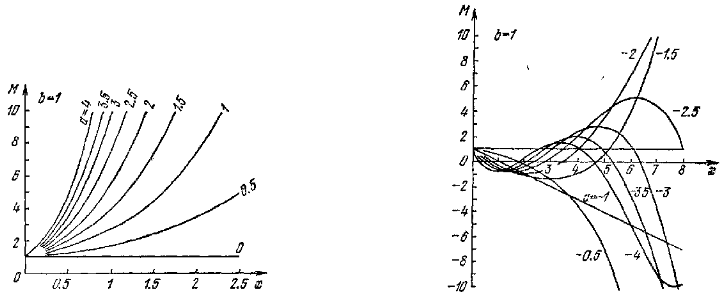


Рис. 13.2. $M(a,\ 1,\ x)$.

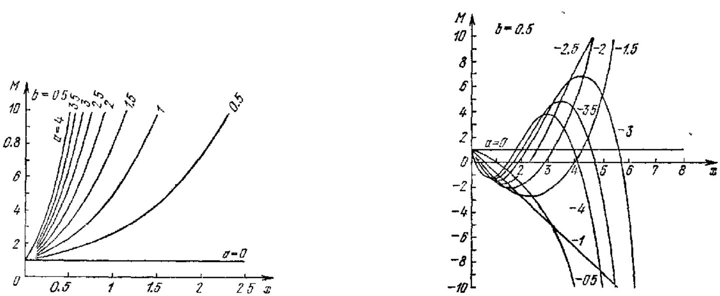


Рис. 13.3. $M(a,\ 0.5,\ x)$.

рота X_1'. Эта точка находится вне пределов табл. 13.2. Используя 13.4.8, получаем

$$M'(-3,\ 0.6,\ x) = -3M(-2.\ 1.6,\ x)/0.6.$$

По формуле 13.7.2 для $M(-2, 1.6, x)$ находим

$$X_0 = (1.05\ \pi)^2/(11.2) = 0.9715.$$

Мы получили первое приближение к X_0' для $M(-3, 0.6, x)$.

Используя 13.7.5 и 13.4.8, находим второе приближение с 4 значащими цифрами:

$$X_1' = X_0'\left[1 - \frac{M'(-3,\ 0.6,\ X_0')}{-3M(-3,\ 0.6,\ X_0')}\right] =$$

$$= X_0'\left[1 - \frac{M(-2,\ 1.6,\ X_0')}{0.6M(-3,\ 0.6,\ X_0')}\right] =$$

$$= 0.9715 \times 1.0163 = 0.9873.$$

Этот процесс можно повторять до получения результата с необходимой точностью.

На рис. 13.4 изображены кривые, на которых функция $M(a, b, x)$ равна нулю в плоскости a, b, когда $x = 1$. Эта функция является положительной в незаштрихованных областях и отрицательной в заштрихованных областях. Число в каждом квадрате указывает количество действительных положительных нулей функции $M(a, b, x)$ по переменной x, содержащихся в данном квадрате. Вертикальные границы слева включаются в квадратные области.

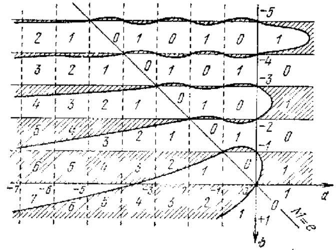


Рис. 13.4.

13.10. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $M(a, b, x)$

Пример 17. Начертить график функции $M(-4.5, 1, x)$. Из рис. 13.1 видно, что функция имеет пять действительных положительных нулей. Из 13.5.1 находим, что $M \to -\infty$, $M' \to -\infty$ при $x \to +\infty$ и $M \to +\infty, M' \to +\infty$ при $x \to -\infty$.

По формуле 13.7.2 получаем первые приближения к нулям: 0.3, 1.5, 3.7, 6.9, 10.6, а по формулам 13.7.2 и 13.4.8 находим первые приближения к точкам поворота: 0.9, 2.8, 5.8, 9.9.

Из 13.7.7 видим, что они расположены в окрестности кривой

$$y = \pm e^{x/2}(5x)^{-1/4}\left(1 - \frac{x}{11}\right)^{-1/4}\pi^{-1/2}.$$

Исходя из этого, можно представить себе примерный график этой функции, который указан на рис. 13.1.

Для других значений параметров см. рис. 13.2, 13.3.

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a,\ b,\ x)$

$x=0.1$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
−1.0	0.00000 00	(−1) 5.00000 00	(−1) 6.66666 67	(−1) 7.50000 00	(−1) 8.00000 00
−0.9	(−2) 9.58364 34	(−1) 5.48093 23	(−1) 6.98827 46	(−1) 7.74183 96	(−1) 8.19391 07
−0.8	(−1) 1.92586 25	(−1) 5.96605 00	(−1) 7.31245 77	(−1) 7.98547 23	(−1) 8.38915 99
−0.7	(−1) 2.90253 86	(−1) 6.45537 25	(−1) 7.63922 74	(−1) 8.23090 56	(−1) 8.58575 33
−0.6	(−1) 3.88843 71	(−1) 6.94891 92	(−1) 7.96859 49	(−1) 8.47814 73	(−1) 8.78369 61
−0.5	(−1) 4.88360 25	(−1) 7.44670 94	(−1) 8.30057 19	(−1) 8.72720 49	(−1) 8.98299 40
−0.4	(−1) 5.88807 94	(−1) 7.94876 28	(−1) 8.63516 97	(−1) 8.97808 60	(−1) 9.18365 22
−0.3	(−1) 6.90171 26	(−1) 8.45509 89	(−1) 8.97239 98	(−1) 9.23079 84	(−1) 9.38567 64
−0.2	(−1) 7.92514 70	(−1) 8.96573 73	(−1) 9.31227 38	(−1) 9.48534 97	(−1) 9.58907 21
−0.1	(−1) 8.95782 77	(−1) 9.48069 78	(−1) 9.65480 34	(−1) 9.74174 76	(−1) 9.79384 48
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.10517 09	(0) 1.05236 64	(0) 1.03478 75	(0) 1.02601 15	(0) 1.02075 43
0.2	(0) 1.21130 01	(0) 1.10517 09	(0) 1.06984 41	(0) 1.05220 99	(0) 1.04164 80
0.3	(0) 1.31839 21	(0) 1.15841 56	(0) 1.10517 09	(0) 1.07859 61	(0) 1.06268 16
0.4	(0) 1.42645 14	(0) 1.21210 24	(0) 1.14076 91	(0) 1.10517 09	(0) 1.08385 58
0.5	(0) 1.53548 28	(0) 1.26623 34	(0) 1.17663 99	(0) 1.13193 51	(0) 1.10517 09
0.6	(0) 1.64549 07	(0) 1.32081 05	(0) 1.21278 44	(0) 1.15888 93	(0) 1.12662 77
0.7	(0) 1.75647 99	(0) 1.37583 59	(0) 1.24920 38	(0) 1.18603 45	(0) 1.14822 66
0.8	(0) 1.86845 49	(0) 1.43131 14	(0) 1.28589 94	(0) 1.21337 14	(0) 1.16996 83
0.9	(0) 1.98142 05	(0) 1.48723 92	(0) 1.32287 23	(0) 1.24090 08	(0) 1.19185 34
1.0	(0) 2.09538 12	(0) 1.54362 12	(0) 1.36012 38	(0) 1.26862 36	(0) 1.21388 22

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
−1.0	(−1) 8.33333 33	(−1) 8.57142 86	(−1) 8.75000 00	(−1) 8.88888 89	(−1) 9.00000 00
−0.9	(−1) 8.49524 54	(−1) 8.71045 21	(−1) 8.87183 35	(−1) 8.99733 47	(−1) 9.09772 21
−0.8	(−1) 8.65820 31	(−1) 8.85031 91	(−1) 8.99436 39	(−1) 9.10636 73	(−1) 9.19594 59
−0.7	(−1) 8.82221 06	(−1) 8.99103 26	(−1) 9.11759 38	(−1) 9.21598 87	(−1) 9.29467 31
−0.6	(−1) 8.98727 18	(−1) 9.13259 59	(−1) 9.24152 56	(−1) 9.32620 11	(−1) 9.39390 52
−0.5	(−1) 9.15339 10	(−1) 9.27501 22	(−1) 9.36616 18	(−1) 9.43700 64	(−1) 9.49364 42
−0.4	(−1) 9.32057 22	(−1) 9.41828 47	(−1) 9.49150 52	(−1) 9.54840 68	(−1) 9.59389 16
−0.3	(−1) 9.48881 96	(−1) 9.56241 64	(−1) 9.61755 81	(−1) 9.66040 42	(−1) 9.69464 91
−0.2	(−1) 9.65813 72	(−1) 9.70741 08	(−1) 9.74432 32	(−1) 9.77300 09	(−1) 9.79591 86
−0.1	(−1) 9.82852 93	(−1) 9.85327 09	(−1) 9.87180 29	(−1) 9.88619 88	(−1) 9.89770 16
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.01725 53	(0) 1.01476 01	(0) 1.01289 17	(0) 1.01144 07	(0) 1.01028 15
0.2	(0) 1.03461 94	(0) 1.02960 78	(0) 1.02585 56	(0) 1.02294 21	(0) 1.02061 50
0.3	(0) 1.05209 25	(0) 1.04454 34	(0) 1.03889 21	(0) 1.03450 45	(0) 1.03100 04
0.4	(0) 1.06967 52	(0) 1.05956 71	(0) 1.05200 13	(0) 1.04612 80	(0) 1.04143 81
0.5	(0) 1.08736 79	(0) 1.07467 94	(0) 1.06518 35	(0) 1.05781 30	(0) 1.05192 82
0.6	(0) 1.10517 09	(0) 1.08988 06	(0) 1.07843 90	(0) 1.06955 95	(0) 1.06247 09
0.7	(0) 1.12308 48	(0) 1.10517 09	(0) 1.09176 81	(0) 1.08136 79	(0) 1.07306 64
0.8	(0) 1.14110 98	(0) 1.12055 08	(0) 1.10517 09	(0) 1.09323 83	(0) 1.08371 47
0.9	(0) 1.15924 65	(0) 1.13602 05	(0) 1.11864 79	(0) 1.10517 09	(0) 1.09441 62
1.0	(0) 1.17749 53	(0) 1.15158 03	(0) 1.13219 91	(0) 1.11716 60	(0) 1.10517 09

При $0 \leqslant x \leqslant 1$ линейная интерполяция по a, b или x позволяет получить $3-4$ S. Интерполирование по a, b или x при помощи четырехточечной формулы Лагранжа позволяет получить в большей части таблицы 7S, но на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 10$ необходимо использовать шеститочечную формулу. Для проведения двумерной интерполяции по a и b, a и x или b и x можно использовать любую интерполяционную формулу. Эти вычисления можно проверить интерполированием в другом порядке.

Таблица 13.1 Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x=0.2$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(0)-1.00000 00	0.00000 00	(-1) 3.33333 33	(-1) 5.00000 00	(-1) 6.00000 00
-0.9	(-1)-8.16955 02	(-2) 9.22415 48	(-1) 3.95232 64	(-1) 5.46684 38	(-1) 6.37527 43
-0.8	(-1)-6.30239 72	(-1) 1.86164 63	(-1) 4.58166 34	(-1) 5.94088 89	(-1) 6.75592 38
-0.7	(-1)-4.39817 97	(-1) 2.81785 03	(-1) 5.22143 72	(-1) 6.42219 72	(-1) 7.14199 30
-0.6	(-1)-2.45653 39	(-1) 3.79118 64	(-1) 5.87174 11	(-1) 6.91083 10	(-1) 7.53352 62
-0.5	(-2)-4.77093 96	(-1) 4.78181 44	(-1) 6.53266 92	(-1) 7.40685 28	(-1) 7.93056 84
-0.4	(-1)+1.54050 87	(-1) 5.78989 52	(-1) 7.20431 59	(-1) 7.91032 56	(-1) 8.33316 46
-0.3	(-1) 3.59664 50	(-1) 6.81559 07	(-1) 7.88677 63	(-1) 8.42131 28	(-1) 8.74136 01
-0.2	(-1) 5.69168 81	(-1) 7.85906 39	(-1) 8.58014 62	(-1) 8.93987 82	(-1) 9.15520 06
-0.1	(-1) 7.82601 37	(-1) 8.92047 86	(-1) 9.28452 18	(-1) 9.46608 57	(-1) 9.57473 18
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.22140 28	(0) 1.10977 94	(0) 1.07266 78	(0) 1.05416 86	(0) 1.04310 51
0.2	(0) 1.44684 80	(0) 1.22140 28	(0) 1.14646 55	(0) 1.10912 09	(0) 1.08679 33
0.3	(0) 1.67637 41	(0) 1.33488 69	(0) 1.22140 28	(0) 1.16486 34	(0) 1.13106 91
0.4	(0) 1.91002 01	(0) 1.45024 87	(0) 1.29748 97	(0) 1.22140 28	(0) 1.17593 74
0.5	(0) 2.14782 49	(0) 1.56750 53	(0) 1.37473 61	(0) 1.27874 56	(0) 1.22140 28
0.6	(0) 2.38982 79	(0) 1.68667 37	(0) 1.45315 23	(0) 1.33689 87	(0) 1.26747 01
0.7	(0) 2.63606 85	(0) 1.80777 12	(0) 1.53274 81	(0) 1.39586 86	(0) 1.31414 41
0.8	(0) 2.88658 67	(0) 1.93081 51	(0) 1.61353 39	(0) 1.45566 22	(0) 1.36142 97
0.9	(0) 3.14142 25	(0) 2.05582 28	(0) 1.69551 97	(0) 1.51628 63	(0) 1.40933 17
1.0	(0) 3.40061 61	(0) 2.18281 20	(0) 1.77871 60	(0) 1.57774 76	(0) 1.45785 51

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(-1) 6.66666 67	(-1) 7.14285 71	(-1) 7.50000 00	(-1) 7.77777 78	(-1) 8.00000 00
-0.9	(-1) 6.98070 53	(-1) 7.41302 26	(-1) 7.73716 33	(-1) 7.98920 01	(-1) 8.19077 41
-0.8	(-1) 7.29894 21	(-1) 7.68657 38	(-1) 7.97712 40	(-1) 8.20297 76	(-1) 8.38356 13
-0.7	(-1) 7.62141 04	(-1) 7.96353 68	(-1) 8.21990 25	(-1) 8.41912 68	(-1) 8.57837 54
-0.6	(-1) 7.94814 35	(-1) 8.24393 73	(-1) 8.46551 94	(-1) 8.63766 45	(-1) 8.77523 03
-0.5	(-1) 8.27917 51	(-1) 8.52780 14	(-1) 8.71399 57	(-1) 8.85860 76	(-1) 8.97413 99
-0.4	(-1) 8.61453 89	(-1) 8.81515 54	(-1) 8.96535 20	(-1) 9.08197 30	(-1) 9.17511 81
-0.3	(-1) 8.95426 91	(-1) 9.10602 57	(-1) 9.21960 95	(-1) 9.30777 78	(-1) 9.37817 91
-0.2	(-1) 9.29839 97	(-1) 9.40043 88	(-1) 9.47678 92	(-1) 9.53603 91	(-1) 9.58333 69
-0.1	(-1) 9.64696 51	(-1) 9.69842 13	(-1) 9.73691 22	(-1) 9.76677 40	(-1) 9.79060 58
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.03575 39	(0) 1.03052 02	(0) 1.02660 74	(0) 1.02357 34	(0) 1.02115 34
0.2	(0) 1.07196 17	(0) 1.06140 54	(0) 1.05351 56	(0) 1.04739 95	(0) 1.04252 22
0.3	(0) 1.10862 70	(0) 1.09265 84	(0) 1.08072 66	(0) 1.07147 98	(0) 1.06410 78
0.4	(0) 1.14575 32	(0) 1.12428 18	(0) 1.10824 29	(0) 1.09581 63	(0) 1.08591 18
0.5	(0) 1.18334 39	(0) 1.15627 85	(0) 1.13606 64	(0) 1.12041 07	(0) 1.10793 56
0.6	(0) 1.22140 28	(0) 1.18865 12	(0) 1.16419 94	(0) 1.14526 47	(0) 1.13018 06
0.7	(0) 1.25993 33	(0) 1.22140 28	(0) 1.19264 41	(0) 1.17038 02	(0) 1.15264 83
0.8	(0) 1.29893 91	(0) 1.25453 59	(0) 1.22140 28	(0) 1.19575 89	(0) 1.17534 02
0.9	(0) 1.33842 39	(0) 1.28805 34	(0) 1.25047 76	(0) 1.22140 28	(0) 1.19825 79
1.0	(0) 1.37839 12	(0) 1.32195 81	(0) 1.27987 08	(0) 1.24731 35	(0) 1.22140 28

Таблица 13.1. **Вырожденная гипергеометрическая функция** $M(a, b, x)$

$x = 0.3$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(0) -2.00000 00	(-1) -5.00000 00	0.00000 00	(-1) 2.50000 00	(-1) 4.00000 00
-0.9	(0) -1.73884 94	(-1) -3.67762 19	(-2) 8.90939 59	(-1) 3.17420 35	(-1) 4.54351 25
-0.8	(0) -1.46940 36	(-1) -2.31724 76	(-1) 1.80524 85	(-1) 3.86467 39	(-1) 5.09916 51
-0.7	(0) -1.19153 81	(-2) -9.18332 95	(-1) 2.74324 64	(-1) 4.57162 39	(-1) 5.66711 03
-0.6	(-1) -9.05127 09	(-2) +5.19671 16	(-1) 3.70525 58	(-1) 5.29526 85	(-1) 6.24750 17
-0.5	(-1) -6.10043 44	(-1) 1.99731 93	(-1) 4.69160 23	(-1) 6.03582 44	(-1) 6.84049 44
-0.4	(-1) -3.06158 64	(-1) 3.51517 11	(-1) 5.70261 46	(-1) 6.79351 05	(-1) 7.44624 48
-0.3	(-3) +6.65629 62	(-1) 5.07379 19	(-1) 6.73862 42	(-1) 7.56854 74	(-1) 8.06491 07
-0.2	(-1) 3.28532 83	(-1) 6.67375 21	(-1) 7.79996 60	(-1) 8.36115 78	(-1) 8.69665 13
-0.1	(-1) 6.59602 92	(-1) 8.31562 77	(-1) 8.88697 76	(-1) 9.17156 65	(-1) 9.34162 71
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.34985 88	(0) 1.17274 56	(0) 1.11393 77	(0) 1.08466 87	(0) 1.06719 33
0.2	(0) 1.70931 54	(0) 1.34985 88	(0) 1.23054 56	(0) 1.17118 59	(0) 1.13575 92
0.3	(0) 2.07850 71	(0) 1.53139 94	(0) 1.34985 88	(0) 1.25957 47	(0) 1.20571 42
0.4	(0) 2.45757 28	(0) 1.71742 78	(0) 1.47191 26	(0) 1.34985 88	(0) 1.27707 51
0.5	(0) 2.84665 23	(0) 1.90800 49	(0) 1.59674 26	(0) 1.44206 18	(0) 1.34985 88
0.6	(0) 3.24588 71	(0) 2.10319 22	(0) 1.72438 49	(0) 1.53620 75	(0) 1.42408 24
0.7	(0) 3.65541 99	(0) 2.30305 18	(0) 1.85487 58	(0) 1.63232 02	(0) 1.49976 30
0.8	(0) 4.07539 50	(0) 2.50764 63	(0) 1.98825 19	(0) 1.73042 41	(0) 1.57691 80
0.9	(0) 4.50595 77	(0) 2.71703 89	(0) 2.12455 03	(0) 1.83054 38	(0) 1.65556 49
1.0	(0) 4.94725 50	(0) 2.93129 36	(0) 2.26380 82	(0) 1.93270 41	(0) 1.73572 13

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(-1) 5.00000 00	(-1) 5.71428 57	(-1) 6.25000 00	(-1) 6.66666 67	(-1) 7.00000 00
-0.9	(-1) 5.45594 63	(-1) 6.10737 55	(-1) 6.59572 25	(-1) 6.97537 97	(-1) 7.27897 71
-0.8	(-1) 5.92337 29	(-1) 6.50811 03	(-1) 6.94776 02	(-1) 7.28940 91	(-1) 7.56249 82
-0.7	(-1) 6.39639 42	(-1) 6.91657 86	(-1) 7.30618 39	(-1) 7.60881 20	(-1) 7.85061 06
-0.6	(-1) 6.88112 54	(-1) 7.33287 00	(-1) 7.67106 45	(-1) 7.93364 63	(-1) 8.14336 18
-0.5	(-1) 7.37568 28	(-1) 7.75707 44	(-1) 8.04247 38	(-1) 8.26397 01	(-1) 8.44079 99
-0.4	(-1) 7.88018 36	(-1) 8.18928 28	(-1) 8.42048 41	(-1) 8.59984 20	(-1) 8.74297 33
-0.3	(-1) 8.39474 59	(-1) 8.62958 68	(-1) 8.80516 81	(-1) 8.94132 11	(-1) 9.04993 07
-0.2	(-1) 8.91948 91	(-1) 9.07807 88	(-1) 9.19659 93	(-1) 9.28846 71	(-1) 9.36172 12
-0.1	(-1) 9.45453 34	(-1) 9.53485 19	(-1) 9.59485 17	(-1) 9.64133 99	(-1) 9.67839 44
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.05560 11	(0) 1.04736 18	(0) 1.04121 19	(0) 1.03645 08	(0) 1.03265 88
0.2	(0) 1.11226 90	(0) 1.09558 01	(0) 1.08312 85	(0) 1.07349 27	(0) 1.06582 10
0.3	(0) 1.17001 62	(0) 1.14466 45	(0) 1.12575 75	(0) 1.11113 16	(0) 1.09949 16
0.4	(0) 1.22885 51	(0) 1.19462 48	(0) 1.16910 65	(0) 1.14937 40	(0) 1.13367 58
0.5	(0) 1.28879 84	(0) 1.24547 07	(0) 1.21318 32	(0) 1.18822 61	(0) 1.16837 88
0.6	(0) 1.34985 88	(0) 1.29721 20	(0) 1.25799 56	(0) 1.22769 42	(0) 1.20360 57
0.7	(0) 1.41204 93	(0) 1.34985 88	(0) 1.30355 15	(0) 1.26778 47	(0) 1.23936 18
0.8	(0) 1.47538 27	(0) 1.40342 10	(0) 1.34985 88	(0) 1.30850 41	(0) 1.27565 25
0.9	(0) 1.53987 22	(0) 1.45790 88	(0) 1.39692 56	(0) 1.34985 88	(0) 1.31248 30
1.0	(0) 1.60553 08	(0) 1.51333 23	(0) 1.44475 99	(0) 1.39185 54	(0) 1.34985 88

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 0.4$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(0) -3.00000 00	(0) -1.00000 00	(-1) -3.33333 33	0.00000 00	(-1) 2.00000 00
-0.9	(0) -2.67035 54	(-1) -8.32139 43	(-1) -2.19718 27	(-2) 8.63057 33	(-1) 2.69801 05
-0.8	(0) -2.32590 02	(-1) -6.57495 96	(1) -1.01932 12	(-1) 1.75514 40	(-1) 3.41768 30
-0.7	(0) -1.96633 24	(-1) -4.75937 91	(-2) +2.01024 24	(-1) 2.67677 48	(-1) 4.15938 56
-0.6	(0) -1.59134 63	(-1) -2.87331 90	(-1) 1.46463 65	(-1) 3.62847 08	(-1) 4.92349 10
-0.5	(0) -1.20063 19	(-2) -9.15428 01	(-1) 2.77230 84	(-1) 4.61075 95	(-1) 5.71037 59
-0.4	(-1) -7.93875 31	(-1) +1.11566 21	(-1) 4.12484 23	(-1) 5.62417 45	(-1) 6.52042 19
-0.3	(-1) -3.70758 28	(-1) 3.22133 74	(-1) 5.52305 08	(-1) 6.66925 61	(-1) 7.35401 47
-0.2	(-2) +6.90415 20	(-1) 5.40300 15	(-1) 6.96775 63	(-1) 7.74655 09	(-1) 8.21154 46
-0.1	(-1) 5.25850 66	(-1) 7.66207 59	(-1) 8.45979 18	(-1) 8.85661 23	(-1) 9.09340 66
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.49182 47	(0) 1.24182 32	(0) 1.15892 34	(0) 1.11772 81	(0) 1.09317 29
0.2	(0) 2.00166 43	(0) 1.49182 47	(0) 1.32283 59	(0) 1.23890 28	(0) 1.18890 02
0.3	(0) 2.52986 27	(0) 1.75015 41	(0) 1.49182 47	(0) 1.36358 21	(0) 1.28722 33
0.4	(0) 3.07676 82	(0) 2.01696 26	(0) 1.66597 84	(0) 1.49182 47	(0) 1.38818 41
0.5	(0) 3.64273 38	(0) 2.29240 35	(0) 1.84538 67	(0) 1.62369 00	(0) 1.49182 47
0.6	(0) 4.22811 68	(0) 2.57663 20	(0) 2.03014 00	(0) 1.75923 82	(0) 1.59818 80
0.7	(0) 4.83327 91	(0) 2.86980 51	(0) 2.22033 03	(0) 1.89852 99	(0) 1.70731 73
0.8	(0) 5.45858 73	(0) 3.17208 18	(0) 2.41605 02	(0) 2.04162 67	(0) 1.81925 64
0.9	(0) 6.10441 27	(0) 3.48362 30	(0) 2.61739 39	(0) 2.18859 08	(0) 1.93404 94
1.0	(0) 6.77113 12	(0) 3.80459 19	(0) 2.82445 63	(0) 2.33948 51	(0) 2.05174 12

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(-1) 3.33333 33	(-1) 4.28571 43	(-1) 5.00000 00	(-1) 5.55555 56	(-1) 6.00000 00
-0.9	(-1) 3.92050 85	(-1) 4.79315 51	(-1) 5.44722 84	(-1) 5.95564 45	(-1) 6.36214 28
-0.8	(-1) 4.52459 74	(-1) 5.31423 36	(-1) 5.90572 12	(-1) 6.36521 50	(-1) 6.73238 89
-0.7	(-1) 5.14587 62	(-1) 5.84916 36	(-1) 6.37564 87	(-1) 6.78440 52	(-1) 7.11085 21
-0.6	(-1) 5.78462 40	(-1) 6.39816 17	(-1) 6.85718 29	(-1) 7.21335 46	(-1) 7.49764 78
-0.5	(-1) 6.44112 32	(-1) 6.96144 64	(-1) 7.35049 77	(-1) 7.65220 44	(-1) 7.89289 21
-0.4	(-1) 7.11565 94	(-1) 7.53923 92	(-1) 7.85576 88	(-1) 8.10109 70	(-1) 8.29670 27
-0.3	(-1) 7.80852 14	(-1) 8.13176 35	(-1) 8.37317 41	(-1) 8.56017 66	(-1) 8.70919 82
-0.2	(-1) 8.52000 13	(-1) 8.73924 56	(-1) 8.90289 30	(-1) 9.02958 86	(-1) 9.13049 86
-0.1	(-1) 9.25039 46	(-1) 9.36191 40	(-1) 9.44510 72	(-1) 9.50948 02	(-1) 9.56072 51
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.07691 20	(0) 1.06537 37	(0) 1.05677 57	(0) 1.05012 98	(0) 1.04484 47
0.2	(0) 1.15580 59	(0) 1.13233 62	(0) 1.11485 65	(0) 1.10135 26	(0) 1.09061 91
0.3	(0) 1.23671 28	(0) 1.20091 13	(0) 1.17426 15	(0) 1.15368 38	(0) 1.13733 58
0.4	(0) 1.31966 37	(0) 1.27112 31	(0) 1.23500 97	(0) 1.20713 88	(0) 1.18500 76
0.5	(0) 1.40469 04	(0) 1.34299 62	(0) 1.29712 04	(0) 1.26173 33	(0) 1.23364 74
0.6	(0) 1.49182 47	(0) 1.41655 50	(0) 1.36061 33	(0) 1.31748 31	(0) 1.28326 80
0.7	(0) 1.58109 90	(0) 1.49182 47	(0) 1.42550 81	(0) 1.37440 41	(0) 1.33388 28
0.8	(0) 1.67254 59	(0) 1.56883 03	(0) 1.49182 47	(0) 1.43251 25	(0) 1.38550 48
0.9	(0) 1.76619 84	(0) 1.64759 75	(0) 1.55958 33	(0) 1.49182 47	(0) 1.43814 76
1.0	(0) 1.86208 99	(0) 1.72815 18	(0) 1.62880 44	(0) 1.55235 70	(0) 1.49182 47

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a,\ b,\ x)$

$x=0.5$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
−1.0	(0) −4.00000 00	(0) −1.50000 00	(−1) −6.66666 67	(−1) −2.50000 00	0.00000 00
−0.9	(0) −3.61201 86	(0) −1.30112 70	(−1) −5.31342 47	(−1) −1.46751 27	(−2) 8.38114 43
−0.8	(0) −3.20079 89	(0) −1.09161 33	(−1) −3.89475 90	(−2) −3.89499 09	(−1) 1.71019 66
−0.7	(0) −2.76573 85	(−1) −8.71196 18	(−1) −2.40912 78	(−2) +7.35066 66	(−1) 2.61697 96
−0.6	(0) −2.30622 47	(−1) −6.39608 65	(−2) −8.54965 30	(−1) 1.90722 60	(−1) 3.55920 78
−0.5	(0) −1.82163 45	(−1) −3.96579 38	(−2) +7.69319 06	(−1) 3.12803 64	(−1) 4.53763 61
−0.4	(0) −1.31133 45	(−1) −1.41832 63	(−1) 2.46534 08	(−1) 4.39857 14	(−1) 5.55303 09
−0.3	(−1) −7.74681 00	(−1) +1.24911 75	(−1) 4.23474 05	(−1) 5.71992 06	(−1) 6.60617 00
−0.2	(−1) −2.11019 41	(−1) 4.03938 42	(−1) 6.07918 46	(−1) 7.09319 04	(−1) 7.69784 21
−0.1	(−1) +3.80315 52	(−1) 6.95536 57	(−1) 8.00036 50	(−1) 8.51950 36	(−1) 8.82884 81
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.64872 13	(0) 1.31762 72	(0) 1.20798 34	(0) 1.15358 36	(0) 1.12121 22
0.2	(0) 2.32717 78	(0) 1.64872 13	(0) 1.42416 39	(0) 1.31281 87	(0) 1.24660 50
0.3	(0) 3.03607 92	(0) 1.99359 02	(0) 1.64872 13	(0) 1.47782 42	(0) 1.37626 32
0.4	(0) 3.77614 69	(0) 2.35254 68	(0) 1.88183 81	(0) 1.64872 13	(0) 1.51027 29
0.5	(0) 4.54811 35	(0) 2.72590 86	(0) 2.12369 98	(0) 1.82563 24	(0) 1.64872 13
0.6	(0) 5.35272 38	(0) 3.11399 83	(0) 2.37449 45	(0) 2.00868 23	(0) 1.79169 69
0.7	(0) 6.19073 40	(0) 3.51714 35	(0) 2.63441 32	(0) 2.19799 70	(0) 1.93928 94
0.8	(0) 7.06291 26	(0) 3.93567 68	(0) 2.90364 98	(0) 2.39370 49	(0) 2.09159 01
0.9	(0) 7.97004 04	(0) 4.36993 59	(0) 3.18240 09	(0) 2.59593 60	(0) 2.24869 11
1.0	(0) 8.91291 03	(0) 4.82026 39	(0) 3.47086 63	(0) 2.80482 21	(0) 2.41068 61

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
−1.0	(−1) 1.66666 67	(−1) 2.85714 29	(−1) 3.75000 00	(−1) 4.44444 44	(−1) 5.00000 00
−0.9	(−1) 2.37390 35	(−1) 3.46998 42	(−1) 4.29138 21	(−1) 4.92975 27	(−1) 5.44007 21
−0.8	(−1) 3.10765 94	(−1) 4.10420 52	(−1) 4.85042 16	(−1) 5.42992 21	(−1) 5.89284 39
−0.7	(−1) 3.86848 36	(−1) 4.76023 18	(−1) 5.42745 70	(−1) 5.94522 72	(−1) 6.35854 17
−0.6	(−1) 4.65693 33	(−1) 5.43849 54	(−1) 6.02283 14	(−1) 6.47594 62	(−1) 6.83739 50
−0.5	(−1) 5.47357 40	(−1) 6.13943 38	(−1) 6.63689 23	(−1) 7.02236 09	(−1) 7.32963 60
−0.4	(−1) 6.31897 89	(−1) 6.86349 09	(−1) 7.26999 22	(−1) 7.58475 70	(−1) 7.83550 00
−0.3	(−1) 7.19372 99	(−1) 7.61111 66	(−1) 7.92248 85	(−1) 8.16342 38	(−1) 8.35522 55
−0.2	(−1) 8.09841 67	(−1) 8.38276 72	(−1) 8.59474 31	(−1) 8.75865 45	(−1) 8.88905 38
−0.1	(−1) 9.03363 78	(−1) 9.17890 54	(−1) 9.28712 29	(−1) 9.37074 63	(−1) 9.43722 94
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.09981 19	(0) 1.08465 27	(0) 1.07337 51	(0) 1.06467 21	(0) 1.05776 16
0.2	(0) 1.20286 18	(0) 1.17189 67	(0) 1.14887 58	(0) 1.13112 17	(0) 1.11703 33
0.3	(0) 1.30921 31	(0) 1.26178 10	(0) 1.22654 08	(0) 1.19938 02	(0) 1.17784 06
0.4	(0) 1.41892 99	(0) 1.35435 51	(0) 1.30640 94	(0) 1.26947 93	(0) 1.24020 96
0.5	(0) 1.53207 73	(0) 1.44966 91	(0) 1.38852 11	(0) 1.34145 10	(0) 1.30416 68
0.6	(0) 1.64872 13	(0) 1.54777 40	(0) 1.47291 64	(0) 1.41532 79	(0) 1.36973 88
0.7	(0) 1.76892 87	(0) 1.64872 13	(0) 1.55963 60	(0) 1.49114 29	(0) 1.43695 27
0.8	(0) 1.89276 74	(0) 1.75256 32	(0) 1.64872 13	(0) 1.56892 95	(0) 1.50583 59
0.9	(0) 2.02030 62	(0) 1.85935 29	(0) 1.74021 40	(0) 1.64872 13	(0) 1.57641 61
1.0	(0) 2.15161 47	(0) 1.96914 38	(0) 1.83415 67	(0) 1.73055 26	(0) 1.64872 13

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x=0.6$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(0)-5.00000 00	(0)-2.00000 00	(0)-1.00000 00	(-1)-5.00000 00	(-1)-2.00000 00
-0.9	(0)-4.56442 36	(0)-1.77497 83	(-1)-8.45926 51	(-1)-3.81848 50	(-1)-1.03687 14
-0.8	(0)-4.09525 03	(0)-1.53457 51	(-1)-6.82397 09	(-1)-2.57117 79	(-3)-2.46606 50
-0.7	(0)-3.59141 57	(0)-1.27832 65	(-1)-5.09139 76	(-1)-1.25627 00	(-1)+1.03792 44
-0.6	(0)-3.05183 34	(0)-1.00575 96	(-1)-3.25877 35	(-2)+1.28080 81	(-1) 2.15219 91
-0.5	(0)-2.47539 54	(-1)-7.16392 12	(-1)-1.32327 40	(-1) 1.58375 09	(-1) 3.31950 22
-0.4	(0)-1.86097 11	(-1)-4.09732 38	(-2)+7.17978 94	(-1) 3.11265 10	(-1) 4.54119 67
-0.3	(0)-1.20740 73	(-2)-8.52791 51	(-1) 2.86791 75	(-1) 4.71672 67	(-1) 5.81866 96
-0.2	(-1)-5.13527 80	(-1)+2.57478 49	(-1) 5.12952 90	(-1) 6.39795 93	(-1) 7.15333 26
-0.1	(-1)+2.21866 89	(-1) 6.19061 29	(-1) 7.50585 66	(-1) 8.15836 59	(-1) 8.54662 21
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.82211 88	(0) 1.40083 55	(0) 1.26151 16	(0) 1.19249 52	(0) 1.15149 54
0.2	(0) 2.68949 50	(0) 1.82211 88	(0) 1.53544 21	(0) 1.39353 51	(0) 1.30929 96
0.3	(0) 3.60342 49	(0) 2.26441 16	(0) 1.82211 88	(0) 1.60333 61	(0) 1.47356 68
0.4	(0) 4.56523 01	(0) 2.72828 58	(0) 2.12187 52	(0) 1.82211 88	(0) 1.64445 34
0.5	(0) 5.57625 77	(0) 3.21432 45	(0) 2.43505 08	(0) 2.05010 75	(0) 1.82211 88
0.6	(0) 6.63788 04	(0) 3.72312 11	(0) 2.76199 12	(0) 2.28753 06	(0) 2.00672 51
0.7	(0) 7.75149 76	(0) 4.25528 05	(0) 3.10304 83	(0) 2.53462 03	(0) 2.19843 71
0.8	(0) 8.91853 48	(0) 4.81141 85	(0) 3.45858 04	(0) 2.79161 30	(0) 2.39742 24
0.9	(1) 1.01404 45	(0) 5.39216 24	(0) 3.82895 20	(0) 3.05874 93	(0) 2.60385 15
1.0	(1) 1.14187 08	(0) 5.99815 10	(0) 4.21453 44	(0) 3.33627 37	(0) 2.81789 78

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	0.00000 00	(-1) 1.42857 14	(-1) 2.50000 00	(-1) 3.33333 33	(-1) 4.00000 00
-0.9	(-2) 8.15612 80	(-1) 2.13746 25	(-1) 3.12786 69	(-1) 3.89744 84	(-1) 4.51255 49
-0.8	(-1) 1.66954 03	(-1) 2.87723 99	(-1) 3.78124 01	(-1) 4.48302 85	(-1) 5.04345 12
-0.7	(-1) 2.56274 99	(-1) 3.64865 28	(-1) 4.46071 49	(-1) 5.09055 63	(-1) 5.59308 68
-0.6	(-1) 3.49622 62	(-1) 4.45246 33	(-1) 5.16689 67	(-1) 5.72052 24	(-1) 6.16196 59
-0.5	(-1) 4.47097 05	(-1) 5.28944 63	(-1) 5.90040 05	(-1) 6.37342 52	(-1) 6.75019 92
-0.4	(-1) 5.48800 20	(-1) 6.16039 00	(-1) 6.66185 18	(-1) 7.04977 12	(-1) 7.35850 35
-0.3	(-1) 6.54835 72	(-1) 7.06609 56	(-1) 7.45188 61	(-1) 7.75007 48	(-1) 7.98720 24
-0.2	(-1) 7.65309 05	(-1) 8.00737 79	(-1) 8.27114 95	(-1) 8.47485 87	(-1) 8.63672 59
-0.1	(-1) 8.80327 45	(-1) 8.98506 53	(-1) 9.12029 84	(-1) 9.22465 40	(-1) 9.30751 06
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.12443 77	(0) 1.10530 38	(0) 1.09109 32	(0) 1.08014 45	(0) 1.07146 44
0.2	(0) 1.25375 32	(0) 1.21450 50	(0) 1.18537 84	(0) 1.16295 44	(0) 1.14519 01
0.3	(0) 1.38806 15	(0) 1.32769 20	(0) 1.28292 55	(0) 1.24848 64	(0) 1.22122 33
0.4	(0) 1.52747 91	(0) 1.44495 47	(0) 1.38380 56	(0) 1.33679 79	(0) 1.29961 13
0.5	(0) 1.67212 47	(0) 1.56638 46	(0) 1.48809 10	(0) 1.42794 70	(0) 1.38040 19
0.6	(0) 1.82211 88	(0) 1.69207 45	(0) 1.59585 51	(0) 1.52199 31	(0) 1.46364 36
0.7	(0) 1.97758 41	(0) 1.82211 88	(0) 1.70717 25	(0) 1.61899 63	(0) 1.54938 57
0.8	(0) 2.13864 53	(0) 1.95661 34	(0) 1.82211 88	(0) 1.71901 75	(0) 1.63767 83
0.9	(0) 2.30542 91	(0) 2.09565 57	(0) 1.94077 10	(0) 1.82211 88	(0) 1.72857 22
1.0	(0) 2.47806 43	(0) 2.23934 48	(0) 2.06320 72	(0) 1.92836 31	(0) 1.82211 88

Таблица 13.1 Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 0.7$

$a \backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(0)-6.00000 00	(0)-2.50000 00	(0)-1.33333 33	(-1)-7.50000 00	(-1)-4.00000 00
-0.9	(0)-5.52819 79	(0)-2.25396 47	(0)-1.16362 83	(-1)-6.19090 30	(-1)-2.92768 78
-0.8	(0)-5.01049 23	(0)-1.98691 64	(-1)-9.81007 11	(-1)-4.79194 87	(-1)-1.78834 77
-0.7	(0)-4.44515 47	(0)-1.69810 26	(-1)-7.85028 60	(-1)-3.30020 58	(-2)-5.79886 90
-0.6	(0)-3.83041 49	(0)-1.38675 31	(-1)-5.75241 82	(-1)-1.71267 91	(-2)+6.99831 62
-0.5	(0)-3.16446 06	(0)-1.05207 99	(-1)-3.51185 70	(-3)-2.63083 59	(-1) 2.05299 00
-0.4	(0)-2.44543 68	(-1)-6.93277 09	(-1)-1.12388 92	(-1)+1.76203 27	(-1) 3.48181 61
-0.3	(0)-1.67144 46	(-1)-3.09520 29	(-1)+1.41630 28	(-1) 3.65553 75	(-1) 4.98858 44
-0.2	(-1)-8.40541 00	(-1)+1.00033 57	(-1) 4.11364 25	(-1) 5.65746 78	(-1) 6.57561 66
-0.1	(-2)+4.92624 47	(-1) 5.36246 53	(-1) 6.97316 13	(-1) 7.77115 48	(-1) 8.24528 23
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 2.01375 27	(0) 1.49219 50	(0) 1.31994 11	(0) 1.23474 77	(0) 1.18422 38
0.2	(0) 3.09264 92	(0) 2.01375 27	(0) 1.65767 60	(0) 1.48171 31	(0) 1.37745 14
0.3	(0) 4.23886 64	(0) 2.56561 44	(0) 2.01375 27	(0) 1.74125 83	(0) 1.57993 98
0.4	(0) 5.45463 06	(0) 3.14874 21	(0) 2.38873 10	(0) 2.01375 27	(0) 1.79195 11
0.5	(0) 6.74221 79	(0) 3.76411 90	(0) 2.78318 26	(0) 2.29957 36	(0) 2.01375 27
0.6	(0) 8.10395 56	(0) 4.41274 94	(0) 3.19769 12	(0) 2.59910 58	(0) 2.24561 74
0.7	(0) 9.54222 25	(0) 5.09565 95	(0) 3.63285 27	(0) 2.91274 21	(0) 2.48782 35
0.8	(1) 1.10594 50	(0) 5.81389 76	(0) 4.08927 57	(0) 3.24088 34	(0) 2.74065 46
0.9	(1) 1.26581 24	(0) 6.56853 43	(0) 4.56758 14	(0) 3.58393 85	(0) 3.00440 00
1.0	(-1) 1.43407 83	(0) 7.36066 31	(0) 5.06840 38	(0) 3.94232 46	(0) 3.27935 49

$a \backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(-1)-1.66666 67	0.00000 00	(-1) 1.25000 00	(-1) 2.22222 22	(-1) 3.00000 00
-0.9	(-2)-7.54915 03	(-2) 7.95165 75	(-1) 1.95634 74	(-1) 2.85846 10	(-1) 3.57936 92
-0.8	(-2)+2.09154 67	(-1) 1.63250 20	(-1) 2.69751 66	(-1) 3.52[illegible]00 18	(-1) 4.18377 43
-0.7	(-1) 1.22710 86	(-1) 2.51322 11	(-1) 3.47447 03	(-1) 4.21962 49	(-1) 4.81385 81
-0.6	(-1) 2.30054 51	(-1) 3.43655 96	(-1) 4.28819 01	(-1) 4.94612 53	(-1) 5.47027 56
-0.5	(-1) 3.43109 52	(-1) 4.40977 87	(-1) 5.13967 66	(-1) 5.70431 32	(-1) 6.15369 36
-0.4	(-1) 4.62042 36	(-1) 5.42816 47	(-1) 6.02994 98	(-1) 6.49501 40	(-1) 6.86479 13
-0.3	(-1) 5.87022 82	(-1) 6.49502 91	(-1) 6.96004 90	(-1) 7.31906 85	(-1) 7.60426 03
-0.2	(-1) 7.18224 16	(-1) 7.61170 97	(-1) 7.93103 40	(-1) 8.17733 33	(-1) 8.37280 46
-0.1	(-1) 8.55823 13	(-1) 8.77956 99	(-1) 8.94398 42	(-1) 9.07068 09	(-1) 9.17114 12
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.15093 86	(0) 1.12744 17	(0) 1.11002 02	(0) 1.09661 96	(0) 1.08601 24
0.2	(0) 1.30882 66	(0) 1.26042 67	(0) 1.22457 33	(0) 1.19701 89	(0) 1.17522 70
0.3	(0) 1.47385 50	(0) 1.39910 20	(0) 1.34377 57	(0) 1.30129 20	(0) 1.26772 07
0.4	(0) 1.64621 90	(0) 1.54361 79	(0) 1.46774 58	(0) 1.40953 43	(0) 1.36357 19
0.5	(0) 1.82611 74	(0) 1.69412 73	(0) 1.59660 44	(0) 1.52184 32	(0) 1.46286 04
0.6	(0) 2.01375 27	(0) 1.85078 59	(0) 1.73047 46	(0) 1.63831 77	(0) 1.56566 72
0.7	(0) 2.20933 17	(0) 2.01375 27	(0) 1.86948 15	(0) 1.75905 87	(0) 1.67207 52
0.8	(0) 2.41306 50	(0) 2.18318 94	(0) 2.01375 27	(0) 1.88416 89	(0) 1.78216 81
0.9	(0) 2.62516 74	(0) 2.35926 09	(0) 2.16341 82	(0) 2.01375 27	(0) 1.89603 16
1.0	(0) 2.84585 75	(0) 2.54213 50	(0) 2.31861 02	(0) 2.14791 66	(0) 2.01375 27

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 0.8$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(0)-7.00000 00	(0)-3.00000 00	(0)-1.66666 67	(0)-1.00000 00	(-1)-6.00000 00
-0.9	(0)-6.50401 48	(0)-2.73837 67	(0)-1.48461 68	(-1)-8.58588 03	(-1)-4.83512 37
-0.8	(0)-5.94785 78	(0)-2.44921 23	(0)-1.28563 99	(-1)-7.05401 18	(-1)-3.58242 29
-0.7	(0)-5.32888 96	(0)-2.13135 83	(0)-1.06906 32	(-1)-5.39992 81	(-1)-2.23871 07
-0.6	(0)-4.64439 77	(0)-1.78363 55	(-1)-8.34197 05	(-1)-3.61905 04	(-2)-8.00722 55
-0.5	(0)-3.89159 56	(0)-1.40483 36	(-1)-5.80333 58	(-1)-1.70668 54	(-2)+7.34885 63
-0.4	(0)-3.06762 06	(-1)-9.93710 17	(-1)-3.06747 02	(-2)+3.41976 74	(-1) 2.37153 85
-0.3	(0)-2.16953 29	(-1)-5.48990 22	(-2)-1.26930 95	(-1) 2.53186 47	(-1) 4.11274 30
-0.2	(0)-1.19431 35	(-2)-6.93656 36	(-1)+3.02591 28	(-1) 4.86802 83	(-1) 5.96208 97
-0.1	(-1)-1.38863 05	(-1)+4.46505 60	(-1) 6.39888 38	(-1) 7.35564 06	(-1) 7.92325 45
0.0	(0)+1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 2.22554 09	(0) 1.59252 93	(0) 1.38374 79	(0) 1.28065 33	(0) 1.21961 77
0.2	(0) 3.54111 04	(0) 2.22554 09	(0) 1.79197 39	(0) 1.57807 97	(0) 1.45157 28
0.3	(0) 4.95014 63	(0) 2.90051 91	(0) 2.22554 09	(0) 1.89284 81	(0) 1.69626 83
0.4	(0) 6.45617 50	(0) 3.61898 52	(0) 2.68533 25	(0) 2.22554 09	(0) 1.95411 70
0.5	(0) 8.06281 37	(0) 4.38249 84	(0) 3.17225 39	(0) 2.57675 45	(0) 2.22554 09
0.6	(0) 9.77377 18	(0) 5.19265 68	(0) 3.68723 21	(0) 2.94709 89	(0) 2.51097 18
0.7	(1) 1.15928 53	(0) 6.05109 78	(0) 4.23121 63	(0) 3.33719 88	(0) 2.81085 12
0.8	(1) 1.35239 56	(0) 6.95949 89	(0) 4.80517 86	(0) 3.74769 30	(0) 3.12563 06
0.9	(1) 1.55710 78	(0) 7.91957 87	(0) 5.41011 38	(0) 4.17923 55	(0) 3.45577 20
1.0	(1) 1.77383 16	(0) 8.93309 73	(0) 6.04704 06	(0) 4.63249 51	(0) 3.80174 73

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(-1)-3.33333 33	(-1)-1.42857 14	0.00000 00	(-1) 1.11111 11	(-1) 2.00000 00
-0.9	(-1)-2.33826 62	(-2)-5.57356 94	(-2) 7.76467 88	(-1) 1.81250 42	(-1) 2.64028 04
-0.8	(-1)-1.27465 48	(-2)+3.69102 15	(-1) 1.59854 95	(-1) 2.55227 74	(-1) 3.31335 07
-0.7	(-2)-1.40115 64	(-1) 1.35264 99	(-1) 2.46770 86	(-1) 3.33161 66	(-1) 4.02018 75
-0.6	(-1)+1.06779 15	(-1) 2.39517 31	(-1) 3.38544 19	(-1) 4.15173 34	(-1) 4.76178 82
-0.5	(-1) 2.35156 45	(-1) 3.49860 15	(-1) 4.35327 95	(-1) 5.01386 60	(-1) 5.53917 14
-0.4	(-1) 3.71375 95	(-1) 4.66490 92	(-1) 5.37278 55	(-1) 5.91927 92	(-1) 6.35337 71
-0.3	(-1) 5.15699 27	(-1) 5.89611 50	(-1) 6.44555 87	(-1) 6.86926 51	(-1) 7.20546 73
-0.2	(-1) 6.68394 10	(-1) 7.19428 36	(-1) 7.57323 29	(-1) 7.86514 37	(-1) 8.09652 62
-0.1	(-1) 8.29734 28	(-1) 8.56152 59	(-1) 8.75747 79	(-1) 8.90826 31	(-1) 9.02766 05
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.17947 78	(0) 1.15119 12	(0) 1.13025 42	(0) 1.11417 60	(0) 1.10146 98
0.2	(0) 1.36846 08	(0) 1.30995 18	(0) 1.26668 86	(0) 1.23349 80	(0) 1.20729 30
0.3	(0) 1.56724 87	(0) 1.47651 22	(0) 1.40948 49	(0) 1.35811 24	(0) 1.31758 99
0.4	(0) 1.77614 79	(0) 1.65110 80	(0) 1.55882 92	(0) 1.48816 89	(0) 1.43248 29
0.5	(0) 1.99547 19	(0) 1.83397 98	(0) 1.71491 10	(0) 1.62382 02	(0) 1.55209 71
0.6	(0) 2.22554 09	(0) 2.02537 37	(0) 1.87792 43	(0) 1.76522 23	(0) 1.67656 00
0.7	(0) 2.46668 24	(0) 2.22554 09	(0) 2.04806 69	(0) 1.91253 43	(0) 1.80600 17
0.8	(0) 2.71923 11	(0) 2.43473 81	(0) 2.22554 09	(0) 2.06591 86	(0) 1.94055 51
0.9	(0) 2.98352 90	(0) 2.65322 74	(0) 2.41055 26	(0) 2.22554 09	(0) 2.08035 55
1.0	(0) 3.25992 56	(0) 2.88127 68	(0) 2.60331 27	(0) 2.39157 03	(0) 2.22554 09

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 0.9$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
−1.0	(0)−8.00000 00	(0)−3.50000 00	(0)−2.00000 00	(0)−1.25000 00	(−1)−8.00000 00
−0.9	(0)−7.49259 77	(0)−3.22852 60	(0)−1.80907 26	(0)−1.10046 05	(−1)−6.76001 98
−0.8	(0)−6.90871 25	(0)−2.92208 06	(0)−1.59665 35	(−1)−9.35972 27	(−1)−5.40855 15
−0.7	(0)−6.24470 96	(0)−2.57899 21	(0)−1.36176 43	(−1)−7.55885 89	(−1)−3.94096 49
−0.6	(0)−5.49641 35	(0)−2.19753 81	(0)−1.10339 79	(−1)−5.59533 56	(−1)−2.35250 18
−0.5	(0)−4.65980 55	(0)−1.77594 43	(−1)−8.20518 02	(−1)−3.46228 53	(−2)−6.38272 88
−0.4	(0)−3.73067 11	(0)−1.31238 34	(−1)−5.12058 10	(−1)−1.15264 70	(−1)+1.20674 49
−0.3	(0)−2.70466 65	(−1)−8.04973 88	(−1)−1.76920 97	(−1)+1.34083 75	(−1) 3.18771 09
−0.2	(0)−1.57731 62	(−1)−2.51778 79	(−1)+1.86021 91	(−1) 4.02562 81	(−1) 5.30992 39
−0.1	(−1)−3.44010 11	(−1)+3.49195 37	(−1) 5.77931 14	(−1) 6.90939 03	(−1) 7.57882 50
0.0	(0)+1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 2.45960 31	(0) 1.70274 56	(0) 1.45345 52	(0) 1.33055 47	(0) 1.25791 83
0.2	(0) 4.03983 23	(0) 2.45960 31	(0) 1.93955 77	(0) 1.68343 42	(0) 1.53222 60
0.3	(0) 5.74586 78	(0) 3.27280 52	(0) 2.45960 31	(0) 2.05949 16	(0) 1.82352 69
0.4	(0) 7.58304 06	(0) 4.14464 74	(0) 3.01492 28	(0) 2.45960 31	(0) 2.13244 07
0.5	(0) 9.55683 50	(0) 5.07749 00	(0) 3.60686 44	(0) 2.88466 81	(0) 2.45960 31
0.6	(1) 1.16728 93	(0) 6.07375 88	(0) 4.23689 27	(0) 3.33560 96	(0) 2.80566 62
0.7	(1) 1.39370 17	(0) 7.13594 69	(0) 4.90639 03	(0) 3.81337 52	(0) 3.17129 88
0.8	(1) 1.63551 72	(0) 8.26661 58	(0) 5.61685 85	(0) 4.31893 69	(0) 3.55718 66
0.9	(1) 1.89334 94	(0) 9.46839 74	(0) 6.36981 80	(0) 4.85329 20	(0) 3.96403 28
1.0	(1) 2.16782 87	(1) 1.07439 95	(0) 7.16683 00	(0) 5.41746 38	(0) 4.39255 83

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
−1.0	(−1)−5.00000 00	(−1)−2.85714 29	(−1)−1.25000 00	0.00000 00	(−1) 1.00000 00
−0.9	(−1)−3.93506 44	(−1)−1.92058 43	(−2)−4.12148 81	(−2) 7.59274 35	(−1) 1.69504 02
−0.8	(−1)−2.78312 29	(−2)−9.13906 92	(−2)+4.83592 97	(−1) 1.56725 54	(−1) 2.43169 00
−0.7	(−1)−1.54071 44	(−2)+1.65565 38	(−1) 1.43934 85	(−1) 2.42566 24	(−1) 3.21136 46
−0.6	(−2)−2.04284 74	(−1) 1.32057 89	(−1) 2.45729 51	(−1) 3.33625 68	(−1) 4.03551 32
−0.5	(−1)+1.22981 53	(−1) 2.55395 12	(−1) 3.53966 52	(−1) 4.30084 39	(−1) 4.90562 01
−0.4	(−1) 2.76533 21	(−1) 3.86857 31	(−1) 4.68874 74	(−1) 5.32127 33	(−1) 5.82320 50
−0.3	(−1) 4.40611 09	(−1) 5.26740 93	(−1) 5.90688 76	(−1) 6.39943 94	(−1) 6.78982 39
−0.2	(−1) 6.15609 81	(−1) 6.75350 07	(−1) 7.19649 04	(−1) 7.53728 29	(−1) 7.80706 95
−0.1	(−1) 8.01934 30	(−1) 8.32996 53	(−1) 8.56001 96	(−1) 8.73679 14	(−1) 8.87657 20
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.21023 31	(0) 1.17668 82	(0) 1.15190 18	(0) 1.13289 93	(0) 1.11790 61
0.2	(0) 1.43307 07	(0) 1.36339 71	(0) 1.31197 24	(0) 1.27259 03	(0) 1.24155 02
0.3	(0) 1.66896 10	(0) 1.56047 09	(0) 1.48048 31	(0) 1.41929 15	(0) 1.37111 10
0.4	(0) 1.91836 37	(0) 1.76826 25	(0) 1.65771 19	(0) 1.57322 64	(0) 1.50677 14
0.5	(0) 2.18175 01	(0) 1.98713 34	(0) 1.84394 34	(0) 1.73462 38	(0) 1.64871 85
0.6	(0) 2.45960 31	(0) 2.21745 38	(0) 2.03946 90	(0) 1.90371 79	(0) 1.79714 36
0.7	(0) 2.75241 80	(0) 2.45960 31	(0) 2.24458 71	(0) 2.08074 81	(0) 1.95224 22
0.8	(0) 3.06070 20	(0) 2.71396 99	(0) 2.45960 31	(0) 2.26595 96	(0) 2.11421 45
0.9	(0) 3.38497 53	(0) 2.98095 21	(0) 2.68482 96	(0) 2.45960 31	(0) 2.28326 51
1.0	(0) 3.72577 04	(0) 3.26095 72	(0) 2.92058 65	(0) 2.66193 52	(0) 2.45960 31

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 1.0$

$a \backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(0)-9.00000 00	(0)-4.00000 00	(0)-2.33333 33	(0)-1.50000 00	(0)-1.00000 00
-0.9	(0)-8.49472 34	(0)-3.72474 63	(0)-2.13718 91	(0)-1.34483 48	(-1)-8.70327 28
-0.8	(0)-7.89481 34	(0)-3.40618 57	(0)-1.91443 23	(0)-1.17116 05	(-1)-7.26851 39
-0.7	(0)-7.19487 27	(0)-3.04197 32	(0)-1.66369 18	(-1)-9.78067 35	(-1)-5.68924 14
-0.6	(0)-6.38931 44	(0)-2.62968 42	(0)-1.38355 11	(-1)-7.64616 83	(-1)-3.95877 20
-0.5	(0)-5.47235 71	(0)-2.16681 22	(0)-1.07254 74	(-1)-5.29840 46	(-1)-2.07021 66
-0.4	(0)-4.43802 02	(0)-1.65076 69	(-1)-7.29170 37	(-1)-2.72739 30	(-3)-1.64753 21
-0.3	(0)-3.28011 86	(0)-1.07887 24	(-1)-3.51861 30	(-3)+7.71680 36	(-1)+2.20976 75
-0.2	(0)-1.99225 77	(-1)-4.48364 63	(-2)+6.09884 13	(-1) 3.12589 94	(-1) 4.61604 79
-0.1	(-1)-5.67828 07	(-1)+2.43610 69	(-1) 5.11038 28	(-1) 6.42974 92	(-1) 7.21012 79
0.0	(0)+1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 2.71828 18	(0) 1.82384 44	(0) 1.52963 87	(0) 1.38482 77	(0) 1.29938 93
0.2	(0) 4.59430 40	(0) 2.71828 18	(0) 2.10177 40	(0) 1.79865 55	(0) 1.62002 78
0.3	(0) 6.63559 00	(0) 3.68654 94	(0) 2.71828 18	(0) 2.24271 69	(0) 1.96278 70
0.4	(0) 8.84990 62	(0) 4.73198 60	(0) 3.38109 51	(0) 2.71828 18	(0) 2.32856 41
0.5	(1) 1.12452 68	(0) 5.85803 42	(0) 4.09220 54	(0) 3.22665 79	(0) 2.71828 18
0.6	(1) 1.38299 44	(0) 7.06824 32	(0) 4.85366 43	(0) 3.76919 11	(0) 3.13288 93
0.7	(1) 1.66124 65	(0) 8.36627 13	(0) 5.66758 48	(0) 4.34726 65	(0) 3.57336 26
0.8	(1) 1.96016 30	(0) 9.75588 81	(0) 6.53614 27	(0) 4.96230 95	(0) 4.04070 56
0.9	(1) 2.28065 08	(1) 1.12409 78	(0) 7.46157 79	(0) 5.61578 62	(0) 4.53595 02
1.0	(1) 2.62364 52	(1) 1.28255 41	(0) 8.44619 60	(0) 6.30920 50	(0) 5.06015 69

$a \backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(-1)-6.66666 67	(-1)-4.28571 43	(-1)-2.50000 00	(-1)-1.11111 11	0.00000 00
-0.9	(-1)-5.54597 35	(-1)-3.29502 50	(-1)-1.60990 29	(-2)-3.01549 81	(-2) 7.43386 23
-0.8	(-1)-4.31756 71	(-1)-2.21753 45	(-2)-6.48146 54	(-2)+5.68299 01	(-1) 1.53827 23
-0.7	(-1)-2.97660 48	(-1)-1.04950 02	(-2)+3.88236 65	(-1) 1.50083 68	(-1) 2.38663 42
-0.6	(-1)-1.51809 81	(-2)+2.12929 76	(-1) 1.50229 88	(-1) 2.49853 18	(-1) 3.29050 15
-0.5	(-3)+6.30910 70	(-1) 1.57371 99	(-1) 2.69717 87	(-1) 3.56392 05	(-1) 4.25195 83
-0.4	(-1) 1.77225 36	(-1) 3.03694 92	(-1) 3.97610 35	(-1) 4.69960 88	(-1) 5.27314 45
-0.3	(-1) 3.61483 67	(-1) 4.60681 41	(-1) 5.34239 08	(-1) 5.90827 38	(-1) 6.35625 70
-0.2	(-1) 5.59644 73	(-1) 6.28763 08	(-1) 6.79945 04	(-1) 7.19266 55	(-1) 7.50355 07
-0.1	(-1) 7.72285 59	(-1) 8.08383 81	(-1) 8.35078 67	(-1) 8.55560 76	(-1) 8.71734 01
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.24339 88	(0) 1.20408 08	(0) 1.17507 89	(0) 1.15288 20	(0) 1.13539 67
0.2	(0) 1.50311 03	(0) 1.42110 86	(0) 1.36069 55	(0) 1.31451 22	(0) 1.27817 41
0.3	(0) 1.77978 05	(0) 1.65157 89	(0) 1.55723 97	(0) 1.48520 44	(0) 1.42858 86
0.4	(0) 2.07407 40	(0) 1.89600 10	(0) 1.76511 25	(0) 1.66528 05	(0) 1.58690 33
0.5	(0) 2.38667 38	(0) 2.15489 81	(0) 1.98472 52	(0) 1.85507 07	(0) 1.75338 77
0.6	(0) 2.71828 18	(0) 2.42880 78	(0) 2.21650 01	(0) 2.05491 39	(0) 1.92831 84
0.7	(0) 3.06961 97	(0) 2.71828 18	(0) 2.46087 06	(0) 2.26515 76	(0) 2.11197 89
0.8	(0) 3.44142 89	(0) 3.02388 72	(0) 2.71828 18	(0) 2.48615 84	(0) 2.30465 98
0.9	(0) 3.83447 12	(0) 3.34620 59	(0) 2.98919 01	(0) 2.71828 18	(0) 2.50665 90
1.0	(0) 4.24952 89	(0) 3.68583 55	(0) 3.27406 39	(0) 2.96190 29	(0) 2.71828 18

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 2.0$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(1)-1.90000 00	(0)-9.00000 00	(0)-5.66666 67	(0)-4.00000 00	(0)-3.00000 00
-0.9	(1)-1.94803 05	(0)-9.11450 17	(0)-5.67351 46	(0)-3.96130 19	(0)-2.93919 07
-0.8	(1)-1.95774 57	(0)-9.05346 68	(0)-5.57239 85	(0)-3.84746 13	(0)-2.82231 32
-0.7	(1)-1.92363 39	(0)-8.79313 67	(0)-5.34952 69	(0)-3.64939 40	(0)-2.64293 64
-0.6	(1)-1.83976 09	(0)-8.30798 80	(0)-4.99011 57	(0)-3.35738 15	(0)-2.39419 32
-0.5	(1)-1.69974 68	(0)-7.57063 96	(0)-4.47833 69	(0)-2.96103 91	(0)-2.06875 95
-0.4	(1)-1.49674 24	(0)-6.55175 56	(0)-3.79726 52	(0)-2.44928 29	(0)-1.65883 14
-0.3	(1)-1.22340 44	(0)-5.21994 53	(0)-2.92882 34	(0)-1.81029 53	(0)-1.15610 27
-0.2	(0)-8.71869 85	(0)-3.54165 86	(0)-1.85372 46	(0)-1.03148 90	(-1)-5.51740 45
-0.1	(0)-4.33729 58	(0)-1.48107 68	(-1)-5.51412 64	(-2)-9.94703 39	(-1)+1.63639 81
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 7.38905 61	(0) 3.94227 09	(0) 2.82379 65	(0) 2.28204 66	(0) 1.96790 63
0.2	(1) 1.49320 73	(0) 7.38905 61	(0) 4.94472 25	(0) 3.76272 10	(0) 3.07855 71
0.3	(1) 2.37378 96	(1) 1.13864 24	(0) 7.38905 61	(0) 5.45904 52	(0) 4.34381 17
0.4	(1) 3.39223 44	(1) 1.59833 25	(1) 1.01846 79	(0) 7.38905 61	(0) 5.77622 05
0.5	(1) 4.56085 43	(1) 2.12317 23	(1) 1.33611 54	(0) 9.57185 22	(0) 7.38905 61
0.6	(1) 5.89272 84	(1) 2.71867 46	(1) 1.69497 98	(1) 1.20276 42	(0) 9.19634 52
0.7	(1) 7.40173 79	(1) 3.39068 27	(1) 2.09837 67	(1) 1.47777 93	(1) 1.12129 02
0.8	(1) 9.10260 50	(1) 4.14538 60	(1) 2.54981 38	(1) 1.78448 86	(1) 1.34543 65
0.9	(2) 1.10109 32	(1) 4.98933 60	(1) 3.05299 98	(1) 2.12527 66	(1) 1.59372 26
1.0	(2) 1.31432 41	(1) 5.92946 26	(1) 3.61185 28	(1) 2.50266 00	(1) 1.86788 78

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(0)-2.33333 33	(0)-1.85714 29	(0)-1.50000 00	(0)-1.22222 22	(0)-1.00000 00
-0.9	(0)-2.26126 09	(0)-1.77944 34	(0)-1.41981 77	(0)-1.14139 10	(-1)-9.19616 98
-0.8	(0)-2.14541 69	(0)-1.66645 90	(0)-1.31049 88	(0)-1.03604 27	(-1)-8.18288 30
-0.7	(0)-1.98102 67	(0)-1.51452 14	(0)-1.16915 08	(-1)-9.03849 17	(-1)-6.94107 82
-0.6	(0)-1.76300 12	(0)-1.31972 79	(-1)-9.92701 33	(-1)-7.42341 04	(-1)-5.45057 11
-0.5	(0)-1.48592 22	(0)-1.07793 00	(-1)-7.77889 97	(-1)-5.48901 84	(-1)-3.69000 42
-0.4	(0)-1.14402 63	(-1)-7.84722 05	(-1)-5.21259 33	(-1)-3.20761 19	(-1)-1.63679 56
-0.3	(-1)-7.31188 76	(-1)-4.35429 49	(-1)-2.19146 36	(-2)-5.49879 73	(-2)+7.32914 71
-0.2	(-1)-2.40906 72	(-2)-2.50963 14	(-1)+1.32327 01	(-1)+2.51516 76	(-1) 3.44431 99
-0.1	(-1)+3.33718 60	(-1)+4.51527 65	(-1) 5.37263 41	(-1) 6.02027 13	(-1) 6.52400 38
0.0	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 1.76568 32	(0) 1.62619 96	(0) 1.52511 88	(0) 1.44908 29	(0) 1.39018 53
0.2	(0) 2.63896 63	(0) 2.33634 06	(0) 2.11745 72	(0) 1.95312 22	(0) 1.82606 83
0.3	(0) 3.62852 02	(0) 3.13698 76	(0) 2.78211 92	(0) 2.51617 15	(0) 2.31092 49
0.4	(0) 4.74350 99	(0) 4.03507 07	(0) 3.52448 69	(0) 3.14250 04	(0) 2.84820 19
0.5	(0) 5.99361 56	(0) 5.03790 12	(0) 4.35023 19	(0) 3.83660 34	(0) 3.44152 39
0.6	(0) 7.38905 61	(0) 6.15318 83	(0) 5.26532 81	(0) 4.60320 94	(0) 4.09470 06
0.7	(0) 8.94061 15	(0) 7.38905 61	(0) 6.27606 41	(0) 5.44729 15	(0) 4.81173 45
0.8	(1) 1.06596 48	(0) 8.75406 09	(0) 7.38905 61	(0) 6.37407 66	(0) 5.59682 82
0.9	(1) 1.25581 43	(1) 1.02572 10	(0) 8.61126 21	(0) 7.38905 61	(0) 6.45439 28
1.0	(1) 1.46487 09	(1) 1.19079 79	(0) 9.94999 53	(0) 8.49799 64	(0) 7.38905 61

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x=3.0$

$a \backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(1)-2.90000 00	(1)-1.40000 00	(0)-9.00000 00	(0)-6.50000 00	(0)-5.00000 00
-0.9	(1)-3.33062 11	(1)-1.57397 85	(0)-9.93407 08	(0)-7.05978 63	(0)-5.35304 11
-0.8	(1)-3.67972 78	(1)-1.71028 23	(1)-1.06346 98	(0)-7.45607 06	(0)-5.58342 63
-0.7	(1)-3.92295 55	(1)-1.79849 94	(1)-1.10419 34	(0)-7.64967 21	(0)-5.66362 13
-0.6	(1)-4.03286 65	(1)-1.82694 57	(1)-1.10887 39	(0)-7.59691 35	(0)-5.56302 55
-0.5	(1)-3.97869 07	(1)-1.78256 05	(1)-1.07004 00	(0)-7.24926 51	(0)-5.24773 50
-0.4	(1)-3.72604 95	(1)-1.65079 47	(0)-9.79393 09	(0)-6.55296 82	(0)-4.68029 11
-0.3	(1)-3.23666 24	(1)-1.41549 22	(0)-8.27742 10	(0)-5.44863 43	(0)-3.81941 32
-0.2	(1)-2.46803 49	(1)-1.05876 41	(0)-6.04935 06	(0)-3.87082 13	(0)-2.61971 67
-0.1	(1)-1.37312 67	(0)-5.60854 66	(0)-2.99786 41	(0)-1.74758 43	(0)-1.03141 44
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.0000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(1) 2.00855 37	(0) 9.47722 60	(0) 6.07912 54	(0) 4.45833 69	(0) 3.53408 59
0.2	(1) 4.41540 99	(1) 2.00855 37	(1) 1.23871 81	(0) 8.72184 59	(0) 6.63580 90
0.3	(1) 7.38953 06	(1) 3.31122 04	(1) 2.00855 37	(1) 1.38935 23	(1) 1.03759 15
0.4	(2) 1.10064 09	(1) 4.88711 46	(1) 2.93502 26	(1) 2.00855 37	(1) 1.48313 21
0.5	(2) 1.53485 39	(1) 6.77048 23	(1) 4.03729 70	(1) 2.74198 55	(1) 2.00855 37
0.6	(2) 2.05059 14	(1) 8.99862 23	(1) 5.33622 57	(1) 3.60289 07	(1) 2.62290 97
0.7	(2) 2.65765 56	(2) 1.16120 98	(1) 6.85444 79	(1) 4.60562 86	(1) 3.33600 27
0.8	(2) 3.36670 66	(2) 1.46549 60	(1) 8.61651 37	(1) 5.76574 86	(1) 4.15843 31
0.9	(2) 4.18932 19	(2) 1.81749 79	(2) 1.06490 11	(1) 7.10006 77	(1) 5.10165 02
1.0	(2) 5.13805 80	(2) 2.22239 01	(2) 1.29806 99	(1) 8.62675 30	(1) 6.17800 67

$a \backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(0)-4.00000 00	(0)-3.28571 43	(0)-2.75000 00	(0)-2.33333 33	(0)-2.00000 00
-0.9	(0)-4.22698 22	(0)-3.43076 30	(0)-2.83937 20	(0)-2.38362 40	(0)-2.02218 41
-0.8	(0)-4.35776 62	(0)-3.49795 59	(0)-2.86423 28	(0)-2.37946 93	(0)-1.99773 27
-0.7	(0)-4.37205 21	(0)-3.47180 10	(0)-2.81244 38	(0)-2.31115 68	(0)-1.91873 96
-0.6	(0)-4.24734 55	(0)-3.33517 91	(0)-2.67062 69	(0)-2.16800 92	(0)-1.77653 50
-0.5	(0)-3.95879 09	(0)-3.06922 34	(0)-2.42407 50	(0)-1.93831 65	(0)-1.56163 15
-0.4	(0)-3.47899 58	(0)-2.65319 12	(0)-2.05665 59	(0)-1.60926 29	(0)-1.26366 85
-0.3	(0)-2.77784 38	(0)-2.06432 89	(0)-1.55071 23	(0)-1.16684 98	(-1)-8.71351 71
-0.2	(0)-1.82229 72	(0)-1.27772 88	(-1)-8.86954 74	(-1)-5.95815 42	(-1)-3.72391 35
-0.1	(-1)-5.76188 60	(-1)-2.66178 30	(-2)-4.43495 10	(-1)+1.20451 21	(-1)+2.46564 64
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0) 1.00000 00	(0) 1.00000 00
0.1	(0) 2.94937 02	(0) 2.55311 64	(0) 2.27097 84	(0) 2.06241 49	(0) 1.90360 36
0.2	(0) 5.31885 34	(0) 4.42829 20	(0) 3.79559 01	(0) 3.32891 38	(0) 2.97434 69
0.3	(0) 8.15947 04	(0) 6.66364 61	(0) 5.60309 84	(0) 4.82245 42	(0) 4.23056 48
0.4	(1) 1.15266 06	(0) 9.30049 38	(0) 7.72517 18	(0) 6.56784 35	(0) 5.69204 18
0.5	(1) 1.54802 96	(1) 1.23835 54	(1) 1.01960 38	(0) 8.59185 66	(0) 7.38010 13
0.6	(1) 2.00855 37	(1) 1.59611 70	(1) 1.30526 48	(1) 1.09233 58	(0) 9.31770 09
0.7	(1) 2.54126 00	(1) 2.00855 37	(1) 1.63348 43	(1) 1.35934 30	(1) 1.15295 31
0.8	(1) 3.15373 75	(1) 2.48129 50	(1) 2.00855 37	(1) 1.66355 12	(1) 1.40421 20
0.9	(1) 3.85417 22	(1) 3.02040 57	(1) 2.43509 06	(1) 2.00855 37	(1) 1.68839 43
1.0	(1) 4.65138 52	(1) 3.63241 26	(1) 2.91805 85	(1) 2.39820 88	(1) 2.00855 37

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 4.0$

$a \backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(1)-3.90000 00	(1)-1.90000 00	(1)-1.23333 33	(0)-9.00000 00	(0)-7.00000 00
-0.9	(1)-5.28985 40	(1)-2.48147 20	(1)-1.55982 88	(1)-1.10723 65	(0)-8.40761 69
-0.8	(1)-6.56662 17	(1)-3.00867 57	(1)-1.85166 07	(1)-1.28958 24	(0)-9.62460 70
-0.7	(1)-7.65252 34	(1)-3.44868 41	(1)-2.09004 11	(1)-1.43486 25	(1)-1.05661 02
-0.6	(1)-8.45540 43	(1)-3.76267 54	(1)-2.25292 22	(1)-1.52885 30	(1)-1.11333 79
-0.5	(1)-8.86704 80	(1)-3.90525 49	(1)-2.31462 88	(1)-1.55505 56	(1)-1.12123 61
-0.4	(1)-8.76134 25	(1)-3.82372 05	(1)-2.24546 12	(1)-1.49445 23	(1)-1.06719 99
-0.3	(1)-7.99228 75	(1)-3.45726 34	(1)-2.01126 30	(1)-1.32524 14	(0)-9.36252 11
-0.2	(1)-6.39183 19	(1)-2.73610 36	(1)-1.57295 45	(1)-1.02255 01	(0)-7.11353 67
-0.1	(1)-3.76752 93	(1)-1.58055 26	(0)-8.86027 55	(0)-5.58125 37	(0)-3.73199 87
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(1) 5.45981 50	(1) 2.40818 08	(1) 1.44217 35	(0) 9.87867 71	(0) 7.32759 68
0.2	(2) 1.25936 21	(1) 5.45981 50	(1) 3.20473 65	(1) 2.14598 18	(1) 1.55257 11
0.3	(2) 2.18189 72	(1) 9.38520 09	(1) 5.45981 50	(1) 3.61972 65	(1) 2.59017 89
0.4	(2) 3.34927 25	(2) 1.43304 83	(1) 8.28815 42	(1) 5.45981 50	(1) 3.87987 49
0.5	(2) 4.80147 67	(2) 2.04591 31	(2) 1.17799 11	(1) 7.72277 23	(1) 5.45981 50
0.6	(2) 6.58320 17	(2) 2.79535 32	(2) 1.60355 04	(2) 1.04714 53	(1) 7.37235 87
0.7	(2) 8.74427 45	(2) 3.70166 95	(2) 2.11665 31	(2) 1.37755 99	(1) 9.66443 28
0.8	(3) 1.13401 20	(2) 4.78740 93	(2) 2.72967 48	(2) 1.77124 33	(2) 1.23879 22
0.9	(3) 1.44322 61	(2) 6.07756 33	(2) 3.45631 21	(2) 2.23672 99	(2) 1.56000 85
1.0	(3) 1.80888 49	(2) 7.59977 67	(2) 4.31169 57	(2) 2.78343 47	(2) 1.93640 05

$a \backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(0)-5.66666 67	(0)-4.71428 57	(0)-4.00000 00	(0)-3.44444 44	(0)-3.00000 00
-0.9	(0)-6.66432 27	(0)-5.44175 41	(0)-4.54078 84	(0)-3.85159 75	(0)-3.30880 92
-0.8	(0)-7.50985 56	(0)-6.04428 51	(0)-4.97675 07	(0)-4.16932 54	(0)-3.54030 67
-0.7	(0)-8.14117 89	(0)-6.47484 53	(0)-5.27129 22	(0)-4.36854 34	(0)-3.67096 90
-0.6	(0)-8.48636 64	(0)-6.67916 15	(0)-5.38234 50	(0)-4.41593 73	(0)-3.67394 51
-0.5	(0)-8.46261 04	(0)-6.59496 95	(0)-5.26181 06	(0)-4.27354 17	(0)-3.51873 12
-0.4	(0)-7.97509 54	(0)-6.15120 28	(0)-4.85495 90	(0)-3.89828 45	(0)-3.17081 98
-0.3	(0)-6.91578 17	(0)-5.26711 67	(0)-4.09978 13	(0)-3.24149 77	(0)-2.59132 26
-0.2	(0)-5.16209 26	(0)-3.85134 51	(0)-2.92629 19	(0)-2.24839 06	(0)-1.73656 51
-0.1	(0)-2.57549 99	(0)-1.80088 43	(0)-1.25577 95	(-1)-8.57483 35	(-1)-5.57651 91
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(0) 5.73952 56	(0) 4.68094 79	(0) 3.93968 87	(0) 3.40078 42	(0) 2.99716 17
0.2	(1) 1.18390 73	(0) 9.38676 76	(0) 7.67325 59	(0) 6.43024 18	(0) 5.50132 78
0.3	(1) 1.95174 11	(1) 1.52787 90	(1) 1.23229 94	(1) 1.01831 42	(0) 8.58729 05
0.4	(1) 2.90181 11	(1) 2.25363 21	(1) 1.80245 87	(1) 1.47644 52	(1) 1.23377 53
0.5	(1) 4.06117 30	(1) 3.13582 01	(1) 2.49282 52	(1) 2.02901 97	(1) 1.68439 84
0.6	(1) 5.45981 50	(1) 4.19644 69	(1) 3.31999 64	(1) 2.68883 75	(1) 2.22065 21
0.7	(1) 7.13090 76	(1) 5.45981 50	(1) 4.30227 62	(1) 3.46999 38	(1) 2.85359 16
0.8	(1) 9.11107 21	(1) 6.95271 64	(1) 5.45981 50	(1) 4.38798 40	(1) 3.59535 37
0.9	(2) 1.14406 67	(1) 8.70463 66	(1) 6.81475 87	(1) 5.45981 50	(1) 4.45924 13
1.0	(2) 1.41640 95	(2) 1.07479 72	(1) 8.39140 83	(1) 6.70412 50	(1) 5.45981 50

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 5.0$

$a \backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(1)-4.90000 00	(1)-2.40000 00	(1)-1.56666 67	(1)-1.15000 00	(0)-9.00000 00
-0.9	(1)-8.48135 46	(1)-3.90138 34	(1)-2.41382 36	(1)-1.69201 76	(1)-1.27235 43
-0.8	(2)-1.20177 53	(1)-5.37054 86	(1)-3.23511 34	(1)-2.21244 58	(1)-1.62630 91
-0.7	(2)-1.52985 90	(1)-6.71922 90	(1)-3.98065 33	(1)-2.67925 47	(1)-1.93973 31
-0.6	(2)-1.80596 42	(1)-7.83737 80	(1)-4.58862 62	(1)-3.05298 12	(1)-2.18551 10
-0.5	(2)-1.99749 08	(1)-8.58991 93	(1)-4.98353 39	(1)-3.28566 20	(1)-2.33084 19
-0.4	(2)-2.06475 40	(1)-8.81313 79	(1)-5.07426 08	(1)-3.31965 25	(1)-2.33646 31
-0.3	(2)-1.95997 71	(1)-8.31068 13	(1)-4.75193 11	(1)-3.08632 11	(1)-2.15579 45
-0.2	(2)-1.62617 59	(1)-6.84913 57	(1)-3.88754 12	(1)-2.50460 94	(1)-1.73399 46
-0.1	(1)-9.95925 89	(1)-4.15313 99	(1)-2.32934 93	(1)-1.47944 56	(1)-1.00692 28
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(2) 1.48413 16	(1) 6.28624 01	(1) 3.60663 62	(1) 2.36223 07	(1) 1.67304 26
0.2	(2) 3.53395 30	(2) 1.48413 16	(1) 8.42893 34	(1) 5.45552 50	(1) 3.81153 30
0.3	(2) 6.28371 74	(2) 2.62678 96	(2) 1.48413 16	(1) 9.55023 72	(1) 6.62935 70
0.4	(2) 9.87643 86	(2) 4.11434 26	(2) 2.31584 25	(2) 1.48413 16	(2) 1.02565 96
0.5	(3) 1.44760 74	(2) 6.01287 11	(2) 3.37396 77	(2) 2.15510 54	(2) 1.48413 16
0.6	(3) 2.02699 13	(2) 8.39773 11	(2) 4.69942 40	(2) 2.99320 90	(2) 2.05515 14
0.7	(3) 2.74711 92	(3) 1.13545 79	(2) 6.33864 72	(2) 4.02706 82	(2) 2.75772 43
0.8	(3) 3.63219 45	(3) 1.49804 92	(2) 8.34418 40	(2) 5.28902 72	(2) 3.61329 22
0.9	(3) 4.70961 17	(3) 1.93851 85	(3) 1.07753 37	(2) 6.81553 64	(2) 4.64598 46
1.0	(3) 6.01029 56	(3) 2.46923 43	(3) 1.36988 66	(2) 8.64757 36	(2) 5.88289 14

$a \backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(0)-7.33333 33	(0)-6.14285 71	(0)-5.25000 00	(0)-4.55555 56	(0)-4.00000 00
-0.9	(1)-1.00125 62	(0)-8.13469 15	(0)-6.76712 82	(0)-5.73274 31	(0)-4.92670 46
-0.8	(1)-1.25327 68	(0)-9.98761 99	(0)-8.16187 54	(0)-6.80132 29	(0)-5.75641 51
-0.7	(1)-1.47334 02	(1)-1.15809 94	(0)-9.34109 21	(0)-7.68780 55	(0)-6.43011 23
-0.6	(1)-1.64188 17	(1)-1.27685 52	(1)-1.01924 14	(0)-8.30396 66	(0)-6.87726 99
-0.5	(1)-1.73534 19	(1)-1.33749 40	(1)-1.05817 04	(0)-8.54492 28	(0)-7.01437 97
-0.4	(1)-1.72563 11	(1)-1.31918 93	(1)-1.03502 42	(0)-8.28701 58	(0)-6.74333 16
-0.3	(1)-1.57953 99	(1)-1.19740 11	(0)-9.31162 41	(0)-7.38548 98	(0)-5.94963 73
-0.2	(1)-1.25808 94	(0)-9.43413 73	(0)-7.24837 36	(0)-5.67194 55	(0)-4.50048 61
-0.1	(0)-7.15818 24	(0)-5.23827 09	(0)-3.90821 47	(0)-2.95155 22	(0)-2.24261 78
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(1) 1.25021 43	(0) 9.72559 33	(0) 7.81074 40	(0) 6.43982 88	(0) 5.42870 50
0.2	(1) 2.80473 44	(1) 2.14485 95	(1) 1.69066 81	(1) 1.36614 90	(1) 1.12729 02
0.3	(1) 4.84355 66	(1) 3.67515 33	(1) 2.87239 67	(1) 2.29989 34	(1) 1.87930 66
0.4	(1) 7.45788 26	(1) 5.62973 09	(1) 4.37580 33	(1) 3.48308 09	(1) 2.82840 13
0.5	(2) 1.07513 41	(1) 8.08378 40	(1) 6.25698 73	(1) 4.95851 46	(1) 4.00784 46
0.6	(2) 1.48413 16	(2) 1.11223 46	(1) 8.57928 78	(1) 6.77444 40	(1) 5.45508 08
0.7	(2) 1.98603 96	(2) 1.48413 16	(2) 1.14140 27	(1) 8.98511 69	(1) 7.21214 61
0.8	(2) 2.59579 43	(2) 1.93485 65	(2) 1.48413 16	(2) 1.16513 78	(1) 9.32612 06
0.9	(2) 3.33018 07	(2) 2.47651 46	(2) 1.89509 28	(2) 1.48413 16	(2) 1.18496 18
1.0	(2) 4.20801 74	(2) 3.12265 96	(2) 2.38432 45	(2) 1.86309 66	(2) 1.48413 16

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 6.0$

$a \backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(1)-5.90000 00	(1)-2.90000 00	(1)-1.90000 00	(1)-1.40000 00	(1)-1.10000 00
-0.9	(2)-1.44132 92	(1)-6.43961 14	(1)-3.88390 81	(1)-2.66287 93	(1)-1.96459 57
-0.8	(2)-2.33128 14	(2)-1.01116 95	(1)-5.92627 62	(1)-3.95288 49	(1)-2.84081 83
-0.7	(2)-3.20791 31	(2)-1.37008 05	(1)-7.90656 11	(1)-5.19335 87	(1)-3.67618 94
-0.6	(2)-4.00174 16	(2)-1.69209 38	(1)-9.66592 36	(1)-6.28400 93	(1)-4.40252 67
-0.5	(2)-4.62243 63	(2)-1.94024 69	(2)-1.10002 61	(1)-7.09668 98	(1)-4.93318 77
-0.4	(2)-4.95505 80	(2)-2.06773 13	(2)-1.16523 15	(1)-7.47062 14	(1)-5.15995 73
-0.3	(2)-4.85579 61	(2)-2.01621 45	(2)-1.13027 51	(1)-7.20700 55	(1)-4.94954 27
-0.2	(2)-4.14715 07	(2)-1.71394 56	(1)-9.56011 20	(1)-6.06296 12	(1)-4.13963 47
-0.1	(2)-2.61250 17	(2)-1.07362 31	(1)-5.94951 89	(1)-3.74471 97	(1)-2.53449 16
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(2) 4.03428 79	(2) 1.66280 07	(1) 9.26969 34	(1) 5.89051 37	(1) 4.04184 10
0.2	(2) 9.83405 67	(2) 4.03428 79	(2) 2.23669 33	(2) 1.41226 82	(1) 9.61906 66
0.3	(3) 1.78513 43	(2) 7.30095 48	(2) 4.03428 79	(2) 2.53795 01	(2) 1.72165 84
0.4	(3) 2.86060 97	(3) 1.16700 13	(2) 6.43121 54	(2) 4.03428 79	(2) 2.72837 67
0.5	(3) 4.27068 45	(3) 1.73835 48	(2) 9.55746 91	(2) 5.98067 12	(2) 4.03428 79
0.6	(3) 6.08625 44	(3) 2.47231 35	(3) 1.35639 99	(2) 8.46913 69	(2) 5.69983 97
0.7	(3) 8.38957 36	(3) 3.40149 55	(3) 1.86253 97	(3) 1.16059 73	(2) 7.79473 21
0.8	(4) 1.12757 14	(3) 4.56354 65	(3) 2.49428 70	(3) 1.55134 92	(3) 1.03990 56
0.9	(4) 1.48541 80	(3) 6.00176 64	(3) 3.27475 26	(3) 2.03319 84	(3) 1.36045 49
1.0	(4) 1.92506 91	(3) 7.76580 14	(3) 4.23039 92	(3) 2.62218 79	(3) 1.75159 77

$a \backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(0)-9.00000 00	(0)-7.57142 86	(0)-6.50000 00	(0)-5.66666 67	(0)-5.00000 00
-0.9	(1)-1.52103 70	(1)-1.21887 04	(1)-1.00236 52	(0)-8.41150 68	(0)-7.17389 32
-0.8	(1)-2.14539 69	(1)-1.67928 88	(1)-1.35080 52	(1)-1.11025 64	(0)-9.28639 79
-0.7	(1)-2.73534 89	(1)-2.11028 68	(1)-1.67379 50	(1)-1.35713 62	(1)-1.12032 42
-0.6	(1)-3.24219 87	(1)-2.47582 00	(1)-1.94390 70	(1)-1.56045 26	(1)-1.27553 63
-0.5	(1)-3.60439 87	(1)-2.73056 65	(1)-2.12682 93	(1)-1.69364 40	(1)-1.37333 18
-0.4	(1)-3.74541 77	(1)-2.81841 55	(1)-2.18026 23	(1)-1.72410 15	(1)-1.38810 25
-0.3	(1)-3.57134 39	(1)-2.67076 84	(1)-2.05268 12	(1)-1.61224 68	(1)-1.28887 64
-0.2	(1)-2.96819 67	(1)-2.20463 65	(1)-1.68195 09	(1)-1.31050 12	(1)-1.03853 60
-0.1	(1)-1.79891 61	(1)-1.32051 32	(0)-9.93780 50	(0)-7.62137 49	(0)-5.92948 86
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(1) 2.92224 67	(1) 2.19683 71	(1) 1.70335 65	(1) 1.35491 58	(1) 1.10148 13
0.2	(1) 6.89588 66	(1) 5.13440 78	(1) 3.93817 92	(1) 3.09503 99	(1) 2.48291 09
0.3	(2) 1.22879 89	(1) 9.10486 02	(1) 6.94664 31	(1) 5.42797 37	(1) 4.32726 56
0.4	(2) 1.94097 77	(2) 1.43316 97	(2) 1.08938 21	(1) 8.47842 06	(1) 6.73053 68
0.5	(2) 2.86223 27	(2) 2.10737 78	(2) 1.59705 69	(2) 1.23903 18	(1) 9.80333 40
0.6	(2) 4.03428 79	(2) 2.96297 41	(2) 2.23967 22	(2) 1.73291 89	(2) 1.36726 52
0.7	(2) 5.50517 98	(2) 4.03428 79	(2) 3.04245 98	(2) 2.34847 33	(2) 1.84838 13
0.8	(2) 7.33002 58	(2) 5.36065 25	(2) 4.03428 79	(2) 3.10736 70	(2) 2.44026 08
0.9	(2) 9.57187 15	(2) 6.98699 63	(2) 5.24808 61	(2) 4.03428 79	(2) 3.16176 35
1.0	(3) 1.23026 21	(2) 8.96449 42	(2) 6.72131 30	(2) 5.15728 26	(2) 4.03428 79

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x=7.0$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(1)-6.90000 00	(1)-3.40000 00	(1)-2.23333 33	(1)-1.65000 00	(1)-1.30000 00
-0.9	(2)-2.66288 80	(2)-1.15002 17	(1)-6.72111 28	(1)-4.47674 11	(1)-3.21693 87
-0.8	(2)-4.82834 55	(2)-2.03315 80	(2)-1.15809 32	(1)-7.51697 57	(1)-5.26450 27
-0.7	(2)-7.06530 95	(2)-2.93971 82	(2)-1.65375 76	(2)-1.05973 99	(1)-7.32517 82
-0.6	(2)-9.19980 13	(2)-3.79893 33	(2)-2.12025 19	(2)-1.34754 31	(1)-9.23583 79
-0.5	(3)-1.09929 51	(2)-4.51426 47	(2)-2.50491 09	(2)-1.58243 03	(2)-1.07780 84
-0.4	(3)-1.21270 91	(2)-4.95796 49	(2)-2.73838 73	(2)-1.72158 27	(2)-1.16671 10
-0.3	(3)-1.21896 61	(2)-4.96479 64	(2)-2.73134 11	(2)-1.71005 68	(2)-1.15389 05
-0.2	(3)-1.06546 71	(2)-4.32480 32	(2)-2.37063 77	(2)-1.47850 91	(1)-9.93558 67
-0.1	(2)-6.86139 84	(2)-2.77502 15	(2)-1.51499 28	(1)-9.40594 48	(1)-6.28867 03
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(3) 1.09663 32	(2) 4.42900 71	(2) 2.41753 11	(2) 1.50292 87	(2) 1.00798 98
0.2	(3) 2.72330 73	(3) 1.09663 32	(2) 5.96600 60	(2) 3.69501 44	(2) 2.46763 45
0.3	(3) 5.02903 83	(3) 2.02058 34	(3) 1.09663 32	(2) 6.77457 83	(2) 4.51182 31
0.4	(3) 8.19139 01	(3) 3.28466 83	(3) 1.77901 54	(3) 1.09663 32	(2) 7.28692 93
0.5	(4) 1.24220 89	(3) 4.97211 80	(3) 2.68791 51	(3) 1.65368 85	(3) 1.09663 32
0.6	(4) 1.79722 28	(3) 7.18148 47	(3) 3.87554 96	(3) 2.38009 49	(3) 1.57543 68
0.7	(4) 2.51381 30	(4) 1.00289 02	(3) 5.40336 15	(3) 3.31282 90	(3) 2.18907 73
0.8	(4) 3.42679 34	(4) 1.36506 23	(3) 7.34333 78	(3) 4.49515 29	(3) 2.96556 40
0.9	(4) 4.57689 88	(4) 1.82058 62	(3) 9.77948 66	(3) 5.97748 66	(3) 3.93749 79
1.0	(4) 6.01161 32	(4) 2.38799 82	(4) 1.28094 89	(3) 7.81838 27	(3) 5.14269 05

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(1)-1.06666 67	(0)-9.00000 00	(0)-7.75000 00	(0)-6.77777 78	(0)-6.00000 00
-0.9	(1)-2.43203 85	(1)-1.90770 95	(1)-1.53927 06	(1)-1.27012 46	(1)-1.06732 11
-0.8	(1)-3.88035 55	(1)-2.96917 41	(1)-2.33863 78	(1)-1.88526 21	(1)-1.54912 65
-0.7	(1)-5.32790 43	(1)-4.02257 88	(1)-3.12617 60	(1)-2.48676 78	(1)-2.01662 21
-0.6	(1)-6.65941 15	(1)-4.98346 93	(1)-3.83826 01	(1)-3.02562 11	(1)-2.43133 06
-0.5	(1)-7.72147 28	(1)-5.74011 58	(1)-4.39120 14	(1)-3.43770 69	(1)-2.74320 50
-0.4	(1)-8.31498 75	(1)-6.14818 51	(1)-4.67738 87	(1)-3.64095 75	(1)-2.88847 09
-0.3	(1)-8.18647 83	(1)-6.02463 60	(1)-4.56087 46	(1)-3.53208 76	(1)-2.78716 65
-0.2	(1)-7.01816 36	(1)-5.14074 94	(1)-3.87234 20	(1)-2.98287 74	(1)-2.34034 55
-0.1	(1)-4.41663 81	(1)-3.21419 15	(1)-2.40338 13	(1)-1.83595 18	(1)-1.42690 55
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(1) 7.11674 98	(1) 5.21962 63	(1) 3.94472 08	(1) 3.05562 65	(1) 2.41701 00
0.2	(2) 1.73382 30	(2) 1.26468 67	(1) 9.49891 56	(1) 7.30700 42	(1) 5.73511 61
0.3	(2) 3.16073 31	(2) 2.29812 96	(2) 1.72012 72	(2) 1.31824 90	(2) 1.03047 87
0.4	(2) 5.09262 36	(2) 3.69345 22	(2) 2.75715 27	(2) 2.10704 18	(2) 1.64217 15
0.5	(2) 7.64800 47	(2) 5.53466 48	(2) 4.12222 44	(2) 3.14277 19	(2) 2.44332 54
0.6	(3) 1.09663 32	(2) 7.92047 08	(2) 5.88720 07	(2) 4.47895 79	(2) 3.47456 13
0.7	(3) 1.52109 75	(3) 1.09663 32	(2) 8.13601 69	(2) 6.17802 12	(2) 4.78318 84
0.8	(3) 2.05725 48	(3) 1.48067 73	(3) 1.09663 32	(2) 8.31248 87	(2) 6.42409 85
0.9	(3) 2.72726 12	(3) 1.95979 60	(3) 1.44913 63	(3) 1.09663 32	(2) 8.46076 16
1.0	(3) 3.55678 22	(3) 2.55205 62	(3) 1.88419 29	(3) 1.42364 54	(3) 1.09663 32

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 8.0$

$a \backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(1)-7.90000 00	(1)-3.90000 00	(1)-2.56666 67	(1)-1.90000 00	(1)-1.50000 00
-0.9	(2)-5.35947 58	(2)-2.23970 82	(2)-1.26764 73	(1)-8.18608 14	(1)-5.71092 02
-0.8	(3)-1.05913 37	(2)-4.34517 66	(2)-2.41159 61	(2)-1.52562 18	(2)-1.04182 83
-0.7	(3)-1.62135 82	(2)-6.59589 37	(2)-3.62791 31	(2)-2.27325 01	(2)-1.53682 58
-0.6	(3)-2.18025 86	(2)-8.82153 60	(2)-4.82414 97	(2)-3.00441 34	(2)-2.01811 79
-0.5	(3)-2.67429 61	(3)-1.07763 74	(2)-5.86783 06	(2)-3.63786 60	(2)-2.43202 00
-0.4	(3)-3.01799 53	(3)-1.21208 08	(2)-6.57678 93	(2)-4.06244 15	(2)-2.70544 00
-0.3	(3)-3.09632 67	(3)-1.23996 24	(2)-6.70780 36	(2)-4.13029 89	(2)-2.74155 31
-0.2	(3)-2.75810 97	(3)-1.10164 91	(2)-5.94329 13	(2)-3.64902 75	(2)-2.41475 59
-0.1	(3)-1.80829 89	(2)-7.20419 31	(2)-3.87580 16	(2)-2.37245 74	(2)-1.56480 05
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(3) 2.98095 80	(3) 1.18444 63	(2) 6.35818 11	(2) 3.88567 25	(2) 2.56061 41
0.2	(3) 7.51808 32	(3) 2.98095 80	(3) 1.59656 00	(2) 9.73282 54	(2) 6.39631 86
0.3	(4) 1.40881 29	(3) 5.57611 41	(3) 2.98095 80	(3) 1.81369 75	(3) 1.18950 58
0.4	(4) 2.32720 88	(3) 9.19616 72	(3) 4.90796 57	(3) 2.98095 80	(3) 1.95153 01
0.5	(4) 3.57745 28	(4) 1.41150 69	(3) 7.52139 08	(3) 4.56094 12	(3) 2.98095 80
0.6	(4) 5.24445 76	(4) 2.06625 00	(4) 1.09940 42	(3) 6.65669 18	(3) 4.34399 08
0.7	(4) 7.42998 57	(4) 2.92330 17	(4) 1.55324 53	(3) 9.39119 38	(3) 6.11953 13
0.8	(5) 1.02553 76	(4) 4.02964 70	(4) 2.13822 46	(4) 1.29105 19	(3) 8.40117 14
0.9	(5) 1.38646 40	(4) 5.44098 22	(4) 2.88342 27	(4) 1.73873 91	(4) 1.12994 43
1.0	(5) 1.84279 80	(4) 7.22305 38	(4) 3.82312 68	(4) 2.30252 22	(4) 1.49443 61

$a \backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(1)-1.23333 33	(1)-1.04285 71	(0)-9.00000 00	(0)-7.88888 89	(0)-7.00000 00
-0.9	(1)-4.19816 11	(1)-3.20746 94	(1)-2.52522 99	(1)-2.03685 45	(1)-1.67621 46
-0.8	(1)-7.49216 65	(1)-5.59749 62	(1)-4.30847 38	(1)-3.39751 08	(1)-2.73380 70
-0.7	(2)-1.09361 95	(1)-8.08183 59	(1)-6.15107 90	(1)-4.79493 78	(1)-3.81325 44
-0.6	(2)-1.42648 08	(2)-1.04680 37	(1)-7.90952 94	(1)-6.11965 64	(1)-4.82945 42
-0.5	(2)-1.71051 24	(2)-1.24874 83	(1)-9.38477 69	(1)-7.22077 10	(1)-5.66582 71
-0.4	(2)-1.89519 44	(2)-1.37780 10	(2)-1.03097 46	(1)-7.89678 13	(1)-6.16743 32
-0.3	(2)-1.91386 58	(2)-1.38635 99	(2)-1.03347 63	(1)-7.88488 72	(1)-6.13297 12
-0.2	(2)-1.68033 35	(2)-1.21307 63	(1)-9.01063 22	(1)-6.84858 28	(1)-5.30551 30
-0.1	(2)-1.08493 76	(1)-7.80116 43	(1)-5.76904 74	(1)-4.36332 11	(1)-3.36181 13
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(2) 1.77542 34	(2) 1.27804 07	(1) 9.47420 10	(1) 7.19400 22	(1) 5.57451 38
0.2	(2) 4.42157 41	(2) 3.17224 03	(2) 2.34287 19	(2) 1.77165 46	(2) 1.36651 86
0.3	(2) 8.20490 47	(2) 5.87308 59	(2) 4.32702 55	(2) 3.26355 40	(2) 2.51027 48
0.4	(3) 1.34359 84	(2) 9.59878 19	(2) 7.05759 09	(2) 5.31172 06	(2) 4.07661 58
0.5	(3) 2.04885 12	(3) 1.46114 76	(3) 1.07237 41	(2) 8.05582 19	(2) 6.17064 03
0.6	(3) 2.98095 80	(3) 2.12243 36	(3) 1.55511 32	(3) 1.16622 16	(2) 8.91734 62
0.7	(3) 4.19313 16	(3) 2.98095 80	(3) 2.18075 96	(3) 1.63280 79	(3) 1.24646 81
0.8	(3) 5.74840 89	(3) 4.08075 63	(3) 2.98095 80	(3) 2.22860 68	(3) 1.69869 84
0.9	(3) 7.72114 36	(3) 5.47370 48	(3) 3.99294 06	(3) 2.98095 80	(3) 2.26888 68
1.0	(4) 1.01986 91	(3) 7.22067 87	(3) 5.26034 65	(3) 3.92186 75	(3) 2.98095 80

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 9.0$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
−1.0	(1)−8.90000 00	(1)−4.40000 00	(1)−2.90000 00	(1)−2.15000 00	(1)−1.70000 00
−0.9	(3)−1.15822 92	(2)−4.70696 01	(2)−2.58988 67	(2)−1.62573 25	(2)−1.10263 21
−0.8	(3)−2.42781 38	(2)−9.74816 44	(2)−5.29323 09	(2)−3.27532 02	(2)−2.18739 83
−0.7	(3)−3.83823 48	(3)−1.53240 98	(2)−8.26992 61	(2)−5.08337 71	(2)−3.37079 66
−0.6	(3)−5.28795 76	(3)−2.10310 78	(3)−1.13032 66	(2)−6.91755 27	(2)−4.56573 11
−0.5	(3)−6.62068 16	(3)−2.62521 11	(3)−1.40643 82	(2)−8.57840 43	(2)−5.64186 81
−0.4	(3)−7.60990 61	(3)−3.00975 26	(3)−1.60814 10	(2)−9.78118 66	(2)−6.41404 87
−0.3	(3)−7.94036 79	(3)−3.13336 92	(3)−1.67025 41	(3)−1.01340 64	(2)−6.62844 84
−0.2	(3)−7.18584 92	(3)−2.82979 30	(3)−1.50519 87	(2)−9.11218 60	(2)−5.94613 42
−0.1	(3)−4.78278 15	(3)−1.87974 72	(2)−[illegible].97775 31	(2)−6.02698 67	(2)−3.92362 38
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(3) 8.10308 39	(3) 3.17569 47	(3) 1.68114 27	(3) 1.01296 25	(2) 6.57992 17
0.2	(4) 2.07097 19	(3) 8.10308 39	(3) 4.28218 60	(3) 2.57548 14	(3) 1.66969 38
0.3	(4) 3.93063 86	(4) 1.53566 77	(3) 8.10308 39	(3) 4.86584 85	(3) 3.14939 49
0.4	(4) 6.57367 60	(4) 2.56471 76	(4) 1.35137 30	(3) 8.10308 39	(3) 5.23683 11
0.5	(5) 1.02271 23	(4) 3.98485 11	(4) 2.09683 16	(4) 1.25557 31	(3) 8.10308 39
0.6	(5) 1.51686 28	(4) 5.90279 86	(4) 3.10207 78	(4) 1.85508 62	(4) 1.19562 36
0.7	(5) 2.17356 27	(4) 8.44810 69	(4) 4.43426 09	(4) 2.64844 50	(4) 1.70478 81
0.8	(5) 3.03359 16	(5) 1.17771 47	(4) 6.17433 59	(4) 3.68332 96	(4) 2.36805 96
0.9	(5) 4.14598 16	(5) 1.60777 16	(4) 8.41941 52	(4) 5.01687 01	(4) 3.22165 07
1.0	(5) 5.56941 19	(5) 2.15743 14	(5) 1.12854 63	(4) 6.71721 10	(4) 4.30870 75

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
−1.0	(1)−1.40000 00	(1)−1.18571 43	(1)−1.02500 00	(0)−9.00000 00	(0)−8.00000 00
−0.9	(1)−7.88310 88	(1)−5.86101 35	(1)−4.49394 10	(1)−3.53363 88	(1)−2.83797 81
−0.8	(2)−1.53831 87	(2)−1.12401 55	(1)−8.46300 77	(1)−6.53007 44	(1)−5.14354 17
−0.7	(2)−2.35259 85	(2)−1.70516 69	(2)−1.27296 76	(1)−9.73476 07	(1)−7.59652 04
−0.6	(2)−3.17089 67	(2)−2.28631 95	(2)−1.69747 84	(2)−1.29066 47	(2)−1.00113 60
−0.5	(2)−3.90366 91	(2)−2.80365 84	(2)−2.07304 42	(2)−1.56947 14	(2)−1.21196 37
−0.4	(2)−4.42433 15	(2)−3.16741 38	(2)−2.33416 78	(2)−1.76099 80	(2)−1.35492 40
−0.3	(2)−4.56001 78	(2)−3.25546 25	(2)−2.39208 63	(2)−1.79922 96	(2)−1.37997 11
−0.2	(2)−4.08061 95	(2)−2.90574 94	(2)−2.12938 18	(2)−1.59711 34	(2)−1.22131 75
−0.1	(2)−2.68584 35	(2)−1.90735 35	(2)−1.39363 74	(2)−1.04195 05	(1)−7.94021 75
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(2) 4.49581 13	(2) 3.18820 43	(2) 2.32750 60	(2) 1.73981 39	(2) 1.32662 16
0.2	(3) 1.13844 85	(2) 8.05506 28	(2) 5.86608 76	(2) 4.37321 78	(2) 3.32490 16
0.3	(3) 2.14370 76	(3) 1.51408 89	(3) 1.10059 12	(2) 8.18906 59	(2) 6.21332 82
0.4	(3) 3.55908 19	(3) 2.50977 29	(3) 1.82136 70	(3) 1.35291 34	(3) 1.02470 26
0.5	(3) 5.49915 09	(3) 3.87215 54	(3) 2.80582 25	(3) 2.08094 05	(3) 1.57360 49
0.6	(3) 8.10308 39	(3) 5.69778 22	(3) 4.12286 14	(3) 3.05330 38	(3) 2.30549 09
0.7	(4) 1.15389 32	(3) 8.10308 39	(3) 5.85547 03	(3) 4.33052 37	(3) 3.26534 78
0.8	(4) 1.60085 54	(4) 1.12277 41	(3) 8.10308 39	(3) 5.98502 62	(3) 4.50694 55
0.9	(4) 2.17532 51	(4) 1.52385 32	(4) 1.09842 88	(3) 8.10308 39	(3) 6.09425 86
1.0	(4) 2.90602 06	(4) 2.03337 24	(4) 1.46399 00	(4) 1.07870 28	(3) 8.10308 39

Таблица 13.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $M(a, b, x)$

$x = 10.0$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	(1)-9.90000 00	(1)-4.90000 00	(1)-3.23333 33	(1)-2.40000 00	(1)-1.90000 00
-0.9	(3)-2.63572 95	(3)-1.04774 98	(2)-5.63504 48	(2)-3.45535 97	(2)-2.28812 39
-0.8	(3)-5.74321 45	(3)-2.26606 51	(3)-1.20865 20	(2)-7.34339 26	(2)-4.81371 33
-0.7	(3)-9.29414 29	(3)-3.65315 21	(3)-1.94041 89	(3)-1.17365 02	(2)-7.65615 62
-0.6	(4)-1.30473 07	(3)-5.11412 18	(3)-2.70839 91	(3)-1.63300 24	(3)-1.06170 13
-0.5	(4)-1.66086 19	(3)-6.49508 42	(3)-3.43144 26	(3)-2.06370 40	(3)-1.33814 35
-0.4	(4)-1.93829 90	(3)-7.56478 22	(3)-3.98819 28	(3)-2.39329 23	(3)-1.54831 36
-0.3	(4)-2.05153 93	(3)-7.99213 74	(3)-4.20553 66	(3)-2.51877 45	(3)-1.62617 94
-0.2	(4)-1.88191 87	(3)-7.31898 36	(3)-3.84460 18	(3)-2.29844 83	(3)-1.48115 57
-0.1	(4)-1.26894 82	(3)-4.92715 82	(3)-2.58388 05	(3)-1.54205 59	(2)-9.91916 94
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(4) 2.20264 66	(3) 8.52983 30	(3) 4.46140 89	(3) 2.65569 71	(3) 1.70399 66
0.2	(4) 5.69563 19	(4) 2.20264 66	(4) 1.15043 71	(3) 6.83804 74	(3) 4.38084 00
0.3	(5) 1.09330 93	(4) 4.22272 41	(4) 2.20264 66	(4) 1.30747 73	(3) 8.36496 74
0.4	(5) 1.84869 24	(4) 7.13160 87	(4) 3.71537 68	(4) 2.20264 66	(4) 1.40739 54
0.5	(5) 2.90713 00	(5) 1.12016 64	(4) 5.82887 58	(4) 3.45147 55	(4) 2.20264 66
0.6	(5) 4.35713 28	(5) 1.67700 20	(4) 8.71652 20	(4) 5.15540 77	(4) 3.28620 65
0.7	(5) 6.30765 47	(5) 2.42511 79	(5) 1.25912 31	(4) 7.43887 06	(4) 4.73642 75
0.8	(5) 8.89199 75	(5) 3.41517 02	(5) 1.77129 13	(5) 1.04535 82	(4) 6.64873 73
0.9	(6) 1.22723 53	(5) 4.70872 70	(5) 2.43971 24	(5) 1.43835 42	(4) 9.13874 32
1.0	(6) 1.66450 66	(5) 6.38024 53	(5) 3.30250 83	(5) 1.94508 11	(5) 1.23458 19

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	(1)-1.56666 67	(1)-1.32857 14	(1)-1.15000 00	(1)-1.01111 11	(0)-9.00000 00
-0.9	(2)-1.59656 19	(2)-1.15824 17	(1)-8.66482 26	(1)-6.64811 79	(1)-5.21121 29
-0.8	(2)-3.32180 59	(2)-2.38103 41	(2)-1.75833 05	(2)-1.33052 77	(2)-1.02772 90
-0.7	(2)-5.25566 60	(2)-3.74603 08	(2)-2.74969 50	(2)-2.06733 55	(2)-1.58596 75
-0.6	(2)-7.26224 96	(2)-5.15669 48	(2)-3.77001 68	(2)-2.82246 37	(2)-2.15560 45
-0.5	(2)-9.12749 57	(2)-6.46204 50	(2)-4.70972 63	(2)-3.51454 04	(2)-2.67503 59
-0.4	(3)-1.05359 27	(2)-7.44065 06	(2)-5.40890 80	(2)-4.02538 09	(2)-3.05522 11
-0.3	(3)-1.10424 16	(2)-7.78122 74	(2)-5.64358 20	(2)-4.19006 43	(2)-3.17236 75
-0.2	(3)-1.00381 19	(2)-7.05925 89	(2)-5.10920 02	(2)-3.78501 43	(2)-2.85915 68
-0.1	(2)-6.70959 43	(2)-4.70898 38	(2)-3.40090 10	(2)-2.51375 92	(2)-1.89427 82
0.0	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00	(0)+1.00000 00
0.1	(3) 1.14989 01	(2) 8.05237 11	(2) 5.80387 50	(2) 4.28243 19	(2) 3.22252 43
0.2	(3) 2.95153 65	(3) 2.06339 28	(3) 1.48456 77	(3) 1.09332 07	(2) 8.21055 88
0.3	(3) 5.62785 57	(3) 3.92867 40	(3) 2.82236 24	(3) 2.07532 55	(3) 1.55600 88
0.4	(3) 9.45635 54	(3) 6.59238 53	(3) 4.72945 31	(3) 3.47272 61	(3) 2.59995 59
0.5	(4) 1.47812 55	(4) 1.02914 95	(3) 7.37367 65	(3) 5.40715 90	(3) 4.04275 54
0.6	(4) 2.20264 66	(4) 1.53174 58	(4) 1.09611 92	(3) 8.02783 98	(3) 5.99449 62
0.7	(4) 3.17106 89	(4) 2.20264 66	(4) 1.57436 46	(4) 1.15166 83	(3) 8.58922 62
0.8	(4) 4.44649 42	(4) 3.08513 39	(4) 2.20264 66	(4) 1.60942 26	(4) 1.19892 63
0.9	(4) 6.10528 43	(4) 4.23152 76	(4) 3.01784 47	(4) 2.20264 66	(4) 1.63901 69
1.0	(4) 8.23940 35	(4) 5.70477 12	(4) 4.06428 07	(4) 2.96327 38	(4) 2.20264 66

Таблица 13.2. Нули функции $M(a, b, x)$

$a\backslash b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-1.0	0.10000 00	0.20000 00	0.30000 00	0.40000 00	0.50000 00
-0.9	0.11054 47	0.22012 64	0.32894 15	0.43713 15	0.54480 16
-0.8	0.12357 83	0.24477 52	0.36411 44	0.48196 35	0.59858 98
-0.7	0.14010 11	0.27567 24	0.40779 72	0.53721 21	0.66443 91
-0.6	0.16173 42	0.31555 72	0.46354 99	0.60707 04	0.74705 02
-0.5	0.19128 98	0.36906 09	0.53728 03	0.69839 96	0.85403 26
-0.4	0.23411 73	0.44470 78	0.63961 58	0.82334 00	0.99868 55
-0.3	0.30182 31	0.56019 88	0.79200 44	1.00591 69	1.20695 84
-0.2	0.42537 31	0.75993 80	1.04632 32	1.30289 37	1.53918 36
-0.1	0.72703 16	1.20342 40	1.58016 05	1.90320 51	2.19258 90

$a\backslash b$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
-1.0	0.60000 00	0.70000 00	0.80000 00	0.90000 00	1.00000 00
-0.9	0.65203 19	0.75888 50	0.86541 05	0.97164 85	1.07763 19
-0.8	0.71419 38	0.82892 89	0.94291 59	1.05625 10	1.16901 22
-0.7	0.78986 07	0.91376 55	1.03637 62	1.15786 85	1.27838 33
-0.6	0.88415 45	1.01887 44	1.15158 21	1.28256 70	1.41205 79
-0.5	1.00529 53	1.15298 99	1.29771 21	1.43991 63	1.57995 68
-0.4	1.16751 37	1.33112 03	1.49044 27	1.64618 10	1.79887 13
-0.3	1.39828 59	1.58200 88	1.75960 56	1.93215 19	2.10045 49
-0.2	1.76075 91	1.97114 63	2.17271 84	2.36714 89	2.55566 24
-0.1	2.45881 88	2.70808 56	2.94434 51	3.17028 02	3.38779 57

В табл. 13.2 приводится наименьший нуль по x функции $M(a, b, x)$, расположенный вблизи $a = b = 0$, т.е. наименьший положительный корень по x уравнения $M(a, b, x) = 0$. Линейная интерполяция позволяет получить 3—4 S. Интерполирование по двум переменным при помощи шеститочечной формулы Лагранжа дает 7 S.

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

13.1. Buchholz H. Die konfluente hypergeometrische Funktion. — B.: Springer-Verlag, 1953.

13.2. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V. 1, Ch. 6. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973, Т.I.

13.3. Jeffreys H., Jeffreys B. S. Methods of mathematical physics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1950, Ch. 23. Русский перевод: Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. — М.: Мир, 1969, Вып. 1; 1970, Вып. 2, 3.

13.4. Miller J. C. P. Note on the general solutions of the confluent hypergeometric equation. — Math. Tables Aids Comp., 1957, **9**, p. 97—99.

13.5. Slater L. J. On the evaluation of the confluent hypergeometric function. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, p. 612—622.

13.6. Slater L. J. The evaluation of the basic confluent hypergeometric function. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, p. 404—413.

13.7. Slater L. J. The real zeros of the confluent hypergeometric function. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **52**, p. 626—635.

13.8. Swanson C. A., Erdélyi A. Asymptotic forms of confluent hypergeometric functions. — Amer. Math. Soc., 1957. — Memoir 25.

13.9. Tricomi F. G. Funzioni ipergeometriche confluenti. — R.: Edizioni Cremonese, 1954.

13.10. Whittaker E. T., Watson G. N. A course of modern analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952, Ch. 16. Русский перевод: Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1963, Т.II.

Таблицы

13.11. Airey J. R. The confluent hypergeometric function. — In: British Association Reports. Oxford, 1926, p. 276—294.

13.12. Airey J. R., Webb H. A. The practical importance of the confluent hypergeometric function. — Phil. Mag., 1918, **36**, p. 129—141.

13.13. Jahnke E., Emde F. Tables of functions. — N.Y.: Dover Publications, 1945, Ch. 10. Русский перевод: Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

13.14. Nath P. Confluent hypergeometric functions. — Sankhya J. Indian Statist. Soc., 1951, **11**, p. 153—166.

13.15. Rushton S., Lang E. D. Tables of the confluent hupergeometric function. — Sankhya J. Indian Statist. Soc., 1954, **13**, p. 369—411.

13.16. Slater L. J. Confluent hypergeometric functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960. Русский перевод: Слейтер Л. Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. — М.: ВЦ АН СССР, 1966. — (БМТ; Вып. 39).

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Книги и статьи

13.17. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.

13.18. Керимов М. К. Некоторые новые результаты по теории функций Вебера. — В кн.: Миллер Дж. Ч.П. Таблицы функций Вебера. М.: ВЦ АН СССР, 1968. — (БМТ; Вып. 45).

13.19. Кратцер Л., Франц В. Трансцендентные функции. — М.: ИЛ, 1963.

13.20. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963.

Таблицы

13.21. Журина М. И., Осипова Л. Н. Таблицы вырожденной гипергеометрической функции. — М.: ВЦ АН СССР, 1964.

$M(\alpha, 2, x)$, $U(\alpha, 2, x)$; $\alpha = -0.98(0.02)1.1$,

$x = 0(0.01)4$; $6-7D$.

.22. Керимов М. К. Обзор таблиц волновых функций Кулона. — В кн.: Кертис А. П. Волновые функции Кулона. М.: ВЦ АН СССР, 1969. — (БМТ; Вып. 47).

13.23. Осипова Л. Н. Таблицы вырожденной гипергеометрической функции второго рода. — М.: ВЦ АН СССР, 1972.

$U(\alpha, \gamma, x)$, $\alpha = -1(0.1)1$; $\gamma = 0.1(0.1)1$,

$x = 0.05(0.05)10.4$; $8S$.

Глава 14
ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ КУЛОНА

М. АБРАМОВИЦ

СОДЕРЖАНИЕ

14.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ

Дифференциальное уравнение

14.1.1. $$\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \left[1 - \frac{2\eta}{\rho} - \frac{L(L+1)}{\rho^2}\right] w = 0$$

($\rho > 0$, $-\infty < \eta < \infty$, L — неотрицательное целое).

Волновое уравнение Кулона при $\rho = 0$ имеет регулярную особенность с индексами $L + 1$ и $-L$; оно имеет иррегулярную особенность при $\rho = \infty$.

Общее решение

14.1.2. $w = C_1 F_L(\eta, \rho) + C_2 G_L(\eta, \rho)$ (C_1, C_2 — постоянные), где $F_L(\eta, \rho)$ — регулярная волновая функция Кулона, $G_L(\eta, \rho)$ — иррегулярная (логарифмическая) волновая функция Кулона.

Регулярная волновая функция Кулона $F_L(\eta, \rho)$

14.1.3. $$F_L(\eta, \rho) = C_L(\eta)\, \rho^{L+1} e^{-i\rho} M(L + 1 - i\eta,\ 2L + 2, 2i\rho).$$

14.1.4. $$F_L(\eta, \rho) = C_L(\eta) \rho^{L+1} \Phi_L(\eta, \rho).$$

14.1.5. $$\Phi_L(\eta, \rho) = \sum_{k=L+1}^{\infty} A_k^L(\eta)\, \rho^{k-L-1}.$$

14.1.6. $$A_{L+1}^L = 1, \quad A_{L+2}^L = \frac{\eta}{L+1},$$

$$(k + L)(k - L - 1) A_k^L = 2\eta A_{k-1}^L - A_{k-2}^L \quad (k > L + 2).$$

14.1.7. $$C_L(\eta) = \frac{2^L e^{-\pi\eta/2} |\Gamma(L + 1 + i\eta)|}{\Gamma(2L + 2)}$$

(см. гл. 6).

14.1.8. $$C_0^2(\eta) = 2\pi\eta(e^{2\pi\eta} - 1)^{-1}.$$

14.1.9. $$C_L^2(\eta) = \frac{p_L(\eta)\, C_0^2(\eta)}{2\eta(2L + 1)}.$$

14.1.10. $$C_L(\eta) = \frac{(L^2 + \eta^2)^{1/2}}{L(2L + 1)} C_{L-1}(\eta).$$

14.1.11. $$\frac{p_L(\eta)}{2\eta} = \frac{(1 + \eta^2)(4 + \eta^2) \ldots (L^2 + \eta^2) 2^{2L}}{(2L + 1)[(2L)!]^2}.$$

14.1.12. $$F_L' = \frac{d}{d\rho} F_L(\eta, \rho) = C_L(\eta)\, \rho^L \Phi_L^*(\eta, \rho).$$

14.1.13. $$\Phi_L^*(\eta, \rho) = \sum_{k=L+1}^{\infty} k A_k^L(\eta)\, \rho^{k-L-1}.$$

Иррегулярная волновая функция Кулона $G_L(\eta, \rho)$

14.1.14. $$G_L(\eta, \rho) = \frac{2\eta}{C_0^2(\eta)} F_L(\eta, \rho) \left[\ln 2\rho + \frac{q_L(\eta)}{p_L(\eta)}\right] + \theta_L(\eta, \rho).$$

14.1.15. $\theta_L(\eta, \rho) = D_L(\eta)\, \rho^{-L} \psi_L(\eta, \rho)$.

14.1.16. $D_L(\eta)\, C_L(\eta) = \dfrac{1}{2L+1}$.

14.1.17. $\psi_L(\eta, \rho) = \sum\limits_{k=-L}^{\infty} a_k^L(\eta)\, \rho^{k+L}$.

14.1.18. $a_{-L}^L = 1,\ a_{-L+1}^L = 0,\ (k-L-1)(k+L)\, a_k^L =$
$$= 2\eta a_{k-1}^L - a_{k-2}^L - (2k-1)\, p_L(\eta)\, A_k^L.$$

14.1.19. $$\frac{q_L(\eta)}{p_L(\eta)} = \sum_{s=1}^{L} \frac{s}{s^2+\eta^2} - \sum_{s=1}^{2L+1} \frac{1}{s} + \mathrm{Re}\left[\frac{\Gamma'(1+i\eta)}{\Gamma(1+i\eta)}\right] + 2\gamma + \frac{r_L(\eta)}{p_L(\eta)}$$

(см. табл. 6.8).

14.1.20. $$r_L(\eta) = \frac{(-1)^{L+1}}{(2L)!}\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{2L+1} + \frac{2(i\eta-L)}{2L(1!)} + \frac{2^2(i\eta-L)(i\eta-L+1)}{(2L-1)(2!)} + \ldots + \frac{2^{2L}(i\eta-L)(i\eta-L+1)\ldots(i\eta+L-1)}{(2L)!}\right].$$

14.1.21. $$G_L' = \frac{dG_L}{d\rho} = \frac{2\eta}{C_0^2(\eta)}\left\{F_L\left[\ln 2\rho + \frac{q_L(\eta)}{p_L(\eta)}\right] + \rho^{-1} F_L(\eta, \rho)\right\} + \theta_L'(\eta, \rho).$$

14.1.22. $\theta_L' = \dfrac{d}{d\rho}\,\theta_L(\eta, \rho) = D_L(\eta)\, \rho^{-L-1} \psi_L^*(\eta, \rho)$.

14.1.23. $\psi_L^*(\eta, \rho) = \sum\limits_{k=-L}^{\infty} k a_k^L(\eta)\, \rho^{k+L}$.

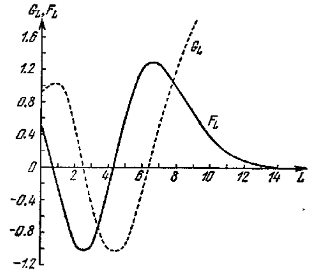


Рис. 14.1. $F_L(\eta, \rho)$, $G_L(\eta, \rho)$; $\eta = 1$, $\rho = 10$.

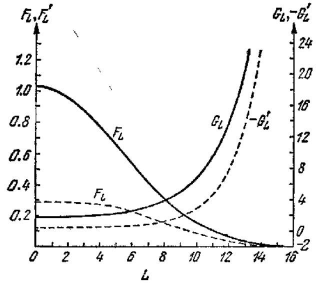


Рис. 14.2. F_L, F_L', G_L и G_L', $\eta = 10$, $\rho = 20$.

14.2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ВРОНСКИАН

Рекуррентные соотношения

($u_L = F_L(\eta, \rho)$, или $u_L = G_L(\eta, \rho)$)

14.2.1. $$L\frac{du_L}{d\rho} = (L^2+\eta^2)^{1/2} u_{L-1} - \left(\frac{L^2}{\rho} + \eta\right) u_L.$$

14.2.2. $$(L+1)\frac{du_L}{d\rho} = \left[\frac{(L+1)^2}{\rho} + \eta\right] u_L - [(L+1)^2+\eta^2]^{1/2} u_{L+1}.$$

14.2.3. $$L[(L+1)^2+\eta^2]^{1/2} u_{L+1} = (2L+1)\left[\eta + \frac{L(L+1)}{\rho}\right] u_L - (L+1)\,[L^2+\eta^2]^{1/2} u_{L-1}.$$

Вронскиан

14.2.4. $F_L' G_L - F_L G_L' = 1$.

14.2.5. $F_{L-1} G_L - F_L G_{L-1} = L(L^2+\eta^2)^{-1/2}$.

14.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

14.3.1. $$F_L + iG_L = \frac{ie^{-i\rho}\rho^{-L}}{(2L+1)!\ C_L(\eta)} \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{L-i\eta}(t+2i\rho)^{L+i\eta}\, dt.$$

14.3.2. $$F_L - iG_L = \frac{e^{-\pi\eta}\rho^{L+1}}{(2L+1)!\ C_L(\eta)} \int_{-1}^{-i\infty} e^{-i\rho t}(1-t)^{L-i\eta}(1+t)^{L+i\eta}\, dt.$$

14.3.3. $$F_L + iG_L = \frac{e^{-\pi\eta}\rho^{L+1}}{(2L+1)!\ C_L(\eta)} \times \int_{-2}^{-\infty} \{(1-\mathrm{th}^2\, t)^{L+1} \exp[-i(\rho\,\mathrm{th}\, t - 2\eta t)] + i(1+t^2)^L \exp[-\rho t + 2\eta\,\mathrm{arctg}\, t]\}\, dt.$$

14.4. РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ

Разложения, содержащие функции Бесселя — Клиффорда

14.4.1. $F_L(\eta, \rho) =$

$$= C_L(\eta)\frac{(2L+1)!}{(2\eta)^{2L+1}}\rho^{-L}\sum_{k=2L+1}^{\infty} b_k t^{k/2} I_k(2\sqrt{t})$$

$$(t = 2\eta\rho, \quad \eta > 0).$$

14.4.2. $G_L(\eta, \rho) \sim$

$$\sim D_L(\eta)\lambda_L(\eta)\,\rho^{-L}\sum_{k=2L+1}^{\infty}(-1)^k b_k t^{k/2} K_k(2\sqrt{t}).$$

14.4.3. $b_{2L+1} = 1, \; b_{2L+2} = 0,$

$$4\eta^2(k-2L)\,b_{k+1} + kb_{k-1} + b_{k-2} = 0 \qquad (k > 2L+2).$$

14.4.4. $\lambda_L(\eta)\sum\limits_{k=2L+1}^{\infty}(-1)^k(k-1)!\;b_k = 2$

(см. гл. 9).

Разложения, содержащие сферические функции Бесселя

14.4.5. $F_L(\eta, \rho) =$

$$= 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2L+1)\,\rho C_L(\eta)\sum_{k=L}^{\infty} b_k\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{k+1/2}(\rho).$$

14.4.6. $b_L = 1, \quad b_{L+1} = \dfrac{2L+3}{L+1}\,\eta,$

$$b_k = \frac{2k+1}{k(k+1) - L(L+1)}\Big[2\eta b_{k-1} - $$

$$- \frac{(k-1)(k-2) - L(L+1)}{2k-3}\,b_{k-2}\Big] \qquad (k > L+1).$$

14.4.7. $F'_L(\eta, \rho) = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2L+1)\,\rho C_L(\eta)\times$

$$\times\Big[\frac{L+1}{2L+1}\,b_L\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{L-1/2}(\rho) +$$

$$+ \frac{L+2}{2L+3}\,b_{L+1}\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{L+1/2}(\rho) +$$

$$+ \sum_{k=L+1}^{\infty} b'_k\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{k+1/2}(\rho)\Big].$$

14.4.8. $b'_k = \dfrac{k+2}{2k+3}\,b_{k+1} - \dfrac{k-1}{2k-1}\,b_{k-1}.$

Разложения, содержащие функции Эйри

$(x = (2\eta - \rho)/(2\eta)^{1/3}, \quad \mu = (2\eta)^{2/3}, \; \eta \gg 0, \quad |\rho - 2\eta| < 2\eta)$

14.4.9. $\left.\begin{matrix} F_0(\eta, \rho) \\ G_0(\eta, \rho)\end{matrix}\right\} =$

$$= \pi^{1/2}(2\eta)^{1/6}\left\{\begin{bmatrix}\mathrm{Ai}\,(x)\\ \mathrm{Bi}\,(x)\end{bmatrix}\left(1 + \frac{g_1}{\mu} + \frac{g_2}{\mu^2} + \ldots\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{Ai}'(x)}{\mathrm{Bi}'(x)}\left(\frac{f_1}{\mu} + \frac{f_2}{\mu^2} + \ldots\right)\right].$$

14.4.10. $\left.\begin{matrix} F'_0(\eta, \rho) \\ G'_0(\eta, \rho)\end{matrix}\right\} =$

$$= -\pi^{1/2}(2\eta)^{-1/6}\left\{\begin{bmatrix}\mathrm{Ai}\,(x)\\ \mathrm{Bi}\,(x)\end{bmatrix}\left(\frac{g'_1 + xf_1}{\mu} + \frac{g'_2 + xf_2}{\mu^2} + \ldots\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{Ai}'(x)}{\mathrm{Bi}'(x)}\left(1 + \frac{(g_1 + f'_1)}{\mu} + \frac{(g_2 + f'_2)}{\mu^2} + \ldots\right)\right].$$

$$f_1 = \frac{1}{5}x^2,$$

$$f_2 = \frac{1}{35}(2x^3 + 6),$$

$$f_3 = \frac{1}{63\,000}(84x^7 + 1480x^4 + 2320x),$$

$$g_1 = -\frac{1}{5}x,$$

$$g_2 = \frac{1}{350}(7x^5 - 30x^2),$$

$$g_3 = \frac{1}{63\,000}(1056x^6 - 1160x^3 - 2240)$$

(см. гл. 10).

14.5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

(ρ — большое)

14.5.1. $F_L = g\cos\theta_L + f\sin\theta_L.$

14.5.2. $G_L = f\cos\theta_L - g\sin\theta_L.$

14.5.3. $F'_L = g^*\cos\theta_L + f^*\sin\theta_L.$

14.5.4. $G'_L = f^*\cos\theta_L - g^*\sin\theta_L, \;\; gf^* - fg^* = 1.$

14.5.5. $\theta_L = \rho - \eta\ln 2\rho - L\dfrac{\pi}{2} + \sigma_L.$

14.5.6. $\sigma_L = \arg\Gamma(L + 1 + i\eta)$

(см. 6.1.27, 6.1.44).

14.5.7. $\sigma_{L+1} = \sigma_L + \operatorname{arctg}\dfrac{\eta}{L+1}$

(см. табл. 4.14, 6.7).

14.5.8. $f \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k, \;\; g \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k, \;\; f^* \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} f^*_k, \;\; g^* \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} g^*_k,$

где
$$f_0 = 1,\ g_0 = 0,\ f_0^* = 0,\ g_0^* = 1 - \eta/\rho,$$
$$f_{k+1} = a_k f_k - b_k g_k,\ g_{k+1} = a_k g_k + b_k f_k,$$
$$f_{k+1}^* = a_k f_k^* - b_k g_k^* - \kappa f_{+1}/\rho,$$
$$g_{k+1}^* = a_k g_k^* + b_k f_k^* - g_{k+1}/\rho,$$
$$a_k = \frac{(2k+1)\eta}{(2k+2)\rho},\ b_k = \frac{L(L+1) - k(k+1) + \eta^2}{(2k+2)\rho}.$$

14.5.9. $$f + ig \sim 1 + \frac{(i\eta - L)(i\eta + L + 1)}{1!(2i\rho)} + \frac{(i\eta - L)(i\eta - L + 1)(i\eta + L + 1)}{2!(2i\rho)^2}(i\eta + L + 2) + \frac{(i\eta - L)(i\eta - L + 1)(i\eta - L + 2)}{3!(2i\rho)^3} \times$$
$$\times (i\eta + L + 1)(i\eta + L + 2)(i\eta + L + 3) + \ldots$$
$$L = 0,\ \rho = 2\eta \gg 0.$$

14.5.10. $$\left.\begin{matrix} F_0(2\eta) \\ G_0(2\eta)/\sqrt{3} \end{matrix}\right\} \sim \frac{\Gamma(1/3)\beta^{1/2}}{2\sqrt{\pi}}\left(1 \mp \frac{2}{35}\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}\frac{1}{\beta^4} - \frac{32}{8100}\frac{1}{\beta^6} \mp \frac{92\,672}{7371 \cdot 10^4}\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}\frac{1}{\beta^{10}} - \ldots\right).$$

14.5.11. $$\left.\begin{matrix} F_0'(2\eta) \\ G_0'(2\eta)/\sqrt{3} \end{matrix}\right\} \sim \frac{\Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}\beta^{1/2}}\left(\pm 1 + \frac{1}{15}\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)}\frac{1}{\beta^2} \pm \pm \frac{8}{56\,700}\frac{1}{\beta^6} + \frac{11\,488}{18711 \cdot 10^3}\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)}\frac{1}{\beta^8} \pm \ldots\right),$$
$$\beta = (2\eta/3)^{1/3},\ \Gamma(1/3) = 2.6789\ 38534\ \ldots,$$
$$\Gamma(2/3) = 1.3541\ 17939\ \ldots$$

14.5.12. $$\left.\begin{matrix} F_0(2\eta) \\ G_0(2\eta) \end{matrix}\right\} \sim$$
$$\sim \left\{\begin{pmatrix} 0.70633\ 26373 \\ 1.22340\ 4016 \end{pmatrix}\eta^{1/6}\left(1 \mp \frac{0.04959\ 570165}{\eta^{4/3}} - \frac{0.00888\ 88888\ 89}{\eta^2} \mp \frac{0.00245\ 51991\ 81}{\eta^{10/3}} - \frac{0.00091\ 08958\ 061}{\eta^4} \mp \frac{0.00084\ 53619\ 999}{\eta^{16/3}} - \ldots\right)\right\}^{1)}.$$

14.5.13. $$\left.\begin{matrix} F_0'(2\eta) \\ G_0'(2\eta) \end{matrix}\right\} \sim \left\{\begin{pmatrix} 0.40869\ 57323 \\ -0.70788\ 17734 \end{pmatrix}\eta^{-1/6} \times \right.$$
$$\times \left(1 \pm \frac{0.17282\ 60369}{\eta^{2/3}} + \frac{0.00031\ 74603\ 174}{\eta^2} \pm \pm \frac{0.00358\ 12148\ 50}{\eta^{8/3}} + \frac{0.00031\ 17824\ 680}{\eta^4} \pm \pm \frac{0.00090\ 73966\ 427}{\eta^{14/3}} + \ldots\right).$$

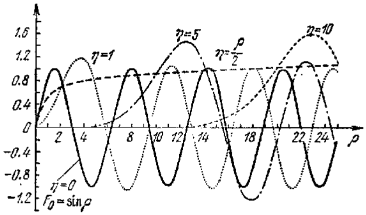


Рис. 14.3. $F_0(\eta, \rho)$; $\eta = 0,\ 1,\ 5,\ 10,\ \rho/2$.

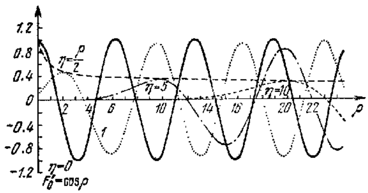


Рис 14.4. $F_0'(\eta, \rho)$; $\eta = 0,\ 1,\ 5,\ 10,\ \rho/2$.

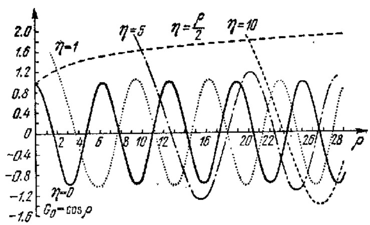


Рис. 14.5. $G_0(\eta, \rho)$; $\eta = 0,\ 1,\ 5,\ 10,\ \rho/2$.

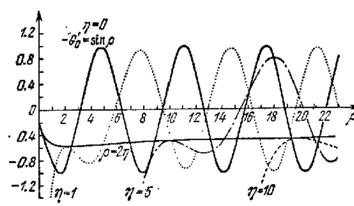


Рис. 14.6 $G_0'(\eta, \rho)$; $\eta = 0,\ 1,\ 5,\ 10,\ \rho/2$.

1) В оригинале числитель последней дроби ошибочен. Исправление сделано на основании работы [14.3]. *(Прим. перев.)*

14.6. ЧАСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

14.6.1. $L > 0, \ \rho = 0,$

$$F_L = 0, \quad F_L' = 0,$$
$$G_L = \infty, \quad G_L' = -\infty.$$

14.6.2. $L = 0, \ \rho = 0,$

$$F_0 = 0, \quad F_0' = C_0(\eta),$$
$$G_0 = 1/C_0(\eta), \quad G_0' = -\infty.$$

14.6.3. $L \to \infty,$

$$F_L \sim C_L(\eta)\ \rho^{L+1}, \quad G_L \sim D_L(\eta)\ \rho^{-L}.$$

14.6.4. $L = 0, \ \eta = 0,$

$$F_0 = \sin\rho, \quad F_0' = \cos\rho,$$
$$G_0 = \cos\rho, \quad G_0' = -\sin\rho.$$

14.6.5. $\rho \to \infty,$

$$G_L + iF_L \sim \exp i\left[\rho - \eta\ln 2\rho - \frac{L\pi}{2} + \sigma_L\right].$$

14.6.6. $L \geqslant 0, \ \eta = 0,$

$$F_L = (\pi\rho/2)^{1/2} J_{L+1/2}(\rho),$$
$$G_L = (-1)^L (\pi\rho/2)^{1/2} J_{-(L+1/2)}(\rho).$$

14.6.7. $L \geqslant 0, \ 2\eta \gg \rho,$

$$F_L \sim \frac{(2L+1)!\,C_L(\eta)}{(2\eta)^{L+1}} (2\eta\rho)^{1/2} I_{2L+1}[2(2\eta\rho)^{1/2}],$$

$$G_L \sim \frac{2(2\eta)^L}{(2L+1)!\,C_L(\eta)} (2\eta\rho)^{1/2} K_{2L+1}[2(2\eta\rho)^{1/2}].$$

14.6.8. $L = 0, \ 2\eta \gg \rho,$

$$F_0 \sim e^{-\pi\eta}(\pi\rho)^{1/2} I_1[2(2\eta\rho)^{1/2}],$$
$$F_0' \sim e^{-\pi\eta}(2\pi\eta)^{1/2} I_0[2(2\eta\rho)^{1/2}],$$
$$G_0 \sim 2e^{\pi\eta}(\rho/\pi)^{1/2} K_1[2(2\eta\rho)^{1/2}],$$
$$G_0' \sim -2(2\eta/\pi)^{1/2} e^{\pi\eta} K_0[2(2\eta\rho)^{1/2}].$$

14.6.9. $L = 0, \ 2\eta \gg \rho,$

$$F_0 \sim \frac{1}{2}\beta e^{\alpha}, \quad F_0' \sim \frac{1}{2}\beta^{-1}e^{\alpha},$$
$$G_0 \sim \beta e^{-\alpha}, \quad G_0' \sim -\beta^{-1}e^{-\alpha},$$
$$\alpha = 2\sqrt{2\eta\rho} - \pi\eta, \quad \beta = (\rho/2\eta)^{1/4}.$$

14.6.10. $L = 0, \ 2\eta \gg \rho,$

$$F_0 \sim \frac{1}{2}\beta e^{\alpha}, \quad F_0' \sim \left(\beta^{-2} + \frac{1}{8\eta}t^{-2}\beta^4\right)F_0,$$
$$G_0 \sim \beta e^{-\alpha}, \quad G_0' \sim \left(-\beta^{-2} + \frac{1}{8\eta}t^{-2}\beta^4\right)G_0,$$
$$t = \rho/2\eta,$$
$$\alpha = 2\eta\ \{[t(1-t)]^{1/2} + \arcsin t^{1/2} - \pi/2\},$$
$$\beta = \{t/(1-t)\}^{1/4}.$$

14.6.11. $L = 0, \ \rho \gg 2\eta,$

$$F_0 = \alpha\sin\beta, \quad F_0' = -t^2(bF_0 - aG_0),$$
$$G_0 = \alpha\cos\beta, \quad G_0' = -t^2(aF_0 + bG_0),$$
$$t = 2\eta/\rho,$$
$$\alpha = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{8t^3 - 3t^4}{64(2\eta)^2(1-t)^3}\right],$$
$$\beta = \frac{\pi}{4} + 2\eta\left\{\frac{(1-t)^{1/2}}{t} + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1-(1-t)^{1/2}}{1+(1-t)^{1/2}}\right]\right\},$$
$$a = t^{-2}(1-t)^{1/2}, \quad b = [8\eta(1-t)]^{-1}.$$

14.6.12. $\eta \gg 0, \ 2\eta \sim \rho,$

$$\left.\begin{matrix} F_L(\eta,\ \rho) \\ G_L(\eta,\ \rho)\end{matrix}\right\} \sim \sqrt{\pi}\left(\frac{\rho_L}{1 + L(L+1)/\rho_L^2}\right)^{1/6}\left\{\begin{matrix}\mathrm{Ai}\,(x) \\ \mathrm{Bi}\,(x)\end{matrix}\right.,$$
$$\rho_L = \eta + [\eta^2 + L(L+1)]^{1/2},$$
$$x = (\rho_L - \rho)\left[\frac{1}{\rho_L} + \frac{L(L+1)}{\rho_L^3}\right]^{1/3}.$$

14.6.13. $\eta \gg 0, \ 2\eta \sim \rho,$

$$x = (2\eta - \rho)(2\eta)^{-1/3},$$
$$[G_0 + iF_0] \sim \pi^{1/2}(2\eta)^{1/6}\,[\mathrm{Bi}\,(x) + i\,\mathrm{Ai}\,(x)],$$
$$[G_0' + iF_0'] \sim -\pi^{1/2}(2\eta)^{-1/6}\,[\mathrm{Bi}'\,(x) + i\,\mathrm{Ai}'\,(x)].$$

14.6.14. $\eta \gg 0,$

$$\rho_L = \eta + [\eta^2 + L(L+1)]^{1/2},$$
$$\left.\begin{matrix} F_L(\rho_L) \\ G_L(\rho_L)/\sqrt{3}\end{matrix}\right\} \sim \frac{\Gamma(1/3)}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\rho_L}{3}\right)^{1/6}\left(1 + \frac{L(L+1)}{\rho_L^2}\right)^{-1/6},$$
$$\left.\begin{matrix} F_L'(\rho_L) \\ G_L'(\rho_L)/\sqrt{3}\end{matrix}\right\} \sim \pm\frac{\Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\rho_L}{3}\right)^{-1/6}\left(1 + \frac{L(L+1)}{\rho_L^2}\right)^{1/6}.$$

14.6.15. $\rho = 2\eta \gg 0,$

$$\left.\begin{matrix} F_0 \\ G_0/\sqrt{3}\end{matrix}\right\} \sim \frac{\Gamma(1/3)}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\eta}{3}\right)^{1/6},$$
$$\left.\begin{matrix} F_0' \\ -G_0'/\sqrt{3}\end{matrix}\right\} \sim \frac{\Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}\,(2\eta/3)^{1/6}}.$$

14.6.16. $\eta \to \infty,$

$$\sigma_0(\eta) \sim \left[\frac{\pi}{4} + \eta(\ln\eta - 1)\right],$$
$$C_0(\eta) \sim (2\pi\eta)^{1/2}\ e^{-\pi\eta}$$

(при $\eta > 3$ формулы дают восемь верных значащих цифр).

14.6.17. $\eta \to 0,$

$$\sigma_0(\eta) \sim -\gamma\eta \quad (\gamma \text{ — постоянная Эйлера}),$$
$$C_L(\eta) \sim \frac{2^L\ L!}{(2L+1)!}.$$

14.6.18. $L \to \infty,$

$$C_L(\eta) \sim \frac{2^L\ L!}{(2L+1)!}\ e^{-\pi\eta/2}.$$

ПРИМЕРЫ

Вообще говоря, по приводимым здесь таблицам проводить интерполирование нелегко. Однако значения при $L > 0$ можно получить при помощи рекуррентных соотношений. Значения функции $G_L(\eta, \rho)$ можно получить, применяя рекуррентные соотношения для возрастающих значений L. Рекуррентные соотношения для возрастающих L можно применять также для функции $F_L(\eta, \rho)$ до тех пор, пока неустойчивость процесса не приведет к накоплению погрешности, превышающей допустимую. В этом случае следует применить рекуррентную схему для убывающих L (см. пример 1).

Пример 1. Вычислить $F_L(\eta, \rho)$ и $F_L'(\eta, \rho)$ для $\eta = 2$, $\rho = 5$, $L = 0(1)5$. Начиная с $F_{10}^* = 1$, $F_{11}^* = 0$, где $F_L^* = cF_L$, по формуле 14.2.3 проведем вычисления для последовательно убывающих значений L:

L	(1) F_L^*	(2) F_L	(3) F_L	(4) F_L'
11	0			
10	1			
9	4.49284			
8	17.5225			
7	61.3603			
6	191.238			
5	523.472	0.090791	0.091	0.1043
4	1238.53	0.21481	0.215	0.2030
3	2486.72	0.43130	0.4313	0.3205
2	4158.46	0.72124	0.72125	0.3952
1	5727.97	0.99346	0.99347	0.3709
0	6591.81	1.1433	1.1433	0.29380

$$F_0/F_0^* = 1.7344 \times 10^{-4} = c^{-1}.$$

Значения во втором столбце получены из значений в первом столбце умножением на нормирующую постоянную F_0/F_0^*, где F_0 — значение, известное из табл. 14.1.

Повторение вычислений с начальными значениями $F_{15}^* = 1$ и $F_{16}^* = 0$ приведет к тем же результатам.

В столбце 3 даны результаты, полученные по формуле 14.2.3, примененной в направлении возрастания L.

F_L' (столбец 4) получено по формуле 14.2.2.

Пример 2. Вычислить $G_L(\eta, \rho)$ и $G_L'(\eta, \rho)$ для $\eta = 2$, $\rho = 5$, $L = 1(1)5$. Используя 14.2.2 и значения $G_0(2,5) = 0.79445$, $G_0' = -0.67049$ из табл. 14.1, найдем $G_1(2, 5) = 1.0815$. Тогда по рекуррентной формуле 14.2.3, примененной для возрастающих L, получим

L	G_L	$-G_L'$
1	1.0815	0.60286
2	1.4969	0.56619
3	2.0487	0.79597
4	3.0941	1.7318
5	5.6298	4.5493

Значение функции G_L' получено при помощи формулы 14.2.1.

Пример 3. Вычислить $G_0(\eta, \rho)$ для $\eta = 2, \rho = 2.5$ В табл. 14.1 находим $G_0(2, 2) = 3.5124$, $G_0'(2, 2) = -2.5554$ Последовательным дифференцированием формулы 14.1.1 при $L = 0$ получаем

$$\rho \frac{d^{k+2}w}{d\rho^{k+2}} = (2\eta - \rho)\frac{d^k w}{d\rho^k} - k\left\{\frac{d^{k+1}w}{d\rho^{k+1}} + \frac{d^{k-1}w}{d\rho^{k-1}}\right\}.$$

Из разложения в ряд Тейлора $w(\rho + \Delta\rho) = w(\rho) + (\Delta\rho)w' + \frac{(\Delta\rho)^2}{2!}w'' + \ldots$, полагая $w = G_0(\eta, \rho)$ и $\Delta\rho = 0.5$, находим

k	$\frac{d^kG_0}{d\rho^k}$	$\frac{(\Delta\rho)^k}{k!}\frac{d^kG_0}{d\rho^k}$
0	3.5124	3.5124
1	−2.5554	−1.2777
2	3.5124	0.43905
3	−6.0678	−0.12641
4	12.136	0.03160
5	−29.540	−0.00769
6	83.352	0.00181
7	−268.26	−0.00042
		$G_0(2, 2.5) = 2.5726$

Для проверки это значение было вычислено при $\eta = 2$, $\rho = 3$, $\Delta\rho = -0.5$. Производную $G_0'(\eta, \rho)$ можно получить по формуле Тейлора, полагая $w = G_0'(\eta, \rho)$.

Таблица 14.1. Волновые функции Кулона нулевого порядка

$F_0(\eta,\rho)$

$\eta \backslash \rho$	1	2	3	4	5
0.5	(−1) 5.1660	(0) 1.0211	(0) 1.0432	(−1) 4.1924	(−1) −4.9046
1.0	(−1) 2.2753	(−1) 6.6178	(0) 1.0841	(0) 1.1571	(−1) +6.8494
1.5	(−2) 8.4815	(−1) 3.3159	(−1) 7.3013	(0) 1.1186	(0) 1.2327
2.0	(−2) 2.8898	(−1) 1.4445	(−1) 3.9861	(−1) 7.7520	(0) 1.1433
2.5	(−3) 9.3008	(−2) 5.7560	(−1) 1.9162	(−1) 4.4865	(−1) 8.0955
3.0	(−3) 2.8751	(−2) 2.1538	(−2) 8.4417	(−1) 2.3093	(−1) 4.8882
3.5	(−4) 8.6200	(−3) 7.6857	(−2) 3.4863	(−1) 1.0927	(−1) 2.6473
4.0	(−4) 2.5224	(−3) 2.6417	(−2) 1.3692	(−2) 4.8493	(−1) 1.3227
4.5	(−5) 7.2358	(−4) 8.8072	(−3) 5.1636	(−2) 2.0448	(−2) 6.2060
5.0	(−5) 2.0413	(−4) 2.8622	(−3) 1.8829	(−3) 8.2690	(−2) 2.7673
5.5	(−6) 5.6770	(−5) 9.1017	(−4) 6.6735	(−3) 3.2283	(−2) 1.1829
6.0	(−6) 1.5593	(−5) 2.8403	(−4) 2.3080	(−3) 1.2230	(−3) 4.8778
6.5	(−7) 4.2367	(−6) 8.7187	(−5) 7.8131	(−4) 4.5136	(−3) 1.9502
7.0	(−7) 1.1400	(−6) 2.6375	(−5) 2.5954	(−4) 1.6280	(−4) 7.5886
7.5	(−8) 3.0407	(−7) 7.8750	(−6) 8.4780	(−5) 5.7536	(−4) 2.8831
8.0	(−9) 8.0474	(−7) 2.3238	(−6) 2.7278	(−5) 1.9966	(−4) 1.0722
8.5	(−9) 2.1146	(−8) 6.7842	(−7) 8.6573	(−6) 6.8154	(−5) 3.9115
9.0	(−10) 5.5203	(−8) 1.9614	(−7) 2.7136	(−6) 2.2918	(−5) 1.4023
9.5	(−10) 1.4325	(−9) 5.6202	(−8) 8.4089	(−7) 7.6019	(−6) 4.9481
10.0	(−11) 3.6966	(−9) 1.5971	(−8) 2.5785	(−7) 2.4900	(−6) 1.7207
10.5	(−12) 9.4903	(−10) 4.5043	(−9) 7.8306	(−8) 8.0621	(−7) 5.9043
11.0	(−12) 2.4248	(−10) 1.2613	(−9) 2.3567	(−8) 2.5824	(−7) 2.0009
11.5	(−13) 6.1679	(−11) 3.5086	(−10) 7.0332	(−9) 8.1895	(−8) 6.7032
12.0	(−13) 1.5623	(−12) 9.6998	(−10) 2.0826	(−9) 2.5730	(−8) 2.2216
12.5	(−14) 3.9419	(−12) 2.6660	(−11) 6.1216	(−10) 8.0134	(−9) 7.2896
13.0	(−15) 9.9089	(−13) 7.2878	(−11) 1.7870	(−10) 2.4754	(−9) 2.3694
13.5	(−15) 2.4822	(−13) 1.9819	(−12) 5.1827	(−11) 7.5877	(−10) 7.6337
14.0	(−16) 6.1972	(−14) 5.3636	(−12) 1.4939	(−11) 2.3090	(−10) 2.4390
14.5	(−16) 1.5424	(−14) 1.4449	(−13) 4.2812	(−12) 6.9781	(−11) 7.7314
15.0	(−17) 3.8274	(−15) 3.8752	(−13) 1.2201	(−12) 2.0952	(−11) 2.4326
15.5	(−18) 9.4708	(−15) 1.0350	(−14) 3.4592	(−13) 6.2521	(−12) 7.5998
16.0	(−18) 2.3372	(−16) 2.7536	(−15) 9.7586	(−13) 1.8547	(−12) 2.3584
16.5	(−19) 5.7529	(−17) 7.2980	(−15) 2.7399	(−14) 5.4712	(−13) 7.2719
17.0	(−19) 1.4126	(−17) 1.9272	(−16) 7.6580	(−14) 1.6053	(−13) 2.2286
17.5	(−20) 3.4602	(−18) 5.0719	(−16) 2.1311	(−15) 4.6864	(−14) 6.7904
18.0	(−21) 8.4571	(−18) 1.3304	(−17) 5.9063	(−15) 1.3614	(−14) 2.0575
18.5	(−21) 2.0625	(−19) 3.4785	(−17) 1.6304	(−16) 3.9364	(−15) 6.2009
19.0	(−22) 5.0197	(−20) 9.0677	(−18) 4.4834	(−16) 1.1331	(−15) 1.8594
19.5	(−22) 1.2192	(−20) 2.3568	(−18) 1.2284	(−17) 3.2476	(−16) 5.5480
20.0	(−23) 2.9556	(−21) 6.1087	(−19) 3.3538	(−18) 9.2696	(−16) 1.6477

$\frac{d}{d\rho}F_0(\eta,\rho)$

$\eta \backslash \rho$	1	2	3	4	5
0.5	(−1) 5.9292	(−1) 3.2960	(−1) −3.1699	(−1) −8.6672	(−1) −8.3314
1.0	(−1) 3.4873	(−1) 4.8156	(−1) +3.0192	(−1) −1.9273	(−1) −7.2364
1.5	(−1) 1.5684	(−1) 3.3631	(−1) 4.3300	(−1) +2.9671	(−1) −1.0456
2.0	(−2) 6.1308	(−1) 1.7962	(−1) 3.2695	(−1) 4.0401	(−1) +2.9380
2.5	(−2) 2.1980	(−2) 8.2804	(−1) 1.9237	(−1) 3.1922	(−1) 3.8386
3.0	(−3) 7.4239	(−2) 3.4693	(−2) 9.8019	(−1) 2.0030	(−1) 3.1264
3.5	(−3) 2.3993	(−2) 1.3575	(−2) 4.5336	(−1) 1.0945	(−1) 2.0555
4.0	(−4) 7.4933	(−3) 5.0436	(−2) 1.9532	(−2) 5.4362	(−1) 1.1839
4.5	(−4) 2.2767	(−3) 1.7984	(−3) 7.9650	(−2) 2.5140	(−2) 6.2113
5.0	(−5) 6.7615	(−4) 6.2008	(−3) 3.1077	(−2) 1.0992	(−2) 3.0360
5.5	(−5) 1.9700	(−4) 2.0789	(−3) 1.1690	(−3) 4.5914	(−2) 1.4028
6.0	(−6) 5.6457	(−5) 6.8046	(−4) 4.2638	(−3) 1.8462	(−3) 6.1885
6.5	(−6) 1.5950	(−5) 2.1817	(−4) 1.5145	(−4) 7.1867	(−3) 2.6259
7.0	(−7) 4.4497	(−6) 6.8691	(−5) 5.2563	(−4) 2.7200	(−3) 1.0777
7.5	(−7) 1.2276	(−6) 2.1283	(−5) 1.7875	(−4) 1.0045	(−4) 4.2964
8.0	(−8) 3.3527	(−7) 6.5001	(−6) 5.9696	(−5) 3.6292	(−4) 1.6695
8.5	(−9) 9.0744	(−7) 1.9597	(−6) 1.9614	(−5) 1.2859	(−5) 6.3417
9.0	(−9) 2.4359	(−8) 5.8395	(−7) 6.3501	(−6) 4.4771	(−5) 2.3601
9.5	(−10) 6.4900	(−8) 1.7215	(−7) 2.0285	(−6) 1.5341	(−6) 8.6225
10.0	(−10) 1.7173	(−9) 5.0256	(−8) 6.4011	(−7) 5.1804	(−6) 3.0976
10.5	(−11) 4.5150	(−9) 1.4539	(−8) 1.9973	(−7) 1.7262	(−6) 1.0958
11.0	(−11) 1.1801	(−10) 4.1713	(−9) 6.1672	(−8) 5.6813	(−7) 3.8219
11.5	(−12) 3.0676	(−10) 1.1875	(−9) 1.8860	(−8) 1.8487	(−7) 1.3157
12.0	(−13) 7.9334	(−11) 3.3562	(−10) 5.7160	(−9) 5.9521	(−8) 4.4743
12.5	(−13) 2.0420	(−12) 9.4217	(−10) 1.7179	(−9) 1.8975	(−8) 1.5045
13.0	(−14) 5.2322	(−12) 2.6282	(−11) 5.1227	(−10) 5.9935	(−9) 5.0060
13.5	(−14) 1.3350	(−13) 7.2879	(−11) 1.5163	(−10) 1.8768	(−9) 1.6492
14.0	(−15) 3.3929	(−13) 2.0096	(−12) 4.4571	(−11) 5.8291	(−10) 5.3830
14.5	(−16) 8.5905	(−14) 5.5121	(−12) 1.3016	(−11) 1.7966	(−10) 1.7417
15.0	(−16) 2.1673	(−14) 1.5043	(−13) 3.7774	(−12) 5.4972	(−11) 5.5888
15.5	(−17) 5.4495	(−15) 4.0861	(−13) 1.0899	(−12) 1.6705	(−11) 1.7794
16.0	(−17) 1.3659	(−15) 1.1049	(−14) 3.1270	(−13) 5.0433	(−12) 5.6234
16.5	(−18) 3.4129	(−16) 2.9747	(−15) 8.9243	(−13) 1.5132	(−12) 1.7647
17.0	(−19) 8.5032	(−17) 7.9764	(−15) 2.5341	(−14) 4.5133	(−13) 5.5009
17.5	(−19) 2.1127	(−17) 2.1304	(−16) 7.1612	(−14) 1.3386	(−13) 1.7038
18.0	(−20) 5.2352	(−18) 5.6690	(−16) 2.0144	(−15) 3.9490	(−14) 5.2453
18.5	(−20) 1.2940	(−18) 1.5031	(−17) 5.6414	(−15) 1.1590	(−14) 1.6054
19.0	(−21) 3.1905	(−19) 3.9718	(−17) 1.5733	(−16) 3.3848	(−15) 4.8863
19.5	(−22) 7.8484	(−19) 1.0461	(−18) 4.3698	(−17) 9.8388	(−15) 1.4793
20.0	(−22) 1.9263	(−20) 2.7464	(−18) 1.2090	(−17) 2.8470	(−16) 4.4556

Об использовании этой таблицы см. примеры 1 — 3.

Таблица 141. Волновые функции Кулона нулевого порядка

$G_0(\eta,\rho)$

$\eta \backslash \rho$	1	2	3	4	5
0.5	(0) 1.1975	(-1) 5.3221	(-1) -3.4105	(-1) -9.8570	(-1) -9.3493
1.0	(0) 2.0431	(0) 1.2758	(-1) +6.2704	(-1) -1.8901	(-1) -8.9841
1.5	(0) 4.0886	(0) 2.0276	(0) 1.3423	(-1) +7.1836	(-2) -5.3716
2.0	(0) 9.8003	(0) 3.5124	(0) 2.0405	(0) 1.3975	(-1) +7.9445
2.5	(1) 2.6401	(0) 7.1318	(0) 3.2733	(0) 2.0592	(0) 1.444[illegible]
3.0	(1) 7.6551	(1) 1.6390	(0) 6.0195	(0) 3.1445	(0) 2.0789
3.5	(2) 2.3355	(1) 4.0982	(1) 1.2493	(0) 5.4049	(0) 3.0657
4.0	(2) 7.4015	(2) 1.0878	(1) 2.8313	(1) 1.0423	(0) 5.0146
4.5	(3) 2.4167	(2) 3.0209	(1) 6.8403	(1) 2.1964	(0) 9.1424
5.0	(3) 8.0855	(2) 8.6969	(2) 1.7354	(1) 4.9434	(1) 1.8193
5.5	(4) 2.7606	(3) 2.5792	(2) 4.5790	(2) 1.1708	(1) 3.8704
6.0	(4) 9.5899	(3) 7.8428	(3) 1.2482	(2) 2.8891	(1) 8.6736
6.5	(5) 3.3815	(4) 2.4367	(3) 3.4980	(2) 7.3782	(2) 2.0275
7.0	(6) 1.2081	(4) 7.7137	(4) 1.0041	(3) 1.9403	(2) 4.9101
7.5	(6) 4.3664	(5) 2.4826	(4) 2.9432	(3) 5.2344	(3) 1.2258
8.0	(7) 1.5946	(5) 8.1086	(4) 8.7893	(4) 1.4441	(3) 3.1422
8.5	(7) 5.8778	(6) 2.6837	(5) 2.6689	(4) 4.0648	(3) 8.2458
9.0	(8) 2.1850	(6) 8.9891	(5) 8.2266	(5) 1.1648	(4) 2.2097
9.5	(8) 8.1855	(7) 3.0439	(6) 2.5706	(5) 3.3928	(4) 6.0344
10.0	(9) 3.0882	(8) 1.0411	(6) 8.1333	(6) 1.0029	(5) 1.6764
10.5	(10) 1.1727	(8) 3.5934	(7) 2.6029	(6) 3.0052	(5) 4.7305
11.0	(10) 4.4801	(9) 1.2509	(7) 8.4187	(6) 9.1181	(6) 1.3542
11.5	(11) 1.7211	(9) 4.3888	(8) 2.7496	(7) 2.7986	(6) 3.9285
12.0	(11) 6.6465	(10) 1.5511	(8) 9.0625	(7) 8.6825	(7) 1.1537
12.5	(12) 2.5793	(10) 5.5199	(9) 3.0124	(8) 2.7207	(7) 3.4272
13.0	(13) 1.0055	(11) 1.9769	(10) 1.0093	(8) 8.6053	(8) 1.0290
13.5	(13) 3.9366	(11) 7.1230	(10) 3.4069	(9) 2.7457	(8) 3.1205
14.0	(14) 1.5474	(12) 2.5811	(11) 1.1681	(9) 8.8331	(0) 9.5523
14.5	(14) 6.1061	(12) 9.4029	(11) 3.9629	(10) 2.8638	(9) 2.9500
15.0	(15) 2.4181	(13) 3.4429	(12) 1.3645	(10) 9.3530	(9) 9.1867
15.5	(15) 9.6091	(14) 1.2667	(12) 4.7264	(11) 3.0758	(10) 2.8835
16.0	(16) 3.8309	(14) 4.6814	(13) 1.6463	(12) 1.0182	(10) 9.1182
16.5	(17) 1.5320	(15) 1.7377	(13) 5.7652	(12) 3.3917	(11) 2.9039
17.0	(17) 6.1445	(15) 6.4769	(14) 2.0292	(13) 1.1365	(11) 9.3107
17.5	(18) 2.4714	(16) 2.4236	(14) 7.1771	(13) 3.8299	(12) 3.0045
18.0	(18) 9.9670	(16) 9.1034	(15) 2.5502	(14) 1.2976	(12) 9.7548
18.5	(19) 4.0300	(17) 3.4316	(15) 9.1019	(14) 4.4194	(13) 3.1857
19.0	(20) 1.6335	(18) 1.2981	(16) 3.2623	(15) 1.5126	(14) 1.0462
19.5	(20) 6.6365	(18) 4.9263	(17) 1.1741	(15) 5.2016	(14) 3.4544
20.0	(21) 2.7024	(19) 1.8756	(17) 4.2418	(16) 1.7969	(15) 1.1464

$\frac{d}{d\rho} G_0(\eta,\rho)$

$\eta \backslash \rho$	1	2	3	4	5
0.5	(-1) -5.6132	(-1) -8.0753	(-1) -8.5494	(-1) -3.4747	(-1) +4.5076
1.0	(0) -1.2636	(-1) -5.8273	(-1) -7.4783	(-1) -8.3273	(-1) -5.1080
1.5	(0) -4.2300	(1) -9.5930	(-1) -5.7358	(-1) -7.0346	(-1) -8.0665
2.0	(1) -1.3813	(0) -2.5554	(-1) -8.3499	(-1) -5.6167	(-1) -6.7049
2.5	(1) -4.5128	(0) -7.1137	(0) -1.9326	(-1) -7.6379	(-1) -5.5046
3.0	(2) -1.5015	(1) -2.0029	(0) -4.8566	(0) -1.6029	(-1) -7.1618
3.5	(2) -5.1001	(1) -5.7725	(1) -1.2438	(0) -3.7375	(0) -1.3970
4.0	(3) -1.7657	(2) -1.7086	(1) -3.2646	(0) -8.9366	(0) -3.0719
4.5	(3) -6.2161	(2) -5.1859	(1) -8.8150	(1) -2.1901	(0) -6.9633
5.0	(4) -2.2206	(3) -1.6097	(2) -2.4467	(1) -5.5222	(1) -1.6176
5.5	(4) -8.0354	(3) -5.0961	(2) -6.9635	(2) -1.4325	(1) -3.8641
6.0	(5) -2.9409	(4) -1.6418	(3) -2.0268	(2) -3.8154	(1) -9.4968
6.5	(6) -1.0873	(4) -5.3723	(3) -6.0185	(3) -1.0408	(2) -2.3977
7.0	(6) -4.0566	(5) -1.7825	(4) -1.8195	(3) -2.9006	(2) -6.2044
7.5	(7) -1.5259	(5) -5.9890	(4) -5.5897	(3) -8.2422	(3) -1.6419
8.0	(7) -5.7831	(6) -2.0352	(5) -1.7425	(4) -2.3835	(3) -4.4339
8.5	(8) -2.2067	(6) -6.9879	(5) -5.5045	(4) -7.0031	(4) -1.2197
9.0	(8) -8.4732	(7) -2.4222	(6) -1.7601	(5) -2.0878	(4) -3.4122
9.5	(9) -3.2724	(7) -8.4693	(6) -5.6909	(5) -6.3080	(4) -9.6943
10.0	(10) -1.2706	(8) -2.9853	(7) -1.8591	(6) -1.9295	(5) -2.7937
10.5	(10) -4.9580	(9) -1.0602	(7) -6.1315	(6) -5.9693	(5) -8.1574
11.0	(11) -1.9437	(9) -3.7915	(8) -2.0402	(7) -1.8664	(6) -2.4111
11.5	(11) -7.6530	(10) -1.3647	(8) -6.8449	(7) -5.8932	(6) -7.2077
12.0	(12) -3.0256	(10) -4.9424	(9) -2.3143	(8) -1.8780	(7) -2.1776
12.5	(13) -1.2008	(11) -1.8002	(9) -7.8819	(8) -6.0367	(7) -6.6446
13.0	(13) -4.7827	(11) -6.5922	(10) -2.7027	(9) -1.9562	(8) -2.0464
13.5	(14) -1.9115	(12) -2.4263	(10) -9.3274	(9) -6.3878	(8) -6.3581
14.0	(14) -7.6643	(12) -8.9735	(11) -3.2386	(10) -2.1009	(9) -1.9918
14.5	(15) -3.0826	(13) -3.3339	(12) -1.1310	(10) -6.9573	(9) -6.2887
15.0	(16) -1.2434	(14) -1.2440	(12) -3.9713	(11) -2.3188	(10) -2.0003
15.5	(16) -5.0296	(14) -4.6610	(13) -1.4017	(11) -7.7763	(10) -6.4071
16.0	(17) -2.0399	(15) -1.7532	(13) -4.9720	(12) -2.6230	(11) -2.0660
16.5	(17) -8.2941	(15) -6.6194	(14) -1.7719	(12) -8.8973	(11) -6.7044
17.0	(18) -3.3805	(16) -2.5081	(14) -6.3433	(13) -3.0340	(12) -2.1889
17.5	(19) -1.3810	(16) -9.5361	(15) -2.2806	(14) -1.0399	(12) -7.1879
18.0	(19) -5.6545	(17) -3.6376	(15) -8.2334	(14) -3.5813	(13) -2.3735
18.5	(20) -2.3201	(18) -1.3919	(16) -2.9841	(15) -1.2392	(13) -7.8789
19.0	(20) -9.5394	(18) -5.3424	(17) -1.0857	(15) -4.3069	(14) -2.6288
19.5	(21) -3.9299	(19) -2.0564	(17) -3.9642	(16) -1.5033	(14) -8.8139
20.0	(22) -1.6221	(19) -7.9378	(18) -1.4526	(16) -5.2691	(15) -2.9690

Таблица 14.1. Волновые функции Кулона нулевого порядка

$F_0(\eta,\rho)$

$\eta\backslash\rho$	6	7	8	9	10
0.5	(0)-1.0286	(-1)-7.6744	(-1)+1.0351	(-1)+8.8802	(-1)+9.3919
1.0	(-1)-1.6718	(-1)-9.0632	(0)-1.0333	(-1)-4.3441	(-1)+4.7756
1.5	(-1)+8.7682	(-1)+1.1034	(-1)-7.0763	(0)-1.1015	(-1)-8.0125
2.0	(0) 1.2850	(0) 1.0148	(-1)+3.3340	(-1)-4.9930	(0)-1.0616
2.5	(0) 1.1633	(0) 1.3237	(0) 1.1181	(-1)+5.1312	(-1)-3.0351
3.0	(-1) 8.3763	(0) 1.1803	(0) 1.3540	(0) 1.1984	(-1)+6.6010
3.5	(-1) 5.2251	(-1) 8.6154	(0) 1.1957	(0) 1.3786	(0) 1.2627
4.0	(-1) 2.9445	(-1) 5.5158	(-1) 8.8245	(0) 1.2085	(0) 1.3992
4.5	(-1) 1.5362	(-1) 3.2100	(-1) 5.7720	(-1) 9.0109	(0) 1.2207
5.0	(-2) 7.5384	(-1) 1.7351	(-1) 3.4502	(-1) 6.0014	(-1) 9.1794
5.5	(-2) 3.5181	(-2) 8.8379	(-1) 1.9214	(-1) 3.6697	(-1) 6.2092
6.0	(-2) 1.5740	(-2) 4.2849	(-1) 1.0100	(-1) 2.0964	(-1) 3.8720
6.5	(-3) 6.7927	(-2) 1.9924	(-2) 5.0595	(-1) 1.1325	(-1) 2.2615
7.0	(-3) 2.8407	(-3) 8.9366	(-2) 2.4318	(-2) 5.8352	(-1) 1.2511
7.5	(-3) 1.1557	(-3) 3.8859	(-2) 1.1277	(-2) 2.8870	(-2) 6.6087
8.0	(-4) 4.5875	(-3) 1.6415	(-3) 5.0678	(-2) 1.3786	(-2) 3.3543
8.5	(-4) 1.7814	(-4) 6.7674	(-3) 2.2145	(-3) 6.3805	(-2) 1.6440
9.0	(-5) 6.7813	(-4) 2.7231	(-4) 9.4374	(-3) 2.8716	(-3) 7.8106
9.5	(-5) 2.5352	(-4) 1.0776	(-4) 3.9317	(-3) 1.2603	(-3) 3.6091
10.0	(-6) 9.3224	(-5) 4.1786	(-4) 1.6046	(-4) 5.4065	(-3) 1.6263
10.5	(-6) 3.3763	(-5) 1.5930	(-5) 6.4260	(-4) 2.2716	(-4) 7.1627
11.0	(-6) 1.2058	(-6) 5.9782	(-5) 2.5293	(-5) 9.3643	(-4) 3.0895
11.5	(-7) 4.2504	(-6) 2.2113	(-6) 9.7972	(-5) 3.7930	(-4) 1.3072
12.0	(-7) 1.4802	(-7) 8.0697	(-6) 3.7389	(-5) 1.5115	(-5) 5.4341
12.5	(-8) 5.0971	(-7) 2.9081	(-6) 1.4073	(-6) 5.9333	(-5) 2.2220
13.0	(-8) 1.7367	(-7) 1.0358	(-7) 5.2291	(-6) 2.2964	(-6) 8.9480
13.5	(-9) 5.8586	(-8) 3.6487	(-7) 1.9195	(-7) 8.7713	(-6) 3.5521
14.0	(-9) 1.9579	(-8) 1.2720	(-8) 6.9669	(-7) 3.3091	(-6) 1.3913
14.5	(-10) 6.4858	(-9) 4.3915	(-8) 2.5016	(-7) 1.2340	(-7) 5.3814
15.0	(-10) 2.1306	(-9) 1.5022	(-9) 8.8925	(-8) 4.5511	(-7) 2.0569
15.5	(-11) 6.9438	(-10) 5.0935	(-9) 3.1309	(-8) 1.6612	(-8) 7.7746
16.0	(-11) 2.2461	(-10) 1.7129	(-9) 1.0924	(-9) 6.0045	(-8) 2.9076
16.5	(-12) 7.2135	(-11) 5.7147	(-10) 3.7787	(-9) 2.1502	(-8) 1.0765
17.0	(-12) 2.3009	(-11) 1.8924	(-10) 1.2965	(-10) 7.6316	(-9) 3.9479
17.5	(-13) 7.2918	(-12) 6.2217	(-11) 4.4135	(-10) 2.6859	(-9) 1.4347
18.0	(-13) 2.2965	(-12) 2.0316	(-11) 1.4913	(-11) 9.3772	(-10) 5.1691
18.5	(-14) 7.1900	(-13) 6.5907	(-12) 5.0033	(-11) 3.2487	(-10) 1.8470
19.0	(-14) 2.2382	(-13) 2.1247	(-12) 1.6672	(-11) 1.1173	(-11) 6.5478
19.5	(-15) 6.9296	(-14) 6.8088	(-13) 5.5194	(-12) 3.8154	(-11) 2.3038
20.0	(-15) 2.1342	(-14) 2.1694	(-13) 1.8158	(-12) 1.2942	(-12) 8.0470

$\frac{d}{d\rho}F_0(\eta,\rho)$

$\eta\backslash\rho$	6	7	8	9	10
0.5	(-1)-1.6439	(-1)+6.5317	(-1)+9.6217	(-1)+4.8856	(-1)-3.9577
1.0	(-1)-8.9251	(-1)-4.9515	(-1)+2.6293	(-1)+8.6117	(-1)+8.4114
1.5	(-1)-5.9833	(-1)-8.7151	(-1)-6.7918	(-2)-5.9095	(-1)+6.3051
2.0	(-2)-4.4197	(-1)-4.9758	(-1)-8.2026	(-1)-7.7036	(-1)-2.9353
2.5	(-1)+2.9104	(-3)-1.2700	(-1)-4.1714	(-1)-7.6083	(-1)-8.0858
3.0	(-1) 3.6867	(-1)+2.8830	(-2)+3.0507	(-1)-3.5216	(-1)-7.0180
3.5	(-1) 3.0694	(-1) 3.5660	(-1) 2.8559	(-2)+5.4822	(-1)-2.9887
4.0	(-1) 2.0917	(-1) 3.0193	(-1) 3.4667	(-1) 2.8296	(-2)+7.3929
4.5	(-1) 1.2557	(-1) 2.1173	(-1) 2.9748	(-1) 3.3827	(-1) 2.8044
5.0	(-2) 6.8842	(-1) 1.3148	(-1) 2.1357	(-1) 2.9346	(-1) 3.3103
5.5	(-2) 3.5199	(-2) 7.4742	(-1) 1.3640	(-1) 2.1489	(-1) 2.8982
6.0	(-2) 1.7018	(-2) 3.9680	(-2) 7.9960	(-1) 1.4058	(-1) 2.1583
6.5	(-3) 7.8549	(-2) 1.9931	(-2) 4.3832	(-2) 8.4608	(-1) 1.4416
7.0	(-3) 3.4861	(-3) 9.5595	(-2) 2.2750	(-2) 4.7685	(-2) 8.8777
7.5	(-3) 1.4956	(-3) 4.4083	(-2) 1.1280	(-2) 2.5468	(-2) 5.1768
8.0	(-4) 6.2296	(-3) 1.9647	(-3) 5.3775	(-2) 1.2999	(-2) 2.8081
8.5	(-4) 2.5276	(-4) 8.4983	(-3) 2.4777	(-3) 6.3815	(-2) 1.4707
9.0	(-4) 1.0018	(-4) 3.5795	(-3) 1.1077	(-3) 3.0279	(-3) 7.4103
9.5	(-5) 3.8880	(-4) 1.4721	(-4) 4.8216	(-3) 1.3940	(-3) 3.6095
10.0	(-5) 1.4803	(-5) 5.9256	(-4) 2.0487	(-4) 6.2477	(-3) 1.7060
10.5	(-6) 5.5384	(-5) 2.3388	(-5) 8.5166	(-4) 2.7329	(-4) 7.8494
11.0	(-6) 2.0392	(-6) 9.0675	(-5) 3.4707	(-4) 1.1694	(-4) 3.5246
11.5	(-7) 7.3981	(-6) 3.4579	(-5) 1.3887	(-5) 4.9038	(-4) 1.5479
12.0	(-7) 2.6475	(-6) 1.2988	(-6) 5.4642	(-5) 2.0187	(-5) 6.6617
12.5	(-8) 9.3549	(-7) 4.8095	(-6) 2.1167	(-6) 8.1695	(-5) 2.8139
13.0	(-8) 3.2665	(-7) 1.7578	(-7) 8.0818	(-6) 3.2541	(-5) 1.1682
13.5	(-8) 1.1280	(-8) 6.3458	(-7) 3.0443	(-6) 1.2772	(-6) 4.7727
14.0	(-9) 3.8550	(-8) 2.2647	(-7) 1.1324	(-7) 4.9445	(-6) 1.9209
14.5	(-9) 1.3046	(-9) 7.9952	(-8) 4.1623	(-7) 1.8896	(-7) 7.6241
15.0	(-10) 4.3743	(-9) 2.7940	(-8) 1.5130	(-8) 7.1342	(-7) 2.9865
15.5	(-10) 1.4540	(-10) 9.6701	(-9) 5.4422	(-8) 2.6629	(-7) 1.1555
16.0	(-11) 4.7930	(-10) 3.3165	(-9) 1.9382	(-9) 9.8333	(-8) 4.4191
16.5	(-11) 1.5677	(-10) 1.1277	(-10) 6.8378	(-9) 3.5942	(-8) 1.6715
17.0	(-12) 5.0893	(-11) 3.8030	(-10) 2.3909	(-9) 1.3011	(-9) 6.2571
17.5	(-12) 1.6405	(-11) 1.2726	(-11) 8.2893	(-10) 4.6667	(-9) 2.3192
18.0	(-13) 5.2523	(-12) 4.2267	(-11) 2.8507	(-10) 1.6593	(-10) 8.5155
18.5	(-13) 1.6708	(-12) 1.3939	(-12) 9.7283	(-11) 5.8508	(-10) 3.0988
19.0	(-14) 5.2819	(-13) 4.5659	(-12) 3.2955	(-11) 2.0467	(-10) 1.1181
19.5	(-14) 1.6599	(-13) 1.4859	(-12) 1.1085	(-12) 7.1053	(-11) 4.0014
20.0	(-15) 5.1871	(-14) 4.8057	(-13) 3.7036	(-12) 2.4488	(-11) 1.4209

Таблица 14.1. Волновые функции Кулона нулевого порядка

$G_0(\eta,\rho)$

$\eta\backslash\rho$	6	7	8	9	10
0.5	(-1)-1.8864	(-1)+7.0005	(0)+1.0284	(-1)+5.2116	(-1)-4.1435
1.0	(0)-1.0908	(-1)-5.9842	(-1)+2.9114	(-1)+9.7148	(-1)+9.4287
1.5	(-1)-7.8946	(0)-1.1403	(-1)-8.7095	(-2)-9.0032	(-1)+7.4235
2.0	(-2)+5.7313	(-1)-6.8409	(0)-1.1353	(0)-1.0415	(-1)-3.9931
2.5	(-1) 8.5834	(-1)+1.4966	(-1)-5.8782	(0)-1.1041	(0)-1.1456
3.0	(0) 1.4847	(-1) 9.1321	(-1)+2.2822	(-1)-5.0095	(0)-1.0601
3.5	(0) 2.0980	(0) 1.5205	(-1) 9.6127	(-1)+2.9641	(-1)-4.2253
4.0	(0) 3.0138	(0) 2.1165	(0) 1.5526	(0) 1.0040	(-1)+3.5656
4.5	(0) 4.7449	(0) 2.9779	(0) 2.1340	(0) 1.5818	(0) 1.0426
5.0	(0) 8.2720	(0) 4.5475	(0) 2.9524	(0) 2.1507	(0) 1.6085
5.5	(1) 1.5713	(0) 7.6426	(0) 4.3971	(0) 2.9338	(0) 2.1665
6.0	(1) 3.1910	(1) 1.3964	(0) 7.1665	(0) 4.2789	(0) 2.9202
6.5	(1) 6.8300	(1) 2.7266	(1) 1.2667	(0) 6.7939	(0) 4.1837
7.0	(2) 1.5259	(1) 5.6125	(1) 2.3913	(1) 1.1669	(0) 6.4944
7.5	(2) 3.5340	(2) 1.2063	(1) 4.7587	(1) 2.1389	(1) 1.0879
8.0	(2) 8.4429	(2) 2.6887	(1) 9.8888	(1) 4.1320	(1) 1.9428
8.5	(3) 2.0726	(2) 6.1843	(2) 2.1316	(1) 8.3352	(1) 3.6553
9.0	(3) 5.2121	(3) 1.4623	(2) 4.7425	(2) 1.7442	(1) 7.1811
9.5	(4) 1.3393	(3) 3.5436	(3) 1.0850	(2) 3.7678	(2) 1.4634
10.0	(4) 3.5096	(3) 8.7792	(3) 2.5448	(2) 8.3709	(2) 3.0787
10.5	(4) 9.3615	(4) 2.2190	(3) 6.1041	(3) 1.9070	(2) 6.6618
11.0	(5) 2.5381	(4) 5.7119	(4) 1.4943	(3) 4.4437	(3) 1.4783
11.5	(5) 6.9851	(5) 1.4951	(4) 3.7266	(4) 1.0570	(3) 3.3559
12.0	(6) 1.9492	(5) 3.9745	(4) 9.4543	(4) 2.5623	(3) 7.7783
12.5	(6) 5.5096	(6) 1.0718	(5) 2.4367	(4) 6.3199	(4) 1.8375
13.0	(7) 1.5761	(6) 2.9290	(5) 6.3731	(5) 1.5841	(4) 4.4178
13.5	(7) 4.5596	(6) 8.1041	(6) 1.6898	(5) 4.0302	(5) 1.0796
14.0	(8) 1.3330	(7) 2.2686	(6) 4.5378	(6) 1.0398	(5) 2.6784
14.5	(8) 3.9356	(7) 6.4200	(7) 1.2333	(6) 2.7177	(5) 6.7399
15.0	(9) 1.1728	(8) 1.8356	(7) 3.3897	(6) 7.1908	(6) 1.7186
15.5	(9) 3.5260	(8) 5.2995	(7) 9.4158	(7) 1.9247	(6) 4.4374
16.0	(10) 1.0689	(9) 1.5441	(8) 2.6418	(7) 5.2078	(7) 1.1592
16.5	(10) 3.2661	(9) 4.5382	(8) 7.4830	(8) 1.4237	(7) 3.0621
17.0	(11) 1.0055	(10) 1.3449	(9) 2.1387	(8) 3.9301	(7) 8.1738
17.5	(11) 3.1176	(10) 4.0168	(9) 6.1650	(9) 1.0950	(8) 2.2037
18.0	(11) 9.7326	(11) 1.2087	(10) 1.7916	(9) 3.0778	(8) 5.9978
18.5	(12) 3.0582	(11) 3.6634	(10) 5.2473	(9) 8.7237	(9) 1.6472
19.0	(12) 9.6692	(12) 1.1179	(11) 1.5483	(10) 2.4925	(9) 4.5626
19.5	(13) 3.0754	(12) 3.4335	(11) 4.6007	(10) 7.1762	(10) 1.2742
20.0	(13) 9.8379	(13) 1.0612	(12) 1.3764	(11) 2.0813	(10) 3.5867

$\frac{d}{d\rho}G_0(\eta,\rho)$

$\eta\backslash\rho$	6	7	8	9	10
0.5	(-1)+9.4204	(-1)+7.0722	(-1)-1.0134	(-1)-8.3938	(-1)-8.9014
1.0	(-1)+1.5804	(-1)+7.7643	(-1)+8.9368	(-1)+3.7613	(-1)-4.3326
1.5	(-1)-6.0177	(-2)-5.6347	(-1)+5.7724	(-1)+9.0303	(-1)+6.6389
2.0	(-1)-7.8017	(-1)-6.4998	(-1)-2.0611	(-1)+3.9589	(-1)+8.3156
2.5	(-1)-6.4488	(-1)-7.5558	(-1)-6.7507	(-1)-3.1180	(-1)+2.4273
3.0	(-1)-5.4037	(-1)-6.2420	(-1)-7.3342	(-1)-6.8725	(-1)-3.8780
3.5	(-1)-6.8137	(-1)-5.3136	(-1)-6.0700	(-1)-7.1359	(-1)-6.9193
4.0	(0)-1.2552	(-1)-6.5441	(-1)-5.2327	(-1)-5.9237	(-1)-6.9585
4.5	(0)-2.6310	(0)-1.1510	(-1)-6.3266	(-1)-5.1597	(-1)-5.7969
5.0	(0)-5.7112	(0)-2.3175	(0)-1.0709	(-1)-6.1460	(-1)-5.0932
5.5	(1)-1.2704	(0)-4.8515	(0)-2.0829	(0)-1.0071	(-1)-5.9925
6.0	(1)-2.9032	(1)-1.0407	(0)-4.2272	(0)-1.9007	(-1)-9.5489
6.5	(1)-6.8237	(1)-2.2915	(0)-8.7913	(0)-3.7545	(0)-1.7550
7.0	(2)-1.6477	(1)-5.1862	(1)-1.8751	(0)-7.6010	(0)-3.3846
7.5	(2)-4.0793	(2)-1.2056	(1)-4.1077	(1)-1.5769	(0)-6.6920
8.0	(3)-1.0333	(2)-2.8738	(1)-9.2394	(1)-3.3574	(1)-1.3548
8.5	(3)-2.6728	(2)-7.0107	(2)-2.1308	(1)-7.3362	(1)-2.8128
9.0	(3)-7.0464	(3)-1.7469	(2)-5.0295	(2)-1.6432	(1)-5.9900
9.5	(4)-1.8904	(3)-4.4387	(3)-1.2129	(2)-3.7670	(2)-1.3072
10.0	(4)-5.1540	(4)-1.1482	(3)-2.9831	(2)-8.8229	(2)-2.9193
10.5	(5)-1.4262	(4)-3.0197	(3)-7.4717	(3)-2.1080	(2)-6.6607
11.0	(5)-4.0011	(4)-8.0639	(4)-1.9033	(3)-5.1298	(3)-1.5503
11.5	(6)-1.1369	(5)-2.1843	(4)-4.9246	(4)-1.2698	(3)-3.6759
12.0	(6)-3.2694	(5)-5.9953	(5)-1.2929	(4)-3.1937	(3)-8.8669
12.5	(6)-9.5069	(6)-1.6661	(5)-3.4407	(4)-8.1522	(4)-2.1734
13.0	(7)-2.7936	(6)-4.6839	(5)-9.2739	(5)-2.1099	(4)-5.4080
13.5	(7)-8.2899	(7)-1.3312	(6)-2.5296	(5)-5.5322	(5)-1.3647
14.0	(8)-2.4829	(7)-3.8226	(6)-6.9781	(6)-1.4684	(5)-3.4894
14.5	(8)-7.5021	(8)-1.1083	(7)-1.9454	(6)-3.9424	(5)-9.0337
15.0	(9)-2.2856	(8)-3.2430	(7)-5.4781	(7)-1.0701	(6)-2.3663
15.5	(9)-7.0183	(8)-9.5716	(8)-1.5573	(7)-2.9344	(6)-6.2673
16.0	(10)-2.1712	(9)-2.8485	(8)-4.4670	(7)-8.1256	(7)-1.6775
16.5	(10)-6.7650	(9)-8.5435	(9)-1.2923	(8)-2.2710	(7)-4.5347
17.0	(11)-2.1221	(10)-2.5817	(9)-3.7692	(8)-6.4031	(8)-1.2375
17.5	(11)-6.7001	(10)-7.8569	(10)-1.1079	(9)-1.8206	(8)-3.4078
18.0	(12)-2.1285	(11)-2.4075	(10)-3.2807	(9)-5.2180	(8)-9.4651
18.5	(12)-6.8019	(11)-7.4250	(10)-9.7840	(10)-1.5070	(9)-2.6506
19.0	(13)-2.1860	(12)-2.3043	(11)-2.9377	(10)-4.3845	(9)-7.4812
19.5	(13)-7.0638	(12)-7.1939	(11)-8.8779	(11)-1.2846	(10)-2.1275
20.0	(14)-2.2945	(13)-2.2589	(12)-2.6998	(11)-3.7889	(10)-6.0938

Таблица 14.1. Волновые функции Кулона нулевого порядка

$F_0(\eta,\rho)$

$\eta \backslash \rho$	11	12	13	14	15
0.5	(-1)+2.0734	(-1)-6.9792	(0)-1.0101	(-1)-4.5964	(-1)+4.8492
1.0	(0)+1.0798	(-1)+7.9515	(-2)-5.5932	(-1)-8.6120	(-1)-9.7879
1.5	(-2)+2.4612	(-1)+8.3008	(0)+1.0493	(-1)+5.1243	(-1)-3.9930
2.0	(0)-1.0170	(-1)-3.6119	(-1)+5.1844	(0)+1.0566	(-1)+8.8343
2.5	(-1)-9.6841	(0)-1.1262	(-1)-6.5977	(-1)+1.9869	(-1)+9.1875
3.0	(-1)-1.2613	(-1)-8.5079	(0)-1.1642	(-1)-8.7866	(-1)-1.1758
3.5	(-1)+7.8227	(-2)+3.2549	(-1) 7.2395	(0)-1.1551	(0)-1.0318
4.0	(0) 1.3156	(-1) 8.8532	(-1)+1.7404	(-1)-5.9595	(0)-1.1153
4.5	(0) 1.4169	(0) 1.3600	(-1) 9.7341	(-1)+3.0035	(-1)-4.7101
5.0	(0) 1.2318	(0) 1.4324	(0) 1.3978	(0) 1.0496	(-1)+4.1342
5.5	(-1) 9.3335	(0) 1.2422	(0) 1.4462	(0) 1.4305	(0) 1.1161
6.0	(-1) 6.3994	(-1) 9.4757	(0) 1.2519	(0) 1.4586	(0) 1.4592
6.5	(-1) 4.0596	(-1) 6.5749	(-1) 9.6077	(0) 1.2610	(0) 1.4698
7.0	(-1) 2.4178	(-1) 4.2347	(-1) 6.7378	(-1) 9.7312	(0) 1.2697
7.5	(-1) 1.3660	(-1) 2.5662	(-1) 4.3989	(-1) 6.8900	(-1) 9.8472
8.0	(-2) 7.3768	(-1) 1.4773	(-1) 2.7074	(-1) 4.5535	(-1) 7.0328
8.5	(-2) 3.8306	(-2) 8.1375	(-1) 1.5852	(-1) 2.8422	(-1) 4.6997
9.0	(-2) 1.9215	(-2) 4.3132	(-2) 8.8895	(-1) 1.6898	(-1) 2.9711
9.5	(-3) 9.3472	(-2) 2.2096	(-2) 4.8001	(-2) 9.6316	(-1) 1.7913
10.0	(-3) 4.4228	(-2) 1.0980	(-2) 2.5064	(-2) 5.2898	(-1) 1.0363
10.5	(-3) 2.0410	(-3) 5.3087	(-2) 1.2700	(-2) 2.8108	(-2) 5.7809
11.0	(-4) 9.2064	(-3) 2.5036	(-3) 6.2624	(-2) 1.4498	(-2) 3.1214
11.5	(-4) 4.0667	(-3) 1.1541	(-3) 3.0126	(-3) 7.2798	(-2) 1.6367
12.0	(-4) 1.7621	(-4) 5.2102	(-3) 1.4168	(-3) 3.5666	(-3) 8.3567
12.5	(-5) 7.5001	(-4) 2.3072	(-4) 6.5253	(-3) 1.7085	(-3) 4.1640
13.0	(-5) 3.1398	(-4) 1.0036	(-4) 2.9480	(-4) 8.0157	(-3) 2.0290
13.5	(-5) 1.2943	(-5) 4.2931	(-4) 1.3082	(-4) 3.6890	(-4) 9.6841
14.0	(-6) 5.2587	(-5) 1.8082	(-5) 5.7090	(-4) 1.6677	(-4) 4.5343
14.5	(-6) 2.1078	(-6) 7.5055	(-5) 2.4529	(-5) 7.4139	(-4) 2.0854
15.0	(-7) 8.3417	(-6) 3.0731	(-5) 1.0386	(-5) 3.2448	(-5) 9.4326
15.5	(-7) 3.2617	(-6) 1.2422	(-6) 4.3371	(-5) 1.3994	(-5) 4.2002
16.0	(-7) 1.2609	(-7) 4.9601	(-6) 1.7878	(-6) 5.9525	(-5) 1.8479
16.5	(-8) 4.8223	(-7) 1.9580	(-7) 7.2797	(-6) 2.4990	(-6) 7.9746
17.0	(-8) 1.8255	(-8) 7.6449	(-7) 2.9299	(-6) 1.0363	(-6) 3.4058
17.5	(-9) 6.8436	(-8) 2.9542	(-7) 1.1663	(-7) 4.2471	(-6) 1.4366
18.0	(-9) 2.5420	(-8) 1.1303	(-8) 4.5940	(-7) 1.7213	(-7) 5.9886
18.5	(-10) 9.3587	(-9) 4.2845	(-8) 1.7916	(-8) 6.9031	(-7) 2.4686
19.0	(-10) 3.4166	(-9) 1.6095	(-9) 6.9206	(-8) 2.7406	(-7) 1.0068
19.5	(-10) 1.2373	(-10) 5.9943	(-9) 2.6491	(-8) 1.0776	(-8) 4.0646
20.0	(-11) 4.4462	(-10) 2.2143	(-9) 1.0052	(-9) 4.1981	(-8) 1.6250

$\frac{d}{d\rho}F_0(\eta,\rho)$

$\eta \backslash \rho$	11	12	13	14	15
0.5	(-1)-9.5680	(-1)-7.1349	(-1)+1.3869	(-1)+8.7670	(-1)+8.6352
1.0	(-1)+1.8546	(-1)-6.2449	(-1)-9.5769	(-1)-5.3599	(-1)+3.1951
1.5	(-1)+9.2360	(-1)+5.8520	(-1)-1.7814	(-1)-8.2728	(-1)-8.7421
2.0	(-1)+3.8476	(-1)+8.5839	(-1)+7.9972	(-1)+2.0967	(-1)-5.3804
2.5	(-1)-4.5774	(-1)+1.6399	(-1)+7.2679	(-1)+8.8132	(-1)+4.9591
3.0	(-1)-8.1670	(-1)-5.7064	(-2)-2.2037	(-1)+5.7220	(-1)+8.7738
3.5	(-1)-6.4636	(-1)-8.0763	(-1)-6.4688	(-1)-1.7427	(-1)+4.1643
4.0	(-1)-2.5453	(-1)-5.9550	(-1)-7.8882	(-1)-6.9700	(-1)-2.9695
4.5	(-2)+8.9270	(-1)-2.1713	(-1)-5.4930	(-1)-7.6466	(-1)-7.2842
5.0	(-1) 2.7803	(-1)+1.0181	(-1)-1.8523	(-1)-5.0747	(-1)-7.3777
5.5	(-1) 3.2469	(-1) 2.7572	(-1)+1.1221	(-1)-1.5772	(-1)-4.6963
6.0	(-1) 2.8649	(-1) 3.1907	(-1) 2.7353	(-1)+1.2094	(-1)-1.3378
6.5	(-1) 2.1649	(-1) 2.8342	(-1) 3.1402	(-1) 2.7144	(-1)+1.2836
7.0	(-1) 1.4725	(-1) 2.1694	(-1) 2.8059	(-1) 3.0946	(-1) 2.6945
7.5	(-2) 9.2538	(-1) 1.4994	(-1) 2.1722	(-1) 2.7794	(-1) 3.0530
8.0	(-2) 5.4607	(-2) 9.5947	(-1) 1.5231	(-1) 2.1737	(-1) 2.7548
8.5	(-2) 3.0589	(-2) 5.7724	(-2) 9.9053	(-1) 1.5440	(-1) 2.1743
9.0	(-2) 1.6394	(-2) 3.2995	(-2) 6.0640	(-1) 1.0189	(-1) 1.5625
9.5	(-3) 8.4560	(-2) 1.8054	(-2) 3.5301	(-2) 6.3375	(-1) 1.0450
10.0	(-3) 4.2172	(-3) 9.5118	(-2) 1.9685	(-2) 3.7513	(-2) 6.5943
10.5	(-3) 2.0412	(-3) 4.8467	(-2) 1.0573	(-2) 2.1282	(-2) 3.9633
11.0	(-4) 9.6175	(-3) 2.3971	(-3) 5.4937	(-2) 1.1634	(-2) 2.2844
11.5	(-4) 4.4224	(-3) 1.1542	(-3) 2.7714	(-3) 6.1551	(-2) 1.2693
12.0	(-4) 1.9888	(-4) 5.4237	(-3) 1.3612	(-3) 3.1620	(-3) 6.8276
12.5	(-5) 8.7636	(-4) 2.4927	(-4) 6.5256	(-3) 1.5818	(-3) 3.5670
13.0	(-5) 3.7897	(-4) 1.1224	(-4) 3.0596	(-4) 7.7243	(-3) 1.8150
13.5	(-5) 1.6105	(-5) 4.9597	(-4) 1.4055	(-4) 3.6892	(-4) 9.0158
14.0	(-6) 6.7342	(-5) 2.1535	(-5) 6.3355	(-4) 1.7264	(-4) 4.3806
14.5	(-6) 2.7736	(-6) 9.1993	(-5) 2.8061	(-5) 7.9271	(-4) 2.0855
15.0	(-6) 1.1263	(-6) 3.8704	(-5) 1.2227	(-5) 3.5765	(-5) 9.7427
15.5	(-7) 4.5133	(-6) 1.6053	(-6) 5.2466	(-5) 1.5873	(-5) 4.4720
16.0	(-7) 1.7861	(-7) 6.5690	(-6) 2.2191	(-6) 6.9375	(-5) 2.0192
16.5	(-8) 6.9850	(-7) 2.6544	(-7) 9.2602	(-6) 2.9885	(-6) 8.9777
17.0	(-8) 2.7014	(-7) 1.0598	(-7) 3.8151	(-6) 1.2700	(-6) 3.9341
17.5	(-8) 1.0337	(-8) 4.1839	(-7) 1.5529	(-7) 5.3278	(-6) 1.7006
18.0	(-9) 3.9159	(-8) 1.6340	(-8) 6.2491	(-7) 2.2081	(-7) 7.2565
18.5	(-9) 1.4693	(-9) 6.3169	(-8) 2.4875	(-8) 9.0465	(-7) 3.0587
19.0	(-10) 5.4629	(-9) 2.4184	(-9) 9.8001	(-8) 3.6658	(-7) 1.2744
19.5	(-10) 2.0135	(-10) 9.1730	(-9) 3.8231	(-8) 1.4700	(-8) 5.2514
20.0	(-11) 7.3598	(-10) 3.4487	(-9) 1.4774	(-9) 5.8367	(-8) 2.1413

Таблица 14.1. Волновые функции Кулона нулевого порядка

$G_0(\eta,\rho)$

$\eta \setminus \rho$	11	12	13	14	15
0.5	(0)-1.0028	(-1)-7.4645	(-1)+1.4266	(-1)+9.0905	(-1)+8.9435
1.0	(-1)+2.1054	(-1)-6.8021	(0)-1.0410	(-1)-5.8152	(-1)+3.4046
1.5	(0)+1.0819	(-1)+6.8165	(-1)-1.9619	(-1)-9.3005	(-1)-9.7885
2.0	(-1)+4.6526	(0)+1.0451	(-1)+9.6524	(-1)+2.5664	(-1)-6.2172
2.5	(-1)-6.4066	(-1)+1.9303	(-1)+9.1486	(0)+1.0999	(-1)+6.1593
3.0	(0)-1.2065	(-1)-8.2667	(-2)-5.4999	(-1)+7.4014	(0)+1.1292
3.5	(0)-1.0105	(0)-1.2387	(-1)-9.6933	(-1)-2.7342	(-1)+5.4881
4.0	(-1)-3.5145	(-1)-9.5867	(0)-1.2515	(0)-1.0783	(-1)-4.6254
4.5	(-1)+4.1032	(-1)-2.8667	(-1)-9.0670	(0)-1.2510	(0)-1.1612
5.0	(0) 1.0777	(-1)+4.5891	(-1)-2.2730	(-1)-8.5560	(0)-1.2413
5.5	(0) 1.6333	(0) 1.1100	(-1)+5.0322	(-1)-1.7259	(-1)-8.0595
6.0	(0) 2.1816	(0) 1.6563	(0) 1.1399	(-1)+5.4393	(-1)-1.2194
6.5	(0) 2.9102	(0) 2.1960	(0) 1.6778	(0) 1.1677	(-1)+5.8159
7.0	(0) 4.1056	(0) 2.9029	(0) 2.2097	(0) 1.6980	(0) 1.1937
7.5	(0) 6.2486	(0) 4.0404	(0) 2.8977	(0) 2.2229	(0) 1.7172
8.0	(1) 1.0238	(0) 6.0432	(0) 3.9853	(0) 2.8940	(0) 2.2365
8.5	(1) 1.7863	(0) 9.7072	(0) 5.8691	(0) 3.9383	(0) 2.8916
9.0	(1) 3.2824	(1) 1.6587	(0) 9.2614	(0) 5.7197	(0) 3.8977
9.5	(1) 6.2966	(1) 2.9836	(1) 1.5529	(0) 8.8817	(0) 5.5902
10.0	(2) 1.2529	(1) 5.6013	(1) 2.7395	(1) 1.4638	(0) 8.5544
10.5	(2) 2.5735	(2) 1.0906	(1) 5.0429	(1) 2.5369	(1) 1.3878
11.0	(2) 5.4370	(2) 2.1919	(1) 9.6258	(1) 4.5863	(1) 2.3662
11.5	(3) 1.1780	(2) 4.5309	(2) 1.8964	(1) 8.5960	(1) 4.2071
12.0	(3) 2.6115	(2) 9.6054	(2) 3.8424	(2) 1.6627	(1) 7.7536
12.5	(3) 5.9114	(3) 2.0835	(2) 7.9840	(2) 3.3072	(2) 1.4744
13.0	(4) 1.3640	(3) 4.6148	(3) 1.6974	(2) 6.7457	(2) 2.8830
13.5	(4) 3.2036	(4) 1.0421	(3) 3.6852	(3) 1.4078	(2) 5.7803
14.0	(4) 7.6488	(4) 2.3953	(3) 8.1567	(3) 3.0002	(3) 1.1857
14.5	(5) 1.8544	(4) 5.5978	(4) 1.8380	(3) 6.5186	(3) 2.4836
15.0	(5) 4.5606	(5) 1.3286	(4) 4.2110	(4) 1.4419	(3) 5.3038
15.5	(6) 1.1368	(5) 3.1990	(4) 9.7988	(4) 3.2432	(4) 1.1531
16.0	(6) 2.8697	(5) 7.8082	(5) 2.3136	(4) 7.4095	(4) 2.5494
16.5	(6) 7.3309	(6) 1.9303	(5) 5.5378	(5) 1.7177	(4) 5.7251
17.0	(7) 1.8940	(6) 4.8301	(6) 1.3427	(5) 4.0372	(5) 1.3047
17.5	(7) 4.9456	(7) 1.2225	(6) 3.2955	(5) 9.6130	(5) 3.0146
18.0	(8) 1.3046	(7) 3.1276	(6) 8.1823	(6) 2.3172	(5) 7.0570
18.5	(8) 3.4746	(7) 8.0845	(7) 2.0539	(6) 5.6510	(6) 1.6726
19.0	(8) 9.3396	(8) 2.1103	(7) 5.2096	(7) 1.3934	(6) 4.0107
19.5	(9) 2.5325	(8) 5.5602	(8) 1.3345	(7) 3.4722	(6) 9.7253
20.0	(9) 6.9249	(9) 1.4781	(8) 3.4512	(7) 8.7394	(7) 2.3833

$\frac{d}{d\rho}G_0(\eta,\rho)$

$\eta \setminus \rho$	11	12	13	14	15
0.5	(-1)-1.9549	(-1)+6.6972	(-1)+9.7040	(-1)+4.4173	(-1)-4.6958
1.0	(-1)-9.3312	(-1)-7.2341	(-2)+5.5060	(-1)+7.9924	(-1)+9.1053
1.5	(-2)-3.0001	(-1)-7.2415	(-1)-9.1975	(-1)-4.4998	(-1)+3.6132
2.0	(-1)+8.0730	(-1)+2.8479	(-1)-4.3994	(-1)-8.9553	(-1)-7.5330
2.5	(-1)+7.2980	(-1)+8.5982	(-1)+5.0789	(-1)-1.6218	(-1)-7.5598
3.0	(-1)+1.1621	(-1)+6.2091	(-1)+8.5795	(-1)+6.5611	(-2)+7.8968
3.5	(-1)-4.4342	(-2)+1.2156	(-1)+5.1517	(-1)+8.2450	(-1)+7.4771
4.0	(-1)-6.9211	(-1)-4.8470	(-2)-7.3596	(-1)+4.1682	(-1)+7.7350
4.5	(-1)-6.7991	(-1)-6.8955	(-1)-5.1566	(-1)-1.4460	(-1)+3.2728
5.0	(-1)-5.6855	(-1)-6.6551	(-1)-6.8530	(-1)-5.3907	(-1)-2.0374
5.5	(-1)-5.0324	(-1)-5.5863	(-1)-6.5243	(-1)-6.8002	(-1)-5.5683
6.0	(-1)-5.8597	(-1)-4.9764	(-1)-5.4972	(-1)-6.4050	(-1)-6.7414
6.5	(-1)-9.1132	(-1)-5.7431	(-1)-4.9245	(-1)-5.4165	(-1)-6.2956
7.0	(0)-1.6356	(-1)-8.7431	(-1)-5.6396	(-1)-4.8763	(-1)-5.3428
7.5	(0)-3.0877	(0)-1.5360	(-1)-8.4240	(-1)-5.5466	(-1)-4.8313
8.0	(0)-5.9776	(0)-2.8442	(0)-1.4516	(-1)-8.1456	(-1)-5.4626
8.5	(1)-1.1842	(0)-5.4029	(0)-2.6410	(0)-1.3790	(-1)-7.9001
9.0	(1)-2.4038	(1)-1.0496	(0)-4.9315	(0)-2.4689	(0)-1.3159
9.5	(1)-5.0022	(1)-2.0879	(0)-9.4124	(0)-4.5385	(0)-2.3213
10.0	(2)-1.0663	(1)-4.2551	(1)-1.8382	(0)-8.5238	(0)-4.2061
10.5	(2)-2.3257	(1)-8.8802	(1)-3.6758	(1)-1.6369	(0)-7.7837
11.0	(2)-5.1822	(2)-1.8956	(1)-7.5239	(1)-3.2170	(1)-1.4720
11.5	(3)-1.1779	(2)-4.1335	(2)-1.5749	(1)-6.4688	(1)-2.8470
12.0	(3)-2.7275	(2)-9.1940	(2)-3.3666	(2)-1.3297	(1)-5.6316
12.5	(3)-6.4259	(3)-2.0833	(2)-7.3407	(2)-2.7912	(2)-1.1385
13.0	(4)-1.5386	(3)-4.8031	(3)-1.6305	(2)-5.9750	(2)-2.3496
13.5	(4)-3.7400	(4)-1.1255	(3)-3.6849	(3)-1.3029	(2)-4.9448
14.0	(4)-9.2211	(4)-2.6777	(3)-8.4644	(3)-2.8906	(3)-1.0599
14.5	(5)-2.3041	(4)-6.4624	(4)-1.9742	(3)-6.5183	(3)-2.3115
15.0	(5)-5.8301	(5)-1.5808	(4)-4.6712	(4)-1.4925	(3)-5.1233
15.5	(6)-1.4929	(5)-3.9163	(5)-1.1203	(4)-3.4670	(4)-1.1531
16.0	(6)-3.8658	(5)-9.8198	(5)-2.7217	(4)-8.1642	(4)-2.6329
16.5	(7)-1.0118	(6)-2.4904	(5)-6.6925	(5)-1.9474	(4)-6.0946
17.0	(7)-2.6753	(6)-6.3846	(6)-1.6647	(5)-4.7022	(5)-1.4291
17.5	(7)-7.1420	(7)-1.6537	(6)-4.1862	(6)-1.1486	(5)-3.3924
18.0	(8)-1.9243	(7)-4.3256	(7)-1.0637	(6)-2.8369	(5)-8.1473
18.5	(8)-5.2302	(8)-1.1421	(7)-2.7299	(6)-7.0806	(6)-1.9785
19.0	(9)-1.4335	(8)-3.0423	(7)-7.0724	(7)-1.7850	(6)-4.8557
19.5	(9)-3.9609	(8)-8.1738	(8)-1.8489	(7)-4.5433	(7)-1.2038
20.0	(10)-1.1028	(9)-2.2141	(8)-4.8757	(8)-1.1670	(7)-3.0133

Таблица 14.1. Волновые функции Кулона нулевого порядка

$F_0(\eta,\rho)$

$\eta\backslash\rho$	16	17	18	19	20
0.5	(0)+1.0105	(- 1)+6.6039	(- 1)-2.6356	(- 1)-9.5714	(- 1)-8.1320
1.0	(- 1)-3.0813	(- 1)+6.1193	(0)+1.0298	(- 1)+5.9819	(- 1)-3.2923
1.5	(0)-1.0106	(- 1)-8.5450	(- 2)-4.2659	(- 1)+8.0098	(0)+1.0154
2.0	(- 1)+1.0271	(- 1)-7.4809	(0)-1.0610	(- 1) 6.0110	(- 1)+3.0159
2.5	(0)+1.0681	(- 1)+5.2505	(- 1)-3.6504	(0)-1.0050	(- 1)-9.4813
3.0	(- 1)+7.0689	(0)+1.1097	(- 2)+8.3235	(- 2)+3.2093	(- 1)-7.8654
3.5	(- 1)-3.8460	(- 1)+4.6531	(0)+1.0517	(0)+1.0266	(- 1)+3.8780
4.0	(0)-1.1328	(- 1)-6.0877	(- 1)+2.2016	(- 1)+9.2908	(0)+1.1240
4.5	(0)-1.0557	(0)-1.1932	(- 1)-7.9196	(- 2)-1.3928	(- 1)+7.6776
5.0	(- 1)-3.5128	(- 1)-9.8377	(0)-1.2226	(- 1)-9.3827	(- 1)-2.2935
5.5	(- 1)+5.1503	(- 1)-2.3772	(- 1)-9.0447	(0)-1.2281	(0)-1.0524
6.0	(0) 1.1748	(- 1)+6.0673	(- 1)-1.3066	(- 1)-8.2121	(0)-1.2155
6.5	(0) 1.4845	(0) 1.2270	(- 1)+6.8982	(- 2)-3.0049	(- 1)-7.3630
7.0	(0) 1.4802	(0) 1.5072	(0) 1.2736	(- 1)+7.6541	(- 2)+6.4345
7.5	(0) 1.2778	(0) 1.4897	(0) 1.5276	(0) 1.3157	(- 1) 8.3446
8.0	(- 1) 9.9567	(0) 1.2856	(0) 1.4986	(0) 1.5461	(0) 1.3538
8.5	(- 1) 7.1674	(0) 1.0060	(0) 1.2930	(0) 1.5069	(0) 1.5630
9.0	(- 1) 4.8334	(- 1) 7.2948	(0) 1.0159	(0) 1.3001	(0) 1.5147
9.5	(- 1) 3.0947	(- 1) 4.9703	(- 1) 7.4157	(0) 1.0253	(0) 1.3070
10.0	(- 1) 1.8899	(- 1) 3.2134	(- 1) 5.0960	(- 1) 7.5308	(0) 1.0343
10.5	(- 1) 1.1084	(- 1) 1.9857	(- 1) 3.3276	(- 1) 5.2163	(- 1) 7.6406
11.0	(- 2) 6.2723	(- 1) 1.1794	(- 1) 2.0789	(- 1) 3.4376	(- 1) 5.3315
11.5	(- 2) 3.4374	(- 2) 6.7632	(- 1) 1.2493	(- 1) 2.1696	(- 1) 3.5437
12.0	(- 2) 1.8300	(- 2) 3.7577	(- 2) 7.2527	(- 1) 1.3181	(- 1) 2.2578
12.5	(- 3) 9.4892	(- 2) 2.0290	(2) 4.0816	(- 2) 7.7405	(- 1) 1.3858
13.0	(- 3) 4.8032	(- 2) 1.0674	(- 2) 2.2331	(- 2) 4.4084	(- 2) 8.2258
13.5	(- 3) 2.3779	(- 3) 5.4824	(- 2) 1.1907	(- 2) 2.4418	(- 2) 4.7375
14.0	(- 3) 1.1532	(- 3) 2.7546	(- 3) 6.2000	(- 2) 1.3185	(- 2) 2.6546
14.5	(- 4) 5.4870	(- 3) 1.3560	(- 3) 3.1586	(- 3) 6.9542	(- 2) 1.4504
15.0	(- 4) 2.5646	(- 4) 6.5497	(- 3) 1.5768	(- 3) 3.5893	(- 3) 7.7433
15.5	(- 4) 1.1789	(- 4) 3.1079	(- 4) 7.7245	(- 3) 1.8156	(- 3) 4.0459
16.0	(- 5) 5.3346	(- 4) 1.4504	(- 4) 3.7177	(- 4) 9.0130	(- 3) 2.0721
16.5	(- 5) 2.3787	(- 5) 6.6636	(- 4) 1.7598	(- 4) 4.3962	(- 3) 1.0416
17.0	(- 5) 1.0460	(5) 3.0167	(- 5) 8.2016	(- 4) 2.1092	(- 4) 5.1452
17.5	(- 6) 4.5399	(- 5) 1.3469	(- 5) 3.7665	(- 5) 9.9629	(- 4) 2.5000
18.0	(- 6) 1.9459	(- 6) 5.9345	(- 5) 1.7058	(- 5) 4.6375	(- 4) 1.1961
18.5	(- 7) 8.2424	(- 6) 2.5824	(- 6) 7.6243	(- 5) 2.1289	(- 5) 5.6392
19.0	(- 7) 3.4522	(- 6) 1.1105	(- 6) 3.3654	(- 6) 9.6448	(- 5) 2.6221
19.5	(- 7) 1.4304	(- 7) 4.7213	(- 6) 1.4679	(- 6) 4.3152	(- 5) 1.2032
20.0	(- 8) 5.8668	(- 7) 1.9859	(- 7) 6.3305	(- 6) 1.9078	(- 6) 5.4529

$\frac{d}{d\rho}F_0(\eta,\rho)$

$\eta\backslash\rho$	16	17	18	19	20
0.5	(- 1)+1.0374	(- 1)-7.4873	(- 1)-9.5176	(- 1)-3.2396	(- 1)+5.8913
1.0	(- 1)+9.2398	(- 1)+7.7918	(- 3)-6.9768	(- 1)-7.9198	(- 1)-9.2215
1.5	(- 1)-2.6352	(- 1)+5.5592	(- 1)+9.5486	(- 1)+6.1234	(- 1)-2.1544
2.0	(- 1)-9.2711	(- 1)-6.6487	(- 2)+8.1839	(- 1)+7.7886	(- 1)+9.0561
2.5	(- 1)-2.1794	(- 1)-8.0683	(- 1)-8.6636	(- 1)-3.3293	(- 1)+4.4171
3.0	(- 1)+6.8521	(- 2)+7.3796	(- 1)-6.0115	(- 1)-9.0956	(- 1)-6.3111
3.5	(- 1)+8.2181	(- 1)+7.9551	(- 1)+3.1511	(- 1)-3.6640	(- 1)-8.4454
4.0	(- 1)+2.6981	(- 1)+7.3722	(- 1)+8.4585	(- 1)+5.0199	(- 1)-1.3528
4.5	(- 1)-3.9491	(- 1)+1.3669	(- 1)+6.3816	(- 1)+8.5260	(- 1)+6.3846
5.0	(- 1)-7.4641	(- 1)-4.7259	(- 2)+1.8327	(- 1)+5.3380	(- 1)+8.2868
5.5	(- 1)-7.0977	(- 1)-7.5469	(- 1)-5.3380	(- 2)-8.5571	(- 1)+4.2976
6.0	(- 1)-4.3534	(- 1)-6.8162	(- 1)-7.5595	(- 1)-5.8167	(- 1)-1.7601
6.5	(- 1)-1.1279	(- 1)-4.0420	(- 1)-6.5393	(- 1)-7.5212	(- 1)-6.1873
7.0	(- 1)+1.3471	(- 2)-9.4232	(- 1)-3.7584	(- 1)-6.2703	(- 1)-7.4462
7.5	(- 1) 2.6755	(- 1)+1.4020	(- 2)-7.7728	(- 1)-3.4994	(- 1)-6.0113
8.0	(- 1) 3.0148	(- 1) 2.6574	(- 1)+1.4497	(- 2)-6.2964	(- 1)-3.2623
8.5	(- 1) 2.7316	(- 1) 2.9796	(- 1) 2.6401	(- 1)+1.4915	(- 2)-4.9686
9.0	(- 1) 2.1740	(- 1) 2.7098	(- 1) 2.9470	(- 1) 2.6235	(- 1)+1.5282
9.5	(- 1) 1.5790	(- 1) 2.1730	(- 1) 2.6893	(- 1) 2.9166	(- 1) 2.6076
10.0	(- 1) 1.0690	(- 1) 1.5938	(- 1) 2.1715	(- 1) 2.6698	(- 1) 2.8881
10.5	(- 2) 6.8361	(- 1) 1.0912	(- 1) 1.6072	(- 1) 2.1696	(- 1) 2.6513
11.0	(- 2) 4.1667	(- 2) 7.0640	(- 1) 1.1118	(- 1) 1.6191	(- 1) 2.1673
11.5	(- 2) 2.4370	(- 2) 4.3620	(- 2) 7.2792	(- 1) 1.1309	(- 1) 1.6300
12.0	(- 2) 1.3747	(- 2) 2.5860	(- 2) 4.5494	(- 2) 7.4828	(- 1) 1.1487
12.5	(- 3) 7.5088	(- 2) 1.4792	(- 2) 2.7313	(- 2) 4.7295	(- 2) 7.6757
13.0	(- 3) 3.9846	(- 3) 8.1964	(- 2) 1.5829	(- 2) 2.8730	(- 2) 4.9026
13.5	(- 3) 2.0598	(3) 4.4133	(- 3) 8.8884	(- 2) 1.6854	(- 2) 3.0112
14.0	(- 3) 1.0396	(- 3) 2.3153	(- 3) 4.8514	(- 3) 9.5832	(- 2) 1.7867
14.5	(- 4) 5.1328	(- 3) 1.1861	(- 3) 2.5805	(- 3) 5.2978	(- 2) 1.0279
15.0	(- 4) 2.4832	(- 4) 5.9443	(- 3) 1.3405	(- 3) 2.8547	(- 3) 5.7512
15.5	(- 4) 1.1789	(- 4) 2.9194	(- 4) 6.8135	(- 3) 1.5025	(- 3) 3.1370
16.0	(- 5) 5.4992	(- 4) 1.4071	(- 4) 3.3940	(- 4) 7.7388	(- 3) 1.6717
16.5	(- 5) 2.5233	(- 5) 6.6637	(- 4) 1.6592	(- 4) 3.9067	(- 4) 8.7182
17.0	(- 5) 1.1401	(- 5) 3.1043	(- 5) 7.9706	(- 4) 1.9356	(- 4) 4.4568
17.5	(- 6) 5.0769	(- 5) 1.4240	(- 5) 3.7665	(- 5) 9.4242	(- 4) 2.2364
18.0	(- 6) 2.2300	(- 6) 6.4378	(- 5) 1.7526	(- 5) 4.5139	(- 4) 1.1028
18.5	(- 7) 9.6688	(- 6) 2.8708	(- 6) 8.0374	(- 5) 2.1289	(- 5) 5.3499
19.0	(- 7) 4.1409	(- 6) 1.2636	(- 6) 3.6355	(- 5) 9.8957	(- 5) 2.5557
19.5	(- 7) 1.7529	(- 7) 5.4935	(- 6) 1.6231	(- 6) 4.5369	(- 5) 1.2033
20.0	(- 8) 7.3379	(- 7) 2.3605	(- 7) 7.1576	(- 6) 2.0531	(- 6) 5.5878

Таблица 14.1. Волновые функции Кулона нулевого порядка

$G_0(\eta,\rho)$

$\eta\backslash\rho$	16	17	18	19	20
0.5	(-1)+1.0821	(-1)-7.7111	(-1)-9.7953	(-1)-3.3354	(-1)+6.0387
1.0	(-1)+9.8687	(-1)+8.3065	(-3)-5.5146	(-1)-8.3622	(-1)-9.7243
1.5	(-1)-2.9626	(-1)+6.0950	(0)+1.0457	(-1)+6.6931	(-1)-2.3123
2.0	(0)-1.0694	(-1)-7.6383	(-2)+8.8035	(-1)+8.7398	(0)+1.0133
2.5	(-1)-2.5363	(-1)-9.5594	(0)-1.0212	(-1)-3.9315	(-1)+5.0534
3.0	(-1)+8.7388	(-1)+1.0254	(-1)-7.2872	(0)-1.0987	(-1)-7.5896
3.5	(0)+1.0876	(0)+1.0419	(-1)+4.1434	(-1)-4.5088	(0)-1.0436
4.0	(-1)+3.5629	(0)+1.0004	(0)+1.1362	(-1)+6.7042	(-1)-1.6256
4.5	(-1)-6.2482	(-1)+1.7088	(-1)+8.8526	(0)+1.1729	(-1)+8.7013
5.0	(0)-1.2237	(-1)-7.6338	(-3)-3.2476	(-1)+7.5425	(0)+1.1657
5.5	(0)-1.2251	(0)-1.2701	(-1)-8.8135	(-1)-1.6427	(-1)+6.1562
6.0	(-1)-7.5801	(0)-1.2045	(0)-1.3038	(-1)-9.8158	(-1)-3.1172
6.5	(-2)-7.4816	(-1)-7.1189	(0)-1.1808	(0)-1.3275	(0)-1.0666
7.0	(-1)+6.1662	(-2)-3.0805	(-1)-6.6763	(0)-1.1549	(0)-1.3430
7.5	(0) 1.2182	(-1)+6.4936	(-2)+1.0458	(-1)-6.2518	(0)-1.1277
8.0	(0) 1.7353	(0) 1.2413	(-1) 6.8010	(-2)+4.9276	(-1)-5.8448
8.5	(0) 2.2476	(0) 1.7525	(0) 1.2631	(-1) 7.0906	(-2)+8.5910
9.0	(0) 2.8903	(0) 2.2593	(0) 1.7689	(0) 1.2839	(-1) 7.3645
9.5	(0) 3.8625	(0) 2.8897	(0) 2.2705	(0) 1.7846	(0) 1.3037
10.0	(0) 5.4768	(0) 3.8316	(0) 2.8898	(0) 2.2814	(0) 1.7997
10.5	(0) 8.2695	(0) 5.3768	(0) 3.8044	(0) 2.8904	(0) 2.2919
11.0	(1) 1.3223	(0) 8.0193	(0) 5.2879	(0) 3.7803	(0) 2.8915
11.5	(1) 2.2207	(1) 1.2652	(0) 7.7978	(0) 5.2085	(0) 3.7589
12.0	(1) 3.8880	(1) 2.0953	(1) 1.2151	(0) 7.6004	(0) 5.1370
12.5	(1) 7.0544	(1) 3.6163	(1) 1.9863	(1) 1.1707	(0) 7.4234
13.0	(2) 1.3205	(1) 6.4666	(1) 3.3826	(1) 1.8906	(1) 1.1312
13.5	(2) 2.5411	(2) 1.1927	(1) 5.9669	(1) 3.1797	(1) 1.8061
14.0	(2) 5.0139	(2) 2.2615	(2) 1.0655	(1) 5.5380	(1) 3.0021
14.5	(3) 1.0121	(2) 4.3958	(2) 2.0297	(1) 9.9453	(1) 5.1664
15.0	(3) 2.0860	(2) 8.7404	(2) 3.8903	(2) 1.8354	(1) 9.1659
15.5	(3) 4.3833	(3) 1.7745	(2) 7.6267	(2) 3.4717	(2) 1.6708
16.0	(3) 9.3774	(3) 3.6727	(3) 1.5265	(2) 6.7162	(2) 3.1213
16.5	(4) 2.0400	(3) 7.7388	(3) 3.1148	(3) 1.3264	(2) 5.9630
17.0	(4) 4.5079	(4) 1.6582	(3) 6.4702	(3) 2.6703	(3) 1.1629
17.5	(5) 1.0109	(4) 3.6090	(4) 1.3667	(3) 5.4726	(3) 2.3115
18.0	(5) 2.2987	(4) 7.9717	(4) 2.9323	(4) 1.1404	(3) 4.6772
18.5	(5) 5.2957	(5) 1.7855	(4) 6.3851	(4) 2.4141	(3) 9.6229
19.0	(6) 1.2353	(5) 4.0519	(5) 1.4098	(4) 5.1860	(4) 2.0110
19.5	(6) 2.9156	(5) 9.3105	(5) 3.1542	(5) 1.1297	(4) 4.2650
20.0	(6) 6.9590	(6) 2.1648	(5) 7.1454	(5) 2.4935	(4) 9.1723

$\frac{d}{d\rho}G_0(\eta,\rho)$

$\eta\backslash\rho$	16	17	18	19	20
0.5	(-1)-9.7855	(-1)-6.4000	(-1)+2.5695	(-1)+9.3189	(-1)+7.9224
1.0	(-1)+2.8609	(-1)-5.7650	(-1)-9.7102	(-1)-5.6460	(-1)+3.1370
1.5	(-1)+9.1227	(-1)+7.7374	(-2)+3.6067	(-1)-7.3679	(-1)-9.3578
2.0	(-2)-8.3491	(-1)+6.5787	(-1)+9.3570	(-1)+5.3119	(-1)-2.7296
2.5	(-1)-8.8452	(-1)-4.3562	(-1)+3.1578	(-1)+8.6483	(-1)+8.1928
3.0	(-1)-5.6757	(-1)-8.9431	(-1)-6.7512	(-2)-1.9960	(-1)+6.6241
3.5	(-1)+2.7609	(-1)-3.6790	(-1)-8.2667	(-1)-8.1315	(-1)-3.0592
4.0	(-1)+7.9794	(-1)+4.3113	(-1)-1.7673	(-1)-7.1410	(-1)-8.7013
4.5	(-1)+7.1352	(-1)+8.1848	(-1)+5.4934	(-3)-3.4829	(-1)-5.7890
5.0	(-1)+2.4665	(-1)+6.4978	(-1)+8.1799	(-1)+6.3669	(-1)+1.4822
5.5	(-1)-2.5327	(-1)+1.7444	(-1)+5.8546	(-1)+8.0282	(-1)+6.9880
6.0	(-1)-5.7031	(-1)-2.9499	(-1)+1.0993	(-1)+5.2246	(-1)+7.7756
6.5	(-1)-6.6792	(-1)-5.8050	(-1)-3.3031	(-2)+5.2317	(-1)+4.6186
7.0	(-1)-6.1949	(-1)-6.6155	(-1)-5.8814	(-1)-3.6035	(-4)+8.3738
7.5	(-1)-5.2752	(-1)-6.1017	(-1)-6.5515	(-1)-5.9378	(-1)-3.8601
8.0	(-1)-4.7892	(-1)-5.2127	(-1)-6.0151	(-1)-6.4880	(-1)-5.9783
8.5	(-1)-5.3860	(-1)-4.7495	(-1)-5.1547	(-1)-5.9344	(-1)-6.4254
9.0	(-1)-7.6818	(-1)-5.3157	(-1)-4.7121	(-1)-5.1007	(-1)-5.8590
9.5	(0)-1.2605	(-1)-7.4860	(-1)-5.2509	(-1)-4.6767	(-1)-5.0502
10.0	(0)-2.1932	(0)-1.2115	(-1)-7.3093	(-1)-5.1908	(-1)-4.6431
10.5	(0)-3.9217	(0)-2.0812	(0)-1.1677	(-1)-7.1488	(-1)-5.1349
11.0	(0)-7.1592	(0)-3.6757	(0)-1.9822	(0)-1.1284	(-1)-7.0023
11.5	(1)-1.3348	(0)-6.6261	(0)-3.4609	(0)-1.8942	(0)-1.0929
12.0	(1)-2.5439	(1)-1.2193	(0)-6.1663	(0)-3.2719	(0)-1.8154
12.5	(1)-4.9562	(1)-2.2921	(1)-1.1209	(0)-5.7662	(0)-3.1044
13.0	(1)-9.8652	(1)-4.4031	(1)-2.0805	(1)-1.0363	(0)-5.4152
13.5	(2)-2.0042	(1)-8.6387	(1)-3.9443	(1)-1.9007	(0)-9.6285
14.0	(2)-4.1515	(2)-1.7295	(1)-7.6350	(1)-3.5594	(1)-1.7465
14.5	(2)-8.7576	(2)-3.5297	(2)-1.5077	(1)-6.8033	(1)-3.2330
15.0	(3)-1.8795	(2)-7.3354	(2)-3.0346	(2)-1.3263	(1)-6.1066
15.5	(3)-4.0993	(3)-1.5507	(2)-6.2186	(2)-2.6348	(2)-1.1761
16.0	(3)-9.0788	(3)-3.3317	(3)-1.2962	(2)-5.3284	(2)-2.3079
16.5	(4)-2.0399	(3)-7.2660	(3)-2.7456	(3)-1.0960	(2)-4.6095
17.0	(4)-4.6466	(4)-1.6085	(3)-5.9047	(3)-2.2906	(2)-9.3627
17.5	(5)-1.0722	(4)-3.6089	(4)-1.2883	(3)-4.8605	(3)-1.9322
18.0	(5)-2.5048	(4)-8.2028	(4)-2.8495	(4)-1.0463	(3)-4.0483
18.5	(5)-5.9202	(5)-1.8875	(4)-6.3850	(4)-2.2832	(3)-8.6039
19.0	(6)-1.4150	(5)-4.3947	(5)-1.4484	(4)-5.0474	(4)-1.8537
19.5	(6)-3.4181	(6)-1.0347	(5)-3.3247	(5)-1.1297	(4)-4.0457
20.0	(6)-8.3412	(6)-2.4624	(5)-7.7176	(5)-2.5583	(4)-8.9386

Таблица 14.2. $C_0(\eta) = e^{-\pi\eta/2} \,|\Gamma(1 + i\eta)|$

η	$C_0(\eta)$	η	$C_0(\eta)$	η	$C_0(\eta)$
0.00	1.000000	1.00	(-1)1.08423	2.00	(-3)6.61992
0.05	0.922568	1.05	(-2)9.49261	2.05	(-3)5.72791
0.10	0.847659	1.10	(-2)8.30211	2.10	(-3)4.95461
0.15	0.775700	1.15	(-2)7.25378	2.15	(-3)4.28450
0.20	0.707063	1.20	(-2)6.33205	2.20	(-3)3.70402
0.25	0.642052	1.25	(-2)5.52279	2.25	(-3)3.20136
0.30	0.580895	1.30	(-2)4.81320	2.30	(-3)2.76623
0.35	0.523742	1.35	(-2)4.19173	2.35	(-3)2.38968
0.40	0.470665	1.40	(-2)3.64804	2.40	(-3)2.06392
0.45	0.421667	1.45	(-2)3.17287	2.45	(-3)1.78218
0.50	0.376686	1.50	(-2)2.75796	2.50	(-3)1.53858
0.55	0.335605	1.55	(-2)2.39599	2.55	(-3)1.32801
0.60	0.298267	1.60	(-2)2.08045	2.60	(-3)1.14604
0.65	0.264478	1.65	(-2)1.80558	2.65	(-4)9.88816
0.70	0.234025	1.70	(-2)1.56632	2.70	(-4)8.53013
0.75	0.206680	1.75	(-2)1.35817	2.75	(-4)7.35735
0.80	0.182206	1.80	(-2)1.17720	2.80	(-4)6.34476
0.85	0.160370	1.85	(-2)1.01996	2.85	(-4)5.47066
0.90	0.140940	1.90	(-3)8.83391	2.90	(-4)4.71626
0.95	0.123694	1.95	(-3)7.64847	2.95	(-4)4.06528
1.00	0.108423	2.00	(-3)6.61992	3.00	(-4)3.50366
	$\begin{bmatrix}(-4)5\\5\end{bmatrix}$				

Значения $\ln \Gamma(1 + iy)$ см. в табл. 6.7.

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

14.1. **Abramowitz M., Antosiewicz H. A.** Coulomb wave functions in the transition region. — Phys. Rev., 1954, **96**, p. 75—77.

14.2. **Biedenharn, Gluckstern, Hull, Breit**, Coulomb functions for large charges and small velocities. — Phys. Rev., 1955, **97**, p. 542.

14.3. **Bloch I.** et al. Coulomb functions for reactions of protons and alpha-particles with the lighter nuclei. — Rev. Mod. Phys., 1951, **23**, p. 147—182.

14.4. **Fröberg Carl-Erik**, Numerical treatment of Coulomb wave functions. — Rev. Mod. Phys., 1955, **27**, p. 399—411.

14.5. **Stegun I. A., Abramowitz M.** Generation of Coulomb wave functions from their recurrence relations. — Phys. Rev., 1955, **98**, p. 1851.

Таблицы

14.6. **Abramowitz M., Rabinowitz P.** Evaluation of Coulomb wave functions along the transition line. — Phys. Rev., 1954, **96**, p. 77—79.

Протабулированы функции F_0, F_0', G_0, G_0 для $\rho = 2\eta = 0(0.5)20(2)50$, 8S.

14.7. National Bureau of Standards. Tables of Coulomb wave functions. — Washington: Government Printing Office, 1952, V. I. — (Applied Math. Series; 17).

Протабулированы функции $\Phi_L(\eta, \rho)$ and $\frac{1}{k!}\frac{d^k \Phi_k(\eta, \rho)}{d\eta^k}$ для $\rho = 0(02)5$, $\eta = -5(1)5$, $L = 0(1)5, 10, 11, 20, 21$, 7D.

14.8. Numerical Computation Bureau. Tables of Whittaker functions (Wave functions in a Coulomb field). — Report № 9. — Japan, 1956.

Русский перевод: Таблицы функций Уиттекера. — М.: ВЦ АН СССР, 1964 — (БМТ; Вып. 25).

14.9. **Tubis A.** Tables of non-relativistic Coulomb wave functions. — Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratory LA-2150, 1958.

Приведены таблицы значений F_0, F_0', G_0, G_0' для $\rho = 0(02)40$; $\eta = 0(0.05)12$, 5S.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Книги и статьи

14.10. **Лебедев Н. Н.** Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963.

14.11. **Павинский П. П.** Волновые функции кулонова поля. — Ж. эксперим. и теор. физ., 1939, 9. Вып. 4. с. 411—418.

14.12. **Isacson T.** Asymptotic expansion of Coulomb wave functions of the transition line. — BIT (Sver.), 1968, **8**, № 3, p. 243—245.

Приведены асимптотические формулы для $F_0(2\eta)$ и $G_0(2\eta)$, доведенные до членов с $1/\beta^{24}$, где $\beta = (2\eta/3)^{1/3}$.

14.13. **Meligy A. S.** Coulomb wave functions for low energies. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1964, **60**, № 2, p. 209—215.

Таблицы

14.14. **Кертис А. Р.** Волновые функции Кулона. — М.: ВЦ АН СССР, 1969.

Даны таблицы значений регулярного $P_L(a, x)$ и иррегулярного $Q_L(a, x)$ решений уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(a + \frac{2}{x} - \frac{L(L+1)}{x^2}\right) y = 0,$$

а также некоторых вспомогательных функций.

14.15. **Керимов М. К.** Обзор таблиц волновых функций Кулона. — См. [14.16].

14.16. **Лукьянов А. В., Теплов И. Б., Акимова М. К.** Таблицы волновых кулоновских функций (функций Уиттекера). — М.: ВЦ АН СССР, 1961.

$F_L(\eta, \rho)$, $G_L(\eta, \rho)$; $L = 0(1)15$; $\rho = 1(0.2)20$;

$\lg \eta = -\infty$, $-0{,}8(0.1)0.8$; 4 — 5S.

$\frac{dG_L}{d\rho}$; $L = 0{,}1$, $\rho = 1(0.2)20$; $\lg \eta = -\infty$, $-0{,}8(0.1)0.8$, 5S.

14.17. **Павинский П. П., Кричагина А. Р.** Таблицы волновых функций кулонова поля. — Ж. эксперим. и теор. физ., 1939, **9**, № 4, с. 419—425.

Глава 15
ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Ф. ОБЕРХЕТТИНГЕР

СОДЕРЖАНИЕ

15.1. РЯДЫ ГАУССА, ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ, ЧАСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ АРГУМЕНТА

Ряды Гаусса

Кругом сходимости гипергеометрического ряда Гаусса

15.1.1. $F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z) =$

$$= F(b, a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}$$

является единичный круг $|z| = 1$. На окружности круга сходимости ряд ведет себя следующим образом:

a) расходится при $\operatorname{Re}(c - a - b) \leqslant -1$;

b) абсолютно сходится при $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$;

c) условно сходится при $-1 < \operatorname{Re}(c - a - b) \leqslant 0$; точка $z = 1$ исключается.

Ряд Гаусса сводится к многочлену степени n относительно z, если $a = -n$ или $b = -n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (см. также 15.4). Ряд 15.1.1 теряет смысл, когда параметр c равен $-m$ $(m = 0, 1, \ldots)$, а a или b не равны отрицательному целому n, где $n < m$. Для $c = -m$ имеем

15.1.2. $\lim\limits_{c \to -m} \frac{1}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z) =$

$$= \frac{(a)_{m+1} (b)_{m+1}}{(m+1)!} z^{m+1} F(a + m + 1, b + m + 1; m + 2; z).$$

Элементарные частные случаи ряда Гаусса

(Случаи, сводящиеся к высшим функциям, см. в 15.4.)

15.1.3. $F(1, 1; 2; z) = -z^{-1} \ln(1 - z)$.

15.1.4. $F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{1}{2} z^{-1} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$.

15.1.5. $F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) = z^{-1} \operatorname{arctg} z$.

15.1.6. $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) =$

$$= (1 - z^2)^{1/2} F\left(1, 1; \frac{3}{2}; z^2\right) = z^{-1} \arcsin z.$$

15.1.7. $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right) =$

$$= (1 + z^2)^{1/2} F\left(1, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) = z^{-1} \ln[z + (1 + z^2)^{1/2}].$$

15.1.8. $F(a, b; b; z) = (1 - z)^{-a}$.

15.1.9. $F\left(a, \frac{1}{2} + a; \frac{1}{2}; z^2\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left[(1 + z)^{-2a} + (1 - z)^{-2a}\right].$$

15.1.10. $F\left(a, \frac{1}{2} + a; \frac{3}{2}; z^2\right) =$

$$= \frac{1}{2} z^{-1} (1 - 2a)^{-1} [(1 + z)^{1-2a} - (1 - z)^{1-2a}].$$

15.1.11. $F\left(-a, a; \frac{1}{2}; -z^2\right) =$

$$= \frac{1}{2} \{[(1 + z^2)^{1/2} + z]^{2a} + [(1 + z^2)^{1/2} - z]^{2a}\}.$$

15.1.12. $F\left(a,\ 1-a;\ \frac{1}{2};\ -z^2\right)=$

$$=\frac{1}{2}(1+z^2)^{-1/2}\{[(1+z^2)^{1/2}+z]^{2a-1}+[(1+z^2)^{1/2}-z]^{2a-1}\}.$$

15.1.13. $F\left(a,\ \frac{1}{2}+a;\ 1+2a;\ z\right)=$

$$=2^{2a}[1+(1-z)^{1/2}]^{-2a}=$$

$$=(1-z)^{1/2}F\left(1+a,\ \frac{1}{2}+a;\ 1+2a;\ z\right).$$

15.1.14. $F\left(a,\ \frac{1}{2}+a;\ 2a;\ z\right)=$

$$=2^{2a-1}(1-z)^{-1/2}[1+(1-z)^{1/2}]^{1-2a}.$$

15.1.15. $F\left(a,\ 1-a;\ \frac{3}{2};\ \sin^2 z\right)=\frac{\sin[(2a-1)z]}{(2a-1)\sin z}.$

15.1.16. $F\left(a,\ 2-a;\ \frac{3}{2};\ \sin^2 z\right)=\frac{\sin[(2a-2)z]}{(a-1)\sin(2z)}.$

15.1.17. $F\left(-a,\ a;\ \frac{1}{2};\ \sin^2 z\right)=\cos(2az).$

15.1.18. $F\left(a,\ 1-a;\ \frac{1}{2};\ \sin^2 z\right)=\frac{\cos[(2a-1)z]}{\cos z}.$

15.1.19. $F\left(a,\ \frac{1}{2}+a;\ \frac{1}{2};\ -\operatorname{tg}^2 z\right)=\cos^{2a} z\cos(2az).$

Частные значения аргумента

15.1.20. $F(a,\ b;\ c;\ 1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$

$$(c\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ \operatorname{Re}(c-a-b)>0).$$

15.1.21. $F(a,\ b;\ a-b+1;\ -1)=$

$$=2^{-a}\pi^{1/2}\frac{\Gamma(1+a-b)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)}$$

$$(1+a-b\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots).$$

15.1.22. $F(a,\ b;\ a-b+2;\ -1)=$

$$=2^{-a}\pi^{1/2}(b-1)^{-1}\Gamma(a-b+2)\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{a}{2}-b\right)}-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}\right]$$

$$(a-b+2\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots).$$

15.1.23. $F(1,\ a;\ a+1;\ -1)=$

$$=\frac{a}{2}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)-\psi\left(\frac{a}{2}\right)\right].$$

15.1.24. $F\left(a,\ b;\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)=$

$$=\pi^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2}\right)}$$

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots\right).$$

15.1.25. $F\left(a,\ b;\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+1;\ \frac{1}{2}\right)=$

$$=2\pi^{1/2}(a-b)^{-1}\Gamma\left(1+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\left\{\left[\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2}\right)\right]^{-1}-\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)\right]^{-1}\right\}$$

$$\left(\frac{1}{2}(a+b)+1\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots\right).$$

15.1.26. $F\left(a,\ 1-a;\ b;\ \frac{1}{2}\right)=$

$$=2^{1-b}\pi^{1/2}\Gamma(b)\left[\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)\right]^{-1}$$

$$(b\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots).$$

15.1.27. $F\left(1,\ 1;\ a+1;\ \frac{1}{2}\right)=a\left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)-\psi\left(\frac{a}{2}\right)\right]$

$$(a\neq -1,\ -2,\ -3,\ \ldots).$$

15.1.28. $F\left(a,\ a;\ a+1;\ \frac{1}{2}\right)=$

$$=2^{a-1}a\left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)-\psi\left(\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$(a\neq -1,\ -2,\ -3,\ \ldots).$$

15.1.29. $F\left(a,\ \frac{1}{2}+a;\ \frac{3}{2}-2a;\ -\frac{1}{3}\right)=$

$$=\left(\frac{8}{9}\right)^{-2a}\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-2a\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}-2a\right)}$$

$$\left(\frac{3}{2}-2a\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots\right).$$

15.1.30. $$F\left(a,\ \frac{1}{2}+a;\ \frac{5}{6}+a;\ \frac{1}{9}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{a}\pi^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}+\frac{2a}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+\frac{a}{3}\right)}\quad\left(\frac{5}{6}+\frac{2a}{3}\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots\right).$$

15.1.31. $$F\left(a,\ \frac{a}{3}+\frac{1}{3};\ \frac{2a}{3}+\frac{2}{3};\ e^{i\pi/3}\right)=2^{2a/3+2/3}\pi^{1/2}3^{-(a+1)/2}e^{i\pi a/6}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{3}+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\quad\left(\frac{a}{3}\neq-\frac{5}{6},\ -\frac{11}{6},\ -\frac{17}{6},\ldots\right).$$

15.2. ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И СООТНОШЕНИЯ ГАУССА ДЛЯ СМЕЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Формулы дифференцирования

15.2.1. $$\frac{d}{dz}F(a,b;c;z)=\frac{ab}{c}F(a+1,\ b+1;c+1;z).$$

15.2.2. $$\frac{d^n}{dz^n}F(a,b;c;z)=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}F(a+n,\ b+n;\ c+n;\ z).$$

15.2.3. $$\frac{d^n}{dz^n}[z^{a+n-1}F(a,b;c;z)]=(a)_n z^{a-1}F(a+n,b;c;z).$$

15.2.4. $$\frac{d^n}{dz^n}[z^{c-1}F(a,b;c;z)]=(c-n)_n z^{c-n-1}F(a,b;c-n;z).$$

15.2.5. $$\frac{d^n}{dz^n}[z^{c-a+n-1}(1-z)^{a+b-c}F(a,b;c;z)]=(c-a)_n z^{c-a-1}(1-z)^{a+b-c-n}F(a-n,\ b;c;z).$$

15.2.6. $$\frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{a+b-c}F(a,b;c;z)]=\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n}(1-z)^{a+b-c-n}F(a,b;c+n;z).$$

15.2.7. $$\frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{a+n-1}F(a,b;c;z)]=\frac{(-1)^n(a)_n(c-b)_n}{(c)_n}(1-z)^{a-1}F(a+n,\ b;\ c+n;\ z).$$

15.2.8. $$\frac{d^n}{dz^n}[z^{c-1}(1-z)^{b-c+n}F(a,b;c;z)]=(c-n)_n z^{c-n-1}(1-z)^{b-c}F(a-n,\ b;\ c-n;\ z).$$

15.2.9. $$\frac{d^n}{dz^n}[z^{c-1}(1-z)^{a+b-c}F(a,b;c;z)]=(c-n)_n z^{c-n-1}(1-z)^{a+b-c-n}F(a-n,\ b-n;\ c-n;\ z).$$

Соотношения Гаусса для смежных функций

Шесть функций $F(a\pm 1,b;c;z)$, $F(a,b\pm 1;c;z)$, $F(a,b;c\pm 1;z)$ называются смежными с $F(a,b;c;z)$. Соотношения между $F(a,b;c;z)$ и любыми двумя смежными функциями дал еще Гаусс. Повторным применением этих соотношений функцию $F(a+m,b+n;c+l;z)$, где m,n,l $(c+l\neq 0,-1,-2,\ldots)$ — целые, можно выразить в виде линейной комбинации функции $F(a,b;c;z)$ и одной из ее смежных функций с коэффициентами, являющимися рациональными функциями от a, b, c, z.

15.2.10. $$(c-a)F(a-1,b;c;z)+(2a-c-az+bz)F(a,b;c;z)+a(z-1)F(a+1,b;c;z)=0.$$

15.2.11. $$(c-b)F(a,b-1;c;z)+(2b-c-bz+az)F(a,b;c;z)+b(z-1)F(a,b+1;c;z)=0.$$

15.2.12. $$c(c-1)(z-1)F(a,b;c-1;z)+c[c-1-(2c-a-b-1)z]F(a,b;c;z)+(c-a)(c-b)zF(a,b;c+1;z)=0.$$

15.2.13. $$[c-2a-(b-a)z]F(a,b;c;z)+a(1-z)F(a+1;b;c;z)-(c-a)F(a-1,b;c;z)=0.$$

15.2.14. $$(b-a)F(a,b;c;z)+aF(a+1,b;c;z)-bF(a,b+1;c;z)=0.$$

15.2.15. $$(c-a-b)F(a,b;c;z)+a(1-z)F(a+1,b;c;z)-(c-b)F(a,b-1;c;z)=0.$$

15.2.16. $$c[a-(c-b)z]F(a,b;c;z)-ac(1-z)F(a+1,b;c;z)+(c-a)(c-b)zF(a,b;c+1;z)=0.$$

15.2.17. $$(c-a-1)F(a,b;c;z)+aF(a+1,b;c;z)-(c-1)F(a,b;c-1;z)=0.$$

15.2.18. $$(c-a-b)F(a,b;c;z)-(c-a)F(a-1,b;c;z)+b(1-z)F(a,b+1;c;z)=0.$$

15.2.19. $$(b-a)(1-z)F(a,b;c;z)-(c-a)F(a-1,b;c;z)+(c-b)F(a,b-1;c;z)=0$$

15.2.20. $c(1-z)F(a, b; c; z) - cF(a-1, b; c; z) + (c-b)zF(a, b; c+1; z) = 0.$

15.2.21. $[a-1-(c-b-1)z]F(a, b; c; z) + (c-a)F(a-1, b; c; z) - (c-1)(1-z)F(a, b; c-1; z) = 0.$

15.2.22. $[c-2b+(b-a)z]F(a, b; c; z) + b(1-z)F(a, b+1; c; z) - (c-b)F(a, b-1; c; z) = 0.$

15.2.23. $c[b-(c-a)z]F(a, b; c; z) - bc(1-z)F(a, b+1; c; z) + (c-a)(c-b)zF(a, b; c+1; z) = 0.$

15.2.24. $(c-b-1)F(a, b; c; z) + bF(a, b+1; c; z) - (c-1)F(a, b; c-1; z) = 0.$

15.2.25. $c(1-z)F(a, b; c; z) - cF(a, b-1; c; z) + (c-a)zF(a, b; c+1; z) = 0$

15.2.26. $[b-1-(c-a-1)z]F(a, b; c; z) + (c-b)F(a, b-1; c; z) - (c-1)(1-z)F(a, b; c-1; z) = 0.$

15.2.27. $c[c-1-(2c-a-b-1)z]F(a, b; c; z) + (c-a)(c-b)zF(a, b; c+1; z) - c(c-1)(1-z)F(a, b; c-1; z) = 0.$

15.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Интегральные представления

15.3.1.
$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt$$
$$(\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0).$$

Этот интеграл представляет собой однозначную аналитическую функцию на комплексной z-плоскости с разрезом вдоль действительной оси от 1 до ∞, поэтому 15.3.1 дает аналитическое продолжение функции $F(a, b; c; z)$, определенной рядом 15.1.1. Эта функция может быть представлена также в виде интеграла Меллина—Барнса:

15.3.2.
$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds = \frac{i}{2}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)}\operatorname{cosec}(\pi s)(-z)^s\,ds.$$

Здесь $-\pi < \arg(-z) < \pi$; путь интегрирования выбран так, чтобы полюсы функций $\Gamma(a+b)$ и $\Gamma(b+s)$, т.е. $s = -a-n$ и $s = -b-m$ $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ соответственно, были слева от пути интегрирования, а полюсы функции $\operatorname{cosec}\pi s$ или $\Gamma(-s)$, т.е. $s = 0, 1, 2, \ldots$, были справа от него. Случаи, когда $-a$, $-b$ или $-c$ являются неотрицательными целыми или $a-b$ равно целому числу, исключаются.

Формулы линейного преобразования

Из 15.3.1 и 15.3.2 можно вывести формулы преобразования $F(a, b; c; z)$:

15.3.3. $F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b; c; z).$

15.3.4. $F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a}F\left(a, c-b; c; \dfrac{z}{z-1}\right).$

15.3.5. $F(a, b; c; z) = (1-z)^{-b}F\left(b, c-a; c; \dfrac{z}{z-1}\right).$

15.3.6.
$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a, b; a+b-c+1; 1-z) + (1-z)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z)$$
$$(|\arg(1-z)| < \pi).$$

15.3.7.
$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\left(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F\left(b, 1-c+b; 1-a+b; \frac{1}{z}\right)$$
$$(|\arg(-z)| < \pi).$$

15.3.8.
$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a}\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}F\left(a, c-b; a-b+1; \frac{1}{1-z}\right) + (1-z)^{-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}F\left(b, c-a; b-a+1; \frac{1}{1-z}\right)$$
$$(|\arg(1-z)| < \pi).$$

15.3.9.
$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}z^{-a}F\left(a, a-c+1; a+b-c+1; 1-\frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}z^{a-c}\times F\left(c-a, 1-a; c-a-b+1; 1-\frac{1}{z}\right)$$
$$(|\arg z| < \pi,\ |\arg(1-z)| < \pi).$$

Каждый член равенства 15.3.6 имеет полюс при $c = a + b \pm m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. В этом случае получаем

15.3.10. $F(a,\ b;\ a+b;\ z)=$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(n!)^2}[2\psi(n+1)-\psi(a+n)-$$
$$-\psi(b+n)-\ln(1-z)](1-z)^n$$
$$(|\arg(1-z)|<\pi,\ |1-z|<1).$$

Кроме того, для $m=1,2,3,\ldots$ имеют место соотношения

15.3.11. $F(a,\ b;\ a+b+m;\ z)=$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(a+b+m)}{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(1-m)_n}(1-z)^n-$$
$$-\frac{\Gamma(a+b+m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(z-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+m)_n(b+m)_n}{n!(n+m)!}(1-z)^n\times$$
$$\times[\ln(1-z)-\psi(n+1)-\psi(n+m+1)+$$
$$+\psi(a+n+m)+\psi(b+n+m)]$$
$$(|\arg(1-z)|<\pi,\ \ |1-z|<1),$$

15.3.12. $F(a,\ b;\ a+b-m;\ z)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(a+b-m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times$

$$\times(1-z)^{-m}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(a-m)_n(b-m)_n}{n!(1-m)_n}(1-z)^n-$$
$$-\frac{(-1)^m\Gamma(a+b-m)}{\Gamma(a-m)\Gamma(b-m)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(n+m)!}(1-z)^n\times$$
$$\times[\ln(1-z)-\psi(n+1)-\psi(n+m+1)+$$
$$+\psi(a+n)+\psi(b+n)]$$
$$(|\arg(1-z)|<\pi,\ \ |1-z|<1).$$

Аналогично, каждый член равенства 15.3.7 имеет полюсы при $b=a\pm m$ или $b-a=\pm m$, и в этом случае

15.3.13. $F(a,\ a;\ c;\ z)=$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(1-c+a)_n}{(n!)^2}z^{-n}\times$$
$$\times[\ln(-z)+2\psi(n+1)-\psi(a+n)-\psi(c-a-n)]$$
$$(|\arg(-z)|<\pi,\ |z|>1,\ (c-a)\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Для случая $b-a=m$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

15.3.14. $F(a,\ a+m;\ c;\ z)=F(a+m,\ a;\ c;\ z)=$

$$=\frac{\Gamma(c)(-z)^{-a-m}}{\Gamma(a+m)\Gamma(c-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(1-c+a)_{n+m}}{n!(n+m)!}z^{-n}\times$$
$$\times[\ln(-z)+\psi(1+m+n)+\psi(1+n)-$$
$$-\psi(a+m+n)-\psi(c-a-m-n)]+$$
$$+(-z)^{-a}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a+m)}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(m-n)(a)_n}{n!\Gamma(c-a-n)}z^{-n}$$
$$(|\arg(-z)|<\pi,\ |z|>1,\ (c-a)\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Случай $c-a=0,-1,-2,\ldots$ является элементарным (см. 15.3.3), а случай $c-a=1,2,3,\ldots$ можно получить из 15.3.14 предельным переходом (см. [15.2]).

Формулы квадратичного преобразования

Квадратичное преобразование существует тогда и только тогда, когда числа $\pm(1-c)$, $\pm(a-b)$, $\pm(a+b-c)$ таковы, что либо два из них равны между собой, либо одно равно 1/2. Основные формулы принадлежат Куммеру [15.7], а полный их набор получил Гурса [15.3]. См. также [15.2].

15.3.15. $F(a,\ b;\ 2b;\ z)=$

$$=(1-z)^{-a/2}F\left(\frac{a}{2},\ b-\frac{a}{2};\ b+\frac{1}{2};\ \frac{z^2}{4z-4}\right).$$

15.3.16. $F(a,\ b;\ 2b;\ z)=$

$$=\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-a}F\left(\frac{a}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a}{2};\ b+\frac{1}{2};\ z^2(2-z)^{-2}\right).$$

15.3.17. $F(a,\ b;\ 2b;\ z)=$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right)^{-2a}F\left[a,\ a-b+\frac{1}{2};\ b+\frac{1}{2};\ \left(\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right)^2\right].$$

15.3.18. $F(a,\ b;\ 2b;\ z)=$

$$=(1-z)^{-a/2}F\left(a,\ 2b-a;\ b+\frac{1}{2};\ -\frac{(1-\sqrt{1-z})^2}{4\sqrt{1-z}}\right).$$

15.3.19. $F\left(a,\ a+\frac{1}{2};\ c;\ z\right)=$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right)^{-2a}F\left(2a,\ 2a-c+1;\ c;\ \frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right).$$

15.3.20. $F\left(a,\ a+\frac{1}{2};\ c;\ z\right)=$

$$=(1\pm\sqrt{z})^{-2a}F\left(2a,\ c-\frac{1}{2};\ 2c-1;\ \pm\frac{2\sqrt{z}}{1\pm\sqrt{z}}\right).$$

15.3.21. $F\left(a,\ a+\frac{1}{2};\ c;\ z\right)=$

$$=(1-z)^{-a}\ F\left(2a,\ 2c-2a-1;\ c;\ \frac{\sqrt{1-z}-1}{2\sqrt{1-z}}\right).$$

15.3.22. $F\left(a,\ b;\ a+b+\frac{1}{2};\ z\right)=$

$$=F\left(2a,\ 2b;\ a+b+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right).$$

15.3.23. $F\left(a,\ b;\ a+b+\frac{1}{2};\ z\right)=$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right)^{-2a}F\left(2a,\ a-b+\frac{1}{2};\ a+b+\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{1-z}-1}{\sqrt{1-z}+1}\right).$$

15.3.24. $$F\left(a,\ b;\ a+b-\frac{1}{2};\ z\right)=(1-z)^{-1/2}F\left(2a-1,\ 2b-1;\ a+b-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right).$$

15.3.25. $$F\left(a,\ b;\ a+b-\frac{1}{2};\ z\right)=(1-z)^{-1/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right)^{1-2a}\times F\left(2a-1,\ a-b+\frac{1}{2};\ a+b-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{1-z}-1}{\sqrt{1-z}+1}\right).$$

15.3.26. $$F(a,\ b;\ a-b+1;\ z)=(1+z)^{-a}F\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}+\frac{1}{2};\ a-b+1;\ 4z(1+z)^{-2}\right).$$

15.3.27. $$F(a,\ b;\ a-b+1;\ z)=(1\pm\sqrt{z})^{-2a}F\left(a,\ a-b+\frac{1}{2};\ 2a-2b+1;\ \pm 4\sqrt{z}(1\pm\sqrt{z})^{-2}\right).$$

15.3.28. $$F(a,\ b;\ a-b+1;\ z)=(1-z)^{-a}F\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}-b+\frac{1}{2};\ a-b+1;\ -4z(1-z)^{-2}\right).$$

15.3.29. $$F\left(a,\ b;\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{1}{2};\ z\right)=(1-2z)^{-a}F\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{4z^2-4z}{(1-2z)^2}\right).$$

15.3.30. $$F\left(a,\ b;\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{1}{2};\ z\right)=F\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2};\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{1}{2};\ 4z-4z^2\right).$$

15.3.31. $$F(a,\ 1-a;\ c;\ z)=(1-z)^{c-1}F\left(\frac{c}{2}-\frac{a}{2},\ \frac{c}{2}+\frac{a}{2}-\frac{1}{2};\ c;\ 4z-4z^2\right).$$

15.3.32. $$F(a,\ 1-a;\ c;\ z)=(1-z)^{c-1}(1-2z)^{a-c}F\left(\frac{c}{2}-\frac{a}{2},\ \frac{c}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2};\ c;\ (4z^2-4z)(1-2z)^{-2}\right).$$

Кубичные преобразования даны в [15.2] и [15.3].

В приведенных выше формулах квадратный корень определен так, что его значение является действительным и положительным при $0\leqslant z<1$. Все формулы справедливы в окрестности точки $z=0$.

15.4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ФУНКЦИИ *F*(*a*, ь; *c*; *z*)

Многочлены

(Одно из чисел a, b — отрицательное целое.)

15.4.1. $$F(-m,\ b;\ c;\ z)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-m)_n\,(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}.$$

Эта формула справедлива также при $c=-m-l$; $m, l=0, 1, 2, \ldots$

15.4.2. $$F(-m,\ b;\ -m-l;\ z)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-m)_n\,(b)_n}{(-m-l)_n}\frac{z^n}{n!}.$$

Некоторые частные случаи формулы (15.4.1):

15.4.3. $$F\left(-n,\ n;\ \frac{1}{2};\ x\right)=T_n(1-2x).$$

15.4.4. $$F(-n,\ n+1;\ 1;\ x)=P_n(1-2x).$$

15.4.5. $$F\left(-n,\ n+2\alpha;\ \alpha+\frac{1}{2};\ x\right)=\frac{n!}{(2\alpha)_n}C_n^{(\alpha)}(1-2x).$$

15.4.6. $$F(-n,\ \alpha+1+\beta+n;\ \alpha+1;\ x)=\frac{n!}{(\alpha+1)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x).$$

Здесь T_n — многочлены Чебышева, P_n — Лежандра, $C_n^{(\alpha)}$ — Гегенбауера, $P_n^{(\alpha,\beta)}$ — Якоби (см. гл. 22).

Функции Лежандра

Функции Лежандра связаны с тем специальным случаем гипергеометрической функции, для которого существует квадратичное преобразование (см. 15.3).

15.4.7. $$F(a,\ b;\ 2b;\ z)=2^{2b-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+b\right)z^{1/2-b}(1-z)^{(b-a-1/2)/2}P_{a-b-1/2}^{1/2-b}\left[\left(1-\frac{z}{2}\right)(1-z)^{-1/2}\right].$$

15.4.8. $$F(a,\ b;\ 2b;\ z)=2^{2b}\pi^{-1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+b\right)}{\Gamma(2b-a)}z^{-b}(1-z)^{(b-a)/2}e^{i\pi(a-b)}Q_{b-1}^{a-b}\left(\frac{2}{z}-1\right).$$

15.4.9. $F(a, b; 2b; -z) = 2^{2b}\pi^{-1/2} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+b\right)}{\Gamma(a)} z^{-b}(1+z)^{(b-a)/2} e^{-i\pi(a-b)} Q^{a-b}_{b-1}\left(1+\dfrac{2}{z}\right)$ $\quad (|\arg z| < \pi,\ |\arg(1 \pm z)| < \pi)$.

15.4.10. $F\left(a,\ a+\dfrac{1}{2};\ c;\ z\right) = 2^{c-1}\Gamma(c)\, z^{1/2-c/2}(1-z)^{c/2-a-1/2} P^{1-c}_{2a-c}[(1-z)^{-1/2}]$

$(|\arg z| < \pi,\ |\arg(1-z)| < \pi,\ z \notin (0, -\infty))$.

15.4.11. $F\left(a,\ a+\dfrac{1}{2};\ c;\ x\right) = 2^{c-1}\Gamma(c)\,(-x)^{1/2-c/2}(1-x)^{c/2-a-1/2} P^{1-c}_{2a-c}[(1-x)^{-1/2}]$ $\quad (-\infty < x < 0)$.

15.4.12. $F\left(a,\ b;\ a+b+\dfrac{1}{2};\ z\right) = 2^{a+b-1/2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+a+b\right)(-z)^{(1/2-a-b)/2} P^{1/2-a-b}_{a-b-1/2}[(1-z)^{1/2}]$

$(|\arg(-z)| < \pi,\ z \notin (0, 1))$.

15.4.13. $F\left(a, b;\ a+b+\dfrac{1}{2};\ x\right) = 2^{a+b-1/2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+a+b\right) x^{(1/2-a-b)/2} P^{1/2-a-b}_{a-b-1/2}[(1-x)^{1/2}]$ $\quad (0 < x < 1)$.

15.4.14. $F(a, b;\ a-b+1;\ z) = \Gamma(a-b+1)\, z^{b/2-a/2}(1-z)^{-b} P^{b-a}_{-b}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ $\quad (|\arg(1-z)| < \pi,\ z \notin (-\infty, 0))$.

15.4.15. $F(a, b\ \ a-b+1;\ x) = \Gamma(a-b+1)(1-x)^{-b}(-x)^{b/2-a/2} P^{b-a}_{-b}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad (-\infty < x < 0)$.

15.4.16. $F(a,\ 1-a;\ c;\ z) = \Gamma(c)(-z)^{1/2-c/2}(1-z)^{c/2-1/2} P^{1-c}_{-a}(1-2z)$ $\quad (|\arg(-z)| < \pi,\ |\arg(1-z)| < \pi,\ z \notin (0, 1))$.

15.4.17. $F(a, 1-a; c; x) = \Gamma(c)\, x^{1/2-c/2}(1-x)^{c/2-1/2} P^{1-c}_{-a}(1-2x)$ $\quad (0 < x < 1)$.

15.4.18. $F\left(a, b;\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2};\ z\right) = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}\right)[z(z-1)]^{(1-a-b)/4} P^{(1-a-b)/2}_{(a-b-1)/2}(1-2z)$

$(|\arg z| < \pi,\ |\arg(z-1)| < \pi,\ z \notin (0, 1))$.

15.4.19. $F\left(a, b;\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2};\ x\right) = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}\right)(x-x^2)^{(1-a-b)/4} P^{(1-a-b)/2}_{(a-b-1)/2}(1-2x)$ $\quad (0 < x < 1)$.

15.4.20. $F\left(a,\ b;\ a+b-\dfrac{1}{2};\ z\right) = 2^{a+b-3/2}\Gamma\left(a+b-\dfrac{1}{2}\right)(-z)^{(3/2-a-b)/2}(1-z)^{-1/2} P^{3/2-a-b}_{b-a-1/2}[(1-z)^{1/2}]$

$(|\arg(-z)| < \pi,\ |\arg(1-z)| < \pi,\ \operatorname{Re}[(1-z)^{1/2}] > 0,\ z \notin (0, 1))$.

15.4.21. $F\left(a,\ b;\ a+b-\dfrac{1}{2};\ x\right) = 2^{a+b-3/2}\Gamma\left(a+b-\dfrac{1}{2}\right) x^{(3/2-a-b)/2}(1-x)^{-1/2} P^{3/2-a-b}_{b-a-1/2}[(1-x)^{1/2}]$ $\quad (0 < x < 1)$.

15.4.22. $F\left(a, b;\ \dfrac{1}{2};\ z\right) = \pi^{-1/2}2^{a+b-3/2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+a\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+b\right)(z-1)^{(1/2-a-b)/2}\left[P^{1/2-a-b}_{a-b-1/2}(z^{1/2}) + P^{1/2-a-b}_{a-b-1/2}(-z^{1/2})\right]$

$(|\arg z| < \pi,\ |\arg(z-1)| < \pi,\ z \notin (0, 1))$.

15.4.23. $F\left(a, b;\ \dfrac{1}{2};\ x\right) = \pi^{-1/2}2^{a+b-3/2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+a\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+b\right)(1-x)^{(1/2-a-b)/2}\left[P^{1/2-a-b}_{a-b-1/2}(x^{1/2}) + P^{1/2-a-b}_{a-b-1/2}(-x^{1/2})\right]$

$(0 < x < 1)$.

15.4.24. $F\left(a,\ b;\ \dfrac{1}{2};\ -z\right) =$

$= \pi^{-1/2}2^{a-b-1}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+a\right)\Gamma(1-b)(z+1)^{-a/2-b/2} e^{\pm i\pi(b-a)/2}\{P^{b-a}_{a+b-1}[z^{1/2}(1+z)^{-1/2}] + P^{b-a}_{a+b-1}[-z^{1/2}(1+z)^{-1/2}]\}$.

(Знак $+$ $(-)$ выбирается, если $\operatorname{Im} z > 0$ $(\operatorname{Im} z < 0)$, $z \notin (0, \infty)$.

15.4.25. $F\left(a,\ b;\ \dfrac{1}{2};\ -x\right) =$

$= \pi^{-1/2}2^{a-b-1}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+a\right)\Gamma(1-b)(1+x)^{-a/2-b/2}\{P^{b-a}_{a+b-1}[x^{1/2}(1+x)^{-1/2}] + P^{b-a}_{a+b-1}[-x^{1/2}(1+x)^{-1/2}]\}$ $\quad (0 < x < \infty)$.

15.4.26. $F\left(a,\ b;\ \dfrac{3}{2};\ x\right) =$

$= -\pi^{-1/2}2^{a+b-7/2}\Gamma\left(a-\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(b-\dfrac{1}{2}\right) x^{-1/2}(1-x)^{(3/2-a-b)/2}\{P^{3/2-a-b}_{a-b-1/2}(x^{1/2}) - P^{3/2-a-b}_{a-b-1/2}(-x^{1/2})\}$ $\quad (0 < x < 1)$.

15.5. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Гипергеометрическое дифференциальное уравнение

15.5.1. $z(1-z)\dfrac{d^2w}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\dfrac{dw}{dz}-abw=0$

имеет три (регулярные) особые точки $z=0,1,\infty$.

Парами показателей в этих точках являются соответственно

15.5.2. $\rho^{(0)}_{1,2}=0,\ 1-c,\ \rho^{(1)}_{1,2}=0,\ c-a-b,\ \rho^{(\infty)}_{1,2}=a,b.$

В общей теории дифференциальных уравнений типа Фукса различают следующие случаи:

А. *Ни одно из чисел c, $c-a-b$; $a-b$ не равно целому.* Тогда два линейно независимых решения уравнения 15.5.1 в окрестностях особых точек $0, 1, \infty$ имеют соответственно вид

15.5.3. $w_{1(0)}=F(a,\ b;\ c;\ z)=$

$$=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b;\ c;\ z),$$

15.5.4. $w_{2(0)}=z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;z)=$

$$=z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-a,\ 1-b;\ 2-c;\ z),$$

15.5.5. $w_{1(1)}=F(a,\ b;\ a+b+1-c;\ 1-z)=$

$$=z^{1-c}F(1+b-c,\ 1+a-c;\ a+b+1-c;\ 1-z).$$

15.5.6. $w_{2(1)}=(1-z)^{c-a-b}F(c-b,\ c-a;$

$$c-a-b+1,\ 1-z)=z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}\times$$

$$\times F(1-a,\ 1-b;\ c-a-b+1;\ 1-z),$$

15.5.7. $w_{1(\infty)}=z^{-a}F(a,\ a-c+1;\ a-b+1;\ z^{-1})=$

$$=z^{b-c}(z-1)^{c-a-b}F(1-b,\ c-b;\ a-b+1,\ z^{-1}),$$

15.5.8. $w_{2(\infty)}=z^{-b}F(b,\ b-c+1;\ b-a+1;\ z^{-1})=$

$$=z^{a-c}(z-1)^{c-a-b}F(1-a,\ c-a,\ b-a+1;\ z^{-1}).$$

Решения w_2 в каждом из приведенных соотношений получены применением формулы 15.3.3 к решениям w_1. Другие представления можно найти применением 15.3.4 к 15.5.3—15.5.8. Тогда

15.5.9. $w_{1(0)}=(1-z)^{-a}F\left(a,c-b;c;\dfrac{z}{z-1}\right)=$

$$=(1-z)^{-b}F\left(b,\ c-a;\ c;\ \frac{z}{z-1}\right),$$

15.5.10. $w_{2(0)}=$

$$=z^{1-c}(1-z)^{c-a-1}F\left(a-c+1,\ 1-b;\ 2-c;\ \frac{z}{z-1}\right)=$$

$$=z^{1-c}(1-z)^{c-b-1}F\left(b-c+1,\ 1-a;\ 2-c;\ \frac{z}{z-1}\right),$$

15.5.11. $w_{1(1)}=$

$$=z^{-a}F(a,\ a-c+1;\ a+b-c+1;\ 1-z^{-1})=$$

$$=z^{-b}F(b,\ b-c+1;\ a+b-c+1;\ 1-z^{-1}),$$

15.5.12. $w_{2(1)}=z^{a-c}(1-z)^{c-a-b}\times$

$$\times F(c-a,\ 1-a;\ c-a-b+1;\ 1-z^{-1})=$$

$$=z^{b-c}(1-z)^{c-a-b}F(c-b,\ 1-b;$$

$$c-a-b+1;\ 1-z^{-1}),$$

15.5.13. $w_{1(\infty)}=$

$$=(z-1)^{-a}F\left(a,\ c-b;\ a-b+1;\ \frac{1}{1-z}\right)=$$

$$=(z-1)^{-b}F\left(b,\ c-a;\ b-a+1;\ \frac{1}{1-z}\right),$$

15.5.14. $w_{2(\infty)}=$

$$=z^{1-c}(z-1)^{c-a-1}F\left(a-c+1,1-b;a-b+1;\frac{1}{1-z}\right)=$$

$$=z^{1-c}(z-1)^{c-b-1}F\left(b-c+1,1-a;b-a+1;\frac{1}{1-z}\right).$$

Формулы 15.5.3—15.5.14 дают 24 решения гипергеометрического уравнения, полученные Куммером. Аналитическое продолжение функций $w_{1,2(0)}(z)$ можно получить при помощи формул 15.3.3—15.3.9.

В. *Одно из чисел $a, b, c-a, c-b$ является целым.* Тогда один из гипергеометрических рядов, например $w_{1,2(0)}$, 15.5.3 или 15.5.4, обрывается и соответствующее решение имеет вид

15.5.15. $w=z^{\alpha}(1-z)\ \ p_n(z),$

где $p_n(z)$ — многочлен степени n относительно z. Этот случай приводит к вырожденному гипергеометрическому уравнению, а его решения подробно исследованы в [15.2].

С. *Число $c-a-b$ — целое, c — нецелое.* Тогда 15.3.10—15.3.12 дают аналитическое продолжение функции $w_{1,2(0)}$ в окрестности точки $z=1$. Аналогично, 15.3.13 и 15.3.14 дают аналитическое продолжение $w_{1,2(0)}$ в окрестности $z=\infty$ в случае, когда $a-b$ является целым, а c не является целым; при этом накладывается ограничение $c-a=0$, ±1, ±2. (Подробное исследование всех возможных случаев см. в [15.2].)

D. $c=1$. Формулы 15.5.3, 15.5.4 заменяются формулами

15.5.16. $w_{1(0)}=F(a,\ b;\ 1;\ z),$

15.5.17. $w_{2(0)}=F(a,\ b;\ 1;\ z)\ln z+$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b)_n}{(n!)^2}z^n[\psi(a+n)-\psi(a)+\psi(b+n)-$$

$$-\psi(b)-2\psi(n+1)+2\psi(1)]\quad(|z|<1).$$

E. $c=m+1, m=1,2,3.$ Фундаментальная система имеет вид

15.5.18. $w_{1(0)}=F(a,\ b;\ m+1;\ z),$

15.5.19. $w_{2(0)}=F(a,\ b;\ m+1;\ z)\ln z+$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b)_n}{(1+m)_n\,n!}z^n[\psi(a+n)-\psi(a)+$$

$$+\psi(b+n)-\psi(b)-\psi(m+1+n)+$$

$$+\psi(m+1)-\psi(n+1)+\psi(1)]-\sum_{n=1}^{m}\frac{(n-1)!\,(-m)_n}{(1-a)_n(1-b)_n}z^{-n}$$

$$(|z|<1,\ a,\ b\neq 0,\ 1,\ \ldots,\ (m-1)).$$

F. $c=1-m, m=1,2,3,\ldots$ Фундаментальная система имеет вид

15.5.20. $w_{1(0)} = z^m F(a+m,\ b+m;\ 1+m;\ z)$,

15.5.21. $w_{2(0)} = z^m F(a+m,\ b+m;\ 1+m;\ z)\ln z +$

$$+ z^m \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{(a+m)_n\,(b+m)_n}{(1+m)_n\, n!} [\psi(a+m+n) -$$

$$-\psi(a+m) + \psi(b+m+n) - \psi(b+m) - \psi(m+1+n) +$$
$$+ \psi(m+1) - \psi(n+1) + \psi(1)] -$$
$$- \sum_{n=1}^{m} \frac{(n-1)!\,(-m)_n}{(1-a-m)_n\,(1-b-m)_n} z^{m-n}$$
$$(|z|<1,\ a, b \ne 0, -1, -2, \ldots, -(m-1)).$$

15.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РИМАНА

Гипергеометрическое дифференциальное уравнение 15.5.1 с (регулярными) особыми точками $0, 1, \infty$ является частным случаем дифференциального уравнения Римана с тремя (регулярными) особыми точками a, b, c:

15.6.1.
$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right]\frac{dw}{dz} + \left[\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right] \times \frac{w}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0.$$

Парами показателей для особых точек a, b, c являются соответственно $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$, удовлетворяющие соотношению

15.6.2. $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$.

Полная система решений уравнения 15.6.1 обозначается символом

15.6.3.
$$w = P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

Частные случаи функции Римана P

(a) Обобщенная гипергеометрическая функция:

15.6.4.
$$w = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

(b) Гипергеометрическая функция $F(a,\ b;\ c;\ z)$:

15.6.5.
$$w = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & z \\ 1-c & b & c-a-b & \end{Bmatrix}.$$

(c) Функции Лежандра $P_\nu^\mu(z)$, $Q_\nu^\mu(z)$:

15.6.6.
$$w = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0 & (1-z^2)^{-1} \\ \frac{1}{2}+\frac{\nu}{2} & -\frac{\mu}{2} & \frac{1}{2} & \end{Bmatrix}.$$

(d) Вырожденная гипергеометрическая функция:

15.6.7.
$$w = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & c & \\ \frac{1}{2}+u & -c & c-k & z \\ \frac{1}{2}-u & 0 & k & \end{Bmatrix},\quad \text{где } \lim c = \infty.$$

Формулы преобразования для функции Римана P

15.6.8.
$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta-k-l & \gamma+l & z \\ \alpha'+k & \beta'-k-l & \gamma'+l & \end{Bmatrix}.$$

15.6.9.
$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z_1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

В 15.6.8 и 15.6.9.

15.6.10.
$$z = \frac{Az_1+B}{Cz_1+D},\quad a = \frac{Aa_1+B}{Ca_1+D},\quad b = \frac{Ab_1+B}{Cb_1+D},\quad c = \frac{Ac_1+B}{Cc_1+D},$$

A, B, C, D — произвольные постоянные такие, что $AD - BC \ne 0$.

Функция Римана P, приводящаяся к гипергеометрической функции, имеет вид

15.6.11.
$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} \times P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 & \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)} \\ \alpha'-\alpha & \alpha+\beta'+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{Bmatrix}.$$

Функция P в правой части представляет собой гипергеометрическую функцию Гаусса (см. 15.6.5). Если вместо нее взять 24 решения Куммера 15.5.3—15.5.14, то получается полная система 24 решений дифференциального уравнения Римана 15.6.1.

Например, первое из этих решений согласно 15.5.3—15.6.5 имеет вид

15.6.12.
$$w = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} \times F\left[\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\right].$$

15.7. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Поведение функции $F(a, b; c; z)$ при больших $|z|$ видно из формул преобразования 15.3. Для фиксированных a, b, z и больших $|c|$ имеем (см. [15.8])

15.7.1. $$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}+O(|c|^{-m-1}).$$

Для фиксированных a, c, z ($c\neq 0, -1, -2, \ldots, 0<|z|<1$) и больших $|b|$ имеем (см. [15.2])

15.7.2. $$F(a, b; c; z) = e^{-i\pi a}[\Gamma(c)/\Gamma(c-a)](bz)^{-a}[1+O(|bz|^{-1})]+[\Gamma(c)/\Gamma(a)]e^{bz}(bz)^{a-c}[1+O(|bz|^{-1})]$$
$$(-3\pi/2<\arg(bz)<\pi/2),$$

15.7.3. $$F(a, b; c; z) = e^{i\pi a}[\Gamma(c)/\Gamma(c-a)](bz)^{-a}[1+O(|bz|^{-1})]+[\Gamma(c)/\Gamma(a)]e^{bz}(bz)^{a-c}[1+O(|bz|^{-1})$$
$$(-\pi/2<\arg(bz)<3\pi/2)].$$

Случаи, когда большими являются два или более параметров, см. в [15.2].

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

15.1. Appell P., Kampe de Feriet J. Fonctions hypergéometriques et hypersphériques. — P.: Gauthiers-Villars, 1926.

15.2. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V. 1. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973, Т.I.

15.3. Goursat E. Ann. Sci. École Norm. Sup., **10**, № 2, p. 3—142 (1881).

15.4. Goursat E. Propriétés genérales de 2 l'equation d'Euler et de Gauss. — Actualités scientifiques et industriélles, Paris, 1936, 333.

15.5. Kampé de Fériet J. La fonction hypergeometrique — P.: Gauthiers-Villars, 1937.

15.6. Klein F. Vorlesungen über die hypergeometrische Funktionen. — B.: Teubner, 1933.

15.7. Kummer E. E. Über die hypergeometrische Reihe. — J. Reine Angew. Math., 1836, **15**, p. 39—83; 127—172.

15.8. MacRobert T. M. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1923, **42**, p. 84—88.

15.9. MacRobert T. M. Functions of a complex variable. — L.: Macmillan Co , 1954.

15.10. Poole E. G. C. Introduction to the theory of linear differential euqations. — Oxford: Clarendon Press, 1936.

15.11. Snow C. The hypergeometric and Legendre functions with applications to integral equations of potential theory. — Washington: Government Printing Office, 1952. — (Applied Math. Series; 19).

15.12. Whittaker E. T., Watson G. N. A course of modern analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952. Русский перевод: Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М.; Физматгиз, 1963, Т.II.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Книги

15.13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.

15.14. Кратцер Л., Франц В. Трансцендентные функции. — М.: ИЛ, 1963.

15.15. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963.

Таблицы

15.16. Франкль Ф. И. К теории сопел Лаваля. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, **9**, № 5, с. 387—422.

$$F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, t\right), \quad t = -0.5(0.1)1, \quad 4D.$$

15.17. Mathai A. M., Saxena R. K. A short table of the generalized hypergeometric distribution. — Metrika, 1968, **14**, № 1, p. 21—39.

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)\equiv F(\alpha, \beta; \gamma; x); \ \alpha = 1(1)5;$$
$$\beta = \alpha(1)5, \ \gamma = 1(0.5)5.5, \ x = -0.9(0.1)0.9, \ 6D.$$

15.18. Pearson K., Elderton E. M. On the variate difference method. — Biometrika, 1923, **14**, p. 281—310.

15.19. Wang J. S. The kineties of absorption with beng-range interaction between absorbed particles. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1938, **34**, № 3, p. 412—423.

$$\frac{2\pi}{u}\left\{(1+\sigma)^3 F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \sigma^2\right)-1\right\}, \quad \text{где}$$
$$\sigma = (u-\sqrt{u^2-1})^2, \ u = 1.4(0.01)3.1(0.1)5, \ 4D,$$

Глава 16

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЯКОБИ И ТЭТА-ФУНКЦИИ

Л. МИЛН-ТОМСОН

СОДЕРЖАНИЕ

16.1. ВВЕДЕНИЕ

Эллиптической функцией называется двоякопериодическая мероморфная функция.

Пусть m и m_1 — такие числа, что

$$m + m_1 = 1.$$

Назовем *m параметром*, а *m_1 — дополнительным параметром.*

Ниже будем полагать, что параметр m является действительным числом. Без потери общности можем считать, что $0 \leqslant m \leqslant 1$ (см. 16.10, 16.11).

Определим *четвертьпериоды* K и iK' через интегралы

$$\textbf{16.1.1.}\quad K(m) = K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - m\sin^2\theta)^{1/2}},$$

$$iK'(m) = iK' = i\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - m_1\sin^2\theta)^{1/2}}.$$

Из 16.1.1 видно, что K и K' являются действительными числами. K — *действительный* и iK' — *мнимый четвертьпериоды*.

Заметим, что

$$\textbf{16.1.2.}\quad K(m) = K'(m_1) = K'(1 - m).$$

Заметим также, что если дано какое-либо о д н о из чисел $m, m_1, K(m), K'(m), K'(m)\,/\,K(m)$, то все остальные им определяются. Таким образом, K и K' не могут быть оба выбраны произвольно.

Обозначим точки $0, K, K + iK', iK'$ соответственно через s, c, d, n. Эти точки являются вершинами прямоугольника. Сдвиги этого прямоугольника на λK и $\mu iK'$, где λ и μ — любые целые положительные или отрицательные числа, приведут к решетке

$$\begin{matrix} \mathrm{s} & \mathrm{c} & \mathrm{s} & \mathrm{c} \\ \mathrm{n} & \mathrm{d} & \mathrm{n} & \mathrm{d} \\ \mathrm{s} & \mathrm{c} & \mathrm{s} & \mathrm{c} \\ \mathrm{n} & \mathrm{d} & \mathrm{n} & \mathrm{d} \end{matrix},$$

которая неограниченно продолжается во все стороны.

Пусть p, q — любые две из букв s, c, d, n. Тогда p, q определяют в решетке минимальный прямоугольник со сторонами длиной K и K' и вершинами s, c, d, n, перечисляемыми против часовой стрелки.

Определение

Эллиптическая функция Якоби pq u определяется следующими тремя свойствами:

(I) pq u имеет простой нуль в точке p и простой полюс в q.

(II) Шаг между p и q является полупериодом функции pq u. Те из чисел $K, iK', K + iK'$, которые отличаются от этого шага, являются только четвертьпериодами.

(III) Коэффициент первого члена разложения функции pq u в окрестности нуля по возрастающим степеням u равен единице. Следовательно, первый член разложения равен u, $1/u$ или 1 в соответствии с тем, является ли точка $u = 0$ нулем, полюсом или обыкновенной точкой.

Функции с полюсом или нулем в начале координат (т.е. функции, в обозначениях которых имеется буква s) являются нечетными, а другие — четными.

Чтобы подчеркнуть зависимость эллиптической функции Якоби от параметра, будем писать pq$(u|m)$ вместо pq u.

Эллиптические функции Якоби могут быть также определены с помощью интегралов. Рассмотрим интеграл

$$\textbf{16.1.3.}\quad u = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\theta}{(1 - m\sin^2\theta)^{1/2}},$$

в котором угол φ назовем *амплитудой*, и, записывая

$$\textbf{16.1.4.}\quad \varphi = \operatorname{am} u,$$

определим

16.1.5. $\operatorname{sn} u = \sin \varphi, \quad \operatorname{cn} u = \cos \varphi,$

$$\operatorname{dn} u = (1 - m \sin^2 \varphi)^{1/2} = \Delta(\varphi).$$

Подобным образом через φ могут быть выражены все функции $\operatorname{pq} u$. Такое определение эллиптических функций хотя и кажется отличным от определения в терминах решетки, но математически ему эквивалентно. О содержании обозначений, подобных $\operatorname{sn}(\varphi \setminus \alpha)$, $\operatorname{cn}(u \mid m)$, $\operatorname{dn}(u, k)$, см. 17.2.

16.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВЕНАДЦАТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ

(соответственно полюсам и полупериодам)

	Полюс iK'	Полюс $K + iK'$	Полюс K	Полюс 0	
Полупериод iK'	$\operatorname{sn} u$	$\operatorname{cd} u$	$\operatorname{dc} u$	$\operatorname{ns} u$	Периоды $2iK'$, $4K + 4iK'$, $4K$
Полупериод $K + iK'$	$\operatorname{cn} u$	$\operatorname{sd} u$	$\operatorname{nc} u$	$\operatorname{ds} u$	Периоды $4iK'$, $2K + 2iK'$, $4K$
Полупериод K	$\operatorname{dn} u$	$\operatorname{nd} u$	$\operatorname{sc} u$	$\operatorname{cs} u$	Периоды $4iK'$, $4K + 4iK'$, $2K$

Три функции, помещенные в одном и том же столбце, имеют общий полюс.

Четыре функции, помещенные в одной и той же строке, имеют общий период. Из периодов, указанных в последнем столбце, только два независимы.

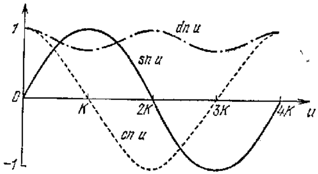


Рис. 16.1. Эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$; $m = 1/2$.

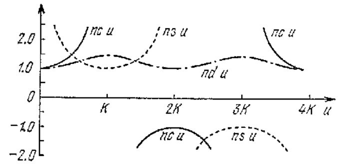


Рис. 16.2. Эллиптические функции Якоби $\operatorname{ns} u$, $\operatorname{nc} u$, $\operatorname{nd} u$; $m = 1/2$.

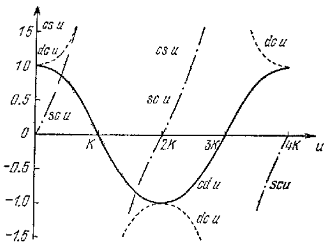


Рис. 16.3. Эллиптические функции Якоби $\operatorname{sc} u$, $\operatorname{ds} u$, $\operatorname{cs} u$, $\operatorname{dc} u$; $m = 1/2$.

16.3. СВЯЗЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ С ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ТРОЙКОЙ ФУНКЦИЙ sn *u*, cn *u*, dn *u*,

16.3.1. $\operatorname{cd} u = \dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{dc} u = \dfrac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{ns} u = \dfrac{1}{\operatorname{sn} u}.$

16.3.2. $\operatorname{sd} u = \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{nc} u = \dfrac{1}{\operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{ds} u = \dfrac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}.$

16.3.3. $\operatorname{nd} u = \dfrac{1}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{sc} u = \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{cs} u = \dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}.$

Вообще, если p, q, r являются любыми тремя из четырех букв s, c, d, n, то

16.3.4. $\operatorname{pq} u = \dfrac{\operatorname{pr} u}{\operatorname{qr} u}$

при условии, что в случае совпадения двух букв, например $\operatorname{pp} u$, соответствующая функция полагается равной единице.

16.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ С ПОМОЩЬЮ АРИФМЕТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО (А.Г.С.)

Алгоритм А.Г.С. см. в 17.6.

Для вычисления $\mathrm{sn}(u \mid m)$, $\mathrm{cn}(u \mid m)$ и $\mathrm{dn}(u \mid m)$ процесс А.Г.С. формируется по начальным значениям

16.4.1. $a_0 = 1,\ b_0 = \sqrt{m_1},\ c_0 = \sqrt{m}$

и оканчивается на шаге N, когда величиной c_N можно пренебречь в пределах заданной точности. Находим φ_N в градусах по формуле

16.4.2. $\varphi_N = 2^N a_N u \dfrac{180^\circ}{\pi}$

и затем последовательно вычисляем $\varphi_{N-1}, \varphi_{N-2}, \ldots, \varphi_1, \varphi_0$, используя рекуррентное соотношение

16.4.3. $\sin(2\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \dfrac{c_n}{a_n} \sin \varphi_n.$

Тогда

16.4.4. $\mathrm{sn}\,(u \mid m) = \sin \varphi_0,\ \ \mathrm{cn}\,(u \mid m) = \cos \varphi_0,$

$$\mathrm{dn}\,(u \mid m) = \frac{\cos \varphi_0}{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)}.$$

По этим функциям могут быть определены остальные эллиптические функции Якоби.

16.5. ЧАСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

	u	$\mathrm{sn}\, u$	$\mathrm{cn}\, u$	$\mathrm{dn}\, u$
16.5.1.	0	0	1	1
16.5.2.	$\frac{1}{2} K$	$\dfrac{1}{(1+m_1^{1/2})^{1/2}}$	$\dfrac{m_1^{1/4}}{(1+m_1^{1/2})^{1/2}}$	$m_1^{1/4}$
16.5.3.	K	1	0	$m_1^{1/2}$
16.5.4.	$\frac{1}{2}(iK')$	$im^{-1/4}$	$\dfrac{(1+m^{1/2})^{1/2}}{m^{1/4}}$	$(1+m^{1/2})^{1/2}$
16.5.5.	$\frac{1}{2}(K+iK')$	$2^{-1/2}m^{-1/4}[(1+m^{1/2})^{1/2} + i(1-m^{1/2})^{1/2}]$	$\left(\dfrac{m_1}{4m}\right)^{1/4}(1-i)$	$\left(\dfrac{m_1}{4}\right)^{1/4}[(1+m_1^{1/2})^{1/2} - i(1-m_1^{1/2})^{1/2}]$
16.5.6.	$K + \frac{1}{2}(iK')$	$m^{-1/4}$	$-i\left(\dfrac{1-m^{1/2}}{m^{1/2}}\right)^{1/2}$	$(1-m^{1/2})^{1/2}$
16.5.7.	$i - K'$	∞	∞	∞
16.5.8.	$\frac{1}{2}K + iK'$	$(1-m_1^{1/2})^{-1/2}$	$-i\left(\dfrac{m_1^{1/2}}{1-m_1^{1/2}}\right)^{1/2}$	$-im_1^{1/4}$
16.5.9.	$K + iK'$	$m^{-1/2}$	$-i(m_1/m)^{1/2}$	0

16.6. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЯКОБИ ПРИ $m = 0$ и $m = 1$

		$m=0$	$m=1$			$m=0$	$m=1$
16.6.1.	$\mathrm{sn}\,(u \mid m)$	$\sin u$	$\mathrm{th}\, u$	**16.6.8.**	$\mathrm{nc}\,(u \mid m)$	$\sec u$	$\mathrm{ch}\, u$
16.6.2.	$\mathrm{cn}\,(u \mid m)$	$\cos u$	$\mathrm{sech}\, u$	**16.6.9.**	$\mathrm{sc}\,(u \mid m)$	$\mathrm{tg}\, u$	$\mathrm{sh}\, u$
16.6.3.	$\mathrm{dn}\,(u \mid m)$	1	$\mathrm{sech}\, u$	**16.6.10.**	$\mathrm{ns}\,(u \mid m)$	$\mathrm{cosec}\, u$	$\mathrm{cth}\, u$
16.6.4.	$\mathrm{cd}\,(u \mid m)$	$\cos u$	1	**16.6.11.**	$\mathrm{ds}\,(u \mid m)$	$\mathrm{cosec}\, u$	$\mathrm{cosech}\, u$
16.6.5.	$\mathrm{sd}\,(u \mid m)$	$\sin u$	$\mathrm{sh}\, u$	**16.6.12.**	$\mathrm{cs}\,(u \mid m)$	$\mathrm{ctg}\, u$	$\mathrm{cosech}\, u$
16.6.6.	$\mathrm{nd}\,(u \mid m)$	1	$\mathrm{ch}\, u$	**16.6.13.**	$\mathrm{am}\,(u \mid m)$	u	$\mathrm{gd}\, u$
16.6.7.	$\mathrm{dc}\,(u \mid m)$	$\sec u$	1				

16.7. ГЛАВНЫЕ ЧЛЕНЫ РАЗЛОЖЕНИЙ

Если эллиптическая функция pq u разложена по возрастающим степеням $(u - K_r)$, где K_r — одна из величин $0, K, iK', K+iK'$, то первый член разложения, называемый главным, имеет одну из форм A, $B\times(u-K_r)$, $C\div(u-K_r)$ в соответствии с тем, является ли K_r обыкновенной точкой, нулем или полюсом функции pq u. В следующей таблице приведены эти формы. Знаки $\times$ и $\div$ показывают, что необходимо дописать множитель или делитель $(u-K_r)$ соответственно.

	$K_r=$	0	K	iK'	$K+iK'$		$K_r=$	0	K	iK'	$K+iK'$
16.7.1.	sn u	$1\times$	1	$m^{-1/2}\div$	$m^{-1/2}$	**16.7.7.**	dc u	1	$-1\div$	$m^{1/2}$	$-m^{1/2}\times$
16.7.2.	cn u	1	$-m_1^{1/2}\times$	$-im^{-1/2}\div$	$-i\left(\frac{m_1}{m}\right)^{1/2}$	**16.7.8.**	nc u	1	$-m_1^{-1/2}\div$	$im^{1/2}\times$	$i\left(\frac{m}{m_1}\right)^{1/2}$
16.7.3.	dn u	1	$m_1^{1/2}$	$-i\div$	$im_1^{1/2}\times$	**16.7.9.**	sc u	$1\times$	$-m_1^{-1/2}\div$	i	$im_1^{-1/2}$
16.7.4.	cd u	1	$-1\times$	$m^{-1/2}$	$-m^{-1/2}\div$	**16.7.10.**	ns u	$1\div$	1	$m^{1/2}\times$	$m^{1/2}$
16.7.5.	sd u	$1\times$	$m_1^{-1/2}$	$im^{-1/2}$	$-i\frac{1}{(mm_1)^{1/2}}\div$	**16.7.11.**	ds u	$1\div$	$m_1^{1/2}$	$-im^{1/2}$	$i(mm_1)^{1/2}\times$
16.7.6.	nd u	1	$m_1^{-1/2}$	$i\times$	$-im_1^{-1/2}\div$	**16.7.12.**	cs u	$1\div$	$-m_1^{1/2}\times$	$-i$	$-im_1^{1/2}$

16.8. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ ПО АРГУМЕНТУ

	u	$-u$	$u+K$	$u-K$	$K-u$	$u\pm 2K$	$2K-u$	$u+iK'$	$u+2iK'$	$u+K+iK'$	$u+2K+2iK'$
16.8.1.	sn u	$-$sn u	cd u	$-$cd u	cd u	$-$sn u	sn u	$m^{-1/2}$ ns u	sn u	$m^{-1/2}$ dc u	$-$sn u
16.8.2.	cn u	cn u	$-m_1^{1/2}$ sd u	$m_1^{1/2}$ sd u	$m_1^{1/2}$ sd u	$-$cn u	$-$cn u	$-im^{-1/2}$ ds u	$-$cn u	$-im_1^{1/2}m^{-1/2}$ nc u	cn u
16.8.3.	dn u	dn u	$m_1^{1/2}$ nd u	$m_1^{1/2}$ nd u	$m_1^{1/2}$ nd u	dn u	dn u	$-i$ cs u	$-$dn u	$im_1^{1/2}$ sc u	$-$dn u
16.8.4.	cd u	cd u	$-$sn u	sn u	sn u	$-$cd u	$-$cd u	$m^{-1/2}$ dc u	cd u	$-m^{-1/2}$ ns u	$-$cd u
16.8.5.	sd u	$-$sd u	$m_1^{-1/2}$ cn u	$-m_1^{-1/2}$ cn u	$m_1^{-1/2}$ cn u	$-$sd u	sd u	$im^{-1/2}$ nc u	$-$sd u	$-im_1^{-1/2}m^{-1/2}$ ds u	sd u
16.8.6.	nd u	nd u	$m_1^{-1/2}$ dn u	$m_1^{-1/2}$ dn u	$m_1^{-1/2}$ dn u	nd u	nd u	i sc u	$-$nd u	$-im_1^{-1/2}$ cs u	$-$nd u
16.8.7.	dc u	dc u	$-$ns u	ns u	ns u	$-$dc u	$-$dc u	$m^{1/2}$ cd u	dc u	$-m^{1/2}$ sn u	$-$dc u
16.8.8.	nc u	nc u	$-m_1^{-1/2}$ ds u	$m_1^{-1/2}$ ds u	$m_1^{-1/2}$ ds u	$-$nc u	$-$nc u	$im^{1/2}$ sd u	$-$nc u	$im_1^{-1/2}m^{1/2}$ cn u	nc u
16.8.9.	sc u	$-$sc u	$-m_1^{-1/2}$ cs u	$-m_1^{-1/2}$ cs u	$m_1^{-1/2}$ cs u	sc u	$-$sc u	i nd u	$-$sc u	$im_1^{-1/2}$ dn u	$-$sc u
16.8.10.	ns u	$-$ns u	dc u	$-$dc u	dc u	$-$ns u	ns u	$m^{1/2}$ sn u	ns u	$m^{1/2}$ cd u	$-$ns u
15.8.11.	ds u	$-$ds u	$m_1^{1/2}$ nc u	$-m_1^{1/2}$ nc u	$m_1^{1/2}$ nc u	$-$ds u	ds u	$-im^{1/2}$ cn u	$-$ds u	$im_1^{1/2}m^{1/2}$ sd u	ds u
16.8.12.	cs u	$-$cs u	$-m_1^{1/2}$ sc u	$-m_1^{1/2}$ sc u	$m_1^{1/2}$ sc u	cs u	$-$cs u	$-i$ dn u	$-$cs u	$-im_1^{1/2}$ nd u	$-$cs u

16.9. СВЯЗИ МЕЖДУ КВАДРАТАМИ ФУНКЦИЙ

16.9.1. $-\mathrm{dn}^2 u + m_1 = -m\,\mathrm{cn}^2 u = m\,\mathrm{sn}^2 u - m.$

16.9.2. $-m_1\,\mathrm{nd}^2 u + m_1 = -mm_1\,\mathrm{sd}^2 u = m\,\mathrm{cd}^2 u - m.$

16.9.3. $m_1\,\mathrm{sc}^2 u + m_1 = m_1\,\mathrm{nc}^2 u = \mathrm{dc}^2 u - m.$

16.9.4. $\mathrm{cs}^2 u + m_1 = \mathrm{ds}^2 u = \mathrm{ns}^2 u - m.$

Напомним, что в приведенных формулах $m + m_1 = 1$. Если pq u, rt u — любые две из двенадцати эллиптических функций, то одна из записей выражает $\mathrm{tq}^2 u$ через $\mathrm{pq}^2 u$, а другая выражает $\mathrm{qt}^2 u$ через $\mathrm{rt}^2 u$. Так как $\mathrm{tq}^2 u\cdot \mathrm{qt}^2 u = 1$, то из этих равенств можно получить билинейное соотношение между $\mathrm{pq}^2 u$ и $\mathrm{rt}^2 u$. Так, для функций cd u, sn u имеем

16.9.5. $\mathrm{nd}^2 u = \dfrac{1 - m\,\mathrm{cd}^2 u}{m_1}, \quad \mathrm{dn}^2 u = 1 - m\,\mathrm{sn}^2 u$

и, следовательно,

16.9.6. $(1 - m\,\mathrm{cd}^2 u)(1 - m\,\mathrm{sn}^2 u) = m_1.$

16.10. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Отрицательный параметр

Если m — положительное, то, полагая

16.10.1. $\mu = \dfrac{m}{1+m}, \quad \mu_1 = \dfrac{1}{1+m}, \quad \nu = \dfrac{u}{\mu_1^{1/2}}$
$(0 < \mu < 1)$,

получаем

16.10.2. $\mathrm{sn}\,(u|-m) = \mu_1^{1/2}\,\mathrm{sd}\,(\nu|\mu)$,

16.10.3. $\mathrm{cn}\,(u|-m) = \mathrm{cd}\,(\nu|\mu)$,

16.10.4. $\mathrm{dn}\,(u|-m) = \mathrm{nd}\,(\nu|\mu)$.

16.11. ОБРАТНЫЙ ПАРАМЕТР (ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЯКОБИ)

16.11.1. $m > 0, \quad \mu = m^{-1}, \quad \nu = um^{1/2}$.

16.11.2. $\mathrm{sn}\,(u|m) = \mu^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\nu|\mu)$.

16.11.3. $\mathrm{cn}\,(u|m) = \mathrm{dn}\,(\nu|\mu)$.

16.11.4. $\mathrm{dn}\,(u|m) = \mathrm{cn}\,(\nu|\mu)$.

Если $m > 1$, то $m^{-1} = \mu < 1$. Таким образом, эллиптические функции с действительным параметром могут быть сведены к эллиптическим функциям с параметром, лежащим между нулем и единицей.

16.12. ПОНИЖАЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАНДЕНА (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАУССА)

Для уменьшения параметра положим

16.12.1. $\mu = \left(\dfrac{1-m_1^{1/2}}{1+m_1^{1/2}}\right)^2, \quad \nu = \dfrac{u}{1+\mu^{1/2}}$;

тогда

16.12.2. $\mathrm{sn}\,(u|m) = \dfrac{(1+\mu^{1/2})\,\mathrm{sn}\,(\nu|\mu)}{1+\mu^{1/2}\,\mathrm{sn}^2\,(\nu|\mu)}$,

16.12.3. $\mathrm{cn}\,(u|m) = \dfrac{\mathrm{cn}\,(\nu|\mu)\,\mathrm{dn}\,(\nu|\mu)}{1+\mu^{1/2}\,\mathrm{sn}^2\,(\nu|\mu)}$,

16.12.4. $\mathrm{dn}\,(u|m) = \dfrac{\mathrm{dn}^2\,(\nu|\mu) - (1-\mu^{1/2})}{(1+\mu^{1/2}) - \mathrm{dn}^2\,(\nu|\mu)}$.

Заметим, что последовательное применение этого преобразования может быть использовано для нахождения функции $\mathrm{sn}\,(u|m)$ через $\mathrm{sn}\,(\nu|\mu)$ и функции $\mathrm{dn}\,(u|m)$ через $\mathrm{dn}\,(\nu|\mu)$. Функция $\mathrm{cn}\,(u|m)$ вычисляется через все три эллиптические функции Якоби[1]).

16.13. АППРОКСИМАЦИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Если параметр m настолько мал, что можно пренебречь m^2 и более высокими степенями m, то имеют место выражения

16.13.1. $\mathrm{sn}\,(u|m) \approx \sin u - \dfrac{1}{4}\,m(u - \sin u\cos u)\cos u$,

16.13.2. $\mathrm{cn}\,(u|m) \approx \cos u + \dfrac{1}{4}\,m(u - \sin u\cos u)\sin u$,

16.13.3. $\mathrm{dn}\,(u|m) \approx 1 - \dfrac{1}{2}\,m\sin^2 u$,

16.13.4. $\mathrm{am}\,(u|m) \approx u - \dfrac{1}{4}\,m(u - \sin u\cos u)$.

Один из методов вычисления функций Якоби заключается в применении понижающего преобразования Ландена для приведения параметра m к значению, дающему возможность применять эти формулы (см. также 16.14).

16.14. ПОВЫШАЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАНДЕНА

Для увеличения параметра положим

16.14.1. $\mu = \dfrac{4m^{1/2}}{(1+m^{1/2})^2}, \quad \mu_1 = \left(\dfrac{1-m^{1/2}}{1+m^{1/2}}\right)^2,$

$\nu = \dfrac{u}{1+\mu_1^{1/2}}, \quad \mu + \mu_1 = 1$;

тогда

16.14.2. $\mathrm{sn}\,(u|m) = (1+\mu_1^{1/2})\,\dfrac{\mathrm{sn}\,(\nu|\mu)\,\mathrm{cn}\,(\nu|\mu)}{\mathrm{dn}\,(\nu|\mu)}$,

16.14.3. $\mathrm{cn}\,(u|m) = \dfrac{1+\mu_1^{1/2}}{\mu}\,\dfrac{\mathrm{dn}^2\,(\nu|\mu) - \mu_1^{1/2}}{\mathrm{dn}\,(\nu|\mu)}$,

[1]) Схема вычисления эллиптических функций Якоби с применением понижающего преобразования Ландена заключается в следующем: последовательным применением формулы 16.12.4 или 16.12.2 с использованием соответствующих формул 16.13 вычисляется одна из функций, $\mathrm{dn}\,(u|m)$ или $\mathrm{sn}\,(u|m)$.

Далее по формуле 16.9.1 элементарно вычисляются две другие определяющие функции Якоби и по формулам п. 16.3 — все остальные. *(Прим. перев.)*

16.14.4. $\mathrm{dn}\,(u\,|\,m) = \dfrac{1-\mu_1^{1/2}}{\mu}\,\dfrac{\mathrm{dn}^2\,(v\,|\,\mu) + \mu_1^{1/2}}{\mathrm{dn}\,(v\,|\,\mu)}.$

Заметим, что при последовательном применении этого преобразования проще всего вычислять функцию $\mathrm{dn}\,(u|m)$, так как она выражается только через $\mathrm{dn}\,(v|\mu)$, в терминах которой выражается и $\mathrm{cn}\,(u|m)$; вычисление функции $\mathrm{sn}\,(u|m)$ требует использования всех трех функций Якоби [1]).

16.15. АППРОКСИМАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Если параметр m настолько близок к единице, что можно пренебречь m_1^2 и более высокими степенями m_1, то имеют место выражения

16.15.1. $\mathrm{sn}\,(u\,|\,m) \approx \mathrm{th}\,u + \dfrac{1}{4}\,m_1(\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u - u)\,\mathrm{sech}^2\,u,$

16.15.2. $\mathrm{cn}(u\,|\,m) \approx$

$$\approx \mathrm{sech}\,u - \frac{1}{4}\,m_1(\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u - u)\,\mathrm{th}\,u\,\mathrm{sech}\,u,$$

16.15.3. $\mathrm{dn}\,(u\,|\,m) \approx$

$$\approx \mathrm{sech}\,u + \frac{1}{4}\,m_1(\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u + u)\,\mathrm{th}\,u\,\mathrm{sech}\,u,$$

16.15.4. $\mathrm{am}\,(u\,|\,m) \approx$

$$\approx \mathrm{gd}\,u + \frac{1}{4}\,m_1(\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u - u)\,\mathrm{sech}\,u.$$

Повышающее преобразование Ландена, приводящее параметр m к значению, дающему возможность применять эти формулы, служит основой другого метода вычисления функций Якоби (см. также 16.13).

16.16. ПРОИЗВОДНЫЕ

	Функция	Производная			Функция	Производная	
16.16.1.	$\mathrm{sn}\,u$	$\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$		**16.16.7.**	$\mathrm{dc}\,u$	$m_1\,\mathrm{sc}\,u\,\mathrm{nc}\,u$	
16.16.2.	$\mathrm{cn}\,u$	$-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$	полюс n	**16.16.8.**	$\mathrm{nc}\,u$	$\mathrm{sc}\,u\,\mathrm{dc}\,u$	полюс c
16.16.3.	$\mathrm{dn}\,u$	$-m\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u$		**16.16.9.**	$\mathrm{sc}\,u$	$\mathrm{dc}\,u\,\mathrm{nc}\,u$	
16.16.4.	$\mathrm{cd}\,u$	$-m_1\,\mathrm{sd}\,u\,\mathrm{nd}\,u$		**16.16.10.**	$\mathrm{ns}\,u$	$-\mathrm{ds}\,u\,\mathrm{cs}\,u$	
16.16.5.	$\mathrm{sd}\,u$	$\mathrm{cd}\,u\,\mathrm{nd}\,u$	полюс d	**16.16.11.**	$\mathrm{ds}\,u$	$-\mathrm{cs}\,u\,\mathrm{ns}\,u$	полюс s
16.16.6.	$\mathrm{nd}\,u$	$m\,\mathrm{sd}\,u\,\mathrm{cd}\,u$		**16.16.12.**	$\mathrm{cs}\,u$	$-\mathrm{ns}\,u\,\mathrm{ds}\,u$	

Заметим, что производные пропорциональны произведениям двух сополюсных функций.

16.17. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

16.17.1. $\mathrm{sn}\,(u+v) =$

$$= \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - m\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}.$$

16.17.2. $\mathrm{cn}\,(u+v) =$

$$= \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1 - m\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}.$$

16.17.3. $\mathrm{dn}\,(u+v) =$

$$= \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - m\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{1 - m\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}.$$

Теоремы сложения получаются одна из другой и могут иметь различные формы записи. Так, $\mathrm{ns}(u+v)$ получается по формуле 16.17.1 из $1\,/\,\mathrm{sn}\,(u+v)$ в виде

$$(1 - m\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v)/(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u).$$

Иначе, используя представление $\mathrm{ns}\,(u+v) = -m^{1/2}\,\mathrm{sn}\times\times\{(iK'-u)-v\}$ и формулу 16.17.1, получим

$$\mathrm{ns}\,(u+v) = \frac{\mathrm{ns}\,v\,\mathrm{cs}\,u\,\mathrm{ds}\,u - \mathrm{ns}\,u\,\mathrm{cs}\,v\,\mathrm{ds}\,v}{\mathrm{ns}^2\,u - \mathrm{ns}^2\,v}.$$

Функция $\mathrm{pq}\,(u+v)$ является рациональной функцией от $\mathrm{pq}\,u$, $\mathrm{pq}\,v$, $\mathrm{pq}'\,u$, $\mathrm{pq}'\,v$.

---

[1]) Схема вычисления эллиптических функций Якоби с применением повышающего преобразования Ландена заключается в следующем: последовательным применением формулы 16.4.4 с использованием формулы 16.15.3 вычисляется функция $\mathrm{dn}\,(u|m)$. Далее по формуле 16.9.1 элементарно вычисляются две другие определяющие функции Якоби и по формулам п. 16.3 — все остальные. *(Прим. перев).*

16.18. ФОРМУЛЫ ДЛЯ УДВОЕННЫХ АРГУМЕНТОВ

16.18.1. $\operatorname{sn} 2u = \dfrac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - m \operatorname{sn}^4 u} = \dfrac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}$.

16.18.2. $\operatorname{cn} 2u = \dfrac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - m \operatorname{sn}^4 u} = \dfrac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}$.

16.18.3. $\operatorname{dn} 2u = \dfrac{\operatorname{dn}^2 u - m \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - m \operatorname{sn}^4 u} = \dfrac{\operatorname{dn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u(\operatorname{dn}^2 u - 1)}{\operatorname{dn}^2 u - \operatorname{cn}^2 u(\operatorname{dn}^2 u - 1)}$.

16.18.4. $\dfrac{1 - \operatorname{cn} 2u}{1 + \operatorname{cn} 2u} = \dfrac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}$.

16.18.5. $\dfrac{1 - \operatorname{dn} 2u}{1 + \operatorname{dn} 2u} = \dfrac{m \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}$.

16.19. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОЛОВИННЫХ АРГУМЕНТОВ

16.19.1. $\operatorname{sn}^2 \dfrac{u}{2} = \dfrac{1 - \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}$.

16.19.2. $\operatorname{cn}^2 \dfrac{u}{2} = \dfrac{\operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}$.

16.19.3. $\operatorname{dn}^2 \dfrac{u}{2} = \dfrac{m_1 + \operatorname{dn} u + m \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}$.

16.20. МНИМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЯКОБИ

16.20.1. $\operatorname{sn}(iu \mid m) = i \operatorname{sc}(u \mid m_1)$.

16.20.2. $\operatorname{cn}(iu \mid m) = \operatorname{nc}(u \mid m_1)$.

16.20.3. $\operatorname{dn}(iu \mid m) = \operatorname{dc}(u \mid m_1)$.

16.21. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ АРГУМЕНТОВ

Используя сокращения

16.21.1. $s = \operatorname{sn}(x \mid m)$, $c = \operatorname{cn}(x \mid m)$,

$d = \operatorname{dn}(x \mid m)$, $s_1 = \operatorname{sn}(y \mid m_1)$,

$c_1 = \operatorname{cn}(y \mid m_1)$, $d_1 = \operatorname{dn}(y \mid m_1)$,

получаем

16.21.2. $\operatorname{sn}(x + iy \mid m) = \dfrac{s \cdot d_1 + ic \cdot d \cdot s_1 \cdot c_1}{c_1^2 + ms^2 \cdot s_1^2}$,

16.21.3. $\operatorname{cn}(x + iy \mid m) = \dfrac{c \cdot c_1 - is \cdot d \cdot s_1 \cdot d_1}{c_1^2 + ms^2 \cdot s_1^2}$,

16.21.4. $\operatorname{dn}(x + iy \mid m) = \dfrac{d \cdot c_1 \cdot d_1 - ims \cdot c \cdot s_1}{c_1^2 + ms^2 \cdot s_1^2}$.

16.22. ПЕРВЫЕ ЧЛЕНЫ РАЗЛОЖЕНИЙ В РЯД ПО ВОЗРАСТАЮЩИМ СТЕПЕНЯМ АРГУМЕНТА u

16.22.1. $\operatorname{sn}(u \mid m) = u - (1 + m)\dfrac{u^3}{3!} + (1 + 14m + m^2)\dfrac{u^5}{5!} - (1 + 135m + 135m^2 + m^3)\dfrac{u^7}{7!} + \ldots$

16.22.2. $\operatorname{cn}(u \mid m) = 1 - \dfrac{u^2}{2!} + (1 + 4m)\dfrac{u^4}{4!} - (1 + 44m + 16m^2)\dfrac{u^6}{6!} + \ldots$

16.22.3. $\operatorname{dn}(u \mid m) = 1 - m\dfrac{u^2}{2!} + m(4 + m)\dfrac{u^4}{4!} - m(16 + 44m + m^2)\dfrac{u^6}{6!} + \ldots$

Формулы общих членов этих разложений неизвестны.

16.23. РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ПО ПАРАМЕТРУ ЯКОБИ q И АРГУМЕНТУ v

$(q = e^{-\pi K'/K},\ v = \pi u/(2K))$

16.23.1. $$\mathrm{sn}\,(u\,|\,m) = \frac{2\pi}{m^{1/2}K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1-q^{2n+1}}\sin(2n+1)v.$$

16.23.2. $$\mathrm{cn}\,(u\,|\,m) = \frac{2\pi}{m^{1/2}K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}}\cos(2n+1)v.$$

16.23.3. $$\mathrm{dn}\,(u\,|\,m) = \frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{1+q^{2n}}\cos 2nv.$$

16.23.4. $$\mathrm{cd}\,(u\,|\,m) = \frac{2\pi}{m^{1/2}K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n+1/2}}{1-q^{2n+1}}\cos(2n+1)v.$$

16.23.5. $$\mathrm{sd}\,(u\,|\,m) = \frac{2\pi}{(mm_1)^{1/2}K}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}}\sin(2n+1)v.$$

16.23.6. $$\mathrm{nd}\,(u\,|\,m) = \frac{\pi}{2m_1^{1/2}K}+\frac{2\pi}{m_1^{1/2}K}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{n}}{1+q^{2n}}\cos 2nv.$$

16.23.7. $$\mathrm{dc}\,(u\,|\,m) = \frac{\pi}{2K}\sec v+\frac{2\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\cos(2n+1)v.$$

16.23.8. $$\mathrm{nc}\,(u\,|\,m) = \frac{\pi}{2m_1^{1/2}K}\sec v-\frac{2\pi}{m_1^{1/2}K}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}\cos(2n+1)v.$$

16.23.9. $$\mathrm{sc}\,(u\,|\,m) = \frac{\pi}{2m_1^{1/2}K}\,\mathrm{tg}\,v+\frac{2\pi}{m_1^{1/2}K}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin 2nv.$$

16.23.10. $$\mathrm{ns}\,(u\,|\,m) = \frac{\pi}{2K}\,\mathrm{cosec}\,v-\frac{2\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\sin(2n+1)v.$$

16.23.11. $$\mathrm{ds}\,(u\,|\,m) = \frac{\pi}{2K}\,\mathrm{cosec}\,v-\frac{2\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}\sin(2n+1)v.$$

16.23.12. $$\mathrm{cs}\,(u\,|\,m) = \frac{\pi}{2K}\,\mathrm{ctg}\,v-\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin 2nv.$$

16.24. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ДВЕНАДЦАТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ

16.24.1. $\int \mathrm{sn}\,u\,du = m^{-1/2}\ln(\mathrm{dn}\,u - m^{1/2}\,\mathrm{cn}\,u).$

16.24.2. $\int \mathrm{cn}\,u\,du = m^{-1/2}\arccos(\mathrm{dn}\,u).$

16.24.3. $\int \mathrm{dn}\,u\,du = \arcsin(\mathrm{sn}\,u).$

16.24.4. $\int \mathrm{cd}\,u\,du = m^{-1/2}\ln(\mathrm{nd}\,u + m^{1/2}\,\mathrm{sd}\,u).$

16.24.5. $\int \mathrm{sd}\,u\,du = (mm_1)^{-1/2}\arcsin(-m^{1/2}\,\mathrm{cd}\,u).$

16.24.6. $\int \mathrm{nd}\,u\,du = m_1^{-1/2}\arccos(\mathrm{cd}\,u).$

16.24.7. $\int \mathrm{dc}\,u\,du = \ln(\mathrm{nc}\,u + \mathrm{sc}\,u).$

16.24.8. $\int \mathrm{nc}\,u\,du = m_1^{-1/2}\ln(\mathrm{dc}\,u + m_1^{1/2}\,\mathrm{sc}\,u).$

16.24.9. $\int \mathrm{sc}\,u\,du = m_1^{-1/2}\ln(\mathrm{dc}\,u + m_1^{1/2}\,\mathrm{nc}\,u).$

16.24.10. $\int \mathrm{ns}\,u\,du = \ln(\mathrm{ds}\,u - \mathrm{cs}\,u).$

16.24.11. $\int \mathrm{ds}\,u\,du = \ln(\mathrm{ns}\,u - \mathrm{cs}\,u).$

16.24.12. $\int \mathrm{cs}\,u\,du = \ln(\mathrm{ns}\,u - \mathrm{ds}\,u).$

При использовании приведенных выше формул в вычислениях необходимо накладывать ограничения на аргумент u, с тем чтобы аргументы логарифмов были положительны и чтобы оставаться в пределах главных значений обратных тригонометрических функций.

16.25. ОБОЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ КВАДРАТОВ ДВЕНАДЦАТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ

16.25.1. $\mathrm{Pq}\ u = \int\limits_0^u \mathrm{pq}^2\, t\, dt$ при $q \neq s$.

16.25.2. $\mathrm{Ps}\ u = \int\limits_0^u \left(\mathrm{pq}^2 t - \frac{1}{t^2}\right) dt - \frac{1}{u}$.

ПРИМЕРЫ

$$\mathrm{Cd}\ u = \int\limits_0^u \mathrm{cd}^2\, t\, dt, \qquad \mathrm{Ns}\ u = \int\limits_0^u \left(\mathrm{ns}^2 t - \frac{1}{t^2}\right) dt - \frac{1}{u}.$$

16.26. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ЧЕРЕЗ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА (см. 17.4)

16.26.1. $m\,\mathrm{Sn}\ u = -E(u) + u$,
16.26.2. $m\,\mathrm{Cn}\ u = E(u) - m_1 u$,
16.26.3. $\mathrm{Dn}\ u = E(u)$,
} полюс n.

16.26.4. $m\,\mathrm{Cd}\ u = -E(u) + u + m\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cd}\,u$,
16.26.5. $mm_1\,\mathrm{Sd}\ u = E(u) - m_1 u - m\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cd}\,u$,
16.26.6. $m_1\,\mathrm{Nd}\ u = E(u) - m\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cd}\,u$,
} полюс d.

16.26.7. $\mathrm{Dc}\ u = -E(u) + u + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dc}\,u$,
16.26.8. $m_1\,\mathrm{Nc}\ u = -E(u) + m_1 u + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dc}\,u$,
16.26.9. $m_1\,\mathrm{Sc}\ u = -E(u) + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dc}\,u$,
} полюс c.

16.26.10. $\mathrm{Ns}\ u = -E(u) + u - \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{ds}\,u$,
16.26.11. $\mathrm{Ds}\ u = -E(u) + m_1 u - \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{ds}\,u$,
16.26.12. $\mathrm{Cs}\ u = -E(u) - \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{ds}\,u$,
} полюс s.

Формулы 16.26.1—16.26.12 можно выразить через дзета-функцию Якоби (см. 17.4.27)

$$\mathrm{Z}(u) = E(u) - \frac{E}{K}u, \text{ где } E = E(K).$$

16.27. ТЭТА-ФУНКЦИИ; РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ЯКОБИ q

16.27.1. $\vartheta_1(z, q) = \vartheta_1(z) = 2q^{1/4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)}\sin(2n+1)z$.

16.27.2. $\vartheta_2(z, q) = \vartheta_2(z) = 2q^{1/4}\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)}\cos(2n+1)z$.

16.27.3. $\vartheta_3(z, q) = \vartheta_3(z) = 1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz$.

16.27.4. $\vartheta_4(z, q) = \vartheta_4(z) = 1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz$.

Тэта-функции имеют важное значение, так как каждая из эллиптических функций Якоби может быть выражена как отношение двух тэта-функций (см. 16.36).

Данные формулы показывают, что тэта-функции зависят от аргумента z и параметра q, $|q| < 1$.

В 16.23 отмечено, что параметр Якоби имеет вид

$$q = e^{-\pi K'/K},$$

где K и iK' — четвертьпериоды эллиптических функций Якоби. Так как $q = q(m)$ определяется заданием параметра m, то тэта-функции можно рассматривать как функции от m и записывать

$$\vartheta_a(z, q) = \vartheta_a(z \mid m), \quad a = 1, 2, 3, 4.$$

Когда нет необходимости это подчеркивать, будем писать $\vartheta_a(z)$. Приведенные обозначения даются в [16.6].

Имеются различные обозначения тэта-функций, что нередко приводит к недоразумениям. Так, вышеприведенная функция $\vartheta_4(z)$ иногда обозначается как $\vartheta_0(z)$ или $\vartheta(z)$ (см. [16.6]). Иногда используется аргумент $u = 2Kz/\pi$.

16.28. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КВАДРАТАМИ ТЭТА-ФУНКЦИЙ

16.28.1. $\vartheta_1^2(z)\,\vartheta_4^2(0) = \vartheta_3^2(z)\,\vartheta_2^2(0) - \vartheta_2^2(z)\,\vartheta_3^2(0)$.

16.28.2. $\vartheta_2^2(z)\,\vartheta_4^2(0) = \vartheta_4^2(z)\,\vartheta_2^2(0) - \vartheta_1^2(z)\,\vartheta_3^2(0)$.

16.28.3. $\vartheta_3^2(z)\,\vartheta_4^2(0) = \vartheta_4^2(z)\,\vartheta_3^2(0) - \vartheta_1^2(z)\,\vartheta_2^2(0)$.

16.28.4. $\vartheta_4^2(z)\,\vartheta_4^2(0) = \vartheta_3^2(z)\,\vartheta_3^2(0) - \vartheta_2^2(z)\,\vartheta_2^2(0)$.

16.28.5. $\vartheta_2^4(0) + \vartheta_4^4(0) = \vartheta_3^4(0)$.

Отметим также важное соотношение

16.28.6. $\vartheta_1'(0) = \vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)$, или $\vartheta_1' = \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4$.

16.29. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ТЭТА-ФУНКЦИЙ

16.29.1. $$\frac{\vartheta_1'(u)}{\vartheta_1(u)} = \operatorname{ctg} u + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nu.$$

16.29.2. $$\frac{\vartheta_2'(u)}{\vartheta_2(u)} = -\operatorname{tg} u + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nu.$$

16.29.3. $$\frac{\vartheta_3'(u)}{\vartheta_3(u)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nu.$$

16.29.4. $$\frac{\vartheta_4'(u)}{\vartheta_4(u)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nu.$$

16.30. ЛОГАРИФМЫ ОТНОШЕНИЙ ТЭТА-ФУНКЦИЙ ОТ СУММ И РАЗНОСТЕЙ АРГУМЕНТОВ

16.30.1. $$\ln \frac{\vartheta_1(\alpha+\beta)}{\vartheta_1(\alpha-\beta)} = \ln \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n\alpha \sin 2n\beta.$$

16.30.2. $$\ln \frac{\vartheta_2(\alpha+\beta)}{\vartheta_2(\alpha-\beta)} = \ln \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n\alpha \sin 2n\beta.$$

16.30.3. $$\ln \frac{\vartheta_3(\alpha+\beta)}{\vartheta_3(\alpha-\beta)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2n\alpha \sin 2n\beta.$$

16.30.4. $$\ln \frac{\vartheta_4(\alpha+\beta)}{\vartheta_4(\alpha-\beta)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2n\alpha \sin 2n\beta.$$

Соответствующие выражения для $\beta = i\gamma$ получаются с помощью формул 4.3.55 и 4.3.56.

16.31. ОБОЗНАЧЕНИЯ ЯКОБИ ДЛЯ ТЭТА-ФУНКЦИЙ

16.31.1. $\Theta(u\,|\,m) = \Theta(u) = \vartheta_4(v)$, $v = \dfrac{\pi u}{2K}$.

16.31.2. $\Theta_1(u\,|\,m) = \Theta_1(u) = \vartheta_3(v) = \Theta(u+K)$.

16.31.3. $\mathrm{H}(u\,|\,m) = \mathrm{H}(u) = \vartheta_1(v)$.

16.31.4. $\mathrm{H}_1(u\,|\,m) = \mathrm{H}_1(u) = \vartheta_2(v) = \mathrm{H}(u+K)$.

16.32. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЭТА-ФУНКЦИИ ЯКОБИ $\Theta\,(u\,|\,m)$ С ПОМОЩЬЮ АРИФМЕТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО (А.Г.С.)

Процесс А.Г.С. (см. 17.6) формируется по начальным значениям

16.32.1. $a_0 = 1$, $b_0 = \sqrt{m_1}$, $c_0 = \sqrt{m}$

и оканчивается на N-м шаге, когда c_N равно нулю с заданной точностью. Находим φ_N в градусах по формуле

16.32.2. $$\varphi_N = 2^N a_N u \frac{180^\circ}{\pi}$$

и затем последовательно вычисляем $\varphi_{N-1}, \varphi_{N-2}, \ldots, \varphi_1, \varphi_0$, используя рекуррентное соотношение

16.32.3. $$\sin(2\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \frac{c_n}{a_n} \sin \varphi_n.$$

Тогда

16.32.4. $$\ln \Theta(u \mid m) = \frac{1}{2}\ln\frac{2m_1^{1/2}K(m)}{\pi} + \frac{1}{2}\ln\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_0)}{\cos\varphi_0} + \frac{1}{4}\ln\sec(2\varphi_0-\varphi_1) + \frac{1}{8}\ln\sec(2\varphi_1-\varphi_2) + \ldots + \frac{1}{2^{N+1}}\ln\sec(2\varphi_{N-1}-\varphi_N).$$

16.33. ДОБАВЛЕНИЕ ЧЕТВЕРТЬПЕРИОДОВ К АРГУМЕНТАМ ЭТА- И ТЭТА-ФУНКЦИЙ ЯКОБИ

u	$-u$	$u+K$	$u+2K$	$u+iK'$	$u+2iK'$	$u+K+iK'$	$u+2K+2iK'$
16.33.1. $H(u)$	$-H(u)$	$H_1(u)$	$-H(u)$	$iM(u)\,\Theta(u)$	$-N(u)\,H(u)$	$M(u)\,\Theta_1(u)$	$N(u)\,H(u)$
16.33.2. $H_1(u)$	$H_1(u)$	$-H(u)$	$-H_1(u)$	$M(u)\,\Theta_1(u)$	$N(u)\,H_1(u)$	$-iM(u)\,\Theta(u)$	$-N(u)\,H_1(u)$
16.33.3. $\Theta_1(u)$	$\Theta_1(u)$	$\Theta(u)$	$\Theta_1(u)$	$M(u)\,H_1(u)$	$N(u)\,\Theta_1(u)$	$iM(u)\,H(u)$	$N(u)\,\Theta_1(u)$
16.33.4. $\Theta(u)$	$\Theta(u)$	$\Theta_1(u)$	$\Theta(u)$	$iM(u)\,H(u)$	$-N(u)\,\Theta(u)$	$M(u)\,H_1(u)$	$-N(u)\,\Theta(u)$

$$M(u) = \left[\exp\left(-\frac{\pi i u}{2K}\right)\right]q^{-1/2},\quad N(u) = \left[\exp\left(-\frac{\pi i u}{K}\right)\right]q^{-1}.$$

Эта-функции Якоби $H(u)$ и $H_1(u)$ имеют период $4K$, тэта-функции Якоби $\Theta(u)$ и $\Theta_1(u)$ — период $2K$.

$2iK'$ является квазипериодом для всех четырех функций, т. е. при прибавлении к аргументу $2iK'$ функция приобретает множитель.

16.34. СВЯЗЬ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЯКОБИ С ТЭТА-ФУНКЦИЯМИ

$$\left(Z(u) = \frac{\partial}{\partial u}\ln\Theta(u)\right)$$

16.34.1. $$Z(u) = \frac{\pi}{2K}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} - \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}.$$

16.34.2. $$Z(u) = \frac{\pi}{2K}\frac{\vartheta_2'\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

16.34.3. $$Z(u) = \frac{\pi}{2K}\frac{\vartheta_3'\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} - m\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

16.34.4. $$Z(u) = \frac{\pi}{2K}\frac{\vartheta_4'\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}.$$

16.35. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЯКОБИ $Z(u|m)$ МЕТОДОМ АРИФМЕТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО (А.Г.С.)

Процесс А Г С. (см. 17.6) формируется по начальным значениям

16.35.1. $a_0 = 1,\quad b_0 = \sqrt{m_1},\quad c_0 = \sqrt{m}$

и оканчивается на N-м шаге, когда c_N равно нулю с заданной точностью. Находим φ_N в градусах по формуле

16.35.2. $\varphi_N = 2^N a_N u \dfrac{180°}{\pi}$

и затем последовательно вычисляем $\varphi_{N-1}, \varphi_{N-2}, \ldots, \varphi_1, \varphi_0$, используя рекуррентное соотношение

16.35.3. $\sin(2\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \dfrac{c_n}{a_n}\sin\varphi_n.$

Тогда

16.35.4. $Z(u|\,m) = c_1\sin\varphi_1 + c_2\sin\varphi_2 + \ldots + c_N\sin\varphi_N.$

16.36. ОБОЗНАЧЕНИЯ НЕВИЛЛЯ ДЛЯ ТЭТА-ФУНКЦИЙ

Тэта-функции в обозначениях Невилля определяются через тэта-функции Якоби (см. 16.31) следующим образом:

16.36.1. $\vartheta_s(u) = \dfrac{\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}'(0)}, \quad \vartheta_c(u) = \dfrac{\mathrm{H}(u+K)}{\mathrm{H}(K)},$

16.36.2. $\vartheta_d(u) = \dfrac{\Theta(u+K)}{\Theta(K)}, \quad \vartheta_n(u) = \dfrac{\Theta(u)}{\Theta(0)}.$

Если λ, μ — произвольные целые числа, то говорят, что *точки* $u_0 + 2\lambda K + 2\mu iK'$ *конгруэнтны точке* u_0.

$\vartheta_s(u)$ имеет нули в точках, конгруэнтных 0;
$\vartheta_c(u)$ имеет нули в точках, конгруэнтных K;
$\vartheta_n(u)$ имеет нули в точках, конгруэнтных iK';
$\vartheta_d(u)$ имеет нули в точках, конгруэнтных $K + iK'$.

Таким образом, индекс в обозначении функции $\vartheta_p(u)$ означает, что эта функция имеет нули в точках, соответствующих индексу на решетке 16.1.2, а постоянные, на которые делятся функции Якоби, обеспечивают равенство единице коэффициента при первом члене разложения этих функций в окрестности нуля. Поэтому эти функции обладают замечательным свойством: если p, q — любые две из букв s, c, n, d, то эллиптическая функция Якоби $\mathrm{pq}\,u$ задается равенством

16.36.3. $\mathrm{pq}\,u = \dfrac{\vartheta_p(u)}{\vartheta_q(u)}.$

Эти функции также обладают свойствами

16.36.4. $m_1^{-1/4}\ \vartheta_c(K-u) = \vartheta_s(u),$

16.36.5. $m_1^{-1/4}\ \vartheta_d(K-u) = \vartheta_n(u)$

для дополнительных аргументов u и $K-u$.

В терминах тэта-функций, определенных в 16.27, при $v = \pi u/(2K)$ имеем

16.36.6. $\vartheta_s(u) = \dfrac{2K\,\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}, \quad \vartheta_c(u) = \dfrac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)},$

16.36.7. $\vartheta_d(u) = \dfrac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)}, \quad \vartheta_n(u) = \dfrac{\vartheta_4(v)}{\vartheta_4(0)}.$

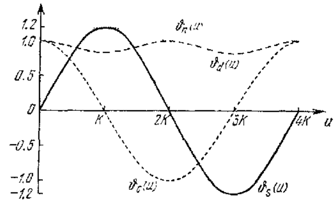


Рис. 16.4. Тэта-функции Невилля
$\vartheta_s(u)$, $\vartheta_c(u)$, $\vartheta_d(u)$, $\vartheta_n(u)$; $m = 1/2$.

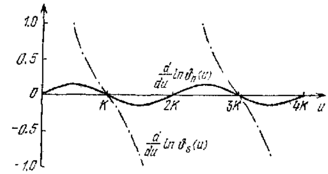


Рис. 16.5. Логарифмические производные тэта-функций Невилля
$\dfrac{d}{du}\ln\vartheta_s(u)$, $\dfrac{d}{du}\ln\vartheta_n(u)$; $m = 1/2$.

16.37. РАЗЛОЖЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$(q = q(m),\quad v = \pi u/(2K))$

16.37.1. $\vartheta_s(u) = \left(\dfrac{16q}{mm_1}\right)^{1/6} \sin v \prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2q^{2n}\cos 2v + q^{4n}).$

16.37.2. $\vartheta_c(u) = \left(\dfrac{16qm_1^{1/2}}{m}\right)^{1/6} \cos v \prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2q^{2n}\cos 2v + q^{4n}).$

16.37.3. $\vartheta_d(u) =$

$$= \left(\frac{mm_1}{16q}\right)^{1/12} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2q^{2n-1}\cos 2v + q^{4n-2}).$$

16.37.4. $\vartheta_n(u) =$

$$= \left(\frac{m}{16qm_1^2}\right)^{1/12} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2q^{2n-1}\cos 2v + q^{4n-2}).$$

16.38. РАЗЛОЖЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНЫЙ РЯД

Полагая $v = \pi u/(2K)$, получаем

16.38.1. $\vartheta_s(u) =$

$$= \left[\frac{2\pi q^{1/2}}{m^{1/2}m_1^{1/2}K}\right]^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)} \sin(2n+1)v,$$

16.38.2. $\vartheta_c(u) = \left[\dfrac{2\pi q^{1/2}}{m^{1/2}K}\right]^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \cos(2n+1)v,$

16.38.3. $\vartheta_d(u) = \left[\dfrac{\pi}{2K}\right]^{1/2}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nv\right\},$

16.38.4. $\vartheta_n(u) =$

$$= \left[\frac{\pi}{2m_1^{1/2}K}\right]^{1/2}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nv\right\},$$

16.38.5. $(2K/\pi)^{1/2} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots = \vartheta_3(0, q)$,

16.38.6 $2K'/\pi)^{1/2} = 1 + 2q_1 + 2q_1^4 + 2q_1^9 + \ldots = \vartheta_3(0,q_1)$, где q_1 — дополнительный параметр Якоби (см. 17.3.18),

16.38.7. $(2m^{1/2}K/\pi)^{1/2} =$

$$= 2q^{1/4}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \ldots) = \vartheta_2(0,\ q),$$

16.38.8. $(2m_1^{1/2}K/\pi)^{1/2} =$

$$= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots = \vartheta_4(0,\ )q.$$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Вычислить nc $(1.99650|\,0.64)$ с 4S.

Из табл. 17.1 имеем $u = 1.99650 = K + 0.001$. Пользуясь формулами 16.7, находим

$$\mathrm{nc}\,u = -m_1^{-1/2}/(u-K) + \ldots,$$

$\mathrm{nc}\,(K + 0.001\,|\,0.64) =$

$$= \frac{-(0.36)^{-1/2}}{0.001} + \ldots = -\frac{10\,000}{6} + \ldots = -1667 + \ldots$$

Так как следующий член разложения имеет порядок 0.001, значение -1667 верно с точностью 4S.

Пример 2. Используя понижающее преобразование Ландена, вычислить dn $(0.20|\,0.19)$ с 5D.

Здесь $m = 0.19$, $m_1^{1/2} = 0.9$. По формуле 16.12.1 находим

$$\mu = \left(\frac{1}{19}\right)^2,\quad 1 + \mu^{1/2} = \frac{20}{19},\quad v = 0.19.$$

Так как $\mu^2 = \left(\frac{1}{19}\right)^4 = 10^{-6}\cdot 7.67$ равно нулю с требуемой точностью (5 D), то, используя 16.12.4 и 16.13.3, получим

$$\mathrm{dn}\,(0.20\,|\,0.19) = \frac{\mathrm{dn}^2\left[0.19\left|\left(\frac{1}{19}\right)^2\right.\right] - \left(1 - \frac{1}{19}\right)}{\left(1 + \frac{1}{19}\right) - \mathrm{dn}^2\left[0.19\left|\left(\frac{1}{19}\right)^2\right.\right]},$$

$$\mathrm{dn}\left[0.19\left|\left(\frac{1}{19}\right)^2\right.\right] = 0.999951.$$

Отсюда

$$\mathrm{dn}\,(0.20\,|\,0.19) = 0.996253.$$

Пример 3. Используя повышающее преобразование Ландена, вычислить dn $(0.20|0.81)$ с 5D.

По формуле 16.14.1 $\mu = \dfrac{4(0.9)}{(1.9)^2} = \dfrac{360}{361}$, $\mu_1 = \left(\dfrac{1}{19}\right)^2$,

$1 + \mu_1^{1/2} = \dfrac{20}{19}$, $v = \dfrac{19}{20}\cdot 0.20 = 0.19$. Так как μ_1^2 равно нулю с требуемой точностью (5 D), то

$$\mathrm{dn}(0.20\,|\,0.81) = \frac{19}{20}\cdot\frac{\mathrm{dn}^2\left(0.19\left|\frac{360}{361}\right.\right) + \frac{1}{19}}{\mathrm{dn}\left(0.19\left|\frac{360}{361}\right.\right)}.$$

Используя 16.15.3, находим

$$\mathrm{dn}\left(0.19\left|\frac{360}{361}\right.\right) =$$

$$= \mathrm{sech}\,(0.19) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{361}\,\mathrm{th}\,(0.19)\times$$

$$\times\,\mathrm{sech}\,(0.19)\,[\mathrm{sh}\,(0.19)\,\mathrm{ch}\,(0.19) + 0.19] =$$

$$= 0.982218 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{361}\,(0.187746)\,(0.982218)\times$$

$$\times[(0.191145)\,(1.01810) + 0.19] =$$

$$= 0.982218 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{361}\,(0.184408)\,(0.384605) =$$

$$= 0.982218 + 0.000049 = 0.982267.$$

Таким образом,

$$\mathrm{dn}\,(0.20\,|\,0.81) = 0.98406.$$

Пример 4. Используя повышающее преобразование Ландена, вычислить cn $(0.20|\,0.81)$ с 6 D.

Параметры, вычисляемые по формуле 16.14.1, возьмем из примера 3.

Для вычисления cn $(0.20|\,0.81)$ по формуле 16.14.3 необходимо найти значение $\mathrm{dn}\left(0.19\left|\frac{360}{361}\right.\right)$, которое получается повторным применением преобразования Ландена, так как параметр $\mu_1^2 = 10^{-6}\cdot 7.67$, полученный при первом преобразовании, не удовлетворяет условиям заданной точности.

Таким образом, $\mathrm{dn}\left(0.19\left|\frac{360}{361}\right.\right) = 0.982267$. Подставляя найденные значения в 16.14.3 и присваивая результату знак в соответствии с графиком на рис. 16.1, будем иметь $\mathrm{cn}(0.20|0.81) = 0.980278$.

Пример 5. Используя метод А.Г.С., вычислить $\mathrm{dc}(0.672|0.36)$ с 4 D. Используя 16.9.6, получаем

$$\mathrm{dc}^2(0.672\,|\,0.36) = 0.36 + \frac{0.64}{1 - \mathrm{sn}^2(0.672\,|\,0.36)}.$$

Теперь вычисляем sn $(0.672|0.36)$ методом А.Г.С., изложенным в 16.4, 17.6.

n	a_n	b_n	c_n	$\frac{c_n}{a_n}$	φ_n	$\sin\varphi_n$	$\sin(2\varphi_{n-1}-\varphi_n)$	$2\varphi_{n-1}-\varphi_n$
0	1	0.8	0.6	0.6	0.65546	0.60952		
1	0.9	0.89443	0.1	0.11111	1.2069	0.93452	0.10383	0.10402
2	0.89721	0.89721	0.00279	0.00311	2.4117	0.66679	0.00207	0.00207
3	0.89721	0.89721	0.00000	0.00000	4.8234	−0.99384	0.00000	0.00000

$$\varphi_n = 2^n a_n u,\quad \varphi_3 = 2^3(0.89721)\,(0.672) = 4.8234.$$

Процесс продолжаем, пока c_n не будет нулем с точностью до пяти десятичных знаков. Затем в соответствии с 16.4 находим φ_0 и далее $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{dc} u$:

$$\varphi_0 = 0.65546,\quad \operatorname{sn} u = 0.60952,\quad \operatorname{dc} u = 1.1740.$$

Пример 6. Используя метод А.Г.С., вычислить $\Theta(0.6|0.36)$ с 5 D.

Применяя процедуру, изложенную в 16.32, 17.6 с начальными данными $a_0 = 1$, $b_0 = 0.8$, $c_0 = 0.6$, находим (значения a_n, b_n, c_n, $\frac{c_n}{a_n}$ взяты из примера 5)

n	φ_n	$\sin\varphi_n$	$\sin(2\varphi_{n-1}-\varphi_n)$	$2\varphi_{n-1}-\varphi_n$	$\sec(2\varphi_{n-1}-\varphi_n)$	$\frac{1}{2^{n+1}}\ln\sec(2\varphi_{n-1}-\varphi_n)$
0	0.58803	0.55472				
1	1.0780	0.88101	0.09789	0.09805	1.0048	0.00120
2	2.1533	0.83509	0.00260	0.00260	1.0000	0.00000
3	4.3066	−0.91879	0.00000	0.00000	1.0000	0.00000

Завершая вычисления по формуле 16.32.4, получаем

$$\ln\,\Theta(u|m) = -0.05734 + 0.02935 + 0.00120 = -0.02679,$$

$$\Theta(u|m) = 0.97357.$$

Использование рядов для вычисления $\Theta(u|m)$ является более эффективным.

Пример 7. Используя разложения в ряд по параметру Якоби $q = e^{-\pi K'/K}$, вычислить $\operatorname{cs}(0.53601\,62|0.09)$ с 7D.

Применим разложение 16.23.12 при $K(0.09) = 1.60804\,862$, $q = 0.00589\,414$, $v = \frac{\pi u}{2K} = \frac{\pi}{6} = 30°$. Так как q^4 мало по сравнению с $1\cdot 10^{-8}$, то с точностью 7D имеем

$$\operatorname{cs}(0.53601\,62|0.09) \doteq \frac{\pi}{2K}\operatorname{ctg} 30° - \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin 60°\right) = (0.97683\,3852)\,(1.73205\,081) - 3.90733\,541[(0.00003\,4740)\,(0.86602\,5404)] = 1.69180\,83.$$

Пример 8. Используя тэта-функции и табл. 16.1, вычислить

$$\operatorname{sn}(0.61802|0.5) \text{ с 5D.}$$

Здесь $K(0.5) = 1.85407$. Для входа в табл. 16.1 вычислим

$$\varepsilon = \frac{u}{K}90° = \frac{0.61802}{1.85407}\cdot 90° = 30°,$$

$$\sin^2\alpha = m = 0.5,\quad \alpha = \arcsin\sqrt{m} = 45°.$$

По формуле 16.36.3 и табл. 16.1 находим

$$\operatorname{sn}(0.61802|0.5) = \frac{\vartheta_s(u)}{\vartheta_n(u)} = \frac{\vartheta_s(\varepsilon\diagdown\alpha)}{\vartheta_n(\varepsilon\diagdown\alpha)} = \frac{\vartheta_s(30°\diagdown45°)}{\vartheta_n(30°\diagdown45°)} = \frac{0.59128}{1.04729} = 0.56458.$$

Пример 9. Используя тэта-функции и табл. 16.1, вычислить $\operatorname{sc}(0.61802|0.5)$ с 5D. Как и в предыдущем примере,

$$K(0.5) = 1.85407,\quad \varepsilon = 30°,\quad \alpha = 45°,$$

так что согласно 16.36.3

$$\operatorname{sc}(0.61802|0.5) = \frac{\vartheta_s(30°\diagdown45°)}{\vartheta_n(30°\diagdown45°)}.$$

Из табл. 16.1 имеем $\vartheta_s(30°\diagdown45°) = 0.59128$. Для вычисления $\vartheta_c(30°\diagdown45°)$ с помощью табл. 16.1 используем формулу 16.36.4, записанную в виде

$$(\sec\alpha)^{1/2}\vartheta_c(K-u) = \vartheta_s(u),$$

где

$$\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{m_1}}.$$

В этой формуле нужно положить

$$\varepsilon = 30° = \frac{K-u}{K}\cdot 90°,$$

тогда $u = 60°$.

Следовательно,

$$(\sec 45°)^{1/2}\vartheta_c(30°\diagdown45°) = \vartheta_s(60°\diagdown45°).$$

По табл. 16.1 находим

$$\vartheta_s(60^\circ\diagdown 45^\circ) = 1.02796.$$

Поэтому

$$\mathrm{sc}(0.61802\,|\,0.5) = \frac{0.59128}{1.02796}(\sec 45^\circ)^{1/2} = 0.68402.$$

Пример 10. Найти $\mathrm{sn}(0.75342\,|\,0.7)$ обратной интерполяцией в табл. 17.5.

Решение примера с объяснениями дано в гл. 17, пример 7.

Пример 11. Найти u, зная, что $\mathrm{cs}(u\,|\,0.5) = 0.75$. Из 16.9.4 имеем

$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{1}{1 + \mathrm{cs}^2 u}.$$

Поэтому

$$\mathrm{sn}^2(u\,|\,0.5) = 0.64,$$

$$\mathrm{sn}(u\,|\,0.5) = 0.8.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению аргумента u по данному значению $\mathrm{sn}(u\,|\,m)$ при известном m.

Если обозначить $\varphi = \mathrm{am}\, u$, то $\sin\varphi = \mathrm{sn}\, u = 0.8$, $\varphi = 0.9272952$, или $\varphi = 53.13010^\circ$. Далее, из табл. 17.5, учитывая, что $\sin^2\alpha = 1/2$, $\alpha = 45^\circ$, получаем

$$u = F(53.13010^\circ\diagdown 45^\circ) = 0.99391.$$

Используя полученное значение φ как начальное для метода А.Г.С., можно вычислить $F(\varphi\diagdown\alpha)$, как показано в 17.6. Этот метод является более эффективным, если требуется получить большее число значащих цифр или если α не является входным значением аргумента табл. 17.5.

Таблица 16.1. Тэта-функции

$$\vartheta_s(\varepsilon\backslash\alpha)$$

$\varepsilon\backslash\alpha$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	α/ε_1
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	90°
5	0.08715 5743	0.08732 1966	0.08782 4152	0.08867 3070	0.08988 7414	0.09149 5034	85
10	0.17364 8178	0.17397 9362	0.17497 9967	0.17667 1584	0.17909 1708	0.18229 6223	80
15	0.25881 9045	0.25931 2677	0.26080 4191	0.26332 6099	0.26693 4892	0.27171 4833	75
20	0.34202 0143	0.34267 2476	0.34464 3695	0.34797 7361	0.35274 9211	0.35907 2325	70
25	0.42261 8262	0.42342 4343	0.42586 0446	0.42998 1306	0.43588 2163	0.44370 5382	65
30	0.50000 0000	0.50095 3708	0.50383 6358	0.50871 3952	0.51570 1435	0.52497 0857	60
35	0.57357 6436	0.57467 0526	0.57797 7994	0.58357 6134	0.59159 9683	0.60225 0597	55
40	0.64278 7610	0.64401 3768	0.64772 1085	0.65399 8067	0.66299 9145	0.67495 6130	50
45	0.70710 6781	0.70845 5688	0.71253 4820	0.71944 3681	0.72935 6053	0.74253 3161	45
50	0.76604 4443	0.76750 5843	0.77192 5893	0.77941 4712	0.79016 4790	0.80446 5863	40
55	0.81915 2044	0.82071 4821	0.82544 2256	0.83345 4505	0.84496 1783	0.86028 0899	35
60	0.86602 5404	0.86767 7668	0.87267 6562	0.88115 1505	0.89332 9083	0.90955 1166	30
65	0.90630 7787	0.90803 6964	0.91326 9273	0.92214 2410	0.93489 7610	0.95189 9199	25
70	0.93969 2621	0.94148 5546	0.94691 1395	0.95611 4956	0.96935 0025	0.98700 0216	20
75	0.96592 5826	0.96776 8848	0.97334 6839	0.98281 0311	0.99642 3213	1.01458 4761	15
80	0.98480 7753	0.98668 6836	0.99237 4367	1.00202 5068	1.01591 0350	1.03444 0908	10
85	0.99619 4698	0.99809 5528	1.00384 9133	1.01361 2807	1.02766 2527	1.04641 6011	5
90	1.00000 0000	1.00190 8098	1.00768 3786	1.01748 5224	1.03158 9925	1.05041 7974	0

$\varepsilon\backslash\alpha$	30°	35°	40°	45°	50°	55°	α/ε_1
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	90°
5	0.09353 4894	0.09606 0073	0.09914 2353	0.10287 9331	0.10740 5819	0.11291 2907	85
10	0.18636 3367	0.19139 9811	0.19754 9961	0.20501 0420	0.21405 3194	0.22506 4618	80
15	0.27778 4006	0.28530 3629	0.29449 2321	0.30564 8349	0.31918 5434	0.33569 3043	75
20	0.36710 5393	0.37706 5455	0.38924 7478	0.40405 4995	0.42204 9614	0.44403 4769	70
25	0.45365 1078	0.46599 3521	0.48110 6437	0.49950 2749	0.52189 9092	0.54932 5515	65
30	0.53676 4494	0.55141 5176	0.56937 7735	0.59127 8602	0.61799 6720	0.65080 1843	60
35	0.61581 3814	0.63268 1725	0.65339 2178	0.67868 8658	0.70961 8904	0.74770 4387	55
40	0.69019 6708	0.70917 3264	0.73250 7761	0.76106 3101	0.79606 0581	0.83928 2749	50
45	0.75934 4980	0.78030 3503	0.80611 4729	0.83776 1607	0.87664 1114	0.92480 2089	45
50	0.82272 9031	0.84552 4503	0.87364 0739	0.90817 9128	0.95071 1025	1.00355 1297	40
55	0.87986 2121	0.90433 1298	0.93455 6042	0.97175 1955	1.01765 9399	1.07485 2509	35
60	0.93030 4365	0.95626 6326	0.98837 8598	1.02796 3895	1.07692 1759	1.13807 1621	30
65	0.97366 6431	1.00092 3589	1.03467 8996	1.07635 2410	1.12798 8100	1.19262 9342	25
70	1.00961 2870	1.03795 2481	1.07308 5074	1.11651 4503	1.17041 0792	1.23801 2299	20
75	1.03786 5044	1.06706 1179	1.10328 6100	1.14811 2152	1.20381 2008	1.27378 3626	15
80	1.05820 3585	1.08801 9556	1.12503 6391	1.17087 7087	1.22789 0346	1.29959 2533	10
85	1.07047 0366	1.10066 1511	1.13815 8265	1.18461 4727	1.24242 6337	1.31518 2322	5
90	1.07456 9932	1.10488 6686	1.14254 4218	1.18920 7115	1.24728 6586	1.32039 6454	0

$\varepsilon\backslash\alpha$	60°	65°	70°	75°	80°	85°	α/ε_1
0°	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	0.00000 0000	90°
5	0.11968 1778	0.12814 8474	0.13904 1489	0.15372 0475	0.17522 3596	0.21321 7690	85
10	0.23861 4577	0.25558 9564	0.27747 6571	0.30706 5715	0.35063 9262	0.42844 3440	80
15	0.35604 4091	0.38160 3032	0.41467 2740	0.45960 9511	0.52633 5260	0.64743 4941	75
20	0.47120 6153	0.50544 4270	0.54994 7578	0.61082 7702	0.70219 9693	0.87146 4767	70
25	0.58332 3727	0.62633 5361	0.68254 9331	0.76005 8920	0.87783 8622	1.10111 6239	65
30	0.69160 6043	0.74345 9784	0.81164 3704	0.90647 6281	1.05251 4778	1.33612 3616	60
35	0.79525 0355	0.85596 1570	0.93630 8263	1.04907 2506	1.22511 1680	1.57526 8297	55
40	0.89344 6594	0.96294 9380	1.05553 5305	1.18666 0037	1.39412 6403	1.81633 9939	50
45	0.98538 4972	1.06350 5669	1.16824 3466	1.31788 6740	1.55769 2334	2.05616 7815	45
50	1.07026 6403	1.15670 0687	1.27329 7730	1.44126 6644	1.71363 1283	2.29072 3417	40
55	1.14731 5349	1.24161 0747	1.36953 6895	1.55522 4175	1.85953 2258	2.51529 0558	35
60	1.21579 4546	1.31733 9855	1.45580 7011	1.65814 9352	1.99285 2358	2.72469 4161	30
65	1.27502 0900	1.38304 3549	1.53099 8883	1.74846 0610	2.11103 3523	2.91357 4159	25
70	1.32438 1718	1.43795 3601	1.59408 7380	1.82467 1332	2.21162 7685	3.07668 6743	20
75	1.36335 0417	1.48140 2159	1.64417 0149	1.88545 5864	2.29242 2061	3.20921 2227	15
80	1.39150 0813	1.51284 3876	1.68050 3336	1.92971 0721	2.35155 6149	3.30704 7313	10
85	1.40851 9209	1.53187 4716	1.70253 2036	1.95660 6998	2.38762 2438	3.36705 9918	5
90	1.41421 3562	1.53824 6269	1.70991 3565	1.96563 0511	2.39974 3837	3.38728 7004	0

$$\sqrt{\sec\alpha}\,\vartheta_c(\varepsilon_1\backslash\alpha)$$

$$\varepsilon^\circ=\frac{u}{K}90^\circ \qquad \varepsilon_1^\circ=90^\circ-\varepsilon^\circ \qquad \alpha=\arcsin\sqrt{m} \qquad \vartheta_s(u|m)=\vartheta_s(\varepsilon^\circ\backslash\alpha^\circ)$$

При вычислении эллиптических функций при помощи тэта-функций, когда модулярный угол α превышает 60°, используется понижающее преобразование Ландена 16.12, приводящее к меньшим модулярным углам.

Взято из [16.7].

Таблица 16.1. Тэта-функции

$\vartheta_n(\varepsilon\backslash\alpha)$

$\varepsilon\backslash\alpha$	0°	5°	10°	15°	20°	25	α/ε_1
0°	1	1.00000 00000	1.00000 00000	1.00000 00000	1.00000 00000	1.00000 00000	90°
5	1	1.00001 44942	1.00005 83670	1.00013 28199	1.00023 99605	1.00038 29783	85
10	1	1.00005 75362	1.00023 16945	1.00052 72438	1.00095 25510	1.00152 02770	80
15	1	1.00012 78184	1.00051 47160	1.00117 12875	1.00211 61200	1.00337 73404	75
20	1	1.00022 32051	1.00089 88322	1.00204 53820	1.00369 53131	1.00589 77438	70
25	1	1.00034 07982	1.00137 23717	1.00312 29684	1.00564 21475	1.00900 49074	65
30	1	1.00047 70246	1.00192 09464	1.00437 13049	1.00789 74700	1.01260 44231	60
35	1	1.00062 77451	1.00252 78880	1.00575 24612	1.01039 27539	1.01658 69227	55
40	1	1.00078 83803	1.00317 47551	1.00722 44718	1.01305 21815	1.02083 14013	50
45	1	1.00095 40492	1.00384 18928	1.00874 26104	1.01579 49474	1.02520 88930	45
50	1	1.00111 97181	1.00450 90305	1.01026 07491	1.01853 77143	1.02958 63905	40
55	1	1.00128 03532	1.00515 58975	1.01173 27599	1.02119 71444	1.03383 08852	35
60	1	1.00143 10738	1.00576 28392	1.01311 39167	1.02369 24323	1.03781 34098	30
65	1	1.00156 73002	1.00631 14139	1.01436 22536	1.02594 77596	1.04141 29561	25
70	1	1.00168 48932	1.00678 49535	1.01543 98405	1.02789 45992	1.04452 01522	20
75	1	1.00178 02800	1.00716 90696	1.01631 39354	1.02947 37972	1.04704 05862	15
80	1	1.00185 05621	1.00745 20912	1.01695 79795	1.03063 73701	1.04889 76746	10
85	1	1.00189 36042	1.00762 54187	1.01735 24037	1.03134 99632	1.05003 49895	5
90	1	1.00190 80984	1.00768 37857	1.01748 52237	1.03158 99246	1.05041 79735	0

$\varepsilon\backslash\alpha$	30°	35°	40°	45°	50°	55°	α/ε_1
0°	1.00000 00000	1.00000 00000	1.00000 00000	1.00000 00000	1.00000 00000	1.00000 00000	90°
5	1.00056 64294	1.00079 66833	1.00108 26253	1.00143 67802	1.00187 71775	1.00243 05914	85
10	1.00224 85079	1.00316 25308	1.00429 76203	1.00570 35065	1.00745 17850	1.00964 88003	80
15	1.00499 51300	1.00702 56701	1.00954 73402	1.01267 06562	1.01655 47635	1.02143 61311	75
20	1.00872 28461	1.01226 87413	1.01667 23379	1.02212 67193	1.0287[illegible] 00179	1.03743 56974	70
25	1.01331 83978	1.01873 24599	1.02545 62012	1.03378 46028	1.04414 27466	1.05716 29130	65
30	1.01864 21583	1.02622 04548	1.03563 21191	1.04729 03271	1.06179 07561	1.08002 00285	60
35	1.02453 23743	1.03450 52308	1.04689 09786	1.06223 37524	1.08131 84270	1.10531 40947	55
40	1.03081 00797	1.04333 50787	1.05889 07481	1.07816 10137	1.10213 29153	1.13227 78297	50
45	1.03728 45330	1.05244 17208	1.07126 68617	1.09458 82886	1.12360 21058	1.16009 27802	45
50	1.04375 90125	1.06154 84606	1.08364 32917	1.11101 64844	1.14507 378[illegible]2	1.18791 40899	40
55	1.05003 67930	1.07037 85902	1.09564 39724	1.12694 63970	1.16589 54205	1.21489 61356	35
60	1.05592 71242	1.07866 37978	1.10690 42279	1.14189 38846	1.18543 40490	1.24021 82552	30
65	1.06125 10260	1.08615 23221	1.11708 18582	1.15540 45920	1.20309 54999	1.26310 97835	25
70	1.06584 67280	1.09261 66042	1.12586 75438	1.16706 77783	1.21834 25328	1.28287 36204	20
75	1.06957 45853	1.09786 02047	1.13299 42539	1.17652 88244	1.23071 12287	1.29890 75994	15
80	1.07232 13226	1.10172 37756	1.13824 53698	1.18350 00363	1.23982 51648	1.31072 29838	10
85	1.07400 34764	1.10408 99048	1.14146 12760	1.18776 94140	1.24540 69243	1.31795 95033	5
90	1.07456 99318	1.10488 66859	1.14254 42177	1.18920 71150	1.24728 65857	1.32039 64540	0

$\varepsilon\backslash\alpha$	60°	65°	70°	75°	80°	85°	α/ε_1
0°	1.00000 00000	1.00000 00000	1.00000 00000	1.00000 00000	1.00000 00000	1.00000 00000	90°
5	1.00313 85295	1.00406 92257	1.00534 44028	1.00720 88997	1.01026 06485	1.01663 88247	85
10	1.01245 94672	1.01615 50083	1.02121 95717	1.02862 79374	1.04076 43440	1.06618 38299	80
15	1.02768 16504	1.03589 51569	1.04715 56657	1.06363 90673	1.09068 07598	1.14751 59063	75
20	1.04834 57003	1.06269 75825	1.08238 38086	1.11122 86903	1.15864 11101	1.25875 62174	70
25	1.07382 76019	1.09575 73598	1.12585 71388	1.17001 24008	1.24276 19421	1.39725 25218	65
30	1.10335 71989	1.13408 00433	1.17627 97795	1.23826 96285	1.34068 05139	1.55957 26706	60
35	1.13604 11010	1.17651 06705	1.23214 31946	1.31398 80140	1.44960 33094	1.74151 57980	55
40	1.17088 93642	1.22176 77148	1.29176 91861	1.39491 71251	1.56636 90138	1.93815 19599	50
45	1.20684 51910	1.26848 10938	1.35335 85717	1.47863 07744	1.68752 66770	2.14389 95792	45
50	1.24281 67937	1.31523 31927	1.41504 43413	1.56259 67789	1.80942 88493	2.35264 71220	40
55	1.27771 04815	1.36060 17261	1.47494 78592	1.64425 25175	1.92833 82823	2.55792 12198	35
60	1.31046 39783	1.40320 31647	1.53123 64694	1.72108 41609	2.04054 54606	2.75309 84351	30
65	1.34007 89457	1.44173 53793	1.58218 06891	1.79070 70015	2.14249 29245	2.93165 25995	25
70	1.36565 16965	1.47501 81348	1.62620 90720	1.85094 39670	2.23090 12139	3.08742 47870	20
75	1.38640 11169	1.50203 00916	1.66195 87940	1.89989 92030	2.30289 04563	3.21489 91220	15
80	1.40169 28947	1.52194 10514	1.68832 00831	1.93602 35909	2.35609 12550	3.30946 52989	10
85	1.41105 92570	1.53413 83232	1.70447 27784	1.95816 92561	2.38873 86793	3.36764 82512	5
90	1.41421 35624	1.53824 62687	1.70991 35651	1.96563 05108	2.39974 38370	3.38728 70037	0

$\sqrt{\sec\alpha}\,\vartheta_d(\varepsilon_1\backslash\alpha)$

$\varepsilon^\circ=\frac{u}{K}90^\circ$ $\quad\varepsilon_1^\circ=90^\circ-\varepsilon^\circ$ $\quad\alpha=\arcsin\sqrt{m}$ $\quad\vartheta_n(u|m)=\vartheta_n(\varepsilon^\circ\backslash\alpha^\circ)$

При вычислении эллиптических функций при помощи тэта-функций, когда модулярный угол α превышает 60°, используется понижающее преобразование Ландена 16.12, приводящее к меньшим модулярным углам.

Взято из [16.7].

Таблица 16.2. Логарифмические производные тэта-функций

$$\frac{d}{du}\ln\vartheta_s(u)=f(\varepsilon\backslash\alpha)$$

$\varepsilon\backslash\alpha$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	α/ε_1
0°	∞	∞	∞	∞	∞	∞	90°
5	11.43005	11.40829	11.34306	11.23449	11.08275	10.88811	85
10	5.67128	5.66049	5.62812	5.57427	5.49902	5.40253	80
15	3.73205	3.72495	3.70365	3.66823	3.61876	3.55536	75
20	2.74748	2.74225	2.72658	2.70051	2.66414	2.61756	70
25	2.14451	2.14043	2.12820	2.10787	2.07952	2.04325	65
30	1.73205	1.72875	1.71888	1.70248	1.67962	1.65041	60
35	1.42815	1.42543	1.41729	1.40378	1.38497	1.36096	55
40	1.19175	1.18949	1.18270	1.17143	1.15577	1.13581	50
45	1.00000	0.99810	0.99240	0.98296	0.96985	0.95315	45
50	0.83910	0.83750	0.83273	0.82481	0.81383	0.79987	40
55	0.70021	0.69888	0.69489	0.68830	0.67915	0.66754	35
60	0.57735	0.57625	0.57297	0.56754	0.56001	0.55047	30
65	0.46631	0.46542	0.46277	0.45839	0.45232	0.44464	25
70	0.36397	0.36328	0.36121	0.35779	0.35306	0.34708	20
75	0.26795	0.26744	0.26592	0.26340	0.25992	0.25553	15
80	0.17633	0.17599	0.17499	0.17334	0.17105	0.16816	10
85	0.08749	0.08732	0.08683	0.08600	0.08487	0.08344	5
90	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0

$\varepsilon\backslash\alpha$	30°	35°	40°	45°	50°	55°	α/ε_1
0°	∞	∞	∞	∞	∞	∞	90°
5	10.65083	10.37113	10.04914	9.68479	9.27764	8.82657	85
10	5.28496	5.14645	4.98711	4.80696	4.60585	4.38332	80
15	3.47816	3.38730	3.28290	3.16502	3.03365	2.88859	75
20	2.56090	2.49430	2.41789	2.33179	2.23605	2.13062	70
25	1.99919	1.94749	1.88828	1.82172	1.74793	1.66695	65
30	1.61498	1.57348	1.52607	1.47292	1.41419	1.35001	60
35	1.33189	1.29791	1.25919	1.21591	1.16828	1.11647	55
40	1.11167	1.08352	1.05154	1.01592	0.97687	0.93462	50
45	0.93301	0.90958	0.88302	0.85355	0.82139	0.78679	45
50	0.78307	0.76355	0.74151	0.71714	0.69066	0.66232	40
55	0.65359	0.63743	0.61923	0.59918	0.57749	0.55441	35
60	0.53902	0.52579	0.51093	0.49462	0.47705	0.45846	30
65	0.43543	0.42482	0.41292	0.39991	0.38595	0.37125	25
70	0.33992	0.33169	0.32248	0.31242	0.30168	0.29042	20
75	0.25028	0.24424	0.23751	0.23017	0.22235	0.21419	15
80	0.16471	0.16076	0.15634	0.15155	0.14645	0.14114	10
85	0.08173	0.07977	0.07759	0.07522	0.07270	0.07009	5
90	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0

$\varepsilon\backslash\alpha$	60°	65°	70°	75°	80°	85°	α/ε_1
0°	∞	∞	∞	∞	∞	∞	90°
5	8.32941	7.78280	7.17654	6.49756	5.71041	4.71263	85
10	4.13843	3.86930	3.57238	3.24056	2.85790	2.37760	80
15	2.72935	2.55490	2.36323	2.15026	1.90678	1.60605	75
20	2.01530	1.88950	1.75208	1.60057	1.42943	1.22261	70
25	1.57876	1.48308	1.37931	1.26603	1.13996	0.99169	65
30	1.28047	1.20552	1.12492	1.03795	0.94288	0.83453	60
35	1.06066	1.00096	0.93737	0.86969	0.79715	0.71737	55
40	0.88940	0.84142	0.79086	0.73784	0.68225	0.62344	50
45	0.75000	0.71131	0.67101	0.62941	0.58682	0.54358	45
50	0.63242	0.60125	0.56918	0.53662	0.50411	0.47247	40
55	0.53023	0.50526	0.47987	0.45454	0.42988	0.40690	35
60	0.43911	0.41932	0.39943	0.37992	0.36140	0.34488	30
65	0.35605	0.34063	0.32532	0.31054	0.29684	0.28513	25
70	0.27885	0.26719	0.25574	0.24484	0.23497	0.22685	20
75	0.20584	0.19749	0.18935	0.18170	0.17490	0.16949	15
80	0.13572	0.13034	0.12512	0.12026	0.11601	0.11272	10
85	0.06742	0.06478	0.06224	0.05988	0.05784	0.05628	5
90	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0

$$\frac{d}{du}\ln\vartheta_c(u)=-f(\varepsilon_1\backslash\alpha)$$

При вычислении эллиптических функций при помощи тэта-функций, когда модулярный угол α превышает 60°, используется понижающее преобразование Ландена 16.12, приводящее к меньшим модулярным углам.

Таблица 16.2. Логарифмические производные тэта-функций

$$\frac{d}{du}\ln \vartheta_n(u)=g(\varepsilon\backslash\alpha)$$

$\varepsilon\backslash\alpha$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	α/ε_1
0°	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	90°
5	0	0.000331	0.001324	0.002984	0.005318	0.008337	85
10	0	0.000651	0.002607	0.005875	0.010466	0.016401	80
15	0	0.000952	0.003811	0.008583	0.015283	0.023933	75
20	0	0.001224	0.004897	0.011024	0.019616	0.030690	70
25	0	0.001458	0.005833	0.013124	0.023332	0.036462	65
30	0	0.001649	0.006591	0.014819	0.026318	0.041075	60
35	0	0.001788	0.007147	0.016057	0.028487	0.044394	55
40	0	0.001874	0.007486	0.016804	0.029776	0.046332	50
45	0	0.001903	0.007596	0.017037	0.030154	0.046846	45
50	0	0.001873	0.007476	0.016753	0.029616	0.045938	40
55	0	0.001787	0.007129	0.015962	0.028185	0.043654	35
60	0	0.001647	0.006566	0.014691	0.025912	0.040077	30
65	0	0.001457	0.005805	0.012979	0.022871	0.035328	25
70	0	0.001222	0.004868	0.010879	0.019154	0.029556	20
75	0	0.000951	0.003786	0.008455	0.014877	0.022935	15
80	0	0.000650	0.002589	0.005780	0.010165	0.015661	10
85	0	0.000330	0.001314	0.002933	0.005157	0.007942	5
90	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0

$\varepsilon\backslash\alpha$	30°	35°	40°	45°	50°	55°	α/ε_1
0°	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	90°
5	0.012059	0.016511	0.021734	0.027787	0.034760	0.042791	85
10	0.023711	0.032444	0.042671	0.054498	0.068087	0.083685	80
15	0.034569	0.047248	0.062057	0.079124	0.098650	0.120939	75
20	0.044277	0.060427	0.079221	0.100783	0.125308	0.153099	70
25	0.052528	0.071558	0.093605	0.118758	0.147169	0.179081	65
30	0.059074	0.080308	0.104784	0.132533	0.163627	0.198206	60
35	0.063730	0.086442	0.112477	0.141791	0.174358	0.210188	55
40	0.066384	0.089827	0.116544	0.146411	0.179298	0.215082	50
45	0.066987	0.090424	0.116978	0.146447	0.178606	0.213212	45
50	0.065561	0.088287	0.113888	0.142097	0.172615	0.205102	40
55	0.062183	0.083549	0.107483	0.133678	0.161784	0.191402	35
60	0.056989	0.076408	0.098051	0.121592	0.146658	0.172831	30
65	0.050157	0.067122	0.085943	0.106302	0.127835	0.150136	25
70	0.041905	0.055989	0.071553	0.088310	0.105932	0.124058	20
75	0.032483	0.043344	0.055309	0.068143	0.081578	0.095321	15
80	0.022163	0.029545	0.037660	0.046339	0.055395	0.064622	10
85	0.011235	0.014968	0.019067	0.023443	0.028000	0.032631	5
90	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0

$\varepsilon\backslash\alpha$	60°	65°	70°	75°	80°	85°	α/ε_1
0°	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	90°
5	0.052098	0.063034	0.076222	0.092860	0.115687	0.153481	85
10	0.101680	0.122704	0.147856	0.179233	0.221544	0.289421	80
15	0.146471	0.176024	0.210938	0.253725	0.309882	0.395712	75
20	0.184635	0.220691	0.262588	0.312762	0.376371	0.467893	70
25	0.214885	0.255225	0.301193	0.354775	0.420046	0.507818	65
30	0.236514	0.278976	0.326329	0.379918	0.442452	0.520777	60
35	0.249349	0.292010	0.338517	0.389553	0.446532	0.512966	55
40	0.253651	0.294931	0.338908	0.385698	0.435687	0.490013	50
45	0.250000	0.288691	0.328990	0.370590	0.413176	0.456422	45
50	0.239181	0.274426	0.310353	0.346389	0.381811	0.415539	40
55	0.222085	0.253326	0.284538	0.315020	0.343874	0.369741	35
60	0.199639	0.226549	0.252950	0.278119	0.301140	0.320668	30
65	0.172751	0.195171	0.216820	0.237026	0.254956	0.269431	25
70	0.142285	0.160167	0.177204	0.192823	0.206331	0.216780	20
75	0.109049	0.122405	0.134996	0.146375	0.156015	0.163217	15
80	0.073794	0.082664	0.090960	0.098382	0.104574	0.109083	10
85	0.037222	0.041645	0.045763	0.049423	0.052449	0.054618	5
90	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0

$$\frac{d}{du}\ln \vartheta_d(u)=-g(\varepsilon_1\backslash\alpha)$$

При вычислении эллиптических функций при помощи тэта-функций, когда модулярный угол α превышает 60°, используется понижающее преобразование Ландена 16.12, приводящее к меньшим модулярным углам.

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

16.1. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1955, V. 3. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1967, Т. III.

16.2. King L. V. On the direct numerical calculation of elliptic functions and integrals. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1924.

16.3. Magnus W., Oberhettinger F. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. — N.Y.: Chelsea Publishing Co., 1949.

16.4. Neville E. H. Jacobian elliptic functions. — L.: Oxford Univ. Press, 1951.

16.5. Tricomi F. Elliptische Funktionen. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1948.

16.6. Whittaker E. T., Watson G. N. A course of modern analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952, Ch. 20—22. Русский перевод: Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1963, Т. II

Таблицы

16.7. Adams E. P., Hippisley R. L. Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions. — Washington: Smithsonian Institution, 1957.

16.8. Hoüel J. — Recueil de formules et de tables numériques. P.: Gauthier-Villars, 1901.

16.9. Jahnke E., Emde F. Tables of functions. — N.Y.: Dover Publications, 1945. Русский перевод: Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

6.10. Milne-Thomson L. M. Die elliptischen Funktionen von Jacobi. — B.: Julius Springer, 1931. Украинский перевод: Мiлн-Томсон Л. М. Елiптiчнi функцii Якобi, пятизначнi таблицi sn u, cn u, dn u. — Харькiв: Держ. наук.-техн. вид-в Укр., 1933.

16.11. Milne-Thomson L. M. Jacobian elliptic function tables. — N.Y.: Dover Publications, 1956.

16.12. Spenceley G. W., Spenceley R. M. Smithsonian elliptic function tables. — Washington, 1947. — (Smithsonian Miscellaneous Collection, V. 109).

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

16.13. Ветчинкин В. П. Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций. — М.: Изд-во Военно-воздушной академии РККА, 1935.

16.14. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. — М.: Изд-во АН СССР, 1941.

16.15. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.

16.16. Ломкаци Ц. Д. Таблицы эллиптической функции Вейерштрасса. — М.: ВЦ АН СССР, 1967. — Теоретическая часть В. М. Белякова и К. А. Карпова.

16.17. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. — М.: ОНТИ, 1936.

16.18. Шулер М., Гебелейн Х. Таблицы эллиптических функций. — М.: ВЦ АН СССР, 1961. — (БМТ; Вып. 13).

16.19. Fettis H. E., Caslin J. C. Elliptic functions for complex arguments. — Office of Aerospace Res. U.S. Air Force, 1967.

16.20. Fettis H. E., Caslin J. C. Ten place tables of the Jacobian elliptic functions. — Office of Aerospace Res. U.S. Air Force, 1965.

Глава 17

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Л. МИЛН-ТОМСОН

СОДЕРЖАНИЕ

17.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Если $R(x, y)$ — рациональная функция от x и y, где y^2 является многочленом третьей или четвертой степени от x, то

17.1.1. $\int R(x, y)\,dx$

называется *эллиптическим*.

Эллиптический интеграл в общем случае не выражается через элементарные функции. Исключение составляют случаи:

(a) когда $R(x, y)$ не содержит нечетных степеней y;

(b) когда многочлен y^2 равен произведению двух равных квадратных трехчленов

Эти случаи здесь не рассматриваются.

Подставляя вместо четных степеней y их выражения через многочлены от x, обозначаемые через $p_s(x)$ (s не является показателем степени многочлена), получим (см. [17.7])

$$R(x, y) = \frac{p_1(x) + yp_2(x)}{p_3(x) + yp_4(x)} = \frac{[p_1(x) + yp_2(x)][p_3(x) - yp_4(x)]y}{\{[p_3(x)]^2 - y^2[p_4(x)]^2\}y} = \frac{p_5(x) + yp_6(x)}{yp_7(x)} = R_1(x) + \frac{R_2(x)}{y},$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — рациональные функции от x.

Выделяя из $R_2(x)$ целую часть и разлагая оставшуюся правильную дробь на простые (см. [17.22]), находим

$$\int R(x, y)\,dx = \int R_1(x)\,dx + \sum_s A_s \int x^s y^{-1}\,dx + \sum_{s,m} B_{s\,m} \int [(x - c_m)^s y]^{-1}\,dx,$$

где c_m могут быть и комплексными числами.

Рекуррентные формулы

Пусть имеют место соотношения

17.1.2. $y^2 = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ $\quad (|a_0| + |a_1| \neq 0)$,

$$y^2 = b_0(x - c)^4 + b_1(x - c)^3 + b_2(x - c)^2 + b_3(x - c) + b_4 \quad (|b_0| + |b_1| \neq 0),$$

17.1.3. $I_s = \int x^s y^{-1}\,dx, \quad J_s = \int [y(x - c)^s]^{-1}\,dx.$

Интегрируя первые производные произведений yx^s и $y(x - c)^{-s}$, получим рекуррентные формулы

17.1.4. $(s + 2)\,a_0 I_{s+3} + \frac{a_1}{2}(2s + 3)\,I_{s+2} + a_2(s + 1)\,I_{s+1} + \frac{a_3}{2}(2s + 1)\,I_s + sa_4 I_{s-1} = x^s y \quad (s = 0, 1, 2, \ldots)$,

17.1.5. $(2 - s)\,b_0 J_{s-3} + \frac{b_1}{2}(3 - 2s)\,J_{s-2} + b_2(1 - s)J_{s-1} + \frac{b_3}{2}(1 - 2s)\,J_s - sb_4 J_{s+1} = y(x - c)^{-s} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$.

С помощью этих формул и известных преобразований (см. примеры 1 и 2) любой эллиптический интеграл можно выразить через интеграл от рациональной функции и три канонические формы эллиптических интегралов.

17.2. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

Определения

17.2.1. $m = \sin^2\alpha$;

m — параметр, α — модулярный угол.

17.2.2. $x = \sin\varphi = \operatorname{sn} u$.

17.2.3. $\cos\varphi = \operatorname{cn} u$.

17.2.4. $(1 - m\sin^2\varphi)^{1/2} = \operatorname{dn} u = \Delta(\varphi)$ — дельта-амплитуда.

17.2.5. $\varphi = \arcsin(\operatorname{sn} u) = \operatorname{am} u$ — амплитуда.

Эллиптический интеграл первого рода

17.2.6. $F(\varphi\backslash\alpha) = F(\varphi\,|\,m) = \int\limits_0^\varphi (1 - \sin^2\alpha\sin^2\theta)^{-1/2}\,d\theta$,

17.2.7. $F(\varphi\backslash\alpha) = F(\varphi\,|\,m) = \int\limits_0^x [(1 - t^2)(1 - mt^2)]^{-1/2}\,dt$,

$$F(\varphi\backslash\alpha) = F(\varphi\,|\,m) = \int\limits_0^u dw = u.$$

Эллиптический интеграл второго рода

17.2.8. $E(\varphi\backslash\alpha) = E(u\,|\,m) = \int\limits_0^x (1 - t^2)^{-1/2}(1 - mt^2)^{1/2}\,dt$.

17.2.9. $E(\varphi\backslash\alpha) = E(u\,|\,m) = \int\limits_0^\varphi (1 - \sin^2\alpha\sin^2\theta)^{1/2}\,d\theta$.

17.2.10. $E(\varphi\backslash\alpha) = E(u\,|\,m) = \int\limits_0^u \operatorname{dn}^2 w\,dw$.

17.2.11. $E(\varphi\backslash\alpha) = E(u\,|\,m) = m_1 u + m\int\limits_0^u \operatorname{cn}^2 w\,dw$.

17.2.12. $E(\varphi\backslash\alpha) = u - m\int\limits_0^u \operatorname{sn}^2 w\,dw$.

17.2.13. $E(\varphi\backslash\alpha) = \frac{\pi}{2K(m)}\frac{\vartheta_4'(\pi u/2K)}{\vartheta_4(\pi u/2K)} + \frac{E(m)u}{K(m)}$.

(Тэта-функции см. в гл. 16.)

Эллиптический интеграл третьего рода

17.2.14. $\Pi(n;\ \varphi\backslash\alpha) =$

$$= \int_0^{\varphi} (1 - n\sin^2\theta)^{-1}[1 - \sin^2\alpha\sin^2\theta]^{-1/2}\,d\theta.$$

Если $x = \operatorname{sn}(u|m)$, то

17.2.15. $\Pi(n;\ u|m) =$

$$= \int_0^{x} (1 - nt^2)^{-1}[(1 - t^2)(1 - mt^2)]^{-1/2}\,dt,$$

17.2.16. $\Pi(n;\ u|m) = \int_0^{u} (1 - n\operatorname{sn}^2(w|m))^{-1}\,dw.$

Амплитуда φ

17.2.17. $\varphi = \operatorname{am} u = \arcsin(\operatorname{sn} u) = \arcsin x$

может быть вычислена по табл. 17.5 и 4.14.

Параметр m

Зависимость эллиптических интегралов от *параметра* m обозначается вертикальной чертой, например $F(\varphi|m)$. *Дополнительный параметр* m_1 определяется равенством

17.2.18. $m + m_1 = 1.$

Если параметр действителен, то его всегда можно свести к отрезку $0 \leqslant m \leqslant 1$ (см. 17.4).

Модулярный угол α

Зависимость эллиптических интегралов от модулярного угла α, *определенного* в 17.2.1, обозначается наклонной влево чертой, например $E(\varphi\backslash\alpha)$. *Дополнительный модулярный угол* есть $\frac{\pi}{2} - \alpha$, или $90° - \alpha$. В соответствии с 17.2.18 и 17.2.1 имеем

$$m_1 = \sin^2(90° - \alpha) = \cos^2\alpha.$$

Модуль k

В теории эллиптических функций Якоби (см. гл. 16) модуль k и дополнительный модуль k' определяются равенствами

17.2.19. $k = \operatorname{ns}(K + iK'),\quad k' = \operatorname{dn} K.$

Их связь с параметрами m и m_1 такова:

$$k^2 = m,\quad k'^2 = m_1.$$

Зависимость эллиптических интегралов от модуля k обозначается через запятую, например $\Pi(n;\ u,\ k)$

В вычислениях модуль используется редко, так как основной и дополнительный параметры формируются в эллиптических интегралах естественным образом. Поэтому в этой главе модуль использоваться не будет.

Характеристика n

Эллиптический интеграл третьего рода является функцией трех переменных: параметра, амплитуды и характеристики n. Действительная характеристика изменяется в интервале $(-\infty, \infty)$. Свойства эллиптического интеграла третьего рода существенно зависят от величины характеристики (см. 17.7).

17.3. ПОЛНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Возвращаясь к каноническим формам 17.2, скажем, что эллиптические интегралы будут полными, если амплитуда равна $\pi/2$ и соответственно $x = 1$. Полные интегралы обозначаются

17.3.1. $K(m) = K = \int_0^1 [(1 - t^2)(1 - mt^2)]^{-1/2}\,dt,$

$$K(m) = K = \int_0^{\pi/2} (1 - m\sin^2\theta)^{-1/2}\,dt,$$

17.3.2. $K = F\left(\frac{\pi}{2}\middle| m\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\middle\backslash \alpha\right).$

17.3.3. $E[(K(m)] = \int_0^1 (1 - t^2)^{-1/2}(1 - mt^2)^{1/2}\,dt,$

$$E[K(m)] = \int_0^{\pi/2} (1 - m\sin^2\theta)^{1/2}\,d\theta,$$

17.3.4 $E = E[K(m)] = E(m) = E\left(\frac{\pi}{2}\middle\backslash \alpha\right).$

Определим также

17.3.5. $K' = K(m_1) = K(1 - m) =$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - m_1\sin^2\theta)^{-1/2}\,d\theta,$$

17.3.6. $K' = F\left(\frac{\pi}{2}\middle| m_1\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\middle\backslash \frac{\pi}{2} - \alpha\right).$

17.3.7. $E' = E(m_1) = E(1 - m) =$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - m_1\sin^2\theta)^{1/2}\,d\theta,$$

17.3.8. $E' = E[K(m_1)] = (Em_1) = E\left(\frac{\pi}{2}\middle\backslash \frac{\pi}{2} - \alpha\right).$

K — действительный и *iK' — мнимый четвертьпериоды* соответствующих эллиптических функций Якоби (см. гл. 16).

Связь с гипергеометрической функцией (см. гл. 15)

17.3.9. $K = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ m\right).$

17.3.10. $E = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right)$.

Разложения в ряд

17.3.11. $K(m) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 m^2 + \right.$
$\left. + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 m^3 + \ldots\right] \quad (|m| < 1)$

17.3.12. $E(m) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \right.$
$\left. - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{m^3}{5} - \ldots\right] \quad (|m| < 1)$

Соотношение Лежандра

17.3.13. $EK' + E'K - KK' = \pi/2$.

Вспомогательные функции

17.3.14. $L(m) = \frac{K'(m)}{\pi} \ln \frac{16}{m_1} - K(m)$.

17.3.15. $m = 1 - 16 \exp[-\pi(K(m) + L(m))/K'(m)]$.

17.3.16. $m = 16 \exp[-\pi(K'(m) + L(m_1))/K(m)]$.

Функция $L(m)$ протабулирована в табл. 17.4.

Разложения в q-ряды

Основной и *дополнительный параметры Якоби* q и q_1 определяются равенствами

17.3.17. $q = q(m) = \exp[-\pi K'/K]$,

17.3.18. $q_1 = q(m_1) = \exp[-\pi K/K']$.

Далее,

17.3.19. $\ln \frac{1}{q} \ln \frac{1}{q_1} = \pi^2$,

17.3.20. $\lg_{10} \frac{1}{q} \lg_{10} \frac{1}{q_1} = (\pi \lg_{10} e)^2 =$
$= 1.86152\,28349$ с 10 D,

17.3.21. $q = \exp[-\pi K'/K] = \frac{m}{16} + 8\left(\frac{m}{16}\right)^2 +$
$+ 84\left(\frac{m}{16}\right)^3 + 992\left(\frac{m}{16}\right)^4 + \ldots \quad (|m| < 1)$,

17.3.22. $K = \frac{\pi}{2} + 2\pi \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^s}{1 + q^{2s}}$,

17.3.23. $\frac{E}{K} = \frac{1}{3}(1 + m_1) +$
$+ (\pi/K)^2 \left[1/12 - 2\sum_{s=1}^{\infty} q^{2s}(1 - q^{2s})^{-2}\right]$,

17.3.24. $\operatorname{am} u = v + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2q^s \sin 2sv}{s(1 + q^{2s})}$,

где $v = \pi u/(2K)$.

Пределы

17.3.25. $\lim_{m\to 0} K'(E - K) = 0$.

17.3.26. $\lim_{m\to 1}\left[K - \frac{1}{2}\ln(16/m_1)\right] = 0$.

17.3.27. $\lim_{m\to 0} m^{-1}(K - E) = \lim_{m\to 0} m^{-1}(E - m_1 K) = \pi/4$.

17.3.28. $\lim_{m\to 0} q/m = \lim_{m_1\to 1} q_1/m_1 = 1/16$.

Другие формулы для вычисления K и E

(см. также 17.5)

17.3.29. $K(m) =$
$= 2[1 + m_1^{1/2}]^{-1} K([(1 - m_1^{1/2})/(1 + m_1^{1/2})]^2)$.

17.3.30. $E(m) =$
$= (1 + m_1^{1/2}) E([(1 - m_1^{1/2})/(1 + m_1^{1/2})]^2) -$
$- 2m_1^{1/2}(1 + m_1^{1/2})^{-1} K([(1 - m_1^{1/2})/(1 + m_1^{1/2})]^2)$.

17.3.31. $K(\alpha) = 2F(\operatorname{arctg}(\sec^{1/2}\alpha)\backslash\alpha)$.

17.3.32. $E(\alpha) = 2E(\operatorname{arctg}(\sec^{1/2}\alpha)\backslash\alpha) - 1 + \cos\alpha$.

Аппроксимация многочленами

$(0 \leqslant m < 1)$

17.3.33. $K(m) = [a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_1^2] +$
$+ [b_0 + b_1 m_1 + b_2 m_1^2] \ln(1/m_1) + \varepsilon(m)$,
$|\varepsilon(m)| \leqslant 3\cdot 10^{-5}$,

$a_0 = 1.38629\,44$, $b_0 = 0.5$,

$a_1 = 0.11197\,23$, $b_1 = 0.12134\,78$,

$a_2 = 0.07252\,96$, $b_2 = 0.02887\,29$.

17.3.34. $K(m) = [a_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_4 m_1^4] +$
$+ [b_0 + b_1 m_1 + \ldots + b_4 m_1^4] \ln(1/m_1) + \varepsilon(m)$,
$|\varepsilon(m)| \leqslant 2\cdot 10^{-8}$,

$a_0 = 1.38629\,436112$, $b_0 = 0.5$,

$a_1 = 0.09666\,344259$, $b_1 = 0.12498\,593597$,

$a_2 = 0.03590\,092383$, $b_2 = 0.06880\,248576$,

$a_3 = 0.03742\,563713$, $b_3 = 0.03328\,355346$,

$a_4 = 0.01451\,196212$, $b_4 = 0.00441\,787012$.

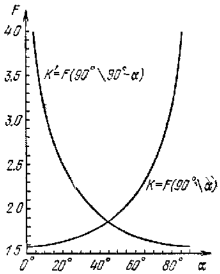


Рис. 17.1. Полный эллиптический интеграл первого рода.

$$17.3.35.\quad E(m) = [1 + a_1m_1 + a_2m_1^2] + [b_1m_1 + b_2m_1^2]\ln(1/m_1) + \varepsilon(m),$$

$$|\varepsilon(m)| < 4\cdot 10^{-5},$$

$a_1 = 0.46301\ 51,$

$b_1 = 0.24527\ 27,$

$a_2 = 0.10778\ 12,$

$b_2 = 0.04124\ 96.$

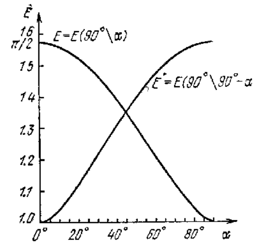


Рис. 17.2. Полный эллиптический интеграл второго рода.

$$17.3.36.\quad E(m) = [1 + a_1m_1 + \ldots + a_4m_1^4] + [b_1m_1 + \ldots + b_4m_1^4]\ln(1/m_1) + \varepsilon(m),$$

$$|\varepsilon(m)| < 2\cdot 10^{-8},$$

$a_1 = 0.44325\ 141463,\quad b_1 = 0.24998\ 368310,$

$a_2 = 0.06260\ 601220,\quad b_2 = 0.09200\ 180037,$

$a_3 = 0.04757\ 383546,\quad b_3 = 0.04069\ 697526,$

$a_4 = 0.01736\ 506451,\quad b_4 = 0.00526\ 449639.$

17.4. НЕПОЛНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Формулы приведения

Отрицательная амплитуда

17.4.1. $F(-\varphi\,|\,m) = -F(\varphi\,|\,m).$

17.4.2. $E(-\varphi\,|\,m) = -E(\varphi\,|\,m).$

Амплитуда произвольной величины

17.4.3. $F(s\pi \pm \varphi\,|\,m) = 2sK \pm F(\varphi\,|\,m).$

17.4.4. $E(u + 2K) = E(u) + 2E.$

17.4.5. $E(u + 2iK') = E(u) + 2i(K' - E').$

17.4.6. $E(u+2mK+2niK') = E(u) + 2mE + 2ni(K' - E').$

17.4.7. $E(K - u) = E - E(u) + m\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cd}\,u.$

Мнимая амплитуда

Если $\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{sh}\,\varphi$, то

17.4.8. $F(i\varphi\diagdown\alpha) = iF\left(\theta\diagdown\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$

17.4.9.
$$E(i\varphi\diagdown\alpha) = -iE\left(\theta\diagdown\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + iF\left(\theta\diagdown\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\,\mathrm{tg}\,\theta(1 - \cos^2\alpha\sin^2\theta)^{1/2}.$$

Мнимое преобразование Якоби

17.4.10.
$$E(iu\,|\,m) = i[u + \mathrm{dn}\,(u\,|\,m_1)\,\mathrm{sc}\,(u\,|\,m_1) - E(u\,|\,m_1)].$$

Комплексная амплитуда

17.4.11. $F(\varphi + i\psi\,|\,m) = F(\lambda\,|\,m) + iF(\mu\,|\,m_1),$

где $\mathrm{ctg}^2\lambda$ — положительный корень уравнения

$$x^2 - [\mathrm{ctg}^2\varphi + m\,\mathrm{sh}^2\psi\,\mathrm{cosec}^2\varphi - m_1]x - m_1\,\mathrm{ctg}^2\varphi = 0$$

и

$$m\,\mathrm{tg}^2\mu = \mathrm{tg}^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\lambda - 1.$$

17.4.12.
$$E(\varphi + i\psi\diagdown\alpha) = E(\lambda\diagdown\alpha) - iE(\mu\diagdown 90^\circ - \alpha) + iF(\mu\diagdown 90^\circ - \alpha) + \frac{b_1 + ib_2}{b_3},$$

где

$$b_1 = \sin^2\alpha\sin\lambda\cos\lambda\sin^2\mu(1 - \sin^2\alpha\sin^2\lambda)^{1/2},$$
$$b_2 = (1 - \sin^2\alpha\sin^2\lambda)(1 - \cos^2\alpha\sin^2\mu)^{1/2}\sin\mu\cos\mu,$$
$$b_3 = \cos^2\mu + \sin^2\alpha\sin^2\lambda\sin^2\mu.$$

Амплитуда, близкая к $\pi/2$ (см. также 17.5)

Если $\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\psi = 1$, то

17.4.13. $F(\varphi\diagdown\alpha) + F(\psi\diagdown\alpha) = F(\pi/2\diagdown\alpha) = K,$

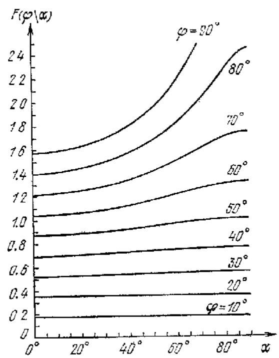


Рис. 17.3. Неполный эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi\diagdown\alpha)$, φ — постоянная

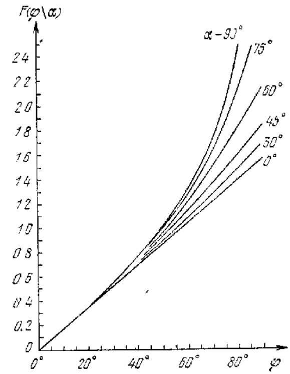


Рис. 17.4. Неполный эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi\diagdown\alpha)$, α — постоянная.

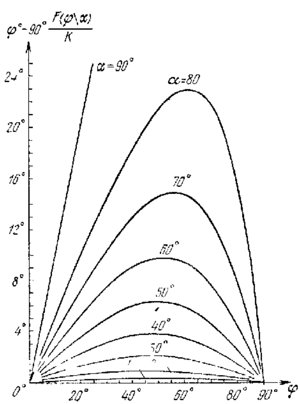


Рис. 17.5. $\varphi - 90^\circ \dfrac{F(\varphi\diagdown\alpha)}{K}$, α — постоянная.

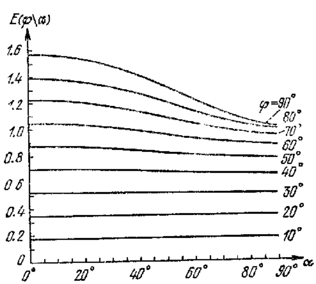


Рис. 17.6 Неполный эллиптический интеграл второго рода $E(\varphi\diagdown\alpha)$, φ — постоянная.

17.4.14. $E(\varphi\diagdown\alpha) + E(\psi\diagdown\alpha) =$

$$= E(\pi/2\diagdown\alpha) + \sin^2\alpha \sin\varphi \sin\psi.$$

Эти формулы следует использовать при вычислениях, когда φ близко к $\pi/2$ и m близко к единице.

Параметр, больший единицы

17.4.15. $F(\varphi \mid m) = m^{-1/2}F(\theta \mid m^{-1}),$

$\sin\theta = m^{1/2}\sin\varphi.$

17.4.16. $E(u \mid m) = m^{1/2}E(um^{1/2} \mid m^{-1}) - (m-1)u.$

Эти формулы приводят параметр, больший единицы, к параметру, меньшему единицы.

Отрицательный параметр

17.4.17. $F(\varphi \mid -m) = (1+m)^{-1/2}K(m(1+m)^{-1}) -$

$$-(1+m)^{-1/2}F\left(\frac{\pi}{2} - \varphi \mid m(1+m)^{-1}\right).$$

17.4.18. $E(u \mid -m) =$

$$= (1+m)^{1/2}\{E(u(1+m)^{1/2} \mid m(m+1)^{-1}) -$$

$$- m(1+m)^{-1/2}\operatorname{sn}(u(1+m)^{1/2} \mid m(1+m)^{-1}) \times$$

$$\times \operatorname{cd}(u(1+m)^{1/2} \mid m(1+m)^{-1})\}.$$

С помощью этих формул можно вычислять эллиптические интегралы с отрицательным параметром и, следовательно, с чисто мнимым модулем.

Частные случаи

17.4.19. $F(\varphi\diagdown 0) = \varphi.$

17.4.20. $F(i\varphi\diagdown 0) = i\varphi.$

17.4.21. $F(\varphi\diagdown 90^\circ) = \ln(\sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi) = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$

17.4.22. $F(i\varphi\diagdown 90^\circ) = i\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}\varphi).$

17.4.23. $E(\varphi\diagdown 0) = \varphi.$

17.4.24. $E(i\varphi\diagdown 0) = i\varphi.$

17.4.25. $E(\varphi\diagdown 90^\circ) = \sin\varphi.$

17.4.26. $E(i\varphi\diagdown 90^\circ) = i\operatorname{sh}\varphi.$

Дзета-функция Якоби

17.4.27. $Z(\varphi\diagdown\alpha) = E(\varphi\diagdown\alpha) - E(\alpha)F(\varphi\diagdown\alpha)/K(\alpha).$

17.4.28. $Z(u \mid m) = Z(u) = E(u) - uE(m)/K(m).$

17.4.29. $Z(-u) = -Z(u).$

17.4.30. $Z(u+2K) = Z(u).$

17.4.31. $Z(K-u) = -Z(K+u).$

17.4.32. $Z(u) = Z(u-K) - m\operatorname{sn}(u-K)\operatorname{cd}(u-K).$

Частные значения

17.4.33. $Z(u \mid 0) = 0.$

17.4.34. $Z(u \mid 1) = \operatorname{th} u.$

Теорема сложения

17.4.35. $Z(u+v) =$

$$= Z(u) + Z(v) - m\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{sn}(u+v).$$

Мнимое преобразование Якоби

17.4.36. $iZ(iu \mid m) =$

$$= Z(u \mid m_1) + \frac{\pi u}{2KK'} - \operatorname{dn}(u \mid m_1)\operatorname{sc}(u \mid m_1).$$

Связь с тэта-функцией Якоби

17.4.37. $Z(u) = \Theta'(u)/\Theta(u) = \frac{d}{du}\ln\Theta(u).$

Разложение в q-ряды

17.4.38. $Z(u) = \frac{2\pi}{K}\sum_{s=1}^{\infty} q^s(1-q^{2s})^{-1}\sin(\pi su/K).$

Лямбда-функция Хеймана

17.4.39. $\Lambda_0(\varphi\diagdown\alpha) = \frac{F(\varphi\diagdown 90^\circ - \alpha)}{K'(\alpha)} +$

$$+ \frac{2}{\pi}K(\alpha)Z(\varphi\diagdown 90^\circ - \alpha).$$

17.4.40. $\Lambda_0(\varphi\diagdown\alpha) =$

$$= \frac{2}{\pi}\{K(\alpha)E(\varphi\diagdown 90^\circ - \alpha) - [K(\alpha) - E(\alpha)]F(\varphi\diagdown 90^\circ - \alpha)\}.$$

Вычисление неполных эллиптических интегралов первого и второго рода

При вычислении эллиптических интегралов, содержащих под радикалом многочлен четвертой (или третьей *)) степени, следует предварительно представить многочлен в виде произведения двучленов от t^2 (см. примеры 1 и 2). Для преобразованного многочлена четвертой степени возможны только шесть знаковых комбинаций в множителях, а именно:

$$(t^2+a^2)(t^2+b^2),\ (a^2-t^2)(t^2-b^2),$$

$$(a^2-t^2)(b^2-t^2),\ (t^2-a^2)(t^2-b^2),$$

$$(t^2+a^2)(t^2-b^2),\ (t^2+a^2)(b^2-t^2).$$

Следующая ниже таблица охватывает все возможные случаи интегралов, сводящихся к $F(\varphi\diagdown\alpha)$ или $E(\varphi\diagdown\alpha)$. Столбец «$\varphi$» содержит подстановки, приводящие эти интегралы к тригонометрической форме (см. 17.2.6 и 17.2.9). Столбец «u» содержит подстановки, приводящие эти же интегралы к виду, зависящему от эллиптических функций Якоби (см. 17.2.7, 17.2.10, 17.2.11 и 17.2.12); получающиеся при этом выражения для эллиптических интегралов первого рода приведены в столбце «эквивалентные обратные эллиптические функции Якоби» Здесь, например, $u = \operatorname{sn}^{-1}x$ означает, что $x = \operatorname{sn}u$.

*) Дополнительно для многочлена третьей степени см. 17.4.61 и 17.4.70.

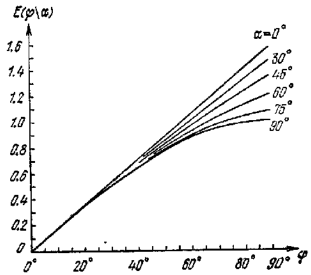


Рис. 17.7. Неполный эллиптический интеграл второго рода $E(\varphi\diagdown\alpha)$, α — постоянная.

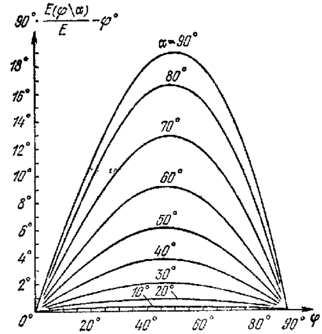


Рис. 17.8. $90^\circ \dfrac{E(\varphi\diagdown\alpha)}{E} - \varphi$, α — постоянная.

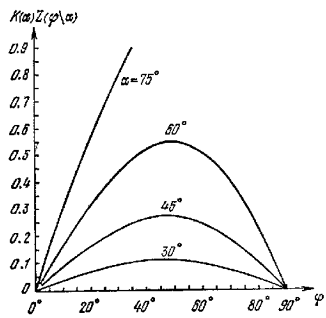


Рис. 17.9. Дзета-функция Якоби $K(\alpha)\ Z(\varphi\diagdown\alpha)$.

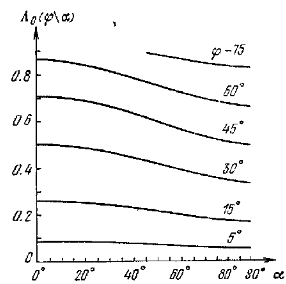


Рис. 17.10. Лямбда-функция Хеймана $\Lambda_0(\varphi\diagdown\alpha)$.

	$F(\varphi \setminus \alpha)$	Эквивалентные обратные эллиптические функции Якоби	φ подстановки	t подстановки	$E(\varphi \setminus \alpha)$
$\cos\alpha = b/a$, $a > b$, $m = (a^2 - b^2)/a^2$	**17.4.41.** $a\int_0^x \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2+b^2)]^{1/2}}$	$\mathrm{sc}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle\vert \frac{a^2-b^2}{a^2}\right)$	$\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{x}{b}$	$t = b\ \mathrm{sc}\ v$	$\frac{b^2}{a}\int_0^x \left(\frac{t^2+a^2}{t^2+b^2}\right)\frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2+b^2)]^{1/2}}$
	17.4.42. $a\int_x^\infty \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2+b^2)]^{1/2}}$	$\mathrm{cs}^{-1}\left(\frac{x}{a} \middle\vert \frac{a^2-b^2}{a^2}\right)$	$\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{a}{x}$	$t = a\ \mathrm{cs}\ v$	$a\int_x^\infty \left(\frac{t^2+b^2}{t^2+a^2}\right)\frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2+b^2)]^{1/2}}$
	17.4.43. $a\int_b^x \frac{dt}{[(a^2-t^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$	$\mathrm{nd}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle\vert \frac{a^2-b^2}{a^2}\right)$	$\sin^2\varphi = \frac{a^2(x^2-b^2)}{x^2(a^2-b^2)}$	$t = b\ \mathrm{nd}\ v$	$ab^2\int_b^x \frac{1}{t^2}\frac{dt}{[(a^2-t^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$
	17.4.44. $a\int_x^a \frac{dt}{[(a^2-t^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$	$\mathrm{dn}^{-1}\left(\frac{x}{a} \middle\vert \frac{a^2-b^2}{a^2}\right)$	$\sin^2\varphi = \frac{a^2-x^2}{a^2-b^2}$	$t = a\ \mathrm{dn}\ v$	$\frac{1}{a}\int_x^a \frac{t^2dt}{[(a^2-t^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$
$\sin\alpha = b/a$, $a > b$, $m = b^2/a^2$	**17.4.45.** $a\int_0^x \frac{dt}{[(a^2-t^2)(b^2-t^2)]^{1/2}}$	$\mathrm{sn}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle\vert \frac{b^2}{a^2}\right)$	$\sin\varphi = \frac{x}{b}$	$t = b\ \mathrm{sn}\ v$	$\frac{1}{a}\int_0^x \frac{(a^2-t^2)\,dt}{[(a^2-t^2)(b^2-t^2)]^{1/2}}$
	17.4.46. $a\int_x^b \frac{dt}{[(a^2-t^2)(b^2-t^2)]^{1/2}}$	$\mathrm{cd}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle\vert \frac{b^2}{a^2}\right)$	$\sin^2\varphi = \frac{a^2(b^2-x^2)}{b^2(a^2-x^2)}$	$t = b\ \mathrm{cd}\ v$	$a(a^2-b^2)\int_x^b \left(\frac{1}{a^2-t^2}\right)\frac{dt}{[(a^2-t^2)(b^2-t^2)]^{1/2}}$
	17.4.47. $a\int_a^x \frac{dt}{[(t^2-a^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$	$\mathrm{dc}^{-1}\left(\frac{x}{a} \middle\vert \frac{b^2}{a^2}\right)$	$\sin^2\varphi = \frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$	$t = a\ \mathrm{dc}\ v$	$\frac{a^2-b^2}{a}\int_a^x \left(\frac{t^2}{t^2-b^2}\right)\frac{dt}{[(t^2-a^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$
	17.4.48. $a\int_x^\infty \frac{dt}{[(t^2-a^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$	$\mathrm{ns}^{-1}\left(\frac{x}{a} \middle\vert \frac{b^2}{a^2}\right)$	$\sin\varphi = \frac{a}{x}$	$t = a\ \mathrm{ns}\ v$	$a\int_x^\infty \left(\frac{t^2-b^2}{t^2}\right)\frac{dt}{[(t^2-a^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$

	$F(\varphi \setminus \alpha)$	Эквивалентные обратные эллиптические функции Якоби	φ подстановки	t подстановки	$E(\varphi \setminus \alpha)$
$\operatorname{ctg} \alpha = b/a$, $m = \frac{a^2}{a^2+b^2}$	**17.4.49.** $(a^2+b^2)^{1/2} \int_b^x \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$	$\operatorname{nc}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle\vert \frac{a^2}{a^2+b^2}\right)$	$\cos \varphi = \frac{b}{x}$	$t = b \operatorname{nc} v$	$\frac{b^2}{(a^2+b^2)^{1/2}} \int_b^x \frac{t^2+a^2}{t^2} \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$
	17.4.50. $(a^2+b^2)^{1/2} \int_x^\infty \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$	$\operatorname{ds}^{-1}\left(\frac{x}{(a^2+b^2)^{1/2}} \middle\vert \frac{a^2}{a^2+b^2}\right)$	$\sin^2 \varphi = \frac{a^2+b^2}{a^2+x^2}$	$t = (a^2+b^2)^{1/2} \operatorname{ds} v$	$(a^2+b^2)^{1/2} \int_x^\infty \frac{t^2}{(t^2+a^2)} \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2-b^2)]^{1/2}}$
$\operatorname{tg} \alpha = b/a$, $m = \frac{b^2}{a^2+b^2}$	**17.4.51.** $(a^2+b^2)^{1/2} \int_0^x \frac{dt}{[(t^2+a^2)(b^2-t^2)]^{1/2}}$	$\operatorname{sd}^{-1}\left(\frac{x(a^2+b^2)^{1/2}}{ab} \middle\vert \frac{b^2}{a^2+b^2}\right)$	$\sin^2 \varphi = \frac{x^2(a^2+b^2)}{b^2(a^2+x^2)}$	$t = \frac{ab}{(a^2+b^2)^{1/2}} \operatorname{sd} v$	$a^2(a^2+b^2)^{1/2} \int_0^x \frac{1}{(t^2+a^2)} \frac{dt}{[(t^2+a^2)(b^2-t^2)]^{1/2}}$
	17.4.52. $(a^2+b^2)^{1/2} \int_x^b \frac{dt}{[(t^2+a^2)(b^2-t^2)]^{1/2}}$	$\operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle\vert \frac{b^2}{a^2+b^2}\right)$	$\cos \varphi = \frac{x}{b}$	$t = b \operatorname{cn} v$	$\frac{1}{(a^2+b^2)^{1/2}} \int_x^b \frac{(t^2+a^2)\,dt}{[(t^2+a^2)(b^2-t^2)]^{1/2}}$

Некоторые важные частные случаи

Столбцы «$\cos\varphi$» содержат подстановки $\left(\text{например, } \cos\varphi = \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$, приводящие данные интегралы к тригонометрической форме.

$\frac{1}{2}F(\varphi\backslash\alpha)$	$\cos\varphi$	α
17.4.53. $\int_x^\infty \frac{dt}{(1+t^4)^{1/2}}$	$\frac{x^2-1}{x^2+1}$	45°
17.4.54. $\int_0^x \frac{dt}{(1+t^4)^{1/2}}$	$\frac{1-x^2}{1+x^2}$	45°
17.4.55. $\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^x \frac{dt}{(t^4-1)^{1/2}}$	$\frac{1}{x}$	45°
17.4.56. $\frac{1}{\sqrt{2}}\int_x^1 \frac{dt}{(1-t^4)^{1/2}}$	x	45°

$\frac{1}{3^{1/4}}F(\varphi\backslash\alpha)$	$\cos\varphi$	α
17.4.57. $\int_x^\infty \frac{dt}{(t^3-1)^{1/2}}$	$\frac{x-1-\sqrt{3}}{x-1+\sqrt{3}}$	15°
17.4.58. $\int_1^x \frac{dt}{(t^3-1)^{1/2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1-x}{\sqrt{3}-1+x}$	15°
17.4.59. $\int_x^1 \frac{dt}{(1-t^3)^{1/2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1+x}{\sqrt{3}+1-x}$	75°
17.4.60. $\int_{-\infty}^x \frac{dt}{(1-t^3)^{1/2}}$	$\frac{1-\sqrt{3}-x}{1+\sqrt{3}-x}$	75°

Для приведения к тригонометрической форме интегралов $\int \frac{dt}{\sqrt{P}}$, где $P = P(t)$ — многочлен третьей степени

$$P = (t-\beta_1)(t-\beta_2)(t-\beta_3)$$

с действительными корнями $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$, имеем коэффициенты

17.4.61. $\lambda = \frac{1}{2}(\beta_1-\beta_3)^{1/2}$, $m = \sin^2\alpha = \frac{\beta_2-\beta_3}{\beta_1-\beta_3}$,

$$m_1 = \cos^2\alpha = \frac{\beta_1-\beta_2}{\beta_1-\beta_3}$$

и подстановки

17.4.62. $\lambda\int_{\beta_3}^x \frac{dt}{\sqrt{P}}$	$F(\varphi\backslash\alpha)$	$\sin^2\varphi = \frac{x-\beta_3}{\beta_2-\beta_3}$
17.4.63. $\lambda\int_x^{\beta_1} \frac{dt}{\sqrt{P}}$	$F(\varphi\backslash\alpha)$	$\cos^2\varphi = \frac{(\beta_1-\beta_2)(x-\beta_3)}{(\beta_2-\beta_3)(\beta_1-x)}$
17.4.64. $\lambda\int_{\beta_1}^x \frac{dt}{\sqrt{P}}$	$F(\varphi\backslash\alpha)$	$\sin^2\varphi = \frac{x-\beta_1}{x-\beta_2}$

17.4.65. $\lambda\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{P}}$	$F(\varphi\backslash\alpha)$	$\cos^2\varphi = \frac{x-\beta_1}{x-\beta_3}$
17.4.66. $\lambda\int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{-P}}$	$F(\varphi\backslash(90^\circ-\alpha^\circ))$	$\sin^2\varphi = \frac{\beta_1-\beta_3}{\beta_1-x}$
17.4.67. $\lambda\int_x^{\beta_3} \frac{dt}{\sqrt{-P}}$	$F(\varphi\backslash(90^\circ-\alpha^\circ))$	$\cos^2\varphi = \frac{\beta_2-\beta_3}{\beta_2-x}$
17.4.68. $\lambda\int_{\beta_2}^x \frac{dt}{\sqrt{-P}}$	$F(\varphi\backslash(90^\circ-\alpha^\circ))$	$\sin^2\varphi = \frac{(\beta_1-\beta_3)(x-\beta_2)}{(\beta_1-\beta_2)(x-\beta_3)}$
17.4.69. $\lambda\int_x^{\beta_1} \frac{dt}{\sqrt{-P}}$	$F(\varphi\backslash(90^\circ-\alpha^\circ))$	$\cos^2\varphi = \frac{x-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}$

Для приведения к тригонометрической форме интегралов $\int \frac{dt}{\sqrt{P}}$, где $P = P(t) = t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3$ имеет единственный действительный корень $t = \beta$, имеем коэффициенты, выраженные через $P'(t)$ и $P''(t)$ при $t = \beta$:

17.4.70. $\lambda^2 = [P'(\beta)]^{1/2}$,

$$m = \sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\,\frac{P''(\beta)}{[P'(\beta)]^{1/2}}$$

и подстановки

17.4.71. $\lambda \int\limits_{\beta}^{x} \frac{dt}{\sqrt{P}}$	$F(\varphi\diagdown\alpha)$	$\cos\varphi = \frac{\lambda^2 - (x-\beta)}{\lambda^2 + (x-\beta)}$

17.4.72. $\lambda \int\limits_{x}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{P}}$	$F(\varphi\diagdown\alpha)$	$\cos\varphi = \frac{(x-\beta) - \lambda^2}{(x-\beta) + \lambda^2}$
17.4.73. $\lambda \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\sqrt{-P}}$	$F(\varphi\diagdown(90^\circ - \alpha^\circ))$	$\cos\varphi = \frac{(\beta - x) - \lambda^2}{(\beta - x) + \lambda^2}$
17.4.74. $\lambda \int\limits_{x}^{\beta} \frac{dt}{\sqrt{-P}}$	$F(\varphi\diagdown(90^\circ - \alpha^\circ))$	$\cos\varphi = \frac{\lambda^2 - (\beta - x)}{\lambda^2 + (\beta - x)}$

17.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАНДЕНА

Понижающее преобразование Ландена *)

Пусть α_n и α_{n+1} — два модулярных угла такие, что

17.5.1. $(1 + \sin\alpha_{n+1})(1 + \cos\alpha_n) = 2, \quad \alpha_{n+1} < \alpha_n$,

и пусть φ_n и φ_{n+1} — две соответствующие амплитуды такие, что

17.5.2. $\operatorname{tg}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \cos\alpha_n \operatorname{tg}\varphi_n, \quad \varphi_{n+1} > \varphi_n$.

Таким образом, переход от n-го шага к $(n+1)$-му ведет к уменьшению модулярного угла и увеличению амплитуды. Многократным применением преобразования 17.5.1—17.5.2 модулярный угол можно сделать настолько малым, что становится возможным использование формулы 17.4.19.

Если $\alpha_0 = \alpha$, то после применения понижающего преобразования Ландена будем иметь

17.5.3. $$F(\varphi\diagdown\alpha) = (1 + \cos\alpha)^{-1} F(\varphi_1\diagdown\alpha_1) = \frac{1}{2}(1 + \sin\alpha_1) F(\varphi_1\diagdown\alpha_1),$$

17.5.4. $$F(\varphi\diagdown\alpha) = 2^{n} \prod_{s=1}^{n} (1 + \sin\alpha_s) F(\varphi_n\diagdown\alpha_n)$$

$$(F(\varphi_n\diagdown\alpha_n) \approx \varphi_n \text{ при } \alpha_n \approx 0),$$

17.5.5. $$F(\varphi_n\diagdown\alpha) = \Phi \prod_{s=1}^{\infty} (1 + \sin\alpha_s),$$

17.5.6. $$\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} F(\varphi_n\diagdown\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n}{2^n},$$

17.5.7. $$K = F\left(\frac{\pi}{2}\diagdown\alpha\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{s=1}^{\infty} (1 + \sin\alpha_s),$$

17.5.8. $F(\varphi\diagdown\alpha) = 2\pi^{-1}K\Phi$,

17.5.9. $$E(\varphi\diagdown\alpha) = F(\varphi\diagdown\alpha)\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\left(1 + \frac{1}{2}\sin\alpha_1 + \frac{1}{2^2}\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \ldots\right)\right] + \sin\alpha\left[\frac{1}{2}(\sin\alpha_1)^{1/2}\sin\varphi_1 + \frac{1}{2^2}(\sin\alpha_1\sin\alpha_2)^{1/2}\sin\varphi_2 + \ldots\right],$$

17.5.10. $$E = K\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\left(1 + \frac{1}{2}\sin\alpha_1 + \frac{1}{2^2}\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \frac{1}{2^3}\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 + \ldots\right)\right].$$

Повышающее преобразование Ландена

Пусть α_n и α_{n+1} — два модулярных угла такие, что

17.5.11. $(1 + \sin\alpha_n)(1 + \cos\alpha_{n+1}) = 2, \quad \alpha_{n+1} > \alpha_n$,

и пусть φ_n и φ_{n+1} — две соответствующие амплитуды такие, что

17.5.12. $\sin(2\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \sin\alpha_n \sin\varphi_n, \quad \varphi_{n+1} < \varphi_n$.

Таким образом, переход от n-го шага к $(n+1)$-му ведет к увеличению модулярного угла и уменьшению амплитуды.

Многократным применением преобразования 17.5.11, 17.5.12 модулярный угол можно сделать настолько близким к $\pi/2$, что становится возможным применение формулы 17.4.21.

Если $\alpha_0 = \alpha$, то после применения повышающего преобразования Ландена будем иметь

17.5.13. $F(\varphi\diagdown\alpha) = 2(1 + \sin\alpha)^{-1} F(\varphi_1\diagdown\alpha_1)$,

*) Здесь используется модулярный угол α, так как он является входным аргументом приведенных ниже таблиц. Все формулы, связанные с преобразованием Ландена, могут быть также выражены через модуль $k = m^{1/2} = \sin\alpha$ и его дополнение $k' = m_1^{1/2} = \cos\alpha$.

17.5.14. $F(\varphi\backslash\alpha) = 2^n \prod_{s=0}^{n-1} (1 + \sin\alpha_s)^{-1} F(\varphi_n\backslash\alpha_n)$,

17.5.15. $F(\varphi\backslash\alpha) = \prod_{s=1}^{n} (1 + \cos\alpha_s)\ F(\varphi_n\backslash\alpha_n)$,

17.5.16. $F(\varphi\backslash\alpha) =$

$$= \left[\operatorname{cosec}\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \sin\alpha_s\right]^{1/2} \times \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right),$$

17.5.17. $\Phi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$.

В формулах 17.5.14 и 17.5.15

$$F(\varphi_n\backslash\alpha_n) \approx \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_n}{2}\right) \text{ при } \alpha_n \approx \frac{\pi}{2}.$$

Окрестность прямого угла (см. также 17.4.13)

Если амплитуда φ и модулярный угол α близки к $\pi/2$, то интерполяция в таблицах $F(\varphi\backslash\alpha)$ затруднительна В этом случае может быть использовано преимущественно повышающее преобразование Ландена (см. пример 13) или понижающее преобразование Ландена (см. пример 12).

17.6. ПРОЦЕСС АРИФМЕТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО

Начиная с заданной тройки чисел (a_0, b_0, c_0), определяем последовательно (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2),..., (a_N, b_N, c_N) в соответствии со следующей схемой арифметико-геометрического среднего:

17.6.1.

$$\begin{array}{ll} a_0 & b_0 \\ a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) & b_1 = (a_0 b_0)^{1/2} \\ a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) & b_2 = (a_1 b_1)^{1/2} \\ \vdots & \vdots \\ a_N = \frac{1}{2}(a_{N-1} + b_{N-1}) & b_N = (a_{N-1} b_{N-1})^{1/2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c_0 \\ c_1 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0) \\ c_2 = \frac{1}{2}(a_1 - b_1) \\ \vdots \\ c_N = \frac{1}{2}(a_{N-1} - b_{N-1}). \end{array}$$

Процесс оканчивается на N-м шаге, когда $a_N = b_N$, т.к. когда $c_N = 0$ с требуемой точностью.

Для вычисления полных эллиптических интегралов $K(\alpha)$, $E(\alpha)$ процесс начинается с тройки

17.6.2. $a_0 = 1,\ b_0 = \cos\alpha,\ c_0 = \sin\alpha$.

Тогда

17.6.3. $K(\alpha) = \dfrac{\pi}{2a_N}$,

17.6.4. $\dfrac{K(\alpha) - E(\alpha)}{K(\alpha)} =$

$$= \frac{1}{2}[c_0^2 + 2c_1^2 + 2^2c_2^2 + \ldots + 2^N c_N^2].$$

Для вычисления $K'(\alpha)$, $E'(\alpha)$ начнем процесс с тройки

17.6.5. $a_0' = 1,\ b_0' = \sin\alpha,\ c_0' = \cos\alpha$.

Тогда

17.6.6. $K'(\alpha) = \dfrac{\pi}{2a_N'}$,

17.6.7. $\dfrac{K'(\alpha) - E'(\alpha)}{K'(\alpha)} = \dfrac{1}{2}[c_0'^2 + 2c_1'^2 + 2^2c_2'^2 + \ldots + 2^N c_N'^2]$.

При вычислении $F(\varphi\backslash\alpha)$, $E(\varphi\backslash\alpha)$ исходим из формулы 17.5.2, которая соответствует понижающему преобразованию Ландена, и получаем последовательность амплитуд $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ из соотношения

17.6.8. $\operatorname{tg}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = (b_n/a_n)\operatorname{tg}\varphi_n,\ \varphi_0 = \varphi$.

Тогда с требуемой точностью

17.6.9. $F(\varphi\backslash\alpha) = \varphi_N/(2^N a_N)$,

17.6.10. $Z(\varphi\backslash\alpha) = E(\varphi\backslash\alpha) - (E/K)\,F(\varphi\backslash\alpha) =$

$$= c_1\sin\varphi_1 + c_2\sin\varphi_2 + \ldots + c_N\sin\varphi_N$$

17.7. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ТРЕТЬЕГО РОДА

17.7.1. $\Pi(n;\ \varphi\backslash\alpha) =$

$$= \int_0^{\varphi} (1 - n\sin^2\theta)^{-1}(1 - \sin^2\alpha\sin^2\theta)^{-1/2}\,d\theta.$$

17.7.2. $\Pi\left(n;\ \dfrac{\pi}{2}\backslash\alpha\right) = \Pi(n\backslash\alpha)$.

(I) Гиперболический случай
$(0 < n < \sin^2\alpha)$

$$\varepsilon = \arcsin(n/\sin^2\alpha)^{1/2}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \pi/2,$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}F(\varepsilon\backslash\alpha)/K(\alpha), \qquad q = q(\alpha),$$

$$v = \frac{\pi}{2}F(\varphi\backslash\alpha)/K(\alpha), \quad \delta_1 = [n(1-n)^{-1}(\sin^2\alpha - n)^{-1}]^{1/2}.$$

17.7.3. $\Pi(n;\ \varphi\diagdown\alpha) =$

$$= \delta_1\left[-\frac{1}{2}\ \ln\left[\vartheta_4(\nu+\beta)/\vartheta_4(\nu-\beta)\right] + \nu\vartheta_1'(\beta)/\vartheta_1(\beta)\right].$$

17.7.4. $$\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_4(\nu+\beta)}{\vartheta_4(\nu-\beta)} =$$

$$= 2\sum_{s=1}^{\infty} s^{-1}q^{s}(1-q^{2s})^{-1}\ \sin 2s\nu \sin 2s\beta.$$

17.7.5. $$\frac{\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta_1(\beta)} =$$

$$= \operatorname{ctg}\beta + 4\sum_{s=1}^{\infty} q^{2s}\,(1-2q^{2s}\cos 2\beta + q^{4s})^{-1}\sin 2\beta.$$

В приведенных формулах можно также использовать тэта-функции Невилля 16.36.

17.7.6. $\Pi(n\diagdown\alpha) = K(\alpha) + \delta_1 K(\alpha)\, Z(\varepsilon\diagdown\alpha)$.

(II) Гиперболический случай ($n > 1$)

Случай $n > 1$ может быть сведен к случаю $0 < N < \sin^2\alpha$ подстановкой

17.7.7. $N = n^{-1}\sin^2\alpha,\ p_1 = [(n-1)(1-n^{-1}\sin^2\alpha)]^{1/2}$.

17.7.8. $\Pi(n;\ \varphi\diagdown\alpha) = -\Pi(N;\ \varphi\diagdown\alpha) + F(\varphi\diagdown\alpha) +$

$$+\frac{1}{2p_1}\ln\left[(\Delta(\varphi) + p_1\operatorname{tg}\varphi)(\Delta(\varphi) - p_1\operatorname{tg}\varphi)^{-1}\right],$$

где $\Delta(\varphi)$ — дельта-амплитуда (см. 17.2.4).

17.7.9. $\Pi(n\diagdown\alpha) = K(\alpha) - \Pi(N\diagdown\alpha)$.

(III) Круговой случай ($\sin^2\alpha < n < 1$)

$$\varepsilon = \arcsin\left[(1-n)/\cos^2\alpha\right]^{1/2},\quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}\,F(\varepsilon\diagdown 90^\circ - \alpha)/K(\alpha),$$

$$q = q(\alpha).$$

17.7.10. $$\nu = \frac{\pi}{2}\,F(\varphi\diagdown\alpha)/K(\alpha),$$

$$\delta_2 = [n(1-n)^{-1}(n-\sin^2\alpha)^{-1}]^{1/2}.$$

17.7.11. $\Pi(n;\ \varphi\diagdown\alpha) = \delta_2(\lambda - 4\mu\nu)$.

17.7.12. $\lambda = \operatorname{arctg}\,(\operatorname{th}\beta\operatorname{tg}\nu) +$

$$+ 2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}s^{-1}q^{2s}(1-q^{2s})^{-1}\sin 2s\nu\operatorname{sh} 2s\beta.$$

17.7.13. $$\mu = \left[\sum_{s=1}^{\infty} sq^{s^2}\operatorname{sh} 2s\beta\right]\left[1+2\sum_{s=1}^{\infty} q^{s^2}\operatorname{ch} 2s\beta\right]^{-1}.$$

17.7.14. $$\Pi(n\diagdown\alpha) = K(\alpha) + \frac{1}{2}\,\pi\delta_2[1 - \Lambda_0(\varepsilon\diagdown\alpha)],$$

где Λ_0 — лямбда-функция Хеймана (см. 17.4.39).

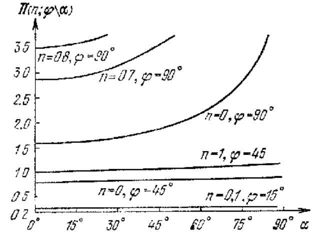


Рис. 17.11. Эллиптический интеграл третьего рода.

(IV) Круговой случай ($n < 0$)

Случай $n < 0$ может быть сведен к случаю $\sin^2\alpha < N < 1$ подстановкой

17.7.15. $N = (\sin^2\alpha - n)\,(1-n)^{-1}$,

$$p_2 = [-n(1-n)^{-1}(\sin^2\alpha - n)]^{1/2}.$$

17.7.16. $[(1-n)(1-n^{-1}\sin^2\alpha)]^{1/2}\Pi(n;\ \varphi\diagdown\alpha) =$

$$= [(1-N)(1-N^{-1}\sin^2\alpha)]^{1/2}\Pi(N;\ \varphi\diagdown\alpha) +$$

$$+ p_2^{-1}\sin^2\alpha F(\varphi\diagdown\alpha) + \operatorname{arctg}\left[\frac{p_2}{2}\sin 2\varphi/\Delta(\varphi)\right].$$

17.7.17. $\Pi(n\diagdown\alpha) =$

$$= (-n\cos^2\alpha)\,(1-n)^{-1}\,(\sin^2\alpha - n)^{-1}\Pi(N\diagdown\alpha) +$$

$$+ \sin^2\alpha(\sin^2\alpha - n)^{-1}K(\alpha).$$

Частные случаи

17.7.18. $n = 0$,

$$\Pi(0;\ \varphi\diagdown\alpha) = F(\varphi\diagdown\alpha).$$

17.7.19. $n = 0,\quad \alpha = 0$,

$$\Pi(0;\ \varphi\diagdown 0) = \varphi.$$

17.7.20. $\alpha = 0$,

$$\Pi(n;\ \varphi\diagdown 0) = (1-n)^{-1/2}\operatorname{arcth}\left[(1-n)^{1/2}\operatorname{tg}\varphi\right]\quad (n < 1),$$

$$\Pi(n;\ \varphi\diagdown 0) = (n-1)^{-1/2}\operatorname{arcth}\left[(n-1)^{1/2}\operatorname{tg}\varphi\right]\quad (n > 1),$$

$$\Pi(n;\ \varphi\diagdown 0) = \operatorname{tg}\varphi\ (n = 1).$$

17.7.21. $\alpha = \pi/2$,

$$\Pi(n;\ \varphi\diagdown\pi/2) = (1-n)^{-1}[\ln(\operatorname{tg}\varphi + \sec\varphi) -$$

$$-\frac{1}{2}\,n^{1/2}\ln\,(1 + n^{1/2}\sin\varphi)\,(1 - n^{1/2}\sin\varphi)^{-1}]\quad (n \neq 1).$$

17.7.22. $n = \pm\sin\alpha$,

$$(1 \mp \sin\alpha)\{2\Pi(\pm\sin\alpha;\ \varphi\diagdown\alpha) - F(\varphi\diagdown\alpha)\} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left[(1 \mp \sin\alpha)\operatorname{tg}\varphi/\Delta(\varphi)\right],$$

17.7.23. $n = 1 \pm \cos\alpha$,

$$2\cos\alpha\,\Pi(1 \pm \cos\alpha;\ \varphi\backslash\alpha) =$$
$$= \pm\frac{1}{2}\ln\left[(1 + \operatorname{tg}\varphi\ \Delta(\varphi))\,(1 - \operatorname{tg}\varphi\Delta(\varphi))^{-1}\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln\left[(\Delta(\varphi) + \cos\alpha\operatorname{tg}\varphi)\,(\Delta(\varphi) - \cos\alpha\operatorname{tg}\varphi)^{-1}\right] \mp$$
$$\mp (1 \mp \cos\alpha)\,F(\varphi\backslash\alpha).$$

17.7.24. $n = \sin^2\alpha$,

$$\Pi(\sin^2\alpha;\ \varphi\backslash\alpha) = \sec^2\alpha\,E(\varphi\backslash\alpha) - (\operatorname{tg}^2\alpha\sin 2\varphi)/(2\Delta(\varphi)).$$

17.7.25. $n = 1$,

$$\Pi(1;\ \varphi\backslash\alpha) =$$
$$= F(\varphi\backslash\alpha) - \sec^2\alpha\,E(\varphi\backslash\alpha) + \sec^2\alpha\operatorname{tg}\varphi\,\Delta(\varphi).$$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Привести к канонической форме $\int y^{-1}\,dx$, где $y^2 = -3x^4 + 34x^3 - 119x^2 + 172x - 90$.

Подбором или решением уравнения четвертой степени найдем $y^2 = Q_1Q_2$, где $Q_1 = 3x^2 - 10x + 9$, $Q_2 = -x^2 + 8x - 10$.

Представление многочлена четвертой (третьей) степени в виде произведения двучленов от t^2 проиллюстрируем следующими тремя методами.

Первый метод

Многочлен $Q_1 - \lambda Q_2 = (3 + \lambda)x^2 - (10 + 8\lambda)x + 9 + 10\lambda$ будет полным квадратом, если дискриминант

$$(10 + 8\lambda)^2 - 4(3 + \lambda)(9 + 10\lambda)$$

равен нулю, т.е. при

$$\lambda = -2/3 \text{ или } 1/2.$$

Тогда

$$Q_1 + \frac{2}{3}Q_2 = \frac{7}{3}(x-1)^2,\quad Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 = \frac{7}{2}(x-2)^2.$$

Решая эту систему относительно Q_1 и Q_2, получим

$$Q_1 = (x-1)^2 + 2(x-2)^2,\quad Q_2 = 2(x-1)^2 - 3(x-2)^2.$$

Отсюда следует, что подстановка $t = (x-1)/(x-2)$ дает

$$\int y^{-1}\,dx = \pm\int\left[(t^2+2)(2t^2-3)\right]^{-1/2}dt.$$

Если уравнение четвертой степени $y^2 = 0$ имеет четыре действительных корня (или в случае уравнения третьей степени — три действительных корня), то необходимо линейные множители комбинировать так, чтобы ни один из корней уравнения $Q_1 = 0$ не лежал между корнями уравнения $Q_2 = 0$ и наоборот. При этом условии описанный метод всегда будет приводить к действительным значениям λ. Эти значения, однако, могут быть и иррациональными.

Второй метод

Положим

$$t^2 = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{3x^2 - 10x + 9}{-x^2 + 8x - 10}.$$

Дискриминант уравнения $Q_2t^2 - Q_1 = 0$ имеет вид

$$4T^2 = (10 + 8t^2)^2 - 4(3 + t^2)(9 + 10t^2) =$$
$$= 4(3t^4 + 2t^2 - 1).$$

Используя подстановку $t^2 = \dfrac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$, после серии преобразований получим

$$\int y^{-1}\,dx = \pm\int T^{-1}\,dt = \pm\int\left[(3t^2+2)(2t^2-1)\right]^{-1/2}dt.$$

Этот метод приводит к цели, когда (как здесь) T^2, как функция от t^2, представима в виде произведения действительных множителей. Если коэффициенты многочлена четвертой степени — рациональные числа, то коэффициенты множителей T^2 также будут рациональными.

Третий метод

Положим

$$w = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{3x^2 - 10x + 9}{-x^2 + 8x - 10}.$$

Дискриминант уравнения $Q_2w - Q_1 = 0$ имеет вид

$$4W - 4(3w + 2)(2w - 1) =$$
$$= 4(6w^2 + w - 2) = 4(Aw^2 + Bw + C).$$

Тогда, если $z^2 = \dfrac{W}{w}$ и

$$Z^2 = (B - z^2)^2 - 4AC = (z^2 - 1)^2 + 48,$$

то, используя приведенные здесь подстановки, после серии преобразований получим

$$\int y^{-1}\,dx = \pm\int Z^{-1}\,dz.$$

Однако в данном случае множители Z^2 являются комплексными и вследствие этого метод не приводит к цели.

Из двух методов — второго и третьего — один всегда будет приводить к цели там, где другой неприменим.

Если коэффициенты многочлена четвертой степени являются рациональными числами, то множители T^2 или Z^2 будут иметь рациональные коэффициенты.

Полученные первым и вторым методами канонические формы эллиптического интеграла могут быть сведены к форме Лежандра, если использовать таблицу на стр. 409—410. В данном примере эллиптический интеграл оказался интегралом первого рода.

Пример 2. Привести к канонической форме $\int y^{-1}\,dx$, где $y^2 = x(x-1)(x-2)$.

Для представления y^2 в виде произведения двучленов от t^2 используем третий метод примера 1, положив $Q_1 = (x-1)$ и $Q_2 = x(x-2)$. Введем замену

$$w = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{x-1}{x^2-2x}$$

Дискриминант уравнения $Q_2w - Q_1 = x^2w - (2w+1)x + 1 = 0$ имеет вид

$$4W = (2w+1)^2 - 4w = 4w^2 + 1,$$

так что

$$W = Aw^2 + Bw + C, \text{ где } A = 1, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{4}.$$

Если положить $z^2 = W/w$ и $Z^2 = (B - z^2)^2 - 4AC = (z^2)^2 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$, то

$$\int y^{-1}\,dx = \pm \int [(z^2 - 1)(z^2 + 1)]^{-1/2}\,dz.$$

Как и в примере 1, данный интеграл является эллиптическим интегралом первого рода.

Первый метод примера 1 при данном выборе Q_1 и Q_2 непригоден, так как корень $Q_1(x) = 0$ лежит между корнями $Q_2(x) = 0$, что приводит к комплексным λ. Однако этот метод может быть применен, если положить $Q_1 = x$ и $Q_2 = (x-1)(x-2)$. В этом случае корни уравнения $Q_1(x) = 0$ не лежат между корнями уравнения $Q_2(x) = 0$.

Пример 3. Найти $K(80/81)$.

Поскольку интерполяция при $m = 80/81 \approx 0.98\ldots$ в таблицах, в частности в табл. 17.1, затруднена, используем другие методы.

Первый метод

Воспользуемся формулой 17.3.29 при $m = 80/81$, $m_1 = 1/81$, $m_1^{1/2} = 1/9$. Тогда

$$[(1 - m_1^{1/2})(1 + m_1^{1/2})^{-1}]^2 = 0.64,$$

$$K(80/81) = 1.8K(0.64) = 3.59154\ 500 \quad \text{с} \quad 8D.$$

Значение $K(0.64)$ взято из табл. 17.1.

Второй метод

В табл. 17.4 приведена вспомогательная функция $L(m)$, полезная для вычисления $K(m)$, когда m близко к единице, или $K'(m)$, когда m близко к нулю.

$$K(80/81) = \frac{1}{\pi} K'(80/81) \ln(16 \cdot 81) - L(80/81).$$

Интерполируя в табл. 17.1 и 17.4 на значение $80/81 = 0.98765\ 43210$, получим

$$K'(80/81) = 1.57567\ 8423,$$

$$L(80/81) = 0.00311\ 16543.$$

Наконец,

$K(80/81) =$

$$= \pi^{-1}(1.57567\ 8423)(7.16703\ 7877) - 0.00311\ 16543 = 3.59154\ 5000 \quad \text{с} \quad 9D.$$

Третий метод

Аппроксимация многочленом 17.3.34 дает

$$K(80/81) = 3.59154\ 501 \quad \text{с} \quad 8D.$$

Четвертый метод. Арифметико-геометрическое среднее

Здесь $\sin^2\alpha = 80/81$ и, начав с чисел

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{9},$$

$$c_0 = \sqrt{80/81} = 0.99380\ 79900,$$

получим

n	a_n	b_n	c_n
0	1.00000 00000	0.11111 11111	0.99380 79900
1	0.55555 55555	0.33333 33333	0.44444 44444
2	0.44444 44444	0.43033 14829	0.11111 11111
3	0.43738 79636	0.43733 10380	0.00705 64808
4	0.43735 95008	0.43735 94999	0.00002 84628
5	0.43735 95003	0.43735 95003	0.00000 00000

Следовательно,

$$K(80/81) = \frac{1}{2}\pi a_5^{-1} = 3.59154\ 5001.$$

Пример 4. Найти $E(80/81)$.

Поскольку в табл. 17.1 интерполяция при $m = 80/81 \approx 0.98\ldots$ из-за крупного шага требует вычисления разностей высокого порядка, рассмотрим другие методы решения этого примера.

Первый метод

Используя формулу 17.7.30 при $m = 80/81$, получим

$$E(80/81) = \frac{10}{9}E(0.64) - \frac{1}{5}K(0.64) = 1.01910\ 6047,$$

где $E(0.64)$ и $K(0.64)$ взяты из табл. 17.1.

Второй метод

Аппроксимация многочленом 17.3.36 дает $E(80/81) = 1.01910\ 6060$. Две последние цифры нужно отбросить в силу точности аппроксимации.

Третий метод

Применим метод арифметико-геометрического среднего 17.6. Используя числа, вычисленные в примере 3 (четвертый метод), найдем

$$\frac{K(80/81) - E(80/81)}{K(80/81)} = \frac{1}{2}[c_0^2 + 2c_1^2 + 2^2c_2^2 + \ldots + 2^5c_5^2] = \frac{1}{2}[1.43249\ 71298] = 0.71624\ 85649.$$

Величину $K(80/81)$ возьмем из примера 3 (четвертый метод) и получим

$$E(80/81) = 1.01910\ 6048 \quad \text{с} \quad 9D.$$

Пример 5. Найти q, если $m = 0.9995$. Здесь $m_1 = 0.0005$; используя табл. 17.4, найдем

$$Q(m) = 0.06251\ 563013, \quad q_1 = m_1Q(m) = 0.00003\ 1257815.$$

По 17.3.19 получим

$$\ln\left(\frac{1}{q}\right) = \pi^2/\ln\left(\frac{1}{q_1}\right) = \pi^2/10.37324\,1132 = 0.95144\,84701,$$

$$q = 0.38618\,125.$$

Вычисление q также можно выполнить с применением формулы 17.3.20 или по табл. 17.1.

Пример 6. Найти m с 10D при $K'/K = 0.25$ и $K'/K = 3.5$. Пользуясь формулой 17.3.15 при $K'/K = 0.25$ можно записать итерационную формулу

$$m^{(n+1)} = 1 - 16e^{-4\pi}\exp\left[-\pi L(m^{(n)})/K'(m^{(n)})\right].$$

Используя табл. 17.1 и 17.4 и итерационную формулу, получим

n	$m^{(n)}$
0	1
1	0.99994 42025
2	0.99994 42041
3	0.99994 42041

Таким образом, $m = 0.99994\,42041$.

Пользуясь формулой 17.3.16 при $K'/K = 3.5$, можно записать итерационную формулу

$$m^{(n+1)} = 16e^{-3.5\pi}\exp\left[-\pi L(m_1^{(n)})/K(m^{(n)})\right]$$

и получить

n	$m^{(n)}$
0	0
1	0.00026841 25043
2	0.00026837 65
3	0.00026837 65

Таким образом,

$$m = 0.00026\,83765.$$

Приведенные итерационные формулы в комбинации с табл. 17.4 вспомогательной функции $L(m)$ дают возможность расширить табл. 17.3 в области $K'/K > 3$ и $K'/K < 0.3$.

Пример 7. Вычислить с 5D эллиптическую функцию Якоби $\mathrm{sn}\,(0.75342|0.7)$, используя табл. 17.5.

Здесь

$$m = \sin^2\alpha = 0.7, \quad \alpha = 56.789089^\circ,$$

$$\mathrm{sn}\,(0.75342\,|\,0.7) = \sin\varphi,$$

где φ определяется из уравнения

$$F(\varphi\diagdown 56.789089^\circ) = 0.75342.$$

Просмотр табл. 17.5 показывает, что φ лежит между 40° и 45°. Из этой таблицы выписываем

φ \ α	56°	58°	60°
35°	0.63803	0.63945	0.64085
40°	0.73914	0.74138	0.74358
45°	0.84450	0.84788	0.85122
50°	0.95479	0.95974	0.96465

Отсюда интерполяцией по α получаем таблицу

$F(\varphi\diagdown 56.789089^\circ)$:

φ	F	Δ	Δ_2	Δ_3
35°	0.63859			
		10244		
40°	0.74003		437	
		10581		72
45°	0.84584		509	
		11090		
50°	0.95674			

Грубая оценка теперь показывает, что φ лежит между 40° и 41°. Поэтому прямой интерполяцией в последней таблице найдем

φ	$F(\varphi\diagdown 56.789089^\circ)$
40.0°	0.74003
40.5°	0.75040
41.0°	0.76082

Отсюда с помощью обратной линейной интерполяции получим

$$\varphi = 40.5^\circ + 0.5^\circ\left[\frac{0.75342 - 0.75040}{0.76082 - 0.75040}\right] = 40.6449^\circ$$

и, следовательно, $\sin\varphi = 0.65137 = \mathrm{sn}\,(0.75342\,|\,0.7)$. Этот метод интерполяции по двум переменным для нахождения $\mathrm{sn}\,(u|m)$ дается как иллюстрация. Другие более непосредственные методы, например метод арифметико-геометрического среднего, описанный в 17.6 и проиллюстрированный в гл. 16, являются менее трудоемкими.

Пример 8. Вычислить

$$\int_2^3 [(2t^2+1)(t^2-2)]^{-1/2}\,dt.$$

Первый метод. Сведение к стандартной форме и интерполяция по двум переменным

В качестве стандартной формы можно использовать формулу 17.4.49, что дает

$$\sqrt{5}\int_2^3 [(2t^2+1)(t^2-2)]^{-1/2}\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}}\int_{\sqrt{2}}^{3}\frac{dt}{\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)(t^2-2)}} -$$

$$- \sqrt{\frac{5}{2}}\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dt}{\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)(t^2-2)}} =$$

$$= F(\varphi_1\diagdown\alpha) - F(\varphi_2\diagdown\alpha),$$

где $a^2 = 1/2$, $b^2 = 2$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = b/a = 2$, откуда $\sin^2\alpha = 1/5$; $\cos\varphi_1 = b/x = \sqrt{2}/3$, $\cos\varphi_2 = b/x = \sqrt{2}/2$.

Таким образом,

$$\alpha = 26.56505\,12^\circ, \quad \varphi_1 = 61.87449\,43^\circ, \quad \varphi_2 = 45^\circ.$$

Интерполируя по двум переменным φ и α в табл. 17.5, найдем

$$F(\varphi_1\backslash\alpha) = 1.115921, \quad F(\varphi_2\backslash\alpha) = 0.800380.$$

Таким образом, искомый интеграл равен 0.141114.

Второй метод. Численное интегрирование

Формула Симпсона с 11 ординатами с шагом 0 1 для заданного интеграла даст 0 141117.

Пример 9. Вычислить

$$\int_2^4 [(t^2-2)(t^2-4)]^{-1/2}\,dt.$$

Первый метод. Сведение к стандартной форме и интерполяция по двум переменным

Здесь можно использовать в качестве стандартной формы 17.4 48, замечая при этом, что $a^2 = 4$ и $b^2 = 2$.

Тогда

$$\int_2^4 [(t^2-2)(t^2-4)]^{-1/2}\,dt = \int_2^\infty - \int_4^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\,[F(\varphi_1\backslash\alpha) - F(\varphi_2\backslash\alpha)],$$

где $\sin\alpha = b/a = \sqrt{2}/2$, $\sin\varphi_1 = a/x = 2/2 = 1$, $\sin\varphi_2 = a/x = 2/4 = 1/2$, т е. $\alpha = 45^\circ$, $\varphi_1 = 90^\circ$, $\varphi_2 = 30^\circ$. Интегралы $F(\varphi_1\backslash\alpha) = F(90^\circ\backslash 45^\circ)$ и $F(\varphi_2\backslash\alpha) = F(30^\circ\backslash 45^\circ)$ найдем интерполяцией в табл. 17.5.

Таким образом, окончательно имеем

$$\int_2^4 [(t^2-2)(t^2-4)]^{-1/2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,[1.854075 - 0.535623] = 0.659\,226.$$

Второй метод. Численное интегрирование

Заданный интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция имеет особенность вида $[8(t-2)]^{-1/2}$ при $t = 2$. Для численного интегрирования необходимо выделять особенность, т е. представить интеграл в виде

$$\int_2^4 [(t^2-2)\,(t^2-4)]^{-1/2}dt = \int_2^4 f(t)dt + \int_2^4 [8(t-2)]^{-1/2}\,dt,$$

где

$$f(t) = [(t^2-2)(t^2-4)]^{-1/2} - [8(t-2)]^{-1/2}.$$

Так как $\lim\limits_{t\to 2} f(t) = 0$, то положим $f(2) = 0$. Теперь интеграл $\int_2^4 f(t)\,dt$ можно вычислить по одной из формул численного интегрирования.

Поскольку

$$\int_2^4 [8(t-2)]^{-1/2}dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(t-2)^{1/2}\right]_2^4 = 1,$$

то

$$1 + \int_2^4 f(t)\,dt = 1 - 0.340773 = 0.659227.$$

Пример 10. Вычислить

$$u = \int_{17}^\infty (x^3 - 7x + 6)^{-1/2}\,dx.$$

$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$. Используем стандартную форму 17.4.65 при $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = -3$. Следовательно, $m = \sin^2\alpha = 4/5$, $\lambda = \sqrt{5}/2$, $\cos^2\varphi = 3/4$. Тогда $\alpha = 63.434949^\circ$, $\varphi = 30^\circ$. Пользуясь табл. 17.5, найдем

$$u = 2(5)^{-1/2}\,F(30^\circ\backslash 63.434949^\circ) =$$

$$= 2(5)^{-1/2}\,(0.543604) = 0.486214.$$

Рассматриваемый интеграл записан в форме Вейерштрасса, откуда $17 = \wp\left(\frac{u}{2};\ 28, -24\right)$ (см. гл. 18).

Пример 11. Вычислить

$$\int_0^{2/3} (24 - 12t + 2t^2 - t^3)^{-1/2}\,dt.$$

Имеем

$$24 - 12t + 2t^2 - t^3 = -(t-2)(t^2+12) = -P(t).$$

Так как $P(t)$ имеет единственный действительный корень, то в соответствии с 17 4 74 при $P(t) = t^3 - 2t^2 + 12t - 24$, $\beta = 2$ имеем $P'(2) = 16$, $P''(2) = 8$, $\lambda = 2$ и $m = \sin^2\alpha = 1/4$, $\alpha = 30^\circ$.

Используя в качестве стандартной формы 17.4 74, получим

$$\int_0^{2/3} (24 - 12t + 2t^2 - t^3)^{-1/2}\,dt =$$

$$= \int_0^2 - \int_{2/3}^2 = \frac{1}{2}\,[F(\varphi_1\backslash 60^\circ) - F(\varphi_2\backslash 60^\circ)],$$

где

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{3}, \quad \varphi_1 = 70.52877\,93^\circ,$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{2}, \quad \varphi_2 = 60^\circ.$$

Пользуясь табл 17.5, для исходного интеграла будем иметь

$$\frac{1}{2}\,[1.510344 - 1.212597] = 0.148874.$$

Пример 12. Используя преобразование Ландена вычислить

$$\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)^{-1/2}d\theta \text{ с 5D.}$$

Первый метод. Понижающее преобразование Ландена

Используя 17.5.1, получим

$$1+\sin\alpha_1=\frac{2}{1+\cos 30^\circ}=1.071797,$$

$$\cos\alpha_1=[(1-\sin\alpha_1)(1+\sin\alpha_1)]^{1/2}=0.997419,$$

$$1+\sin\alpha_2=\frac{2}{1+\cos\alpha_1}=1.001292;\ \cos\alpha_2=0.999999,$$

$$1+\sin\alpha_3=\frac{2}{1+\cos\alpha_2}=1.000000.$$

Таким образом, с учетом 17.5.7, для исходного интеграла получим

$$F(90^\circ\diagdown 30^\circ)=$$

$$=\frac{\pi}{2}(1.071797)(1.001292)=1.68575 \text{ с 5D.}$$

Второй метод. Повышающее преобразование Ландена

Используя 17.5.11 при $\alpha_0=30^\circ$, $\varphi_0=90^\circ$, получим

$$1+\cos\alpha_{n+1}=2/(1+\sin\alpha_n).$$

n	$\cos\alpha_n$	$\sin\alpha_n$
1	0.33333 333	0.94280 904
2	0.02943 725	0.99956 663
3	0.00021 673	0.99999 998

$$\sin(2\varphi_1-90^\circ)=\sin 30^\circ,\qquad \varphi_1=60^\circ,$$

$$\sin(2\varphi_2-\varphi_1)=\sin\alpha_1\sin\varphi_1,\quad \varphi_2=57.367805^\circ,$$

$$\sin(2\varphi_3-\varphi_2)=\sin\alpha_2\sin\varphi_2,\quad \varphi_3=57.348426^\circ,$$

$$\sin(2\varphi_4-\varphi_3)=\sin\alpha_3\sin\varphi_3,\quad \varphi_4=57.348425^\circ=\Phi.$$

Пользуясь формулой 17.5.16, окончательно найдем

$$F(90^\circ\diagdown 30^\circ)=\frac{2}{1.5}\,\frac{2}{1.94280904}\,\frac{2}{1.99956\,663}\times$$

$$\times\frac{2}{1.99999998}\ln\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\Phi}{2}\right)=$$

$$=1.37288\,050\ln\operatorname{tg}73.674213^\circ=$$

$$=1.37288050(1.22789\,30)=1.68575 \text{ с 5D.}$$

Пример 13. Вычислить значение $F(89.5^\circ\diagdown 89.5^\circ)$.

Первый метод

В этом случае интерполяция в табл. 17.5 невозможна. Используем формулу 17.4.13, что дает

$$F(89.5^\circ\diagdown 89.5^\circ)=F(90^\circ\diagdown 89.5^\circ)-F(\psi\diagdown 89.5^\circ),$$

где

$$\operatorname{ctg}\psi=\cos\alpha\operatorname{tg}\varphi=\sin 89.5^\circ=\cos 0.5^\circ,$$

$$\psi=45.00109\,084^\circ.$$

По табл. 17.5 находим $F(\psi\diagdown 89.5^\circ)=0.881390$. Интеграл

$$F(90^\circ\diagdown 89.5^\circ)=K(\sin^2 89.5^\circ)=$$

$$=K(0{,}99992\,38476)=6{,}12777\,88.$$

Таким образом, $F(89.5^\circ\diagdown 89.5^\circ)=5.246\ 389.$

Второй метод

По разрешенной относительно $\cos\alpha_{n+1}$ формуле 17.5.11 (повышающее преобразование Ландена) получим

$$\cos\alpha_1=(1-\sin 89.5^\circ)/(1+\sin 89.5^\circ)=$$

$$=0.00001\,90388,$$

$$\sin\alpha_1=[(1-\cos\alpha_1)(1+\cos\alpha_1)]^{1/2}=0.99999\,99998,$$

$$\cos\alpha_2\approx 0,$$

$$\sin\alpha_2\approx 1.$$

Формула 17.5.12 дает

$$\sin(2\varphi_1-89.5^\circ)=\sin 89.5^\circ\sin 89.5^\circ=0.99992\,38476,$$

$$2\varphi_1-89.5^\circ=89.2929049^\circ,\quad \varphi_1=89.39645\,245^\circ,$$

$$\sin(2\varphi_2-\varphi_1)=\sin\alpha_1\sin\varphi_1,\quad \varphi_2=89.39645\,602^\circ,$$

$$\sin(2\varphi_3-\varphi_2)=\sin\varphi_2,\quad \varphi_3=\varphi_2=\Phi.$$

Используя формулу 17.5.16, получим

$$F(89.5^\circ\diagdown 89.5^\circ)=$$

$$=\left(\frac{1}{0.99996\,19231}\right)^{1/2}\ln(\operatorname{tg}89.69822\,801^\circ)=5{,}24640.$$

Пример 14. Вычислить

$$\int_1^2[(9-t^2)(16+t^2)^2]^{-1/2}\,dt \text{ с 5D.}$$

По формуле 17.4.51 данный интеграл запишем в виде

$$\int_1^2\frac{dt}{(16+t^2)\sqrt{(9-t^2)(16+t^2)}}=$$

$$=\int_0^2-\int_0^1=\frac{1}{80}[E(\varphi_1\diagdown\alpha)-E(\varphi_2\diagdown\alpha)],$$

где

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\quad \alpha=36.86990^\circ,$$

$$\sin\varphi_1=\frac{1}{3}\sqrt{5},\quad \varphi_1=48.18968^\circ,$$

$$\sin\varphi_2=\frac{5}{3\sqrt{17}},\quad \varphi_2=23.84264^\circ.$$

Интерполяцией в табл. 17.6 (по двум переменным) найдем значения $E(\varphi_1\diagdown\alpha)$ и $E(\varphi_2\diagdown\alpha)$, и тогда искомый интеграл будет равен

$$\frac{1}{80}[0.80904 - 0.41192] = 0.00496.$$

Формула Симпсона с 3 ординатами дает

$$\frac{1}{6}[0.00504 + 0.01975 + 0.005] = 0.00496.$$

Пример 15. Вычислить

$$\Pi\left(\frac{1}{16};\ 45°\diagdown 30°\right) = \int_0^{\pi/4}\left(1-\frac{1}{16}\sin^2\theta\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)^{-1/2}d\theta \text{ с 6D.}$$

Здесь имеет место случай (I) интеграла третьего рода, так как $0 < n < \sin^2\alpha$. Воспользуемся формулой 17.7.3 при

$$n = \frac{1}{16},\ \varphi = 45°,\ \alpha = 30°,$$

$$\varepsilon = \arcsin(n/\sin^2\alpha)^{1/2} = 30°,$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}F(30°\diagdown 30°)\,/\,K(30°) = 0.49332\,60,$$

$$\nu = \frac{\pi}{2}F(45°\diagdown 30°)\,/\,K(30°) = 0.74951\,51,$$

$$\delta_1 = (16/45)^{1/2},$$

$$q = q(\alpha) = 0.01797\,24.$$

Далее,

$$\Pi\left(\frac{1}{16};\ 45°\diagdown 30°\right) = (16/45)^{1/2}\left\{-\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_4(\nu+\beta)}{\vartheta_4(\nu-\beta)} + \frac{\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta_1(\beta)}\ \nu\right\}.$$

Используя q-ряды 16.27 для ϑ-функций, найдем

$$\Pi\left(\frac{1}{16};\ 45°\diagdown 30°\right) = (16/45)^{1/2}\{-0.02995\,89 + (1.86096\,21)(0.74951\,51)\} = 0.813845.$$

Для сравнения интерполяцией в табл. 17.9 по четырехточечной формуле Лагранжа получим

$$\Pi\left(\frac{1}{16};\ 45°\diagdown 30°\right) = 0.81385.$$

Пример 16. Вычислить полный эллиптический интеграл

$$\Pi\left(\frac{1}{16}\diagdown 30°\right) \text{ с 6D.}$$

По формуле 17.7.6 имеем

$$\Pi\left(\frac{1}{16}\diagdown 30°\right) = K(30°) + (16/45)^{1/2}K(30°)\,Z(\varepsilon\diagdown 30°),$$

где $\varepsilon = \arcsin(n/\sin^2\alpha)^{1/2} = 30°$. Используя табл. 17.2 и 17.7, найдем

$$\Pi\left(\frac{1}{16}\diagdown 30°\right) = 1.743055.$$

Для сравнения интерполяцией в табл. 17.9 по пятиточечной формуле Лагранжа получим

$$\Pi\left(\frac{1}{16}\diagdown 30°\right) = 1.74302.$$

Пример 17. Вычислить

$$\Pi\left(\frac{5}{8};\ 45°\diagdown 30°\right) = \int_0^{\pi/4}\left(1-\frac{5}{8}\sin^2\theta\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)^{-1/2}d\theta \text{ с 6D.}$$

Здесь имеет место случай (III) интеграла третьего рода, так как $\sin^2\alpha < n < 1$. Воспользуемся формулами этого раздела и формулами 17.7.10 при $n = 5/8$, $\varphi = 45°$, $\alpha = 30°$,

$$\varepsilon = \arcsin[(1-n)\,/\,\cos^2\alpha]^{1/2} = 45°,$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}F(45°/60°)\,/\,K(30°) = 0.79317\,74,$$

$$\nu = \frac{\pi}{2}F(45°\diagdown 30°)/K(30°) = 0.74951\,51,$$

$$\delta_2 = (40/9)^{1/2},$$

$$q(\alpha) = q = 0.01797\,24.$$

Далее, согласно 17.7.11

$$\Pi\left(\frac{5}{8};\ 45°\diagdown 30°\right) = (40/9)^{1/2}(\lambda - 4\mu\nu) = 2.10818\,51\,\{0.55248\,32 - 4(0.03854\,26)\times(0.74951\,51)\} = 0.921129.$$

Для вычисления λ и μ применялись формулы 17.7.12 и 17.7.13.

Для сравнения интерполяцией в табл. 17.9 по четырехточечной формуле Лагранжа получим

$$\Pi\left(\frac{5}{8};\ 45°\diagdown 30°\right) = 0.92113.$$

Пример 18. Вычислить полный эллиптический интеграл третьего рода

$$\Pi\left(\frac{5}{8}\diagdown 30°\right) \text{ с 5D.}$$

По формуле 17.7.14 имеем

$$\Pi\left(\frac{5}{8}\diagdown 30°\right) = K(30°) + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{40}{9}}\,[1 - \Lambda_0(\varepsilon\diagdown 30°)],$$

где $\varepsilon = \arcsin[(1-n)\,/\,\cos^2\alpha]^{1/2} = 45°$.

Пользуясь табл. 17.2 и 17.8, получим

$$\Pi\left(\frac{5}{8}\diagdown 30°\right) = 2.80099.$$

Для сравнения интерполяцией в табл. 17.9 по шеститочечной формуле Лагранжа получим

$$\Pi\left(\frac{5}{8}\backslash 30^\circ\right) = 2.80126.$$

Причиной расхождения результатов является интерполяция в табл. 17.9 по n при $\varphi = 90^\circ$.

Пример 19. Вычислить

$$\Pi\left(\frac{5}{4};\ 45^\circ\backslash 30^\circ\right) =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(1-\frac{5}{4}\sin^2\theta\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)^{-1/2}d\theta \text{ с } 5D.$$

Здесь $n = 5/4$, $\varphi = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, и так как характеристика n больше единицы, то используем формулы 17.7.7:

$$N = n^{-1}\sin^2\alpha = 0.2,$$

$$p_1 = [(n-1)(1-n^{-1}\sin^2\alpha)]^{1/2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2}.$$

По формуле 17.7.8 имеем

$$\Pi\left(\frac{5}{4};\ 45^\circ\backslash 30^\circ\right) = -\Pi(0.2;\ 45^\circ\backslash 30^\circ) + F(45^\circ\backslash 30^\circ) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\ln\frac{(7/8)^{1/2}+(1/5)^{1/2}}{(7/8)^{1/2}-(1/5)^{1/2}},$$

$$\Pi\left(\frac{5}{4};\ 45^\circ\backslash 30^\circ\right) = -0.83612 + 0.80437 + \frac{1}{2}\sqrt{5}\ln\frac{\sqrt{35}+\sqrt{8}}{\sqrt{35}-\sqrt{8}} = 1.13214$$

(использованы табл. 17.9 и 17.5).

Численное интегрирование дает тот же результат.

Пример 20 Вычислить

$$\Pi\left(-\frac{1}{4};\ 45^\circ\backslash 30^\circ\right) =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)^{-1/2}d\theta \text{ с } 5D.$$

Так как здесь характеристика является отрицательной, то используем формулы 17.7.15 при $n = -1/4$, $\sin^2\alpha = 1/4$,

$$N = (1-n)^{-1}(\sin^2\alpha - n) = 0.4,$$

$$p_2 = [-n(1-n)^{-1}(\sin^2\alpha - n)]^{1/2} = \sqrt{0.1}.$$

Следовательно, по формуле 17.7.16 запишем

$$(5/2)^{1/2}\,\Pi\left(-\frac{1}{4};\ 45^\circ\backslash 30^\circ\right) =$$

$$= (9/40)^{1/2}\,\Pi\left(\frac{2}{5};\ 45^\circ\backslash 30^\circ\right) + \frac{1}{2}(5/2)^{1/2}F(45^\circ\backslash 30^\circ) + \operatorname{arctg}(35)^{-1/2}$$

Используя табл. 4.14, 17.5 и 17.9, окончательно получим

$$\Pi\left(-\frac{1}{4};\ 45^\circ\backslash 30^\circ\right) = 0.76987.$$

Таблица 17.1. Полные эллиптические интегралы первого и второго рода и параметр Якоби q как функции параметра m

$$K(m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-m\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \qquad K'(m)=K(m_1)$$

$$E(m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-m\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \qquad E'(m)=E(m_1)$$

$$q(m)=\exp\left[-\pi K'(m)/K(m)\right] \qquad q_1(m)=q(m_1)$$

m	$K(m)$	$K'(m)$	$q(m)$	m_1
0.00	1.57079 63267 94897	∞	0.00000 00000 00000	1.00
0.01	1.57474 55615 17356	3.69563 73629 89875	0.00062 81456 60383	0.99
0.02	1.57873 99120 07773	3.35414 14456 99160	0.00126 26665 23204	0.98
0.03	1.58278 03424 06373	3.15587 49478 91841	0.00190 36912 69025	0.97
0.04	1.58686 78474 54166	3.01611 24924 77648	0.00255 13525 13689	0.96
0.05	1.59100 34537 90792	2.90833 72484 44552	0.00320 57869 70686	0.95
0.06	1.59518 82213 21610	2.82075 24967 55872	0.00386 71356 22010	0.94
0.07	1.59942 32446 58510	2.74707 30040 24667	0.00453 55438 98018	0.93
0.08	1.60370 96546 39253	2.68355 14063 15229	0.00521 11618 66885	0.92
0.09	1.60804 86199 30513	2.62777 33320 84344	0.00589 41444 34269	0.91
0.10	1.61244 13487 20219	2.57809 21133 48173	0.00658 46515 53858	0.90
0.11	1.61688 90905 05203	2.53333 45460 02200	0.00728 28484 49518	0.89
0.12	1.62139 31379 80658	2.49263 53232 39716	0.00798 89058 49815	0.88
0.13	1.62595 48290 38433	2.45533 80283 21380	0.00870 30002 35762	0.87
0.14	1.63057 55488 81754	2.42093 29603 44303	0.00942 53141 02678	0.86
0.15	1.63525 67322 64580	2.38901 64863 25580	0.01015 60362 37153	0.85
0.16	1.63999 98658 64511	2.35926 35547 45007	0.01089 53620 10173	0.84
0.17	1.64480 64907 98881	2.33140 85677 50251	0.01164 34936 87540	0.83
0.18	1.64967 82052 94514	2.30523 17368 77189	0.01240 06407 58856	0.82
0.19	1.65461 66675 22527	2.28054 91384 22770	0.01316 70202 86392	0.81
0.20	1.65962 35986 10528	2.25720 53268 20854	0.01394 28572 75318	0.80
0.21	1.66470 07858 45692	2.23506 77552 60349	0.01472 83850 66891	0.79
0.22	1.66985 00860 83368	2.21402 24978 46332	0.01552 38457 56320	0.78
0.23	1.67507 34293 77219	2.19397 09253 19189	0.01632 94906 37206	0.77
0.24	1.68037 28228 48361	2.17482 70902 46414	0.01714 55806 74605	0.76
0.25	1.68575 03548 12596	2.15651 56474 99643	0.01797 23870 08967	0.75
0.26	1.69120 81991 86631	2.13897 01837 52114	0.01881 01914 93399	0.74
0.27	1.69674 86201 96168	2.12213 18631 57396	0.01965 92872 66940	0.73
0.28	1.70237 39774 10990	2.10594 83200 52758	0.02051 99793 66788	0.72
0.29	1.70808 67311 34606	2.09037 27465 52360	0.02139 25853 82708	0.71
0.30	1.71388 94481 78791	2.07536 31352 92469	0.02227 74361 57154	0.70
0.31	1.71978 48080 56405	2.06088 16467 30131	0.02317 48765 35013	0.69
0.32	1.72577 56096 29320	2.04689 40772 10577	0.02408 52661 67250	0.68
0.33	1.73186 47782 52098	2.03336 94091 52233	0.02500 89803 73177	0.67
0.34	1.73805 53734 56358	2.02027 94286 03592	0.02594 64110 66576	0.66
0.35	1.74435 05972 25613	2.00759 83984 24376	0.02689 79677 51443	0.65
0.36	1.75075 38029 15753	1.99530 27776 64729	0.02786 40785 93729	0.64
0.37	1.75726 85048 82456	1.98337 09795 27821	0.02884 51915 76181	0.63
0.38	1.76389 83888 83731	1.97178 31617 25656	0.02984 17757 44138	0.62
0.39	1.77064 73233 33534	1.96052 10441 65830	0.03085 43225 51033	0.61
0.40	1.77751 93714 91253	1.94956 77498 06026	0.03188 33473 13363	0.60
0.41	1.78451 88046 81873	1.93890 76652 34220	0.03292 93907 86003	0.59
0.42	1.79165 01166 52966	1.92852 63181 14418	0.03399 30208 70043	0.58
0.43	1.79891 80391 87685	1.91841 02691 09912	0.03507 48344 66773	0.57
0.44	1.80632 75591 07699	1.90854 70162 81211	0.03617 54594 93133	0.56
0.45	1.81388 39368 16983	1.89892 49102 71554	0.03729 55570 75822	0.55
0.46	1.82159 27265 56821	1.88953 30788 53096	0.03843 58239 43468	0.54
0.47	1.82945 97985 64730	1.88036 13596 22178	0.03959 69950 38753	0.53
0.48	1.83749 13633 55796	1.87140 02398 11034	0.04077 98463 75263	0.52
0.49	1.84569 39983 74724	1.86264 08023 32739	0.04198 51981 67183	0.51
0.50	1.85407 46773 01372	1.85407 46773 01372	0.04321 39182 63772	0.50
m_1	$K'(m)$	$K(m)$	$q_1(m)$	m
	$\begin{bmatrix}(-5)2\\11\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-6)3\\9\end{bmatrix}$	

См. примеры 3 — 4.

Значения $E(m)$ и $E'(m)$ взяты из [17.13].

Таблица 17.1. Полные эллиптические интегралы первого и второго рода и параметр Якоби q как функции параметра m

$$K(m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-m\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \qquad K'(m)=K(m_1)$$

$$E(m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-m\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \qquad E'(m)=E(m_1)$$

$$q(m)=\exp\left[-\pi K'(m)/K(m)\right] \qquad q_1(m)=q(m_1)$$

m	$q_1(m)$	$E(m)$	$E'(m)$	m_1
0.00	1.00000 00000 00000	1.57079 6327	1.00000 0000	1.00
0.01	0.26219 62679 17709	1.56686 1942	1.01599 3546	0.99
0.02	0.22793 45740 67492	1.56291 2645	1.02859 4520	0.98
0.03	0.20687 98108 47842	1.55894 8244	1.03994 6861	0.97
0.04	0.19149 63082 09940	1.55496 8546	1.05050 2227	0.96
0.05	0.17931 60069 55723	1.55097 3352	1.06047 3728	0.95
0.06	0.16920 75311 46133	1.54696 2456	1.06998 6130	0.94
0.07	0.16055 42010 73011	1.54293 5653	1.07912 1407	0.93
0.08	0.15298 14810 09741	1.53889 2730	1.08793 7503	0.92
0.09	0.14624 42694 73236	1.53483 3465	1.09647 7517	0.91
0.10	0.14017 31269 54262	1.53075 7637	1.10477 4733	0.90
0.11	0.13464 58847 92091	1.52666 5017	1.11285 5607	0.89
0.12	0.12957 14695 20553	1.52255 5369	1.12074 1661	0.88
0.13	0.12488 01223 52049	1.51842 8454	1.12845 0735	0.87
0.14	0.12051 71957 28729	1.51428 4027	1.13599 7843	0.86
0.15	0.11643 90607 17472	1.51012 1831	1.14339 5792	0.85
0.16	0.11261 03164 23363	1.50594 1612	1.15065 5629	0.84
0.17	0.10900 18330 23834	1.50174 3101	1.15778 6979	0.83
0.18	0.10558 93457 98477	1.49752 6026	1.16479 8293	0.82
0.19	0.10235 24235 13544	1.49329 0109	1.17169 7053	0.81
0.20	0.09927 36973 38825	1.48903 5058	1.17848 9924	0.80
0.21	0.09633 82749 65990	1.48476 0581	1.18518 2883	0.79
0.22	0.09353 32888 80648	1.48046 6375	1.19178 1311	0.78
0.23	0.09084 75434 60707	1.47615 2126	1.19829 0087	0.77
0.24	0.08827 12359 87862	1.47181 7514	1.20471 3641	0.76
0.25	0.08579 57337 02195	1.46746 2209	1.21105 6028	0.75
0.26	0.08341 33938 83117	1.46308 5873	1.21732 0955	0.74
0.27	0.08111 74173 41165	1.45868 8155	1.22351 1839	0.73
0.28	0.07890 17281 26084	1.45426 8698	1.22963 1828	0.72
0.29	0.07676 08740 04317	1.44982 7128	1.23568 3836	0.71
0.30	0.07468 99435 37179	1.44536 3064	1.24167 0567	0.70
0.31	0.07268 44965 37110	1.44087 6115	1.24759 4538	0.69
0.32	0.07074 05053 87511	1.43636 5871	1.25345 8093	0.68
0.33	0.06885 43052 47167	1.43183 1919	1.25926 3421	0.67
0.34	0.06702 25515 69108	1.42727 3821	1.26501 2576	0.66
0.35	0.06524 21836 78738	1.42269 1133	1.27070 7480	0.65
0.36	0.06351 03934 00746	1.41808 3394	1.27634 9943	0.64
0.37	0.06182 45979 15898	1.41345 0127	1.28194 1668	0.63
0.38	0.06018 24161 79938	1.40879 0839	1.28748 4262	0.62
0.39	0.05858 16483 56838	1.40410 5019	1.29297 9239	0.61
0.40	0.05702 02578 14610	1.39939 2139	1.29842 8034	0.60
0.41	0.05549 63553 09081	1.39465 1652	1.30383 2008	0.59
0.42	0.05400 81850 43499	1.38988 2992	1.30919 2448	0.58
0.43	0.05255 41123 42653	1.38508 5568	1.31451 0576	0.57
0.44	0.05113 26127 21764	1.38025 8774	1.31978 7557	0.56
0.45	0.04974 22621 64574	1.37540 1972	1.32502 4498	0.55
0.46	0.04838 17284 53289	1.37051 4505	1.33022 2453	0.54
0.47	0.04704 97634 16424	1.36559 5691	1.33538 2430	0.53
0.48	0.04574 51959 80149	1.36064 4814	1.34050 5388	0.52
0.49	0.04446 69259 25028	1.35566 1135	1.34559 2245	0.51
0.50	0.04321 39182 63772	1.35064 3881	1.35064 3881	0.50
m_1	$q(m)$	$E'(m)$	$E(m)$	m
		$\begin{bmatrix}(-6)4\\6\end{bmatrix}$		

Таблица 17.2. Полные эллиптические интегралы первого и второго рода и параметр Якоби q как функции модулярного угла α

$$K(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \qquad K'(\alpha)=K(90^\circ-\alpha)$$

$$E(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \qquad E'(\alpha)=E(90^\circ-\alpha)$$

$$q(\alpha)=\exp\left[-\pi K'(\alpha)/K(\alpha)\right] \qquad q_1(\alpha)=q(90^\circ-\alpha)$$

α	$K(\alpha)$	$K'(\alpha)$	$q(\alpha)$	$90^\circ-\alpha$
0°	1.57079 63267 94897	∞	0.00000 00000 00000	90°
1	1.57091 59581 27243	5.43490 98296 25564	0.00001 90395 55387	89
2	1.57127 49523 72225	4.74271 72652 78886	0.00007 61698 24680	88
3	1.57187 36105 14009	4.33865 39759 99725	0.00017 14256 42257	87
4	1.57271 24349 95227	4.05275 81695 49437	0.00030 48651 48814	86
5	1.57379 21309 24768	3.83174 19997 84146	0.00047 65699 16867	85
6	1.57511 36077 77251	3.65185 59694 78752	0.00068 66451 27305	84
7	1.57667 79815 92838	3.50042 24991 71838	0.00093 52197 97816	83
8	1.57848 65776 88648	3.36986 80266 68445	0.00122 24470 64294	82
9	1.58054 09338 95721	3.25530 29421 43555	0.00154 85045 16579	81
10	1.58284 28043 38351	3.15338 52518 87839	0.00191 35945 90170	80
11	1.58539 41637 75538	3.06172 86120 38789	0.00231 79450 15821	79
12	1.58819 72125 27520	2.97856 89511 81384	0.00276 18093 29252	78
13	1.59125 43820 13687	2.90256 49406 70027	0.00324 54674 43525	77
14	1.59456 83409 31825	2.83267 25829 18100	0.00376 92262 86978	76
15	1.59814 20021 12540	2.76806 31453 68768	0.00433 34205 09983	75
16	1.60197 85300 86952	2.70806 76145 90486	0.00493 84132 64213	74
17	1.60608 13494 10364	2.65213 80046 30204	0.00558 45970 58517	73
18	1.61045 41537 89663	2.59981 97300 61099	0.00627 23946 95994	72
19	1.61510 09160 67722	2.55073 14496 27254	0.00700 22602 97383	71
20	1.62002 58991 24204	2.50455 00790 01634	0.00777 46804 16442	70
21	1.62523 36677 58843	2.46099 94583 04126	0.00859 01752 53626	69
22	1.63072 91016 30788	2.41984 16537 39137	0.00944 92999 75082	68
23	1.63651 74093 35819	2.38087 01906 04429	0.01035 26461 44729	67
24	1.64260 41437 12491	2.34390 47244 46913	0.01130 08432 78049	66
25	1.64899 52184 78530	2.30878 67981 67196	0.01229 45605 27181	65
26	1.65569 69263 10344	2.27537 64296 11676	0.01333 45085 07947	64
27	1.66271 59584 91370	2.24354 93416 98626	0.01442 14412 80638	63
28	1.67005 94262 69580	2.21319 46949 79374	0.01555 61584 97708	62
29	1.67773 48840 80745	2.18421 32169 49248	0.01673 95077 33023	61
30	1.68575 03548 12596	2.15651 56474 99643	0.01797 23670 08967	60
31	1.69411 43573 05914	2.13002 14383 99325	0.01925 57475 39635	59
32	1.70283 59363 12341	2.10465 76584 91159	0.02059 05967 10437	58
33	1.71192 46951 55678	2.08035 80666 91578	0.02197 80013 16901	57
34	1.72139 08313 74249	2.05706 23227 97365	0.02341 90910 88188	56
35	1.73124 51756 57058	2.03471 53121 85791	0.02491 50625 23981	55
36	1.74149 92344 26774	2.01326 65652 05468	0.02646 71830 76961	54
37	1.75216 52364 68845	1.99266 97557 34209	0.02807 67957 17219	53
38	1.76325 61840 59342	1.97288 22662 74650	0.02974 53239 19583	52
39	1.77478 59091 05608	1.95386 48092 51663	0.03147 42771 20286	51
40	1.78676 91348 85021	1.93558 10960 04722	0.03326 52566 95577	50
41	1.79922 15440 49811	1.91799 75464 36423	0.03511 99625 22096	49
42	1.81215 98536 62126	1.90108 30334 63664	0.03704 02001 87133	48
43	1.82560 18981 35889	1.88480 86573 80404	0.03902 78889 26607	47
44	1.83956 67210 93652	1.86914 75460 26462	0.04108 50703 79885	46
45	1.85407 46773 01372	1.85407 46773 01372	0.04321 39182 63772	45
$90^\circ-\alpha$	$K'(\alpha)$	$K(\alpha)$	$q_1(\alpha)$	α
	$\begin{bmatrix}(-5)7\\11\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-6)9\\9\end{bmatrix}$	

Взято из [17.17].

Таблица 17.2 Полные эллиптические интегралы первого и второго рода и параметр Якоби q как функции модулярного угла α

$$K(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \qquad K'(\alpha)=K(90^\circ-\alpha)$$

$$E(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \qquad E'(\alpha)=E(90^\circ-\alpha)$$

$$q(\alpha)=\exp\left[-\pi K'(\alpha)/K(\alpha)\right] \qquad q_1(\alpha)=q(90^\circ-\alpha)$$

α	$q_1(\alpha)$	$E(\alpha)$	$E'(\alpha)$	$90^\circ-\alpha$
0°	1.00000 00000 00000	1.57079 63267 94897	1.00000 00000 00000	90°
1	0.40330 93063 38378	1.57067 67091 27960	1.00075 15777 01834	89
2	0.35316 56482 96037	1.57031 79198 97448	1.00258 40855 27552	88
3	0.32040 03371 34866	1.56972 01504 23979	1.00525 85872 09152	87
4	0.29548 83855 58691	1.56888 37196 07763	1.00864 79569 07096	86
5	0.27517 98048 73563	1.56780 90739 77622	1.01266 35062 34396	85
6	0.25794 01957 66337	1.56649 67877 60132	1.01723 69183 41019	84
7	0.24291 29743 06665	1.56494 75629 69419	1.02231 25881 67584	83
8	0.22956 71598 81194	1.56316 22295 18261	1.02784 36197 40833	82
9	0.21754 89496 99726	1.56114 17453 51334	1.03378 94623 90754	81
10	0.20660 97552 00965	1.55888 71966 01596	1.04011 43957 06010	80
11	0.19656 76611 43642	1.55639 97977 70947	1.04678 64993 44049	79
12	0.18728 51836 10217	1.55368 08919 36509	1.05377 69204 07046	78
13	0.17865 56628 04653	1.55073 19509 84013	1.06105 93337 53857	77
14	0.17059 45383 49477	1.54755 45758 69993	1.06860 95329 78401	76
15	0.16303 35348 21581	1.54415 04969 14673	1.07640 51130 76403	75
16	0.15591 66592 65792	1.54052 15741 27631	1.08442 52193 72543	74
17	0.14919 73690 67429	1.53666 97975 68556	1.09265 03455 37715	73
18	0.14283 65198 36280	1.53259 72877 45636	1.10106 21687 57941	72
19	0.13680 08474 28619	1.52830 62960 54359	1.10964 34135 42761	71
20	0.13106 18244 99858	1.52379 92052 59774	1.11837 77379 69864	70
21	0.12559 47852 09819	1.51907 85300 25531	1.12724 96377 57702	69
22	0.12037 82455 07894	1.51414 69174 93342	1.13624 43646 84239	68
23	0.11539 33684 49987	1.50900 71479 16775	1.14534 78566 80849	67
24	0.11062 35386 78854	1.50366 21353 53715	1.15454 66775 24465	66
25	0.10605 40201 85996	1.49811 49284 22116	1.16382 79644 93139	65
26	0.10167 16783 93444	1.49236 87111 24151	1.17317 93826 83722	64
27	0.09746 47524 70352	1.48642 68037 44253	1.18258 90849 45384	63
28	0.09342 26672 88483	1.48029 26638 27039	1.19204 56765 79886	62
29	0.08953 58769 52553	1.47396 98872 41625	1.20153 81841 13662	61
30	0.08579 57337 02195	1.46746 22093 39427	1.21105 60275 68459	60
31	0.08219 43773 66408	1.46077 35062 13127	1.22058 89957 54247	59
32	0.07872 46415 92073	1.45390 77960 65210	1.23012 72241 85949	58
33	0.07537 99738 58803	1.44686 92406 95183	1.23966 11752 88672	57
34	0.07215 43668 98737	1.43966 21471 15459	1.24918 16206 07472	56
35	0.06904 22996 09032	1.43229 09693 06756	1.25867 96247 79997	55
36	0.06603 86859 10861	1.42476 03101 24890	1.26814 65310 65206	54
37	0.06313 88302 96461	1.41707 49233 71952	1.27757 39482 50391	53
38	0.06033 83890 33716	1.40923 97160 46096	1.28695 37387 83001	52
39	0.05763 33361 79494	1.40125 97507 85523	1.29627 80079 94134	51
40	0.05501 99336 98829	1.39314 02485 23812	1.30553 90942 97794	50
41	0.05249 47051 04844	1.38488 65913 75413	1.31472 95602 64623	49
42	0.05005 44121 29953	1.37650 43257 72082	1.32384 21844 81263	48
43	0.04769 60340 17056	1.36799 91658 73159	1.33286 99541 17179	47
44	0.04541 67490 83529	1.35937 69972 75008	1.34180 60581 29911	46
45	0.04321 39182 63772	1.35064 38810 47676	1.35064 38810 47676	45
$90^\circ-\alpha$	$q(\alpha)$	$E'(\alpha)$	$E(\alpha)$	α

$$\left[\begin{matrix}(-5)3\\ 9\end{matrix}\right]$$

Таблица 17.3. Параметр m как функция $K'(m)/K(m)$

K'/K	m	K'/K	m	K'/K	m
0.30	0.99954 69976	1.20	0.30866 25998	2.10	0.02158 74007
0.32	0.99912 85258	1.22	0.29292 52811	2.12	0.02028 61803
0.34	0.99844 79307	1.24	0.27782 39170	2.14	0.01906 26278
0.36	0.99740 80762	1.26	0.26335 17107	2.16	0.01791 21974
0.38	0.99590 01861	1.28	0.24949 94512	2.18	0.01683 05990
0.40	0.99380 79974	1.30	0.23625 58558	2.20	0.01581 37845
0.42	0.99101 23521	1.32	0.22360 78874	2.22	0.01485 79356
0.44	0.98739 58502	1.34	0.21154 10467	2.24	0.01395 94517
0.46	0.98284 72586	1.36	0.20003 96393	2.26	0.01311 49385
0.48	0.97726 54540	1.38	0.18908 70181	2.28	0.01232 11967
0.50	0.97056 27485	1.40	0.17866 58032	2.30	0.01157 52117
0.52	0.96266 75125	1.42	0.16875 80773	2.32	0.01087 41433
0.54	0.95352 60602	1.44	0.15934 55603	2.34	0.01021 53165
0.56	0.94310 38029	1.46	0.15040 97635	2.36	0.00959 62118
0.58	0.93138 57063	1.48	0.14193 21249	2.38	0.00901 44574
0.60	0.91837 61134	1.50	0.13389 41273	2.40	0.00846 78199
0.62	0.90409 80105	1.52	0.12627 73987	2.42	0.00795 41974
0.64	0.88859 18214	1.54	0.11906 38004	2.44	0.00747 16117
0.66	0.87191 38254	1.56	0.11223 54993	2.46	0.00701 82011
0.68	0.85413 42916	1.58	0.10577 50300	2.48	0.00659 22140
0.70	0.83533 54217	1.60	0.09966 53447	2.50	0.00619 20026
0.72	0.81560 91841	1.62	0.09388 98538	2.52	0.00581 60167
0.74	0.79505 51193	1.64	0.08843 24583	2.54	0.00546 27984
0.76	0.77377 81814	1.66	0.08327 75739	2.56	0.00513 09763
0.78	0.75188 66711	1.68	0.07841 01486	2.58	0.00481 92610
0.80	0.72949 03078	1.70	0.07381 56747	2.60	0.00452 64398
0.82	0.70669 84707	1.72	0.06948 01950	2.62	0.00425 13725
0.84	0.68361 86358	1.74	0.06539 03054	2.64	0.00399 29873
0.86	0.66035 50204	1.76	0.06153 31533	2.66	0.00375 02764
0.88	0.63700 74395	1.78	0.05789 64327	2.68	0.00352 22924
0.90	0.61367 03730	1.80	0.05446 83767	2.70	0.00330 81448
0.92	0.59043 22404	1.82	0.05123 77481	2.72	0.00310 69966
0.94	0.56737 48621	1.84	0.04819 38272	2.74	0.00291 80610
0.96	0.54457 30994	1.86	0.04532 63995	2.76	0.00274 05988
0.98	0.52209 46531	1.88	0.04262 57408	2.78	0.00257 39151
1.00	0.50000 00000	1.90	0.04008 26022	2.80	0.00241 73568
1.02	0.47834 24497	1.92	0.03768 81947	2.82	0.00227 03103
1.04	0.45716 83054	1.94	0.03543 41720	2.84	0.00213 21990
1.06	0.43651 71048	1.96	0.03331 26147	2.86	0.00200 24811
1.08	0.41642 19278	1.98	0.03131 60134	2.88	0.00188 06475
1.10	0.39690 97552	2.00	0.02943 72515	2.90	0.00176 62198
1.12	0.37800 18621	2.02	0.02766 95892	2.92	0.00165 87487
1.14	0.35971 42366	2.04	0.02600 66464	2.94	0.00155 78119
1.16	0.34205 80100	2.06	0.02444 23873	2.96	0.00146 30127
1.18	0.32503 98919	2.08	0.02297 11038	2.98	0.00137 39785
1.20	0.30866 25998	2.10	0.02158 74007	3.00	0.00129 03591
	$\begin{bmatrix}(-4)2\\9\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-5)8\\7\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-5)1\\6\end{bmatrix}$

Для $K'/K > 3.0$ и $K'/K < 0.3$ см. пример 6.

Таблица 17.4. Вспомогательные функции для вычисления параметра Якоби q и параметра m

$$Q(m)=\frac{q_1(m)}{m_1} \qquad L(m)=-K(m)+\frac{K'(m)}{\pi}\ln\frac{16}{m_1}$$

m_1	$Q(m)$	$L(m)$	m_1	$Q(m)$	$L(m)$
0.00	0.06250 00000 00000	0.00000 00000	0.08	0.06513 95233 36060	0.02111 58281
0.01	0.06281 45660 38302	0.00251 65276	0.09	0.06549 04937 14101	0.02392 34345
0.02	0.06313 33261 60188	0.00506 66040	0.10	0.06584 65155 38584	0.02677 14110
0.03	0.06345 63756 34180	0.00765 09870	0.11	0.06620 77131 77434	0.02966 07472
0.04	0.06378 38128 42217	0.01027 04595	0.12	0.06657 42154 15123	0.03259 24678
0.05	0.06411 57394 13714	0.01292 58301	0.13	0.06694 61556 59704	0.03556 76342
0.06	0.06445 22603 66828	0.01561 79344	0.14	0.06732 36721 61983	0.03858 73466
0.07	0.06479 34842 57396	0.01834 76360	0.15	0.06770 69082 47689	0.04165 27452
	$\begin{bmatrix}(-7)6\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)5\\5\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-7)7\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)6\\5\end{bmatrix}$

См. примеры 3, 5 и 6.

Таблица 17.5. Эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi\backslash\alpha)$

$$F(\varphi\backslash\alpha)=\int_0^\varphi (1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta$$

$\alpha\backslash\varphi$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°
0°	0	0.08726 646	0.17453 293	0.26179 939	0.34906 585	0.43633 231	0.52359 878
2	0	0.08726 660	0.17453 400	0.26180 298	0.34907 428	0.43634 855	0.52362 636
4	0	0.08726 700	0.17453 721	0.26181 374	0.34909 952	0.43639 719	0.52370 903
6	0	0.08726 767	0.17454 255	0.26183 163	0.34914 148	0.43647 806	0.52384 653
8	0	0.08726 860	0.17454 999	0.26185 656	0.34919 998	0.43659 086	0.52403 839
10	0	0.08726 980	0.17455 949	0.26188 842	0.34927 479	0.43673 518	0.52428 402
12	0	0.08727 124	0.17457 102	0.26192 707	0.34936 558	0.43691 046	0.52458 259
14	0	0.08727 294	0.17458 451	0.26197 234	0.34947 200	0.43711 606	0.52493 314
16	0	0.08727 487	0.17459 991	0.26202 402	0.34959 358	0.43735 119	0.52533 449
18	0	0.08727 703	0.17461 714	0.26208 189	0.34972 983	0.43761 496	0.52578 529
20	0	0.08727 940	0.17463 611	0.26214 568	0.34988 016	0.43790 635	0.52628 399
22	0	0.08728 199	0.17465 675	0.26221 511	0.35004 395	0.43822 422	0.52682 887
24	0	0.08728 477	0.17467 895	0.26228 985	0.35022 048	0.43856 733	0.52741 799
26	0	0.08728 773	0.17470 261	0.26236 958	0.35040 901	0.43893 430	0.52804 924
28	0	0.08729 086	0.17472 762	0.26245 392	0.35060 870	0.43932 365	0.52872 029
30	0	0.08729 413	0.17475 386	0.26254 249	0.35081 868	0.43973 377	0.52942 863
32	0	0.08729 755	0.17478 119	0.26263 487	0.35103 803	0.44016 296	0.53017 153
34	0	0.08730 108	0.17480 950	0.26273 064	0.35126 576	0.44060 939	0.53094 608
36	0	0.08730 472	0.17483 864	0.26282 934	0.35150 083	0.44107 115	0.53174 916
38	0	0.08730 844	0.17486 848	0.26293 052	0.35174 218	0.44154 622	0.53257 745
40	0	0.08731 222	0.17489 887	0.26303 369	0.35198 869	0.44203 247	0.53342 745
42	0	0.08731 606	0.17492 967	0.26313 836	0.35223 920	0.44252 769	0.53429 546
44	0	0.08731 992	0.17496 073	0.26324 404	0.35249 254	0.44302 960	0.53517 761
46	0	0.08732 379	0.17499 189	0.26335 019	0.35274 748	0.44353 584	0.53606 986
48	0	0.08732 765	0.17502 300	0.26345 633	0.35300 280	0.44404 397	0.53696 798
50	0	0.08733 149	0.17505 392	0.26356 191	0.35325 724	0.44455 151	0.53786 765
52	0	0.08733 528	0.17508 448	0.26366 643	0.35350 955	0.44505 593	0.53876 438
54	0	0.08733 901	0.17511 455	0.26376 936	0.35375 845	0.44555 469	0.53965 358
56	0	0.08734 265	0.17514 397	0.26387 020	0.35400 269	0.44604 519	0.54053 059
58	0	0.08734 620	0.17517 260	0.26396 842	0.35424 101	0.44652 487	0.54139 069
60	0	0.08734 962	0.17520 029	0.26406 355	0.35447 217	0.44699 117	0.54222 911
62	0	0.08735 291	0.17522 690	0.26415 509	0.35469 497	0.44744 153	0.54304 111
64	0	0.08735 605	0.17525 232	0.26424 258	0.35490 823	0.44787 348	0.54382 197
66	0	0.08735 902	0.17527 640	0.26432 556	0.35511 081	0.44828 459	0.54456 704
68	0	0.08736 182	0.17529 903	0.26440 362	0.35530 160	0.44867 252	0.54527 182
70	0	0.08736 442	0.17532 010	0.26447 634	0.35547 959	0.44903 502	0.54593 192
72	0	0.08736 681	0.17533 949	0.26454 334	0.35564 377	0.44936 997	0.54654 316
74	0	0.08736 898	0.17535 712	0.26460 428	0.35579 326	0.44967 538	0.54710 162
76	0	0.08737 092	0.17537 289	0.26465 883	0.35592 721	0.44994 944	0.54760 364
78	0	0.08737 262	0.17538 672	0.26470 671	0.35604 488	0.45019 046	0.54804 587
80	0	0.08737 408	0.17539 854	0.26474 766	0.35614 560	0.45039 699	0.54842 535
82	0	0.08737 528	0.17540 830	0.26478 147	0.35622 881	0.45056 775	0.54873 947
84	0	0.08737 622	0.17541 594	0.26480 795	0.35629 402	0.45070 168	0.54898 608
86	0	0.08737 689	0.17542 143	0.26482 697	0.35634 086	0.45079 795	0.54916 348
88	0	0.08737 730	0.17542 473	0.26483 842	0.35636 908	0.45085 596	0.54927 042
90	0	0.08737 744	0.17542 583	0.26484 225	0.35637 851	0.45087 533	0.54930 614
		$\left[\begin{smallmatrix}(-8)3\\3\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-7)3\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-6)1\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-6)2\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-6)5\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-6)9\\5\end{smallmatrix}\right]$
5	0	0.08726 730	0.17453 962	0.26182 180	0.34911 842	0.43643 361	0.52377 095
15	0	0.08727 387	0.17459 198	0.26199 739	0.34953 092	0.43722 998	0.52512 754
25	0	0.08728 623	0.17469 061	0.26232 912	0.35031 330	0.43874 792	0.52772 849
35	0	0.08730 289	0.17482 397	0.26277 965	0.35138 244	0.44083 848	0.53134 425
45	0	0.08732 185	0.17497 630	0.26329 709	0.35261 989	0.44328 233	0.53562 273
55	0	0.08734 084	0.17512 935	0.26382 007	0.35388 123	0.44580 113	0.54009 391
65	0	0.08735 756	0.17526 454	0.26428 466	0.35501 092	0.44808 179	0.54419 926
75	0	0.08736 998	0.17536 525	0.26463 238	0.35586 223	0.44981 645	0.54735 991
85	0	0.08737 659	0.17541 895	0.26481 840	0.35631 976	0.45075 457	0.54908 352

Эту таблицу можно использовать для получения обратных функций $\varphi = \mathrm{am}\, u$, где $u = F(\varphi\backslash\alpha)$, а также эллиптических функций Якоби, например, $\mathrm{sn}\, u = \sin\varphi$, $\mathrm{cn}\, u = \cos\varphi$, $\mathrm{dn}\, u = (1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^{1/2}$. См. примеры 7—11. Взято из [17.16]; найденные ошибки исправлены.

Таблица 17.5. Эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi\backslash\alpha)$

$$F(\varphi\backslash\alpha)=\int_0^{\varphi}(1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta$$

$\alpha\backslash\varphi$	35°	40°	45°	50°	55°	60°
0°	0.61086 524	0.69813 170	0.78539 816	0.87266 463	0.95993 109	1.04719 755
2	0.61090 819	0.69819 436	0.78548 509	0.87278 045	0.96008 037	1.04738 465
4	0.61103 691	0.69838 220	0.78574 574	0.87312 784	0.96052 821	1.04794 603
6	0.61125 108	0.69869 484	0.78617 974	0.87370 649	0.96127 450	1.04888 194
8	0.61155 010	0.69913 161	0.78678 644	0.87451 593	0.96231 911	1.05019 278
10	0.61193 318	0.69969 159	0.78756 494	0.87555 545	0.96366 180	1.05187 911
12	0.61239 927	0.70037 358	0.78851 403	0.87682 412	0.96530 224	1.05394 160
14	0.61294 707	0.70117 608	0.78963 221	0.87832 076	0.96723 998	1.05638 099
16	0.61357 504	0.70209 730	0.79091 768	0.88004 389	0.96947 438	1.05919 813
18	0.61428 140	0.70313 511	0.79236 827	0.88199 174	0.97200 462	1.06239 384
20	0.61506 406	0.70428 706	0.79398 143	0.88416 214	0.97482 960	1.06596 891
22	0.61592 071	0.70555 037	0.79575 422	0.88655 254	0.97794 790	1.06992 405
24	0.61684 871	0.70692 183	0.79768 324	0.88915 992	0.98135 773	1.07425 976
26	0.61784 515	0.70839 788	0.79976 461	0.89198 071	0.98505 681	1.07897 628
28	0.61890 682	0.70997 451	0.80199 389	0.89501 076	0.98904 227	1.08407 347
30	0.62003 018	0.71164 728	0.80436 610	0.89824 524	0.99331 059	1.08955 067
32	0.62121 138	0.71341 124	0.80687 558	0.90167 852	0.99785 743	1.09540 656
34	0.62244 622	0.71526 098	0.80951 599	0.90530 415	1.00267 749	1.10163 899
36	0.62373 019	0.71719 052	0.81228 024	0.90911 465	1.00776 438	1.10824 474
38	0.62505 840	0.71919 335	0.81516 039	0.91310 148	1.01311 039	1.11521 933
40	0.62642 563	0.72126 235	0.81814 765	0.91725 487	1.01870 633	1.12255 667
42	0.62782 630	0.72338 982	0.82123 227	0.92156 370	1.02454 127	1.13024 880
44	0.62925 446	0.72556 741	0.82440 346	0.92601 535	1.03060 230	1.13828 546
46	0.63070 385	0.72778 615	0.82764 941	0.93059 558	1.03687 427	1.14665 369
48	0.63216 783	0.73003 640	0.83095 712	0.93528 835	1.04333 948	1.15533 731
50	0.63363 947	0.73230 789	0.83431 247	0.94007 568	1.04997 735	1.16431 637
52	0.63511 150	0.73458 970	0.83770 010	0.94493 756	1.05676 412	1.17356 652
54	0.63657 639	0.73687 028	0.84110 344	0.94985 177	1.06367 248	1.18305 833
56	0.63802 636	0.73913 751	0.84450 468	0.95479 381	1.07067 128	1.19275 650
58	0.63945 343	0.74137 870	0.84788 483	0.95973 682	1.07772 516	1.20261 907
60	0.64084 944	0.74358 071	0.85122 375	0.96465 156	1.08479 434	1.21259 661
62	0.64220 613	0.74572 998	0.85450 024	0.96950 647	1.09183 436	1.22263 139
64	0.64351 521	0.74781 266	0.85769 220	0.97426 773	1.09879 601	1.23265 660
66	0.64476 839	0.74981 471	0.86077 677	0.97889 946	1.10562 535	1.24259 576
68	0.64595 751	0.75172 208	0.86373 057	0.98336 406	1.11226 392	1.25236 238
70	0.64707 458	0.75352 078	0.86652 996	0.98762 253	1.11864 920	1.26185 988
72	0.64811 189	0.75519 716	0.86915 135	0.99163 507	1.12471 530	1.27098 218
74	0.64906 209	0.75673 800	0.87157 159	0.99536 166	1.13039 401	1.27961 482
76	0.64991 829	0.75813 076	0.87376 830	0.99876 287	1.13561 610	1.28763 696
78	0.65067 415	0.75936 376	0.87572 037	1.00180 067	1.14031 304	1.29492 436
80	0.65132 394	0.76042 640	0.87740 833	1.00443 942	1.14441 892	1.30135 321
82	0.65186 270	0.76130 931	0.87881 481	1.00664 678	1.14787 262	1.30680 495
84	0.65228 622	0.76200 457	0.87992 495	1.00839 470	1.15062 010	1.31117 166
86	0.65259 116	0.76250 582	0.88072 675	1.00966 028	1.15261 652	1.31436 170
88	0.65277 510	0.76280 846	0.88121 143	1.01042 658	1.15382 828	1.31630 510
90	0.65283 658	0.76290 965	0.88137 359	1.01068 319	1.15423 455	1.31695 790
	$\begin{bmatrix}(-5)2\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)3\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)4\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)6\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)1\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\7\end{bmatrix}$
5	0.61113 335	0.69852 295	0.78594 111	0.87338 828	0.96086 405	1.04836 715
15	0.61325 114	0.70162 198	0.79025 416	0.87915 412	0.96832 014	1.05774 229
25	0.61733 857	0.70764 702	0.79870 514	0.89054 388	0.98317 128	1.07657 042
35	0.62308 236	0.71621 617	0.81088 311	0.90718 679	1.00518 803	1.10489 545
45	0.62997 691	0.72667 222	0.82601 788	0.92829 036	1.03371 296	1.14242 906
55	0.63730 374	0.73800 634	0.84280 548	0.95232 094	1.06716 268	1.18788 407
65	0.64414 930	0.74882 464	0.85924 936	0.97660 210	1.10223 077	1.23764 210
75	0.64950 235	0.75745 364	0.87269 924	0.99710 535	1.13306 645	1.28370 993
85	0.65245 368	0.76227 978	0.88036 502	1.00908 899	1.15171 457	1.31291 870

Таблица 17.5. Эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi\backslash\alpha)$

$$F(\varphi\backslash\alpha)=\int_0^\varphi (1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta$$

$\alpha\backslash\varphi$	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0°	1.13446 401	1.22173 048	1.30899 694	1.39626 340	1.48352 986	1.57079 633
2	1.13469 294	1.22200 477	1.30931 959	1.39663 672	1.48395 543	1.57127 495
4	1.13537 994	1.22282 810	1.31028 822	1.39775 763	1.48523 342	1.57271 244
6	1.13652 576	1.22420 180	1.31190 491	1.39962 909	1.48736 769	1.57511 361
8	1.13813 158	1.22612 810	1.31417 314	1.40225 598	1.49036 470	1.57848 658
10	1.14019 906	1.22861 010	1.31709 778	1.40564 522	1.49423 361	1.58284 280
12	1.14273 032	1.23165 180	1.32068 514	1.40980 577	1.49898 627	1.58819 721
14	1.14572 789	1.23525 808	1.32494 296	1.41474 871	1.50463 742	1.59456 834
16	1.14919 471	1.23943 470	1.32988 047	1.42048 728	1.51120 474	1.60197 853
18	1.15313 409	1.24418 827	1.33550 840	1.42703 700	1.51870 904	1.61045 415
20	1.15754 967	1.24952 627	1.34183 901	1.43441 578	1.52717 445	1.62002 590
22	1.16244 535	1.25545 700	1.34888 616	1.44264 399	1.53662 865	1.63072 910
24	1.16782 525	1.26198 957	1.35666 531	1.45174 466	1.54710 309	1.64260 414
26	1.17369 362	1.26913 385	1.36519 359	1.46174 360	1.55863 334	1.65569 693
28	1.18005 472	1.27690 045	1.37448 981	1.47266 958	1.57125 942	1.67005 943
30	1.18691 274	1.28530 059	1.38457 455	1.48455 455	1.58502 624	1.68575 035
32	1.19427 162	1.29434 605	1.39547 013	1.49743 384	1.59998 406	1.70283 594
34	1.20213 489	1.30404 906	1.40720 064	1.51134 644	1.61618 906	1.72139 083
36	1.21050 542	1.31442 210	1.41979 198	1.52633 523	1.63370 398	1.74149 923
38	1.21938 520	1.32547 772	1.43327 179	1.54244 734	1.65259 894	1.76325 618
40	1.22877 499	1.33722 824	1.44766 938	1.55973 441	1.67295 226	1.78676 913
42	1.23867 392	1.34968 545	1.46301 565	1.57825 301	1.69485 156	1.81215 985
44	1.24907 904	1.36286 013	1.47934 287	1.59806 493	1.71839 498	1.83956 672
46	1.25998 475	1.37676 148	1.49668 437	1.61923 762	1.74369 264	1.86914 755
48	1.27138 210	1.39139 640	1.51507 416	1.64184 453	1.77086 836	1.90108 303
50	1.28325 798	1.40676 855	1.53454 619	1.66596 542	1.80006 176	1.93558 110
52	1.29559 414	1.42287 717	1.55513 354	1.69168 665	1.83143 068	1.97288 227
54	1.30836 604	1.43971 560	1.57686 709	1.71910 125	1.86515 414	2.01326 657
56	1.32154 149	1.45726 935	1.59977 378	1.74830 880	1.90143 591	2.05706 232
58	1.33507 910	1.47551 372	1.62387 409	1.77941 482	1.94050 873	2.10465 766
60	1.34892 643	1.49441 087	1.64917 867	1.81252 953	1.98263 957	2.15651 565
62	1.36301 803	1.51390 609	1.67568 359	1.84776 547	2.02813 570	2.21319 470
64	1.37727 323	1.53392 332	1.70336 398	1.88523 335	2.07735 219	2.27537 643
66	1.39159 384	1.55435 972	1.73216 516	1.92503 509	2.13070 052	2.34390 472
68	1.40586 195	1.57507 940	1.76199 085	1.96725 237	2.18865 839	2.41984 165
70	1.41993 796	1.59590 624	1.79268 736	2.01192 798	2.25177 995	2.50455 008
72	1.43365 925	1.61661 644	1.82402 292	2.05903 582	2.32070 416	2.59981 973
74	1.44684 001	1.63693 134	1.85566 175	2.10843 282	2.39615 610	2.70806 762
76	1.45927 266	1.65651 218	1.88713 308	2.15978 295	2.47892 739	2.83267 258
78	1.47073 163	1.67495 873	1.91779 814	2.21243 977	2.56980 281	2.97856 895
80	1.48098 006	1.69181 489	1.94682 231	2.26527 326	2.66935 045	3.15338 525
82	1.48977 975	1.70658 456	1.97316 666	2.31643 897	2.77736 748	3.36986 803
84	1.49690 410	1.71876 033	1.99562 118	2.36313 736	2.89146 664	3.65185 597
86	1.50215 336	1.72786 543	2.01290 452	2.40153 358	3.00370 926	4.05275 817
88	1.50537 033	1.73350 464	2.02384 126	2.42718 003	3.09448 898	4.74271 727
90	1.50645 424	1.73541 516	2.02758 942	2.43624 605	3.13130 133	∞
	$\begin{bmatrix}(-4)3\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)5\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)9\\10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)2\\10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)7\\ \end{bmatrix}$	
5	1.13589 544	1.22344 604	1.31101 537	1.39859 928	1.48619 317	1.57379 213
15	1.14740 244	1.23727 471	1.32732 612	1.41751 762	1.50780 533	1.59814 200
25	1.17069 811	1.26548 460	1.36083 467	1.45663 012	1.55273 384	1.64899 522
35	1.20625 660	1.30915 104	1.41338 702	1.51870 347	1.62477 858	1.73124 518
45	1.25446 980	1.36971 948	1.48788 472	1.60847 673	1.73081 713	1.85407 468
55	1.31490 567	1.44840 433	1.58817 233	1.73347 444	1.88296 142	2.03471 531
65	1.38443 225	1.54409 676	1.71762 935	1.90483 674	2.10348 169	2.30878 680
75	1.45316 359	1.64683 711	1.87145 396	2.13389 514	2.43657 614	2.76806 315
85	1.49977 412	1.72372 395	2.00498 776	2.38364 709	2.94868 876	3.83174 200

Таблица 17.6. Эллиптический интеграл второго рода $E(\varphi\backslash\alpha)$

$$E(\varphi\backslash\alpha)=\int_0^{\varphi}(1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$\alpha\backslash\varphi$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°
0°	0	0.08726 646	0.17453 293	0.26179 939	0.34906 585	0.43633 231	0.52359 878
2	0	0.08726 633	0.17453 185	0.26179 579	0.34905 742	0.43631 608	0.52357 119
4	0	0.08726 592	0.17452 864	0.26178 503	0.34903 218	0.43626 745	0.52348 856
6	0	0.08726 525	0.17452 330	0.26176 715	0.34899 025	0.43618 665	0.52335 123
8	0	0.08726 432	0.17451 587	0.26174 224	0.34893 181	0.43607 403	0.52315 981
10	0	0.08726 313	0.17450 636	0.26171 041	0.34885 714	0.43593 011	0.52291 511
12	0	0.08726 168	0.17449 485	0.26167 182	0.34876 657	0.43575 552	0.52261 821
14	0	0.08725 999	0.17448 137	0.26162 664	0.34866 055	0.43555 106	0.52227 039
16	0	0.08725 806	0.17446 599	0.26157 510	0.34853 954	0.43531 765	0.52187 317
18	0	0.08725 590	0.17444 879	0.26151 743	0.34840 412	0.43505 633	0.52142 828
20	0	0.08725 352	0.17442 985	0.26145 391	0.34825 492	0.43476 831	0.52093 770
22	0	0.08725 094	0.17440 926	0.26138 485	0.34809 262	0.43445 488	0.52040 357
24	0	0.08724 816	0.17438 712	0.26131 056	0.34791 800	0.43411 749	0.51982 827
26	0	0.08724 521	0.17436 353	0.26123 141	0.34773 187	0.43375 767	0.51921 436
28	0	0.08724 208	0.17433 862	0.26114 778	0.34753 510	0.43337 709	0.51856 461
30	0	0.08723 881	0.17431 250	0.26106 005	0.34732 863	0.43297 749	0.51788 193
32	0	0.08723 540	0.17428 529	0.26096 867	0.34711 342	0.43256 075	0.51716 944
34	0	0.08723 187	0.17425 714	0.26087 405	0.34689 050	0.43212 880	0.51643 040
36	0	0.08722 824	0.17422 817	0.26077 666	0.34666 093	0.43168 368	0.51566 820
38	0	0.08722 453	0.17419 852	0.26067 697	0.34642 580	0.43122 748	0.51488 638
40	0	0.08722 075	0.17416 835	0.26057 545	0.34618 625	0.43076 236	0.51408 862
42	0	0.08721 692	0.17413 779	0.26047 261	0.34594 343	0.43029 055	0.51327 866
44	0	0.08721 307	0.17410 700	0.26036 893	0.34569 850	0.42981 431	0.51246 037
46	0	0.08720 920	0.17407 613	0.26026 492	0.34545 266	0.42933 594	0.51163 767
48	0	0.08720 535	0.17404 531	0.26016 110	0.34520 710	0.42885 776	0.51081 454
50	0	0.08720 152	0.17401 472	0.26005 795	0.34496 302	0.42838 212	0.50999 501
52	0	0.08719 774	0.17398 449	0.25995 600	0.34472 162	0.42791 134	0.50918 310
54	0	0.08719 402	0.17395 477	0.25985 574	0.34448 409	0.42744 775	0.50838 287
56	0	0.08719 039	0.17392 571	0.25975 765	0.34425 159	0.42699 368	0.50759 931
58	0	0.08718 686	0.17389 745	0.25966 224	0.34402 529	0.42655 138	0.50683 341
60	0	0.08718 345	0.17387 013	0.25956 996	0.34380 631	0.42612 308	0.50609 207
62	0	0.08718 017	0.17384 388	0.25948 126	0.34359 575	0.42571 097	0.50537 811
64	0	0.08717 704	0.17381 883	0.25939 660	0.34339 465	0.42531 712	0.50469 523
66	0	0.08717 408	0.17379 511	0.25931 640	0.34320 404	0.42494 358	0.50404 700
68	0	0.08717 130	0.17377 283	0.25924 104	0.34302 487	0.42459 224	0.50343 686
70	0	0.08716 871	0.17375 210	0.25917 090	0.34285 805	0.42426 495	0.50286 804
72	0	0.08716 633	0.17373 302	0.25910 634	0.34270 443	0.42396 339	0.50234 359
74	0	0.08716 416	0.17371 568	0.25904 767	0.34256 478	0.42368 913	0.50186 633
76	0	0.08716 223	0.17370 018	0.25899 519	0.34243 984	0.42344 363	0.50143 886
78	0	0.08716 053	0.17368 659	0.25894 917	0.34233 022	0.42322 817	0.50106 351
80	0	0.08715 909	0.17367 498	0.25890 983	0.34223 650	0.42304 389	0.50074 232
82	0	0.08715 789	0.17366 539	0.25887 737	0.34215 915	0.42289 175	0.50047 707
84	0	0.08715 695	0.17365 789	0.25885 195	0.34209 857	0.42277 258	0.50026 923
86	0	0.08715 628	0.17365 250	0.25883 370	0.34205 507	0.42268 700	0.50011 993
88	0	0.08715 588	0.17364 926	0.25882 271	0.34202 889	0.42263 547	0.50003 003
90	0	0.08715 574	0.17364 818	0.25881 905	0.34202 014	0.42261 826	0.50000 000
		$\begin{bmatrix}(-8)4\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-7)3\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-7)9\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)2\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)4\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)7\\5\end{bmatrix}$
5	0	0.08726 562	0.17452 624	0.26177 698	0.34901 329	0.43623 105	0.52342 670
15	0	0.08725 905	0.17447 391	0.26160 165	0.34860 188	0.43543 791	0.52207 785
25	0	0.08724 671	0.17437 550	0.26127 157	0.34782 632	0.43394 028	0.51952 597
35	0	0.08723 006	0.17424 275	0.26082 567	0.34677 648	0.43190 776	0.51605 197
45	0	0.08721 113	0.17409 157	0.26031 693	0.34557 562	0.42957 525	0.51204 932
55	0	0.08719 220	0.17394 015	0.25980 639	0.34436 714	0.42721 938	0.50798 838
65	0	0.08717 554	0.17380 680	0.25935 592	0.34329 797	0.42512 769	0.50436 656
75	0	0.08716 317	0.17370 770	0.25902 064	0.34250 043	0.42356 271	0.50164 622
85	0	0.08715 659	0.17365 493	0.25884 192	0.34207 467	0.42272 556	0.50018 720

См. пример 14.

Взято из [17.16]; найденные ошибки исправлены.

Таблица 17.6. Эллиптический интеграл второго рода $E(\varphi\backslash\alpha)$

$$E(\varphi\backslash\alpha)=\int_0^\varphi (1-\sin^2\alpha\,\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta$$

$\alpha\backslash\varphi$	35°	40°	45°	50°	55°	60°
0°	0.61086 524	0.69813 170	0.78539 816	0.87266 463	0.95993 109	1.04719 755
2	0.61082 230	0.69806 905	0.78531 125	0.87254 883	0.95978 184	1.04701 051
4	0.61069 365	0.69788 136	0.78505 085	0.87220 183	0.95933 459	1.04644 996
6	0.61047 983	0.69756 935	0.78461 792	0.87162 487	0.95859 093	1.04551 764
8	0.61018 171	0.69713 427	0.78401 409	0.87081 998	0.95755 301	1.04421 646
10	0.60980 055	0.69657 784	0.78324 162	0.86979 001	0.95622 460	1.04255 047
12	0.60933 793	0.69590 226	0.78230 343	0.86853 863	0.95461 005	1.04052 491
14	0.60879 577	0.69511 023	0.78120 308	0.86707 031	0.95271 478	1.03814 615
16	0.60817 636	0.69420 492	0.77994 473	0.86539 034	0.95054 522	1.03542 177
18	0.60748 229	0.69318 999	0.77853 323	0.86350 481	0.94810 878	1.03236 049
20	0.60671 652	0.69206 954	0.77697 402	0.86142 062	0.94541 386	1.02897 221
22	0.60588 229	0.69084 814	0.77527 316	0.85914 545	0.94246 984	1.02526 804
24	0.60498 319	0.68953 083	0.77343 735	0.85668 781	0.93928 709	1.02126 023
26	0.60402 308	0.68812 308	0.77147 387	0.85405 695	0.93587 699	1.01696 224
28	0.60300 616	0.68663 077	0.76939 059	0.85126 295	0.93225 186	1.01238 873
30	0.60193 687	0.68506 023	0.76719 599	0.84831 663	0.92842 504	1.00755 556
32	0.60081 994	0.68341 817	0.76489 908	0.84522 958	0.92441 083	1.00247 977
34	0.59966 035	0.68171 170	0.76250 947	0.84201 414	0.92022 452	0.99717 966
36	0.59846 332	0.67994 830	0.76003 726	0.83868 340	0.91588 234	0.99167 469
38	0.59723 431	0.67813 578	0.75749 309	0.83525 115	0.91140 150	0.98598 560
40	0.59597 897	0.67628 229	0.75488 809	0.83173 189	0.90680 017	0.98013 430
42	0.59470 312	0.67439 630	0.75223 383	0.82814 080	0.90209 742	0.97414 397
44	0.59341 278	0.67248 651	0.74954 234	0.82449 369	0.89731 325	0.96803 899
46	0.59211 406	0.67056 191	0.74682 605	0.82080 700	0.89246 858	0.96184 497
48	0.59081 324	0.66863 167	0.74409 773	0.81709 775	0.88758 513	0.95558 873
50	0.58951 664	0.66670 515	0.74137 047	0.81338 346	0.88268 551	0.94929 830
52	0.58823 065	0.66479 183	0.73865 766	0.80968 217	0.87779 305	0.94300 285
54	0.58696 171	0.66290 130	0.73597 286	0.80601 230	0.87293 184	0.93673 272
56	0.58571 622	0.66104 317	0.73332 979	0.80239 262	0.86812 660	0.93051 931
58	0.58450 056	0.65922 707	0.73074 229	0.79884 217	0.86340 261	0.92439 505
60	0.58332 103	0.65746 255	0.72822 416	0.79538 015	0.85878 561	0.91839 329
62	0.58218 382	0.65575 905	0.72578 915	0.79202 582	0.85430 169	0.91254 821
64	0.58109 497	0.65412 585	0.72345 085	0.78879 839	0.84997 709	0.90689 460
66	0.58006 032	0.65257 197	0.72122 260	0.78571 685	0.84583 811	0.90146 778
68	0.57908 549	0.65110 612	0.71911 737	0.78279 987	0.84191 082	0.89630 323
70	0.57817 584	0.64973 667	0.71714 767	0.78006 562	0.83822 090	0.89143 642
72	0.57733 641	0.64847 154	0.71532 545	0.77753 157	0.83479 335	0.88690 237
74	0.57657 189	0.64731 812	0.71366 196	0.77521 434	0.83165 223	0.88273 530
76	0.57588 663	0.64628 328	0.71216 766	0.77312 952	0.82882 031	0.87896 810
78	0.57528 450	0.64537 322	0.71085 210	0.77129 143	0.82631 879	0.87563 185
80	0.57476 897	0.64459 347	0.70972 381	0.76971 298	0.82416 694	0.87275 520
82	0.57434 302	0.64394 879	0.70879 019	0.76840 544	0.82238 177	0.87036 381
84	0.57400 912	0.64344 316	0.70805 745	0.76737 830	0.82097 770	0.86847 970
86	0.57376 921	0.64307 973	0.70753 050	0.76663 912	0.81996 631	0.86712 068
88	0.57362 470	0.64286 075	0.70721 289	0.76619 339	0.81935 604	0.86629 990
90	0.57357 644	0.64278 761	0.70710 678	0.76604 444	0.81915 204	0.86602 540
	$\left[{(-5)1 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)2 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)3 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)4 \atop 6}\right]$	$\left[{(-5)5 \atop 6}\right]$	$\left[{(-5)7 \atop 6}\right]$
5	0.61059 734	0.69774 083	0.78485 586	0.87194 199	0.95899 964	1.04603 012
15	0.60849 557	0.69467 152	0.78059 337	0.86625 642	0.95166 385	1.03682 664
25	0.60451 051	0.68883 790	0.77247 109	0.85539 342	0.93760 971	1.01914 662
35	0.59906 618	0.68083 664	0.76128 304	0.84036 234	0.91807 186	0.99445 152
45	0.59276 408	0.67152 549	0.74818 650	0.82265 424	0.89489 714	0.96495 146
55	0.58633 563	0.66196 758	0.73464 525	0.80419 500	0.87052 066	0.93361 692
65	0.58057 051	0.65333 844	0.72232 215	0.78723 820	0.84788 276	0.90415 063
75	0.57621 910	0.64678 548	0.71289 304	0.77414 195	0.83019 625	0.88079 972
85	0.57387 732	0.64324 351	0.70776 799	0.76697 232	0.82042 232	0.86773 361

Таблица 17.6. Эллиптический интеграл второго рода $E(\varphi\diagdown\alpha)$

$$E(\varphi\diagdown\alpha) = \int_0^\varphi (1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta$$

$\alpha\diagdown\varphi$	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0°	1.13446 401	1.22173 048	1.30899 694	1.39626 340	1.48352 986	1.57079 633
2	1.13423 517	1.22145 628	1.30867 442	1.39589 024	1.48310 448	1.57031 792
4	1.13354 929	1.22063 443	1.30770 767	1.39477 165	1.48182 929	1.56888 372
6	1.13240 837	1.21926 717	1.30609 916	1.39291 030	1.47970 717	1.56649 679
8	1.13081 573	1.21735 820	1.30305 297	1.39031 062	1.47674 288	1.56316 223
10	1.12877 602	1.21491 274	1.30097 484	1.38697 886	1.47294 312	1.55888 720
12	1.12629 522	1.21193 748	1.29747 215	1.38292 302	1.46831 652	1.55368 089
14	1.12338 066	1.20844 065	1.29335 393	1.37815 292	1.46287 363	1.54755 458
16	1.12004 099	1.20443 195	1.28863 089	1.37268 017	1.45662 693	1.54052 157
18	1.11628 624	1.19992 262	1.28331 541	1.36651 823	1.44959 085	1.53259 729
20	1.11212 778	1.19492 542	1.27742 153	1.35968 233	1.44178 179	1.52379 921
22	1.10757 834	1.18945 465	1.27096 502	1.35218 961	1.43321 813	1.51414 692
24	1.10265 204	1.18352 618	1.26396 337	1.34405 903	1.42392 023	1.50366 214
26	1.09736 439	1.17715 743	1.25643 578	1.33531 146	1.41391 049	1.49236 871
28	1.09173 228	1.17036 745	1.24840 326	1.32596 967	1.40321 335	1.48029 266
30	1.08577 404	1.16317 686	1.23988 858	1.31605 841	1.39185 532	1.46746 221
32	1.07950 942	1.15560 796	1.23091 635	1.30560 436	1.37986 503	1.45390 780
34	1.07295 961	1.14768 469	1.22151 305	1.29463 629	1.36727 328	1.43966 215
36	1.06614 728	1.13943 273	1.21170 705	1.28318 499	1.35411 306	1.42476 031
38	1.05909 660	1.13087 946	1.20152 870	1.27128 343	1.34041 965	1.40923 972
40	1.05183 322	1.12205 408	1.19101 036	1.25896 675	1.32623 066	1.39314 025
42	1.04438 435	1.11298 760	1.18018 648	1.24627 240	1.31158 614	1.37650 433
44	1.03677 875	1.10371 291	1.16909 366	1.23324 019	1.29652 865	1.35937 700
46	1.02904 677	1.09426 484	1.15777 077	1.21991 241	1.28110 340	1.34180 606
48	1.02122 034	1.08468 023	1.14625 899	1.20633 398	1.26535 837	1.32384 218
50	1.01333 305	1.07499 796	1.13460 200	1.19255 255	1.24934 449	1.30553 909
52	1.00542 010	1.06525 908	1.12284 604	1.17861 873	1.23311 580	1.28695 374
54	0.99751 835	1.05550 682	1.11104 010	1.16458 621	1.21672 971	1.26814 653
56	0.98966 632	1.04578 671	1.09923 604	1.15051 210	1.20024 724	1.24918 162
58	0.98190 414	1.03614 663	1.08748 883	1.13645 710	1.18373 339	1.23012 722
60	0.97427 354	1.02663 689	1.07585 669	1.12248 590	1.16725 747	1.21105 603
62	0.96681 780	1.01731 023	1.06440 132	1.10866 752	1.15089 364	1.19204 568
64	0.95958 158	1.00822 192	1.05318 814	1.09507 580	1.13472 145	1.17317 938
66	0.95261 084	0.99942 966	1.04228 653	1.08178 986	1.11882 658	1.15454 668
68	0.94595 256	0.99099 354	1.03176 998	1.06889 476	1.10330 172	1.13624 437
70	0.93965 447	0.98297 583	1.02171 634	1.05648 221	1.08824 773	1.11837 774
72	0.93376 462	0.97544 068	1.01220 781	1.04465 133	1.07377 505	1.10106 217
74	0.92833 088	0.96845 360	1.00333 091	1.03350 951	1.06000 556	1.08442 522
76	0.92340 024	0.96208 074	0.99517 606	1.02317 331	1.04707 504	1.06860 953
78	0.91901 802	0.95638 776	0.98783 670	1.01376 904	1.03513 640	1.05377 692
80	0.91522 691	0.95143 847	0.98140 781	1.00543 295	1.02436 392	1.04011 440
82	0.91206 588	0.94729 297	0.97598 331	0.99831 000	1.01495 896	1.02784 362
84	0.90956 905	0.94400 544	0.97165 228	0.99255 019	1.00715 650	1.01723 692
86	0.90776 445	0.94162 171	0.96849 392	0.98830 025	1.00123 026	1.00864 796
88	0.90667 305	0.94017 677	0.96657 142	0.98568 915	0.99748 392	1.00258 409
90	0.90630 779	0.93969 262	0.96592 583	0.98480 775	0.99619 470	1.00000 000
	$\begin{bmatrix}(-5)9\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)1\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)3\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\10\end{bmatrix}$
5	1.13303 553	1.22001 878	1.30698 342	1.39393 358	1.48087 384	1.56780 907
15	1.12176 337	1.20649 962	1.29106 728	1.37550 358	1.45984 990	1.54415 050
25	1.10005 236	1.18039 569	1.26026 405	1.33976 099	1.41900 286	1.49811 493
35	1.06958 479	1.14359 813	1.21665 853	1.28896 903	1.36076 208	1.43229 097
45	1.03292 660	1.09900 829	1.16345 846	1.22661 050	1.28885 906	1.35064 388
55	0.99358 365	1.05063 981	1.10513 448	1.15755 065	1.20849 656	1.25867 963
65	0.95606 011	1.00378 508	1.04769 389	1.08838 943	1.12673 373	1.16382 796
75	0.92579 978	0.96518 626	0.99915 744	1.02823 305	1.05342 632	1.07640 511
85	0.90857 873	0.94269 813	0.96992 212	0.99022 779	1.00394 027	1.01266 351

Таблица 17.7. Дзета-функция Якоби $Z(\varphi\backslash\alpha)$

$$K(\alpha)Z(\varphi\backslash\alpha)=K(\alpha)E(\varphi\backslash\alpha)-E(\alpha)F(\varphi\backslash\alpha)$$

$$K(90^\circ)Z(\varphi\backslash\alpha)=K(90^\circ)Z(u|1)=K(90^\circ)\ \mathrm{th}\ u=\infty \text{ при всех } u$$

$\alpha\backslash\varphi$	0°	5°	10°	15°	20°	25	30
0°	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0	0.000083	0.000164	0.000239	0.000308	0.000367	0.000414
4	0	0.000332	0.000655	0.000957	0.001231	0.001467	0.001658
6	0	0.000748	0.001474	0.002155	0.002770	0.003302	0.003734
8	0	0.001331	0.002621	0.003832	0.004928	0.005875	0.006644
10	0	0.002080	0.004098	0.005992	0.007706	0.009188	0.010393
12	0	0.002997	0.005705	0.008635	0.011107	0.013246	0.014987
14	0	0.004082	0.008043	0.011765	0.015136	0.018055	0.020433
16	0	0.005337	0.010516	0.015384	0.019796	0.023621	0.026740
18	0	0.006761	0.013324	0.019496	0.025094	0.029951	0.033919
20	0	0.008357	0.016470	0.024105	0.031035	0.037055	0.041981
22	0	0.010125	0.019958	0.029216	0.037627	0.044942	0.050941
24	0	0.012067	0.023791	0.034834	0.044878	0.053626	0.060814
26	0	0.014186	0.027972	0.040968	0.052799	0.063119	0.071617
28	0	0.016483	0.032508	0.047624	0.061401	0.073438	0.083373
30	0	0.018962	0.037403	0.054811	0.070696	0.084599	0.096103
32	0	0.021625	0.042664	0.062540	0.080700	0.096624	0.109834
34	0	0.024476	0.048298	0.070823	0.091430	0.109534	0.124596
36	0	0.027520	0.054315	0.079674	0.102905	0.123356	0.140421
38	0	0.030761	0.060725	0.089108	0.115148	0.138120	0.157347
40	0	0.034205	0.067540	0.099145	0.128185	0.153860	0.175418
42	0	0.037860	0.074774	0.109807	0.142046	0.170614	0.194683
44	0	0.041734	0.082444	0.121118	0.156765	0.188428	0.215197
46	0	0.045835	0.090569	0.133109	0.172383	0.207353	0.237025
48	0	0.050177	0.099172	0.145813	0.188947	0.227450	0.260240
50	0	0.054771	0.108280	0.159273	0.206513	0.248789	0.284929
52	0	0.059634	0.117925	0.173536	0.225145	0.271452	0.311193
54	0	0.064786	0.128146	0.188661	0.244921	0.295538	0.339150
56	0	0.070249	0.138989	0.204716	0.265933	0.321161	0.368940
58	0	0.076052	0.150510	0.221785	0.288294	0.348462	0.400731
60	0	0.082227	0.162776	0.239971	0.312138	0.377610	0.434726
62	0	0.088818	0.175872	0.259398	0.337632	0.408811	0.471170
64	0	0.095876	0.189901	0.280221	0.364981	0.442321	0.510371
66	0	0.103468	0.204994	0.302637	0.394446	0.478462	0.552710
68	0	0.111676	0.221320	0.326895	0.426356	0.517644	0.598675
70	0	0.120612	0.239097	0.353322	0.461145	0.560402	0.648900
72	0	0.130420	0.258615	0.382351	0.499384	0.607444	0.704225
74	0	0.141301	0.280272	0.414575	0.541857	0.659739	0.765797
76	0	0.153537	0.304631	0.450832	0.589673	0.718657	0.835238
78	0	0.167542	0.332519	0.492356	0.644462	0.786214	0.914934
80	0	0.183967	0.365230	0.541075	0.708771	0.865556	1.008608
82	0	0.203902	0.404937	0.600229	0.786884	0.961976	1.122523
84	0	0.229402	0.455734	0.675918	0.886859	1.085434	1.268462
86	0	0.265091	0.526833	0.781873	1.026844	1.258352	1.472953
88	0	0.325753	0.647691	0.962000	1.264856	1.552420	1.820811
90	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	0	0.000519	0.001023	0.001496	0.001923	0.002292	0.002592
15	0	0.004688	0.009238	0.013513	0.017387	0.020743	0.023479
25	0	0.013105	0.025838	0.037836	0.048754	0.058271	0.066098
35	0	0.025973	0.051258	0.075176	0.097073	0.116329	0.132373
45	0	0.043755	0.086448	0.127026	0.164459	0.197748	0.225942
55	0	0.067477	0.133487	0.196567	0.255266	0.308149	0.353807
65	0	0.099601	0.197305	0.291216	0.379430	0.460039	0.531121
75	0	0.147228	0.292070	0.432134	0.565011	0.688264	0.799407
85	0	0.245478	0.487761	0.723644	0.949910	1.163313	1.360551

См. пример 16.
Взято из [17.8].

Таблица 17.7. Дзета-функция Якоби $Z(\varphi\backslash\alpha)$

$$K(\alpha)Z(\varphi\backslash\alpha)=K(\alpha)E(\varphi\backslash\alpha)-E(\alpha)F(\varphi\backslash\alpha)$$

$$K(90^\circ)Z(\varphi\backslash\alpha)=K(90^\circ)Z(u|1)=K(90^\circ)\ \mathrm{th}\ u=\infty \text{ при всех } u$$

$\alpha\backslash\varphi$	35°	40°	45°	50°	55°	60°
0°	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.000450	0.000471	0.000479	0.000471	0.000450	0.000415
4	0.001800	0.001886	0.001916	0.001887	0.001800	0.001659
6	0.004052	0.004248	0.004314	0.004250	0.004056	0.003739
8	0.007212	0.007561	0.007681	0.007567	0.007224	0.006660
10	0.011284	0.011833	0.012023	0.011849	0.011313	0.010433
12	0.016276	0.017073	0.017353	0.017106	0.016337	0.015070
14	0.022197	0.023293	0.023683	0.023354	0.022312	0.020588
16	0.029060	0.030505	0.031029	0.030610	0.029257	0.027006
18	0.036876	0.038728	0.039411	0.038897	0.037194	0.034347
20	0.045662	0.047979	0.048850	0.048238	0.046150	0.042639
22	0.055435	0.058279	0.059372	0.058663	0.056156	0.051912
24	0.066216	0.069655	0.071005	0.070203	0.067246	0.062203
26	0.078026	0.082132	0.083783	0.082895	0.079461	0.073551
28	0.090893	0.095744	0.097742	0.096782	0.092844	0.086003
30	0.104844	0.110525	0.112924	0.111909	0.107447	0.099613
32	0.119914	0.126515	0.129375	0.128330	0.123327	0.114438
34	0.136138	0.143758	0.147147	0.146103	0.140549	0.130548
36	0.153557	0.162305	0.166300	0.165296	0.159186	0.148018
38	0.172220	0.182211	0.186898	0.185983	0.179319	0.166934
40	0.192178	0.203541	0.209016	0.208248	0.201042	0.187395
42	0.213492	0.226365	0.232738	0.232187	0.224459	0.209512
44	0.236228	0.250764	0.258158	0.257907	0.249691	0.233413
46	0.260466	0.276831	0.285383	0.285531	0.276871	0.259243
48	0.286295	0.304671	0.314535	0.315196	0.306156	0.287169
50	0.313816	0.334405	0.345755	0.347064	0.337723	0.317383
52	0.343151	0.366173	0.379203	0.381317	0.371776	0.350108
54	0.374438	0.400138	0.415067	0.418166	0.408552	0.385601
56	0.407844	0.436490	0.453565	0.457861	0.448328	0.424167
58	0.443565	0.475457	0.494956	0.500691	0.491428	0.466161
60	0.481836	0.517310	0.539547	0.547003	0.538238	0.512007
62	0.522947	0.562378	0.587709	0.597211	0.589220	0.562214
64	0.567251	0.611064	0.639896	0.651822	0.644933	0.617399
66	0.615191	0.663870	0.696670	0.711460	0.706068	0.678320
68	0.667330	0.721434	0.758741	0.776910	0.773487	0.745922
70	0.724397	0.784577	0.827024	0.849178	0.848294	0.821411
72	0.787359	0.854390	0.902728	0.929590	0.931931	0.906356
74	0.857536	0.932355	0.987491	1.019938	1.026343	1.002860
76	0.936789	1.020563	1.083621	1.122735	1.134246	1.113848
78	1.027859	1.122089	1.194508	1.241670	1.259612	1.243568
80	1.135017	1.241721	1.325428	1.382470	1.408589	1.398577
82	1.265447	1.387516	1.485245	1.554749	1.591484	1.589820
84	1.432669	1.574623	1.690632	1.776579	1.827639	1.837791
86	1.667113	1.837147	1.979107	2.088611	2.160541	2.188502
88	2.066078	2.284127	2.470622	2.620801	2.729164	2.788909
90	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	0.002813	0.002948	0.002994	0.002949	0.002815	0.002594
15	0.025510	0.026774	0.027228	0.026855	0.025662	0.023683
25	0.071991	0.075754	0.077249	0.076403	0.073210	0.067742
35	0.144695	0.152865	0.156547	0.155518	0.149686	0.139108
45	0.248154	0.263583	0.271538	0.271473	0.263028	0.246077
55	0.390865	0.418002	0.433972	0.437641	0.428046	0.404479
65	0.590735	0.636916	0.667669	0.680968	0.674774	0.647089
75	0.895883	0.975016	1.033955	1.069585	1.078397	1.056317
85	1.538234	1.692810	1.820471	1.916972	1.977347	1.995386

Таблица 17.7. Дзета-функция Якоби $Z(\varphi\backslash\alpha)$

$$K(\alpha)Z(\varphi\backslash\alpha)=K(\alpha)E(\varphi\backslash\alpha)-E(\alpha)F(\varphi\backslash\alpha)$$

$$K(90^\circ)Z(\varphi\backslash\alpha)=K(90^\circ)Z(u|1)=K(90^\circ)\ \text{th}\ u=\infty \text{ при всех } u$$

$\alpha\backslash\varphi$	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0°	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
2	0.000367	0.000308	0.000239	0.000164	0.000083	0
4	0.001468	0.001232	0.000958	0.000656	0.000333	0
6	0.003308	0.002776	0.002160	0.001477	0.000750	0
8	0.005893	0.004946	0.003849	0.002633	0.001337	0
10	0.009233	0.007751	0.006032	0.004127	0.002096	0
12	0.013341	0.011202	0.008718	0.005966	0.003030	0
14	0.018231	0.015312	0.011920	0.008158	0.004143	0
16	0.023922	0.020098	0.015649	0.010713	0.005442	0
18	0.030438	0.025581	0.019924	0.013642	0.006930	0
20	0.037803	0.031783	0.024763	0.016959	0.008617	0
22	0.046047	0.038732	0.030188	0.020680	0.010509	0
24	0.055206	0.046459	0.036225	0.024823	0.012617	0
26	0.065319	0.055000	0.042905	0.029411	0.014952	0
28	0.076431	0.064397	0.050260	0.034466	0.017526	0
30	0.088594	0.074696	0.058332	0.040018	0.020354	0
32	0.101867	0.085951	0.067164	0.046099	0.023454	0
34	0.116315	0.098224	0.076808	0.052747	0.026845	0
36	0.132015	0.111585	0.087324	0.060004	0.030550	0
38	0.149053	0.126114	0.098779	0.067920	0.034595	0
40	0.167527	0.141905	0.111254	0.076554	0.039011	0
42	0.187551	0.159064	0.124839	0.085973	0.043833	0
44	0.209254	0.177713	0.139641	0.096255	0.049104	0
46	0.232785	0.197996	0.155784	0.107493	0.054874	0
48	0.258315	0.220078	0.173414	0.119798	0.061201	0
50	0.286045	0.244154	0.192704	0.133299	0.068157	0
52	0.316206	0.270454	0.213858	0.148154	0.075826	0
54	0.349070	0.299246	0.237121	0.164550	0.084312	0
56	0.384960	0.330854	0.262789	0.182720	0.093745	0
58	0.424255	0.365664	0.291220	0.202947	0.104281	0
60	0.467411	0.404143	0.322854	0.225584	0.116121	0
62	0.514976	0.446860	0.358236	0.251076	0.129521	0
64	0.567621	0.494517	0.398048	0.279993	0.144812	0
66	0.626169	0.547987	0.443155	0.313069	0.162430	0
68	0.691653	0.608372	0.494668	0.351277	0.182965	0
70	0.765385	0.677086	0.554038	0.395917	0.207230	0
72	0.849072	0.755975	0.623195	0.448779	0.236382	0
74	0.944993	0.847508	0.704762	0.512376	0.272114	0
76	1.056298	0.955095	0.802400	0.590350	0.317015	0
78	1.187535	1.083634	0.921408	0.688163	0.375226	0
80	1.345674	1.240571	1.069839	0.814374	0.453784	0
82	1.542281	1.438150	1.260828	0.983236	0.565578	0
84	1.798909	1.698985	1.518315	1.220780	0.736684	0
86	2.163806	2.073357	1.894760	1.583040	1.028059	0
88	2.790834	2.721008	2.555104	2.241393	1.628299	0
90	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	0.002295	0.001926	0.001498	0.001025	0.000520	0
15	0.020975	0.017619	0.013718	0.009390	0.004769	0
25	0.060141	0.050625	0.039483	0.027060	0.013755	0
35	0.124003	0.104764	0.081953	0.056296	0.028657	0
45	0.220781	0.187640	0.147536	0.101748	0.051923	0
55	0.366615	0.314676	0.249634	0.173397	0.088901	0
65	0.596098	0.520463	0.419877	0.295957	0.153297	0
75	0.998480	0.899033	0.751288	0.549278	0.293208	0
85	1.962673	1.866624	1.686113	1.380465	0.860811	0

Таблица 17.8. Лямбда-функция Хеймана $\Lambda_0(\varphi\backslash\alpha)$

$$\Lambda_0(\varphi\backslash\alpha)=\frac{F(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)}{K'(\alpha)}+\frac{2}{\pi}K(\alpha)Z(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)=\frac{2}{\pi}\{K(\alpha)E(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)-[K(\alpha)-E(\alpha)]F(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)\}$$

$\alpha\backslash\varphi$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°
0°	0	0.087156	0.173648	0.258819	0.342020	0.422618	0.500000
2	0	0.087129	0.173595	0.258740	0.341916	0.422490	0.499848
4	0	0.087050	0.173437	0.258504	0.341604	0.422104	0.499391
6	0	0.086917	0.173173	0.258111	0.341084	0.421462	0.498633
8	0	0.086732	0.172804	0.257562	0.340359	0.420566	0.497574
10	0	0.086495	0.172332	0.256858	0.339430	0.419419	0.496219
12	0	0.086206	0.171757	0.256001	0.338299	0.418024	0.494572
14	0	0.085866	0.171080	0.254994	0.336969	0.416385	0.492638
16	0	0.085476	0.170303	0.253838	0.335445	0.414506	0.490424
18	0	0.085037	0.169429	0.252536	0.333729	0.412394	0.487937
20	0	0.084549	0.168458	0.251092	0.331827	0.410054	0.485184
22	0	0.084013	0.167393	0.249509	0.329743	0.407492	0.482176
24	0	0.083432	0.166236	0.247790	0.327483	0.404717	0.478920
26	0	0.082806	0.164991	0.245941	0.325052	0.401736	0.475428
28	0	0.082136	0.163661	0.243966	0.322458	0.398558	0.471710
30	0	0.081425	0.162247	0.241870	0.319707	0.395191	0.467777
32	0	0.080674	0.160755	0.239657	0.316806	0.391645	0.463642
34	0	0.079884	0.159187	0.237335	0.313764	0.387930	0.459316
36	0	0.079058	0.157548	0.234908	0.310587	0.384057	0.454813
38	0	0.078198	0.155842	0.232383	0.307286	0.380037	0.450147
40	0	0.077307	0.154073	0.229767	0.303869	0.375880	0.445330
42	0	0.076385	0.152246	0.227068	0.300346	0.371600	0.440378
44	0	0.075436	0.150367	0.224292	0.296727	0.367209	0.435306
46	0	0.074463	0.148439	0.221447	0.293022	0.362720	0.430127
48	0	0.073469	0.146470	0.218543	0.289242	0.358145	0.424860
50	0	0.072455	0.144464	0.215587	0.285399	0.353500	0.419519
52	0	0.071426	0.142428	0.212589	0.281505	0.348799	0.414121
54	0	0.070385	0.140370	0.209558	0.277573	0.344057	0.408685
56	0	0.069336	0.138295	0.206506	0.273616	0.339290	0.403228
58	0	0.068281	0.136211	0.203443	0.269648	0.334516	0.397769
60	0	0.067226	0.134126	0.200380	0.265684	0.329751	0.392328
62	0	0.066175	0.132049	0.197331	0.261739	0.325015	0.386926
64	0	0.065131	0.129989	0.194307	0.257832	0.320328	0.381586
66	0	0.064100	0.127955	0.191324	0.253979	0.315710	0.376331
68	0	0.063088	0.125958	0.188396	0.250200	0.311185	0.371186
70	0	0.062100	0.124009	0.185540	0.246517	0.306778	0.366180
72	0	0.061143	0.122121	0.182774	0.242952	0.302515	0.361342
74	0	0.060223	0.120307	0.180119	0.239531	0.298427	0.356706
76	0	0.059348	0.118583	0.177596	0.236282	0.294547	0.352309
78	0	0.058528	0.116967	0.175231	0.233238	0.290914	0.348194
80	0	0.057773	0.115479	0.173054	0.230436	0.287571	0.344410
82	0	0.057095	0.114143	0.171099	0.227922	0.284573	0.341017
84	0	0.056508	0.112988	0.169410	0.225750	0.281983	0.338088
86	0	0.056034	0.112053	0.168043	0.223992	0.279887	0.335718
88	0	0.055698	0.111392	0.167078	0.222751	0.278458	0.334046
90	0	0.055556	0.111111	0.166667	0.222222	0.277778	0.333333
		$\left[{(-5)2 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)5 \atop 5}\right]$	$\left[{(-5)7 \atop 6}\right]$	$\left[{(-5)9 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 6}\right]$
5	0	0.086990	0.173318	0.258327	0.341370	0.421815	0.499050
15	0	0.085677	0.170704	0.254434	0.336231	0.415475	0.491565
25	0	0.083124	0.165625	0.246882	0.326288	0.403252	0.477203
35	0	0.079476	0.158377	0.236134	0.312192	0.386013	0.457086
45	0	0.074953	0.149408	0.222878	0.294884	0.364976	0.432729
55	0	0.069861	0.139334	0.208034	0.275597	0.341676	0.405958
65	0	0.064614	0.128968	0.192809	0.255897	0.318009	0.378946
75	0	0.059779	0.119433	0.178839	0.237883	0.296459	0.354475
85	0	0.056256	0.112490	0.168682	0.224814	0.280867	0.336826

Взято из [17.9].

Таблица 17.8. Лямбда-функция Хеймана $\Lambda_0(\varphi\backslash\alpha)$

$$\Lambda_0(\varphi\backslash\alpha)=\frac{F(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)}{K'(\alpha)}+\frac{2}{\pi}K(\alpha)Z(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)=\frac{2}{\pi}\{K(\alpha)E(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)-[K(\alpha)-E(\alpha)]F(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)\}$$

$\alpha\backslash\varphi$	35°	40°	45°	50°	55°	60°
0°	0.573576	0.642788	0.707107	0.766044	0.819152	0.866025
2	0.573402	0.642592	0.706891	0.765811	0.818903	0.865762
4	0.572878	0.642006	0.706247	0.765113	0.818157	0.864975
6	0.572009	0.641032	0.705177	0.763956	0.816922	0.863674
8	0.570795	0.639674	0.703687	0.762347	0.815210	0.861876
10	0.569244	0.637940	0.701786	0.760298	0.813034	0.859602
12	0.567360	0.635836	0.699484	0.757822	0.810416	0.856877
14	0.565150	0.633373	0.696794	0.754937	0.807375	0.853731
16	0.562623	0.630561	0.693729	0.751660	0.803935	0.850194
18	0.559789	0.627412	0.690306	0.748011	0.800123	0.846297
20	0.556657	0.623939	0.686540	0.744012	0.795963	0.842073
22	0.553238	0.620157	0.682450	0.739683	0.791483	0.837553
24	0.549546	0.616080	0.678054	0.735049	0.786709	0.832766
26	0.545591	0.611725	0.673372	0.730130	0.781667	0.827743
28	0.541389	0.607107	0.668422	0.724951	0.776384	0.822510
30	0.536953	0.602244	0.663225	0.719533	0.770883	0.817093
32	0.532297	0.597153	0.657801	0.713900	0.765190	0.811517
34	0.527437	0.591851	0.652170	0.708073	0.759326	0.805804
36	0.522388	0.586356	0.646351	0.702074	0.753314	0.799976
38	0.517165	0.580687	0.640365	0.695923	0.747177	0.794052
40	0.511786	0.574862	0.634231	0.689642	0.740932	0.788051
42	0.506266	0.568898	0.627970	0.683251	0.734602	0.781992
44	0.500622	0.562815	0.621600	0.676769	0.728203	0.775891
46	0.494873	0.556632	0.615142	0.670217	0.721756	0.769764
48	0.489034	0.550366	0.608615	0.663613	0.715277	0.763627
50	0.483125	0.544038	0.602038	0.656976	0.708785	0.757496
52	0.477164	0.537668	0.595432	0.650326	0.702298	0.751385
54	0.471170	0.531275	0.588817	0.643682	0.695832	0.745310
56	0.465163	0.524879	0.582212	0.637064	0.689405	0.739286
58	0.459163	0.518502	0.575640	0.630491	0.683037	0.733329
60	0.453192	0.512167	0.569122	0.623985	0.676745	0.727455
62	0.447272	0.505895	0.562680	0.617567	0.670549	0.721680
64	0.441428	0.499711	0.556339	0.611258	0.664469	0.716024
66	0.435683	0.493642	0.550124	0.605085	0.658528	0.710504
68	0.430065	0.487715	0.544062	0.599072	0.652749	0.705142
70	0.424604	0.481959	0.538183	0.593247	0.647159	0.699961
72	0.419332	0.476408	0.532519	0.587641	0.641784	0.694985
74	0.414284	0.471098	0.527106	0.582290	0.636659	0.690244
76	0.409500	0.466070	0.521985	0.577231	0.631818	0.685770
78	0.405026	0.461371	0.517202	0.572511	0.627303	0.681601
80	0.400915	0.457055	0.512813	0.568181	0.623166	0.677782
82	0.397229	0.453189	0.508883	0.564307	0.619464	0.674368
84	0.394049	0.449853	0.505494	0.560967	0.616276	0.671427
86	0.391477	0.447157	0.502754	0.558268	0.613700	0.669053
88	0.389662	0.445255	0.500823	0.556366	0.611884	0.667379
90	0.388889	0.444444	0.500000	0.555556	0.611111	0.666667
	$\left[{(-4)1 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 6}\right]$
5	0.572487	0.641567	0.705765	0.764592	0.817600	0.864388
15	0.563926	0.632010	0.695307	0.753346	0.805703	0.852010
25	0.547600	0.613936	0.675748	0.732623	0.784220	0.830282
35	0.524935	0.589127	0.649283	0.705094	0.756337	0.802903
45	0.497760	0.559735	0.618381	0.673501	0.724985	0.772830
55	0.468167	0.528076	0.585512	0.640369	0.692612	0.742291
65	0.438541	0.496661	0.553214	0.608153	0.661480	0.713246
75	0.411857	0.468546	0.524506	0.579721	0.634200	0.687972
85	0.392679	0.448417	0.504034	0.559529	0.614903	0.670162

Таблица 17.8. Лямбда-функция Хеймана $\Lambda_0(\varphi\diagdown\alpha)$

$$\Lambda_0(\varphi\backslash\alpha)=\frac{F(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)}{K'(\alpha)}+\frac{2}{\pi}K(\alpha)Z(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\{K(\alpha)E(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)-[K(\alpha)-E(\alpha)]F(\varphi\backslash 90^\circ-\alpha)\}$$

$\alpha\backslash\varphi$	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0°	0.906308	0.939693	0.965926	0.984808	0.996195	1
2	0.906032	0.939407	0.965633	0.984511	0.995903	1
4	0.905210	0.938559	0.964769	0.983652	0.995130	1
6	0.903857	0.937172	0.963376	0.982315	0.994063	1
8	0.901997	0.935282	0.961512	0.980599	0.992833	1
10	0.899660	0.932934	0.959244	0.978597	0.991511	1
12	0.896881	0.930177	0.956638	0.976384	0.990135	1
14	0.893699	0.927061	0.953755	0.974016	0.988727	1
16	0.890152	0.923634	0.950646	0.971534	0.987299	1
18	0.886280	0.919940	0.947355	0.968969	0.985858	1
20	0.882119	0.916018	0.943918	0.966343	0.984410	1
22	0.877704	0.911904	0.940364	0.963671	0.982958	1
24	0.873068	0.907630	0.936718	0.960968	0.981506	1
26	0.868240	0.903221	0.933000	0.958241	0.980054	1
28	0.863249	0.898703	0.929226	0.955500	0.978604	1
30	0.858117	0.894095	0.925409	0.952751	0.977159	1
32	0.852869	0.889416	0.921563	0.949998	0.975719	1
34	0.847523	0.884681	0.917695	0.947247	0.974286	1
36	0.842100	0.879904	0.913817	0.944502	0.972861	1
38	0.836615	0.875099	0.909935	0.941766	0.971445	1
40	0.831085	0.870277	0.906056	0.939042	0.970039	1
42	0.825524	0.865449	0.902138	0.936335	0.968644	1
44	0.819946	0.860625	0.898337	0.933647	0.967262	1
46	0.814365	0.855814	0.894508	0.930981	0.965894	1
48	0.808792	0.851026	0.890708	0.928341	0.964540	1
50	0.803241	0.846269	0.886942	0.925731	0.963204	1
52	0.797724	0.841553	0.883216	0.923152	0.961885	1
54	0.792252	0.836887	0.879537	0.920610	0.960586	1
56	0.786839	0.832280	0.875911	0.918108	0.959309	1
58	0.781496	0.827742	0.872345	0.915649	0.958055	1
60	0.776237	0.823283	0.868846	0.913240	0.956826	1
62	0.771077	0.818913	0.865421	0.910884	0.955626	1
64	0.766029	0.814645	0.862080	0.908588	0.954457	1
66	0.761110	0.810490	0.858831	0.906357	0.953321	1
68	0.756338	0.806464	0.855685	0.904198	0.952223	1
70	0.751731	0.802581	0.852654	0.902119	0.951166	1
72	0.747312	0.798860	0.849751	0.900129	0.950154	1
74	0.743104	0.795319	0.846990	0.898237	0.949193	1
76	0.739137	0.791983	0.844390	0.896456	0.948288	1
78	0.735442	0.788877	0.841972	0.894800	0.947446	1
80	0.732059	0.786036	0.839759	0.893286	0.946677	1
82	0.729036	0.783497	0.837783	0.891933	0.945990	1
84	0.726434	0.781312	0.836063	0.890770	0.945400	1
86	0.724333	0.779549	0.834711	0.889831	0.944923	1
88	0.722852	0.778307	0.833745	0.889170	0.944587	1
90	0.722222	0.777778	0.833333	0.888889	0.944444	1
	$\begin{bmatrix}(-4)1\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)9\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)7\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)2\\5\end{bmatrix}$	
5	0.904599	0.937930	0.964135	0.983037	0.994624	1
15	0.891969	0.925384	0.952226	0.972787	0.988015	1
25	0.870676	0.905441	0.934867	0.959607	0.980779	1
35	0.844820	0.882297	0.915757	0.945875	0.973573	1
45	0.817155	0.858217	0.896419	0.932311	0.966576	1
55	0.789537	0.834576	0.877717	0.919353	0.959944	1
65	0.763552	0.812552	0.860443	0.907464	0.953885	1
75	0.741089	0.793624	0.845669	0.897332	0.948733	1
85	0.725315	0.780373	0.835352	0.890270	0.945145	1

Таблица 17.9. Эллиптический интеграл третьего рода $\Pi(n;\ \varphi\backslash\alpha)$

$$\Pi(n;\ \varphi\backslash\alpha)=\int_0^{\varphi}(1-n\sin^2\theta)^{-1}[1-\sin^2\alpha\sin^2\theta]^{-\frac{1}{2}}d\theta$$

n	$\alpha\backslash\varphi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0.0	0°	0	0.26180	0.52360	0.78540	1.04720	1.30900	1.57080
0.0	15	0	0.26200	0.52513	0.79025	1.05774	1.32733	1.59814
0.0	30	0	0.26254	0.52943	0.80437	1.08955	1.38457	1.68575
0.0	45	0	0.26330	0.53562	0.82602	1.14243	1.48788	1.85407
0.0	60	0	0.26406	0.54223	0.85122	1.21260	1.64918	2.15651
0.0	75	0	0.26463	0.54736	0.87270	1.28371	1.87145	2.76806
0.0	90	0	0.26484	0.54931	0.88137	1.31696	2.02759	∞
0.1	0	0	0.26239	0.52820	0.80013	1.07949	1.36560	1.65576
0.1	15	0	0.26259	0.52975	0.80514	1.09058	1.38520	1.68536
0.1	30	0	0.26314	0.53412	0.81972	1.12405	1.44649	1.78030
0.1	45	0	0.26390	0.54041	0.84210	1.17980	1.55739	1.96326
0.1	60	0	0.26467	0.54712	0.86817	1.25393	1.73121	2.29355
0.1	75	0	0.26524	0.55234	0.89040	1.32926	1.97204	2.96601
0.1	90	0	0.26545	0.55431	0.89939	1.36454	2.14201	∞
0.2	0	0	0.26299	0.53294	0.81586	1.11534	1.43078	1.75620
0.2	15	0	0.26319	0.53452	0.82104	1.12705	1.45187	1.78850
0.2	30	0	0.26374	0.53896	0.83612	1.16241	1.51792	1.89229
0.2	45	0	0.26450	0.54535	0.85928	1.22139	1.63775	2.09296
0.2	60	0	0.26527	0.55217	0.88629	1.30003	1.82643	2.45715
0.2	75	0	0.26585	0.55747	0.90934	1.38016	2.08942	3.20448
0.2	90	0	0.26606	0.55948	0.91867	1.41777	2.27604	∞
0.3	0	0	0.26359	0.53784	0.83271	1.15551	1.50701	1.87746
0.3	15	0	0.26379	0.53945	0.83808	1.16791	1.52988	1.91309
0.3	30	0	0.26434	0.54396	0.85370	1.20543	1.60161	2.02779
0.3	45	0	0.26511	0.55046	0.87771	1.26812	1.73217	2.25038
0.3	60	0	0.26588	0.55739	0.90574	1.35193	1.93879	2.65684
0.3	75	0	0.26646	0.56278	0.92969	1.43759	2.22876	3.49853
0.3	90	0	0.26667	0.56483	0.93938	1.47789	2.43581	∞
0.4	0	0	0.26420	0.54291	0.85084	1.20098	1.59794	2.02789
0.4	15	0	0.26440	0.54454	0.85641	1.21419	1.62298	2.06774
0.4	30	0	0.26495	0.54912	0.87262	1.25419	1.70165	2.19629
0.4	45	0	0.26572	0.55573	0.89756	1.32117	1.84537	2.44683
0.4	60	0	0.26650	0.56278	0.92670	1.41098	2.07413	2.90761
0.4	75	0	0.26708	0.56827	0.95162	1.50309	2.39775	3.87214
0.4	90	0	0.26729	0.57035	0.96171	1.54653	2.63052	∞
0.5	0	0	0.26481	0.54814	0.87042	1.25310	1.70919	2.22144
0.5	15	0	0.26501	0.54980	0.87621	1.26726	1.73695	2.26685
0.5	30	0	0.26557	0.55447	0.89307	1.31017	1.82433	2.41367
0.5	45	0	0.26634	0.56119	0.91902	1.38218	1.98464	2.70129
0.5	60	0	0.26712	0.56837	0.94939	1.47906	2.24155	3.23477
0.5	75	0	0.26770	0.57394	0.97538	1.57881	2.60846	4.36620
0.5	90	0	0.26792	0.57606	0.98591	1.62599	2.87468	∞
0.6	0	0	0.26543	0.55357	0.89167	1.31379	1.85002	2.48365
0.6	15	0	0.26563	0.55525	0.89770	1.32907	1.88131	2.53677
0.6	30	0	0.26619	0.56000	0.91527	1.37544	1.98005	2.70905
0.6	45	0	0.26696	0.56684	0.94235	1.45347	2.16210	3.04862
0.6	60	0	0.26775	0.57414	0.97406	1.55884	2.45623	3.68509
0.6	75	0	0.26833	0.57982	1.00123	1.66780	2.88113	5.05734
0.6	90	0	0.26855	0.58198	1.01225	1.71951	3.19278	∞
			$\begin{bmatrix}(-5)5\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)2\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)7\\7\end{bmatrix}$		

См. примеры 15 — 20.

Таблица 17.9. Эллиптический интеграл третьего рода $\Pi(n; \varphi\backslash\alpha)$

$$\Pi(n; \varphi\backslash\alpha)=\int_0^{\varphi}(1-n\sin^2\theta)^{-1}[1-\sin^2\alpha\sin^2\theta]^{-\frac{1}{2}}d\theta$$

n	$\alpha\backslash\varphi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0.7	0°	0	0.26605	0.55918	0.91487	1.38587	2.03720	2.86787
0.7	15	0	0.26625	0.56090	0.92116	1.40251	2.07333	2.93263
0.7	30	0	0.26681	0.56573	0.93952	1.45309	2.18765	3.14339
0.7	45	0	0.26759	0.57270	0.96784	1.53846	2.39973	3.56210
0.7	60	0	0.26838	0.58014	1.00104	1.65425	2.74586	4.35751
0.7	75	0	0.26897	0.58592	1.02954	1.77459	3.25315	6.11030
0.7	90	0	0.26918	0.58812	1.04110	1.83192	3.63042	∞
0.8	0	0	0.26668	0.56501	0.94034	1.47370	2.30538	3.51240
0.8	15	0	0.26688	0.56676	0.94694	1.49205	2.34868	3.59733
0.8	30	0	0.26745	0.57168	0.96618	1.54790	2.48618	3.87507
0.8	45	0	0.26823	0.57877	0.99588	1.64250	2.74328	4.43274
0.8	60	0	0.26902	0.58635	1.03076	1.77145	3.16844	5.51206
0.8	75	0	0.26961	0.59225	1.06073	1.90629	3.80370	7.96669
0.8	90	0	0.26982	0.59449	1.07290	1.97080	4.28518	∞
0.9	0	0	0.26731	0.57106	0.96853	1.58459	2.74439	4.96729
0.9	15	0	0.26752	0.57284	0.97547	1.60515	2.79990	5.09958
0.9	30	0	0.26808	0.57785	0.99569	1.66788	2.97710	5.53551
0.9	45	0	0.26887	0.58508	1.02695	1.77453	3.31210	6.42557
0.9	60	0	0.26966	0.59281	1.06372	1.92081	3.87661	8.20086
0.9	75	0	0.27025	0.59882	1.09535	2.07487	4.74432	12.46407
0.9	90	0	0.27047	0.60110	1.10821	2.14899	5.42125	∞
1.0	0	0	0.26795	0.57735	1.00000	1.73205	3.73205	∞
1.0	15	0	0.26816	0.57916	1.00731	1.75565	3.81655	∞
1.0	30	0	0.26872	0.58428	1.02866	1.82781	4.08864	∞
1.0	45	0	0.26951	0.59165	1.06170	1.95114	4.61280	∞
1.0	60	0	0.27031	0.59953	1.10060	2.12160	5.52554	∞
1.0	75	0	0.27090	0.60566	1.13414	2.30276	7.00372	∞
1.0	90	0	0.27112	0.60799	1.14779	2.39053	8.22356	∞
			$\begin{bmatrix}(-5)5\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)2\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)1\\7\end{bmatrix}$		

См. примеры 15 — 20.

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

17.1. Cayley A. An elementary treatise on elliptic functions. — N.Y.: Dover Publications, 1956.

17.2. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V. 3. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1967, Т.III.

17.3. King L. V. On the direct numerical calculation of elliptic functions and integrals. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1924.

17.4. Neville E. H. Jacobian elliptic functions. — L.: Oxford Univ. Press, 1951.

17.5. Oberhettinger F., Magnus W. Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. — B.: Springer-Verlag, 1949.

17.6. Tricomi F. Elliptische Funktionen. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1948.

17.7. Whittaker E. T., Watson G. N. A course of modern analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952, Ch. 20—22. Русский перевод: Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа.—М.: Физматгиз, 1963, Т.II.

Таблицы

17.8. Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. — B.: Springer-Verlag, 1954.

17.9. Heuman C. Tables of complete elliptic integrals. — J. Math. Phys. 1941, **20**, p. 127—206.

17.10. Houel J. Recueil de formules et de tables numériques — P.: Gauthier-Villars, 1901.

17.11. Jahnke E., Emde F. Tables of functions. — N.Y.: Dover Publications, 1945. Русский перевод: Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

17.12. Milne-Thomson L. M. Jacobian elliptic function tables. — N.Y.: Dover Publications, 1956.

17.13. Milne-Thomson L. M. Ten-figure table of the complete elliptic integrals K, K', E, E' and a table of $\frac{1}{\vartheta_3^2(0\,|\,\tau)}$, $\frac{1}{\vartheta_3^{2\prime\prime}(0\,|\,\tau)}$. — Proc. London Math. Soc., 1931, **2**, 33.

17.14. Milne-Thomson L. M. The Zeta function of Jacobi. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1931, **52**.

17.15. Milne-Thomson L. M. Die elliptischen Funktionen von Jacobi. — B.: Julius Springer 1931. Украинский перевод: Мілн-Томсон Л. М. Еліптичні функції Якобі, п'ятизначні таблиці sn u, cn u, dn u. — Харків: Держ. наук.-техн. вид-во Укр., 1933.

17.16. Pearson K. Tables of the complete and incomplete elliptic integrals. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1934.

17.17. Spenceley G. W., Spenceley R. M. Smithsonian elliptic functions tables. — Washington, 1947. — (Smithsonian Miscellaneous Collection; V. 109).

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Книги

17.18. Вечинкин В. П. Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций. — М.: Изд-во Военно-воздушной академии РККА, 1935.

17.19. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. — М.: Изд-во АН СССР, 1941.

17.20. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.

17.21. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. — М.: ОНТИ, 1936.

17.22. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1971.

Таблицы

17.23. Беляков В. М. и др. Таблицы эллиптических интегралов. — М.: Изд-во АН СССР, 1962, Т.I

17.24. Беляков В. М. и др. Таблицы эллиптических интегралов. — М.: Изд-во АН СССР, 1963, Т.II

17.25. Самоилова-Яхонтова Н. С. Таблицы эллиптических интегралов. — М.: ОНТИ, 1935.

17.26. Шулер М., Гебелейн Х. Таблицы эллиптических функций. — М.: ВЦ АН СССР, 1961. — (БМТ; Вып. 13.)

17.27. Fettis H. E., Caslin J. C. Tables of elliptic integrals of the first, second and third kind. — Office of Aerospace. Res. U.S. Air Force, 1964.

Глава 18

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА И РОДСТВЕННЫЕ ИМ ФУНКЦИИ

Т. СУЗАРД

СОДЕРЖАНИЕ

18.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОГРАНИЧЕНИЯ И УСЛОВИЯ

Эллиптическая функция является однозначной двоякопериодической аналитической функцией комплексной переменной, единственными особенностями которой в конечной части плоскости могут быть только полюсы. Если ω и ω' — пара (основных) полупериодов такой функции $f(z)$, то $f(z + 2M\omega + 2N\omega') = f(z)$, где M и N — целые числа. Таким образом, изучение любой такой функции можно свести к рассмотрению ее поведения в *основном параллелограмме периодов* (FPP). Эллиптическая функция имеет конечное число полюсов (и то же самое число нулей) в FPP. Число этих полюсов (нулей) (неприводимое множество) называется ***порядком*** функции (полюсы и нули считаются в соответствии с их кратностью). Все остальные полюсы (нули) называются *конгруэнтными* неприводимому множеству. Простейшие (нетривиальные) эллиптические функции являются функциями второго порядка. В FPP можно выбрать в качестве стандартной функции второго порядка либо функцию с двумя простыми полюсами (выбор Якоби), либо функцию с одним двойным полюсом (выбор Вейерштрасса).

$\mathcal{P}$-функция Вейерштрасса. Пусть ω и ω' означают пару комплексных чисел таких, что $\operatorname{Im}(\omega'/\omega) > 0$. Тогда $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(z\,|\,\omega, \omega')$ есть эллиптическая функция второго порядка с периодами 2ω, $2\omega'$, имеющая двойной полюс в точке

$z = 0$, главной частью которой является z^{-2}; $\mathcal{P}(z) - z^{-2}$ — аналитическая функция в окрестности начала координат и стремится к нулю при z, стремящемся к нулю.

ζ-функция Вейерштрасса. $\zeta(z) = \zeta(z \mid \omega, \omega')$ удовлетворяет условию $\zeta'(z) = -\mathcal{P}(z)$; $\zeta(z)$ имеет простой полюс при $z = 0$, и главная часть ее равна z^{-1}; $\zeta(z) - z^{-1}$ стремится к нулю при z, стремящемся к нулю, и является аналитической в окрестности начала координат. $\zeta(z)$ — не эллиптическая функция, так как она непериодична. Однако она квазипериодична (см. 18.2.19), так что сведение в FPP возможно.

σ-функция Вейерштрасса. $\sigma(z) = \sigma(z \mid \omega, \omega')$ удовлетворяет условию $\sigma'(z)/\sigma(z) = \zeta(z)$; $\sigma(z)$ — целая функция, которая стремится к нулю в начале координат. Подобно ζ, она не является эллиптической функцией, так как непериодична. Однако она квазипериодична (см. 18.2.20), так что сведение в FPP возможно.

Инварианты g_2 и g_3

Пусть $W = 2M\omega + 2N\omega'$, где M и N — целые. Тогда

18.1.1. $g_2 = 60\Sigma' W^{-4}$ и $g_3 = 140\Sigma' W^{-6}$

называются *инвариантами*. Здесь суммирование производится по всевозможным парам M и N, исключая $M = N = 0$.

Дополнительные обозначения, подчеркивающие зависимость от инвариантов

18.1.2. $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(z;\ g_2,\ g_3)$.

18.1.3. $\mathcal{P}'(z) = \mathcal{P}'(z;\ g_2,\ g_3)$.

18.1.4. $\zeta(z) = \zeta(z;\ g_2,\ g_3)$.

18.1.5. $\sigma(z) = \sigma(z;\ g_2,\ g_3)$.

Основное дифференциальное уравнение, дискриминант и связанные с ним величины

18.1.6. $\mathcal{P}'^2(z) = 4\mathcal{P}^3(z) - g_2\mathcal{P}(z) - g_3$.

18.1.7. $\mathcal{P}'^2(z) = 4(\mathcal{P}(z) - e_1)(\mathcal{P}(z) - e_2)(\mathcal{P}(z) - e_3)$.

18.1.8. $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2(e_1 - e_2)^2$.

18.1.9. $g_2 = -4(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3) = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$.

18.1.10. $g_3 = 4e_1e_2e_3 = \dfrac{4}{3}(e_1^3 + e_2^3 + e_3^3)$.

18.1.11. $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

18.1.12. $e_1^4 + e_2^4 + e_3^4 = g_2^2/8$.

18.1.13. $4e_i^3 - g_2e_i - g_3 = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$.

Ограничения на инварианты и дискриминант

В этой главе будут рассматриваться только действительные g_2 и g_3 (этим охватывается большинство приложений), т. е. случай действительного дискриминанта. В дальнейшем будут отдельно рассматриваться случаи $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$. Соотношения однородности 18.2.1—18.2.15 дают возможность ограничиться неотрицательными g_3 (исключая случай $\Delta = 0$).

Обозначения корней из комплексных и комплексно сопряженных чисел

В этой главе, как и в гл. 3, символ $z^{1/n}$ (n — положительное целое) используется для обозначения арифметического корня n-й степени из z; $\bar{z}$ обозначает комплексно сопряженное с z число.

Основные параллелограммы периодов FPP. Обозначения

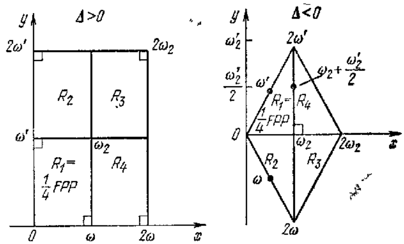


Рис. 18.1.

Прямоугольник — Ромб

$$\omega_1 = \omega,$$

$$\omega_2 = \omega + \omega', \quad \omega_2' = \omega' - \omega,$$

$$\omega_3 = \omega'.$$

ω — действительно,	ω_2 — действительное,
ω' — чисто мнимое,	ω_2' — чисто мнимое,

$|\omega'| \geqslant \omega$ при $g_3 \geqslant 0$, $|\omega_2'| \geqslant \omega_2$ при $g_3 \geqslant 0$ (см. формулы 18.9.7 и 18.9.5).

Фундаментальные прямоугольники

Изучение четырех функций $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$, ζ, σ можно свести к рассмотрению их поведения в фундаментальном прямоугольнике, включающем начало координат (см. 18.2).

$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
Фундаментальный прямоугольник	Фундаментальный прямоугольник
есть $\dfrac{1}{4}$ FPP с вершинами	имеет вершины
$0,\ \omega,\ \omega_2,\ \omega'$.	$0,\ \omega_2,\ \omega_2 + \dfrac{\omega_2'}{2},\ \dfrac{\omega_2'}{2}$.

На правой границе фундаментального прямоугольника имеется точка, в которой $\mathcal{P} = 0$. Обозначим эту точку через z_0.

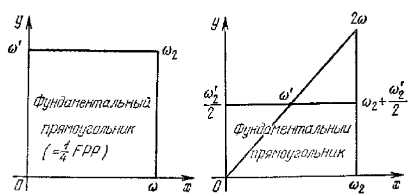


Рис. 18.2.

18.2. СООТНОШЕНИЯ ОДНОРОДНОСТИ И ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Соотношения однородности ($t \neq 0$)

Заметим, что отношение периодов остается постоянным.

18.2.1. $\wp'(tz \mid t\omega,\ t\omega') = t^{-3}\wp'(z \mid \omega,\ \omega')$.

18.2.2. $\wp(tz \mid t\omega,\ t\omega') = t^{-2}\wp(z \mid \omega,\ \omega')$.

18.2.3. $\zeta(tz \mid t\omega,\ t\omega') = t^{-1}\zeta(z \mid \omega,\ \omega')$.

18.2.4. $\sigma(tz \mid t\omega,\ t\omega') = t\sigma(z \mid \omega,\ \omega')$.

18.2.5. $g_2(t\omega,\ t\omega') = t^{-4}g_2(\omega,\ \omega')$.

18.2.6. $g_3(t\omega,\ t\omega') = t^{-6}g_3(\omega,\ \omega')$.

18.2.7. $e_i(t\omega,\ t\omega') = t^{-2}e_i(\omega,\ \omega') \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$.

18.2.8. $\Delta(t\omega,\ t\omega') = t^{-12}\Delta(\omega,\ \omega')$.

18.2.9. $H_i(t\omega,\ t\omega') = t^{-2}H_i(\omega,\ \omega')$

$(i = 1,\ 2,\ 3)$ (см. 18.3).

18.2.10. $q(t\omega,\ t\omega') = q(\omega,\ \omega)$ (см. 18.10).

18.2.11. $m(t\omega,\ t\omega') = m(\omega,\ \omega')$ (см. 18.9).

18.2.12. $\wp'(tz;\ t^{-4}g_2,\ t^{-6}g_3) = t^{-3}\wp'(z;\ g_2,\ g_3)$.

18.2.13. $\wp(tz;\ t^{-4}g_2,\ t^{-6}g_3) = t^{-2}\wp(z;\ g_2,\ g_3)$.

18.2.14. $\zeta(tz;\ t^{-4}g_2,\ t^{-6}g_3) = t^{-1}\zeta(z;\ g_2,\ g_3)$.

18.2.15. $\sigma(tz;\ t^{-}g_2,\ t^{-6}g_3) = t\sigma(z;\ g_2,\ g_3)$.

Случай $g_3 < 0$

Положив $t = i$, из 18.2.13 получим

18.2.16. $\wp(z;\ g_2,\ g_3) = -\wp(iz;\ g_2,\ -g_3)$,

Таким образом, случай $g_3 < 0$ может быть сведен к случаю $g_3 > 0$.

Свойства периодичности и сведение к FPP
(M, N — целые)

18.2.17. $\wp'(z + 2M\omega + 2N\omega') = \wp'(z)$.

18.2.18. $\wp(z + 2M\omega + 2N\omega') = \wp(z)$.

18.2.19. $\zeta(z + 2M\omega + 2N\omega') = \zeta(z) + 2M\eta + 2N\eta'$.

18.2.20. $\sigma(z + 2M\omega + 2N\omega') =$

$= (-1)^{M+N+MN}\sigma(z) \exp\,[(z + M\omega + N\omega')\,(2M\eta + 2N\eta')]$,

где

18.2.21. $\eta = \zeta(\omega),\ \eta' = \zeta(\omega')$.

Сопряженные значения

$f(\bar{z}) = \bar{f}(z)$, где f — любая из четырех функций $\wp$, $\wp'$, ζ, σ.

Сведение к $\dfrac{1}{4}$ FPP (см. рис. 18.1)

($\bar{s}$ означает комплексно сопряженное с s.)

Точка z_4 находится в R_4

$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
18.2.22. $\wp'(z_4) = -\bar{\wp}'(\overline{2\omega - z_4})$,	$\wp'(z_4) = -\bar{\wp}'(\overline{2\omega_2 - z_4})$.
18.2.23. $\wp(z_4) = \bar{\wp}'(\overline{2\omega - z_4})$	$\wp(z_4) = \bar{\wp}'(\overline{2\omega_2 - z_5})$
18.2.24. $\zeta(z_4) = -\bar{\zeta}(\overline{2\omega - z_4}) + 2\eta$,	$\zeta(z_4) = -\bar{\zeta}(\overline{2\omega_2 - z_4}) + 2(\eta + \eta')$.
18.2.25. $\sigma(z_4) = \bar{\sigma}(\overline{2\omega - z_4}) \exp\,[2\eta(z_4 - \omega)]$,	$\sigma(z_4) = \bar{\sigma}(\overline{2\omega_2 - z_4}) \exp\,[2(\eta + \eta')\,(z_4 - \omega_2)]$.

Точка z_3 находится в R_3

$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
18.2.26. $\wp'(z_3) = -\wp'(2\omega_2 - z_3)$,	$\wp'(z_3) = -\wp'(2\omega_2 - z_3)$.
18.2.27. $\wp(z_3) = \wp(2\omega_2 - z_3)$,	$\wp(z_3) = \wp(2\omega_2 - z_3)$.
18.2.28. $\zeta(z_3) = -\zeta(2\omega_2 - z_3) + 2(\eta + \eta')$,	$\zeta(z_3) = -\zeta(2\omega_2 - z_3) + 2(\eta + \eta')$.
18.2.29. $\sigma(z_3) = \sigma(2\omega_2 - z_3) \exp\,[2(\eta + \eta')\,(z_3 - \omega_2)]$,	$\sigma(z_3) = \sigma(2\omega_2 - z_3) \exp\,[2(\eta + \eta')\,(z_3 - \omega_2)]$.

Точка z_2 находится в R_2

$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
18.2.30. $\wp'(z_2) = \bar{\wp}'(\overline{z_2 - 2\omega'})$,	$\wp'(z_2) = \bar{\wp}'(\bar{z}_2)$.
18.2.31. $\wp(z_2) = \bar{\wp}(\overline{z_2 - 2\omega'})$,	$\wp(z_2) = \bar{\wp}(\bar{z}_2)$.
18.2.32. $\zeta(z_2) = \bar{\zeta}(\overline{z_2 - 2\omega'}) + 2\eta'$,	$\zeta(z_2) = \zeta(\bar{z}_2)$.
18.2.33. $\sigma(z_2) = -\bar{\sigma}(\overline{z_2 - 2\omega'}) \exp\,[2\eta'(z_2 - \omega')]$,	$\sigma(z_2) = \bar{\zeta}(\bar{z}_2)$.

Сведение $\frac{1}{4}$ FPP в фундаментальный прямоугольник в случае $\Delta < 0$

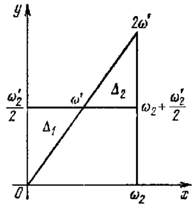


Рис. 18.3.

Здесь мы имеем дело со случаем, когда z находится в треугольнике Δ_2 (следовательно, $2\omega' - z$ находится в треугольнике Δ_1).

18.2.34. $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(2\omega' - z)$.

18.2.35. $\mathcal{P}'(z) = -\mathcal{P}'(2\omega' - z)$.

18.2.36. $\zeta(z) = 2\eta' - \zeta(2\omega' - z)$.

18.2.37. $\sigma(z) = \sigma(2\omega' - z)\exp[2\eta'(z - \omega')]$.

Приведение к случаю, когда действительный полупериод равен единице
(отношение периодов сохраняется)

$\Delta > 0$ — $\Delta < 0$ $(\omega_2 = \omega + \omega')$

18.2.38. $\mathcal{P}'(z \mid \omega, \omega') = \omega^{-3}\mathcal{P}'\left(z\omega^{-1} \mid 1, \frac{\omega'}{\omega}\right)$, $\quad \mathcal{P}'(z \mid \omega, \omega') = \omega_2^{-3}\mathcal{P}'\left(z\omega_2^{-1} \,\middle|\, \frac{\omega}{\omega_2}, \frac{\omega'}{\omega_2}\right)$.

18.2.39. $\mathcal{P}(z \mid \omega, \omega') = \omega^{-2}\mathcal{P}\left(z\omega^{-1} \mid 1, \frac{\omega'}{\omega}\right)$, $\quad \mathcal{P}(z \mid \omega, \omega') = \omega_2^{-2}\mathcal{P}\left(z\omega_2^{-1} \,\middle|\, \frac{\omega}{\omega_2}, \frac{\omega'}{\omega_2}\right)$.

18.2.40. $\zeta(z \mid \omega, \omega') = \omega^{-1}\zeta\left(z\omega^{-1} \mid 1, \frac{\omega'}{\omega}\right)$, $\quad \zeta(z \mid \omega, \omega') = \omega_2^{-1}\zeta\left(z\omega_2^{-1} \,\middle|\, \frac{\omega}{\omega_2}, \frac{\omega'}{\omega_2}\right)$.

18.2.41. $\sigma(z \mid \omega, \omega') = \omega\sigma\left(z\omega^{-1} \,\middle|\, 1, \frac{\omega'}{\omega}\right)$, $\quad \sigma(z \mid \omega, \omega') = \omega_2\sigma\left(z\omega_2^{-1} \,\middle|\, \frac{\omega}{\omega_2}, \frac{\omega'}{\omega_2}\right)$.

18.2.42. $g_2(\omega, \omega') = \omega^{-4}g_2\left(1, \frac{\omega'}{\omega}\right)$, $\quad g_2(\omega, \omega') = \omega_2^{-4}g_2\left(\frac{\omega}{\omega_2}, \frac{\omega'}{\omega_2}\right)$.

18.2.43. $g_3(\omega, \omega') = \omega^{-6}g_3\left(1, \frac{\omega'}{\omega}\right)$, $\quad g_3(\omega, \omega') = \omega_2^{-6}g_3\left(\frac{\omega}{\omega_2}, \frac{\omega'}{\omega_2}\right)$.

18.2.44. $e_i(\omega, \omega') = \omega^{-2}e_i\left(1, \frac{\omega'}{\omega}\right)$ $(i = 1, 2, 3)$, $\quad e_i(\omega, \omega') = \omega_2^{-2}e_i\left(\frac{\omega}{\omega_2}, \frac{\omega'}{\omega_2}\right)$ $(i = 1, 2, 3)$.

18.2.45. $\Delta(\omega, \omega') = \omega_2^{-12}\Delta\left(1, \frac{\omega'}{\omega}\right)$, $\quad \Delta(\omega, \omega') = \omega_2^{-12}\Delta\left(\frac{\omega}{\omega_2}, \frac{\omega'}{\omega_2}\right)$.

Примечание. Новый действительный полупериод равен $\frac{\omega}{\omega_2} + \frac{\omega'}{\omega_2} = \frac{\omega + \omega'}{\omega_2} = 1$.

18.3. ЧАСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Значения функций в периодах

$\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ и ζ, неограничены, а σ равна нулю в точках $z = 2\omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и в точке $2\omega_2'$ $(\Delta < 0)$.

Значения функций в полупериодах

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
18.3.1.	$\wp(\omega_i) = e_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$	
18.3.2.	$\wp'(\omega_i) = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$	
18.3.3.	$\eta_i = \zeta(\omega_i) \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$	
18.3.4.		$\eta_1 = \eta, \qquad \eta_2 = \eta + \eta', \qquad \eta_3 = \eta'.$
18.3.5.		$H_i^2 = 2e_i^2 + e_j e_k.$
18.3.6.	$H_i^2 = (e_i - e_j)(e_i - e_k) = 2e_i^2 + \dfrac{g_3}{4e_i} = 3e_i^2 - \dfrac{g_2}{4} \quad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k).$	
18.3.7.	e_i — действительные,	e_2 — действительное и неотрицательное ($e_2 = 0$, если $g_3 = 0$).
18.3.8.	$e_1 > 0 \geqslant e_2 \geqslant e_3$ (равенство при $g_3 = 0$),	$e_1 = -\alpha + i\beta, \quad e_3 = \bar{e}_1,$ где $\alpha \geqslant 0, \quad \beta > 0$ (равенство при $g_3 = 0$).
18.3.9.	$\eta > 0,$	$\eta_2 > 0, \quad \eta_2' = \zeta(\omega_2') = \eta' - \eta.$
18.3.10.	$\eta'/i \lesseqgtr 0,$ если	$\eta_2'/i \lesseqgtr 0,$ если
18.3.11.	$\lvert\omega'\rvert/\omega \lesseqgtr 1.91014\,050$ (приблиз.),	$\lvert\omega_2'\rvert/\omega_2 \lesseqgtr 3.81915\,447$ (приблиз.).
18.3.12.	$H_1 > 0,\ H_3 > 0,$	$H_2 > 0.$
18.3.13.	$H_2 \equiv i\sqrt{-H_2^2},$	$\pi/4 < \arg(H_3) \leqslant \pi/2$ (равенство при $g_3 = 0$), $H_1 = \bar{H}_3.$
18.3.14.	$\sigma(\omega) = e^{\eta\omega/2}/H_1^{1/2},$	$\sigma(\omega_2) = e^{\eta_2\omega_2/2}/H_2^{1/2}.$
18.3.15.	$\sigma(\omega') = ie^{\eta'\omega'/2}/H_3^{1/2},$	$\sigma(\omega_2') = ie^{\eta_2'\omega_2'/2}/H_2^{1/2}.$
18.3.16.	$\sigma^2(\omega_2) = e^{\eta_2\omega_2}/(-H_2),$	$\sigma^2(\omega') = e^{\eta'\omega'}/(-H_3).$
18.3.17.	$\arg[\sigma(\omega_2)] = \dfrac{\eta'\omega}{i} + \dfrac{\pi}{2},$	$\arg[\sigma(\omega')] = \dfrac{\eta_2'\omega_2}{4i} + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arg(e_2 + H_2 - e_3).$

Значения функций в четвертьпериодах

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
18.3.18.	$\wp(\omega/2) = e_1 + H_1 > e_1,$	$\wp(\omega_2/2) = e_2 + H_2 > e_2.$
18.3.19.	$\wp'(\omega/2) = -2H_1\sqrt{2H_1 + 3e_1},$	$\wp'(\omega_2/2) = -2H_2\sqrt{2H_2 + 3e_2}.$
18.3.20.	$\zeta(\omega/2) = \dfrac{1}{2}[\eta + \sqrt{2H_1 + 3e_1}],$	$\zeta(\omega_2/2) = \dfrac{1}{2}\left[[\eta_2 + \sqrt{2H_2 + 3e_2}\right].$
18.3.21.	$\sigma(\omega/2) = \dfrac{e^{\eta\omega/8}}{2^{1/4}H_1^{3/8}(2H_1 + 3e_1)^{1/8}},$	$\sigma(\omega_2/2) = \dfrac{e^{\eta_2\omega_2/8}}{2^{1/4}H_2^{3/8}(2H_2 + 3e_2)^{1/8}}.$
18.3.22.	$\wp(\omega'/2) = e_3 - H_3 < e_3 < 0,$	$\wp(\omega_2'/2) = e_2 - H_2 = \wp(\omega_2 + \omega_2'/2) < e_2 < 0.$
18.3.23.	$\wp'(\omega'/2) = -2H_3 i\sqrt{2H_3 - 3e_3},$	$\wp'(\omega_2'/2) = -2H_2 i\sqrt{2H_2 - 3e_2} = \overline{\wp}'(\omega_2 + \omega_2'/2).$
18.3.24.	$\zeta(\omega'/2) = \dfrac{1}{2}\left[\eta' - i\sqrt{2H_3 - 3e_3}\right],$	$\zeta(\omega_2'/2) = \dfrac{1}{2}[\eta_2' - i\sqrt{2H_2 - 3e_2}] = -\zeta(\omega_2 + \omega_2'/2) + 2\eta'.$
18.3.25.	$\sigma(\omega'/2) = \dfrac{ie^{\eta'\omega'/8}}{2^{1/4}H_3^{3/8}(2H_3 - 3e_3)^{1/8}},$	$\sigma(\omega_2'/2) = \dfrac{ie^{\eta_2'\omega_2'/8}}{2^{1/4}H_2^{3/8}(2H_2 - 3e_2)^{1/8}} = \sigma(\omega_2 + \omega_2'/2)\exp[-\eta'\omega_2].$
18.3.26.	$\wp(\omega_2/2) = e_2 - H_2,$	$\wp(\omega'/2) = e_3 - H_3.$
18.3.27.	$\wp'(\omega_2/2) = -2H_2 i(2H_2 - 3e_2)^{1/2},$	$\wp'(\omega'/2) = -2iH_3(2H_3 - 3e_3)^{1/2}.$
18.3.28.	$\zeta(\omega_2/2) = {}^1\!/_2\,[\eta_2 - i(2H_2 - 3e_2)^{1/2}],$	$\zeta(\omega'/2) = {}^1\!/_2\,[\eta' - i(2H_3 - 3e_3)^{1/2}].$
18.3.29.	$\sigma(\omega_2/2) = \dfrac{e^{\eta_2\omega_2/8}e^{i\pi/4}}{[4H_2^3(2H_2 - 3e_2)]^{1/8}},$	$\sigma(\omega'/2) = \dfrac{e^{\eta'\omega'/8}e^{i\pi/4}}{[4H_3^3(2H_3 - 3e_3)]^{1/8}}.$

Соотношения при одной третьей периодов

Если $z = 2\omega_i/3$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ или $2\omega_2'3$, то $\wp''^2 = 12\wp\wp'^2$, что эквивалентно выражению

18.3.30. $48\wp^4 - 24g_2\wp^2 - 48g_3\wp - g_2^2 = 0.$

$\Delta > 0$ | $\Delta < 0$

18.3.31. $\zeta(2\omega/3) = \dfrac{2\eta}{3} + \left[\dfrac{\wp(2\omega/3)}{3}\right]^{1/2}$, $\qquad \zeta(2\omega_2/3) = \dfrac{2\eta_2}{3} + \left[\dfrac{\wp(2\omega_2/3)}{3}\right]^{1/2}$.

18.3.32. $\zeta(2\omega'/3) = \dfrac{2\eta'}{3} - \left[\dfrac{\wp(2\omega'/3)}{3}\right]^{1/2}$, $\qquad \zeta(2\omega_2'/3) = \dfrac{2\eta_2'}{3} - \left[\dfrac{\wp(2\omega_2'/3)}{3}\right]^{1/2}$.

18.3.33. $\zeta(2\omega_2/3) = \dfrac{2\eta_2}{3} + \left[\dfrac{\wp(2\omega_2/3)}{3}\right]^{1/2}$, $\qquad \zeta(2\omega'/3) = \dfrac{2\eta'}{3} + \left[\dfrac{\wp(2\omega'/3)}{3}\right]^{1/2}$.

18.3.34. $\sigma(2\omega/3) = \dfrac{-\exp[2\eta\omega/9]}{\sqrt[3]{\wp'(2\omega/3)}}$, $\qquad \sigma(2\omega_2/3) = \dfrac{-\exp[2\eta_2\omega_2/9]}{\sqrt[3]{\wp'(2\omega_2/3)}}$.

18.3.35. $\sigma(2\omega'/3) = \dfrac{-\exp[2\eta'\omega'/9]}{[\wp'(2\omega/3)]^{1/3}\, e^{2\pi i/3}}$, $\qquad \sigma(2\omega_2'/3) = \dfrac{-\exp[2\eta_2'\omega_2'/9]}{[\wp'(2\omega_2'/3)]^{1/3}\, e^{2\pi i/3}}$.

18.3.36. $\sigma(2\omega_2/3) = \dfrac{-\exp[2\eta_2\omega_2/9]}{[\wp'(2\omega_2/3)]^{1/3}\, e^{2\pi i/3}}$, $\qquad \sigma(2\omega'/3) = \dfrac{-\exp[2\eta'\omega'/9]}{[\wp'(2\omega'/3)]^{1/3}\, e^{2\pi i/3}}$.

Соотношение Лежандра

$\Delta > 0$ | $\Delta < 0$

18.3.37. $\eta\omega' - \eta'\omega = \pi i/2 \qquad \eta_2\omega_2' - \eta_2'\omega_2 = \pi i$

(имеет место и для $\Delta < 0$),

Соотношения между H_i

18.3.38. $H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = 3g_2/4.$

18.3.39. $H_1^2H_2^2 + H_2^2H_3^2 + H_3^2H_1^2 = 0.$

18.3.40. $H_1^2H_2^2H_3^2 = -\Delta/16.$

18.3.41. $16H_i^6 - 12g_2H_i^4 + \Delta = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$

18.4. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Формулы сложения *) $(z_1 \neq z_2)$

18.4.1. $\wp(z_1 + z_2) = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}\right]^2 - \wp(z_1) - \wp(z_2).$

18.4.2. $\wp'(z_1 + z_2) =$

$$= \frac{\wp(z_1 + z_2)[\wp'(z_1) - \wp'(z_2)] + \wp(z_1)\wp'(z_2) - \wp'(z_1)\wp(z_2)}{\wp(z_2) - \wp(z_1)}.$$

18.4.3. $\wp(z_1 + z_2) = \zeta(z_1) + \zeta(z_2) + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}.$

18.4.4. $\sigma(z_1 + z_2)\,\sigma(z_1 - z_2) = -\sigma^2(z_1)\sigma^2(z_2)[\wp(z_1) - \wp(z_2)].$

Формулы удвоения и утроения

(Заметим, что $\wp'' = 6\wp^2(z) - \dfrac{g_2}{2}$, $\wp'^2(z) =$

$= 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ и $\wp'''(z) = 12\wp(z)\,\wp'(z).$)

18.4.5. $\wp(2z) = -2\wp(z) + \left[\dfrac{''(z)}{2\wp'(z)}\right].$

18.4.6. $\wp'(2z) =$

$$= \frac{-4\wp'^4(z) + 12\wp(z)\,\wp'^2(z)\,\wp''(z) - \wp''^3(z)}{4\wp'^3(z)}.$$

18.4.7. $\zeta(2z) = 2\zeta(z) + \wp''(z)/2\wp'(z).$

18.4.8. $\sigma(2z) = -\wp'(z)\,\sigma^4(z).$

18.4.9. $\zeta(3z) = 3\zeta(z) + \dfrac{4\wp'^3(z)}{\wp'(z)\,\wp'''(z) - \wp''^2(z)}.$

18.4.10. $\sigma(3z) = -\wp'^2(z)\,\sigma^9(z)\,[\wp(2z) - \wp(z)].$

18.5. РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД

Ряды Лорана

18.5.1. $\wp(z) = z^{-2} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} c_k z^{2k-2},$

где

18.5.2. $c_2 = g_2/20,\ c_3 = g_3/28,$

18.5.3. $c_k = \dfrac{3}{(2k+1)(k-3)} \sum\limits_{m=2}^{k-2} c_m c_{k-m} \quad (k \geqq 4).$

18.5.4. $\wp'(z) = -2z^{-3} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} (2k-2)\, c_k z^{2k-3}.$

*) Формулы для ζ и σ не являются алгебраическими теоремами сложения.

18.5.5. $\zeta(z) = z^{-1} - \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{2k-1}/(2k-1)$.

18.5.6. $\sigma(z) = \sum_{m,\,n=0}^{\infty} a_{m\,n} \left(\frac{g_2}{2}\right)^m (2g_3)^n \frac{z^{4m+6n+1}}{(4m+6n+1)!}$,

где

18.5.7. $a_{0,0} = 1$,

18.5.8. $a_{m,n} = 3(m+1)\, a_{m+1,\,n-1} + \frac{16}{3}(n+1)\, a_{m-2,\,n+1} - 1/3\,(2m+3n-1)(4m+6n-1)\, a_{m-1,\,n}$.

Здесь $a_{m,n} = 0$, если какой-либо из индексов отрицателен. (Радиус сходимости рядов для $\wp - z^{-2}, \wp' + 2z^{-3}$ и $\zeta - z^{-1}$ равен наименьшему из чисел $|2\omega|$, $|2\omega'|$ и $|2\omega' \pm 2\omega'|$; ряд для σ сходится при всех z.)

Выражение коэффициентов *) c_k через c_2 и c_3

18.5.9. $c_4 = c_2^2/3$.

18.5.10. $c_5 = 3c_2c_3/11$.

18.5.11. $c_6 = [2c_2^3 + 3c_3^2]/39$.

18.5.12. $c_7 = 2c_2^2c_3/33$.

Значения

$n \uparrow$						
8	$-2^7\cdot3^{12}\cdot5\cdot59\times$ $\times107895773$					
7	$-2^7\cdot3^{10}\cdot5\cdot23\times$ $\times257\cdot18049$	$-2^7\cdot3^{11}\cdot5\cdot59\times$ $\times107895773$				
6	$-2^6\cdot3^9\cdot5\times$ $\times229\cdot2683$	$-2^7\cdot3^9\cdot5\cdot23\times$ $\times257\times$ $\times18049$	$-2^6\cdot3^{11}\cdot5\cdot7\times$ $\times181\cdot1699\times$ $\times2803$	$-2^8\cdot3^{10}\cdot5\cdot7\times$ $\times41\cdot6047\times$ $\times4922497$		
5	$2^3\cdot3^8\cdot5\times$ $\times9103$	$-2^6\cdot3^8\cdot5\cdot229\times$ $\times2683$	$-2^5\cdot3^{10}\cdot5\times$ $\times40570423$	$-2^6\cdot3^9\cdot5\cdot7\times$ $\times59\cdot179$ 142231	$-2^4\cdot3^{10}\cdot5\cdot7\times$ $\times1321\times$ $\times1415535763$	
4	$2^3\cdot3^5\cdot5^2\cdot31$	$2^3\cdot3^7\cdot5\cdot9103$	$-2^5\cdot3^8\cdot5\cdot7\times$ $\times13\cdot37\cdot41$	$-2^5\cdot3^8\cdot5\cdot691\times$ $\times83609$	$-2^4\cdot3^8\cdot5\cdot11\cdot31\times$ $\times313\cdot190387$	$-2^4\cdot3^{10}\cdot5^2\cdot7\cdot23\times$ $\times263\cdot4848953$
3	$2^3\,3^4\cdot23$	$2^3\cdot3^4\cdot5^2\cdot31$	$2^3\cdot3^7\cdot5\cdot17\times$ $\times109$	$-2^3\cdot3^6\cdot5\cdot83\times$ $\times3911$	$-2^4\cdot3^6\cdot5\cdot503\times$ 156217	$-2^4\cdot3^8\cdot31\times$ $\times315989669$
2	$-2\,3^3$	$2^3\cdot3^3\cdot23$	$2^3\cdot3^5\cdot5\cdot53$	$2^3\cdot3^4\cdot5\cdot37\times$ $\times167$	$-2\cdot3^6\cdot5\cdot17\times$ $\times3037$	$-2^4\cdot3^7\cdot61\cdot151\times$ $\times653$
1	-3	$-2\cdot3^2$	$3^3\cdot19$	$2^2\cdot3^3\cdot311$	$3^3\cdot5\cdot20807$	$-2\cdot3^6\cdot11\times$ $\times2609$
0	1	-1	-3^2	$3\cdot23$	$3\cdot107$	$-3^3\cdot7\cdot23\cdot37$
	0	1	2	3	4	5

*) Значения $a_{m\,n}$ в форме без множителей для $4m + 6n + 1 \leqslant 35$ даны в [18.25], с. 7; значения $(a_{m\,n})\,3^{-n}$ в форме на настольных вычислительных машинах; разложение на простые множители было выполнено на вычислительной

*) 1. c_4, c_{16} были независимо вычислены и проконтролированы Д.Х. Лемером; они были проверены двойным контролем с помощью подстановки $g_2 = 20c_2$, $g_3 = 28c_3$ в выражения, данные в [18.10].

2. c_{17}, c_{18} были получены из выражений, приведенных в [18.10], с помощью той же подстановки. Они были проконтролированы на частных значениях g_2 и g_3.

3. c_{19} в [18.12] приведено с ошибкой (пропущен в знаменателе множитель 13 в третьем члене скобок); это значение было вычислено независимо.

4. Автору неизвестны работы, в которых целые числовые коэффициенты C_i даны более чем с десятью знаками. Эти числа с меньшим числом верных цифр удобны лишь для работы на настольных клавишных машинах.

18.5.13. $c_8 = 5c_2(11c_2^3 + 36c_3^2)/7293.$

18.5.14. $c_9 = c_3(29c_2^3 + 11c_3^2)/2717.$

18.5.15. $c_{10} = (242c_2^5 + 1455c_2^2c_3^2)/240669.$

18.5.16. $c_{11} = 14c_2c_3(389c_2^3 + 369c_3^2)/3187041.$

18.5.17. $c_{12} = (114950c_2^6 + 1080000c_2^3c_3^2 + 166617c_3^4)/891678645.$

18.5.18. $c_{13} = 10c_2^2c_3(297c_2^3 + 530c_3^2)/11685817.$

18.5.19. $$c_{14} = \frac{2c_2(528770c_2^6 + 7164675c_2^3c_3^2 + 2989602c_3^4)}{(306735)\,(215441)}.$$

18.5.20. $$c_{15} = \frac{4c_3(62921815c_2^6 + 179865450c_2^3c_3^2 + 14051367c_3^4)}{(179685)\,(38920531)}.$$

18.5.21. $$c_{16} = \frac{c_2^2(58957855c_2^6 + 1086511320c_2^3c_3^2 + 875341836c_3^4)}{(5909761)\,(5132565)}.$$

коэффициентов *) $a_{m,n}$

$-2^5\cdot3^9\cdot5\cdot7\cdot19\times$ $\times1752686144977$						
$-2^4\cdot3^7\cdot5\cdot7\cdot$ $\cdot11\cdot29\times$ $\times83\cdot1129\cdot9551$	$-2^4\cdot3^8\cdot5\cdot7\cdot613\times$ $\times17605225081$					
$-2^8\cdot3^7\times$ $\times2387260103$	$-2^4\cdot3^7\cdot5\cdot17\cdot53\times$ $\times2957\cdot41189$	$-2\cdot3^9\cdot5\cdot7^2\cdot17\times$ $\times67.195651059$	$2^3\cdot3^7\cdot5\cdot7^2\times$ $\times35866647631901$			
$-3^5\cdot17\times$ $\times1578257$	$-2^3\cdot3^5\cdot7\cdot13\times$ $\times2742587$	$-3^7\times$ $\times248882935409$	$-2\cdot3^5\cdot5\cdot7^2\cdot193\times$ $\times13679\cdot274973$	$3^6\cdot7\times$ $\times89555603641079$		
$3^2\cdot313\cdot503$	$-3^4\cdot7\times$ $\times685973$	$3^5\cdot11\cdot37\times$ $\times257981$	$-3^4\cdot7\cdot23\cdot14387\times$ $\times40763$	$-3^4\cdot71\times$ $\times176302760639$	$-3^6\cdot7\cdot11\cdot23^2\times$ $\times383\cdot739\cdot18539$	$3^5\cdot7^2\cdot24733\times$ $\times198922785511$
6	7	8	9	10	11	12
$\to$	m					

с множителями даны в [18.15], т. 4, с. 89, для $4m + 6n + 1 \leqslant 25$. Новый числовой материал был вычислен и проверен машине SWAC.

18.5.22. $$c_{17} = \frac{c_2c_3(30171955c_2^6 + 126138075c_2^3c_3^2 + 28151739c_3^4)}{(920205)\,(6678671)}.$$

18.5.23. $$c_{18} = \frac{1541470\cdot949003c_2^9 + 30458088737\cdot1155c_2^6c_3^2 + 122378650673\cdot378c_2^3c_3^4 + 2348703\cdot887777c_3^6}{(1342211013)\,(4695105713)}.$$

18.5.24. $$c_{19} = \frac{2c_2^2c_3(3365544215c_2^6 + 429852433\cdot45c_2^3c_3^2 + 8527743477c_3^4)}{(91100295)\,(113537407)}.$$

Обращенный ряд *) для больших $|\mathcal{P}|$

18.5.25.

$$z = \frac{1}{2}\left[2u + c_2u^5 + c_3u^7 + \frac{\alpha_2^2}{3}u^9 + \frac{6\alpha_2\alpha_3}{11}u^{11} + \right.$$

$$+ \frac{1}{13}(3\alpha_3^2 + 5\alpha_2^3)u^{13} + \alpha_2^2\alpha_3u^{15} + \frac{5\alpha_2}{68}(12\alpha_3^2 + 7\alpha_2^3)u^{17} +$$

$$+ \frac{5\alpha_3}{19}(\alpha_3^2 + 7\alpha_2^3)u^{19} + \frac{\alpha_2^2}{4}(3\alpha_2^3 + 10\alpha_3^2)u^{21} +$$

$$+ \frac{35\alpha_2\alpha_3}{92}(9\alpha_2^3 + 4\alpha_3^2)u^{23} +$$

$$+ \frac{7}{200}(33\alpha_2^6 + 180\alpha_2^3\alpha_3^2 + 10\alpha_3^4)u^{25} +$$

$$+ \frac{7\alpha_2^2\alpha_3}{12}(11\alpha_2^3 + 10\alpha_3^2)u^{27} +$$

$$+ \frac{3\alpha_2}{2^3\cdot 29}(143\alpha_2^6 + 1155\alpha_2^3\alpha_3^2 + 210\alpha_3^4)u^{29} +$$

$$+ \frac{21\alpha_3}{2^3\cdot 31}(143\alpha_2^6 + 220\alpha_2^3\alpha_3^2 + 6\alpha_3^4)u^{31} +$$

$$+ \frac{3\alpha_2^2}{2^6}(65\alpha_2^6 + 728\alpha_2^3\alpha_3^2 + 280\alpha_3^4)u^{33} +$$

$$+ \frac{33\alpha_2\alpha_3}{2^3\cdot 5\cdot 7}(195\alpha_2^6 + 455\alpha_2^3\alpha_3^2 + 42\alpha_3^4)u^{35} +$$

$$+ \frac{11}{2^6\cdot 37}(1105\alpha_2^9 + 16380\alpha_2^6\alpha_3^2 + 10920\alpha_2^3\alpha_3^4 +$$

$$+ 168\alpha_3^6)u^{37} + \frac{33\alpha_2^2\alpha_3}{2^6}(85\alpha_2^6 + 280\alpha_2^3\alpha_3^2 + 56\alpha_3^4)u^{39} +$$

$$+ \frac{143\alpha_2}{2^7\cdot 41}(323\alpha_2^9 + 6120\alpha_2^6\alpha_3^2 + 6300\alpha_2^3\alpha_3^4 + 336\alpha_3^6)u^{41} +$$

$$\left. + \frac{143\alpha_3}{2^6\cdot 43}(1615\alpha_2^9 + 7140\alpha_2^6\alpha_3^2 + 2520\alpha_2^3\alpha_3^4 + 24\alpha_3^6)u^{43} + O(u^{45})\right],$$

где

18.5.26. $\alpha_2 = g_2/8$,

18.5.27. $\alpha_3 = g_3/8$,

18.5.28. $u = (\mathcal{P}^{-1})^{1/2}$.

Обращенный ряд для больших $|\mathcal{P}'|$

18.5.29. $z = A_1u + A_5u^5 + A_7u^7 + A_9u^9 + \ldots,$

где

18.5.30. $u = (\mathcal{P}'^{1/3})^{-1}\, e^{i\pi/3}$,

18.5.31. $A_1 = 2^{1/3}$,

18.5.32. $A_5 = -\dfrac{a_2}{5}A_1^3$,

18.5.33. $A_7 = \dfrac{-4a_3A_1}{7}$,

18.5.34. $A_9 = 0$,

18.5.35. $A_{11} = 8a_2a_3A_1^2/11$,

18.5.36. $A_{13} = \dfrac{10A_1}{39}(a_2^3 + 6a_3^2)$,

18.5.37. $A_{15} = -96a_2^2a_3/175$,

18.5.38. $A_{17} = -\dfrac{14a_2A_1^2}{51}(a_2^3 + 12a_3^2)$.

18.5.39. Здесь $a_2 = g_2/6$, $a_3 = g_3/6$.

Обращенный ряд для больших $|\zeta|$

18.5.40. $z = u + A_5u^5 + A_7u^7 + A_9u^9 + \ldots,$

где

18.5.41. $u = \zeta^{-1}$,

18.5.42. $A_5 = -\delta_2/5$,

18.5.43. $A_7 = -\delta_3/7$,

18.5.44. $A_9 = \delta_2^2/7$,

18.5.45. $A_{11} = 3\delta_2\delta_3/11$,

18.5.46. $A_{13} = \dfrac{17}{1001}(-8\delta_2^3 + 7\delta_3^2)$,

18.5.47. $A_{15} = -41\delta_2^2\delta_3/91$,

18.5.48. $A_{17} = \dfrac{\delta_2}{9163}(1349\delta_2^3 - 4116\delta_3^2)$,

18.5.49. $A_{19} = \dfrac{2\delta_3}{323323}(115431\delta_2^3 - 22568\delta_3^2)$.

18.5.50. Здесь $\delta_2 = g_2/12$,

18.5.51. $\delta_3 = g_3/20$.

Другие ряды, содержащие $\mathcal{P}$

Ряды в окрестности $z_0\, [\mathcal{P}(z_0) = 0]$

18.5.52.

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0'u\left[1 - 3c_2u^4 - 4c_3u^6 + \frac{10c_2^2}{3}u^8 + \frac{114c_2c_3}{11}u^{10} + \right.$$

$$\left. + \frac{7(12c_3^2 - 5c_2^3)}{13}u^{12} - \frac{488c_2^2c_3}{33}u^{14}\right] +$$

$$+ u^2\left[-5c_2 - 14c_3u^2 + 5c_2^2u^4 + 33c_2c_3u^6 + \right.$$

$$+ \frac{84c_3^2 - 10c_2^3}{3}u^8 - \frac{1363c_2^2c_3}{33}u^{10} +$$

$$\left. + \frac{5c_2(55c_2^3 - 2316c_3^2)}{143}u^{12}\right] + \ldots,$$

где

18.5.53. $u = (z - z_0)$, $\mathcal{P}_0' \equiv \mathcal{P}'(z_0) = i\sqrt{g_3}$.

*) В этом и других рядах значения корня нужно выбирать так, чтобы z оказалось в фундаментальном прямоугольнике (см. рис. 18.2).

18.5.54.

$$u=\wp'_0\Big[v+av^2+2a^2v^3+\left(\frac{g_3\wp_0'^2}{2}+5a^3\right)v^4+\frac{a}{5}(3\wp_0'^4+$$
$$+15g_3\wp_0'^2+70a^3)v^5+2a^2(2\wp_0'^4+7g_3\wp_0'^2+21a^3)v^6+$$
$$+\left(\frac{g_3\wp_0'^6}{7}+\{g_3^2+20a^3\}\wp_0'^4+15a^2g_3\wp_0'^2+132a^6\right)v^7+$$
$$+15a\left(\frac{g_3\wp_0'^6}{4}+\left\{\frac{3g_3^2}{4}+6a^3\right\}\wp_0'^4+\frac{33ag_3}{2}\wp_0'^2+\right.$$
$$\left.+\frac{143a^6}{5}\right)v^8+\frac{5a^2}{2}\left(\frac{2}{3}\wp_0'^8+15g_3\wp_0'^6+\{154a^3+33g_3^2\}\wp_0'^4+\right.$$
$$\left.+\frac{2002a^3g_3\wp_0'^2}{5}+572a^6\right)v^9+\frac{1}{4}\left(3\{28a^3+g_3^2\}\wp_0'^8+\right.$$
$$+11g_3\{98a^3+g_3^2\}\wp_0'^6+2002a^3\left\{\frac{16}{5}a^3+g_3^2\right\}\wp_0'^4+$$
$$\left.+16016a^6g_3\wp_0'^2+19448a^9\right)v^{10}\Big]+\dots,$$

где

18.5.55. $v=\wp/(\wp'_0)$ и $a=g_2/4$.

Ряды в окрестности ω_i

18.5.56. $(\wp-e_i)=$

$$=(3e_i^2-5c_2)u+(10c_2e_i+21c_3)u^2+$$
$$+(7c_2e_i^2+21c_3e_i+5c_2^2)u^3+(18c_3e_i^2+30c_2^2e_i+$$
$$+33c_2c_3)u^4+\left(22c_2^2e_i^2+92c_2c_3e_i+105c_3^2-\frac{10c_2^3}{3}\right)u^5+$$
$$+\left(\frac{728}{11}c_2c_3e_i^2+\frac{220}{3}c_2^3e_i+84c_3^2e_i+\frac{1214}{11}c_2^2c_3\right)u^6+$$
$$+\left(\frac{635}{13}c_2^3e_i^2+\frac{855}{13}c_3^2e_i^2+\frac{3405}{11}c_2^2c_3e_i+\right.$$
$$\left.+\frac{45750}{143}c_2c_3^2+\frac{25}{13}c_2^4\right)u^7+\dots,$$

где

18.5.57. $u=(z-\omega_i)^2$.

Другие ряды, содержащие $\wp'$

Ряды в окрестности z_0

18.5.58. $(\wp'-\wp'_0)=$

$$=\Big[-10c_2u-56c_3u^3+30c_2^2u^5+264c_2c_3u^7+$$
$$+\frac{(840c_3^2-100c_2^3)}{3}u^9-\frac{5452c_2^2c_3}{11}u^{11}+$$
$$+\frac{70c_2(55c_2^3-2316c_3^2)}{143}u^{13}\Big]+\wp'_0\Big[-15c_2u^4-28c_3u^6+$$
$$+30c_2^2u^8+114c_2c_3u^{10}+7(12c_3^2-5c_2^3)u^{12}-$$
$$-\frac{2440c_2^2c_3}{11}u^{14}\Big]+\dots,$$

где

18.5.59. $u=(z-z_0)$.

18.5.60. $(z-z_0)=$

$$=A-bA^3-\frac{3\wp'_0}{2}A^4+3(c_2+b^2)A^5+$$
$$+10b\wp'_0A^6-3[36c_3-3\wp'_0+4b^3]A^7-$$
$$-3\wp'_0\left(\frac{25}{2}c_2+21b^2\right)A^8+\frac{5}{12}(285b^2c_2+$$
$$+100c_2^2-279\wp_0'^2b+132b^4)A^9+\dots,$$

где

18.5.61. $A=(\wp'-\wp'_0)/(-10c_2)$,

18.5.62. $b=4g_3/g_2$.

Ряды в окрестности ω_i

18.5.63. $\wp'=2(3e_i^2-5c_2)\alpha+4(10c_2e_i+21c_3)\alpha^3+$

$$+6(7c_2e_i^2+21c_3e_i+5c_2^2)\alpha^5+24(6c_3e_i^2+10c_2^2e_i+$$
$$+11c_2c_3)\alpha^7+10\left(22c_2^2e_i^2+92c_2c_3e_i+105c_3^2-\right.$$
$$\left.-\frac{10c_2^3}{3}\right)\alpha^9+24\left(\frac{364}{11}c_2c_3e_i^2+\frac{110}{3}c_2^3e_i+\right.$$
$$\left.+42c_3^2e_i+\frac{607}{11}c_2^2c_3\right)\alpha^{11}+70\left(\frac{127}{13}c_2^3e_i^2+\right.$$
$$\left.+\frac{171}{13}c_3^2e_i^2+\frac{681}{11}c_2^2c_3e_i+\frac{9150}{143}c_2c_3^2+\frac{5}{13}c_2^4\right)\alpha^{13}+\dots,$$

где

18.5.64. $\alpha=(z-\omega_i)$.

Другие ряды, содержащие ζ

Ряд в окрестности $z_0\,[\wp(z_0)=0]$

18.5.65. $\zeta-\zeta_0=$

$$=\wp'_0\left[-\frac{u^2}{2}+\frac{c_2u^6}{2}+\frac{c_3u^8}{2}-\frac{c_2^2u^{10}}{3}-\frac{19c_2c_3u^{12}}{22}+\right.$$
$$\left.+\frac{(5c_2^3-12c_3^2)}{26}u^{14}+\frac{61c_2^2c_3u^{16}}{66}\right]+\left[\frac{5c_2u^3}{3}+\right.$$
$$+\frac{7c_3u^5}{2}-\frac{5c_2^2u^7}{7}-\frac{11c_2c_3u^9}{3}+\frac{(10c_2^3-84c_3^2)}{33}u^{11}+$$
$$\left.+\frac{1363c_2^2c_3}{429}u^{13}+\frac{c_2(2316c_3^2-55c_2^3)}{429}u^{15}\right]+\dots,$$

где

18.5.66. $u=(z-z_0)$,

18.5.67. $\zeta_0=\zeta(z_0)$.

Ряды в окрестности ω_i

18.5.68. $(\zeta - \eta_i) =$

$$= -e_i\alpha - \frac{(3e_i^2 - 5c_2)}{3}\alpha^3 - \frac{(10c_2e_i + 21c_3)\alpha^5}{5} - \frac{(7c_2e_i^2 + 21c_3e_i + 5c_2^2)\alpha^7}{7} - \frac{(6c_3e_i^2 + 10c_2^2e_i + 11c_2c_3)\alpha^9}{3} - \frac{\left(22c_2^2e_i^2 + 92c_2c_3e_i + 105c_3^2 - \frac{10}{3}c_2^3\right)\alpha^{11}}{11} - \frac{2}{13}\left(\frac{364}{11}c_2c_3e_i^2 + \frac{110}{3}c_2^3e_i + 42c_3^2e_i + \frac{607}{11}c_2^2c_3\right)\alpha^{13} - \frac{1}{3}\left(\frac{127}{13}c_2^3e_i^2 + \frac{171}{13}c_3^2e_i^2 + \frac{681}{11}c_2^2c_3e_i + \frac{9150}{143}c_2c_3^2 + \frac{5}{13}c_2^4\right)\alpha^{15} - \ldots,$$

где

18.5.69. $\alpha = (z - \omega_i)$.

Обращенный ряд для малых $|\sigma|$

18.5.70. $$z = \sigma + \frac{\gamma_2}{5}\sigma^5 + \frac{\gamma_3}{7}\sigma^7 + \frac{3\gamma_2^2}{14}\sigma^9 + \frac{19\gamma_2\gamma_3}{55}\sigma^{11} + \frac{3842\gamma_2^3 + 861\gamma_3^2}{6006}\sigma^{13} + \ldots,$$

где

18.5.71. $\gamma_2 = g_2/48$,

18.5.72. $\gamma_3 = g_3/120$.

Обращение рядов Маклорена см. в 3.6.25 и [18.18].

18.6. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенные производные ($c_2 = g_2/20$, $c_3 = g_3/28$)

18.6.1. $\zeta'(z) = -\wp(z)$.

18.6.2. $\sigma'(z)/\sigma(z) = \zeta(z)$.

18.6.3. $\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 = 4(\wp^3 - 5c_2\wp - 7c_3)$.

18.6.4. $\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \frac{g_2}{2} = 6\wp^2 - 10c_2$.

18.6.5. $\wp'''(z) = 12\wp\wp'$.

18.6.6. $\wp^{(4)}(z) = 12(\wp\wp'' + \wp'\wp') = 5!\left[\wp^3 - 3c_2\wp - \frac{14c_3}{5}\right]$.

18.6.7. $\wp^{(5)}(z) = 12(\wp\wp''' + 2\wp'\wp'' + \wp''\wp') = 3\cdot 5!\,\wp'[\wp^2 - c_2]$.

18.6.8. $\wp^{(6)}(z) = 12(\wp\wp^{(4)} + 3\wp'\wp''' + 3\wp''\wp'' + \wp'''\wp')$.

18.6.9. $\wp^{(6)}(z) = 7![\wp^4 - 4c_2\wp^2 - 4c_3\wp + 5c_2^2/7]$.

18.6.10. $\wp^{(7)}(z) = 4\cdot 7!\,\wp'[\wp^3 - 2c_2\wp - c_3]$.

18.6.11. $\wp^{(8)}(z) = 9![\wp^5 - 5c_2\wp^3 - 5c_3\wp^2 + (10c_2^2\wp + 11c_2c_3)/3]$.

18.6.12. $\wp^{(9)}(z) = 5\cdot 9!\,\wp'[\wp^4 - 3c_2\wp^2 - 2c_3\wp + 2c_2^2/3]$.

18.6.13. $\wp^{(10)}(z) = 11![\wp^6 - 6c_2\wp^4 - 6c_3\wp^3 + 7c_2^2\wp^2 + 77c_2^2c_3\wp + (342c_2c_3\wp + 84c_3^2 - 10c_2^3)/33]$.

18.6.14. $\wp^{(11)}(z) = 6\cdot 11!\,\wp'[\wp^5 - 4c_2\wp^3 - 3c_3\wp^2 + (77c_2^2\wp + 57c_2c_3)/33]$.

18.6.15. $\wp^{(12)}(z) = 13![\wp^7 - 7c_2\wp^5 - 7c_3\wp^4 + 35c_2^2\wp^3/3 + 210c_2c_3\wp^2/11 + (84c_3^2 - 35c_2^3)\wp/13 - 1363c_2^2c_3/429]$.

18.6.16. $\wp^{(13)}(z) = 7\cdot 13!\,\wp'[\wp^6 - 5c_2\wp^4 - 4c_3\wp^3 + 5c_2^2\wp^2 + 60c_2c_3\wp/11 + (12c_3^2 - 5c_2^3)/13]$.

18.6.17. $\wp^{(14)}(z) = 15![\wp^8 - 8c_2\wp^6 - 8c_3\wp^5 + 52c_2^2\wp^4/3 + 328c_2c_3\wp^3/11 + (444c_3^2 - 328c_2^3)\wp^2/39 - 488c_2^2c_3\wp/33 + c_2(55c_3^2 - 2316c_2^3)/429]$

18.6.18. $\wp^{(15)}(z) = 8\cdot 15!\,[\wp'\wp^7 - 6c_2\wp^5 - 5cc_3\wp^4 + 26c_2^2\wp^3/3 + 123c_2c_3\wp^2/11 + (111c_3^2 - 82c_2^3)\wp/39 - 61c_2^2c_3/33]$.

Частные производные по инвариантам

18.6.19. $\Delta\frac{\partial\wp}{\partial g_3} = \wp'\left(3g_2\zeta - \frac{9}{2}g_3z\right) + 6g_2\wp^2 - 9g_3\wp - g_2^2$.

18.6.20. $\Delta\frac{\partial\wp}{\partial g_2} = \wp'\left(-\frac{9}{2}g_3\zeta + \frac{g_2^2z}{4}\right) - 9g_3\wp^2 + \frac{g_2^2}{2}\wp + \frac{3}{2}g_2g_3$.

18.6.21. $\Delta\frac{\partial\zeta}{\partial g_3} = -3\zeta\left(g_2\wp + \frac{3}{2}g_3\right) + \frac{1}{2}z\left(9g_3\wp + \frac{1}{2}g_2^2\right) - \frac{3}{2}g_2\wp'$.

18.6.22. $\Delta\frac{\partial\zeta}{\partial g_2} = \frac{1}{2}\zeta\left(9g_3\wp + \frac{1}{2}g_2^2\right) - \frac{1}{2}g_2z\left(\frac{1}{2}g_2\wp + \frac{3}{4}g_3\right) + \frac{9}{4}g_3\wp'$.

18.6.23. $\Delta\frac{\partial\sigma}{\partial g_3} = \frac{3}{2}g_2\sigma'' + \frac{9}{2}g_3\sigma + \frac{1}{8}g_2^2z^2\sigma - \frac{9}{2}g_2z\sigma'$.

18.6.24. $\Delta \frac{\partial\sigma}{\partial g_2} = -\frac{9}{4} g_3\sigma'' - \frac{1}{4} g_2^2\sigma - -\frac{3}{16} g_2g_3z^2\sigma + \frac{1}{4} g_2^2z\sigma'$

$\left(\text{Здесь}'\ \text{означает}\ \frac{\partial}{\partial z}\cdot\right)$

Дифференциальные уравнения

Уравнение	Решение
18.6.25.	
$y'^3 = y^2(y-a)^2$,	$y = \frac{a}{2} + \frac{27}{16}\mathcal{P}'\left(\frac{z}{2};\ 0, -\frac{64a^2}{729}\right)$.
18.6.26.	
$y'^3 = (y^3 - 3ay^2 + 3y)^2$,	$y = \frac{2}{a - 3\mathcal{P}'(z;\, 0,\, g_3)}$, $g_3 = \frac{4-3a^2}{27}$.

18.6.27.

$$y'^4 = \frac{128}{3}(y+a)^2(y+b)^3,\quad y = 6\mathcal{P}^2(z;\ g_2,\ 0) - b,$$

$$g_2 = -\frac{2}{3}(a-b).$$

$y'' = [a\mathcal{P}(z) + b]\,y$ (уравнение Ламе) см. в [18.8], 2.26.

Другие (более частные) уравнения порядков 1 — 3, содержащие $\mathcal{P}(z)$, см. в [18.8], 1.49, 2.28, 2.72, 2.73, 2.439, 2.440, 3.9 — 3.12.

Об использовании $\mathcal{P}(z)$ при решении дифференциальных уравнений вида $y'^m + A(z, y) = 0$, где $A(z, y)$ — многочлен от y степени $2m$ с коэффициентами, которые являются аналитическими функциями от z, см. [18.7], с 312.

18.7. ИНТЕГРАЛЫ

Неопределенные интегралы

18.7.1. $\int \mathcal{P}^2 \quad = \frac{1}{6}\mathcal{P}'(z) + \frac{1}{12} g_2 z.$

18.7.2. $\int \mathcal{P}^3(z)\,dz = \frac{1}{120}\mathcal{P}'''(z) - \frac{3}{20} g_2\zeta(z) + \frac{1}{10} g_3 z$

(формулы для более высоких степеней можно получить интегрированием формул для $\mathcal{P}^{(2k)}(z)$),

Относительно $\int \mathcal{P}^n(z)\,dz$, где n — целое положительное, см. [18.15], 4. с. 108—109.

Если $\mathcal{P}'(a) \neq 0$, то

18.7.3. $\mathcal{P}'(a)\int \frac{dz}{\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a)} =$

$= 2z\zeta(a) + \ln\sigma(z-a) - \ln\sigma(z+a).$

Относительно $\int dz/[\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}'(a)]^n$ $(\mathcal{P}'(a) \neq 0)$, где n — целое положительное, см. [18.15], 4, с. 109—110.

Определенные интегралы

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
18.7.4.	$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{s(t)}}$,	$\omega_2 = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{s(t)}}$.
18.7.5.	$\omega' = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dt}{\sqrt{\lvert s(t)\rvert}}$,	$\omega_2' = i\int_{-\infty}^{e_2} \frac{dt}{\sqrt{\lvert s(t)\rvert}}$,

где

18.7.6. t — действительное и

18.7.7. $s(t) = 4t^3 - g_2t - g_3$.

18.8. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

$w = u + iv$, a — отношение периодов

$\Delta > 0$

$w = \mathcal{P}(z)$ отображает фундаментальный прямоугольник на полуплоскость $v \leqslant 0$; если $|\omega'| = \omega$ $g_3 = 0$), то равнобедренный треугольник $0\omega\omega_2$ отображается на $u \geqslant 0$, $v \leqslant 0$.

$w = \mathcal{P}'(z)$ отображает фундаментальный прямоугольник на w-плоскость без III квадранта; если $|\omega'| = \omega$, то треугольник $0\omega\omega_2$ отображается на $v \geqslant 0$, $v \geqslant u$.

$w = \zeta(z)$ отображает фундаментальный прямоугольник на полуплоскость $u \geqslant 0$. Если $a \leqslant 1.9$ (приблизительно), то $v \leqslant 0$; в противном случае образ распространяется на квадрант.

Для очень больших a образ распространяется на бóльшую часть I квадранта.

$w = \sigma(z)$ отображает фундаментальный прямоугольник на I квадрант, если $a < 1.9$ (приблизительно); на I и II квадранты, если $1.9 \leqslant a < 3.8$ (приблизительно). Для больших a $\arg[\sigma(\omega_2)] \approx \frac{\pi^2 a}{12}$, следовательно, при больших a образ навивается около начала координат.

Другие отображения описываются в [18.23] в §13.7 (квадрат на круг), §13.11 (кольцо на плоскость с двумя разрезами) и в [18.24], с. 35 (двойной почти равносторонний треугольник на полуплоскость).

$\Delta < 0$

$w = \mathcal{P}(z)$ отображает фундаментальный прямоугольник на полуплоскость $v \leqslant 0$; если $|\omega_2'| = \omega_2 (g_3 = 0)$, то равнобедренный треугольник $0\omega_2\omega'$ отображается на $u \geqslant 0$, $v \leqslant 0$.

$w = \mathcal{P}'(z)$ отображает фундаментальный прямоугольник на бо̀льшую часть w плоскости без III квадранта; если $|\omega_2'| = \omega_2$, то треугольник $0\omega_2\omega'$ отображается на $v \geqslant 0$, $v \geqslant u$.

$w = \zeta(z)$ отображает фундаментальный прямоугольник на полуплоскость $u \geqslant 0$. Для малых a бо̀льшая часть образа расположена в IV квадранте; для $1.3 \leqslant a \leqslant 3.8$ (приблизительно) образ полностью расположен в IV квадранте. Для очень больших a бо̀льшая часть образа расположена в I квадранте.

$w = \sigma(z)$ отображает фундаментальный прямоугольник на I квадрант, если $a < 3.8$ (приблизительно); на I и II квадранты, если $3.8 \leqslant a < 7.6$ (приблизительно). Для больших a $\arg[\sigma(\omega_2 + \omega_2'/2)] \approx \dfrac{\pi^2 a}{24}$, следовательно, при больших a образ навивается около начала координат.

Другие отображения описываются в [18.23] в §13.8 (равносторонний треугольник на полуплоскость) и в §13.9 (равнобедренный треугольник на полуплоскость).

Определение знака $\mathcal{P}'$ по $\mathcal{P}'^2$

Фундаментальный прямоугольник $\Delta > 0$ *Фундаментальный прямоугольник* $\Delta < 0$

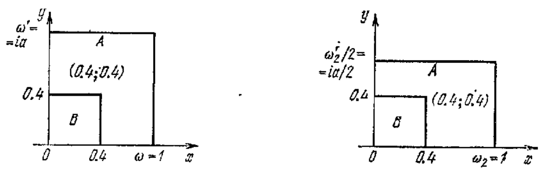


Рис. 18.4.

$\Delta > 0$

В области A

$\mathrm{Re}(\mathcal{P}') \geqslant 0$, если $y \geqslant 0.4$ и $x \leqslant 0.4$; $\mathrm{Im}(\mathcal{P}') \geqslant 0$ всюду.

В области B

Знак $\mathcal{P}'$ определяется по первому члену ряда Лорана $-\dfrac{2}{z^3}$ (фактически получается одна (или более) значащая цифра).

$\Delta < 0$

В области A

(1) Если $a \geqslant 1.0,5$, то используется критерий для области A, когда $\Delta > 0$.

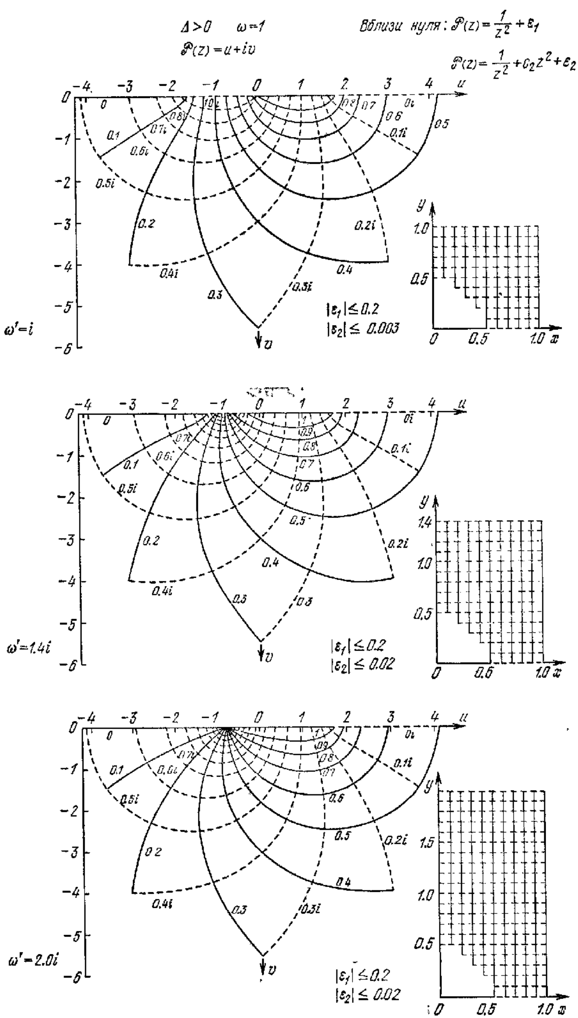
(2) Если $1 \leqslant a < 1.05$, то $\mathrm{Re}(\mathcal{P}') \geqslant 0$ при $y \geqslant 0.4$ и $x \leqslant 0.4$; $-\dfrac{\pi}{4} < \arg(\mathcal{P}') < \dfrac{3\pi}{4}$ при $0.4 < y \leqslant 0.5$ и $0.4 < x \leqslant 0.5$;

$\mathrm{Im}(\mathcal{P}') \geqslant 0$ всюду.

В области B

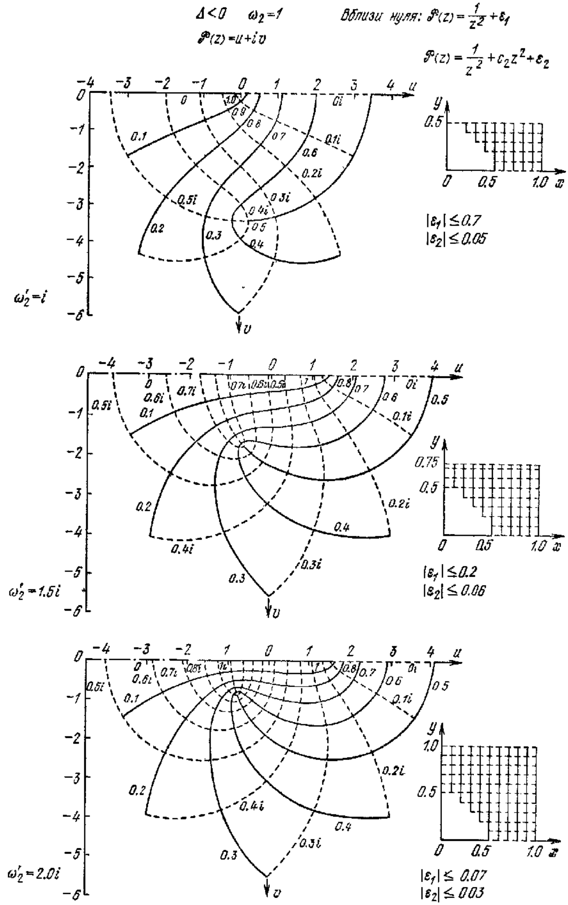
Используется критерий для области B при $\Delta > 0$.

(Подобные критерии применяются и тогда, когда действительный полупериод отличен от единицы.)



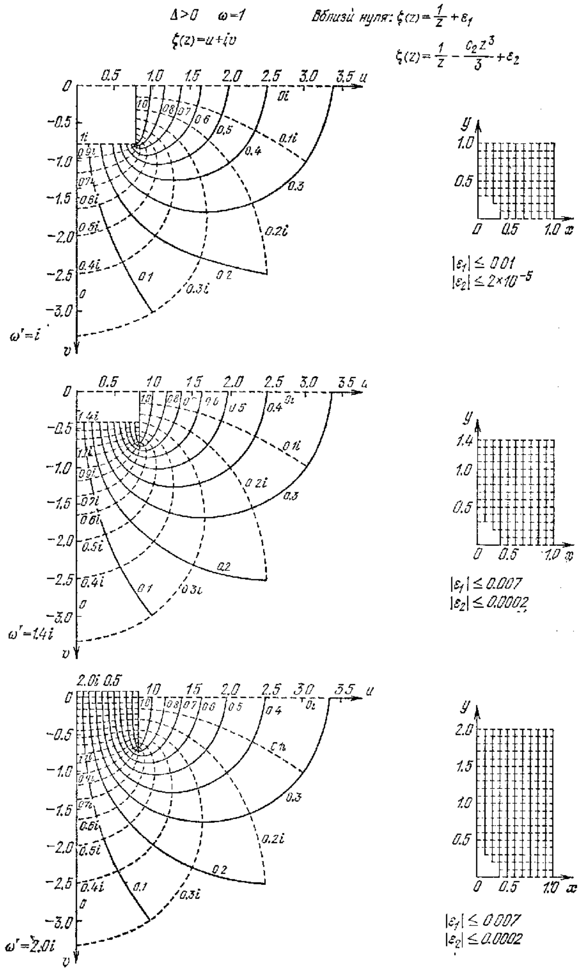
Δ>0 ω=1
℘(z)=u+iv
Вблизи нуля: ℘(z)=1/z²+ε₁
℘(z)=1/z²+c₂z²+ε₂
ω′=i
|ε₁|≤0.2
|ε₂|≤0.003
ω′=1.4i
|ε₁|≤0.2
|ε₂|≤0.02
ω′=2.0i
|ε₁|≤0.2
|ε₂|≤0.02

Рис. 18.5.



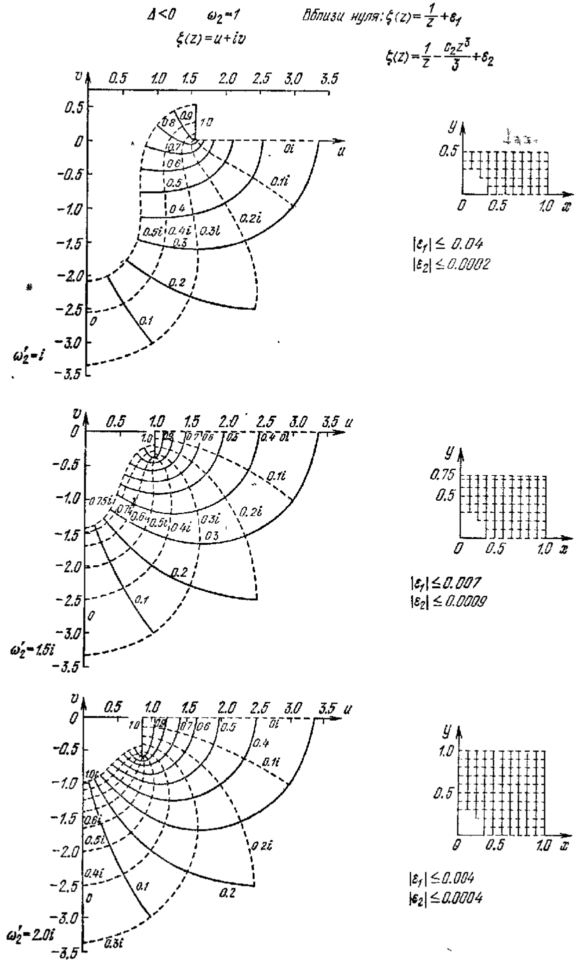
Δ<0 ω₂=1
℘(z)=u+iv
Вблизи нуля: ℘(z) = 1/z² + ε₁
℘(z) = 1/z² + c₂z² + ε₂
ω'₂=i
|ε₁| ≤ 0.7
|ε₂| ≤ 0.05
ω'₂=1.5i
|ε₁| ≤ 0.2
|ε₂| ≤ 0.06
ω'₂=2.0i
|ε₁| ≤ 0.07
|ε₂| ≤ 0.03

Рис. 18.6.



Δ>0 ω=1
ζ(z)=u+iv
Вблизи нуля: ζ(z)=1/z+ε1
ζ(z)=1/z−c2z³/3+ε2
ω′=i
|ε1| ≤ 0.01
|ε2| ≤ 2×10⁻⁵
ω′=1.4i
|ε1| ≤ 0.007
|ε2| ≤ 0.0002
ω′=2.0i
|ε1| ≤ 0.007
|ε2| ≤ 0.0002

Рис. 18.7.



$\Delta<0$ $\omega_2=1$
$\zeta(z)=u+iv$
Вблизи нуля: $\zeta(z)=\frac{1}{z}+\varepsilon_1$
$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\frac{c_2 z^3}{3}+\varepsilon_2$
$\omega_2'=i$
$|\varepsilon_1|\le 0.04$
$|\varepsilon_2|\le 0.0002$
$\omega_2'=1.5i$
$|\varepsilon_1|\le 0.007$
$|\varepsilon_2|\le 0.0009$
$\omega_2'=2.0i$
$|\varepsilon_1|\le 0.004$
$|\varepsilon_2|\le 0.0004$

Рис. 18.8.

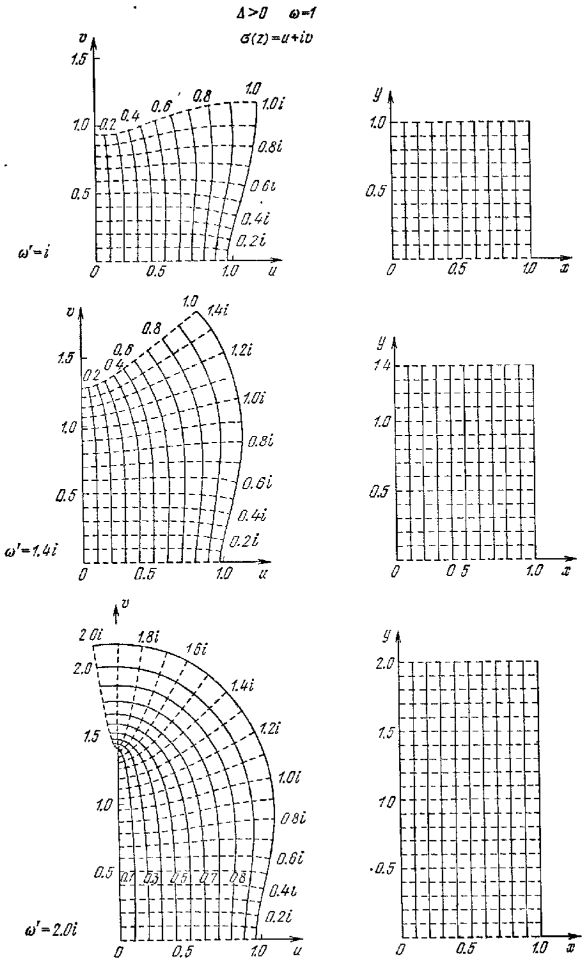


Рис. 18.9.

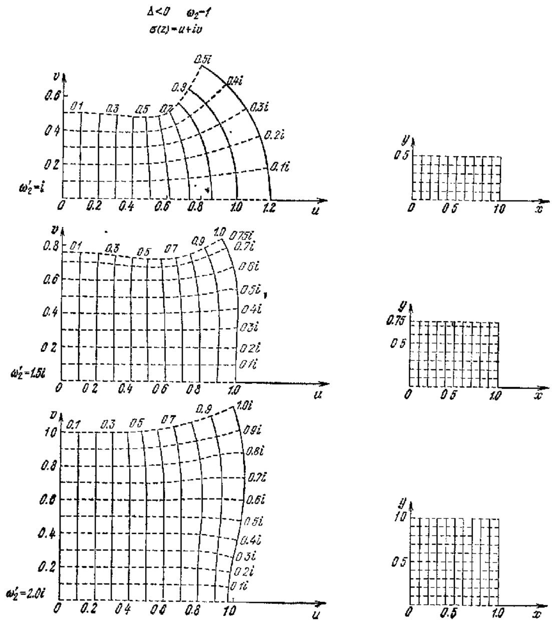


Рис. 18.10.

18.9. СВЯЗЬ С ПОЛНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ K И K', С ИХ ПАРАМЕТРОМ m И С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ЯКОБИ

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
18.9.1.	$e_1 = \dfrac{(2-m)K^2(m)}{3\omega^2}$,	$e_1 = \dfrac{(2m-1)+6i\sqrt{m-m^2}}{3\omega_2^2}K^2(m).$
18.9.2.	$e_2 = \dfrac{(2m-1)K^2(m)}{3\omega^2}$,	$e_2 = \dfrac{2(1-2m)K^2(m)}{3\omega_2^2}.$
18.9.3.	$e_3 = \dfrac{-(m+1)K^2(m)}{3\omega^2}$,	$e_3 = \dfrac{(2m-1)-6i\sqrt{m-m^2}}{3\omega_2^2}K^2(m).$
18.9.4.	$g_2 = \dfrac{4(m^2-m+1)K^4(m)}{3\omega^4}$,	$g_2 = \dfrac{4(16m^2-16m+1)K^4(m)}{3\omega_2^4}.$
18.9.5.	$g_3 = \dfrac{4(m-2)(2m-1)(m+1)K^6(m)}{27\omega^6}$,	$g_3 = \dfrac{8(2m-1)(32m^2-32m-1)K^6(m)}{27\omega_2^6}.$
18.9.6.	$\Delta = \dfrac{16m^2(m-1)^2K^{12}(m)}{\omega^{12}}$,	$\Delta = \dfrac{-256(m-m^2)K^{12}(m)}{\omega_2^{12}}.$

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
18.9.7.	$\omega' = \dfrac{iK'(m)\,\omega}{K(m)}$,	$\omega_2' = \dfrac{iK'(m)\,\omega_2}{K(m)}$.
18.9.8.	$\omega = K(m)/(e_1 - e_3)^{1/2}$,	$\omega_2 = K(m)/H_2^{1/2}$.
18.9.9.	$m = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3)$,	$m = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3e_2}{4H_2}$.
18.9.10.	$(0 < m \leqslant 1/2$, так как $g_3 \geqslant 0)$	
18.9.11.	$\mathcal{P}(z) = e_3 + (e_1 - e_3)/\operatorname{sn}^2(z^* \mid m)$,	$\mathcal{P}(z) = e_2 + H_2 \dfrac{1 + \operatorname{cn}(z' \mid m)}{1 - \operatorname{cn}(z' \mid m)}$.
18.9.12.	$\mathcal{P}'(z) = -2(e_1 - e_3)^{3/2} \operatorname{cn}(z^* \mid m) \operatorname{dn}(z^* \mid m)/\operatorname{sn}^3(z^* \mid m)$, где $z^* = (e_1 - e_3)^{1/2} z$,	$\mathcal{P}'(z) = \dfrac{-4H_2^{3/2} \operatorname{sn}(z' \mid m) \operatorname{dn}(z' \mid m)}{[1 - \operatorname{cn}(z' \mid m)]^2}$, где $z' = 2zH_2^{1/2}$.
18.9.13.	$\eta = \zeta(\omega) = \dfrac{K(m)}{3\omega}[3E(m) + (m-2)K(m)]$,	$\eta_2 = \zeta(\omega_2) = \dfrac{K(m)}{3\omega_2}[6E(m) + (4m - 5)K(m)]$.
18.9.14.	$\eta' = \zeta(\omega') = \dfrac{\eta\omega' - \dfrac{\pi i}{2}}{\omega}$,	$\eta_2' = \zeta(\omega_2') = \dfrac{\eta_2\omega_2' - \pi i}{\omega_2}$.

$K(m)$, $K'(m) = K(1 - m)$, $E(m)$ — полные эллиптические интегралы, см. гл. 17.

18.10. СВЯЗЬ С ТЭТА-ФУНКЦИЯМИ

Формальное определение четырех тэта-функций дано с помощью рядов 16.27.1—16.27.4, которые сходятся для всех комплексных z и всех q, определенных ниже. (Некоторые авторы вместо независимой переменной z используют πz.) Эти функции зависят от z и параметра q, который в записи обычно опускается. Заметим, что

$$\vartheta_1'(0) = \vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0), \text{ где } \vartheta_i(0) = \vartheta_i(0, q).$$

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
18.10.1.	$\tau = \omega'/\omega$,	$\tau_2 = \omega_2'/2\omega_2$.
18.10.2.	$q = e^{i\pi\tau} = e^{-\pi K'/K}$,	$q = iq_2 = ie^{i\pi\tau_2} = ie^{-\pi\lvert\omega_2'\rvert/2\omega_2}$.
18.10.3.	q — действительное, и так как $g_3 \geqslant 0$ $(\lvert\omega'\rvert \geqslant \omega)$, то $0 < q \leqslant e^{-\pi}$,	q — чисто мнимое, и так как $g_3 \geqslant 0$ $(\lvert\omega_2'\rvert \geqslant \omega_2)$, то $0 < q \leqslant e^{\pi/2}$.
18.10.4.	$(v = \pi z/2\omega)$,	$(v = \pi z/2\omega_2)$.
18.10.5.	$\mathcal{P}(z) = e_j + \dfrac{\pi^2}{4\omega^2}\left[\dfrac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_{j+1}(v)}{\vartheta_{j+1}(0)\,\vartheta_1(v)}\right]^2$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$,	$\mathcal{P}(z) = e_2 + \dfrac{\pi^2}{4\omega_2^2}\left[\dfrac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_1(v)}\right]^2$.
18.10.6.	$\mathcal{P}'(z) = -\dfrac{\pi^3}{4\omega^3}\,\dfrac{\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_4(v)\,\vartheta_1'^3(0)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)\,\vartheta_1^3(v)}$,	$\mathcal{P}'(z) = -\dfrac{\pi^3}{4\omega_2^3}\,\dfrac{\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_4(v)\,\vartheta_1'^3(0)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)\,\vartheta_1^3(v)}$.
18.10.7.	$\zeta(z) = \dfrac{\eta z}{\omega} + \dfrac{\pi\vartheta_1'(v)}{2\omega\vartheta_1(v)}$,	$\zeta(z) = \dfrac{\eta_2 z}{\omega_2} + \dfrac{\pi\vartheta_1'(v)}{2\omega_2\vartheta_1(v)}$.
18.10.8.	$\sigma(z) = \dfrac{2\omega}{\pi}\exp\left(\dfrac{\eta z^2}{2\omega}\right)\dfrac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}$,	$\sigma(z) = \dfrac{2\omega_2}{\pi}\exp\left(\dfrac{\eta_2 z^2}{2\omega_2}\right)\dfrac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}$.
18.10.9.	$12\omega^2 e_1 = \pi^2[\vartheta_3^4(0) + \vartheta_4^4(0)]$,	$12\omega_2^2 e_1 = \pi^2[\vartheta_2^4(0) - \vartheta_4^4(0)]$.
18.10.10.	$12\omega^2 e_2 = \pi^2[\vartheta_2^4(0) - \vartheta_4^4(0)]$,	$12\omega_2^2 e_2 = \pi^2[\vartheta_3^4(0) + \vartheta_4^4(0)]$.

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
18.10.11.	$12\omega^2 e_3 = -\pi^2[\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)]$,	$12\omega_2^2 e_3 = -\pi^2[\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)]$.
18.10.12.	$(e_2 - e_3)^{1/2} = -i(e_3 - e_2)^{1/2} = \dfrac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2(0)$,	$(e_2 - e_3)^{1/2} = i(e_3 - e_2)^{1/2} = \dfrac{\pi}{2\omega_2}\vartheta_3^2(0)$.
18.10.13.	$(e_1 - e_3)^{1/2} = -i(e_3 - e_1)^{1/2} = \dfrac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2(0)$,	$(e_1 - e_3)^{1/2} = i(e_3 - e_1)^{1/2} = \dfrac{\pi}{2\omega_2}\vartheta_2^2(0)$.
18.10.14.	$(e_1 - e_2)^{1/2} = -i(e_2 - e_1)^{1/2} = \dfrac{\pi}{2\omega}\vartheta_4^2(0)$,	$(e_2 - e_1)^{1/2} = -i(e_1 - e_2)^{1/2} = \dfrac{\pi}{2\omega_2}\vartheta_4^2(0)$.
18.10.15.	$g_2 = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)^4[\vartheta_2^8(0) + \vartheta_3^8(0) + \vartheta_4^8(0)]$,	$g_2 = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\pi}{2\omega_2}\right)^4[\vartheta_2^8(0) + \vartheta_3^8(0) + \vartheta_4^8(0)]$.
18.10.16.	$g_3 = 4e_1e_2e_3$,	$g_3 = 4e_1e_2e_3$.
18.10.17.	$\Delta^{1/4} = \dfrac{\pi^3}{4\omega^3}\vartheta_1'^2(0)$,	$(-\Delta)^{1/4} = \dfrac{\pi^3}{4\omega_2^3}\vartheta_1'^2(0)\, e^{-i\pi/4}$.
18.10.18.	$\eta \equiv \zeta(\omega) = -\dfrac{\pi^2\vartheta_1'''(0)}{12\omega\vartheta_1'(0)}$,	$\eta_2 \equiv \zeta(\omega_2) = -\dfrac{\pi^2\vartheta_1'''(0)}{12\omega_2\vartheta_1'(0)}$.
18.10.19.	$\eta' \equiv \zeta(\omega') = \dfrac{\eta\omega' - \dfrac{\pi i}{2}}{\omega}$,	$\eta_2' \equiv \zeta(\omega_2') = \dfrac{\eta_2\omega_2' - \pi i}{\omega_2}$.

Разложения в ряд

18.10.20. $\vartheta_1(0) = 0$.

18.10.21. $\vartheta_2(0) = 2q^{1/4}[1 + q^{1\cdot 2} + q^{2\cdot 3} + q^{3\cdot 4} + \ldots + q^{n(n+1)} + \ldots]$.

18.10.22. $\vartheta_3(0) = 1 + 2[q + q^4 + q^9 + \ldots + q^{n^2} + \ldots]$.

18.10.23. $\vartheta_4(0) = 1 + 2[-q + q^4 - q^9 + \ldots + (-1)^n q^{n^2} + \ldots]$.

Достижимая точность

$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
Заметим:	Заметим:
$\vartheta_j(0) > 0$ $(j = 2,\ 3,\ 4)$.	$\vartheta_2(0) = Ae^{i\pi/8}$, $A > 0$; $\operatorname{Re}\vartheta_3(0) > 0$; $\vartheta_4(0) = \overline{\vartheta_3(0)}$.
2 члена дают по крайней мере 5S;	2 члена дают по крайней мере 3S;
3 члена дают по крайней мере 11S;	3 члена дают по крайней мере 5S;
4 члена дают по крайней мере 21S.	4 члена дают по крайней мере 10S.

18.11. ВЫРАЖЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ $\mathcal{P}$ И $\mathcal{P}'$

Если $f(z)$ — какая-либо эллиптическая функция и $\mathcal{P}(z)$ имеет те же самые периоды, то можно написать

18.11.1. $$f(z) = \frac{1}{2}[f(z) + f(-z)] + \frac{1}{2}[\{f(z) - f(-z)\}\{\mathcal{P}'(z)\}^{-1}]\mathcal{P}'(z).$$

Оба выражения в квадратных скобках являются четными эллиптическими функциями. Выразим теперь четную эллиптическую функцию $g(z)$ (порядка $2k$) через $\mathcal{P}(z)$. Вследствие четности неприводимое множество нулей будет состоять из $a_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ и множества точек, конгруэнтных $-a_i (i = 1, 2, \ldots, k)$; соответственно для полюсов будем рассматривать точки $\pm b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Тогда

18.11.2. $$g(z) = A\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_i)}{\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_i)}\right\},$$

где A — постоянная.

Если какая-нибудь из точек, a_i или b_i, конгруэнтна началу координат, то соответствующий множитель в произведении опускается. Множители, соответствующие кратным полюсам (нулям), повторяются в соответствии с их кратностью.

18.12. СЛУЧАЙ $\Delta = 0$ $(c > 0)$

I

18.12.1. $g_2 > 0,\ g_3 < 0$ $(e_1 = e_2 = c,\ e_3 = -2c)$.

18.12.2. $H_1 = H_2 = 0,\ H_3 = 3c$.

18.12.3. $\mathcal{P}(z;\ 12c^2,\ -8c^3) = c + 3c\,\{\operatorname{sh}[(3c)^{1/2}z]\}^{-2}$.

18.12.4. $\zeta(z;\ 12c^2,\ -8c^3) = -cz + (3c)^{1/2}\operatorname{cth}[(3c)^{1/2}z]$.

18.12.5. $\sigma(z;\ 12c^2,\ -8c^3) = (3c)^{-1/2}\operatorname{sh}[(3c)^{1/2}z]\,e^{-cz^2/2}$.

18.12.6. $\omega = \infty, \ \omega' = (12c)^{-1/2}\pi i.$

18.12.7. $\eta = \zeta(\omega) = -\infty.$

18.12.8. $\eta' = \zeta(\omega') = -c\omega'.$

18.12.9. $q = 1, \ m = 1.$

18.12.10. $\sigma(\omega) = 0.$

18.12.11. $\sigma(\omega') = \dfrac{2\omega' e^{\pi^2/24}}{\pi}.$

18.12.12. $\sigma(\omega_2) = 0.$

18.12.13. $\mathcal{P}(\omega/2) = c.$

18.12.14. $\mathcal{P}'(\omega/2) = 0.$

18.12.15. $\zeta(\omega/2) = -\infty.$

18.12.16. $\sigma(\omega/2) = 0.$

18.12.17. $\mathcal{P}(\omega'/2) = -5c.$

18.12.18. $\mathcal{P}'(\omega'/2) = \dfrac{-\pi^3}{2\omega'^3}.$

18.12.19. $\zeta(\omega'/2) = \dfrac{1}{2}(-c\omega' + \pi/\omega').$

18.12.20. $\sigma(\omega'/2) = \dfrac{\omega' e^{\pi^2/96}\sqrt{2}}{\pi}.$

18.12.21. $\mathcal{P}(\omega_2/2) = c.$

18.12.22. $\mathcal{P}'(\omega_2/2) = 0.$

18.12.23. $\zeta(\omega_2/2) = -\infty - \dfrac{c\omega'}{2}.$

18.12.24. $\sigma(\omega_2/2) = 0.$

II

18.12.25. $g_2 > 0, \ g_3 > 0 \ (e_1 = 2c, \ e_2 = e_3 = -c).$

18.12.26. $H_1 = 3c, \ H_2 = H_3 = 0.$

18.12.27. $\mathcal{P}(z; \ 12c^2, \ 8c^3) = -c + 3c\{\sin[(3c)^{1/2} z]\}^{-2}.$

18.12.28. $\zeta(z; \ 12c^2, \ 8c^3) = cz + (3c)^{1/2}\operatorname{ctg}[(3c)^{1/2} z].$

18.12.29. $\sigma(z; \ 12c^2, \ 8c^3) = (3c)^{-1/2}\sin[(3c)^{1/2} z]\, e^{cz^2/2}.$

18.12.30. $\omega = (12c)^{-1/2}\pi, \ \omega' = i\infty.$

18.12.31. $\eta = \zeta(\omega) = c\omega.$

18.12.32. $\eta' = \zeta(\omega') = i\infty.$

18.12.33. $g = 0, \ m = 0.$

18.12.34. $\sigma(\omega) = \dfrac{2\omega e^{-\pi^2/24}}{\pi}.$

18.12.35. $\sigma(\omega') = 0.$

18.12.36. $\sigma(\omega_2) = 0.$

18.12.37. $\mathcal{P}(\omega/2) = 5c.$

18.12.38. $\mathcal{P}'(\omega/2) = \dfrac{-\pi^3}{2\omega^3}.$

18.12.39. $\zeta(\omega/2) = \dfrac{1}{2}(c\omega + \pi/\omega).$

18.12.40. $\sigma(\omega/2) = \dfrac{e^{\pi^2/96}\omega\sqrt{2}}{\pi}.$

18.12.41. $\mathcal{P}(\omega'/2) = -c.$

18.12.42. $\mathcal{P}'(\omega'/2) = 0.$

18.12.43. $\zeta(\omega'/2) = +i\infty.$

18.12.44. $\sigma(\omega'/2) = 0.$

18.12.45. $\mathcal{P}(\omega_2/2) = -c.$

18.12.46. $\mathcal{P}'(\omega_2/2) = 0.$

18.12.47. $\zeta(\omega_2/2) = \dfrac{c\omega}{2} + i\infty.$

18.12.48. $\sigma(\omega_2/2) = 0.$

III

18.12.49. $g_2 = 0, \ g_3 = 0 \ (e_1 = e_2 = e_3 = 0).$

18.12.50. $\mathcal{P}(z; \ 0, \ 0) = z^{-2}.$

18.12.51. $\zeta(z; \ 0, \ 0) = z^{-1}.$

18.12.52. $\sigma(z; \ 0, \ 0) = z.$

18.12.53. $\omega = -i\omega' = \infty.$

18.13. ЭКВИАНГАРМОНИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ($g_2 = 0, \ g_3 = 1$)

Если $g_2 = 0$ и $g_3 > 0$, то соотношения однородности позволяют свести функцию $\mathcal{P}$ к $\mathcal{P}(z; 0, 1)$ (подобным же образом поступают с функциями $\mathcal{P}'$, ζ и σ). Так, $\mathcal{P}(z; \ 0, \ g_3) = g_3^{1/3}\mathcal{P}(zg_3^{1/6}; \ 0, \ 1)$. Случай $g_2 = 0, \ g_3 = 1$ называют *эквиангармоническим*.

$\frac{1}{4}$ FPP; приведение в фундаментальный треугольник

$\Delta_1 \equiv \Delta 0\omega_2 z_0$ — фундаментальный треугольник. Пусть в 18.13 всюду через ε обозначено $e^{i\pi/3}$.

$$\omega_2 \approx 1.5299\ 54037\ 05719\ 28749\ 13194\ 17231^{*}).$$

*) Это значение было вычислено с 30S и проконтролировано на настольной вычислительной машине.

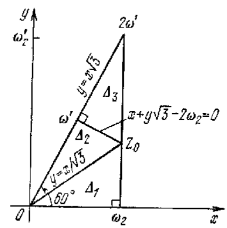


Рис. 18.11.

Формулы приведения для z_2, лежащего в Δ_2, $z_1 = \varepsilon\bar{z}_2$ лежит в Δ_1

18.13.1. $\wp(z_2) = \varepsilon^{-2}\bar{\wp}(z_1)$.

18.13.2. $\wp'(z_2) = -\bar{\wp}'(z_1)$

18.13.3. $\zeta(z_2) = \varepsilon^{-1}\bar{\zeta}(z_1)$.

18.13.4 $\sigma(z_2) = \varepsilon\bar{\sigma}(z_1)$.

Формулы приведения для z_3, лежащего в Δ_3; $z_1 = \varepsilon^{-1}(2\omega - z_3)$ лежит в Δ_1

18.13.5. $\wp(z_3) = \varepsilon^{-2}\wp(z_1)$.

18.13.6. $\wp'(z_3) = \wp'(z_1)$

18.13.7. $\zeta(z_3) = -\varepsilon^{-1}\zeta(z_1) + 2\eta', \quad \eta' = \zeta(\omega')$.

18.13.8. $\sigma(z_3) = \varepsilon\sigma(z_1)\exp[(z_3 - \omega')(2\eta')]$.

Частные значения и формулы

18.13.9. $\Delta = -27, \quad H_1 = \sqrt{3}(4^{-1/3})\,\bar{\varepsilon},$

$H_2 = \sqrt{3}(4^{-1/3}), \quad H_3 = \sqrt{3}(4^{-1/3})\,\varepsilon.$

18.13.10. $m = \sin^2 15^\circ = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}, \quad q = ie^{-\pi\sqrt{3}/2}.$

18.13.11. $\vartheta_2(0) = Ae^{i\pi/8}$.

18.13.12. $\vartheta_3(0) = Ae^{i\pi/24}$.

18.13.13. $\vartheta_4(0) = Ae^{-i\pi/24}$,

где

18.13.14. $A = (\omega_2/\pi)^{1/2}2^{1/3}3^{1/8} \approx 1.0086\,67.$

18.13.15. $\omega_2 = \dfrac{K(m)2^{1/3}}{3^{1/4}} = \dfrac{\Gamma^3(1/3)}{4\pi}.$

Значения в полупериодах

	$\wp$	$\wp'$	ζ	σ
18.13.16. $\omega \equiv \omega_1$	$e_1 = 4^{-1/3}\varepsilon^2$	0	$\eta = \varepsilon\pi/2\omega_2\sqrt{3}$	$\varepsilon^{-1}\sigma(\omega_2)$
18.13.17. ω_2	$e_2 = 4^{-1/3}$	0	$\eta_2 = \eta + \eta' = \pi/2\omega_2\sqrt{3}$	$\dfrac{e^{\pi/4\sqrt{3}}(2^{1/3})}{3^{1/4}}$
18.13.18. $\omega' \equiv \omega_3$	$e_3 = 4^{-1/3}\varepsilon^{-2}$	0	$\eta' = \varepsilon^{-1}\pi/2\omega_2\sqrt{3}$	$\varepsilon\sigma(\omega_2)$
18.13.19. ω_2'	$e_2 = 4^{-1/3}$	0	$\eta_2' = -\pi i/2\omega_2 = \eta' - \eta$	$\dfrac{ie^{3\pi/4\sqrt{3}}(2^{1/3})}{3^{1/4}}$

Значения *) вдоль $(0, \omega_2)$

	$\wp$	$\wp'$	ζ	σ
18.13.20 $2\omega_2/9$	$\dfrac{\sqrt[3]{\cos 80^\circ}}{\sqrt[3]{\cos 20^\circ} - \sqrt[3]{\cos 40^\circ}}$	$\dfrac{-\sqrt{3}\,[\sqrt[3]{\cos 20^\circ} + \sqrt[3]{\cos 40^\circ}]}{\sqrt[3]{\cos 20^\circ} - \sqrt[3]{\cos 40^\circ}}$		
18.13.21. $\omega_2/3$	$1/(2^{1/3} - 1)$	$-\sqrt{3}(2^{1/3} + 1)/(2^{1/3} - 1)$	$\dfrac{\eta_2}{3} + \dfrac{\sqrt{3}(2^{2/3} + 2 + 2^{4/3})}{6}$	$\dfrac{e^{\pi/36\sqrt{3}}}{3^{1/6}}\sqrt[4]{\dfrac{2^{1/3} - 1}{2^{1/3} + 1}}$
18.13.22. $4\omega_2/9$	$\dfrac{\sqrt[3]{\cos 40^\circ}}{\sqrt[3]{\cos 20^\circ} - \sqrt[3]{\cos 80^\circ}}$	$\dfrac{-\sqrt{3}\,[\sqrt[3]{\cos 20^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ}]}{\sqrt[3]{\cos 20^\circ} - \sqrt[3]{\cos 80^\circ}}$		
18.13.23. $\omega_2/2$	$e_2 + H_2$	$-3^{3/4}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	$(\pi/4\omega_2\sqrt{3}) + (3^{1/4}\sqrt{2 + \sqrt{3}}/2^{4/3})$	$\dfrac{e^{\pi/16\sqrt{3}}(2^{1/12})}{3^{1/4}\sqrt[8]{2 + \sqrt{3}}}$
18.13.24. $2\omega_2/3$	1	$-\sqrt{3}$	$\dfrac{2}{3}(\eta_2) + 3^{-1/2}$	$e^{\pi/9\sqrt{3}}/3^{1/8}$
18.13.25. $8\omega_2/9$	$\dfrac{\sqrt[3]{\cos 20^\circ}}{\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ}}$	$\dfrac{-\sqrt{3}\,[\sqrt[3]{\cos 40^\circ} - \sqrt[3]{\cos 80^\circ}]}{\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ}}$		

*) Выражения для $2\omega_2/9$, $4\omega_2/9$, $8\omega_2/9$ взяты из [18.14].

Значения вдоль $(0, z_0)$

	$\wp$	$\wp'$	ζ	σ
18.13.26. $z_0/2$	$-2^{1/3}\varepsilon^2$	$3i$	$\left[\frac{\eta_2}{\sqrt{3}}+2^{-1/3}\right]e^{-i\pi/6}$	$\frac{e^{\pi/12\sqrt{3}}e^{i\pi/6}}{3^{1/4}}$
18.13.27. $3z_0/4$	$\varepsilon^2(e_2-H_2)$	$i(3^{1/4})\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\left[\frac{\pi}{4\omega_2}+\frac{3^{1/4}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2^{4/3}}\right]e^{-i\pi/6}$	$\frac{e^{3\pi/16\sqrt{3}}(2^{1/12})e^{i\pi/6}}{3^{1/4}\sqrt[8]{2-\sqrt{3}}}$
18.13.28. z_0	0	i	$\frac{2\eta_2}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6}$	$e^{\pi/3\sqrt{3}}e^{i\pi/6}$

Формулы удвоения

18.13.29. $\wp(2z)=\dfrac{\wp(z)\,[\wp^3(z)+2]}{4\wp^3(z)-1}$.

18.13.30. $\wp'(2z)=\dfrac{2\wp^6(z)-10\wp^3(z)-1}{[\wp'(z)]^3}$.

18.13.31. $\zeta(2z)=2\zeta(z)+\dfrac{3\wp^2(z)}{\wp'(z)}$.

18.13.32. $\sigma(2z)=-\wp'(z)\,\sigma^4(z)$.

Формулы для 1/3 аргумента (x — действительное)

18.13.33. $$\wp\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt[3]{\cos\frac{\varphi-\pi}{3}}}{\sqrt[3]{\cos\frac{\varphi}{3}}-\sqrt[3]{\cos\frac{\varphi+\pi}{3}}}.$$

18.13.34. $$\wp'\left(\frac{x}{3}\right)=-\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{\cos\frac{\varphi}{3}}+\sqrt[3]{\cos\frac{\varphi+\pi}{3}}}{\sqrt[3]{\cos\frac{\varphi}{3}}\;\sqrt[3]{\cos\frac{\varphi+\pi}{3}}},$$

где $\operatorname{tg}\varphi=\wp'(x)$, $0<x<2\omega_2$ и φ должно выбираться из интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\quad\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right),\quad\left(\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\right)$$

так, чтобы получить

$$\wp\left(\frac{x}{3}\right),\quad\wp\left(\frac{x}{3}+\frac{2\omega_2}{3}\right),\quad\left(\frac{x}{3}+\frac{4\omega_2}{3}\right)$$

соответственно.

Комплексный множитель

18.13.35. $\wp(\varepsilon z)=\varepsilon^{-1}\,\wp(z)$.

18.13.36. $\wp'(\varepsilon z)=-\wp'(z)$.

18.13.37. $\zeta(\varepsilon z)=\varepsilon^{-1}\,\zeta(z)$.

18.13.38. $\sigma(\varepsilon z)=\varepsilon\sigma(z)$.

Здесь ε означает (как всюду в 18.13) $e^{i\pi/3}$. Приведенные равенства используются, например, следующим образом: если z — действительное, то εz лежит на $0\omega'$ (см. рис. 18.11); если εz — чисто мнимое, то z лежит на $0z_0$ (см. рис. 18.11).

Конформные отображения

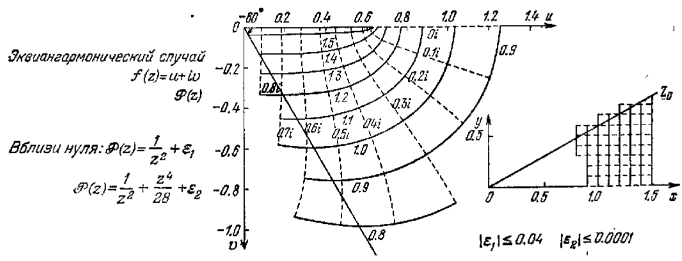


Рис. 18.12. 1.

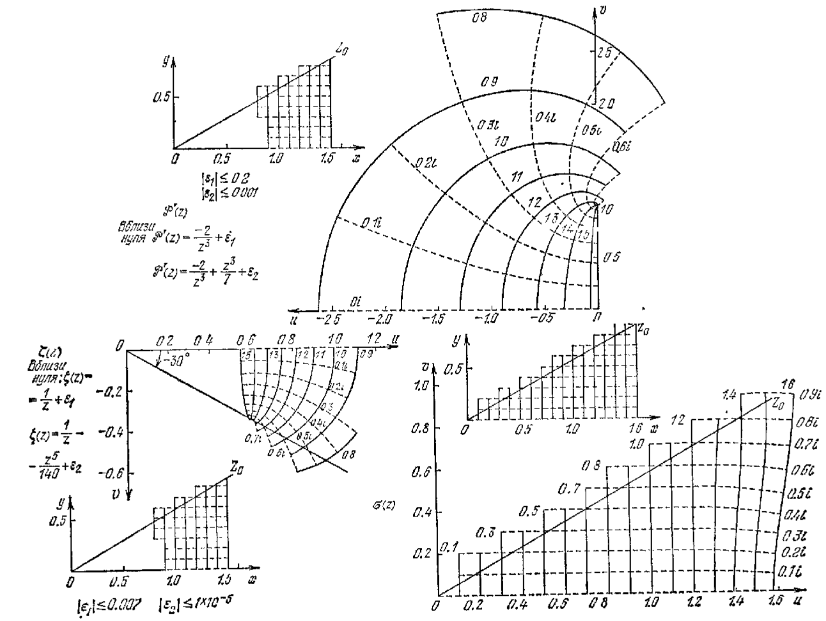


Рис. 18.12. 2.

Коэффициенты ряда Лорана для $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ и ζ
($c_m = 0$ при $m \neq 3k$)

k	Точные значения c_{3k}	Приближенные значения c_{3k}
1	$1/28$	$3.5714\ 28571\ 42857 \ldots \times 10^{-2}$
2	$1/(13 \cdot 28^2) = 1/10192$	$9.8116\ 16954\ 47409\ 73312\ 40188 \times 10^{-5}$
3	$1/(13.19 \cdot 28^3) = 1/5422144$	$1.8442\ 88901\ 21693\ 55885\ 78983 \times 10^{-7}$
4	$3/(5 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 28^4) = 234375/(7709611 \times 10^8)$	$3.0400\ 36650\ 35758\ 61350\ 20301 \times 10^{-10}$
5	$4/(5 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 28^5) = 78125/(16729\ 85587 \times 10^8)$	$4.6697\ 95161\ 83961\ 00384\ 33643 \times 10^{-13}$
6	$(7 \cdot 43)/(13^3 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 28^6)$	$6.8662\ 18676\ 79393\ 36788\ 98 \times 10^{-16}$
7	$(6 \cdot 431)/(5 \cdot 13^3 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 28^7)$	$9.7990\ 31742\ 57961\ 41839\ 66 \times 10^{-19}$
8	$(3 \cdot 7 \cdot 313)/(5^2 \cdot 13^4 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 28^8)$	$1.3685\ 06574\ 79360\ 13026\ 87 \times 10^{-21}$
9	$(4 \cdot 1201)/(5^2 \cdot 13^4 \cdot 19^3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 28^9)$	$1.8800\ 72610\ 01329\ 79236\ 40 \times 10^{-24}$
10	$(2^2 \cdot 3 \cdot 41 \cdot 1823)/(5 \cdot 13^5 \cdot 19^3 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 28^{10})$	$2.5497\ 66946\ 68202\ 63683 \times 10^{-27}$
11	$(3 \cdot 79 \cdot 733)/(5 \cdot 13^4 \cdot 19^3 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 28^{11})$	$3.4222\ 48599\ 51463\ 05316 \times 10^{-30}$
12	$\frac{3 \cdot 1153 \cdot 13963 \cdot 29059}{5^3 \cdot 13^6 \cdot 19^4 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 28^{12}}$	$4.5541\ 38864\ 99184\ 30391 \times 10^{-33}$
13	$\frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2647111}{5^3 \cdot 13^5 \cdot 19^4 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 28^{13}}$	$6.0171\ 15776\ 98241\ 99591 \times 10^{-36}$

Первые 5 приближенных значений вычислены по точным значениям c_{3k}; последующие значения вычислялись с использованием точного отношения c_{3k}/c_{3k-3} на настольных клавишных машинах по крайней мере с двойной точностью. Все приближенные значения c_{3k} были проконтролированы по рекуррентному соотношению; $c_3 \div c_{27}$ верны по крайней мере с 21S; $c_{30} \div c_{39}$ — с 20S.

$$c_{3k} \leqslant \frac{c_3}{13^{k-1}\,28^{k-1}} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

Ряды, включающие $\wp$

Обращенный ряд для больших $|\wp|$

18.13.39. $$z = (\wp^{-1})^{1/2}\left[1 + \frac{u}{7} + \frac{3u^2}{26} + \frac{5u^3}{38} + \frac{7u^4}{40} + \frac{63u^5}{248} + \frac{231u^6}{592} + \frac{429u^7}{688} + O(u^8)\right],$$

где

18.13.40. $u = \wp^{-3}/8$ и z лежит в фундаментальном треугольнике (см. рис. 18.11), если $\wp$ имеет соответствующее значение.

Ряды в окрестности z_0

18.13.41. $$\wp = iu\left[1 - \frac{u^6}{7} + \frac{3u^{12}}{364}\right] + u^4\left[-\frac{1}{2} + \frac{u^6}{28}\right] + O(u^{16}),$$

18.13.42. $$u = -i\wp\left[1 + \frac{\wp^3}{2} + \frac{6\wp^6}{7} + 2\wp^9 + \frac{70\wp^{12}}{13} + O(\wp^{15})\right],$$

где

18.13.43. $u = (z - z_0)$.

Ряды в окрестности ω_2

18.13.44. $$(\wp - e_2) = 3e_2^2 u\left[1 + x + x^2 + \frac{6}{7}x^3 + \frac{5}{7}x^4 + \frac{4}{7}x^5 + \frac{285}{637}x^6 + O(x^7)\right],$$

18.13.45. $u = (z - \omega_2)^2, \quad x = e_2 u.$

где

18.13.46. $$u = e_2^{-1}\left[w - w^2 + w^3 - \frac{6}{7}w^4 + \frac{3}{7}w^5 + \frac{3}{7}w^6 - \frac{1143}{637}w^7 + O(w^8)\right],$$

где

18.13.47. $w = (\wp - e_2)/3e_2$.

Ряды, включающие $\wp'$

Обращенный ряд для больших $|\wp'|$

18.13.48. $$z = 2^{1/3}(\wp'^{1/3})^{-1} e^{i\pi/3}\left[1 - \frac{2}{21}(\wp')^{-2} + \frac{5}{117}(\wp')^{-4} + O(\wp'^{-6})\right];$$

при этом z лежит в фундаментальном треугольнике (см. рис. 18.11), если $\wp'$ имеет соответствующее значение.

Ряды в окрестности z_0

18.13.49. $$(\wp' - i) = x\left[-2 - ix + \frac{5}{14}x^2 + \frac{3i}{28}x^3 + O(x^4)\right],$$

где

18.13.50. $x = (z - z_0)^3$.

18.13.51. $$x = 2\alpha\left[1 - i\alpha - \frac{9}{7}\alpha^2 + \frac{13i\alpha^3}{7} + O(\alpha^4)\right],$$

где

18.13.52. $\alpha = (\wp' - i)/(-4)$.

Ряды в окрестности ω_2

18.13.53. $$\wp' = 6e_2^2(z - \omega_2)\left[1 + 2v + 3v^2 + \frac{24}{7}v^3 + \frac{25}{7}v^4 + \frac{24}{7}v^5 + \frac{285}{91}v^6 + O(v^7)\right],$$

где

18.13.54. $v = e_2(z - \omega_2)^2$.

18.13.55. $$(z - \omega_2) = (\wp'/6e_2^2)\left[1 - 2w + 9w^2 - \frac{360}{7}w^3 + 330w^4 - 2268w^5 + \frac{212\,058}{13}w^6 + O(w^7)\right],$$

где

18.13.56. $w = \wp'^2/9$.

Ряды, включающие ζ

Обращенный ряд при больших $|\zeta|$

18.13.57. $$z = \zeta^{-1}\left[1 - \frac{\gamma}{7} + \frac{17\gamma^2}{143} - \frac{496\gamma^3}{3553} + O(\gamma^4)\right],$$

где

18.13.58. $\gamma = \zeta^{-6}/20$.

Ряды в окрестности z_0

18.13.59. $$(\zeta-\zeta_0)=i\left[-\frac{u^2}{2}+\frac{u^8}{56}-\frac{3u^{14}}{5096}\right]+\left[\frac{u^5}{8}-\frac{u^{11}}{308}\right]+O(u^{17}),$$

где

18.13.60. $u=(z-z_0)$.

Ряды в окрестности ω_2

18.13.61. $$(\zeta-\eta_2)=-e_2(z-\omega_2)\left[1+v+\frac{3}{5}v^2+\frac{3}{7}v^3+\frac{2}{7}v^4+\frac{15}{77}v^5+\frac{12}{91}v^6+\frac{57}{637}v^7+O(v^8)\right],$$

где

18.13.62. $v=e_2(z-\omega_2)^2$.

18.13.63. $$(z-\omega_2)=\frac{(\zeta-\eta_2)}{-e_2}\left[1-w+\frac{12w^2}{5}-\frac{267w^3}{35}+\frac{139w^4}{5}-\frac{30192w^5}{275}+\frac{1\,634\,208}{3575}w^6+O(w^7)\right],$$

где

18.13.64. $w=(\zeta-\eta_2)^2/e_2$.

Ряды, включающие σ

18.13.65. $$\sigma=z-\frac{2\cdot 3}{7!}z^7-\frac{2^3\cdot 3^3}{13!}z^{13}+\frac{2^6\cdot 3^4\cdot 23}{19!}z^{19}+\frac{2^7\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 31}{25!}z^{25}+\frac{2^8\cdot 3^8\cdot 5\cdot 9103}{31!}z^{31}-\frac{2^{12}\cdot 3^9\cdot 5\cdot 229\cdot 2683}{37!}z^{37}-\frac{2^{14}\cdot 3^{10}\cdot 5\cdot 23\cdot 257\cdot 18049}{43!}z^{43}-\frac{2^{16}\cdot 3^{12}\cdot 5\cdot 59\cdot 107895773}{49!}z^{49}+O(z^{55}).$$

18.13.66. $$z=\sigma+\frac{\sigma^7}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{41\sigma^{13}}{2^7\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 13}+\frac{13\cdot 337\sigma^{19}}{2^{10}\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 11\cdot 17\cdot 19}+\frac{31\cdot 101\sigma^{25}}{2^{15}\cdot 3^5\cdot 5\cdot 11^2\cdot 17\cdot 23}+O(\sigma^{31}).$$

Аппроксимация многочленами ($0\leqslant x\leqslant 1.53$)

18.13.67. $$x^2\wp(x)=\sum_0^6 a_n x^{6n}+\varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)|<2\cdot 10^{-7},$$

$a_0=(-1)9.99999\ 96$, $a_4=-(-9)2.20892\ 47$,
$a_1=(-2)3.57143\ 20$, $a_5=(-10)1.74915\ 35$,
$a_2=(-5)9.80689\ 93$, $a_6=-(-12)4.46863\ 93$.
$a_3=(-7)2.00835\ 02$,

18.13.68. $$x^3\wp'(x)=\sum_0^6 a_n x^{6n}+\varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)|<4\cdot 10^{-7},$$

$a_0=-2.00000\ 00$, $a_4=-(-9)2.12719\ 66$,
$a_1=(-1)1.42857\ 22$, $a_5=(-10)6.53654\ 67$,
$a_2=(-4)9.81018\ 03$, $a_6=-(-11)1.70510\ 78$.
$a_3=(-6)3.00511\ 93$,

18.13.69. $$x\zeta(x)=\sum_0^6 a_n x^{6n}+\varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)|<3\cdot 10^{-8},$$

$a_0=(-1)9.99999\ 98$, $a_4=(-10)6.12486\ 14$,
$a_1=-(-3)7.14285\ 86$, $a_5=(-11)4.66919\ 85$,
$a_2=-(-6)8.91165\ 65$, $a_6=(-12)1.25014\ 65$.
$a_3=-(-8)1.44381\ 84$,

18.14. ЛЕМНИСКАТНЫЙ СЛУЧАЙ ($g_2=1,\ g_3=0$)

Если $g_2>0$ и $g_3=0$, то соотношения однородности позволяют свести функцию $\wp$ к $\wp(z;1,0)$ (подобным же образом поступают с функциями $\wp'$, ζ и σ). Так, $\wp(z;g_2,0)=g_2^{1/2}\,\wp(zg_2^{1/2},1,0)$. Случай $g_2=1$, $g_3=0$ называют *лемнискатным*.

$\frac{1}{4}$ FPP; приведение в фундаментальный треугольник

$\Delta_1\equiv\Delta 0\ \omega\omega_2$ — фундаментальный треугольник,

$\omega\approx 1.8540\ 74677\ 30137\ 192$*).

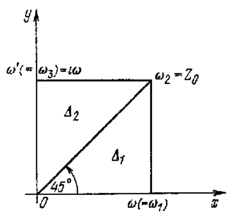


Рис. 18.13.

*) Это значение было вычислено и проконтролировано на настольных клавишных машинах и верно с 18S.

Формулы приведения для z_2, лежащего в Δ_2; $z_1 = i\bar{z}_2$ лежит в Δ_1

18.14.1. $\mathcal{P}(z_2) = -\bar{\mathcal{P}}(z_1)$.

18.14.2. $\mathcal{P}'(z_2) = i\bar{\mathcal{P}}'(z_1)$.

18.14.3. $\zeta(z_2) = -i\bar{\zeta}(z_1)$.

18.14.4. $\sigma(z_2) = i\bar{\sigma}(z_1)$.

Частные значения и формулы

18.14.5. $\Delta = 1,\ H_1 = H_3 = 2^{-1/2},\ H_2 = i/2,$

$m = \sin^2 45° = 1/2,\ q = e^{-\pi}.$

18.14.6. $\vartheta_2(0) = \vartheta_4(0) = (\omega\ \sqrt{2}/\pi)^{1/2},\ \vartheta_3(0) = (2\omega/\pi)^{1/2}.$

18.14.7. $\omega = K(\sin^2 45°) = \dfrac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{\pi}} = \dfrac{\tilde{\omega}}{\sqrt{2}}$, где

$\tilde{\omega} \approx 2.62205\ 75542\ 92119\ 81046\ 48395\ 89891\ 11941\ 36827\ 54951\ 43162$ — лемнискатная постоянная [18.9].

Значения в полупериодах

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}'$	ζ	σ
18.14.8. $\omega = \omega_1$	$e_1 = 1/2$	0	$\eta = \pi/4\omega$	$e^{\pi/8}(2^{1/4})$
18.14.9. $\omega_2 = z_0$	$e_2 = 0$	0	$\eta + \eta'$	$e^{\pi/4}(\sqrt{2})\ e^{i\pi/4}$
18.14.10. $\omega' = \omega_3$	$e_3 = -1/2$	0	$\eta' = -\pi i/4\omega$	$ie^{\pi/8}(2^{1/4})$

Значения вдоль $(0,\ \omega)$

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}'$	ζ	σ
18.14.11. $\omega/4$	$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2}(\sqrt{\alpha} + 2^{1/4})(1 + 2^{1/4})$			
18.14.12. $\omega/2$	$\alpha/2$	$-\alpha$	$\dfrac{\pi}{8\omega} + \dfrac{\alpha}{2\sqrt{2}}$	$\dfrac{e^{\pi/32}(2^{1/16})}{\alpha^{1/4}}$
18.14.13. $2\omega/3$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \sec 30°}$	$-\dfrac{\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 3}}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{2\eta}{3} + \sqrt{\dfrac{\mathcal{P}(2\omega/3)}{3}}$	$\dfrac{e^{\pi/18}(3^{1/8})}{(2 + \sqrt{3})^{1/12}}$
18.14.14. $3\omega/4$	$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2}(\sqrt{\alpha} - 2^{1/4})(1 + 2^{1/4})$			

$\alpha = 1 + \sqrt{2}$

Значения вдоль $(0,\ z_0)$

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}'$	ζ	σ
18.14.15. $z_0/4$	$-\dfrac{i}{2}(\alpha + \sqrt{2\alpha})$	$\alpha(\sqrt{\alpha} + \sqrt{2})\ e^{i\pi/4}$		$\dfrac{e^{\pi/64}(2^{1/32})}{\alpha^{1/4}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{2})^{1/4}}\ e^{i\pi/4}$
18.14.16. $z_0/2$	$-i/2$	$e^{i\pi/4}$	$\left[\dfrac{\pi}{4\omega\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\right] e^{-i\pi/4}$	$e^{\pi/16}(2^{1/8})\ e^{i\pi/4}$
18.14.17. $2z_0/3$	$\dfrac{-i}{2}\sqrt{\sec 30° - 1}$	$\dfrac{e^{i\pi/4}\sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3}}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{2\eta_2}{3} + \left[\dfrac{\mathcal{P}(2z_0/3)}{3}\right]^{1/2}$	$\dfrac{e^{\pi/9}\ e^{i\pi/4}(3^{1/8})}{\sqrt[12]{2\sqrt{3} - 3}}$
18.14.18. $3z_0/4$	$-\dfrac{i}{2}(\alpha - \sqrt{2\alpha})$	$\alpha(\sqrt{\alpha} - \sqrt{2})\ e^{i\pi/4}$		$\dfrac{e^{9\pi/64}(2^{1/32})}{\alpha^{1/4}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{2})^{1/4}}\ e^{i\pi/4}$

$\alpha = 1 + \sqrt{2}$.

Формулы удвоения

18.14.19. $\wp(2z)=\left[\wp^2(z)+\frac{1}{4}\right]^2/\{\wp(z)\,[4\wp^2(z)-1]\}.$

18.14.20. $\wp'(2z)=(\beta+1)(\beta^2-6\beta+1)/[32\wp'^3(z)],$

$\beta=4\wp^2(z).$

18.14.21. $\zeta(2z)=2\zeta(z)+\dfrac{6\wp^2(z)-\frac{1}{2}}{2\wp'(z)}.$

18.14.22. $\sigma(2z)=-\wp'(z)\sigma^4(z).$

Формулы половинного аргумента $(0<x<2\omega)$

18.14.23. $\wp\left(\frac{x}{2}\right)=$

$$=\left[\wp^{1/2}(x)+\left\{\wp(x)+\frac{1}{2}\right\}^{1/2}\right]\left[\wp^{1/2}(x)\pm\left\{\wp(x)-\frac{1}{2}\right\}^{1/2}\right]$$

(знак + при $0<x\leqslant\omega$; знак − при $\omega<x<2\omega$).

18.14.24. $\frac{1}{2}\wp'\left(\frac{x}{2}\right)=\wp'(x)\mp\left[2\wp(x)+\frac{1}{2}\right]\sqrt{\wp(x)-\frac{1}{2}}-$

$-\left[2\wp(x)-\frac{1}{2}\right]\sqrt{\wp(x)+\frac{1}{2}}-2\wp^{3/2}(x)$ (см. [18.13])

(знак − берется при $0<x\leqslant\omega$; знак + при $\omega\leqslant x<2\omega$).

Комплексный множитель

18.14.25. $\wp(iz)=-\wp(z).$

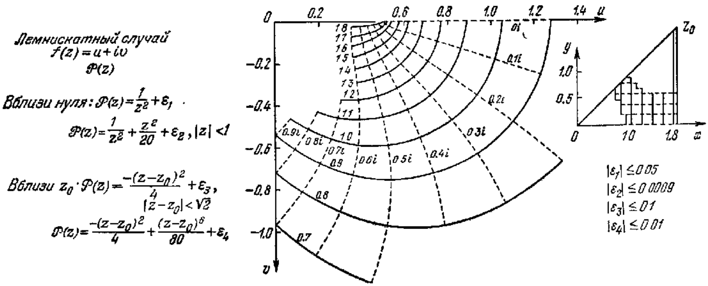
18.14.26. $\wp'(iz)=i\wp'(z).$

18.14.27. $\zeta(iz)=-i\zeta(z).$

18.24.28. $\sigma(iz)=i\sigma(z).$

Приведенные равенства используются, например, если z — действительное; тогда iz будет чисто мнимым.

Конформные отображения



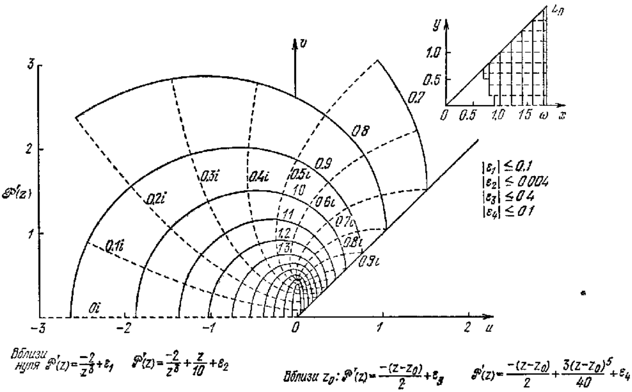


Рис. 18.14.1.

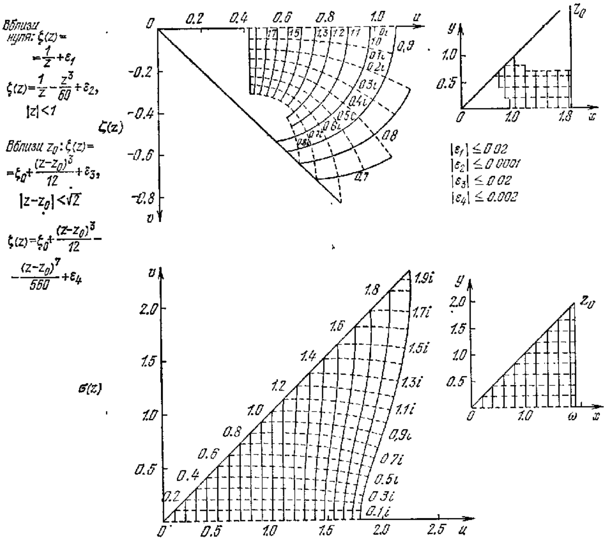


Рис. 18.14. 2.

Коэффициенты ряда Лорана для $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ и ζ

($c_m = 0$ для m нечетных)

k	Точные значения c_{2k}	Приближенные значения c_{2k}
1	$1/20$	0.05
2	$1/(3 \cdot 20^2) = 1/1200$	$0.83333 \ldots \times 10^{-3}$
3	$2/(3 \cdot 13 \cdot 20^3) = 1/156000$	$0.641025\ 641025 \ldots \times 10^{-5}$
4	$5/(3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 20^4) = 1/21216000$	$0.47134\ 23831\ 07088\ 98944 \times 10^{-7}$
5	$2/(3^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 20^5) = 1/(31824 \times 10^5)$	$0.31422\ 82554\ 04725\ 99296 \times 10^{-9}$
6	$10/(3^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 20^6) = 1/(4964544 \times 10^5)$	$0.20142\ 83688\ 49183\ 32882 \times 10^{-11}$
7	$4/(3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 20^7) = 1/(7998432 \times 10^7)$	$0.12502\ 45048\ 02941\ 37651 \times 10^{-13}$
8	$2453/(3^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29 \cdot 20^8) =$ $= 958203125/(1262002599 \times 10^{16})$	$0.75927\ 19109\ 76468\ 59917 \times 10^{-16}$
9	$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 61/(3^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 20^9) =$ $= 833984375/(18394643943 \times 10^{17})$	$0.45338\ 43533\ 93461\ 06092 \times 10^{-18}$

$$c_{2k} \leqslant \frac{c_2^k}{3^{k-1}} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Ряды, включающие $\mathcal{P}$

Обращенный ряд для больших $|\mathcal{P}|$

18.14.29. $$z=(\mathcal{P}^{-1})^{1/2}\left[1+\frac{w}{5}+\frac{w^2}{6}+\frac{5w^3}{26}+\frac{35w^4}{136}+\frac{3w^5}{8}+\frac{231w^6}{400}+\frac{429w^7}{464}+\frac{195w^8}{128}+\frac{12155w^9}{4736}+\frac{46189w^{10}}{10496}+O(w^{11})\right],$$

где

18.14.30. $w=\mathcal{P}^{-2}/8$ и z лежит в фундаментальном треугольнике (см. рис. 18.13), если $\mathcal{P}$ имеет соответствующее значение.

Ряды в окрестности z_0

18.14.31. $$2\mathcal{P}=-x+\frac{x^3}{5}-\frac{2x^5}{75}+\frac{x^7}{325}+O(x^9),$$

где

18.14.32. $x=(z-z_0)^2/2$.

18.14.33. $$x=-\left[w+\frac{w^3}{5}+\frac{7w^5}{75}+\frac{11w^7}{195}+O(w^9)\right],$$

где $w=2\mathcal{P}$.

Ряды в окрестности ω

18.14.34. $$(\mathcal{P}-e_1)=v+v^2+\frac{4v^3}{5}+\frac{3v^4}{5}+\frac{32v^5}{75}+\frac{22v^6}{75}+\frac{64v^7}{325}+O(v^8),$$

где

18.14.35. $v=(z-\omega)^2/2$.

18.14.36. $$v=y\left[1-y+\frac{6y^2}{5}-\frac{8y^3}{5}+\frac{172y^4}{75}-\frac{52y^5}{15}+\frac{1064y^6}{195}+O(y^7)\right],$$

где

18.14.37. $y=(\mathcal{P}-e_1)$.

Ряды, включающие $\mathcal{P}'$

Обращенный ряд для больших $|\mathcal{P}'|$

18.14.38. $$z=Au\left[1-\frac{v}{5}+\frac{5v^3}{39}-\frac{7v^4}{51}+O(v^5)\right],$$

$$u=(\mathcal{P}'^{1/3})^{-1}e^{i\pi/3},$$

где

18.14.39. $A=2^{1/3}$, $v=Au^4/6$ и z лежит в фундаментальном треугольнике (см. рис. 18.13), если $\mathcal{P}'$ имеет соответствующее значение.

Ряды в окрестности z_0

18.14.40.

$$\mathcal{P}'=\frac{1}{2}(z-z_0)\left[-1+3w-\frac{10w^2}{3}+\frac{35w^3}{13}+O(w^4)\right],$$

где

18.14.41. $w=(z-z_0)^4/20$.

18.14.42. $$(z-z_0)=2\mathcal{P}'\left[1+\frac{3u}{5}+\frac{5u^2}{3}+\frac{84u^3}{13}+O(u^4)\right],$$

где

18.14.43. $u=4\mathcal{P}'^4$.

Ряды в окрестности ω

18.14.44. $$\mathcal{P}'=x\left[1+x^2+\frac{3}{5}x^4+\frac{3}{10}x^6+\frac{2}{15}x^8+\frac{11}{200}x^{10}+O(x^{12})\right],$$

где

18.14.45. $x=(z-\omega)$.

18.14.46. $$x=\mathcal{P}'-\mathcal{P}'^3+\frac{12\mathcal{P}'^5}{5}-\frac{15\mathcal{P}'^7}{2}+\frac{80\mathcal{P}'^9}{3}-\frac{819\mathcal{P}'^{11}}{8}+O(\mathcal{P}'^{13}).$$

Ряды, включающие ζ

Обращенный ряд для больших $|\zeta|$

18.14.47. $$z=\zeta^{-1}\left[1-\frac{v}{5}+\frac{v^2}{7}-\frac{136v^3}{1001}+\frac{1349v^4}{9163}+O(v^5)\right],$$

где

18.14.48. $v=\zeta^{-4}/12$.

Ряды в окрестности z_0

18.14.49. $$(\zeta-\zeta_0)=\frac{1}{4}(z-z_0)^3\left[\frac{1}{3}-\frac{v}{7}+\frac{2v^2}{33}-\frac{v^3}{39}+O(v^4)\right],$$

где

18.14.50. $v=(z-z_0)^4/20$.

Ряды в окрестности ω

18.14.51. $$(\zeta-\eta)=-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{20}-\frac{x^7}{70}-\frac{x^9}{240}-\frac{x^{11}}{825}-\frac{11x^{13}}{31\,200}-\frac{x^{15}}{9750}+O(x^{17}),$$

где

18.14.52. $x=(z-\omega)$.

18.14.53. $$x=w-\frac{w^3}{3}+\frac{7w^5}{30}-\frac{13w^7}{63}+\frac{929w^9}{4536}-\frac{194w^{11}}{891}+\frac{942883w^{13}}{3\,891\,888}+O(w^{15}),$$

где

18.14.54. $w=-2(\zeta-\eta)$.

Ряды, включающие σ

18.14.55. $\sigma = z - \frac{z^5}{2\cdot 5!} - \frac{3^2 z^9}{2^2\cdot 9!} + \frac{3\cdot 23 z^{13}}{2^3\cdot 13!} + \frac{3\cdot 107 z^{17}}{2^4\cdot 17!} + \frac{3^3\cdot 7\cdot 23\cdot 37 z^{21}}{2^5\cdot 21!} + \frac{3^2\cdot 313\cdot 503 z^{25}}{2^6\cdot 25!} - \frac{3^4\cdot 7\cdot 685973 z^{29}}{2^7\cdot 29!} + O(z^{33}).$

18.14.56. $z = \sigma + \frac{\sigma^5}{2^4\cdot 3\cdot 5} + \frac{\sigma^9}{2^9\cdot 3\cdot 7} + \frac{17.113\ \sigma^{13}}{2^{13}\cdot 3^4\cdot 7\cdot 11\cdot 13} + \frac{122051\sigma^{17}}{2^{19}\cdot 3^5\cdot 7^2\cdot 11\cdot 17} + \frac{5\cdot 13\sigma^{21}}{2^{23}\cdot 3^2\cdot 11\cdot 19} + O(\sigma^{25}).$

Аппроксимация многочленами ($0\leqslant x\leqslant 1.86$)

18.14.57. $x^2\mathscr{P}(x) = \sum_0^6 a_n x^{4n} + \varepsilon(x),$

$|\varepsilon(x)| < 2\cdot 10^{-7},$

$a_0 = (-1)9.99999\ 98,$ $a_4 = (-8)\ 4.81438\ 20,$
$a_1 = (-2)4.99999\ 62,$ $a_5 = (-10)2.29729\ 21,$
$a_2 = (-4)8.33352\ 77,$ $a_6 = (-12)4.94511\ 45.$
$a_3 = (-6)6.40412\ 86,$

18.14.58. $x^3\mathscr{P}'(x) = \sum_0^6 a_n x^{4n} + \varepsilon(x),$

$|\varepsilon(x)| < 4\cdot 10^{-7},$

$a_0 = -2.00000\ 00,$ $a_4 = (-7)6.58947\ 52,$
$a_1 = (-1)1.00000\ 02,$ $a_5 = (-9)5.59262\ 49,$
$a_2 = (-3)4.99995\ 38,$ $a_6 = (-11)5.5417769.$
$a_3 = (-5)6.41145\ 59,$

18.14.59. $x\zeta(x) = \sum_0^6 a_n x^{4n} + \varepsilon(x),$

$|\varepsilon(x)| < 3\cdot 10^{-8},$

$a_0 = (-1)9.99999\ 99,$ $a_4 = -(-9)2.57492\ 62,$
$a_1 = -(-2)1.66666\ 74,$ $a_5 = -(-11)5.67008\ 00,$
$a_2 = -(-4)1.19036\ 70,$ $a_6 = (-13)9.70015\ 80.$
$a_3 = -(-7)5.86451\ 63,$

18.15. ПСЕВДОЛЕМНИСКАТНЫЙ СЛУЧАЙ ($g_2 = -1,\ g_3 = 0$)

Если $g_2 < 0$ и $g_3 = 0$, то соотношения однородности позволяют свести функцию $\mathscr{P}$ к $\mathscr{P}(z;\ -1,\ 0)$. Так,

18.15.1. $\mathscr{P}(z;\ g_2,\ 0) = |g_2|^{1/2}\mathscr{P}(z\,|g_2|^{1/4};\ -1,\ 0).$

Аналогично поступают и с функциями $\mathscr{P}'$, ζ и σ. Учитывая сходство с лемнискатным случаем, случай $g_2 = -1$, $g_3 = 0$ назовем *псевдолемнискатным*. Он играет ту же роль при $\Delta < 0$ (отношение периодов равно единице), что и лемнискатный случай при $\Delta > 0$.

$\omega_2 = \sqrt{2}\times$ (действительный полупериод для лемнискатного случая) $= \tilde{\omega}$ (лемнискатная константа — см. 18.14.7).

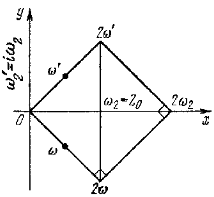


Рис. 18.15.

Частные значения и формулы

18.15.2. $\Delta = -1,\ g_2 = -1,\ g_3 = 0.$

18.15.3. $H_1 = -i/\sqrt{2},\ H_2 = 1/2,\ H_3 = i/\sqrt{2},$

$m = 1/2,\ q = ie^{-\pi/2}.$

18.15.4. $\vartheta_2(0) = R2^{1/4}e^{i\pi/8},\ \vartheta_3(0) = Re^{i\pi/8},$

$\vartheta_4(0) = Re^{-i\pi/8},$

где

18.15.5. $R = \sqrt{\omega_2\sqrt{2}/\pi}.$

Значения в полупериодах

	$\mathscr{P}$	$\mathscr{P}'$	ζ	σ
18.15.6. $\omega \equiv \omega_1$	$i/2$	0	$\frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_2')$	$e^{-i\pi/4}e^{\pi/8}(2^{1/4})$
18.15.7. ω_2	0	0	$\eta_2 = \pi/2\omega_2$	$e^{\pi/4}\sqrt{2}$
18.15.8. $\omega' \equiv \omega_3$	$-i/2$	0	$\frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_2')$	$e^{i\pi/4}e^{\pi/8}(2^{1/4})$
18.15.9. ω_2'	0	0	$\eta_2' = -i\eta_2$	$i\sigma(\omega_2)$

Связь с лемнискатным случаем

18.15.10. $\mathscr{P}(z;\ -1,\ 0) = i\mathscr{P}(ze^{i\pi/4};\ 1,\ 0).$

18.15.11. $\mathscr{P}'(z;\ -1,\ 0) = e^{3\pi i/4}\mathscr{P}'(ze^{i\pi/4};\ 1,\ 0).$

18.15.12. $\zeta(z;\ -1,\ 0) = e^{i\pi/4}\zeta(ze^{i\pi/4};\ 1,\ 0).$

18.15.13. $\sigma(z;\ -1,\ 0) = e^{-i\pi/4}\sigma(ze^{i\pi/4};\ 1,\ 0).$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Лемнискатный случай.

(a) Дано $z = x + iy$ в фундаментальном треугольнике. Найти $\mathscr{P}[\mathscr{P}', \zeta, \sigma]$ с большей точностью, чем это можно сделать графически (см. конформное отображение).

Для σ — всюду в фундаментальном треугольнике используется ряд Маклорена (18.14.55). Пять членов ряда дают по крайней мере шесть значащих цифр, шесть членов — десять значащих цифр.

Для $\mathscr{P}, \zeta$ — в окрестности нуля используются ряды Лорана (18.5.1—18.5.5; таблица коэффициентов ряда Лорана, см. стр. 448). Если $|z| < 1$, то четыре члена ряда дают по крайней мере восемь значащих цифр для $\mathscr{P}$, девять — для ζ; пять членов ряда — по крайней мере десять значащих цифр для $\mathscr{P}$, одиннадцать — для ζ.

В малых окрестностях точек z_0 и ω целесообразно использовать ряды Тейлора (18.14.31, 18.14.34, 18.14.49, 18.14.51). В других областях, не обслуживаемых непосредственно указанными разложениями, для получения $\mathscr{P}(x + iy)$ и $\zeta(x + iy)$ предварительно вычисляются $\mathscr{P}(x)$, $\mathscr{P}'(x)$ и $\zeta(x)$, а также $\mathscr{P}(iy)$, $\mathscr{P}'(iy)$ и $\zeta(iy)$ либо с помощью рядов Лорана, либо с помощью рядов Тейлора (18.14.34, 18.14.44 и 18.14.51) с последующим использованием формул 18.14.25—18.14.27 или 18.14.1—18.14.3 и формул сложения (18.4.1—18.4.3). Если достаточно семи восьми значащих цифр, то для вычисления значений вспомогательных функций на действительной оси можно использовать аппроксимации многочленами (18.14.57—18.14.59).

Для $\mathscr{P}'$ — в окрестности нуля используется ряд Лорана (18.5.4; таблица коэффициентов ряда Лорана, см. стр. 448). Если $|z| < 1$, то четыре члена ряда дают по крайней мере шесть значащих цифр, пять членов ряда — по крайней мере восемь значащих цифр. В других областях используются либо аппроксимация многочленами 18.14.58, формула 18.14.26 или 18.14.2 и формула сложения 18.4.2, либо формула $\mathscr{P}'^2 = 4\mathscr{P}^3 - \mathscr{P}$, где $\operatorname{Im}\mathscr{P}' \geqslant 0$.

(b) Дано $\mathscr{P}[\mathscr{P}', \zeta, \sigma]$, соответствующее точке в фундаментальном треугольнике. Вычислить z с большей точностью, чем это можно сделать графически.

Любой из обращенных рядов (18.14.29 и далее) дает лишь несколько значащих цифр. Исключение составляет малая окрестность точки разложения. Для получения большей точности следует использовать обратную интерполяцию.

Пример 2. Эквиангармонический случай.

(a) Дано $z = x + iy$ в фундаментальном треугольнике Найти $\mathscr{P}[\mathscr{P}', \zeta, \sigma]$ с большей точностью, чем это можно сделать графически.

Для σ — всюду в фундаментальном треугольнике используется ряд Маклорена (18.13.65). Четыре члена ряда дают по крайней мере одиннадцать значащих цифр, пять членов ряда — более двадцати одной.

Для $\mathscr{P}, \zeta$ — в окрестности нуля используются ряды Лорана (18.5.1, 18.5.5; таблица коэффициентов ряда Лорана, см. стр. 448). Если $|z| < 1$, то четыре члена ряда дают по крайней мере 10S для $\mathscr{P}$ и 11S для ζ; пять членов ряда — по крайней мере 13S для $\mathscr{P}$ и 14S для ζ. В других областях для получения $\mathscr{P}(x + iy)$ и $\zeta(x + iy)$ предварительно вычисляются $\mathscr{P}(x)$, $\mathscr{P}'(x)$ и $\zeta(x)$ с помощью аппроксимаций многочленами (18.13.67—18.13.69), если достаточно семи-восьми значащих цифр, а также $\mathscr{P}(iy)$, $\mathscr{P}'(iy)$ и $\zeta(iy)$ по рядам Лорана. Затем используются соответствующие формулы сложения (18.4.1, 18.4.3).

Для $\mathscr{P}'$ — в окрестности нуля используется ряд Лорана (18.5.4). Если $|z| < 1$, то четыре члена ряда дают по крайней мере 8S, пять членов ряда — по крайней мере 11S. В других областях следует поступать, как в случае $\mathscr{P}$ и ζ, или использовать формулу $\mathscr{P}'^2 = 4\mathscr{P}^3 - 1$, где $\operatorname{Im}\mathscr{P}' \geqslant 0$.

(b) Дано $\mathscr{P}[\mathscr{P}', \zeta, \sigma]$, соответствующее точке в фундаментальном треугольнике. Вычислить z с большей точностью, чем это можно сделать графически.

Любой из обращенных рядов (18.13.39 и далее) дает лишь несколько значащих цифр. Исключение составляет малая окрестность точки разложения. Для получения большей точности следует использовать обратную интерполяцию.

Пример 3. Дано отношение периодов a. Найти параметры m и q (см. гл. 16). Как в случае $\Delta > 0$, так и в случае $\Delta < 0$ отношение периодов равно $K'(m)/K(m)$ (см. 18.9). Так как K'/K дано, то при $0.3 < K'/K \leqslant 3$ для нахождения m используется табл. 17.3; если $K'/K < 0.3$ или $K'/K > 3$, то используется метод примера 6 гл. 17.

Другой метод состоит в использовании табл. 18.3 для получения необходимых промежуточных значений (формула 18.2 44) с последующими вычислениями по формулам

$$m = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3) \quad \text{в случае} \quad \Delta > 0,$$

$$m = \frac{1}{2} - 3e_2/4H_2 \qquad \text{в случае} \quad \Delta < 0.$$

Как в случае $\Delta > 0$, так и в случае $\Delta < 0$ отношение периодов определяет показательную функцию для q ($q = e^{-\pi a}$, если $\Delta > 0$, и $q = ie^{-\pi a/2}$, если $\Delta < 0$). Следовательно, по табл. 4.16 ($e^{-\pi x}$, $x = 0(0.01)1$) получим необходимые результаты (иногда нужно выполнить умножение, как, например, $e^{-4.72\pi} = (e^{-\pi})^4\,(e^{-0.72\pi})$).

Определение значений в полупериодах, инвариантов и связанных значений по данным периодам (табл. 18.3)

$\Delta > 0$

Даны ω и ω'; находим $\omega'/i\omega$ и входим в табл. 18.3 (стр. 489). Чтобы найти искомые значения, полученные из таблицы результаты умножаем на соответствующие степени ω (см. сноску в табл. 18.3).

Пример 4.

Даны $\omega = 10$, $\omega' = 11i$; найти

e_i, g_i и Δ.

$\Delta < 0$

Даны ω_2 и ω_2'; находим $\omega_2'/i\omega_2$ и входим в табл. 18.3 (стр. 491). Чтобы найти искомые значения, полученные из таблицы результаты умножаем на соответствующие степени ω_2 (см. сноску в табл. 18.3).

Пример 4.

Даны $\omega_2 = 10$, $\omega_2' = 11i$; найти

e_i, g_i и Δ.

Здесь $\omega'/i\omega = 1.1$, так что непосредственная выборка из табл. 18.3 дает

$$e_1(1) = 1.6843\,041,$$
$$e_2(1) = -0.2166\,258 (= -e_1, -e_3),$$
$$e_3(1) = -1.4676\,783,$$
$$g_2(1) = 10.0757\,7364,$$
$$g_3(1) = 2.1420\,1000.$$
$$\Delta > 0$$

Умножая на соответствующие степени $\omega = 10$, окончательно найдем

$$e_1 = 0.01684\,3041,$$
$$e_2 = -0.00216\,6258,$$
$$e_3 = -0.01467\,6783,$$
$$g_2 = 1.0075\,77364 \cdot 10^{-3},$$
$$g_3 = 2.1420\,1000 \cdot 10^{-6}.$$

Следовательно,

$$\Delta = 8.9902\,3191 \cdot 10^{-10}.$$
$$\Delta > 0$$

Пример 5.
Даны $\omega = 10$, $\omega' = 55i$; найти

$$\eta,\ \eta',\ \sigma(\omega),\ \sigma(\omega'),$$
$$\sigma(\omega_2).$$

Формируя $\omega'/i\omega = 5.5$ и входя в табл. 18.3 найдем табличные значения

$$\eta = 0.82246704,$$
$$\sigma(1) = 0.96045\,40.$$
$$\Delta > 0$$

Используя соотношение Лежандра (см. сноску в табл. 18.3), по найденному табличному значению η, получим

$$\eta' = \eta\omega' - \frac{\pi i}{2} = 2.9527\,723i,$$

Так как интерполяция в табл. 18.3 для $\sigma(\omega')$ и $\sigma(\omega_2)$ затруднена, то следует использовать формулы 18.3.15—18.3.17 совместно с формулами 18.3.4—18.3.6. Значения g_2, g_3 и e_1 можно непосредственно выписать из таблиц с 8S, e_3 с 5S.

$$g_2 = 8.1174\,243,$$
$$g_3 = 4.4508\,759,$$
$$e_1 = 1.6449\,341,$$
$$e_3 = -0.82247.$$

Используя 18.3.6, найдем

$$H_3 = 0.00174\,69,$$
$$H_2 = 0.00174\,69i.$$

Здесь $\omega_2'/i\omega_2 = 1.1$, так что непосредственная выборка из табл. 18.3 дает

$$e_1(1) = -0.2166\,2576 + 3.0842\,589i,$$
$$e_2(1) = 0.4332\,5152 = -2\,\mathrm{Re}\,(e_1),$$
$$e_3(1) = \bar{e}_1(1),$$
$$g_2(1) = -37.4874\,912,$$
$$g_3(1) = 16.5668\,099.$$
$$\Delta < 0$$

Умножая на соответствующие степени $\omega_2 = 10$, окончательно найдем

$$e_1 = -0.00216\,62576 + 0.03084\,2589i,$$
$$e_2 = 0.00433\,25152,$$
$$e_3 = \bar{e}_1,$$
$$g_2 = -3.7487\,4912 \cdot 10^{-3},$$
$$g_3 = 1.6566\,8099 \cdot 10^{-5}.$$

Следовательно,

$$\Delta = -6.0092\,019 \cdot 10^{-8}.$$
$$\Delta < 0$$

Пример 5.
Даны $\omega_2 = 1000$, $\omega_2' = 1004i$; найти

$$\eta_2,\ \eta_2',\ \sigma(\omega_2),$$
$$\sigma(\omega_2'),\ \sigma(\omega').$$

При $\omega_2'/i\omega_2 = 1.004$ интерполяцией по четырем точкам в табл. 18.3 получим

$$\eta_2 = 1.5626\,756,$$
$$\eta_2' = -1.5726\,664i.$$
$$\Delta < 0$$
$$\sigma(\omega_2) = 1.1805\,028,$$
$$\sigma(\omega_2') = 1.1901\,52i,$$
$$\sigma(\omega') = 0.4750\,84 + 0.4767\,17i.$$

Умножая полученные результаты на соответствующие степени ω_2, найдем

$$\eta_2 = 0.00156\,26756,$$
$$\eta_2' = -0.00157\,26664i,$$
$$\sigma(\omega_2) = 1180.5028,$$
$$\sigma(\omega_2') = 1190.152i,$$
$$\sigma(\omega') = 475.084 + 476.717i.$$

Продолжение примера 5

$\Delta > 0$ $\Delta < 0$

Применяя формулы 18.3.15–18.3.17, получим

$$\sigma(\omega')/i = 0.0071\,177, \quad \sigma(\omega_2) = -0.002016 - 0.0105\ 5i.$$

Умножая все вышенайденные значения на соответствующие степени ω, определим

$$\eta = 0.08224\,6704, \qquad \sigma(\omega') = 0.07117\,7i,$$

$$\eta' = 0.29527\,723i, \qquad \sigma(\omega_2) = -0.02016 - 0.1055i.$$

$$\sigma(\omega) = 9.60454\,0,$$

Определение периодов по заданным инвариантам (табл. 18.1)

$\Delta > 0$

Даны $g_2 > 0$ и $g_3 > 0$ такие, что $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$ (если $g_3 = 0$, $|\omega'| = \omega$, то см. лемнискатный случай); по ним вычисляется

$$\bar{g}_2 = g_2 g_3^{-2/3}.$$

$\Delta > 0$

Из табл. 18.1 находим

$$\omega g_3^{1/6} \quad \text{и} \quad \omega' g_3^{1/6},$$

а затем ω и ω'.

Пример 6.
Даны $g_2 = 10$, $g_3 = 2$;
найти ω и ω'. При

$$\bar{g}_2 = g_2 g_3^{-2/3} = 6.2996\,05249$$

из табл. 18.1 получим

$$\omega g_3^{1/6} = 1.1267\,806,$$
$$\omega' g_3^{1/6} = 1.2324\,295i.$$

Следовательно,

$$\omega = 1.003847,$$
$$\omega' = 1.097970i.$$

Пример 7.
Даны $g_2 = 8$, $g_3 = 4$;

$\Delta > 0$

найти ω и ω'. При

$$\bar{g}_2 = g_2 g_3^{-2/3} = 3.1748\,02104$$

из табл. 18.1 получим

$$\omega g_3^{1/6} = 1.2718\,310,$$

$$\omega' g_3^{1/6} = 1.8702\,425i.$$

Следовательно,

$$\omega = 1.0094\,53,$$

$$\omega' = 1.4844\,13i.$$

$\Delta < 0$

Даны g_2 и $g_3 > 0$ такие, что $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 < 0$ (если $g_3 = 0$, $|\omega_2'| = \omega_2$, то см. псевдолемнискатный случай); по ним вычисляется

$$\bar{g}_2 = g_2 g_3^{-2/3}.$$

$\Delta < 0$

Из табл. 18.1 находим

$$\omega_2 g_3^{1/6} \qquad \omega_2' g_3^{1/6},$$

а затем ω_2 и ω_2'.

Пример 6.
Даны $g_2 = -10$, $g_3 = 2$;
найти ω_2 и ω_2'. При

$$\bar{g}_2 = g_2 g_3^{-2/3} = -10/1.5874\,0105 = -6.2996\,053$$

из табл. 18.1 получим

$$\omega_2 g_3^{1/6} = 1.5741\,349,$$
$$\omega_2' g_3^{1/6} = 1.7124\,396i.$$

Следовательно,

$$\omega_2 = 1.40239\,48,$$
$$\omega_2' = 1.52561\,02i.$$

Пример 7.
Даны $g_2 = 7$, $g_3 = 6$;

$\Delta < 0$

найти ω_2 и ω_2'. При

$$\bar{g}_2 = g_2 g_3^{-2/3} = 7/3.3019\,2725 = 2.119974$$

из табл. 18.1 получим

$$\omega_2 g_3^{1/6} = 1.3423\,442,$$

$$\omega_2' g_3^{1/6} = 3.1441\,141i.$$

Следовательно,

$$\omega_2 = 0.99579\,976,$$

$$\omega_2' = 2.33241\,83i.$$

Вычисление $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ или ζ при заданном z и произвольных g_2, g_3

(или произвольных периодах, по которым можно найти g_2 и g_3; периоды должны быть известны по крайней мере приближенно)

Сначала задачу сводим (если необходимо) к случаю, когда точка z лежит в фундаментальном прямоугольнике, используя соответствующие формулы из 18.2.

Первый метод (с заданной точностью). Если x и y «малы» (точка z находится в дважды заштрихованной области), то непосредственно используется ряд Лорана. Если x или y «велики», то используется ряд Лорана по x и по y с последующим применением формул сложения (для $\mathcal{P}'$ предварительно вычисляется $\mathcal{P}$, а затем используется формула $\mathcal{P}'^2 = 4\mathcal{P}^3 - g_2\mathcal{P} - g_3$, см. 18.8).

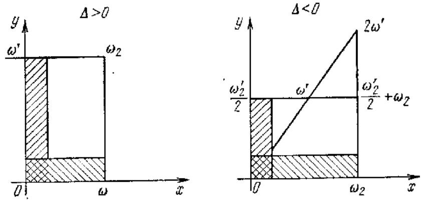


Рис. 18.16.

$\Delta > 0$

Второй метод (только для $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$). Вычисляем $e_i (i = 1, 2, 3)$ (если заданы только g_2 и g_3, то используем табл. 18.1 для получения периодов, а затем табл. 18.3 для нахождения e_i; если также даны периоды, то табл. 18.3 используется непосредственно).

В любом случае вычисляется

$$m = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3);$$

отсюда функции Якоби

$$\mathrm{sn}\,(z^* \mid m),\ \mathrm{cn}\,(z^* \mid m),\ \mathrm{dn}\,(z^* \mid m)$$

по формулам из 16.4 и 16.21 и $\mathcal{P}$ или $\mathcal{P}'$ из 18.9.11, 18.9.12.

Третий метод (точность лимитируется способом получения периодов).

Получаем периоды, их отношение a и $q = e^{-\pi a}$. Отсюда находим $\vartheta_i(0)$ $(i=2, 3, 4)$ по рядам 18.10.21—18.10.23.

$\Delta > 0$

Вычисляем соответствующие ϑ функции при $z = x$ и $z = iy$, а затем $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{P}'(x)$ и $\zeta(x)$, $\mathcal{P}(iy)$, $\mathcal{P}'(iy)$ и $\zeta(iy)$ и применяем теоремы сложения (если x или y «малы», то можно использовать непосредственно ряды Лорана).

Пример 8.

Даны $z = 0.07 + 0.1i$,

$$g_2 = 10,\ g_3 = 2;$$

найти $\mathcal{P}$.

Непосредственно используем ряд Лорана при

$\Delta > 0$

$$c_2 = 0.5$$
$$c_3 = 0.07142\,85714$$
$$c_4 = 0.08333\,33333$$
$$c_5 = 0.00974\,02597$$

$$\begin{aligned}
z^{-2} &= -22.97193\,820 - 63.06022\,25i \\
+\,c_2 z^2 &= -0.00255\,000 + 0.00700\,00i \\
+\,c_3 z^4 &= -0.00001\,214 - 0.0000\,102i \\
+\,c_4 z^6 &= +0.00000\,024 - 0.00000\,01i \\
\hline
\mathcal{P}(z) &= -22.97450\,010 - 63.05323\,28i
\end{aligned}$$

$\Delta < 0$

Второй метод (только для $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$). Вычисляем e_2 и H_2 (если заданы только g_2 и g_3, то используем табл. 18.1 для получения периодов, а затем табл. 18.3 для нахождения e_2; если также даны периоды, то табл. 18.3 используется непосредственно).

В любом случае вычисляется

$$m = \frac{1}{2} - 3e_2/4H_2;$$

отсюда функции Якоби

$$\mathrm{sn}\,(z' \mid m),\ \mathrm{cn}\,(z' \mid m),\ \mathrm{dn}\,(z' \mid m)$$

по формулам из 16.4 и 16.21 и $\mathcal{P}$ или $\mathcal{P}'$ из 18.9.11, 18.9.12.

Третий метод (точность лимитируется так же, как и в случае $\Delta > 0$). Получаем периоды, их отношение a и $q_2 = e^{-\pi a/2}$.

Далее поступаем, как и в случае $\Delta > 0$, используя соответствующие формулы.

$\Delta < 0$

Пример 8.

Даны $z = 0.1 + 0.03i$,

$$g_2 = -10,\ g_3 = 2;$$

найти $\mathcal{P}$.

Непосредственно используем ряд Лорана при

$\Delta < 0$

$$c_2 = -0.5$$
$$c_3 = 0.07142\,85714$$
$$c_4 = 0.80333\,33333$$

$$\begin{aligned}
z^{-2} &= 76.59287\,938 - 50.50079\,960i \\
+\,c_2 z^2 &= -0.00455\,000 - 0.00300\,000i \\
+\,c_3 z^4 &= +0.00000\,334 + 0.00000\,780i \\
+\,c_4 z^6 &= -0.00000\,002 + 0.00000\,011i \\
\hline
\mathcal{P}(z) &= 76.58833\,270 - 50.50379\,169i
\end{aligned}$$

$\Delta > 0$

Пример 9.
Даны $z = 15 + 73i$, $g_2 = 8$, $g_3 = 4$; найти $\mathcal{P}$.
Из примера 7 берем

$$\omega = 1.009453,$$

$$\omega' = 1.484413i.$$

По табл. 18.3 $e_1 = 1.61803\,37$, $e_3 = -0.99999\,96$, откуда $m = 0.14589\,79$.

Используя 18.2.18 при $M = 7$, $N = 24$, найдем $\mathcal{P}(15 + 73i) = \mathcal{P}(0.867658 + 1.748176i)$.

Так как z лежит в R_2, то, применяя соотношение 18.2.31, получим $\mathcal{P}(15 + 73i) = \bar{\mathcal{P}}(0.867658 + 1.22065i)$.

При $z^* = 1.40390 + 1.97505i$ из 16.4 найдем $\mathrm{sn}\,(z^*|m) = 2.46550 + 1.96527i$.

Используя 18.9.11, окончательно имеем $\mathcal{P}(15 + 73i) = -0.57743 + 0.067797i$.

$\Delta < 0$

Пример 9.
Даны $z = 1.75 + 3.6i$, $g_2 = 7$, $g_3 = 6$; найти $\mathcal{P}$.
Из примера 7 берем

$$\omega_2 = 0.99579\,98,$$

$$\omega_2' = 2.33241\,83i.$$

Используя 18.2.18 при $M = 1$, $N = 1$, найдем $\mathcal{P}(1.75 + 3.6i) = \mathcal{P}(-0.24159\,96 - 1.0648\,36i) = \mathcal{P}(0.24159\,96 + 1.0648\,36i)$.

При $\Delta < 0$ из табл. 18.3 получим $e_1 = -0.81674\,362 + 0.50120\,90i$, $e_2 = 1.63348\,724$, $e_3 = -0.81674\,362 - 0.50120\,90i$, откуда

$$m = 0.01014\,3566,$$

$$H_2^{1/2} = 1.58144\,50,$$

так что $z' = 2zH_2^{1/2} = 0.76415\,29 + 3.3679\,59i$.

Из 16.4 найдем

$$\mathrm{cn}\,(z'\,|\,m) = 4.00543\,66 - 12.32465\,69i.$$

Применяя формулу 18.9.11, окончательно имеем $\mathcal{P}(1.75 + 3.6i) = 0.960894 - 0.383068i$.

Пример 10.
Даны $\omega = 10$, $\omega' = 20i$; найти $\zeta(9 + 19i)$, используя тэта-функции, формулы из 18.10 и формул сложения.

По отношению периодов $a = \omega'/i\omega = 2$ найдем $q = e^{-2\pi} = 0.00186\,74427$.

Используя ряды 18.10.21—18.10.23, вычислим значения тэта-функций с нулевым аргументом. По формулам 16.27.1—16.27.4 вычислим тэта-функции для аргументов v, в которых $z = x$ и $z = iy$. Далее, по формулам 18.10.5—18.10.7 совместно с формулами 18.10.9 и 18.10.18 получим

$$\zeta(9) = 0.09889\,5484,$$

$$\zeta(19i) = -0.00120\,0155i,$$

$$\mathcal{P}(9) = 0.01706\,9647,$$

$\Delta > 0$

$$\mathcal{P}'(9) = -0.00125\,8460,$$

$$\mathcal{P}(19i) = -0.00861\,2615,$$

$$\mathcal{P}'(19i) = -0.00003\,757i.$$

Используя формулу сложения 18.4.3, окончательно найдем

$$\zeta(9 + 19i) = 0.07439\,49 - 0.00046\,88i.$$

Пример 10.
Даны $\omega_2 = 5$, $\omega_2' = 7i$; найти $\mathcal{P}'(3 + 2i)$, используя тэта-функции, формулы из 18.10 и формулы сложения.

Учитывая формулу 18.10.2, найдем $q = ie^{-0,7\pi} = 0.11090\,12784i$.

Тэта-функции с нулевым аргументом вычисляются с помощью формул 18.10.21—18.10.23; тэта-функции для аргументов v_1 и v_2, соответствующих $z_1 + z_2 = z$, по формулам 16.27.1—16.27.4.

Используя формулы 18.10.5—18.10.6 совместно с формулой 18.10.10, получим

$$\mathcal{P}(3) = 0.10576\,946,$$

$$\mathcal{P}(2i) = -0.24497\,773,$$

$$\mathcal{P}'(3) = -0.07474\,140,$$

$$\mathcal{P}'(2i) = -0.25576\,007i.$$

$\Delta < 0$

Применяя формулы сложения 18.4.1 и 18.4.2, окончательно получим

$$\mathcal{P}(3 + 2i) = 0.01763\,210 - 0.07769\,187i,$$

$$\mathcal{P}'(3 + 2i) = -0.00069\,182 + 0.04771\,305i.$$

Вычисление $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ и ζ для частных значений отношения периодов с использованием табл. 18.2

Если задача сведена к вычислению $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ и ζ в фундаментальном прямоугольнике, то для случаев, когда действительный полупериод равен единице, а чисто мнимый полупериод равен ia, при некоторых значениях a можно непосредственно использовать табл. 18.2. Для примера рассмотрим функцию $\mathcal{P}$. Если $|z|$ «мало», то для вычисления $\mathcal{P}(z)$ непосредственно используется ряд Лорана (инварианты даны в табл. 18.3).

Если x «велико» и y «мало», то используется табл. 18.2 для получения $x^2\mathcal{P}(x)$ и $x^3\mathcal{P}'(x)$; отсюда находятся $\mathcal{P}(x)$ и $\mathcal{P}'(x)$. Для получения $\mathcal{P}(iy)$ и $\mathcal{P}'(iy)$ используются ряды Лорана и наконец — формула сложения 18.4.1.

Для «малых» x и «больших» y следует поступать наоборот: по переменной x использовать ряд Лорана, по переменной y—табл. 18.2. В случае, когда и x и y «велики», используется табл. 18.2 для получения $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{P}'(x)$, $\mathcal{P}(iy)$ и $\mathcal{P}'(iy)$; затем применяется формула сложения 18.4.1.

Подобные процедуры используются и при вычислении $\mathcal{P}'$ и ζ. Для $\mathcal{P}'$ вначале вычисляется $\mathcal{P}$, затем $\mathcal{P}'^2 = 4\mathcal{P}^3 - g_2\mathcal{P} - g_3$ (для выбора знака $\mathcal{P}'$ см. 18.8).

$\Delta > 0$

Пример 11.
Вычислить $\wp(0.8 + i)$, если $a = 1.2$.
Используя табл. 18.2 или ряды Лорана 18.5.1—18.5.4 при

$$g_2 = 9.15782\,851,$$

$$g_3 = 3.23761\,717,$$

найденным по табл. 18.3, получим

$$\wp(0.8) = 1.92442\,11,$$

$$\wp'(0.8) = -2.76522\,05,$$

$$\wp(i) = -1.40258\,06,$$

$$\wp'(i) = -1.19575\,58i.$$

Используя формулу сложения 18.4.1, окончательно будем иметь

$$\wp(0.8 + i) = -0.381433 - 0.149361i.$$

$\Delta > 0$

Пример 12.
Вычислить $\zeta(0.02 + 3i)$ при $a = 4$.
Используя табл. 18.2 или ряды Лорана 18.5.1—18.5.5 при

$$g_2 = 8.11742\,426,$$

$$g_3 = 4.45087\,587,$$

найденным по табл. 18.3, получим

$$\zeta(0.02) = 49.99999\,89,$$

$$\wp(0.02) = 2500.00016,$$

$$\wp'(0.02) = -249999.98376,$$

$$\zeta(3i) = 0.89635\,173i,$$

$$\wp(3i) = -0.82326\,511,$$

$$\wp'(3i) = -0.00249\,829i.$$

Применяя формулу сложения 18.4.3, окончательно найдем

$$\zeta(0.02 + 3i) = 0.016465 + 0.89635i.$$

$\Delta < 0$

Пример 11.
Вычислить $\wp(0.9 + 0.1i)$, если $a = 1.05$.
Используя табл. 18.2 или ряды Лорана 18.5.1—18.5.4 при

$$g_2 = -42.41653\,54,$$

$$g_3 = 9.92766\,62,$$

найденным по табл. 18.3, получим

$$\wp(0.9) = 0.34080\,33,$$

$$\wp(0.9) = -2.164801,$$

$$\wp(0.1i) = -99.97876,$$

$$\wp(0.1i) = -2000.4255i.$$

Используя формулу сложения 18.4.1, окончательно будем иметь

$$\wp(0.9 + 0.1i) = 0.231859 - 0.215149i.$$

$\Delta < 0$

Пример 12.
Вычислить $\wp'(0.4 + 0.9i)$, если $a = 2$.
Используя табл. 18.2 или ряды Лорана 18.5.1—18.5.4 при

$$g_2 = 4.54009\,85,$$

$$g_3 = 8.38537\,94,$$

найденным по табл. 18.3, получим

$$\wp(0.4) = 6.29407\,07,$$

$$\wp'(0.4) = -30.99041,$$

$$\wp(0.9i) = -1.225548,$$

$$\wp'(0.9i) = -3.19127\,03i.$$

Применяя формулы сложения 18.4.1 и 18.4.2, окончательно найдем

$$\wp'(0.4 + 0.9i) = 1.10519\,76 - 0.56489\,00i.$$

Вычисление σ при заданном z и произвольных g_2 и g_3

(или произвольных периодах, по которым можно найти g_2 и g_3; периоды должны быть известны по крайней мере приближенно)

Вначале сведем задачу (если необходимо) к вычислению $\sigma(z)$ в точке z, лежащей в фундаментальном прямоугольнике (см. 18.2). Далее, под точкой z понимаем точку, лежащую в фундаментальном прямоугольнике.

$\Delta > 0$

Если $\mathrm{Re}\, z > \omega/2$ или $\mathrm{Im}\, z > \omega'/2$, то используем формулу удвоения 18.4.8:

$$\sigma(z) = -\wp'(z/2)\sigma^4(z/2),$$

в которой $\sigma(z/2)$ вычисляется по ряду Маклорена, а $\wp'(z/2)$ методами, изложенными в приведенных выше примерах. В противном случае для вычисления $\sigma(z)$ используется непосредственно ряд Маклорена.

$\Delta < 0$

Если $\mathrm{Re}\, z > \omega_2/2$ или $\mathrm{Im}\, z > \omega_2'/4$, то используется формула удвоения, как и в случае $\Delta > 0$. В противном случае для вычисления $\sigma(z)$ используется непосредственно ряд Маклорена.

Иначе $\sigma(z)$ можно вычислять с использованием тэта-функций (см. 18.10), определяя сначала q, а затем $\vartheta_i(0)$ $(i = 2, 3, 4)$.

$\Delta > 0$

Пример 13.
Вычислить $\sigma(0.4 + 1.3i)$ для $g_2 = 8$, $g_3 = 4$.
Из примера 7 следует

$$\omega = 1.009453,$$

$$\omega' = 1.484413i.$$

Так как $\operatorname{Im} z > \omega'/2$, то по ряду Маклорена 18.5.6 находим

$$\sigma(z/2) = \sigma(0.2 + 0.65i) = 0.19543\,86 + 0.64947\,28i;$$

по ряду Лорана 18.5.4 вычисляем

$$\wp'(0.2 + 0.65i) = 5.02253\,80 - 3.56066\,93i.$$

Окончательно по формуле удвоения 18.4.8 найдем

$$\sigma(0.4 + 1.3i) = 0.278080 + 1.272785i.$$

$\Delta < 0$

Пример 13.
Вычислить $\sigma(0.8 + 0.4i)$ для $g_2 = 7$, $g_3 = 6$.
Из примера 7 следует

$$\omega_2 = 0.99579\,976,$$

$$\omega_2' = 2.33241\,83i.$$

Так как $\operatorname{Im} z > \omega_2/2$, то по ряду Маклорена 18.5.6 находим

$$\sigma(z/2) = \sigma(0.4 + 0.2i) = 0.40038\,019 + 0.19962\,017i;$$

по ряду Лорана 18.5.4 вычисляем

$$\wp'(0.4 + 0.2i) = -3.70986\,70 + 22.218544i.$$

Окончательно по формуле удвоения 18.4.8 найдем

$$\sigma(0.8 + 0.4i) = 0.81465\,765 + 0.38819\,473i.$$

Пусть дано $\sigma[\wp, \wp', \zeta]$, соответствующее точке z, лежащей в фундаментальном прямоугольнике, а также g_2 и g_3 или эквивалентные им величины; найти z

При использовании обращенных рядов из 18.5 в общем случае можно получить лишь несколько значащих цифр; исключение составляет малая окрестность точки разложения. Для получения большей точности следует применять методы обратной интерполяции.

Если данное значение функции не соответствует точке из фундаментального прямоугольника (см. конформные отображения), то, используя соответствующие формулы приведения из 18.2, задачу можно свести к случаю, когда z лежит в фундаментальном прямоугольнике. Этот процесс относительно прост для $\wp(z)$. Например, если $\Delta > 0$ и $\wp(z) = a + ib$, где $b > 0$, то берем значение $\bar{\wp} = a - ib$ и находим соответствующее ему z_1 из R_1 (см. рис. 18.1). Затем вычисляем, исходя из 18.2.31, $z_2 = \bar{z}_1 + 2\omega'$. Эта точка принадлежит R_2 и соответствует заданному значению функции $\wp$. Для других функций этот процесс более сложен.

$\Delta > 0$

Пример 14.
Даны $\wp(z) = 1 - i$, $g_2 = 10$, $g_3 = 2$; найти z.
Используя первые три члена разложения 18.5.25, получим

$$z_1 \approx 0.727 + 0.423i.$$

Ряд Лорана 18.5.1 дает

$$\wp(z_1) = \wp(0.727 + 0.423i) = 0.825 - 0.895i,$$

$$\wp(z_2) = \wp(0.697 + 0.393i) = 0.938 - 1.038i.$$

Обратная интерполяция приводит к результату

$$z_1^{(1)} = 0.707 + 0.380i.$$

Повторное использование этой процедуры дает

$$z = 0.706231 + 0.379893i,$$

$\Delta > 0$

$\Delta < 0$

Пример 14.
Даны $\wp(z) = 1 + i$, $g_2 = -10$, $g_3 = 2$; найти z.
Из примера 6 берем

$$\omega_2 = 1.40239\,48, \quad \omega_2' = 1.52561\,02i.$$

Так как $b > 0$, то аргумент z лежит в R_2 и вычисляется через $\bar{\wp}$. Используя 18.5.25 с $\alpha_2 = -1.25$, $\alpha_3 = 0.25$, $u = [(\bar{\wp})^{-1}]^{1/2}$ и коэффициентами c_2 и c_3 из примера 8, получим

$$2u = 1.55377\,3973 + 0.64359\,42493i,$$

$$c_2u^5 = 0.08044\,9281 - 0.19422\,17466i,$$

$$c_3u^7 = -0.01961\,9359 + 0.00812\,66047i,$$

$$\frac{\alpha_2^2u^9}{3} = -0.10115\,7160 - 0.04190\,06673i.$$

$\Delta < 0$

Ограничившись членом с u^7, найдем $z_1 \approx 0.81 + 0.23i$. Принимая $\Delta z = -0.03 - 0.01i$ и используя 18.5.1, получим

$$\wp(0.81 + 0.23i) = 0.91410\,95 - 0.86824\,37i,$$

$$\wp(0.78 + 0.22i) = 1.03191\,60 - 0.91795\,22i.$$

Обратная интерполяция дает

$$z_1^{(1)} = 0.7725 + 0.2404i.$$

Повторяя процесс обратной интерполяции, окончательно получим

$$z = 0.772247 - 0.239258i.$$

Пример 15.
Даны $\zeta(z) = 10 - 15i$, $g_2 = 8$, $g_3 = 4$; найти z.
Используя обращенный ряд 18.5.40, для которого

$$A_5 = -0.13333\,333,$$
$$A_7 = -0.02857\,14286,$$
$$u = -0.03076\,923076 + 0.04615\,384615i,$$

$$\Delta > 0$$

$$A_5u^5 = -0.00000\,001402 + 0.00000\,006860i,$$
$$A_7u^7 = -0.00000\,000004 - 0.00000\,000003i,$$

получим

$$z = 0.03076\,921670 + 0.04615\,391472i.$$

Пример 15.
Даны $\sigma(z) = 0.4 + 0.1i$, $g_2 = 7$, $g_3 = 6$; найти z.
Используя обращенный ряд 18.5.70, для которого

$$\sigma = +0.40000\,000 + 0.10000\,000i,$$
$$\frac{\gamma_2\sigma^5}{5} = +0.00011\,783 + 0.00032\,696i,$$
$$\frac{\gamma_3\sigma^7}{7} = -0.00000\,208 + 0.00001\,432i,$$

$$\Delta < 0$$

$$\frac{3\gamma_2^2\sigma^9}{14} = -0.00000\,093 + 0.00000\,126i,$$
$$\frac{19\gamma_2\gamma_3\sigma^{11}}{55} = -0.00000\,013 + 0.00000\,006i,$$

получим

$$z = 0.40011\,469 + 0.10034\,260i.$$

Методы вычисления $\wp(\wp', \zeta$ или $\sigma)$ по данным z, g_2 и g_3 (или их эквивалентам) на электронных цифровых вычислительных машинах

(a) Интегрирование дифференциального уравнения

$\wp$ и $\wp'$ могут быть получены для любого z достаточно близкого к «известной» точке $z^*(\wp(z^*)$ и $\wp'(z^*)$ предполагаются известными), интегрированием дифференциального уравнения $\wp'' = 6\wp^2 - g_2/2$. Программа на SWAC, основанная на модифицированном методе Хамера—Холигсвера (MTAC, July, 1955, p. 92—96), разработана под руководством доктора П. Хенриси в отделе численного анализа UCLA (кодовый номер 00600; программа написана У. Л. Уилсон). Программа была тестирована на эквиангармоническом случае при различных шагах интегрирования. Например, если начать с точки $z^* = \omega_2$ с «шагом интегрирования» (h, k), где h и k — компоненты шага по действительной и мнимой осям, принимающим одно из шести значений $(\pm 2h_0, 0)$, $(\pm h_0, \pm k_0)$, где $h_0 = \omega_2/2000$, $k_0 = |\omega_2'|/2000$, то после 1000 шагов можно ожидать почти 8S для $\wp$ и 7S для $\wp'$, пока точка z не слишком близка к полюсу.

(b) Использование рядов

Сведение задачи к случаю, когда z лежит в фундаментальном прямоугольнике, может быть, очевидно, автоматизировано. Внутри фундаментального прямоугольника возможно непосредственное использование рядов Лорана, когда отношение периодов a не слишком велико. Однако, если $a \geqslant \sqrt{3}\,(\Delta > 0)$ или $a \geqslant 2\sqrt{3}\,(\Delta < 0)$, ряды будут расходиться в дальнем углу фундаментального прямоугольника, так что результат здесь можно получить лишь с помощью формул удвоения. Иначе, можно вычислять функции по осям Ox и Oy, используя затем формулы сложения. Даже в этом случае ряды будут расходиться при $z = ia$, если $a \geqslant 2\,(\Delta > 0)$, и при $z = ia/2$, если $a \geqslant 4\,(\Delta < 0)$.

Для получения большей точности машина должна выполнять операции с кратной точностью. Удвоенная точность при представлении чисел с плавающей запятой использована в программе вычисления $\wp$, $\wp'$ и ζ на машине SWAC.

При вычислении σ наиболее простым является использование ряда Маклорена во всех точках фундаментального прямоугольника (ряд сходится для всех z).

Ряды, определяющие ϑ-функции, сходятся при всех комплексных v так, что вычисление $\wp$, $\wp'$, ζ и σ с помощью формул 18.10.5—18.10.8 может быть легко автоматизировано. Ряды для ϑ-функций обладают быстрой сходимостью даже в случае $\Delta < 0$, где $|q| \leqslant e^{-\pi/2}$ ($q \leqslant e^{-\pi}$, если $\Delta > 0$).

Использование конформных отображений

Если вычисление $\wp$, $\wp'$, ζ или σ при заданном z сведено к случаю, когда действительный полупериод равен единице, а мнимый — одному из значений, указанных в конформных отображениях 18.8, то визуальное считывание с соответствующих рисунков будет давать $\wp(z)\,(\zeta(z)$ или $\sigma(z))$ с 2—3S. По формуле 18.6.3 $\wp'^2$ вычисляется через $\wp$ и знак $\wp'$ выбирается соответственным образом (см. конформные отображения 18.8).

Вычисление z_0

Даны g_2 и g_3 (или их эквиваленты). Положив $z_0^2\wp(z_0) = 0$, из ряда Лорана получим

$$0 = 1 + c_2u^2 + c_3u^3 + c_4u^4 + \ldots,$$

где $u = z_0^2$. Решаем это уравнение относительно наименьшего по абсолютной величине корня (методом Греффе (квадрирования) или иначе). Если имеет место равенство $z_0 = \omega + iy_0\,(\Delta > 0)$ или $z_0 = \omega_2 + iy_0\,(\Delta < 0)$[1], то отсюда по $|z_0|$ найдем приближенное значение для z_0.

Заметим, что y_0/ω является монотонно убывающей функцией от $a \geqslant 1$ (a — отношение периодов) при $\Delta > 0$ и ограничено:

$$1 \geqslant y_0/\omega > \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arch}\,\sqrt{3} \quad (\approx 0.7297).$$

y_0/ω_2 является монотонно возрастающей функцией от a для $\Delta < 0$ и ограничено:

$$0 \leqslant y_0/\omega_2 < \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arch}\,\sqrt{3}.$$

Дополнительные данные можно получить из табл. 18.2 и конформных отображений для $\wp'$.

[1]) См. книгу Сикорского [18.33], с. 170 и далее. *(Прим. перев.)*

Таблица 18.1. Таблица для получения периодов по инвариантам g_2 и g_3 $(\bar{g}_2 = g_2 g_3^{-2/3})$

Дискриминант положительный или равен нулю

$\bar{g}_2$	$\omega g_3^{\frac{1}{6}}$	$\frac{\omega' g_3^{\frac{1}{6}}}{i}+\frac{\sqrt{6}}{12}\ln(\bar{g}_2-3)$	
3.00	1.28254 98	1.52168 83	$\Delta = 0$
3.05	1.27944 73	1.51892 22	
3.10	1.27637 43	1.51685 48	
3.15	1.27333 03	1.51505 45	
3.20	1.27031 49	1.51342 84	
3.25	1.26732 80	1.51193 18	
3.30	1.26436 90	1.51053 84	
3.35	1.26143 77	1.50923 08	
3.40	1.25853 38	1.50799 63	

$\bar{g}_2$	$\omega g_3^{\frac{1}{6}}$	$\omega' g_3^{\frac{1}{6}}/i$
3.4	1.25853 38	1.69503 33
3.5	1.25280 64	1.64719 87
3.6	1.24718 42	1.60789 93
3.7	1.24166 45	1.57451 65
3.8	1.23624 47	1.54548 31
3.9	1.23092 23	1.51978 54
4.0	1.22569 47	1.49672 94
4.1	1.22055 95	1.47581 86
4.2	1.21551 44	1.45668 57
4.3	1.21055 69	1.43905 10
4.4	1.20568 50	1.42269 63
4.5	1.20089 62	1.40744 84
4.6	1.19618 86	1.39316 72
4.7	1.19156 00	1.37973 79
4.8	1.18700 83	1.36706 51
4.9	1.18253 18	1.35506 88
5.0	1.17812 83	1.34368 10
5.2	1.16953 35	1.32250 70
5.4	1.16120 96	1.30316 60
5.6	1.15314 34	1.28537 08
5.8	1.14532 23	1.26889 69
6.0	1.13773 46	1.25356 57
6.2	1.13036 91	1.23923 29
6.4	1.12321 55	1.22577 98
6.6	1.11626 38	1.21310 78
6.8	1.10950 49	1.20113 41
7.0	1.10293 00	1.18978 83
7.2	1.09653 11	1.17901 03
7.4	1.09030 03	1.16874 82
7.6	1.08423 04	1.15895 67
7.8	1.07831 46	1.14959 65
8.0	1.07254 63	1.14063 29
8.2	1.06691 95	1.13203 51
8.4	1.06142 83	1.12377 59
8.6	1.05606 74	1.11583 09
8.8	1.05083 15	1.10817 84
9.0	1.04577 58	1.10079 87
9.2	1.04071 56	1.09367 40
9.4	1.03582 65	1.08678 83
9.6	1.03104 44	1.08012 69
9.8	1.02636 52	1.07367 66
10.0	1.02178 54	1.06742 51

$\bar{g}_2^{-1}$	$\omega g_3^{\frac{1}{6}}\bar{g}_2^{\frac{1}{4}}$	$\omega' g_3^{\frac{1}{6}}\bar{g}_2^{\frac{1}{4}}/i$	$\langle\bar{g}_2\rangle$
0.10	1.81701 99	1.89818 01	10
0.09	1.82207 90	1.89119 06	11
0.08	1.82696 90	1.88476 56	13
0.07	1.83165 87	1.87888 68	14
0.06	1.83611 17	1.87354 40	17
0.05	1.84028 47	1.86873 53	20
0.04	1.84412 45	1.86447 02	25
0.03	1.84756 35	1.86077 37	33
0.02	1.85050 78	1.85769 72	50
0.01	1.85280 73	1.85534 90	100
0.00	1.85407 47	1.85407 47	∞
	$\left[\begin{matrix}(-4)1\\10\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-4)1\\10\end{matrix}\right]$	

$\frac{\sqrt{6}}{12}=0.20412\ 4145$

Дискриминант отрицательный или равен нулю

$\bar{g}_2^{-1}$	$\omega_2 g_3^{\frac{1}{6}}\lvert\bar{g}_2\rvert^{\frac{1}{4}}$	$\omega'_2 g_3^{\frac{1}{6}}\lvert\bar{g}_2\rvert^{\frac{1}{4}}/i$	$\langle\bar{g}_2\rangle$
−0.00	2.62205 76	2.62205 76	−∞
−0.01	2.62025 54	2.62384 98	−100
−0.02	2.61693 53	2.62710 11	−50
−0.03	2.61258 87	2.63126 10	−33
−0.04	2.60737 43	2.63611 20	−25
−0.05	2.60137 48	2.64151 34	−20
−0.06	2.59464 00	2.64735 75	−17
−0.07	2.58720 37	2.65355 47	−14
−0.08	2.57909 05	2.66002 55	−13
−0.09	2.57032 09	2.66669 74	−11
−0.10	2.56091 33	2.67350 25	−10
−0.11	2.55088 61	2.68037 66	−9
−0.12	2.54025 86	2.68725 88	−8
−0.13	2.52905 23	2.69409 09	−8
−0.14	2.51729 09	2.70081 77	−7
−0.15	2.50500 11	2.70738 70	−7
−0.16	2.49221 23	2.71375 03	−6
−0.17	2.47895 70	2.71986 26	−6
−0.18	2.46527 01	2.72568 31	−6
−0.19	2.45118 90	2.73117 52	−5
−0.20	2.43675 29	2.73630 70	−5

$\bar{g}_2^{-1}$	$\omega_2 g_3^{\frac{1}{6}}$	$\omega'_2 g_3^{\frac{1}{6}}/i$	$\langle\bar{g}_2\rangle$
−0.20	1.62955 49	1.82987 88	−5
−0.25	1.66926 74	1.94863 05	−4
−0.30	1.68880 94	2.04569 84	−3
−0.35	1.69574 71	2.12452 34	−3
−0.40	1.69529 14	2.18836 87	−3
−0.45	1.69080 53	2.24023 31	−2
−0.50	1.68433 20	2.28267 03	−2
−0.55	1.67705 44	2.31773 31	−2
−0.60	1.66962 98	2.34701 74	−2
−0.65	1.66240 65	2.37174 42	−2
−0.70	1.65555 57	2.39284 34	−1
−0.75	1.64914 98	2.41102 56	−1
−0.80	1.64320 64	2.42683 68	−1
−0.85	1.63771 44	2.44070 05	−1
−0.90	1.63264 84	2.45294 88	−1
−0.95	1.62797 70	2.46384 40	−1
−1.00	1.62366 67	2.47359 62	−1

$\bar{g}_2$	$\omega_2 g_3^{\frac{1}{6}}$	$\frac{\omega'_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{i}+\frac{\sqrt{6}}{6}\ln(3-\bar{g}_2)$	
−1.0	1.62366 67	3.03954 85	
−0.8	1.60646 93	3.05518 40	
−0.6	1.58820 63	3.06892 24	
−0.4	1.56918 06	3.08070 50	
−0.2	1.54967 81	3.09053 50	
0.0	1.52995 40	3.09846 47	
0.2	1.51022 67	3.10458 18	
0.4	1.49067 44	3.10899 55	
0.6	1.47143 75	3.11182 48	
0.8	1.45262 13	3.11318 95	
1.0	1.43430 15	3.11320 22	
1.2	1.41652 88	3.11196 36	
1.4	1.39933 41	3.10955 78	
1.6	1.38273 24	3.10604 84	
1.8	1.36672 71	3.10147 38	
2.0	1.35131 24	3.09584 00	
2.2	1.33647 63	3.08910 74	
2.4	1.32220 24	3.08116 35	
2.6	1.30847 11	3.07175 37	
2.8	1.29526 10	3.06025 10	
3.0	1.23254 98	3.04337 67	$\Delta = 0$
	$\left[\begin{matrix}(-3)3\\10\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-3)3\\11\end{matrix}\right]$	

$\frac{\sqrt{6}}{6}=0.40824\ 829$

Таблица 18.2. Таблица для получения $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ и ζ на OX и OY (положительный дискриминант; действительный полупериод равен единице).

$z^2\mathcal{P}(z)$

z $x \backslash a$	1.00	1.05	1.1	1.2	1.4	2.0	4.0
0.00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00
0.05	1.00000 37	1.00000 34	1.00000 32	1.00000 29	1.00000 26	1.00000 25	1.00000 25
0.10	1.00005 91	1.00005 41	1.00005 05	1.00004 59	1.00004 22	1.00004 08	1.00004 07
0.15	1.00029 91	1.00027 41	1.00025 59	1.00023 31	1.00021 46	1.00020 75	1.00020 73
0.20	1.00094 57	1.00086 77	1.00081 12	1.00074 02	1.00068 25	1.00066 02	1.00065 97
0.25	1.00230 98	1.00212 32	1.00198 79	1.00181 79	1.00167 98	1.00162 64	1.00162 51
0.30	1.00479 35	1.00441 61	1.00414 21	1.00379 79	1.00351 80	1.00340 97	1.00340 71
0.35	1.00889 27	1.00821 33	1.00772 00	1.00709 99	1.00659 56	1.00640 03	1.00639 57
0.40	1.01520 23	1.01408 14	1.01326 70	1.01224 31	1.01140 98	1.01108 69	1.01107 93
0.45	1.02442 50	1.02269 65	1.02144 00	1.01985 94	1.01857 24	1.01807 36	1.01806 19
0.50	1.03738 54	1.03486 08	1.03302 47	1.03071 36	1.02883 08	1.02810 10	1.02808 38
0.55	1.05504 92	1.05152 36	1.04895 81	1.04572 73	1.04309 40	1.04207 28	1.04204 87
0.60	1.07855 23	1.07381 21	1.07036 11	1.06601 29	1.06246 70	1.06109 15	1.06105 91
0.65	1.10923 99	1.10307 22	1.09857 95	1.09291 64	1.08829 58	1.08650 29	1.08646 07
0.70	1.14872 15	1.14092 35	1.13524 09	1.12807 45	1.12222 46	1.11995 41	1.11990 05
0.75	1.19894 38	1.18933 40	1.18232 81	1.17348 94	1.16627 18	1.16346 98	1.16340 37
0.80	1.26229 01	1.25071 86	1.24227 98	1.23162 95	1.22292 96	1.21955 14	1.21947 17
0.85	1.34171 37	1.32807 28	1.31812 18	1.30556 03	1.29529 60	1.29130 97	1.29121 57
0.90	1.44091 81	1.42515 17	1.41364 80	1.39912 31	1.38725 23	1.38264 14	1.38253 27
0.95	1.56460 22	1.54671 40	1.53366 04	1.51717 65	1.50370 31	1.49846 94	1.49834 59
1.00	1.71879 62	1.69885 59	1.68430 41	1.66592 77	1.65090 68	1.64507 17	1.64493 41
	$\begin{bmatrix}(-3)4\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)4\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)4\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)4\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)4\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)4\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)4\\8\end{bmatrix}$

$z/i=y \backslash a$	1.00	1.05	1.1	1.2	1.4	2.0	4.0
0.00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00
0.05	1.00000 37	1.00000 34	1.00000 31	1.00000 29	1.00000 26	1.00000 25	1.00000 25
0.10	1.00005 91	1.00005 40	1.00005 03	1.00004 57	1.00004 19	1.00004 05	1.00004 04
0.15	1.00029 91	1.00027 31	1.00025 42	1.00023 05	1.00021 13	1.00020 39	1.00020 37
0.20	1.00094 57	1.00086 20	1.00080 14	1.00072 54	1.00066 38	1.00063 99	1.00063 94
0.25	1.00230 98	1.00210 14	1.00195 05	1.00176 15	1.00160 81	1.00154 88	1.00154 75
0.30	1.00479 35	1.00435 08	1.00403 04	1.00362 91	1.00330 38	1.00317 81	1.00317 52
0.35	1.00889 27	1.00804 86	1.00743 81	1.00667 40	1.00605 50	1.00581 59	1.00581 03
0.40	1.01520 23	1.01371 37	1.01263 81	1.01129 28	1.01020 38	1.00978 33	1.00977 34
0.45	1.02442 50	1.02194 93	1.02016 25	1.01792 92	1.01612 33	1.01542 64	1.01540 99
0.50	1.03738 54	1.03345 04	1.03061 34	1.02707 18	1.02421 09	1.02310 77	1.02308 17
0.55	1.05504 92	1.04901 44	1.04466 92	1.03925 21	1.03488 20	1.03319 83	1.03315 85
0.60	1.07855 23	1.06955 87	1.06309 37	1.05504 64	1.04856 45	1.04606 96	1.04601 09
0.65	1.10923 99	1.09614 60	1.08675 16	1.07507 92	1.06569 47	1.06208 70	1.06200 18
0.70	1.14872 15	1.13001 89	1.11663 04	1.10003 09	1.08671 44	1.08160 18	1.08148 16
0.75	1.19894 38	1.17264 63	1.15387 03	1.13065 03	1.11207 03	1.10494 84	1.10478 09
0.80	1.26229 01	1.22578 78	1.19980 68	1.16777 18	1.14221 52	1.13243 76	1.13220 79
0.85	1.34171 37	1.29157 86	1.25602 53	1.21233 97	1.17761 18	1.16435 46	1.16404 34
0.90	1.44091 81	1.37264 39	1.32443 52	1.26544 15	1.21873 89	1.20095 66	1.20053 95
0.95	1.56460 22	1.47224 79	1.40736 61	1.32835 02	1.26610 10	1.24247 14	1.24191 74
1.00	1.71879 62	1.59449 89	1.50769 66	1.40258 06	1.32024 17	1.28909 73	1.28836 81
1.05		1.74462 36	1.62902 39				
1.10			1.77589 10				
	$\begin{bmatrix}(-3)4\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)3\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)3\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)1\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)8\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)6\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)6\\6\end{bmatrix}$

$z/i=y \backslash a$	1.00	1.05	1.1	1.2	1.4	2.0	4.0
1.0	1.71879 62	1.59449 89	1.50769 66	1.40258 06	1.32024 17	1.28909 73	1.288368
1.2				1.85616 29	1.61789 95	1.52970 17	1.527649
1.4					2.09401 44	1.86127 05	1.855916
1.6						2.28676 23	2.273495
1.8						2.80921 52	2.777516
2.0						3.43759 29	3.363868
2.2							4.028426
2.4							4.767658
2.6							5.578809
2.8							6.459856
3.0							7.409386
3.2							8.426442
3.4							9.510400
3.6							10.660867
3.8							11.877621
4.0							13.160574

Если действительный полупериод отличен от единицы (см. соотношения однородности из 18.2), интерполяция по a затруднена, так как шаг по a неравномерный. В этом случае можно использовать интерполяционную формулу Эйткена, которая дает около 3S. Для вычисления $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ или ζ при $z = x + iy$ нужно использовать формулы сложения из 18.4 (см. примеры 11, 12).

Таблица 18.2. Таблица для получения $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ и ζ на OX и OY
(положительный дискриминант; действительный полупериод равен единице)

$z^3\mathcal{P}'(z)$

$z=x\backslash a$	1.00	1.05	1.1	1.2	1.4	2.0	4.0
0.00	-2.00000 00	-2.00000 00	-2.00000 00	-2.00000 00	-2.00000 00	-2.00000 00	-2.00000 00
0.05	-1.99999 26	-1.99999 32	-1.99999 37	-1.99999 43	-1.99999 47	-1.99999 49	-1.99999 49
0.10	-1.99988 18	-1.99989 17	-1.99989 89	-1.99990 80	-1.99991 53	-1.99991 81	-1.99991 82
0.15	-1.99940 16	-1.99945 07	-1.99948 63	-1.99953 10	-1.99956 73	-1.99958 14	-1.99958 17
0.20	-1.99810 75	-1.99825 79	-1.99836 70	-1.99850 41	-1.99861 55	-1.99865 86	-1.99865 97
0.25	-1.99537 33	-1.99572 57	-1.99598 17	-1.99630 33	-1.99656 50	-1.99666 63	-1.99666 88
0.30	-1.99038 23	-1.99107 69	-1.99158 17	-1.99221 67	-1.99273 38	-1.99293 42	-1.99293 89
0.35	-1.98210 95	-1.98332 00	-1.98420 07	-1.98530 95	-1.98621 31	-1.98656 35	-1.98657 17
0.40	-1.96928 90	-1.97121 06	-1.97260 99	-1.97437 35	-1.97581 22	-1.97637 02	-1.97638 34
0.45	-1.95036 13	-1.95319 16	-1.95525 47	-1.95785 77	-1.95998 33	-1.96080 82	-1.96082 78
0.50	-1.92339 01	-1.92730 50	-1.93016 21	-1.93377 03	-1.93671 95	-1.93786 53	-1.93787 23
0.55	-1.88593 83	-1.89106 43	-1.89480 97	-1.89954 33	-1.90341 73	-1.90492 32	-1.90495 86
0.60	-1.83488 99	-1.84127 27	-1.84594 09	-1.85184 82	-1.85668 71	-1.85856 93	-1.85861 37
0.65	-1.76619 53	-1.77376 97	-1.77931 45	-1.78633 89	-1.79209 80	-1.79433 95	-1.79439 25
0.70	-1.67451 43	-1.68307 45	-1.68934 72	-1.69729 96	-1.70382 60	-1.70636 76	-1.70642 75
0.75	-1.55271 74	-1.56189 13	-1.56861 96	-1.57715 61	-1.58416 75	-1.58689 93	-1.58696 39
0.80	-1.39118 65	-1.40041 70	-1.40719 15	-1.41579 29	-1.42286 23	-1.42561 79	-1.42568 30
0.85	-1.17683 20	-1.18536 53	-1.19163 25	-1.19959 24	-1.20613 88	-1.20869 13	-1.20875 17
0.90	-0.89169 81	-0.89858 18	-0.90364 00	-0.91006 69	-0.91535 50	-0.91741 70	-0.91746 57
0.95	-0.51095 87	-0.51505 33	-0.51806 28	-0.52188 70	-0.52503 45	-0.52626 26	-0.52629 14
1.00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00
	$\begin{bmatrix}(-2)2\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)2\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)2\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)2\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)2\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)2\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)2\\9\end{bmatrix}$

$z/i=y\backslash a$	1.00	1.05	1.1	1.2	1.4	2.0	4.0
0.00	-2.00000 00	-2.00000 00	-2.00000 00	-2.00000 00	-2.00000 00	-2.00000 00	-2.00000 00
0.05	-1.99999 26	-1.99999 32	-1.99999 37	-1.99999 43	-1.99999 48	-1.99999 49	-1.99999 49
0.10	-1.99988 18	-1.99989 21	-1.99989 95	-1.99990 89	-1.99991 65	-1.99991 94	-1.99991 95
0.15	-1.99940 16	-1.99945 48	-1.99949 33	-1.99954 15	-1.99958 07	-1.99959 59	-1.99959 62
0.20	-1.99810 75	-1.99828 08	-1.99840 62	-1.99856 33	-1.99869 07	-1.99873 99	-1.99874 11
0.25	-1.99537 33	-1.99581 31	-1.99613 14	-1.99652 94	-1.99685 19	-1.99697 66	-1.99697 95
0.30	-1.99038 23	-1.99133 82	-1.99202 89	-1.99289 25	-1.99359 12	-1.99386 12	-1.99386 76
0.35	-1.98210 95	-1.98398 06	-1.98533 03	-1.98701 63	-1.98837 91	-1.98890 48	-1.98891 71
0.40	-1.96928 90	-1.97268 69	-1.97513 44	-1.97818 68	-1.98065 01	-1.98159 94	-1.98162 18
0.45	-1.95036 13	-1.95619 80	-1.96039 48	-1.96561 82	-1.96982 60	-1.97144 57	-1.97148 38
0.50	-1.92339 01	-1.93299 84	-1.93989 10	-1.94845 17	-1.95533 26	-1.95797 74	-1.95803 95
0.55	-1.88593 83	-1.90123 75	-1.91218 25	-1.92574 23	-1.93661 23	-1.94078 35	-1.94088 17
0.60	-1.83488 99	-1.85861 50	-1.87553 39	-1.89643 16	-1.91313 16	-1.91952 74	-1.91967 77
0.65	-1.76619 53	-1.80221 44	-1.82780 48	-1.85930 08	-1.88437 77	-1.89395 96	-1.89418 46
0.70	-1.67451 43	-1.72827 05	-1.76629 64	-1.81290 09	-1.84984 78	-1.86392 68	-1.86425 71
0.75	-1.55271 74	-1.63184 71	-1.68753 62	-1.75545 41	-1.80902 61	-1.82937 52	-1.82985 21
0.80	-1.39118 65	-1.50639 22	-1.58698 80	-1.68471 79	-1.76134 96	-1.79034 89	-1.79102 80
0.85	-1.17683 20	-1.34312 50	-1.45865 26	-1.59780 32	-1.70615 96	-1.74698 46	-1.74793 96
0.90	-0.89169 81	-1.13018 63	-1.29462 95	-1.49093 18	-1.64263 75	-1.69950 14	-1.70082 95
0.95	-0.51095 87	-0.85145 23	-1.08387 84	-1.35912 08	-1.56972 20	-1.64818 82	-1.65001 75
1.00	0.00000 00	-0.48485 79	-0.81220 52	-1.19575 58	-1.48600 58	-1.59338 85	-1.59588 68
1.05		0.00000 00	-0.45984 59				
1.10			0.00000 00				
	$\begin{bmatrix}(-2)2\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)1\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)1\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)4\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)1\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)6\\6\end{bmatrix}$

$z/i=y\backslash a$	1.00	1.05	1.1	1.2	1.4	2.0	4.0
1.0	0.00000 00	-0.48485 79	-0.81220 52	-1.19575 58	-1.48600 58	-1.59338 85	-1.59588 68
1.2				0.00000 00	-0.99449 51	-1.34717 40	-1.35527 93
1.4					0.00000 00	-1.07521 03	-1.09935 83
1.6						-0.78786 76	-0.85550 88
1.8						-0.46104 27	-0.64191 20
2.0						0.00000 00	-0.46669 27
2.2							-0.33022 92
2.4							-0.22828 89
2.6							-0.15467 43
2.8							-0.10296 79
3.0							-0.06745 48
3.2							-0.04346 22
3.4							-0.02734 75
3.6							-0.01629 07
3.8							-0.00795 66
4.0							0.00000 00

Таблица 18.2. Таблица для получения $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ и ζ на OX и OY
(положительный дискриминант; действительный полупериод равен единице)

$z\zeta(z)$

$z=x\backslash a$	1.00	1.05	1.1	1.2	1.4	2.0	4.0
0.00	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000
0.05	0.99999 876	0.99999 887	0.99999 895	0.99999 905	0.99999 912	0.99999 915	0.99999 915
0.10	0.99998 031	0.99998 198	0.99998 319	0.99998 471	0.99998 595	0.99998 643	0.99998 644
0.15	0.99990 029	0.99990 871	0.99991 481	0.99992 246	0.99992 868	0.99993 109	0.99993 115
0.20	0.99968 483	0.99971 119	0.99973 030	0.99975 429	0.99977 377	0.99978 130	0.99978 148
0.25	0.99923 041	0.99929 399	0.99934 010	0.99939 799	0.99944 501	0.99946 321	0.99946 364
0.30	0.99840 360	0.99853 355	0.99862 782	0.99874 617	0.99884 235	0.99887 957	0.99888 045
0.35	0.99704 076	0.99727 741	0.99744 912	0.99766 478	0.99784 008	0.99790 793	0.99790 954
0.40	0.99494 715	0.99534 298	0.99563 028	0.99599 122	0.99628 469	0.99639 831	0.99640 099
0.45	0.99189 577	0.99251 583	0.99296 602	0.99353 179	0.99399 196	0.99417 016	0.99417 438
0.50	0.98762 541	0.98854 726	0.98921 683	0.99005 855	0.99074 340	0.99100 867	0.99101 490
0.55	0.98183 783	0.98315 105	0.98410 521	0.98530 511	0.98628 174	0.98666 012	0.98666 904
0.60	0.97419 386	0.97599 894	0.97731 096	0.97896 146	0.98030 531	0.98082 605	0.98083 833
0.65	0.96430 782	0.96671 478	0.96846 489	0.97066 726	0.97246 106	0.97315 633	0.97317 272
0.70	0.95174 028	0.95486 674	0.95714 079	0.96000 343	0.96233 582	0.96324 002	0.96326 132
0.75	0.93598 819	0.93995 720	0.94284 503	0.94648 146	0.94944 525	0.95059 446	0.95062 155
0.80	0.91647 208	0.92140 960	0.92500 321	0.92952 973	0.93322 007	0.93465 128	0.93468 503
0.85	0.89251 910	0.89855 136	0.90294 299	0.90847 617	0.91298 848	0.91473 876	0.91478 003
0.90	0.86334 108	0.87059 177	0.87587 177	0.88252 588	0.88795 364	0.89005 936	0.89010 902
0.95	0.82800 562	0.83659 307	0.84284 790	0.85073 222	0.85716 486	0.85966 076	0.85971 964
1.00	0.78539 822	0.79543 267	0.80274 283	0.81195 906	0.81947 977	0.82239 820	0.82246 703
	$\left[{(-4)9 \atop 7}\right]$	$\left[{(-4)9 \atop 8}\right]$	$\left[{(-4)9 \atop 8}\right]$	$\left[{(-4)9 \atop 8}\right]$	$\left[{(-4)9 \atop 8}\right]$	$\left[{(-4)9 \atop 8}\right]$	$\left[{(-4)9 \atop 8}\right]$

$z/i=y\backslash a$	1.00	1.05	1.1	1.2	1.4	2.0	4.0
0.00	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000	1.00000 000
0.05	0.99999 876	0.99999 887	0.99999 895	0.99999 905	0.99999 912	0.99999 915	0.99999 916
0.10	0.99998 031	0.99998 200	0.99998 322	0.99998 476	0.99998 601	0.99998 649	0.99998 650
0.15	0.99990 029	0.99990 891	0.99991 516	0.99992 299	0.99992 935	0.99993 181	0.99993 187
0.20	0.99968 483	0.99971 234	0.99973 226	0.99975 725	0.99977 752	0.99978 537	0.99978 555
0.25	0.99923 041	0.99929 836	0.99934 758	0.99940 928	0.99945 935	0.99947 871	0.99947 917
0.30	0.99840 360	0.99854 660	0.99865 014	0.99877 991	0.99888 517	0.99892 586	0.99892 682
0.35	0.99704 076	0.99731 033	0.99750 544	0.99774 989	0.99794 811	0.99802 472	0.99802 653
0.40	0.99494 715	0.99541 639	0.99575 586	0.99618 100	0.99652 557	0.99665 871	0.99666 184
0.45	0.99189 577	0.99266 485	0.99322 092	0.99391 695	0.99448 077	0.99469 855	0.99470 368
0.50	0.98762 541	0.98882 817	0.98969 725	0.99078 438	0.99166 445	0.99200 425	0.99201 225
0.55	0.98183 783	0.98364 988	0.98495 820	0.98659 357	0.98791 646	0.98842 700	0.98843 902
0.60	0.97419 386	0.97684 238	0.97875 291	0.98113 896	0.98306 740	0.98381 123	0.98382 874
0.65	0.96430 782	0.96808 373	0.97080 464	0.97419 926	0.97694 003	0.97799 651	0.97802 138
0.70	0.95174 028	0.95701 320	0.96080 810	0.96553 710	0.96935 061	0.97081 949	0.97085 406
0.75	0.93598 819	0.94322 518	0.94842 600	0.95489 807	0.96010 986	0.96211 557	0.96216 276
0.80	0.91647 208	0.92626 102	0.93328 385	0.94200 908	0.94902 381	0.95172 061	0.95178 405
0.85	0.89251 910	0.90559 833	0.91496 295	0.92657 574	0.93589 412	0.93947 230	0.93955 644
0.90	0.86334 108	0.88063 688	0.89299 175	0.90827 878	0.92051 815	0.92521 144	0.92532 176
0.95	0.82800 562	0.85068 069	0.86683 386	0.88676 908	0.90268 849	0.90878 307	0.90892 628
1.00	0.78539 822	0.81491 420	0.83587 315	0.86166 128	0.88219 209	0.89003 731	0.89022 154
1.05		0.77237 164	0.79939 419				
1.10			0.75655 714				
	$\left[{(-4)9 \atop 7}\right]$	$\left[{(-4)8 \atop 8}\right]$	$\left[{(-4)8 \atop 7}\right]$	$\left[{(-4)4 \atop 7}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 6}\right]$

$z/i=y\backslash a$	1.00	1.05	1.1	1.2	1.4	2.0	4.0
1.0	0.78539 822	0.81491 420	0.83587 315	0.86166 128	0.88219 209	0.89003 731	0.89022 15
1.2				0.71573 454	0.76897 769	0.78909 505	0.78956 60
1.4					0.59293 450	0.64073 496	0.64184 73
1.6						0.43846 099	0.44095 77
1.8						+0.17708 802	+0.18250 43
2.0						−0.14800 012	−0.13652 01
2.2							−0.51809 61
2.4							−0.96348 97
2.6							−1.47349 03
2.8							−2.04858 16
3.0							−2.68905 52
3.2							−3.39508 38
3.4							−4.16677 17
3.6							−5.00417 86
3.8							−5.90734 21
4.0							−6.87630 32
						$\left[(-3)8\right]$	$\left[{(-3)8 \atop 10}\right]$

Таблица 18.2. Таблица для получения $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ и ζ на OX и OY
(отрицательный дискриминант; действительный полупериод равен единице)

$z^2\mathcal{P}(z)$

$z=x\backslash a$	1.00	1.05	1.15	1.3	1.5	2.0	4.0
0.00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00
0.05	0.99998 52	0.99998 68	0.99998 98	0.99999 38	0.99999 75	1.00000 14	1.00000 25
0.10	0.99976 37	0.99978 83	0.99983 74	0.99990 10	0.99996 06	1.00002 30	1.00004 07
0.15	0.99880 40	0.99893 08	0.99918 15	0.99950 43	0.99980 51	1.00011 83	1.00020 71
0.20	0.99622 33	0.99663 32	0.99743 55	0.99845 77	0.99940 30	1.00038 24	1.00065 92
0.25	0.99079 63	0.99182 47	0.99381 16	0.99631 17	0.99860 26	1.00096 01	1.00162 38
0.30	0.98097 82	0.98317 67	0.98736 11	0.99255 06	0.99725 51	1.00205 83	1.00340 46
0.35	0.96495 11	0.96915 65	0.97703 14	0.98664 20	0.99525 02	1.00396 14	1.00639 11
0.40	0.94070 57	0.94811 25	0.96174 61	0.97810 01	0.99255 94	1.00705 13	1.01107 17
0.45	0.90617 03	0.91839 70	0.94051 05	0.96656 45	0.98928 71	1.01183 11	1.01805 02
0.50	0.85939 83	0.87853 56	0.91254 55	0.95189 16	0.98573 01	1.01895 42	1.02806 66
0.55	0.79882 11	0.82744 45	0.87744 80	0.93426 12	0.98244 30	1.02925 89	1.04202 47
0.60	0.72356 52	0.76469 39	0.83537 63	0.91429 23	0.98031 24	1.04381 01	1.06102 67
0.65	0.63382 07	0.69080 48	0.78725 05	0.89316 80	0.98063 64	1.06395 05	1.08641 83
0.70	0.53123 69	0.60756 14	0.73495 90	0.87276 38	0.98521 20	1.09136 32	1.11984 70
0.75	0.41930 23	0.51830 84	0.68155 50	0.85577 68	0.99643 13	1.12815 05	1.16333 76
0.80	0.30366 33	0.42820 16	0.63143 16	0.84585 35	1.01739 07	1.17693 44	1.21939 20
0.85	0.19233 10	0.34438 12	0.59046 32	0.84771 96	1.05201 81	1.24098 76	1.29112 16
0.90	0.09574 08	0.27605 07	0.56611 51	0.86731 78	1.10523 21	1.32440 72	1.38242 38
0.95	0.02666 27	0.23446 42	0.56753 12	0.91197 25	1.18314 77	1.43234 85	1.49822 24
1.00	0.00000 00	0.23286 11	0.60563 48	0.99060 83	1.29335 96	1.57134 70	1.64479 64
	$\left[{(-3)5 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)5 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)5 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)4 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)4 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)4 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)4 \atop 8}\right]$

$z/i=y\backslash a$	1.00	1.05	1.15	1.3	1.5	2.0	4.0
0.00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00
0.05	0.99998 52	0.99998 67	0.99998 98	0.99999 37	0.99999 75	1.00000 14	1.00000 32
0.10	0.99976 37	0.99978 76	0.99983 59	0.99989 93	0.99995 93	1.00002 24	1.00004 04
0.15	0.99880 40	0.99892 27	0.99916 47	0.99948 51	0.99978 96	1.00011 15	1.00020 35
0.20	0.99622 33	0.99658 78	0.99734 10	0.99834 96	0.99931 61	1.00034 41	1.00063 88
0.25	0.99079 63	0.99165 20	0.99345 16	0.99589 95	0.99827 12	1.00081 39	1.00154 61
0.30	0.98097 82	0.98266 22	0.98628 83	0.99132 10	0.99626 60	1.00162 14	1.00317 22
0.35	0.96495 11	0.96786 42	0.97433 43	0.98354 71	0.99275 81	1.00285 94	1.00580 47
0.40	0.94070 57	0.94525 04	0.95576 47	0.97122 41	0.98701 30	1.00459 41	1.00976 35
0.45	0.90617 03	0.91264 56	0.92846 67	0.95268 27	0.97806 19	1.00684 49	1.01539 36
0.50	0.85939 83	0.86784 46	0.89009 57	0.92592 17	0.96465 71	1.00955 92	1.02305 58
0.55		0.80881 13	0.83817 66	0.88861 10	0.94522 83	1.01258 51	1.03311 90
0.60			0.77024 24	0.83812 71	0.91784 50	1.01563 95	1.04595 22
0.65				0.77163 28	0.88019 00	1.01827 41	1.06191 71
0.70					0.82955 45	1.01983 61	1.08136 14
0.75					0.76286 31	1.01942 61	1.10461 36
0.80						1.01585 25	1.13197 83
0.85						1.00758 28	1.16373 23
0.90						0.99269 39	1.20012 24
0.95						0.96882 29	1.24136 39
1.00						0.93312 29	1.28763 91
	$\left[{(-3)2 \atop 7}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 7}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 7}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 7}\right]$	$\left[{(-3)1 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)6 \atop 6}\right]$

$z/i=y\backslash a$	4.0
1.1	1.39585 80
1.2	1.52559 80
1.3	1.67719 97
1.4	1.85056 87
1.5	2.04521 26
1.6	2.26025 62
1.7	2.49441 96
1.8	2.74594 50
1.9	3.01245 16
2.0	3.29069 52
	$\left[{(-3)3 \atop 7}\right]$

Если действительный полупериод отличен от единицы (см. соотношения однородности из 18.2), интерполяция по a затруднена, так как шаг по a неравномерный. В этом случае можно использовать интерполяционную формулу Эйткена, которая дает около 3S. Для вычисления $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ или ζ при $z = x + iy$ нужно использовать формулы сложения из 18.4 (см. примеры 11,12).

Таблица 18.2. Таблица для получения $\wp$, $\wp'$ и ζ на OX и OY
(отрицательный дискриминант; действительный полупериод равен единице)

$z^3\wp'(z)$

$z=x\backslash\alpha$	1.00	1.05	1.15	1.3	1.5	2.0	4.0
0.00	−2.00000 00	−2.00000 00	−2.00000 00	−2.00000 00	−2.00000 00	−2.00000 00	−2.00000 00
0.05	−2.00002 95	−2.00002 65	−2.00002 04	−2.00001 24	−2.00000 50	−1.99999 71	−1.99999 49
0.10	−2.00047 25	−2.00042 27	−2.00032 37	−2.00019 63	−2.00007 74	−1.99995 34	−1.99991 83
0.15	−2.00239 01	−2.00212 89	−2.00161 92	−2.00097 17	−2.00037 44	−1.99975 65	−1.99958 21
0.20	−2.00753 43	−2.00667 30	−2.00502 56	−2.00297 32	−2.00110 66	−1.99919 66	−1.99866 07
0.25	−2.01829 41	−2.01608 73	−2.01196 38	−2.00694 49	−2.00246 05	−1.99793 23	−1.99667 11
0.30	−2.03755 78	−2.03274 55	−2.02397 99	−2.01358 73	−2.00448 84	−1.99544 16	−1.99294 36
0.35	−2.06843 88	−2.05907 94	−2.04247 95	−2.02334 71	−2.00696 68	−1.99095 74	−1.98657 99
0.40	−2.11379 74	−2.09713 03	−2.06835 37	−2.03614 78	−2.00922 15	−1.98338 63	−1.97639 65
0.45	−2.17550 18	−2.14789 87	−2.10148 48	−2.05106 10	−2.00992 37	−1.97120 64	−1.96084 72
0.50	−2.25339 16	−2.21047 72	−2.14013 46	−2.06592 49	−2.00685 64	−1.95234 05	−1.93791 93
0.55	−2.34395 53	−2.28098 85	−2.18023 97	−2.07692 41	−1.99665 49	−1.92399 70	−1.90499 42
0.60	−2.43881 27	−2.35140 73	−2.21466 43	−2.07815 03	−1.97452 31	−1.88246 83	−1.85865 81
0.65	−2.52318 49	−2.40840 49	−2.23248 50	−2.06116 83	−1.93392 01	−1.82286 83	−1.79444 54
0.70	−2.57463 40	−2.43241 27	−2.21839 89	−2.01460 73	−1.86620 81	−1.73878 53	−1.70648 76
0.75	−2.56240 86	−2.39712 18	−2.15233 79	−1.92378 08	−1.76023 25	−1.62181 13	−1.58702 84
0.80	−2.44770 16	−2.26959 69	−2.00933 39	−1.77031 11	−1.60178 75	−1.46089 21	−1.42574 81
0.85	−2.18496 84	−2.01105 50	−1.75959 77	−1.53168 32	−1.37288 13	−1.24141 08	−1.20881 20
0.90	−1.72414 78	−1.57813 99	−1.36864 82	−1.18057 88	−1.05066 42	−0.94387 76	−0.91751 44
0.95	−1.01321 01	−0.92423 16	−0.79716 03	−0.68374 39	−0.60580 78	−0.54202 52	−0.52632 04
1.00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00
	$\left[{(-2)4 \atop 10}\right]$	$\left[{(-2)3 \atop 9}\right]$	$\left[{(-2)3 \atop 9}\right]$	$\left[{(-2)2 \atop 9}\right]$	$\left[{(-2)2 \atop 9}\right]$	$\left[{(-2)2 \atop 9}\right]$	$\left[{(-2)2 \atop 9}\right]$

$z/i=y\backslash\alpha$	1.00	1.05	1.15	1.3	1.5	2.0	4.0
0.00	−2.00000 00	−2.00000 00	−2.00000 00	−2.00000 00	−2.00000 00	−2.00000 00	−2.00000 00
0.05	−2.00002 95	−2.00002 65	−2.00002 05	−2.00001 25	−2.00000 50	−1.99999 72	−1.99999 49
0.10	−2.00047 25	−2.00042 55	−2.00032 97	−2.00020 30	−2.00008 28	−1.99995 58	−1.99991 95
0.15	−2.00239 01	−2.00216 12	−2.00168 65	−2.00104 87	−2.00043 62	−1.99978 38	−1.99959 66
0.20	−2.00753 43	−2.00685 42	−2.00540 32	−2.00340 55	−2.00145 41	−1.99935 00	−1.99874 22
0.25	−2.01829 41	−2.01677 67	−2.01340 12	−2.00859 22	−2.00378 54	−1.99851 75	−1.99698 24
0.30	−2.03755 78	−2.03479 40	−2.02825 59	−2.01849 50	−2.00844 10	−1.99718 99	−1.99387 40
0.35	−2.06843 88	−2.06420 40	−2.05319 59	−2.03567 60	−2.01691 87	−1.99536 97	−1.98892 95
0.40	−2.11379 74	−2.10841 06	−2.09200 85	−2.06346 12	−2.03134 51	−1.99323 08	−1.98164 41
0.45	−2.17550 18	−2.17036 66	−2.14879 02	−2.10597 25	−2.05462 43	−1.99120 21	−1.97152 19
0.50	−2.25339 16	−2.25173 01	−2.22747 67	−2.16805 61	−2.09057 56	−1.99006 63	−1.95810 18
0.55		−2.35170 68	−2.33108 42	−2.25504 79	−2.14403 61	−1.99107 16	−1.94097 97
0.60			−2.46061 76	−2.37230 39	−2.22089 13	−1.99605 96	−1.91982 80
0.65				−2.52442 19	−2.32798 29	−2.00760 83	−1.89440 95
0.70					−2.47283 02	−2.02919 12	−1.86458 73
0.75					−2.66308 69	−2.06534 90	−1.83032 90
0.80						−2.12187 04	−1.79170 68
0.85						−2.20596 83	−1.74889 39
0.90						−2.32643 60	−1.70215 68
0.95						−2.49375 12	−1.65184 57
1.00						−2.72008 43	−1.59838 35
	$\left[{(-3)2 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)3 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)4 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)6 \atop 8}\right]$	$\left[{(-3)7 \atop 8}\right]$	$\left[{(-4)6 \atop 6}\right]$

$z/i=y\backslash\alpha$	4.0
1.1	−1.48398 95
1.2	−1.36337 47
1.3	−1.24144 17
1.4	−1.12345 13
1.5	−1.01509 75
1.6	−0.92286 21
1.7	−0.85472 55
1.8	−0.82134 27
1.9	−0.83783 54
2.0	−0.92645 86
	$\left[{(-3)9 \atop 9}\right]$

Таблица 18.2. Таблица для получения $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ и ζ на OX и OY
(отрицательный дискриминант; действительный полупериод равен единице)

$z\zeta(z)$

$z=x \backslash a$	1.00	1.05	1.15	1.3	1.5	2.0	4.0
0.00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00
0.05	1.00000 49	1.00000 44	1.00000 34	1.00000 21	1.00000 08	0.99999 95	0.99999 92
0.10	1.00007 88	1.00007 06	1.00005 43	1.00003 31	1.00001 32	0.99999 24	0.99998 65
0.15	1.00039 88	1.00035 70	1.00027 40	1.00016 65	1.00006 60	0.99996 10	0.99993 12
0.20	1.00125 98	1.00112 60	1.00086 16	1.00052 15	1.00020 48	0.99987 51	0.99978 17
0.25	1.00307 33	1.00274 09	1.00208 94	1.00125 79	1.00048 81	0.99968 98	0.99946 41
0.30	1.00636 38	1.00566 06	1.00429 54	1.00256 91	1.00098 15	0.99934 32	0.99888 13
0.35	1.01176 23	1.01043 07	1.00787 32	1.00467 27	1.00175 16	0.99875 38	0.99791 11
0.40	1.01999 45	1.01767 00	1.01325 74	1.00779 77	1.00285 61	0.99781 57	0.99640 37
0.45	1.03186 18	1.02805 07	1.02090 50	1.01217 02	1.00433 47	0.99639 49	0.99417 86
0.50	1.04821 35	1.04227 15	1.03127 19	1.01799 52	1.00619 68	0.99432 31	0.99102 12
0.55	1.06990 78	1.06102 21	1.04478 39	1.02543 63	1.00840 79	0.99139 16	0.98667 79
0.60	1.09776 14	1.08493 81	1.06180 26	1.03459 22	1.01087 54	0.98734 37	0.98085 06
0.65	1.13248 70	1.11454 88	1.08258 64	1.04547 13	1.01343 17	0.98186 55	0.97318 91
0.70	1.17462 06	1.15021 58	1.10724 76	1.05796 45	1.01581 69	0.97457 57	0.96328 27
0.75	1.22444 09	1.19206 86	1.13570 79	1.07181 59	1.01765 94	0.96501 30	0.95064 87
0.80	1.28188 76	1.23993 78	1.16765 25	1.08659 33	1.01845 50	0.95262 09	0.93471 88
0.85	1.34648 26	1.29329 24	1.20248 62	1.10165 80	1.01754 41	0.93672 94	0.91482 13
0.90	1.41726 20	1.35118 37	1.23929 22	1.11613 35	1.01408 58	0.91653 15	0.89015 86
0.95	1.49272 42	1.41220 03	1.27679 52	1.12887 36	1.00702 73	0.89105 46	0.85977 85
1.00	1.57079 62	1.47443 48	1.31332 66	1.13842 65	0.99506 76	0.85912 29	0.82253 59
	$\begin{bmatrix}(-3)1\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)8\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)6\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)8\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)9\\6\end{bmatrix}$

$z/i=y \backslash a$	1.00	1.05	1.15	1.3	1.5	2.0	4.0
0.00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00	1.00000 00
0.05	1.00000 49	1.00000 44	1.00000 34	1.00000 21	1.00000 08	0.99999 95	0.99999 92
0.10	1.00007 88	1.00007 08	1.00005 46	1.00003 34	1.00001 35	0.99999 25	0.99998 65
0.15	1.00039 88	1.00035 86	1.00027 73	1.00017 04	1.00006 91	0.99996 24	0.99993 19
0.20	1.00125 98	1.00113 51	1.00088 05	1.00054 31	1.00022 22	0.99988 28	0.99978 57
0.25	1.00307 33	1.00277 55	1.00216 14	1.00134 04	1.00055 43	0.99971 90	0.99947 96
0.30	1.00636 38	1.00576 38	1.00451 03	1.00281 53	1.00117 94	0.99943 06	0.99892 78
0.35	1.01176 23	1.01069 02	1.00841 42	1.00529 28	1.00225 03	0.99897 41	0.99802 83
0.40	1.01999 45	1.01824 62	1.01445 97	1.00917 72	1.00396 67	0.99830 68	0.99666 50
0.45	1.03186 18	1.02921 31	1.02333 32	1.01496 03	1.00658 42	0.99739 10	0.99470 88
0.50	1.04821 35	1.04444 39	1.03581 72	1.02322 84	1.01042 41	0.99619 89	0.99202 03
0.55		1.06483 58	1.05277 97	1.03466 71	1.01588 39	0.99471 80	0.98845 10
0.60			1.07515 67	1.05006 29	1.02344 73	0.99295 77	0.98384 63
0.65				1.07029 97	1.03369 45	0.99095 58	0.97804 63
0.70					1.04730 93	0.98878 64	0.97088 86
0.75					1.06508 51	0.98656 79	0.96221 00
0.80						0.98447 25	0.95184 75
0.85						0.98273 54	0.93964 06
0.90						0.98166 56	0.92543 21
0.95						0.98165 63	0.90906 94
1.00						0.98319 64	0.89040 57
	$\begin{bmatrix}(-4)6\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)6\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)7\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)6\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)3\\5\end{bmatrix}$

$z/i=y \backslash a$	4.0
1.1	0.84561 98
1.2	0.79003 67
1.3	0.72274 36
1.4	0.64295 89
1.5	0.55003 38
1.6	0.44345 14
1.7	0.32282 70
1.8	0.18790 92
1.9	+0.03858 90
2.0	−0.12508 40
	$\begin{bmatrix}(-3)2\\6\end{bmatrix}$

Таблица 18.3. Инварианты и значения в полупериодах
(дискриминант положителен или равен нулю; действительный полупериод равен единице)

$a=\omega'/i$	g_2	g_3	$e_1=\mathcal{P}(1)$	$e_3=\mathcal{P}(\omega')$	$\eta=\zeta(1)$	$\eta'/i=\zeta(\omega')/i$
1.00	11.81704 500	0.00000 000	1.71879 64	−1.71879 64	0.78539 816	−0.78539 82
1.02	11.37372 384	0.55318 992	1.71005 96	−1.66138 15	0.78979 718	−0.76520 32
1.04	10.98419 107	1.03485 699	1.70235 77	−1.60783 69	0.79367 192	−0.74537 75
1.06	10.64177 347	1.45484 521	1.69556 79	−1.55787 59	0.79708 535	−0.72588 58
1.08	10.34065 794	1.82151 890	1.68958 18	−1.51123 63	0.80009 279	−0.70669 61
1.10	10.07577 364	2.14201 000	1.68430 41	−1.46767 83	0.80274 283	−0.68777 92
1.12	9.84269 185	2.42241 937	1.67965 08	−1.42698 19	0.80507 817	−0.66910 88
1.14	9.63754 049	2.66798 153	1.67554 80	−1.38894 48	0.80713 637	−0.65066 09
1.16	9.45693 072	2.88320 000	1.67193 04	−1.35338 12	0.80895 045	−0.63241 38
1.18	9.29789 413	3.07195 918	1.66874 05	−1.32011 96	0.81054 949	−0.61434 79
1.20	9.15782 851	3.23761 717	1.66592 77	−1.28900 20	0.81195 906	−0.59644 54
1.22	9.03445 117	3.38308 317	1.66344 74	−1.25988 23	0.81320 168	−0.57869 03
1.24	8.92575 843	3.51088 223	1.66126 03	−1.23262 55	0.81429 717	−0.56106 78
1.26	8.82999 055	3.62320 977	1.65933 17	−1.20710 65	0.81526 299	−0.54356 50
1.28	8.74560 138	3.72197 756	1.65763 09	−1.18320 95	0.81611 453	−0.52616 97
1.30	8.67123 169	3.80885 265	1.65613 11	−1.16082 70	0.81686 533	−0.50887 14
1.32	8.60568 628	3.88529 056	1.65480 86	−1.13985 91	0.81752 732	−0.49166 03
1.34	8.54791 374	3.95256 351	1.65364 22	−1.12021 33	0.81811 103	−0.47452 75
1.36	8.49698 890	4.01178 462	1.65261 37	−1.10180 31	0.81862 572	−0.45746 53
1.38	8.45209 746	4.06392 870	1.65170 67	−1.08454 85	0.81907 958	−0.44046 65
1.40	8.41252 263	4.10985 014	1.65090 68	−1.06837 47	0.81947 977	−0.42352 46
1.42	8.37763 305	4.15029 819	1.65020 13	−1.05321 20	0.81983 269	−0.40663 39
1.44	8.34687 283	4.18593 045	1.64957 92	−1.03899 58	0.82014 389	−0.38978 91
1.46	8.31975 228	4.21732 438	1.64903 06	−1.02566 55	0.82041 831	−0.37298 56
1.48	8.29583 997	4.24498 728	1.64854 68	−1.01316 45	0.82066 031	−0.35621 91
1.50	8.27475 580	4.26936 502	1.64812 02	−1.00144 04	0.82087 370	−0.33948 58
1.52	8.25616 484	4.29084 965	1.64774 39	−0.99044 37	0.82106 191	−0.32278 22
1.54	8.23977 191	4.30978 602	1.64741 20	−0.98012 84	0.82122 787	−0.30610 54
1.56	8.22531 684	4.32647 752	1.64711 94	−0.97045 19	0.82137 423	−0.28945 25
1.58	8.21257 036	4.34119 120	1.64686 13	−0.96137 37	0.82150 329	−0.27282 11
1.60	8.20133 033	4.35416 210	1.64663 38	−0.95285 64	0.82161 711	−0.25620 90
1.65	8.17870 308	4.38026 291	1.64617 54	−0.93379 17	0.82184 628	−0.21475 00
1.70	8.16217 907	4.39931 441	1.64584 08	−0.91752 88	0.82201 364	−0.17337 32
1.75	8.15011 147	4.41322 294	1.64559 63	−0.90365 18	0.82213 589	−0.13205 85
1.80	8.14129 812	4.42337 818	1.64541 78	−0.89180 82	0.82222 516	−0.09079 10
1.85	8.13486 127	4.43079 368	1.64528 73	−0.88169 76	0.82229 038	−0.04955 91
1.90	8.13016 001	4.43620 896	1.64519 21	−0.87306 52	0.82233 800	−0.00835 41
1.95	8.12672 634	4.44016 375	1.64512 25	−0.86569 37	0.82237 281	+0.03283 07
2.00	8.12421 844	4.44305 205	1.64507 17	−0.85939 82	0.82239 820	0.07400 01
2.05	8.12238 671	4.44516 152	1.64503 45	−0.85402 10	0.82241 676	0.11515 80
2.10	8.12104 883	4.44670 219	1.64500 74	−0.84942 78	0.82243 032	0.15630 73
2.15	8.12007 164	4.44782 746	1.64498 76	−0.84550 41	0.82244 022	0.19745 01
2.20	8.11935 791	4.44864 934	1.64497 32	−0.84215 20	0.82244 745	0.23858 81
2.25	8.11883 660	4.44924 963	1.64496 26	−0.83928 80	0.82245 274	0.27972 23
2.30	8.11845 583	4.44968 808	1.64495 49	−0.83684 11	0.82245 659	0.32085 38
2.4	8.11797 459	4.45024 222	1.64494 51	−0.83296 37	0.82246 146	0.40311 12
2.5	8.11771 785	4.45053 785	1.64494 00	−0.83013 28	0.82246 406	0.48536 38
2.6	8.11758 087	4.45069 555	1.64493 71	−0.82806 54	0.82246 546	0.56761 39
2.7	8.11750 782	4.45077 969	1.64493 57	−0.82655 58	0.82246 619	0.64986 24
2.8	8.11746 884	4.45082 457	1.64493 49	−0.82545 33	0.82246 659	0.73211 01
2.9	8.11744 804	4.45084 852	1.64493 45	−0.82464 81	0.82246 680	0.81435 74
3.0	8.11743 694	4.45086 130	1.64493 43	−0.82406 01	0.82246 691	0.89660 44
3.1	8.11743 103	4.45086 811	1.64493 42	−0.82363 06	0.82246 698	0.97885 13
3.2	8.11742 787	4.45087 174	1.64493 41	−0.82331 68	0.82246 701	1.06109 81
3.3	8.11742 619	4.45087 368	1.64493 41	−0.82308 78	0.82246 702	1.14334 48
3.4	8.11742 529	4.45087 472	1.64493 41	−0.82292 04	0.82246 703	1.22559 16
3.5	8.11742 481	4.45087 528	1.64493 41	−0.82279 82	0.82246 703	1.30783 83
3.6	8.11742 455	4.45087 556	1.64493 41	−0.82270 89	0.82246 703	1.39008 50
3.7	8.11742 441	4.45087 572	1.64493 41	−0.82264 37	0.82246 704	1.47233 17
3.8	8.11742 434	4.45087 581	1.64493 41	−0.82259 61	0.82246 704	1.55457 84
3.9	8.11742 430	4.45087 585	1.64493 41	−0.82256 13	0.82246 704	1.63682 51
4.0	8.11742 426	4.45087 587	1.64493 41	−0.82253 59	0.82246 704	1.71907 18
∞ Δ=0	8.11742 426	4.45087 590	1.64493 41	−0.82246 70	0.82246 704	∞
	$\begin{bmatrix}(-3)7\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)9\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)1\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)7\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)5\\5\end{bmatrix}$

При $a=1$: $g_2=\omega^4$, $g_3=0$, $e_1=\omega^2/2$, $e_3=-\omega^2/2$, $\eta=\pi/4$, $\eta'/i=-\pi/4$.
При $a=\infty$: $g_2=\pi^4/12$, $g_3=\pi^6/216$, $e_1=\pi^2/6$, $e_3=-\pi^2/12$, $\eta=\pi^2/12$, $\eta'/i=\infty$.
$\omega=1.85407\,4677$ является действительным полупериодом в лемнискатном случае из 18.14.) При $4<a<\infty$ для получения η' используется соотношение Лежандра $\eta'=\eta\omega'-\pi i/2$. Для получения значений протабулированных величин, когда действительный полупериод $\omega\neq 1$, нужно умножить g_2 на ω^{-4}, g_3 на ω^{-6}, e_i на ω^{-2} и η на ω^{-1}.

Таблица 18.3. Инварианты и значения в полупериодах

(дискриминант положителен или равен нулю; действительный полупериод равен единице)

$a=\omega'/i$	$\sigma(1)$	$\sigma(\omega')/i$	$\mathcal{R}\sigma(\omega_2)$	$\mathcal{I}\sigma(\omega_2)$
1.00	0.94989 88	0.949899	1.182951	1.182951
1.02	0.95114 80	0.967481	1.170397	1.218650
1.04	0.95224 92	0.984884	1.157316	1.253864
1.06	0.95321 98	1.002097	1.143695	1.288619
1.08	0.95407 54	1.019107	1.129522	1.322935
1.10	0.95482 97	1.035904	1.114782	1.356827
1.12	0.95549 47	1.052476	1.099457	1.390301
1.14	0.95608 10	1.068811	1.083531	1.423362
1.16	0.95659 79	1.084899	1.066989	1.456007
1.18	0.95705 36	1.100727	1.049814	1.488231
1.20	0.95745 55	1.116285	1.031991	1.520022
1.22	0.95780 98	1.131562	1.013507	1.551369
1.24	0.95812 22	1.146546	0.994349	1.582254
1.26	0.95839 77	1.161227	0.974506	1.612657
1.28	0.95864 07	1.175594	0.953970	1.642557
1.30	0.95885 49	1.189636	0.932733	1.671930
1.32	0.95904 38	1.203344	0.910790	1.700750
1.34	0.95921 04	1.216707	0.888138	1.728989
1.36	0.95935 73	1.229716	0.864776	1.756618
1.38	0.95948 68	1.242361	0.840704	1.783607
1.40	0.95960 10	1.254633	0.815927	1.809925
1.42	0.95970 18	1.266522	0.790449	1.835542
1.44	0.95979 06	1.278021	0.764278	1.860425
1.46	0.95986 89	1.289120	0.737425	1.884541
1.48	0.95993 80	1.299811	0.709900	1.907860
1.50	0.95999 90	1.310087	0.681719	1.930348
1.52	0.96005 27	1.319941	0.652896	1.951974
1.54	0.96010 01	1.329364	0.623452	1.972707
1.56	0.96014 19	1.338351	0.593404	1.992515
1.58	0.96017 87	1.346895	0.562777	2.011370
1.60	0.96021 13	1.354990	0.531593	2.029242
1.65	0.96027 67	1.373224	0.451372	2.069439
1.70	0.96032 45	1.388539	0.368286	2.102914
1.75	0.96035 94	1.400869	0.282840	2.129313
1.80	0.96038 49	1.410170	0.195588	2.148344
1.85	0.96040 35	1.416408	0.107125	2.159783
1.90	0.96041 71	1.419573	+0.018074	2.163478
1.95	0.96042 70	1.419665	−0.070918	2.159353
2.00	0.96043 43	1.416707	−0.159199	2.147412
2.05	0.96043 96	1.410733	−0.246114	2.127732
2.10	0.96044 35	1.401800	−0.331019	2.100473
2.15	0.96044 63	1.389977	−0.413290	2.065864
2.20	0.96044 84	1.375349	−0.492330	2.024211
2.25	0.96044 99	1.358018	−0.567579	1.975882
2.30	0.96045 10	1.338098	−0.638522	1.921308
2.4	0.96045 24	1.291016	−0.765682	1.795415
2.5	0.96045 31	1.235264	−0.870782	1.650936
2.6	0.96045 35	1.172151	−0.951807	1.492779
2.7	0.96045 37	1.103091	−1.007808	1.326086
2.8	0.96045 38	1.029557	−1.038896	1.155967
2.9	0.96045 39	0.953025	−1.046157	0.987255
3.0	0.96045 40	0.874937	−1.031530	0.824296
3.1	0.96045 40	0.796655	−0.997636	0.670787
3.2	0.96045 40	0.719428	−0.947586	0.529666
3.3	0.96045 40	0.644360	−0.884775	0.403050
3.4	0.96045 40	0.572395	−0.812687	0.292246
3.5	0.96045 40	0.504299	−0.734720	0.197780
3.6	0.96045 40	0.440663	−0.654024	0.119493
3.7	0.96045 40	0.381903	−0.573398	0.056643
3.8	0.96045 40	0.328268	−0.495196	+0.008033
3.9	0.96045 40	0.279851	−0.421291	−0.027857
4.0	0.96045 40	0.236623	−0.353075	−0.052740
∞ $\Delta=0$	0.96045 40 $\begin{bmatrix}(-5)2\\4\end{bmatrix}$	0.000000 $\begin{bmatrix}(-4)9\\5\end{bmatrix}$	0.000000 $\begin{bmatrix}(-3)3\\6\end{bmatrix}$	0.000000 $\begin{bmatrix}(-3)2\\6\end{bmatrix}$

$$\omega_2 = 1 + \omega', \ e_2 = \mathcal{P}(1+\omega') = -(e_1+e_3), \ \eta_2 = \zeta(1+\omega') = \eta + \eta'.$$

При $a = 1$: $\sigma(1) = e^{\pi/8}2^{1/4}/\omega$, $\sigma(\omega') = i\sigma(1)$, $\sigma(\omega_2) = \sqrt{2}e^{\pi/4}e^{i\pi/4}/\omega$. При $a = \infty$: $\sigma(1) = 2e^{\pi^2/24}/\pi$, $\sigma(\omega') = 0$, $\sigma(\omega_2) = 0$. ($\omega = 1.85407\,4677$ является действительным полупериодом в лемнискатном случае из 18.14.) Для получения значений протабулированных величин, когда действительный полупериод $\omega \neq 1$, нужно умножить σ на ω.

Таблица 18.3. Инварианты и значения в полупериодах
(дискриминант положителен или равен нулю; действительный полупериод равен единице)

$a=\omega_2'/i$	g_2	g_3	$\mathcal{R}e_1=\mathcal{R}\wp\left(\frac{1}{2}-\frac{\omega_2'}{2}\right)$	$\mathcal{I}e_1=\mathcal{I}\wp\left(\frac{1}{2}-\frac{\omega_2'}{2}\right)$	$\eta_2=\zeta(1)$	$\eta_2'/i=\zeta(\omega_2')/i$
1.00	−47.26818 00	0.00000 00	0.00000 000	3.43759 29	1.57079 63	−1.57079 63
1.02	−45.35272 19	4.41906 00	−0.04867 810	3.36827 69	1.53091 63	−1.58005 81
1.04	−43.40071 30	8.23156 58	−0.09452 083	3.29802 68	1.49282 30	−1.58905 67
1.06	−41.42954 84	11.49257 28	−0.13769 202	3.22711 39	1.45647 87	−1.59772 52
1.08	−39.45420 53	14.25448 26	−0.17834 547	3.15578 40	1.42184 01	−1.60600 53
1.10	−37.48749 12	16.56680 99	−0.21662 576	3.08425 89	1.38885 99	−1.61384 68
1.12	−35.54027 17	18.47603 08	−0.25266 894	3.01273 84	1.35748 74	−1.62120 68
1.14	−33.62168 02	20.02550 17	−0.28660 315	2.94140 17	1.32766 96	−1.62804 93
1.16	−31.73930 91	21.25543 82	−0.31854 915	2.87040 90	1.29935 18	−1.63434 46
1.18	−29.89938 64	22.20294 45	−0.34862 086	2.79990 29	1.27247 81	−1.64006 85
1.20	−28.10693 45	22.90208 34	−0.37692 571	2.73000 96	1.24699 24	−1.64520 18
1.22	−26.36591 62	23.38397 82	−0.40356 512	2.66084 07	1.22283 82	−1.64973 00
1.24	−24.67936 58	23.67693 85	−0.42863 481	2.59249 39	1.19995 95	−1.65364 28
1.26	−23.04950 83	23.80660 45	−0.45222 513	2.52505 44	1.17830 09	−1.65693 36
1.28	−21.47786 60	23.79610 09	−0.47442 139	2.45859 58	1.15780 77	−1.65959 88
1.30	−19.96535 52	23.66620 08	−0.49530 414	2.39318 14	1.13842 65	−1.66163 82
1.32	−18.51237 16	23.43548 95	−0.51494 941	2.32886 49	1.12010 52	−1.66305 38
1.34	−17.11886 71	23.12052 98	−0.53342 897	2.26569 11	1.10279 31	−1.66384 99
1.36	−15.78441 82	22.73602 29	−0.55081 058	2.20369 72	1.08644 09	−1.66403 31
1.38	−14.50828 67	22.29496 60	−0.56715 817	2.14291 32	1.07100 10	−1.66361 13
1.40	−13.28947 27	21.80880 22	−0.58253 209	2.08336 24	1.05642 75	−1.66259 42
1.42	−12.12676 19	21.28756 31	−0.59698 926	2.02506 27	1.04267 61	−1.66099 26
1.44	−11.01876 70	20.74000 36	−0.61058 339	1.96802 64	1.02970 43	−1.65881 85
1.46	− 9.96396 40	20.17372 81	−0.62336 513	1.91226 13	1.01747 14	−1.65608 44
1.48	− 8.96072 32	19.59530 70	−0.63538 226	1.85777 09	1.00593 83	−1.65280 40
1.50	− 8.00733 71	19.01038 59	−0.64667 980	1.80455 50	0.99506 76	−1.64899 13
1.52	− 7.10204 36	18.42378 52	−0.65730 023	1.75261 00	0.98482 36	−1.64466 08
1.54	− 6.24304 63	17.83959 12	−0.66728 357	1.70192 94	0.97517 21	−1.63982 76
1.56	− 5.42853 20	17.26123 98	−0.67666 751	1.65250 41	0.96608 09	−1.63450 65
1.58	− 4.65668 53	16.69159 27	−0.68548 761	1.60432 26	0.95751 90	−1.62871 26
1.60	− 3.92570 12	16.13300 57	−0.69377 734	1.55737 16	0.94945 69	−1.62246 17
1.65	− 2.26537 64	14.79653 23	−0.71238 375	1.44527 36	0.93130 88	−1.60493 31
1.70	− 0.82241 58	13.56033 77	−0.72831 198	1.34049 21	0.91571 53	−1.58487 67
1.75	+ 0.42844 48	12.43388 94	−0.74194 441	1.24271 21	0.90232 74	−1.56251 97
1.80	1.51045 44	11.41927 28	−0.75360 961	1.15159 40	0.89084 07	−1.53807 94
1.85	2.44471 18	10.51370 92	−0.76358 973	1.06678 48	0.88099 10	−1.51175 93
1.90	3.25015 81	9.71138 21	−0.77212 691	0.98792 73	0.87254 91	−1.48374 94
1.95	3.94365 25	9.00473 54	−0.77942 883	0.91466 65	0.86531 67	−1.45422 51
2.00	4.54009 85	8.38537 94	−0.78567 351	0.84665 46	0.85912 29	−1.42334 69
2.05	5.05259 79	7.84470 38	−0.79101 353	0.78355 46	0.85382 00	−1.39126 17
2.10	5.49261 57	7.37428 09	−0.79557 957	0.72504 25	0.84928 11	−1.35810 23
2.15	5.87014 76	6.96611 56	−0.79948 352	0.67080 91	0.84539 69	−1.32398 93
2.20	6.19388 05	6.61278 90	−0.80282 119	0.62056 06	0.84207 37	−1.28903 05
2.25	6.47134 49	6.30752 86	−0.80567 458	0.57401 95	0.83923 09	−1.25332 31
2.30	6.70905 42	6.04422 78	−0.80811 383	0.53092 40	0.83679 93	−1.21695 43
2.4	7.08692 59	5.62231 14	−0.81198 137	0.45410 32	0.83294 16	−1.14253 28
2.5	7.36377 30	5.31058 54	−0.81480 718	0.38831 56	0.83012 09	−1.06629 03
2.6	7.56643 61	5.08099 59	−0.81687 167	0.33200 75	0.82805 92	−0.98863 87
2.7	7.71470 39	4.91228 49	−0.81837 985	0.28383 23	0.82655 25	−0.90990 09
2.8	7.82312 83	4.78851 39	−0.81948 158	0.24262 75	0.82545 16	−0.83032 82
2.9	7.90239 07	4.69782 05	−0.82028 636	0.20739 21	0.82464 72	−0.75011 58
3.0	7.96032 11	4.63142 26	−0.82087 422	0.17726 58	0.82405 96	−0.66941 39
3.1	8.00265 32	4.58284 25	−0.82130 361	0.15151 09	0.82363 03	−0.58833 87
3.2	8.03358 32	4.54731 53	−0.82161 725	0.12949 50	0.82331 67	−0.50697 92
3.3	8.05618 01	4.52134 25	−0.82184 634	0.11067 62	0.82308 77	−0.42540 32
3.4	8.07268 80	4.50235 93	−0.82201 368	0.09459 10	0.82292 04	−0.34366 33
3.5	8.08474 69	4.48848 72	−0.82213 590	0.08084 29	0.82279 82	−0.26179 91
3.6	8.09355 57	4.47835 14	−0.82222 517	0.06909 25	0.82270 89	−0.17984 06
3.7	8.09999 01	4.47094 62	−0.82229 038	0.05904 97	0.82264 37	−0.09781 10
3.8	8.10469 00	4.46553 65	−0.82233 800	0.05046 65	0.82259 61	−0.01572 75
3.9	8.10812 30	4.46158 47	−0.82237 279	0.04313 08	0.82256 13	+0.06639 64
4.0	8.11063 05	4.45869 80	−0.82239 820	0.03686 13	0.82253 59	+0.14855 08
∞	8.11742 43	4.45087 59	−0.82246 703	0.00000 00	0.82246 70	∞
Δ=0	$\left[{(-2)3 \atop 9}\right]$	$\left[{(-2)8 \atop 8}\right]$	$\left[{(-4)4 \atop 7}\right]$	$\left[{(-3)1 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)8 \atop 6}\right]$

При $a=1$: $g_2=-4\omega^4$, $g_3=0$, Re $e_1=0$, Im $e_1=\omega^2$, $\eta_2=\pi/2$, $\eta_2'/i=-\pi/2$. При $a=\infty$: $g_2=\pi^4/12$, $g_3=\pi^6/216$, Re $e_1=-\pi^2/12$, Im $e_1=0$, $\eta_2=\pi^2/12$, $\eta_2'/i=\infty$ ($\omega=1.85407\ 4677$ является действительным полупериодом в лемнискатном случае из 18.14.) При $4<a<\infty$ для получения η_2' используется соотношение Лежандра $\eta_2'=\eta_2\omega_2'-\pi i$. Для получения значений протабулированных величин, когда действительный полупериод $\omega_2\neq 1$, нужно умножить g_2 на ω_2^{-4}, g_3 на ω_2^{-6}, e_1 на ω_2^{-2} и η на ω_2^{-1}.

Таблица 18.3. Инварианты и значения в полупериодах
(дискриминант отрицателен или равен нулю; действительный полупериод равен единице)

$a=\omega_2'/i$	$\sigma(1)$	$\sigma(\omega_2')/i$	$\mathcal{R}\sigma(\omega')$	$\mathcal{I}\sigma(\omega')$
1.00	1.18295 13	1.182951	0.474949	0.474949
1.02	1.17091 79	1.219157	0.475654	0.483826
1.04	1.15940 62	1.255842	0.476433	0.492792
1.06	1.14841 45	1.292964	0.477275	0.501851
1.08	1.13793 68	1.330480	0.478169	0.511006
1.10	1.12796 39	1.368342	0.479107	0.520259
1.12	1.11848 38	1.406502	0.480078	0.529611
1.14	1.10948 26	1.444910	0.481074	0.539064
1.16	1.10094 49	1.483513	0.482085	0.548616
1.18	1.09285 44	1.522257	0.483104	0.558268
1.20	1.08519 40	1.561089	0.484122	0.568019
1.22	1.07794 61	1.599952	0.485132	0.577866
1.24	1.07109 31	1.638790	0.486126	0.587809
1.26	1.06461 72	1.677548	0.487098	0.597843
1.28	1.05850 11	1.716167	0.488041	0.607968
1.30	1.05272 75	1.754591	0.488949	0.618179
1.32	1.04727 97	1.792765	0.489817	0.628474
1.34	1.04214 12	1.830630	0.490639	0.638850
1.36	1.03729 63	1.868133	0.491410	0.649302
1.38	1.03272 96	1.905218	0.492126	0.659828
1.40	1.02842 64	1.941832	0.492783	0.670422
1.42	1.02437 26	1.977922	0.493376	0.681082
1.44	1.02055 48	2.013437	0.493902	0.691804
1.46	1.01696 00	2.048327	0.494357	0.702582
1.48	1.01357 57	2.082544	0.494733	0.713414
1.50	1.01039 05	2.116040	0.495045	0.724295
1.52	1.00739 28	2.148771	0.495272	0.735221
1.54	1.00457 23	2.180693	0.495418	0.746189
1.56	1.00191 88	2.211766	0.495480	0.757192
1.58	0.99942 27	2.241950	0.495458	0.768229
1.60	0.99707 51	2.271208	0.495348	0.779295
1.65	0.99179 98	2.340071	0.494687	0.807059
1.70	0.98727 79	2.402437	0.493456	0.834917
1.75	0.98340 36	2.457895	0.491645	0.862812
1.80	0.98008 56	2.506120	0.489246	0.890687
1.85	0.97724 49	2.546866	0.486255	0.918490
1.90	0.97481 36	2.579972	0.482673	0.946170
1.95	0.97273 30	2.605345	0.478503	0.973680
2.00	0.97095 31	2.622973	0.473748	1.000975
2.05	0.96943 05	2.632902	0.468417	1.028011
2.10	0.96812 82	2.635245	0.462516	1.054750
2.15	0.96701 46	2.630169	0.456054	1.081151
2.20	0.96606 23	2.617892	0.449041	1.107179
2.25	0.96524 80	2.598678	0.441488	1.132799
2.30	0.96455 19	2.572828	0.433405	1.157978
2.4	0.96344 79	2.502604	0.415693	1.206881
2.5	0.96264 13	2.410244	0.395997	1.253647
2.6	0.96205 18	2.299090	0.374417	1.298044
2.7	0.96162 12	2.172666	0.351055	1.339858
2.8	0.96130 65	2.034544	0.326022	1.378884
2.9	0.96107 67	1.888235	0.299435	1.414929
3.0	0.96090 89	1.737097	0.271420	1.447812
3.1	0.96078 62	1.584242	0.242114	1.477367
3.2	0.96069 67	1.432486	0.211664	1.503441
3.3	0.96063 12	1.284291	0.180224	1.525899
3.4	0.96058 34	1.141740	0.147962	1.544621
3.5	0.96054 86	1.006520	0.115052	1.559512
3.6	0.96052 31	0.879924	0.081678	1.570495
3.7	0.96050 44	0.762869	0.048028	1.577518
3.8	0.96049 08	0.655914	+0.014297	1.580552
3.9	0.96048 09	0.559298	−0.019318	1.579595
4.0	0.96047 37	0.472982	−0.052618	1.574671
∞ $\Delta=0$	0.96045 40 $\begin{bmatrix}(-5)9\\6\end{bmatrix}$	0.000000 $\begin{bmatrix}(-3)3\\6\end{bmatrix}$	0.000000 $\begin{bmatrix}(-4)2\\4\end{bmatrix}$	0.000000 $\begin{bmatrix}(-4)5\\5\end{bmatrix}$

$$\omega' = \frac{1}{2} + \frac{\omega_2'}{2}, \; e_3 = \mathcal{P}\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_2'}{2}\right) = \bar{e}_1, \; e_2 = \mathcal{P}(1) = -2\,\mathrm{Re}\, e_1, \; \eta' = \zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_2'}{2}\right) = \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_2').$$

При $a = 1$: $\sigma(1) = e^{\pi/4}/\omega$, $\sigma(\omega_2') = i\sigma(1)$, $\sigma(\omega') = e^{\pi/8}e^{i\pi/4}/(2^{1/4}\omega)$. При $a = \infty$: $\sigma(1) = 2e^{\pi^2/24}/\pi$, $\sigma(\omega_2') = 0$, $\sigma(\omega') = 0$. ($\omega = 1.85407\ 4677$ является действительным полупериодом в лемнискатном случае из 18.14.) Для получения значений протабулированных величин, когда действительный полупериод $\omega_2 \neq 1$, нужно умножить σ на ω_2.

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

18.1. Appell P., Lacour E. Principes de la theorie des fonctions elliptiques et applications. — P.: Gauthier-Villars, 1897.

18.2. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions.— N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V. 2, Ch. 13. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974, Т.II.

18.3. Graeser E. Einfuhrung in die Theorie der elliptischen Funktionen und deren Anwendungen. — Munich: R. Oldenbourg, 1950.

18.4. Halphen G. H. Traite des fonctions elliptiques et de leurs applications, 1. — P.: Gauthier-Villars, 1886.

18.5. Hancock H. Lectures on the theory of elliptic functions. — N.Y.: Dover Publications, 1958, V. 1.

18.6. Hurwitz A., Courant R. Vorlesungen über allgemeine Funktionen-theorie und elliptische Funktionen. — B.: Springer, 1929.

18.7. Ince E. L. Ordinary differential equations. — N.Y.: Dover Publications, 1944.

18.8. Kamke E. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1943, V. 1. Русский перевод: Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.

18.9. Lehmer D. H. The lemniscate constant. — Math. Tables Aids Comp., 1948—1949, 3, p. 550—551.

18.10. Mitra S. C. On the expansion of the Weierstrassian and Jacobian elliptic functions in powers of the argument. — Bull. Calcutta Math. Soc., 1926, 17, p. 159—172.

18.11. Oberhettinger F., Magnus W., Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. — B.: Springer, 1949.

18.12. Prasad C. An introduction to the theory of elliptic functions and higher transcendentals. — Univ. of Calcutta, 1928.

18.13. Richard U. Osservazioni sulla bisezione delle funzioni ellittiche di Weierstrass. — Boll. Un. Math. Ital., 1949, 3, № 4, p. 395—397.

18.14. Selmer E. S. A simple trisection formula for the elliptic function of Weierstrass in the equianharmonic case. — Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim, 1947, 19, № 29, p. 116—119.

18.15. Tannery J., Molk J. Elements de la théorie des fonctions elliptiques. — P.: Gauthier-Villars, 1893—1902, V. 1—4.

18.16. Tricomi F. Elliptische Funktionen. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1948.

18.17. Tricomi F. Funzioni ellittiche. — Bologna, 1951.

18.18. Van Orstrand C. E. Reversion of power series. — Phil. Mag., Jan. — June 1910, 6, № 19, p. 366—376.

18.19. Whittaker E. T., Watson G. N. A course of modern analysis. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1952, Ch. 20. Русский перевод: Уиттекер Э., Ватсон Г. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1962, Т.1; 1963, Т.2.

Справочники и сборники формул

18.20. Burd P. F., Friedman M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. — B.: Springer-Verlag, 1954, Springer Appendix, sec. 1030.

18.21. Fletcher A. Guide to tables of elliptic functions — Math. Tables Aids Comp., 1948—1949, 3, p. 247—249.

18.22. Flügge S. Handbuch der Physik. — B.: Springer-Verlag, 1956, V. 1, p. 120—146.

18.23. Kober H. Dictionary of conformal representations. — N.Y.: Dover Publications, 1952.

18.24. Milne-Thomson L. M. Jacobian elliptic function tables. — N.Y.: Dover Publications, 1950. Украинский переклад: Мілн-Томсон Л. М. Еліптичні функції Якобі, пятизначні таблиці sn u, cn u, dn u. — Харків: Держ. наук.-техн. вид-во Укр., 1933.

18.25. Weierstrass K., Schwarz H. A. Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. — Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz. — B.: Springer, 1893.

Таблицы

18.26. Chih-Bing Ling. Evaluation at half-periods of Weierstrass elliptic function with rectangular primitive period-parallelogram. — Math. Comp., 1960, 14, № 69, p. 67—70. Значения $c_i (i = 1, 2, 3)$ с 15D для различных периодов отношений в случае $\Delta > 0$.

18.27. Jahnke E., Emde F. Tables of functions. — N.Y.: Dover Publications, 1945, p. 100—166.
Эквиангармонический случай, действительный аргумент $\mathcal{P}(u)$, $\mathcal{P}'(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$, $u = 0\left(\frac{\omega_2}{180}\right)\frac{4\omega_2}{3}$, 4D.
Русский перевод: Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

18.28. Southard T. H. Approximation and table of the Weierstrass $\mathcal{P}$ function in the equianharmonic case for real argument. — Math. Tables Aids Comp., Apr. 1957, 11, № 58, p. 99—100.
$f(u) = \mathcal{P}(u) - \frac{1}{u^2}$, 7D, с модифицированными центральными разностями $u = 0(0.1)\,0.8(0.05)\,1.55$.

18.29. Strayhorne D. A. A study of an elliptic functions: — Chicago: Thesis, 1946.
$\mathcal{P}(z;\ 37,\ -42)$, 4D, $z = 0.04i(0.04i)\,1.36i$.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

18.30. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.

18.31. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941.

18.32. Кузнецов Д. С. Специальные функции. — М.: Высшая школа, 1965.

18.33. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.

18.34. Ломкаци Ц. Д. Таблицы эллиптической функции Вейерштрасса. — М.: ВЦ АН СССР, 1967. — Теоретическая часть В. М. Белякова и К. А. Карпова.

18.35. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. — М.; Л.: ОНТИ, 1936.

Глава 19

ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА[1])

ДЖ. МИЛЛЕР

СОДЕРЖАНИЕ

19.1. ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА. ВВЕДЕНИЕ

Эти функции представляют собой решения дифференциального уравнения

19.1.1. $$\frac{d^2y}{dx^2} + (ax^2 + bx + c)\, y = 0,$$

записываемого в следующих двух стандартных формах:

19.1.2. $$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{x^2}{4} + a\right) y = 0,$$

19.1.3. $$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{x^2}{4} - a\right) y = 0.$$

Если одна из функций

19.1.4. $$y(a, x),\ y(a, -x),\ y(-a, ix),\ y(-a, -ix)$$

является решением уравнения 19.1.2 или уравнения 19.1.3, то все остальные функции также являются решениями этого уравнения.

[1]) Иногда эти функции называют функциями Вебера. *(Прим. перев.)*

Заменой a на $-ia$ и x на $xe^{i\pi/4}$ можно преобразовать 19.1.2 в 19.1.3. Если $y(a, x)$ — решение уравнения 19.1.2, то 19.1.3 имеет решения

19.1.5. $y(-ia,\ xe^{i\pi/4}),\quad y(-ia - xe^{i\pi/4}),$

$$y(ia,\ -xe^{-i\pi/4}),\quad y(ia,\ xe^{-i\pi/4}).$$

Вообще, переменная x и параметр a могут принимать произвольные комплексные значения.

Но для практических приложений особенно важны действительные решения уравнений в действительной области, поэтому особое внимание уделяется именно таким решениям. Как правило, формулы приводятся отдельно для каждого из уравнений 19.1.2 и 19.1.3.

Важным следствием изложенных выше свойств этих уравнений является тот факт, что функция, симметричная относительно оси y, в большинстве случаев является линейно независимым решением. Поэтому таблицы можно составлять либо только для положительных значений x, либо только для одного решения уравнения 19.1.2 или 19.1.3.

УРАВНЕНИЕ $\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{x^2}{4} + a\right) y = 0$

19.2. РАЗЛОЖЕНИЯ В СТЕПЕННОЙ РЯД ПО x

Четное и нечетное решения уравнения 19.1.2 задаются формулами 19.2.1—19.2.4.

19.2.1. $$y_1 = e^{-x^2/4} M\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{x^2}{2}\right) =$$
$$= e^{-x^2/4}\left\{1 + \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{5}{2}\right)\frac{x^4}{4!} + \ldots\right\} =$$
$$= e^{-x^2/4}{}_1F_1\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right).$$

19.2.2. $$y_1 = e^{x^2/4} M\left(-\frac{a}{2} + \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ -\frac{x^2}{2}\right) =$$
$$= e^{x^2/4}\left\{1 + \left(a - \frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a - \frac{5}{2}\right)\frac{x^4}{4!} + \ldots\right\}.$$

19.2.3. $$y_2 = xe^{-x^2/4} M\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ \frac{x^2}{2}\right) =$$
$$= e^{-x^2/4}\left\{x + \left(a + \frac{3}{2}\right)\frac{x^3}{3!} + \left(a + \frac{3}{2}\right)\left(a + \frac{7}{2}\right)\frac{x^5}{5!} + \ldots\right\}.$$

19.2.4. $$y_2 = xe^{x^2/4} M\left(-\frac{a}{2} + \frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ -\frac{x^2}{2}\right) =$$
$$= e^{x^2/4}\left\{x + \left(a - \frac{3}{2}\right)\frac{x^3}{3!} + \left(a - \frac{3}{2}\right)\left(a - \frac{7}{2}\right)\frac{x^5}{5!} + \ldots\right\}.$$

Все эти ряды сходятся для любых значений x (функции $M(a, c, z)$ см. в гл. 13). Те же решения можно задать и другим способом:

19.2.5. $$y_1 = 1 + a\frac{x^2}{2!} + \left(a^2 + \frac{1}{2}\right)\frac{x^4}{4!} +$$
$$+ \left(a^3 + \frac{7a}{2}\right)\frac{x^6}{6!} + \left(a^4 + 11a^2 + \frac{15}{4}\right)\frac{x^8}{8!} +$$
$$+ \left(a^5 + 25a^3 + \frac{211a}{4}\right)\frac{x^{10}}{10!} + \ldots,$$

19.2.6. $$y_2 = x + a\frac{x^3}{3!} + \left(a^2 + \frac{3}{2}\right)\frac{x^5}{5!} +$$
$$+ \left(a^3 + \frac{13a}{2}\right)\frac{x^7}{7!} + \left(a^4 + 17a^2 + \frac{63}{4}\right)\frac{x^9}{9!} +$$
$$+ \left(a^5 + 35a^3 + \frac{531a}{4}\right)\frac{x^{11}}{11!} + \ldots,$$

где не равные нулю коэффициенты при $\frac{x^n}{n!}$ (обозначим их через a_n) связаны соотношением

19.2.7. $$a_{n+2} = aa_n + \frac{n}{4}(n-1)a_{n-2}.$$

19.3. СТАНДАРТНЫЕ РЕШЕНИЯ

В качестве стандартных были выбраны решения с асимптотическим поведением, описанным в 19.8. Первое представляет собой функцию Уиттекера (19.8, 19.9) в более симметричных обозначениях:

19.3.1. $$U(a,\ x) = D_{-a-1/2}(x) =$$
$$= \left[\cos\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)\right] Y_1 - \left[\sin\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)\right] Y_2,$$

19.3.2. $$V(a,\ x) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)}\left\{\left[\sin\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)\right] Y_1 + \right.$$
$$\left. + \left[\cos\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)\right] Y_2\right\},$$

где

19.3.3. $Y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right)}{2^{a/2+1/4}} y_1 =$

$$= \sqrt{\pi} \frac{\sec \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)}{2^{a/2+1/4}\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}\right)} y_1,$$

19.3.4. $Y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{a}{2}\right)}{2^{a/2-1/4}} y_2 =$

$$= \sqrt{\pi} \frac{\operatorname{cosec} \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)}{2^{a/2-1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)} y_2,$$

19.3.5. $U(a, 0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{a/2+1/4}\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}\right)}$,

$$U'(a, 0) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2^{a/2-1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)},$$

19.3.6. $V(a, 0) = \dfrac{2^{a/2+1/4} \sin \pi \left(\frac{3}{4} - \frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{a}{2}\right)}$.

$$V'(a, 0) = \frac{2^{a/2+3/4} \sin \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right)}.$$

В хорошо известных обозначениях Уиттекера ($D_n(x)$) имеем

19.3.7. $U(a, x) = D_{-a-1/2}(x)$,

19.3.8. $V(a, x) =$

$$= \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) \left\{(\sin \pi a) D_{-a-1/2}(x) + D_{-a-1/2}(-x)\right\}.$$

19.4. ВРОНСКИАН И ДРУГИЕ СООТНОШЕНИЯ

19.4.1. $W\{U, V\} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

19.4.2. $\pi V(a, x) =$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) \{(\sin \pi a) U(a, x) + U(a, -x)\}.$$

19.4.3. $\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) U(a, x) =$

$$= \pi(\sec^2 \pi a) \{V(a, -x) - (\sin \pi a) V(a, x)\}.$$

19.4.4. $\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right) \cos \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, 2^{a/2-3/4}} y_1 =$

$$= 2\left[\sin \pi \left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}\right)\right] Y_1 = U(a, x) + U(a, -x).$$

19.4.5. $-\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{a}{2}\right) \sin \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, 2^{a/2-5/4}} y_2 =$

$$= 2\left[\cos \pi \left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}\right)\right] Y_2 = U(a, x) - U(a, -x).$$

19.4.6. $\sqrt{2\pi} U(-a, \pm ix) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) \times$

$$\times \{e^{-i\pi(2a-1)/4} U(a, \pm x) + e^{i\pi(2a-1)/4} U(a, \mp x)\}.$$

19.4.7. $\sqrt{2\pi} U(a, \pm x) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right) \times$

$$\times \{e^{-i\pi(2a+1)/4} U(-a, \pm ix) + e^{i\pi(2a+1)/4} U(-a, \mp ix)\}.$$

19.5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Подробное исследование см. в [19.11], п. 4.

Здесь приведены интегральные представления только для $U(a, z)$. Другие представления можно получить при помощи соотношений из 19.4.

19.5.1. $U(a, z) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)}{2\pi i} e^{-z^2/4} \displaystyle\int_\alpha e^{zs - s^2/2} s^{a-1/2} ds.$

19.5.2. $U(a, z) =$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)}{2\pi i} e^{z^2/4} \int_\beta e^{-t^2/2} (z + t)^{a-1/2}\, dt.$$

α и β — контуры, изображенные на рис. 19.1 и 19.2.

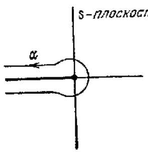


Рис. 19.1.
$-\pi < \arg s < \pi$.

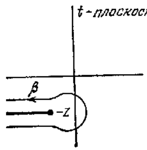


Рис. 19.2.
$-\pi < \arg(z + t) < \pi$.

Когда $a + 1/2$ принимает целые положительные значения, эти интегралы не имеют смысла; в этом случае

19.5.3. $U(a, z) = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)} e^{-z^2/4} \displaystyle\int_0^\infty e^{-zs - s^2/2} s^{a-1/2} ds.$

19.5.4. $U(a, z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} e^{z^2/4} \displaystyle\int_\varepsilon e^{-zs + s^2/2} s^{-a-1/2} ds.$

19.5.5. $U(a, z) = \dfrac{e^{(a-1/2)\pi i}}{\sqrt{2\pi}\, i} e^{z^2/4} \displaystyle\int_{\varepsilon_3} e^{zs + s^2/2} s^{-a-1/2} ds.$

19.5.6. $U(a, z) = \dfrac{e^{-(a-1/2)\pi i}}{\sqrt{2\pi}\, i} e^{z^2/4} \displaystyle\int_{\varepsilon_4} e^{zs + s^2/2} s^{-a-1/2} ds.$

ε, ε_3 и ε_4 показаны на рис. 19.3 и 19.4.

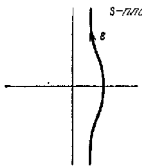


Рис. 19.3.
$-\pi/2 < \arg s < \pi/2$.

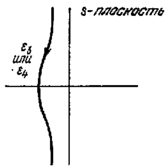


Рис. 19.4.
На ε_3 $\pi/2 < \arg s < 3\pi/2$.
На ε_4 $-3\pi/2 < \arg s < -\pi/2$.

19.5.7. $U(a, z) =$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{a}{2}\right)}{2^{a/2+3/4}\pi i} \int_{(\zeta_1)} e^{z^2 t/4} (1 + t)^{a/2-3/4} (1 - t)^{-a/2-3/4} dt.$$

19.5.8. $U(a, z) =$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{a}{2}\right)}{2^{a/2+3/4}\pi i} \int_{\zeta_1} \frac{z}{2} e^{v} \left(\frac{z^2}{4} + v\right)^{a/2-3/4} \left(\frac{z^2}{4} - v\right)^{-a/2-3/4} dv.$$

19.5.9. $U(a, z) =$

$$= \frac{i\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right)}{2^{a/2+5/4}\pi} \int_{\eta_1} \frac{z}{2} e^{-z^2 t/4} (1 + t)^{-a/2-1/4} (1 - t)^{a/2-1/4} dt.$$

19.5.10. $U(a, z) =$

$$= \frac{i\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right)}{2^{a/2+5/4}\pi} \int_{\eta_1} e^{-v} \left(\frac{z^2}{4} + v\right)^{-a/2-1/4} \left(\frac{z^2}{4} - v\right)^{a/2-1/4} dv.$$

Контур ζ_1 таков, что $(z^2/4 + v)$ изменяется от $\infty e^{-i\pi}$ до $\infty e^{i\pi}$; при этом точка $v = z^2/4$ остается вне контура. Функция $(z^2/4 - v)^{-a/2-3/4}$ принимает свое главное значение.

Аналогично, контур η_1 таков, что $(z^2/4 - v)$ изменяется от $\infty e^{i\pi}$ до $\infty e^{-i\pi}$; при этом точка $v = -z^2/4$ остается в области, расположенной вне этого контура [1]).

Контуры (ζ_1) и (η_1) получаются из ζ_1 и η_1 при помощи замены $v = z^2 t/4$.

Выражения 19.5.7 и 19.5.8 теряют смысл при $a = 3/2$, $7/2$, $11/2, \ldots$; для этих значений имеем

19.5.11. $U(a, z) =$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)} z e^{-z^2/4} \int_0^\infty e^{-s} s^{a/2-3/4} (z^2 + 2s)^{-a/2-3/4} ds.$$

Выражения 19.5.9 и 19.5.10 также теряют смысл при $a = 1/2, 5/2, 9/2, \ldots$; для этих значений имеем

19.5.12. $U(a, x) =$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}\right)} e^{-x^2/4} \int_0^\infty e^{-s} s^{a/2-1/4} (z^2 + 2s)^{-a/2-1/4} ds.$$

Интегралы типа Барнса

19.5.13. $$U(a,z) = \frac{e^{-x^2/4}}{2\pi i} z^{-a-1/2} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2} + a - 2s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)} (\sqrt{2}z)^{2s} ds \qquad (|\arg z| < 3\pi/4),$$

контур отделяет нули функции $\Gamma(s)$ от нулей функции $\Gamma\left(a + \frac{1}{2} - 2s\right)$.

Аналогично,

19.5.14. $$V(a,z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{z^2/4}}{2\pi i} z^{a-1/2} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2} - a - 2s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)} (\sqrt{2}z)^{2s} \cos s\pi \, ds \qquad (|\arg z| < \pi/4).$$

[1]) Рисунки этих контуров см. в [19.11]. *(Прим. перев.)*

19.6. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

19.6.1. $U'(a,x)+\frac{x}{2}U(a,x)+\left(a+\frac{1}{2}\right)U(a+1,x)=0.$

19.6.2. $U'(a,x)-\frac{x}{2}U(a,x)+U(a-1,x)=0.$

19.6.3. $2U'(a,x)+U(a-1,x)+\left(a+\frac{1}{2}\right)U(a+1,x)=0.$

19.6.4. $xU(a,x)-U(a-1,x)+\left(a+\frac{1}{2}\right)U(a+1,x)=0.$

Этим же соотношениям удовлетворяет функция $\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)V(a,x)$.

19.6.5. $V'(a,x)-\frac{x}{2}V(a,x)-\left(a-\frac{1}{2}\right)V(a-1,x)=0.$

19.6.6. $V'(a,x)+\frac{x}{2}V(a,x)-V(a+1,x)=0.$

19.6.7. $2V'(a,x)-V(a+1,x)-\left(a-\frac{1}{2}\right)V(a-1,x)=0.$

19.6.8. $xV(a,x)-V(a+1,x)+\left(a-\frac{1}{2}\right)V(a-1,x)=0.$

Эти же соотношения справедливы и для функции $U(a,x)/\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)$.

19.6.9. $y_1'(a,x)+\frac{x}{2}y_1(a,x)=\left(a+\frac{1}{2}\right)y_2(a+1,x).$

19.6.10. $y_1'(a,x)-\frac{x}{2}y_1(a,x)=\left(a-\frac{1}{2}\right)y_2(a-1,x).$

19.6.11. $y_2'(a,x)+\frac{x}{2}y_2(a,x)=y_1(a+1,x).$

19.6.12. $y_2'(a,x)-\frac{x}{2}y_2(a,x)=y_1(a-1,x).$

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

19.7. РАЗЛОЖЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ФУНКЦИИ ЭЙРИ

Если a — большое и отрицательное, то для $0\leqslant x<\infty$, полагая $x=2\sqrt{|a|}\,\xi$, $t=(4|a|)^{2/3}\tau$, имеем

19.7.1. $\tau=-\left(\frac{3}{2}\vartheta_3\right)^{2/3}$,

$$\vartheta_3=\frac{1}{2}\int_\xi^1\sqrt{1-s^2}\,ds=\frac{1}{4}\arccos\xi-\frac{1}{4}\xi\sqrt{1-\xi^2}\qquad(\xi\leqslant 1)$$

19.7.2. $\tau=+\left(\frac{3}{2}\vartheta_2\right)^{2/3}$,

$$\vartheta_2=\frac{1}{2}\int_1^\xi\sqrt{s^2-1}\,ds=\frac{1}{4}\xi\sqrt{\xi^2-1}-\frac{1}{4}\operatorname{arch}\xi,\qquad(\xi\geqslant 1).$$

При $x\geqslant 0$, $a\to-\infty$

19.7.3. $U(a,x)\sim$

$$\sim 2^{-1/4-a/2}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{t}{\xi^2-1}\right)^{1/4}\mathrm{Ai}(t),$$

19.7.4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)V(a,x)\sim$

$$\sim 2^{-1/4-a/2}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{t}{\xi^2-1}\right)^{1/4}\mathrm{Bi}(t).$$

Табл. 19.3 содержит значения τ как функции от ξ. Другие разложения см. в [19.5].

19.8. РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ x И УМЕРЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ a

$(x\gg|a|)$

19.8.1.
$$U(a,x)\sim e^{-x^2/4}x^{-a-1/2}\left\{1-\frac{\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{3}{2}\right)}{2x^2}+\frac{\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{3}{2}\right)\left(a+\frac{5}{2}\right)\left(a+\frac{7}{2}\right)}{2\cdot 4x^4}-\ldots\right\}$$

$(x\to+\infty).$

19.8.2. $V(a,x)\sim$

$$\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{x^2/4}x^{a-1/2}\left\{1+\frac{\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{3}{2}\right)}{2x^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{3}{2}\right)\left(a-\frac{5}{2}\right)\left(a-\frac{7}{2}\right)}{2\cdot 4x^4}+\dots\right\}$$
$$(x\to+\infty).$$

Эти разложения служат основой выбора стандартных решений в 19.3.

Первое разложение справедливо для комплексных x в смысле Ватсона (см. [19.6]) при $|\arg x|<\pi/2$, хотя в смысле Пуанкаре оно справедливо для более широкого интервала изменения $|\arg x|$.

Второе разложение справедливо только для действительных положительных x.

19.9. РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ $|a|$ И УМЕРЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ x

(1) $a>0$

Если $a\gg x^2$, то, обозначая $p=\sqrt{a}$, получаем

19.9.1. $$U(a,x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{a/2+1/4}\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}\right)}\exp(-px+v_1),$$

19.9.2. $$U(a,-x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{a/2+1/4}\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}\right)}\exp(px+v_2),$$

где

19.9.3. $$v_1,v_2\sim\mp\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3}{2p}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(2p)^2}\mp$$
$$\mp\frac{\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5}{(2p)^3}+\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2p)^4}\pm\frac{\frac{16}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{4}{7}\left(\frac{x}{2}\right)^7}{(2p)^5}+\dots$$
$$(a\to+\infty).$$

Верхний знак относится к первой функции, а нижний знак — ко второй.

(2) $a<0$

Если $-a\gg x^2$, то, обозначив $p=\sqrt{-a}$, получаем

19.9.4. $$U(a,x)+i\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)V(a,x)=$$
$$=\frac{e^{i\pi(1/4+a/2)}\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}\right)}{2^{a/2+1/4}\sqrt{\pi}}e^{ipx}\exp(v_r+iv_i),$$

где

19.9.5. $v_r\sim$

$$\sim+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(2p)^2}+\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2p)^4}-\frac{9\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{16}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(2p)^6}-\dots,$$
$$v_i\sim-\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3}{2p}+\frac{\frac{x}{2}+\frac{2}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5}{(2p)^3}+$$
$$+\frac{\frac{16}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{4}{7}\left(\frac{x}{2}\right)^7}{(2p)^5}-\dots(a\to-\infty).$$

Другие разложения аналогичного типа см. в [19.11].

19.10. РАЗЛОЖЕНИЯ ДАРВИНА

(1) $a>0$, x^2+4a — большое

Введя обозначения

19.10.1. $X=\sqrt{x^2+4a}$,

$$\theta=4a\vartheta_1\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^x X\,dx=\frac{x}{4}X+a\ln\frac{x+X}{2\sqrt{a}}=$$
$$=\frac{x}{4}\sqrt{x^2+4a}+a\operatorname{arsh}\frac{x}{2\sqrt{a}}$$

(значения ϑ_1 см. в табл. 19.3), получаем

19.10.2. $$U(a,x)=\frac{(2\pi)^{1/4}}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}}\exp\{-\theta+v(a,x)\},$$

19.10.3. $$U(a,-x)=\frac{(2\pi)^{1/4}}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}}\exp\{\theta+v(a,-x)\},$$

где

19.10.4. $$v(a,x)\sim-\frac{1}{2}\ln X+\sum_{s=1}(-1)^s\frac{d_{3s}}{X^{3s}}$$
$$(a>0,\ x^2+4a\to+\infty),$$

а d_{3s} выражаются формулами 19.10.13.

(2) $a < 0$, $x^2 + 4a$ — большое и положительное

Введя обозначения

19.10.5. $X = \sqrt{x^2 - 4|a|}$,

$$\theta = 4|a|\,\vartheta_2\left(\frac{x}{2\sqrt{|a|}}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{2\sqrt{|a|}}^{x} X\,dx = \frac{x}{4}X + a\ln\frac{x+X}{2\sqrt{|a|}} = \frac{x}{4}\sqrt{x^2-4|a|} + a\,\mathrm{arch}\,\frac{x}{2\sqrt{|a|}}$$

(значения ϑ_2 см. в табл. 19.3), получаем

19.10.6. $U(a, x) = \dfrac{\sqrt{\Gamma(^1/_2 - a)}}{(2\pi)^{1/4}}\exp\{-\theta + v(a, x)\}$,

19.10.7. $V(a, x) = $

$$= \frac{2}{(2\pi)^{1/4}\sqrt{\Gamma(^1/_2 - a)}}\exp\{\theta + v(a, -x)\},$$

где снова

19.10.8. $v(a, x) \sim -\dfrac{1}{2}\ln X + \sum\limits_{s=1}(-1)^s\dfrac{d_{3s}}{X^{3s}}$

$(a < 0,\ x^2 + 4a \to +\infty)$,

а d_{3s} выражаются формулами 19.10.13.

(3) a — отрицательное и большое по модулю, а x принимает умеренные значения

Введя обозначения

19.10.9. $Y = \sqrt{4|a| - x^2}$,

$$\theta = 4|a|\,\vartheta_4\left(\frac{x}{2\sqrt{|a|}}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x Y\,dx = \frac{x}{4}Y + |a|\arcsin\frac{x}{2\sqrt{|a|}}$$

$\left(\vartheta_4 = \dfrac{\pi}{8} - \vartheta_3\text{ см. в табл. 19.3}\right)$, получаем

19.10.10. $U(a, x) = $

$$= \frac{2\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)}}{(2\pi)^{1/4}}\,e^{v_r}\cos\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi a}{2} + \theta + v_i\right\},$$

19.10.11. $V(a, x) = $

$$= \frac{2}{(2\pi)^{1/4}\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)}}\,e^{v_r}\sin\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi a}{2} + \theta + v_i\right\},$$

где

19.10.12. $v_r \sim -\dfrac{1}{2}\ln Y - \dfrac{d_6}{Y^6} + \dfrac{d_{12}}{Y^{12}} - \ldots,$

$$v_i \sim \frac{d_3}{Y^3} - \frac{d_9}{Y^9} + \ldots\quad (x^2 + 4a \to -\infty).$$

Коэффициенты d_{3r} выражаются формулами

19.10.13. $d_3 = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{x^3}{48} + \dfrac{ax}{2}\right)$,

$$d_6 = \frac{3x^2}{4} - 2a,$$

$$d_9 = \frac{1}{a^3}\left(-\frac{7}{5760}x^9 - \frac{7}{320}ax^7 - \frac{49}{320}a^2x^5 + \frac{31}{12}a^3x^3 - 19a^4x\right),$$

$$d_{12} = \frac{153}{8}x^4 - 186ax^2 + 80a^2.$$

Значения $d_{15}, \ldots, d_{24}$ см. в [19.11]; в другой форме см. в [19.5].

19.11. МОДУЛИ И ФАЗЫ

Если $a < 0$ и $|x| < 2\sqrt{|a|}$, то функции U и V являются колеблющимися и их иногда записывают в более удобной форме:

19.11.1. $U(a, x) + i\Gamma\left(\dfrac{1}{2} - a\right)V(a, x) = $

$$= F(a, x)\,e^{i\chi(a, x)}.$$

19.11.2. $U'(a, x) + i\Gamma\left(\dfrac{1}{2} - a\right)V'(a, x) = $

$$= -G(a, x)\,e^{i\psi(a, x)}.$$

При $a < 0$ и $|a| \gg x^2$ имеем

19.11.3. $F = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right)}{2^{a/2+1/4}\sqrt{\pi}}e^{v_r}$,

$$\chi = \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi + px + v_i,$$

где v_r, v_i вычисляются по формулам 19.9.5; здесь $p = \sqrt{-a}$.

С другой стороны, если $p = \sqrt{|a|}$, $-a \gg x^2$, то

19.11.4. $$F\sim\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}\right)}{2^{a/2+1/4}\sqrt{\pi}}\left\{1+\frac{x^2}{(4p)^2}+\frac{\frac{5}{2}x^4}{(4p)^4}+\frac{\frac{15}{2}x^6-144x^2}{(4p)^6}+\ldots\right\},$$

19.11.5. $$\chi\sim\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi+px\left\{1-\frac{\frac{2}{3}x^2}{(4p)^2}-\frac{\frac{2}{5}x^4-16}{(4p)^4}-\frac{\frac{4}{7}x^6-\frac{256}{3}x^2}{(4p)^6}-\ldots\right\},$$

19.11.6. $$G\sim\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{a}{2}\right)}{2^{a/2-1/4}\sqrt{\pi}}\left\{1-\frac{x^2}{(4p)^2}-\frac{\frac{3}{2}x^4}{(4p)^4}-\frac{\frac{7}{2}x^6-176x^2}{(4p)^6}-\ldots\right\},$$

19.11.7. $$\psi\sim\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right)\pi+px\left\{1-\frac{\frac{2}{3}x^2}{(4p)^2}-\frac{\frac{2}{5}x^4+16}{(4p)^4}-\frac{\frac{4}{7}x^6+\frac{320}{3}x^2}{(4p)^6}-\ldots\right\}.$$

Если x^2+4a — отрицательное и большое по модулю, то, обозначив $Y=\sqrt{4|a|-x^2}$, получаем

19.11.8. $$F=\frac{2\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)}}{(2\pi)^{1/4}}e^{v_r},$$

$$\chi=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi a}{2}+\theta+v_i,$$

где θ, v_r и v_i вычисляются по формулам 19.10.9 и 19.10.12.

Другая форма асимптотических соотношений:

19.11.9. $$F\sim\frac{2\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)}}{(2\pi)^{1/4}\sqrt{Y}}\left(1+\frac{3}{4Y^4}+\frac{5a}{Y^6}+\frac{621}{32Y^8}+\ldots\right)\quad(x^2+4a\to-\infty),$$

19.11.10. $$G\sim\frac{\sqrt{Y}\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)}}{(2\pi)^{1/4}}\left(1-\frac{5}{4Y^4}-\frac{7a}{Y^6}-\frac{835}{32Y^8}-\ldots\right)\quad(x^2+4a\to-\infty).$$

При этом ψ и χ связаны соотношением

19.11.11. $$\psi-\chi\sim-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{Y^3}\left(1+\frac{47}{6Y^4}+\frac{214a}{3Y^6}+\frac{14\,483}{40Y^8}+\ldots\right)\quad(x^2+4a\to-\infty).$$

СВЯЗЬ С ДРУГИМИ ФУНКЦИЯМИ

19.12. СВЯЗЬ С ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ (см. гл. 13)

19.12.1. $$U(a,\pm x)=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{-a/2}x^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}\right)}M_{-a/2,\,-1/4}\left(\frac{x^2}{2}\right)\mp\frac{\sqrt{\pi}\,2^{1-a/2}x^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}\right)}M_{-a/2,\,1/4}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

19.12.2. $$U(a,x)=2^{-a/2}x^{-1/2}W_{-a/2,\,-1/4}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

19.12.3. $$U(a,\pm x)=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{-1/4-a/2}e^{-x^2/4}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}\right)}M\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right)\mp\frac{\sqrt{\pi}\,2^{1/4-a/2}xe^{-x^2/4}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}\right)}M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ \frac{x^2}{2}\right).$$

19.12.4. $$U(a,x)=2^{-1/4-a/2}e^{-x^2/4}U\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{x^2}{2}\right)=2^{-3/4-a/2}xe^{-x^2/4}U\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ \frac{x^2}{2}\right).$$

Формулы для функции $V(a,x)$ можно получить из этих соотношений при помощи 19.4.2.

19.13. СВЯЗЬ С МНОГОЧЛЕНАМИ И ФУНКЦИЯМИ ЭРМИТА

Если n принимает целые неотрицательные значения, то

19.13.1. $$U\left(-n-\frac{1}{2},\ x\right)= e^{-x^2/4}\,He_n(x)=2^{-n/2}\,e^{-x^2/4}\,H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

19.13.2. $$V\left(n+\frac{1}{2},\ x\right)= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{x^2/4}\,He_n^*(x)=2^{-n/2}\,e^{x^2/4}\,H_n^*\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

где $H_n(x)$ и $He_n(x)$ — многочлены Эрмита (см. гл. 22), а функции He_n^* и $H_n^*(x)$ имеют вид

19.13.3. $$He_n^*(x)=e^{-x^2/2}\,\frac{d^n}{dx^n}\,e^{x^2/2}=(-i)^n\,He_n(ix),$$

19.13.4. $$H_n^*(x)=e^{-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\,e^{x^2}=(-i)^n\,H_n(ix).$$

Этими формулами дается одно элементарное решение уравнения 19.1.2 в случае, когда $2a$ — целое нечетное.

19.14. СВЯЗЬ С ИНТЕГРАЛОМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И С ИНТЕГРАЛОМ ДОСОНА (см. гл. 7)

Если, как и в [19.10], ввести обозначения

19.14.1. $$Hh_{-1}(x)=e^{-x^2/2},$$

19.14.2. $$Hh_n(x)=\int_x^\infty Hh_{n-1}(t)\,dt=\frac{1}{n!}\int_x^\infty (t-x)^n\,e^{-t^2/2}\,dt\quad (n\geqslant 0),$$

то

19.14.3. $$U\left(n+\frac{1}{2},\ x\right)=e^{x^2/4}\,Hh_n(x)\quad (n\geqslant -1).$$

Соответственно,

19.14.4. $$V\left(\frac{1}{2},\ x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{x^2/4},$$

19.14.5. $$V\left(-n-\frac{1}{2},\ x\right)= e^{-x^2/4}\left\{\int_0^x e^{-t^2/4}\,V\left(-n+\frac{1}{2},\ t\right)dt-\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right\}\quad (n\geqslant 0).$$

Функция $V\left(-\frac{1}{2},\ x\right)$ тесно связана с интегралом Досона $\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

Эти соотношения дают второе решение уравнения 19.1.2, когда $2a$ принимает нечетные целые значения. В этом случае второе решение нельзя получить из $U(a, x)$ отражением относительно оси y.

19.15. ВЫРАЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ, КОГДА $2a$ — ЦЕЛОЕ

Записав

19.15.1. $$I_{-n}-I_n=\frac{2}{\pi}\sin n\pi\cdot K_n,$$

19.15.2. $$I_{-n}+I_n=\cos n\pi\cdot F_n,$$

получим 19.15.3—19.15.22 (здесь аргументом всех модифицированных бесселевых функций является $x^2/4$).

19.15.3. $$U(1,\ x)=2\pi^{-1/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}(-K_{1/4}+K_{3/4}).$$

19.15.4. $$U(2,x)=2\cdot\frac{2}{3}\,\pi^{-1/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{5/2}(2K_{1/4}-3K_{3/4}+K_{5/4}).$$

19.15.5. $$U(3,\ x)= 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\,\pi^{-1/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{7/2}(-5K_{1/4}+9K_{3/4}-5K_{5/4}+K_{7/4}).$$

19.15.6. $$V(1,\ x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}(F_{1/4}-F_{3/4}).$$

19.15.7. $$V(2,\ x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{5/2}(2F_{1/4}-3F_{3/4}+F_{5/4}).$$

19.15.8. $$V(3,\ x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{7/2}(5F_{1/4}-9F_{3/4}+5F_{5/4}-F_{7/4}).$$

19.15.9. $$U(0,\ x)=\pi^{-1/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}K_{1/4}.$$

19.15.10. $$U(-1,\ x)=\pi^{-1/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}(K_{1/4}+K_{3/4}).$$

19.15.11. $$U(-2,x)=\pi^{-1/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{5/2}(2K_{1/4}+3K_{3/4}-K_{5/4}).$$

19.15.12. $$U(-3,\ x)= \pi^{-1/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{7/2}(5K_{1/4}+9K_{3/4}-5K_{5/4}-K_{7/4}).$$

19.15.13. $$V(0,\ x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}F_{1/4}.$$

19.15.14. $V(-1,\ x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}(F_{1/4}+F_{3/4}).$

19.15.15. $V(-2,\ x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{5/2}(2F_{1/4}+3F_{3/4}-F_{5/4}).$

19.15.16. $V(-3,\ x)=$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^{7/2}(5F_{1/4}+9F_{3/4}-5F_{5/4}-F_{7/4}).$$

19.15.17. $U\left(-\frac{1}{2},\ x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)K_{1/2}.$

19.15.18. $U\left(-\frac{3}{2},\ x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^2 2K_{1/2}.$

19.15.19. $U\left(-\frac{5}{2},\ x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^3(5K_{1/2}-K_{3/2}).$

19.15.20. $V\left(\frac{1}{2},\ x\right)=\left(\frac{x}{2}\right)(I_{1/2}+I_{-1/2}).$

19.15.21. $V\left(\frac{3}{2},\ x\right)=\left(\frac{x}{2}\right)^2(2I_{1/2}+2I_{-1/2}).$

19.15.22. $V\left(\frac{5}{2},\ x\right)=$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^3(5I_{1/2}+5I_{-1/2}-I_{3/2}-I_{-3/2}).$$

УРАВНЕНИЕ $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{x^2}{4}-a\right)y=0$

19.16. РАЗЛОЖЕНИЯ В СТЕПЕННОЙ РЯД ПО x

Четные и нечетные решения даются формулами 19.2.1—19.2.4, если в них вместо a написать $-ia$, а вместо x написать $xe^{i\pi/4}$. Ряды содержат комплексные величины, но мнимая часть суммы тождественно равна нулю.

19.16.1. $y_1=1+a\frac{x^2}{2!}+\left(a^2-\frac{1}{2}\right)\frac{x^4}{4!}+$

$$+\left(a^3-\frac{7}{2}a\right)\frac{x^6}{6!}+\left(a^4-11a^2+\frac{15}{4}\right)\frac{x^8}{8!}+$$

$$+\left(a^5-25a^3+\frac{211}{4}a\right)\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$$

19.16.2. $y_2=x+a\frac{x^3}{3!}+\left(a^2-\frac{3}{2}\right)\frac{x^5}{5!}+$

$$+\left(a^3-\frac{13}{2}a\right)\frac{x^7}{7!}+\left(a^4-17a^2+\frac{63}{4}\right)\frac{x^9}{9!}+$$

$$+\left(a^5-35a^3+\frac{531}{4}a\right)\frac{x^{11}}{11!}+\ldots$$

В 19.16.1, 19.16.2 не равные нулю коэффициенты при $\frac{x^n}{n!}$ (обозначим их через a_n) связаны рекуррентным соотношением

19.16.3. $a_{n+2}=a\cdot a_n-\frac{n}{4}(n-1)a_{n-2}.$

19.17. СТАНДАРТНЫЕ РЕШЕНИЯ (см. [19.4])

19.17.1. $W(a,\ \pm x)=\frac{(\operatorname{ch}\pi a)^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}(G_1y_1\mp\sqrt{2}G_3y_2).$

19.17.2. $W(a,\ \pm x)=2^{-3/4}\left(\sqrt{\frac{G_1}{G_3}}\,y_1\mp\sqrt{\frac{2G_3}{G_1}}\,y_2\right).$

В 19.17.1, 19.17.2

19.17.3. $G_1=\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{ia}{2}\right)\right|,\quad G_3=\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{ia}{2}\right)\right|.$

При $x=0$ имеем

19.17.4. $W(a,\ 0)=\frac{1}{2^{3/4}}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{ia}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{ia}{2}\right)}\right|^{1/2}=\frac{1}{2^{3/4}}\sqrt{\frac{G_1}{G_3}}.$

19.17.5. $W'(a,0)=-\frac{1}{2^{1/4}}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{ia}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{ia}{2}\right)}\right|^{1/2}=$

$$=-\frac{1}{2^{1/4}}\sqrt{\frac{G_3}{G_1}}.$$

Комплексные решения

19.17.6. $E(a,\ x)=k^{-1/2}W(a,\ x)+ik^{1/2}W(a,\ -x).$

19.17.7. $E^*(a,\ x)=k^{-1/2}W(a,\ x)-ik^{1/2}W(a,\ -x).$

В 19.17.6, 19.17.7

19.17.8. $k=\sqrt{1-e^{2\pi a}}-e^{\pi a},\ \frac{1}{k}=\sqrt{1+e^{2\pi a}}+e^{\pi a}.$

Выражая через функцию $U(a, x)$, из 19.3 получаем

19.17.9. $E(a,\ x) = \sqrt{2}\, e^{\pi a/4 + i\pi/8 + i\Phi_2/2}\, U(ia,\ xe^{-i\pi/4}),$

где

19.17.10. $\Phi_2 = \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + ia\right),$

причем берется та ветвь, для которой $\Phi_2 = 0$ при $a = 0$. Имеем также

19.17.11. $\sqrt{2\pi}\, U(ia,\ xe^{-i\pi/4}) =$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right)\{e^{\pi a/2 - i\pi/4}\, U(-ia,\ xe^{i\pi/4}) + e^{-\pi a/2 + i\pi/4}\, U(-ia,\ -xe^{i\pi/4})\}.$$

19.18. ВРОНСКИАН И ДРУГИЕ СООТНОШЕНИЯ

19.18.1. $W\{W(a,\ x),\ W(a,\ -x)\} = 1.$

19.18.2. $W\{E(a,\ x),\ E^*(a,\ x)\} = -2i.$

19.18.3. $\sqrt{1 + e^{2\pi a}}\, E(a,\ x) = e^{\pi a}\, E^*(a, x) + iE^*(a, -x).$

19.18.4. $E^*(a,\ x) = e^{-i(\Phi_2 + \pi/4)}\, E(-a,\ ix).$

19.18.5. $\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2} + ia\right)}\, E^*(a,\ x) =$

$$= e^{-i\pi/4} \sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right)}\, E(-a, ix).$$

19.19. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Эти представления для уравнения 19.1.3, так же как для 19.1.2, даны в 19.5 (общий комплексный аргумент).

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

19.20. РАЗЛОЖЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ФУНКЦИИ ЭЙРИ

Пусть a — большое положительное, $0 \leqslant x < \infty$, $x = 2\sqrt{a}\,\xi$, $t = (4a)^{2/3}\tau$ и

19.20.1. $\tau = \left(-\frac{3}{2}\vartheta_3\right)^{2/3}$, $\vartheta_3 = \frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{1} \sqrt{1 - s^2}\, ds =$

$$= \frac{1}{4}\arccos \xi - \frac{1}{4}\xi\sqrt{1 - \xi^2} \qquad (\xi \leqslant 1),$$

19.20.2. $\tau = +\left(\frac{3}{2}\vartheta_2\right)^{2/3}$, $\vartheta_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{\xi} \sqrt{s^2 - 1}\, ds =$

$$= \frac{1}{4}\xi\sqrt{\xi^2 - 1} - \frac{1}{4}\operatorname{arch} \xi \qquad (\xi \geqslant 1).$$

Тогда для $x > 0$, $a \to +\infty$ имеем

19.20.3. $W(a,\ x) \sim \sqrt{\pi}\,(4a)^{-1/4} e^{-\pi a/2} \left(\frac{t}{\xi^2 - 1}\right)^{1/4} \mathrm{Bi}\,(-t),$

19.20.4. $W(a,\ -x) \sim$

$$\sim 2\sqrt{\pi}\,(4a)^{-1/4} e^{\pi a/2} \left(\frac{t}{\xi^2 - 1}\right)^{1/4} \mathrm{Ai}\,(-t).$$

Табл. 19.3 содержит значения τ как функции от ξ. Другие разложения см. в [19.5].

19.21. РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ x И УМЕРЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ a

Если $x \gg |a|$, то

19.21.1. $E(a, x) - \sqrt{\frac{2}{x}} \exp\left\{i\left(\frac{x^2}{4} - a\ln x + \frac{\Phi_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} s(a,\ x),$

19.21.2. $W(a,\ x) =$

$$= \sqrt{\frac{2k}{x}}\left\{s_1(a, x)\cos\left(\frac{x^2}{4} - a\ln x + \frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_2}{2}\right) - s_2(a,\ x)\sin\left(\frac{x^2}{4} - a\ln x + \frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_2}{2}\right)\right\},$$

19.21.3. $W(a,\ -x) =$

$$= \sqrt{\frac{2}{kx}}\left\{s_1(a, x)\sin\left(\frac{x^2}{4} - a\ln x + \frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_2}{2}\right) + s_2(a,\ x)\cos\left(\frac{x^2}{4} - a\ln x + \frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_2}{2}\right)\right\},$$

где Φ_2 определяется формулой 19.17.10 и

19.21.4. $s(a,\ x) = s_1(a,\ x) + is_2(a,\ x),$

19.21.5. $s_1(a,\ x) \sim 1+\frac{v_2}{1!2x^2}-\frac{u_4}{2!2^2x^4}-$

$$-\frac{v_6}{3!2^3x^6}+\frac{u_8}{4!2^4x^8}+\ldots,$$

19.21.6. $s_2(a,\ x) \sim \frac{u_2}{1!2x^2}-\frac{v_4}{2!2^2x^4}+$

$$+\frac{u_6}{3!2^3x^6}+\frac{v_8}{4!2^4x^8}-\ldots\ (x\to+\infty),$$

19.21.7. $u_r+iv_r=\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}+ia\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+ia\right)}.$

Функцию $s(a,x)$ можно записать в виде

19.21.8. $s(a,\ x)\sim$

$$\sim\sum_{r=0}^{\infty}(-i)^r\frac{\Gamma\left(2r+\frac{1}{2}+ia\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+ia\right)}\frac{1}{2^r r!x^{2r}}.$$

19.22. РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ a И УМЕРЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ x

(1) $a>0$

Если $a\gg x^2$, то, обозначив $p=\sqrt{a}$, получаем

19.22.1. $W(a,\ x)=W(a,\ 0)\exp(-px+v_1)$,

19.22.2. $W(a,\ -x)=W(a,\ 0)\exp(px+v_2)$,

где $W(a,0)$ задается формулой 19.17.4 и

19.22.3. $v_1,\ v_2\sim$

$$\sim\pm\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3}{2p}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(2p)^2}\pm\frac{\frac{x}{2}+\frac{2}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5}{(2p)^3}+$$

$$+\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2p)^4}\pm\frac{\frac{16}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{4}{7}\left(\frac{x}{2}\right)^7}{(2p)^5}+\ldots$$

$$(a\to+\infty).$$

Верхний знак относится к первой функции, а нижний знак — ко второй.

(2) $a<0$

Если $-a\gg x^2$, то, обозначив $p=\sqrt{-a}$, получаем

19.22.4. $W(a,\ x)+iW(a,\ -x)=$

$$=\sqrt{2}W(a,\ 0)\exp\left\{v_r+i\left(px+\frac{\pi}{4}+v_i\right)\right\},$$

где $W(a,\ 0)$ задается формулой 19.17.4 и

19.22.5. $v_r\sim$

$$\sim-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(2p)^2}+\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2p)^4}-\frac{9\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{16}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(2p)^6}+\ldots,$$

$$v_i\sim\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3}{2p}-$$

$$-\frac{\frac{x}{2}+\frac{2}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5}{(2p)^3}+\frac{\frac{16}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{4}{7}\left(\frac{x}{2}\right)^7}{(2p)^5}-\ldots(a\to-\infty).$$

Другие разложения такого типа можно найти в [19.3].

19.23. РАЗЛОЖЕНИЯ ДАРВИНА

(1) $a>0,\ x^2-4a\gg0$

Положив

19.23.1. $X=\sqrt{x^2-4a}$,

$$\theta=4a\vartheta_2\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right)=\frac{1}{2}\int_{2\sqrt{a}}^{x}X\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}xX-a\ln\frac{x+X}{2\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{1}{4}x\sqrt{x^2-4a}-a\operatorname{arch}\frac{x}{2\sqrt{a}}$$

(значения ϑ_2 см. в табл. 19.3), получаем

19.23.2. $W(a,\ x)=\sqrt{2k}\,e^{v_r}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta+v_i\right).$

19.23.3. $W(a,\ -x)=\sqrt{\frac{2}{k}}e^{v_r}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta+v_i\right).$

где

19.23.4. $v_r\sim-\frac{1}{2}\ln X-\frac{d_6}{X^6}+\frac{d_{12}}{X^{12}}-\ldots,$

$$v_i\sim-\frac{d_3}{X^3}+\frac{d_9}{X^9}-\frac{d_{15}}{X^{15}}+\ldots\qquad(x^2-4a\to\infty)$$

и d_{3r} вычисляются по формулам 19.23.12.

(2) $a > 0,\ 4a - x^2 \geqslant 0$

Положив

19.23.5. $Y = \sqrt{4a - x^2}$,

$$\theta = 4a\vartheta_4\left(\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{2}\int_0^x Y\,dx = \frac{1}{4}xY + a\arcsin\frac{x}{2\sqrt{a}}$$

(значения $\vartheta_4 = \frac{1}{8}\pi - \vartheta_3$ см. в табл. 19.3), получаем

19.23.6. $W(a,\ x) = \exp\{-\theta + v(a,\ x)\}$,

19.23.7. $W(a,\ -x) = \exp\{\theta + v(a,\ -x)\}$,

где

19.23.8. $v(a,\ x) \sim -\frac{1}{2}\ln Y + \frac{d_3}{Y^3} + \frac{d_6}{Y^6} + \frac{d_9}{Y^9} + \ldots$

$$(x^2 - 4a \to -\infty)$$

и d_{3r} вычисляются по формулам 19.23.12.

(3) $a < 0,\ x^2 - 4a \geqslant 0$

Положив

19.23.9. $X = \sqrt{x^2 + 4|a|}$,

$$\theta = 4|a|\vartheta_1\left(\frac{x}{2\sqrt{|a|}}\right) = \frac{1}{2}\int_0^x X\,dx = \frac{1}{4}xX - a\ln\frac{x+X}{2\sqrt{|a|}} = \frac{1}{4}x\sqrt{x^2 + 4|a|} - a\,\mathrm{arsh}\,\frac{x}{2\sqrt{|a|}}$$

(значения ϑ_1 см. в табл. 19.3), получаем

19.23.10. $W(a,\ x) = \sqrt{2k}\,e^{v_r}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta + v_i\right)$,

19.23.11. $W(a,\ -x) = \sqrt{\frac{2}{k}}\,e^{v_r}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta + v_i\right)$,

где v_r и v_i вычисляются по формулам 19.23.4.

Всюду коэффициенты d_{3r} задаются формулами

19.23.12. $d_3 = -\frac{1}{a}\left(\frac{x^3}{48} - \frac{1}{2}ax\right)$,

$$d_6 = \frac{3}{4}x^2 + 2a,$$

$$d_9 = \frac{1}{a^3}\left(\frac{7}{5760}x^9 - \frac{7}{320}ax^7 + \frac{49}{320}a^2x^5 + \frac{31}{21}a^3x^3 + 19a^4x\right),$$

$$d_{12} = \frac{153}{8}x^4 + 186ax^2 + 80a^2.$$

Значения $d_{15}, \ldots, d_{24}$ см. в [19.11]. В другой форме их можно найти в [19.5].

19.24. МОДУЛИ И ФАЗЫ

Если $a > 0$, то при $x < -2\sqrt{a}$ и $x > 2\sqrt{a}$ функция $W(a, x)$ является колеблющейся. Если $a < 0$, то она является колеблющейся при всех x. В этих случаях иногда удобно ввести обозначения ($x > 0$):

19.24.1. $k^{-1/2}W(a,\ x) + ik^{1/2}W(a,\ -x) = E(a,\ x) = Fe^{i\chi}$,

19.24.2. $k^{-1/2}\frac{dW(a,\ x)}{dx} + ik^{1/2}\frac{dW(a,\ -x)}{dx} = E'(a,\ x) = -Ge^{i\psi}$,

Тогда при $x^2 \gg |a|$ будем иметь

19.24.3. $F \sim \sqrt{\frac{2}{x}}\left(1 + \frac{a}{x^2} + \frac{10a^2 - 3}{4x^4} + \frac{30a^3 - 47a}{4x^6} + \ldots\right)$,

19.24.4. $\chi \sim \frac{x^2}{4} - a\ln x + \frac{\Phi_2}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{4a^2 - 3}{8x^2} + \frac{4a^3 - 19a}{8x^4} + \ldots$,

19.24.5. $G \sim \sqrt{\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{a}{x^2} - \frac{6a^2 - 5}{4x^4} - \frac{14a^3 - 63a}{4x^6} - \ldots\right)$,

19.24.6. $\psi \sim \frac{x^2}{4} - a\ln x + \frac{\Phi_2}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{4a^2 + 5}{8a^2} + \frac{4a^3 + 29a}{8x^4} + \ldots$,

где Φ_2 определяется формулой 19.17.10.

Если $a < 0$, $|a| \gg x^2$, то

19.24.7. $F \sim \sqrt{2}\,W(a,\ 0)\,e^{v_r}$,

где v_r задается формулой 19.22.5, причем $p = \sqrt{-a}$. Кроме того, имеют место 19.24.8—19.24.11.

19.24.8. $F \sim$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{p}}\left(1 - \frac{x^2}{(4p)^2} + \frac{\frac{5}{2}x^4 + 8}{(4p)^4} - \frac{\frac{15}{2}x^6 + 152x^2}{(4p)^6} + \ldots\right).$$

19.24.9. $$\chi\sim\frac{\pi}{4}+px\left(1+\frac{\frac{2}{3}x^2}{(4p)^2}-\frac{\frac{2}{5}x^4+16}{(4p)^4}+\frac{\frac{4}{7}x^6+\frac{256}{3}x^2}{(4p)^6}-\ldots\right).$$

19.24.10. $$G\sim\sqrt{p}\left(1+\frac{x^2}{(4p)^2}-\frac{\frac{3}{2}x^4+8}{(4p)^4}+\frac{\frac{7}{2}x^6+168x^2}{(4p)^6}-\ldots\right).$$

19.24.11. $$\psi\sim-\frac{\pi}{4}+px\left(1+\frac{\frac{2}{3}x^2}{(4p)^2}-\frac{\frac{2}{3}x^4-16}{(4p)^4}+\frac{\frac{4}{7}x^6-\frac{320}{3}x^2}{(4p)^6}-\ldots\right).$$

Далее, если $a<0$, $x^2-4a\geqslant 0$, то, обозначив $X=\sqrt{x^2+4|a|}$, получаем

19.24.12. $$F\sim\sqrt{2}\,e^{v_r},\quad \chi=\frac{\pi}{4}+\theta+v_i,$$

где θ, v_r и v_i задаются формулами 19.23.4 и 19.23.9.

При $a>0$ и $x^2-4a\to\infty$ имеем

19.24.13. $$F\sim\sqrt{\frac{2}{X}}\left(1-\frac{3}{4X^4}-\frac{5a}{X^6}+\frac{621}{32X^8}+\frac{1371a}{4X^{10}}-\ldots\right),$$

19.24.14. $$G\sim\sqrt{\frac{X}{2}}\left(1+\frac{5}{4X^4}+\frac{7a}{X^6}-\frac{835}{32X^8}-\frac{1729a}{4X^{10}}+\ldots\right),$$

где ψ и χ связаны соотношением

19.24.15. $$\psi-\chi\sim-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{X^3}\left(1-\frac{47}{6X^4}-\frac{214a}{3X^6}+\frac{14483}{40X^8}+\ldots\right).$$

19.25. СВЯЗЬ С ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И БЕССЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

19.25.1. $$W(a,\pm x)=2^{-3/4}\left\{\sqrt{\frac{G_1}{G_3}}\,H\left(-\frac{3}{4},\frac{a}{2},\frac{x^2}{4}\right)\pm\sqrt{\frac{2G_3}{G_1}}\,xH\left(-\frac{1}{4},\frac{a}{2},\frac{x^2}{4}\right)\right\},$$

где

19.25.2. $H(m,n,x)=e^{-ix}{}_1F_1(m+1-in;\ 2m+2;\ 2ix)$,

19.25.3. $H(m,n,x)=e^{-ix}M(m+1-in;\ 2m+2;\ 2ix)$,

19.25.4. $$W(0,\pm x)=2^{-5/4}\sqrt{\pi x}\left\{J_{-1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right)\pm J_{1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right)\right\}\quad(x\geqslant 0),$$

19.25.5. $$\frac{d}{dx}W(0,\pm x)=-2^{-9/4}x\sqrt{\pi x}\left\{J_{3/4}\left(\frac{x^2}{4}\right)\pm J_{-3/4}\left(\frac{x^2}{4}\right)\right\}\quad(x\geqslant 0).$$

19.26. НУЛИ

Решения $U(a,x)$, $V(a,x)$ уравнения 19.1.2 имеют нули только при $|x|<2\sqrt{-a}$, когда a отрицательно. Однако общее решение может иметь один исключительный нуль при любом a. Ни одно из решений $U(a,x)$ и $V(a,x)$ не имеет нулей при $x>0$.

Приближения для нулей можно получить обращением рядов для ψ (или χ в случае нулей производных), приведенных в 19.11, которые дают для ψ (или χ) значения, кратные $\pi/2$, причем с нечетным множителем для $U(a,x)$ и четным для $V(a,x)$. Беря

$$\alpha=\left(\frac{r}{2}-\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right)\pi$$

в качестве приближения для нуля функции или

$$\beta=\left(\frac{r}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi$$

в качестве приближения для нуля производной, получаем для соответствующих нулей c или c' выражения

19.26.1. $$c\approx\frac{\alpha}{p}+\frac{2\alpha^3-3\alpha}{48p^5}+\frac{52\alpha^5-240\alpha^3+315\alpha}{7680p^9}+\ldots,$$

19.26.2. $$c'\approx\frac{\beta}{p}+\frac{2\beta^3+3\beta}{48p^5}+\frac{52\beta^5+280\beta^3-285\beta}{7680p^9}+\ldots,$$

где $-a=p^2$.

Однако в окрестности переходной точки $x=2\sqrt{-a}$ эти разложения не представляют большой ценности. В этом случае первое приближение можно получить при помощи формул из 19.7. Если a_n есть нуль (отрицательный) функции

$\mathrm{Ai}(t)$, то приближенное значение соответствующего нуля c функции $U(a, x)$ можно получить из уравнения

19.26.3. $$\vartheta_3 = \frac{1}{4}\{\arccos\xi - \xi\sqrt{1-\xi^2}\} = \frac{(-a_n)^{3/2}}{6|a|},$$

$$c = 2\sqrt{|a|}\xi, \quad a \leqslant 0.$$

Для этого нужно использовать табл. 19.3, считая ϑ_3 аргументом. Для вычисления нуля функции $V(a, x)$ нужно заменить a_n на нуль b_n функции $\mathrm{Bi}(t)$. Более подробно об этом см. в [19.5].

Решения $W(a, x)$, $W(a, -x)$ уравнения 19.1.3 имеют нули при $|x| > 2\sqrt{a}$, когда a положительно, однако общее решение может иметь один простой нуль между $-2\sqrt{a}$ и $+2\sqrt{a}$. Если a отрицательно, то расположение нулей не ограничивается какими-либо условиями.

Приближения для нулей можно получить обращением рядов для ϕ (или χ) из 19.24. Пусть $-a = p^2$, $\alpha = \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi$, $\beta = \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$, и $r \geqslant 0$ есть нечетное целое число для $W(a, x)$ или ее производной и четное целое для $W(a, -x)$ или ее производной. Тогда нули $\pm c$, $\pm c'$ вычисляются из разложений

19.26.4. $$c \approx \frac{\alpha}{p} - \frac{2\alpha^3 - 3\alpha}{48p^5} + \frac{52\alpha^5 - 240\alpha^3 + 315\alpha}{7680p^9} + \ldots,$$

19.26.5. $$c' \approx \frac{\beta}{p} - \frac{2\beta^3 + 3\beta}{48p^5} + \frac{52\beta^5 + 280\beta^3 - 285\beta}{7680p^9} + \ldots$$

Если x велико, a принимает умеренные значения, то можно обратить ряды 19.24.4 или 19.24.6, полагая $\alpha = \frac{1}{2}\left(r\pi - \frac{\pi}{2} - \Phi_2\right)$, $\beta = \frac{1}{2}\left(r\pi + \frac{\pi}{2} - \Phi_2\right)$, r — нечетное или четное, как и выше. Наличие в этих рядах члена с логарифмом делает их неудобными для формального обращения.

Если x находится в окрестности точки $2\sqrt{|a|}$, то разложения 19.26.4 и 19.26.5 не годятся.

Если a положительно, то нуль c функции $W(a, -x)$ можно получить приближенно, решая уравнение

19.26.6. $$\vartheta_2 = \frac{1}{4}\{\xi\sqrt{\xi^2-1} - \mathrm{Arch}\,\xi\} = \frac{(-a_n)^{3/2}}{6a},$$

$$c = 2\sqrt{a}\xi \quad (a \geqslant 0)$$

при помощи табл. 19.3. Для нахождения нуля функции, $W(a, x)$ нужно заменить a_n через b_n. Если a отрицательно, то можно решить, опять при помощи табл. 19.3, уравнение

19.26.7. $$\vartheta_1 = \frac{1}{4}\{\xi\sqrt{\xi^2+1} + \mathrm{Arsh}\,\xi\} = \frac{\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi}{4|a|},$$

$$c = 2\sqrt{|a|}\xi \quad (-a \geqslant 0),$$

где $n = 1, 2, \ldots$ для приближенного нуля функции $W(a, -x)$ и $n = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$ для приближенного нуля функции $W(a, x)$. Более подробно об этом см. в [19.5].

Любое из полученных выше приближений для нулей можно улучшить следующим образом.

Пусть c — нуль функции y, а c' — нуль функции y', где y есть решение уравнения

19.26.8. $$y'' - Iy = 0.$$

Здесь $I = a \pm x^2/4$, $I' = \pm x/2$, $I'' = \pm 1/2$; но метод является общим и можно использовать следующие формулы всегда, когда $I''' = 0$. Если γ, γ' — приближения для нулей c, c' и

19.26.9. $$u = \frac{y(\gamma)}{y'(\gamma)}, \quad v = \frac{y'(\gamma')}{I^2 y(\gamma')},$$

где $I \equiv I(\gamma)$ или $I \equiv I(\gamma')$ соответственно, то

19.26.10. $$c \sim \gamma - u - \frac{1}{3}Iu^3 + \frac{1}{12}I'u^4 - \left(\frac{1}{60}I'' + \frac{1}{5}I^2\right)u^5 + \frac{11}{90}II'u^6 + \ldots,$$

19.26.11. $$y'(c) \sim y'(\gamma)\left\{1 - \frac{1}{2}Iu^2 + \frac{1}{6}I'u^3 - \left(\frac{1}{24}I'' + \frac{1}{8}I^2\right)u^4 + \frac{7}{60}II'u^5 + \ldots\right\},$$

19.26.12. $$c' \sim \gamma' - Iv - \frac{1}{2}II'v^2 + \left(\frac{1}{6}I^2I'' - \frac{1}{2}II'^2 - \frac{1}{3}I^4\right)v^3 + \left(\frac{5}{12}I^2I'I'' - \frac{5}{8}II'^3 - \frac{5}{12}I^4I'\right)v^4 + \ldots,$$

19.26.13. $$y(c') \sim y(\gamma')\left\{1 - \frac{1}{2}I^3v^2 - \frac{1}{6}I^3I'v^3 - \left(\frac{1}{8}I^3I'^2 - \frac{1}{24}I^4I'' + \frac{1}{8}I^6\right)v^4 + \ldots\right\}.$$

В случае необходимости процесс можно повторять, используя каждый раз подходящее количество членов.

Приведем некоторые соотношения для нулей:

19.26.14. $$U'(a, c) = -\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{V(a, c)},$$

19.26.15. $$V'(a, c') = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{U(a, c')},$$

19.26.16. $$W'(a, c) = -\frac{1}{W(a, -c)},$$

19.26.17. $$W(a, c') = \frac{1}{\left\{\frac{d}{dx}W(a, -x)\right\}_{x=c'}} = -\frac{1}{W'(a, -c')}.$$

19.27. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ ПОРЯДКОВ $\pm 1/4$, $\pm 3/4$ КАК ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Многие приложения этих функций относятся к случаям, когда функции параболического цилиндра являются более подходящими.

Имеем

19.27.1. $$J_{\pm 1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi x}}\{W(0, -x) \mp W(0, x)\},$$

19.27.2. $$J_{\pm 3/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{-2^{1/4}}{x\sqrt{\pi x}}\{W(0, x) \pm W(0, -x)\}.$$

Функции других порядков можно получить при помощи рекуррентного соотношения 10.1.22, которое в данном случае принимает вид

19.27.3. $$\frac{x^2}{4} J_{\nu+1}\left(\frac{x^2}{4}\right) - 2\nu J_\nu\left(\frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{4} J_{\nu-1}\left(\frac{x^2}{4}\right) = 0.$$

Далее,

19.27.4. $$I_{-1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) + I_{1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}} V(0, x),$$

19.27.5. $$\frac{\sqrt{2}}{\pi} K_{1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) = I_{-1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) - I_{1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi x}} U(0, x),$$

19.27.6. $$I_{-3/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) + I_{3/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) = -\frac{4}{x\sqrt{x}}\frac{d}{dx} V(0, x),$$

19.27.7. $$\frac{\sqrt{2}}{\pi} K_{3/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) = I_{-3/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) - I_{3/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) = -\frac{4}{x\sqrt{\pi x}}\frac{d}{dx} U(0, x).$$

Как и выше, функции Бесселя других порядков можно получить, используя рекуррентное соотношение 10.2.23, которое в данном случае записывается в виде

19.27.8. $$\frac{x^2}{4} I_{\nu+1}\left(\frac{x^2}{4}\right) + 2\nu I_\nu\left(\frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^2}{4} I_{\nu-1}\left(\frac{x^2}{4}\right) = 0,$$

19.27.9. $$\frac{x^2}{4} K_{\nu+1}\left(\frac{x^2}{4}\right) - 2\nu K_\nu\left(\frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^2}{4} K_{\nu-1}\left(\frac{x^2}{4}\right) = 0.$$

ПРИМЕРЫ

Значения $U(a, x)$, $V(a, x)$ и $W(a, x)$ интерполированием по x при помощи 5- или 6-точечной интерполяционной формулы Лагранжа можно почти всюду получить с пятью знаками. При $|a| \leqslant 1$ при помощи 5- или 6-точечной интерполяции по переменной a можно получить точность примерно такого же порядка.

При $|a| > 1$ значения $U(a, x)$ и $V(a, x)$ можно получить по рекуррентным формулам, исходя из двух начальных значений, найденных при помощи интерполирования при $|a| \leqslant 1$. Для функции $W(a, \pm x)$ такой метод неприменим при $|a| > 1$.

В тех случаях, когда непосредственное использование рекуррентных формул для возрастающих значений переменной a (рекуррентный процесс «вперед») не позволяет получить результат с достаточной точностью, обычно можно достичь большей точности, используя ту же рекуррентную формулу в обратном направлении («назад»). В этом случае процесс начинают с произвольных начальных значений (чаще всего 1 и 0) для двух значений a, больших искомого значения.

Рекуррентное соотношение является линейным однородным разностным уравнением второго порядка, которое имеет два линейно независимых решения. Если при изменении a искомое решение убывает, в то время как другое решение возрастает, то в убывающем решении происходит потеря точности из-за накопления ошибки округления. Переменой направления изменения можно поменять ролями эти два решения, чтобы искомое решение возрастало, а ненужное решение убывало. Начиная достаточно далеко от последнего значения a, для которого вычисляется функция, ненужным решением можно пренебречь. Однако из-за произвольности начальных значений мы получим искомое решение с точностью до неизвестного множителя. Вычисления проводятся до тех значений a, у которых $|a| \leqslant 1$, когда можно будет определить этот множитель достаточно точно (см. также 9.12, пример 1).

Пример 1. **Вычислить $U(a, 5)$ для $a = 5, 6, 7, \ldots$, используя 19.6.4.**

$$\left(a + \frac{1}{2}\right) U(a + 1, x) + xU(a, x) - U(a - 1, x) = 0.$$

a	Рекуррентная формула «вперед»	Рекуррентная формула «назад»	Окончательные значения
3	(-6) 5.2847*)	(12)1.59035	(-6)5.2847**)
4	(-7) 9.172*)	(11)2.76028	(-7)9.1724
5	(-7) 1.5527	(10)4.67131	(-7)1.55227
6	(-8) 2.5609	(9)7.72041	(-8)2.5655
7	(-9) 4.1885	(9)1.24785	(-9)4.1466
8	(-10) 6.2220	(8)1.97488	(-10)6.5625
9	$(-10)+1.2676$	(7)3.06369	(-10)1.01806
10	$(-11)-0.1221$	(6)4.66352	(-11)1.5497
11	$(-11)+1.2654$	(0) 697082	(-12)2.3164
12	$(-12)-5.6079$	102444	(-13)3.404
13	$(-12)+3.2555$	14789	(-14)4.91
14		2111	(-15)7.01
15		292	(-16)9.7
16		42	
17		5	
18		1***)	
19		0***)	

*) Из таблиц.

**) Это значение было использовано для получения постоянного множителя $\frac{d}{k^*} = \frac{(-6)\ 5.2847}{(12)\ 1.59035} = (-18)\ 3.32298$ для обращения предыдущего столбца в данный.

***) Начальные значения.

Рекуррентная формула «вперед» (см. второй столбец) начинается со значений при $a = 3$ и $a = 4$, взятых из табл. 19.1. Рекуррентная формула «назад» начинается со значений 0 и 1 при $a = 19$ и $a = 18$.

Данные третьего столбца $\widetilde{U}(a, x)$ пропорциональны значениям функции $U(a, x)$. Коэффициент пропорциональности зависит от выбора начальных значений и от ошибки округления. Величина $1/k^5$ вычисляется посредством деления известного значения $U(3, 5)$ на значение $\widetilde{U}(3, 5)$. Умножая на эту величину числа третьего столбца, получаем соответствующие значения $U(a, x)$, помещенные в четвертом столбце. Сравнивая с табличным (из табл. 19.1) значения $U(5, 5)$ из второго и четвертого столбцов, убеждаемся, что последнее точнее.

Так как функции $U(a, x)$, $V(a, x)$ и $W(a, x)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям, часто бывают нужны значения их производных.

Производные. Но здесь производные не табулированы. Для всех функций уравнения имеют второй порядок, в них отсутствуют первые производные, поэтому вторые производные можно легко получить по значениям самой функции.

Первые производные для $U(a, x)$ и $V(a, x)$ можно получить при помощи рекуррентных соотношений 19.6.1, 19.6.2. Если не нужна бо́льшая точность, то их можно найти при помощи средних центральных разностей функций $U(a, x)$, $V(a, x)$ и $W(a, x)$ по формуле

$$hu' = h\frac{du}{dx} = \mu\delta u - \frac{1}{6}\mu\delta^3 u + \frac{1}{30}\mu\delta^5 u - \dots,$$

где $h = 0.1$. По этой формуле обычно можно получить значение du/dx с 3 – 4 значащими цифрами.

Если производная $dW(ax)/dx$ требуется с большей точностью, то можно сначала вычислить d^2W/dx^2 при помощи дифференциального уравнения, которому удовлетворяет W, а затем численно проинтегрировать эту вторую производную. При этом потребуется одно точное значение производной dW/dx, чтобы использовать его в качестве исходного при интегрировании. Опишем два метода получения этого значения. Оба метода основаны на использовании разности между двумя довольно отдаленными значениями W, например, отстоящими друг от друга на 5 или 10 табличных шагов.

(1) Обозначая $W(a, x_0 + rh)$ и первые две ее производные соответственно через f_r, f'_r, f''_r, найдем f'_0 по формуле

$$hf'_0 = \frac{1}{2n}(f_n - f_{-n}) - \frac{h^2}{2n}\sum_{1}^{n-1}(n - r)(f''_r - f''_{-r}) -$$
$$- \frac{h^2}{2n}\left\{\frac{1}{12} - \frac{1}{240}\delta^2 + \frac{31}{60\,480}\delta^4 - \dots\right\}(f''_n - f''_{-n}) -$$
$$- h^2\left\{\frac{1}{12}\mu\delta - \frac{11}{720}\mu\delta^3 + \frac{191}{60\,480}\mu\delta^5 - \dots\right\}f''_0.$$

(2) Рассмотрим решение y дифференциального уравнения для $W(a, x)$, а именно уравнения $y'' = \left(-\frac{x^2}{4} + a\right)y$. Если заданы значения y и y' при $x = x_0$, то, полагая $T_n = H^n\frac{y^{(n)}}{n!}$, $T_{-1} = T_{-2} = 0$, можем вычислить последовательно $T_2, T_3, T_4, \dots$ при помощи рекуррентного соотношения, полученного из этого дифференциального уравнения:

$$T_{n+2} = \frac{H^2}{(n+1)(n+2)}\left[\left(-\frac{x_0^2}{4} + a\right)T_n - \frac{1}{2}Hx_0T_{n-1} - \frac{1}{4}H^2T_{n-2}\right].$$

Эти значения вычисляются с фиксированным числом десятичных знаков. Вычисления прекращаются, когда величиной T_n уже можно пренебречь. Получим

$$y(x_0 \pm H) = T_0 \pm T_1 + T_2 \pm T_3 + \dots$$

Пусть $H = rh$, h — табличный шаг, r — небольшое число, например, $r = 5$. Применим полученную формулу к решениям $y = y_1$, $y = y_2$:

$$y_1(x_0) = W(a, x_0), \quad y'_1(x_0) = W^{*\prime}(a, x_0),$$
$$y_2(x_0) = 0, \quad y'_2(x_0) = 1,$$

где $W^{*\prime}(a, x_0)$ есть приближенное значение $W'(a, x_0)$, не обязательно достаточно хорошее, полученное, например, при помощи разностей. Таким образом, получаем $y_1(x_0 \pm H)$ и $y_2(x_0 \pm H)$. Предположим теперь, что

$$W'(a, x_0) = W^{*\prime}(a, x_0) + \lambda;$$

тогда для всех x имеем

$$W(a, x) = y_1(x) + \lambda y_2(x)$$

и, в частности,

$$W(a, x_0 \pm H) = y_1(x_0 \pm H) + \lambda y_2(x_0 \pm H).$$

Значения $W(a, x_0 \pm H)$ можно получить из таблиц и вычислить λ двумя независимыми способами. Тогда мы получим с достаточной точностью

$$W'(a, x_0) = W^{*\prime}(a, x_0) + \lambda.$$

Пример 2. Вычислить $W'(-3, 1)$ при $r = 5$. В табл. 19.2 находим $W(-3, 0.5) = -0.05857$, $W(-3, 1) = -0.61113$, $W(-3, 1.5) = -0.69502$.

(1) Применим первый метод.

x	$W(-3, x)$	$W''(-3, x)$	δ	δ^2	δ^3
0.4	+0.07298	−0.22186			
0.5	−0.05857	+0.17937		+ 131	
0.6	−0.18832	0.58191			
0.7	−0.31226	0.97503			
0.8	−0.42646	1.34761			
			34081		
0.9	−0.52722	1.68842			
			29775		−1095
1.0	−0.61113	1.98617			
			24374		−1032
1.1	−0.67522	2.22991			
			17941		
1.2	−0.71706	2.40932			
1.3	−0.73488	2.51513			
1.4	−0.72761	2.53936			
1.5	−0.69502	2.47601		−9129	
1.6	−0.63774	2.32137			

Пятый десятичный знак в значении $W''(-3, x)$ является запасным. Разности вычислены только необходимые.

Имеем

$$\frac{1}{10}W'(-3, 1) = \frac{1}{10}(-0.69502 + 0.05857) -$$
$$- \frac{1}{1000}(10.38874) - \frac{1}{1000}\left\{\frac{1}{12}(2.29664) - \right.$$

$$-\frac{1}{240}(-0.09260)\Big\}-\frac{1}{100}\Big\{\frac{1}{24}(0.54149)-$$

$$-\frac{11}{1440}(-0.02127)\Big\}=-0.0636450-$$

$$-0.0103887-0.0001918-0.0002272=$$

$$=-0.0744527.$$

Таким образом, $W'(-3,1)=-0.74453$. Это значение может теоретически иметь погрешность, не превосходящую 3/2 единиц последнего знака, в действительности оно точно с 5 десятичными знаками.

(2) Используя второй метод и полагая

$$y_1(1)=W(-3,\ 1)=-0.61113 \text{ с 5D},$$

$$y_1'(1)=-0.745 \text{ с 3D},$$

получим при $H=0.5$ следующие результаты:

	y_1	y_2	$W(-3,\ x)=y_1+\lambda y_2$
T_0	-0.61113	0.0000	При $x=1.5$
T_1	-0.37250	$+0.5000$	$x-0.695223+0.4323\lambda=$
			$=-0.69502$
T_2	$+0.248272$	0.0000	$\lambda=0.000203/0.4323=$
T_3	$+\ 56809$	$-\ 677$	$=0.000470$
T_4	$-\ 14074$	$-\ 26$	Таким образом,
			$W'(-3,\ 1)=$
			$=-0.745+\lambda=$
			$=\mathbf{-0.744530}$
T_5	$-\ 2793$	$+\ 24$	При $x=0.5$
T_6	$+\ 134$	$+\ 2$	$=0.058363-0.4371\lambda=$
			$=-0.05857$
T_7	$-\ 54$		$\lambda=0.000207/0.4371=$
T_8	$+\ 5$		$=0.000474$
$y(1.5)$	-0.695223	$+\ 0.4323$	Таким образом,
$y(0.5)$	-0.058363	$-\ 0.4371$	$W'(-3,\ 1)=$
			$=-0.745+\lambda=$
			$=-0.744\,526$

Следовательно, с точностью в 5 десятичных знаков

$$W'(-3,\ 1)=-0.74453.$$

Пример 3. Вычислить положительный нуль функции $U(-3,x)$. Для получения первой аппроксимации используем формулу 19.7.3 (см. 19.26.3). Приближенное значение нуля функции $\mathrm{Ai}(t)$ равно

$$t=(4\,|a|)^{2/3}\,\tau=-2.338,$$

откуда

$$\tau=-(2.338)\cdot(12)^{-2/3}=-0.4461.$$

В табл. 19.3 находим $\xi=0.3990$ и получаем приближенное значение нуля: $x=2\sqrt{|a|}\ \xi=1.382$. Уточним это значение, используя разложение 19.26.10. Но в качестве приближения возьмем значение $x=1.4$; тогда значение U можно получить прямо из таблиц. U' можно вычислить описанным выше способом. Находим

$$U(-3,\ 1.4)=0.02627,\quad U'(-3,\ 1.4)=2.0637.$$

Тогда по формуле 19.26.9 найдем

$$u=\frac{U}{U'}=0.012730,$$

$$I=-2.51,\quad I'=0.7,\quad I''=0.5,$$

$$c=1.4-0.012730+0.000002=1.38727.$$

Последнее значение имеет 5 верных десятичных знаков. По формуле 19.26.11 получаем

$$y'(c)=2.0637(1+0.000203)=2.0641,$$

а точное значение равно 2.06416.

Таблица 19.1. $U(a,\ x)$ и $V(a,\ x)$

x	$U(-5.0, x)$	$U(-4.5, x)$	$U(-4.0, x)$	$U(-3.5, x)$	$U(-3.0, x)$	$U(-2.5, x)$	$U(-2.0, x)$	$U(-1.5, x)$
0.0	(0) 3.0522	(0) 3.0000	(0) 1.5204	0.0000	(0) -0.8721	(0) -1.0000	(-1) -6.0814	0.0000
0.1	(0) 3.6547	(0) 2.9328	(0) 1.1869	(-1) -2.9825	(0) -1.0103	(-1) -9.8753	(-1) -5.1516	(-1) 0.9975
0.2	(0) 4.0753	(0) 2.7341	(-1) 8.0608	(-1) -5.8611	(0) -1.1183	(-1) -9.5045	(-1) -4.1190	(-1) 1.9801
0.3	(0) 4.2934	(0) 2.4132	(-1) +3.9325	(-1) -8.5358	(0) -1.1930	(-1) -8.8975	(-1) -3.0046	(-1) 2.9333
0.4	(0) 4.2988	(0) 1.9846	(-1) -0.3518	(0) -1.0915	(0) -1.2322	(-1) -8.0706	(-1) -1.8308	(-1) 3.8432
0.5	(0) 4.0918	(0) 1.4678	(-1) -4.6224	(0) -1.2917	(0) -1.2351	(-1) -7.0456	(-1) -0.6213	(-1) 4.6971
0.6	(0) 3.6836	(-1) 8.8615	(-1) -8.7118	(0) -1.4477	(0) -1.2018	(-1) -5.8492	(-1) +0.6004	(-1) 5.4836
0.7	(0) 3.0953	(-1) +2.6550	(0) -1.2462	(0) -1.5544	(0) -1.1336	(-1) -4.5120	(-1) 1.8107	(-1) 6.1929
0.8	(0) 2.3566	(-1) -3.6676	(0) -1.5731	(0) -1.6088	(0) -1.0329	(-1) -3.0677	(-1) 2.9871	(-1) 6.8172
0.9	(0) 1.5042	(-1) -9.8321	(0) -1.8397	(0) -1.6097	(-1) -9.0285	(-1) -1.5517	(-1) 4.1087	(-1) 7.3502
1.0	(0) +0.5799	(0) -1.5576	(0) -2.0368	(0) -1.5576	(-1) -7.4764	0.0000	(-1) 5.1567	(-1) 7.7880
1.1	(0) -0.3719	(0) -2.0661	(0) -2.1578	(0) -1.4550	(-1) -5.7190	(-1) 1.5518	(-1) 6.1146	(-1) 8.1287
1.2	(0) -1.3064	(0) -2.4882	(0) -2.1992	(0) -1.3061	(-1) -3.8076	(-1) 3.0698	(-1) 6.9691	(-1) 8.3721
1.3	(0) -2.1806	(0) -2.8077	(0) -2.1608	(0) -1.1162	(-1) -1.7956	(-1) 4.5223	(-1) 7.7095	(-1) 8.5203
1.4	(0) -2.9554	(0) -3.0131	(0) -2.0454	(-1) -8.9198	(-1) +0.2627	(-1) 5.8812	(-1) 8.3285	(-1) 8.5768
1.5	(0) -3.5976	(0) -3.0982	(0) -1.8583	(-1) -6.4101	(-1) 2.3147	(-1) 7.1223	(-1) 8.8221	(-1) 8.5467
1.6	(0) -4.0808	(0) -3.0617	(0) -1.6076	(-1) -3.7121	(-1) 4.3106	(-1) 8.2258	(-1) 9.1890	(-1) 8.4367
1.7	(0) -4.3868	(0) -2.9073	(0) -1.3029	(-1) -0.9080	(-1) 6.2053	(-1) 9.1766	(-1) 9.4313	(-1) 8.2541
1.8	(0) -4.5059	(0) -2.6435	(-1) -9.5564	(-1) +1.9218	(-1) 7.9592	(-1) 9.9648	(-1) 9.5532	(-1) 8.0074
1.9	(0) -4.4368	(0) -2.2824	(-1) -5.7791	(-1) 4.7004	(-1) 9.5394	(0) 1.0585	(-1) 9.5616	(-1) 7.7055
2.0	(0) -4.1866	(0) -1.8394	(-1) -1.8226	(-1) 7.3576	(0) 1.0920	(0) 1.1036	(-1) 9.4652	(-1) 7.3576
2.1	(0) -3.7694	(0) -1.3321	(-1) +2.1890	(-1) 9.8317	(0) 1.2083	(0) 1.1323	(-1) 9.2742	(-1) 6.9728
2.2	(0) -3.2057	(-1) -7.7961	(-1) 6.1381	(0) 1.2071	(0) 1.3017	(0) 1.1451	(-1) 9.0001	(-1) 6.5603
2.3	(0) -2.5208	(-1) -2.0142	(-1) 9.9170	(0) 1.4035	(0) 1.3719	(0) 1.1431	(-1) 8.6549	(-1) 6.1288
2.4	(0) -1.7434	(-1) +3.8325	(0) 1.3432	(0) 1.5694	(0) 1.4191	(0) 1.1278	(-1) 8.2510	(-1) 5.6863
2.5	(0) -0.9039	(-1) 9.5635	(0) 1.6604	(0) 1.7031	(0) 1.4443	(0) 1.1005	(-1) 7.8009	(-1) 5.2403
2.6	(0) -0.0332	(0) 1.5015	(0) 1.9373	(0) 1.8039	(0) 1.4487	(0) 1.0628	(-1) 7.3167	(-1) 4.7975
2.7	(0) +0.8387	(0) 2.0048	(0) 2.1696	(0) 1.8721	(0) 1.4341	(0) 1.0166	(-1) 6.8097	(-1) 4.3638
2.8	(0) 1.6842	(0) 2.4545	(0) 2.3548	(0) 1.9089	(0) 1.4027	(-1) 9.6347	(-1) 6.2905	(-1) 3.9440
2.9	(0) 2.4789	(0) 2.8422	(0) 2.4921	(0) 1.9164	(0) 1.3567	(-1) 9.0514	(-1) 5.7687	(-1) 3.5424
3.0	(0) 3.2021	(0) 3.1620	(0) 2.5823	(0) 1.8972	(0) 1.2985	(-1) 8.4319	(-1) 5.2527	(-1) 3.1620
3.1	(0) 3.8377	(0) 3.4108	(0) 2.6273	(0) 1.8543	(0) 1.2306	(-1) 7.7913	(-1) 4.7497	(-1) 2.8052
3.2	(0) 4.3739	(0) 3.5883	(0) 2.6304	(0) 1.7910	(0) 1.1553	(-1) 7.1430	(-1) 4.2658	(-1) 2.4738
3.3	(0) 4.8038	(0) 3.6963	(0) 2.5957	(0) 1.7109	(0) 1.0749	(-1) 6.4987	(-1) 3.8056	(-1) 2.1684
3.4	(0) 5.1246	(0) 3.7388	(0) 2.5279	(0) 1.6175	(-1) 9.9150	(-1) 5.8688	(-1) 3.3729	(-1) 1.8896
3.5	(0) 5.3376	(0) 3.7212	(0) 2.4320	(0) 1.5142	(-1) 9.0701	(-1) 5.2617	(-1) 2.9700	(-1) 1.6370
3.6	(0) 5.4473	(0) 3.6501	(0) 2.3134	(0) 1.4043	(-1) 8.2306	(-1) 4.6840	(-1) 2.5987	(-1) 1.4099
3.7	(0) 5.4614	(0) 3.5331	(0) 2.1771	(0) 1.2906	(-1) 7.4107	(-1) 4.1408	(-1) 2.2595	(-1) 1.2073
3.8	(0) 5.3895	(0) 3.3781	(0) 2.0282	(0) 1.1760	(-1) 6.6219	(-1) 3.6358	(-1) 1.9525	(-1) 1.0280
3.9	(0) 5.2427	(0) 3.1929	(0) 1.8714	(0) 1.0626	(-1) 5.8733	(-1) 3.1709	(-1) 1.6768	(-2) 8.7028
4.0	(0) 5.0332	(0) 2.9854	(0) 1.7108	(-1) 9.5241	(-1) 5.1716	(-1) 2.7473	(-1) 1.4313	(-2) 7.3263
4.1	(0) 4.7733	(0) 2.7630	(0) 1.5502	(-1) 8.4694	(-1) 4.5215	(-1) 2.3649	(-1) 1.2144	(-2) 6.1328
4.2	(0) 4.4753	(0) 2.5323	(0) 1.3927	(-1) 7.4740	(-1) 3.9256	(-1) 2.0226	(-1) 1.0242	(-2) 5.1052
4.3	(0) 4.1508	(0) 2.2992	(0) 1.2408	(-1) 6.5463	(-1) 3.3849	(-1) 1.7190	(-2) 8.5874	(-2) 4.2261
4.4	(0) 3.8106	(0) 2.0689	(0) 1.0967	(-1) 5.6918	(-1) 2.8991	(-1) 1.4517	(-2) 7.1578	(-2) 3.4791
4.5	(0) 3.4641	(0) 1.8455	(-1) 9.6165	(-1) 4.9134	(-1) 2.4665	(-1) 1.2185	(-2) 5.9314	(-2) 2.8484
4.6	(0) 3.1197	(0) 1.6324	(-1) 8.3683	(-1) 4.2117	(-1) 2.0848	(-1) 1.0164	(-2) 4.8867	(-2) 2.3192
4.7	(0) 2.7843	(0) 1.4322	(-1) 7.2277	(-1) 3.5852	(-1) 1.7507	(-2) 8.4272	(-2) 4.0029	(-2) 1.8780
4.8	(0) 2.4632	(0) 1.2466	(-1) 6.1969	(-1) 3.0311	(-1) 1.4608	(-2) 6.9451	(-2) 3.2603	(-2) 1.5125
4.9	(0) 2.1608	(0) 1.0766	(-1) 5.2750	(-1) 2.5455	(-1) 1.2112	(-2) 5.6894	(-2) 2.6403	(-2) 1.2116
5.0	(0) 1.8800	(-1) 9.2276	(-1) 4.4586	(-1) 2.1235	(-2) 9.9802	(-2) 4.6331	(-2) 2.1262	(-3) 9.6523

Об интерполировании см. 19.28.

Таблица 19.1. $U(a,x)$ и $V(a,x)$

x	$V(-5.0, x)$	$V(-4.5, x)$	$V(-4.0, x)$	$V(-3.5, x)$	$V(-3.0, x)$	$V(-2.5, x)$	$V(-2.0, x)$	$V(-1.5, x)$
0.0	(-2)-5.8311	0.0000	(-1) 1.3071	(-1) 2.6596	(-1) 2.6240	0.0000	(-1)-4.5748	(-1)-7.9788
0.1	(-2)-4.3898	(-2) 2.6397	(-1) 1.5417	(-1) 2.6132	(-1) 2.1296	(-1)-0.7946	(-1)-5.1829	(-1)-7.9191
0.2	(-2)-2.7299	(-2) 5.1612	(-1) 1.7149	(-1) 2.4757	(-1) 1.5714	(-1)-1.5693	(-1)-5.6877	(-1)-7.7409
0.3	(-2)-0.9344	(-2) 7.4519	(-1) 1.8199	(-1) 2.2520	(-2) 9.6646	(-1)-2.3051	(-1)-6.0796	(-1)-7.4476
0.4	(-2)+0.9074	(-2) 9.4102	(-1) 1.8527	(-1) 1.9503	(-2)+3.3275	(-1)-2.9840	(-1)-6.3515	(-1)-7.0444
0.5	(-2) 2.7045	(-1) 1.0950	(-1) 1.8125	(-1) 1.5812	(-2)-3.1080	(-1)-3.5896	(-1)-6.4991	(-1)-6.5385
0.6	(-2) 4.3687	(-1) 1.2007	(-1) 1.7011	(-1) 1.1580	(-2)-9.4527	(-1)-4.1079	(-1)-6.5210	(-1)-5.9387
0.7	(-2) 5.8194	(-1) 1.2536	(-1) 1.5234	(-2) 6.9534	(-1)-1.5523	(-1)-4.5275	(-1)-6.4186	(-1)-5.2553
0.8	(-2) 6.9875	(-1) 1.2518	(-1) 1.2869	(-2)+2.0926	(-1)-2.1149	(-1)-4.8397	(-1)-6.1959	(-1)-4.4995
0.9	(-2) 7.8188	(-1) 1.1958	(-1) 1.0010	(-2)-2.8383	(-1)-2.6176	(-1)-5.0388	(-1)-5.8594	(-1)-3.6835
1.0	(-2) 8.2767	(-1) 1.0887	(-2) 6.7728	(-2)-7.6762	(-1)-3.0472	(-1)-5.1225	(-1)-5.4177	(-1)-2.8197
1.1	(-2) 8.3429	(-2) 9.3549	(-2)+3.2819	(-1)-1.2266	(-1)-3.3933	(-1)-5.0912	(-1)-4.8813	(-1)-1.9206
1.2	(-2) 8.0189	(-2) 7.4311	(-2)-0.3303	(-1)-1.6465	(-1)-3.6481	(-1)-4.9482	(-1)-4.2621	(-1)-0.9984
1.3	(-2) 7.3241	(-2) 5.2005	(-2)-3.9309	(-1)-2.0148	(-1)-3.8069	(-1)-4.6995	(-1)-3.5731	(-1)-0.0648
1.4	(-2) 6.2954	(-2) 2.7584	(-2)-7.3916	(-1)-2.3214	(-1)-3.8677	(-1)-4.3533	(-1)-2.8278	(-1)+0.8696
1.5	(-2) 4.9836	(-2)+0.2057	(-1)-1.0594	(-1)-2.5583	(-1)-3.8317	(-1)-3.9197	(-1)-2.0397	(-1) 1.7953
1.6	(-2) 3.4514	(-2)-2.3553	(-1)-1.3434	(-1)-2.7203	(-1)-3.7025	(-1)-3.4103	(-1)-1.2222	(-1) 2.7043
1.7	(-2) 1.7690	(-2)-4.8261	(-1)-1.5824	(-1)-2.8047	(-1)-3.4861	(-1)-2.8375	(-1)-0.3880	(-1) 3.5902
1.8	(-2)+0.0110	(-2)-7.1155	(-1)-1.7697	(-1)-2.8113	(-1)-3.1904	(-1)-2.2142	(-1)+0.4512	(-1) 4.4484
1.9	(-2)-1.7477	(-2)-9.1435	(-1)-1.9008	(-1)-2.7426	(-1)-2.8250	(-1)-1.5535	(-1) 1.2852	(-1) 5.2761
2.0	(-2)-3.4354	(-1)-1.0844	(-1)-1.9731	(-1)-2.6027	(-1)-2.4003	(-1)-0.8679	(-1) 2.1053	(-1) 6.0723
2.1	(-2)-4.9863	(-1)-1.2166	(-1)-1.9864	(-1)-2.3979	(-1)-1.9277	(-1)-0.1692	(-1) 2.9044	(-1) 6.8384
2.2	(-2)-6.3439	(-1)-1.3076	(-1)-1.9423	(-1)-2.1357	(-1)-1.4184	(-1)+0.5320	(-1) 3.6777	(-1) 7.5775
2.3	(-2)-7.4620	(-1)-1.3558	(-1)-1.8442	(-1)-1.8247	(-2)-8.8371	(-1) 1.2264	(-1) 4.4221	(-1) 8.2948
2.4	(-2)-8.3067	(-1)-1.3610	(-1)-1.6967	(-1)-1.4739	(-2)-3.3411	(-1) 1.9066	(-1) 5.1367	(-1) 8.9975
2.5	(-2)-8.8568	(-1)-1.3246	(-1)-1.5059	(-1)-1.0927	(-2)+2.2080	(-1) 2.5667	(-1) 5.8227	(-1) 9.6950
2.6	(-2)-9.1035	(-1)-1.2495	(-1)-1.2784	(-2)-6.9034	(-2) 7.7266	(-1) 3.2030	(-1) 6.4834	(0) 1.0399
2.7	(-2)-9.0496	(-1)-1.1392	(-1)-1.0214	(-2)-2.7540	(-1) 1.3145	(-1) 3.8134	(-1) 7.1242	(0) 1.1122
2.8	(-2)-8.7090	(-2)-9.9858	(-2)-7.4214	(-2)+1.4424	(-1) 1.8411	(-1) 4.3982	(-1) 7.7525	(0) 1.1882
2.9	(-2)-8.1043	(-2)-8.3257	(-2)-4.4770	(-2) 5.6176	(-1) 2.3486	(-1) 4.9594	(-1) 8.3779	(0) 1.2697
3.0	(-2)-7.2651	(-2)-6.4659	(-2)-1.4470	(-2) 9.7155	(-1) 2.8352	(-1) 5.5010	(-1) 9.0120	(0) 1.3588
3.1	(-2)-6.2264	(-2)-4.4605	(-2)+1.6090	(-1) 1.3693	(-1) 3.3007	(-1) 6.0291	(-1) 9.6689	(0) 1.4582
3.2	(-2)-5.0260	(-2)-2.3612	(-2) 4.6402	(-1) 1.7522	(-1) 3.7466	(-1) 6.5514	(0) 1.0365	(0) 1.5708
3.3	(-2)-3.7030	(-2)-0.2157	(-2) 7.6054	(-1) 2.1187	(-1) 4.1761	(-1) 7.0778	(0) 1.1119	(0) 1.7001
3.4	(-2)-2.2954	(-2)+1.9344	(-1) 1.0474	(-1) 2.4688	(-1) 4.5942	(-1) 7.6202	(0) 1.1954	(0) 1.8502
3.5	(-2)-0.8391	(-2) 4.0539	(-1) 1.3228	(-1) 2.8040	(-1) 5.0074	(-1) 8.1924	(0) 1.2896	(0) 2.0262
3.6	(-2)+0.6339	(-2) 6.1158	(-1) 1.5859	(-1) 3.1270	(-1) 5.4239	(-1) 8.8110	(0) 1.3975	(0) 2.2339
3.7	(-2) 2.0962	(-2) 8.1014	(-1) 1.8370	(-1) 3.4421	(-1) 5.8535	(-1) 9.4951	(0) 1.5228	(0) 2.4806
3.8	(-2) 3.5259	(-1) 1.0000	(-1) 2.0775	(-1) 3.7545	(-1) 6.3080	(0) 1.0267	(0) 1.6699	(0) 2.7751
3.9	(-2) 4.9072	(-1) 1.1811	(-1) 2.3101	(-1) 4.0712	(-1) 6.8012	(0) 1.1153	(0) 1.8439	(0) 3.1285
4.0	(-2) 6.2301	(-1) 1.3540	(-1) 2.5382	(-1) 4.4004	(-1) 7.3492	(0) 1.2186	(0) 2.0513	(0) 3.5541
4.1	(-2) 7.4913	(-1) 1.5202	(-1) 2.7664	(-1) 4.7517	(-1) 7.9710	(0) 1.3401	(0) 2.2999	(0) 4.0690
4.2	(-2) 8.6933	(-1) 1.6819	(-1) 3.0002	(-1) 5.1365	(-1) 8.6890	(0) 1.4846	(0) 2.5993	(0) 4.6942
4.3	(-2) 9.8444	(-1) 1.8422	(-1) 3.2465	(-1) 5.5683	(-1) 9.5300	(0) 1.6575	(0) 2.9616	(0) 5.4567
4.4	(-1) 1.0959	(-1) 2.0048	(-1) 3.5131	(-1) 6.0629	(0) 1.0526	(0) 1.8657	(0) 3.4019	(0) 6.3903
4.5	(-1) 1.2056	(-1) 2.1743	(-1) 3.8093	(-1) 6.6389	(0) 1.1717	(0) 2.1178	(0) 3.9393	(0) 7.5384
4.6	(-1) 1.3161	(-1) 2.3561	(-1) 4.1462	(-1) 7.3192	(0) 1.3150	(0) 2.4244	(0) 4.5978	(0) 8.9563
4.7	(-1) 1.4305	(-1) 2.5567	(-1) 4.5368	(-1) 8.1309	(0) 1.4885	(0) 2.7989	(0) 5.4083	(1) 1.0715
4.8	(-1) 1.5525	(-1) 2.7834	(-1) 4.9967	(-1) 9.1078	(0) 1.6998	(0) 3.2584	(0) 6.4102	(1) 1.2908
4.9	(-1) 1.6863	(-1) 3.0454	(-1) 5.5449	(0) 1.0291	(0) 1.9582	(0) 3.8246	(0) 7.6545	(1) 1.5653
5.0	(-1) 1.8370	(-1) 3.3533	(-1) 6.2047	(0) 1.1734	(0) 2.2757	(0) 4.5254	(0) 9.2067	(1) 1.9107

Таблица 19.1. $U(a, x)$ и $V(a, x)$

x	$U(-1.0,x)$	$U(-0.9,x)$	$U(-0.8,x)$	$U(-0.7,x)$	$U(-0.6,x)$	$U(-0.5,x)$	$U(-0.4,x)$
0.0	(-1)5.8137	(-1)6.8058	(-1)7.7241	(-1)8.5642	(-1)9.3233	(0)1.0000	(0)1.0594
0.1	(-1)6.3918	(-1)7.2692	(-1)8.0677	(-1)8.7853	(-1)9.4211	(-1)9.9750	(0)1.0448
0.2	(-1)6.9062	(-1)7.6673	(-1)8.3471	(-1)8.9453	(-1)9.4626	(-1)9.9005	(0)1.0261
0.3	(-1)7.3523	(-1)7.9973	(-1)8.5606	(-1)9.0436	(-1)9.4483	(-1)9.7775	(0)1.0035
0.4	(-1)7.7267	(-1)8.2572	(-1)8.7077	(-1)9.0807	(-1)9.3796	(-1)9.6079	(-1)9.7698
0.5	(-1)8.0270	(-1)8.4462	(-1)8.7886	(-1)9.0580	(-1)9.2584	(-1)9.3941	(-1)9.4700
0.6	(-1)8.2522	(-1)8.5646	(-1)8.8049	(-1)8.9776	(-1)9.0874	(-1)9.1393	(-1)9.1382
0.7	(-1)8.4023	(-1)8.6136	(-1)8.7586	(-1)8.8425	(-1)8.8702	(-1)8.8471	(-1)8.7781
0.8	(-1)8.4788	(-1)8.5958	(-1)8.6531	(-1)8.6563	(-1)8.6107	(-1)8.5214	(-1)8.3937
0.9	(-1)8.4842	(-1)8.5144	(-1)8.4923	(-1)8.4235	(-1)8.3133	(-1)8.1669	(-1)7.9892
1.0	(-1)8.4220	(-1)8.3737	(-1)8.2808	(-1)8.1488	(-1)7.9828	(-1)7.7880	(-1)7.5689
1.1	(-1)8.2967	(-1)8.1787	(-1)8.0238	(-1)7.8374	(-1)7.6245	(-1)7.3897	(-1)7.1372
1.2	(-1)8.1136	(-1)7.9348	(-1)7.7269	(-1)7.4949	(-1)7.2435	(-1)6.9768	(-1)6.6986
1.3	(-1)7.8786	(-1)7.6480	(-1)7.3960	(-1)7.1269	(-1)6.8451	(-1)6.5541	(-1)6.2573
1.4	(-1)7.5982	(-1)7.3248	(-1)7.0371	(-1)6.7392	(-1)6.4345	(-1)6.1263	(-1)5.8173
1.5	(-1)7.2789	(-1)6.9716	(-1)6.6565	(-1)6.3372	(-1)6.0168	(-1)5.6978	(-1)5.3826
1.6	(-1)6.9279	(-1)6.5948	(-1)6.2600	(-1)5.9266	(-1)5.5968	(-1)5.2729	(-1)4.9566
1.7	(-1)6.5519	(-1)6.2008	(-1)5.8535	(-1)5.5123	(-1)5.1791	(-1)4.8554	(-1)4.5424
1.8	(-1)6.1577	(-1)5.7958	(-1)5.4424	(-1)5.0993	(-1)4.7676	(-1)4.4486	(-1)4.1429
1.9	(-1)5.7517	(-1)5.3855	(-1)5.0319	(-1)4.6918	(-1)4.3662	(-1)4.0555	(-1)3.7603
2.0	(-1)5.3401	(-1)4.9754	(-1)4.6264	(-1)4.2938	(-1)3.9779	(-1)3.6788	(-1)3.3965
2.1	(-1)4.9285	(-1)4.5701	(-1)4.2301	(-1)3.9086	(-1)3.6054	(-1)3.3204	(-1)3.0532
2.2	(-1)4.5219	(-1)4.1741	(-1)3.8466	(-1)3.5391	(-1)3.2511	(-1)2.9820	(-1)2.7312
2.3	(-1)4.1247	(-1)3.7910	(-1)3.4788	(-1)3.1876	(-1)2.9165	(-1)2.6647	(-1)2.4313
2.4	(-1)3.7407	(-1)3.4238	(-1)3.1292	(-1)2.8559	(-1)2.6029	(-1)2.3693	(-1)2.1538
2.5	(-1)3.3732	(-1)3.0751	(-1)2.7995	(-1)2.5453	(-1)2.3112	(-1)2.0961	(-1)1.8987
2.6	(-1)3.0246	(-1)2.7467	(-1)2.4912	(-1)2.2566	(-1)2.0418	(-1)1.8452	(-1)1.6657
2.7	(-1)2.6968	(-1)2.4399	(-1)2.2049	(-1)1.9903	(-1)1.7945	(-1)1.6162	(-1)1.4541
2.8	(-1)2.3911	(-1)2.1556	(-1)1.9412	(-1)1.7462	(-1)1.5691	(-1)1.4086	(-1)1.2632
2.9	(-1)2.1084	(-1)1.8942	(-1)1.7000	(-1)1.5241	(-1)1.3651	(-1)1.2215	(-1)1.0920
3.0	(-1)1.8488	(-1)1.6555	(-1)1.4809	(-1)1.3234	(-1)1.1816	(-1)1.0540	(-2)9.3934
3.1	(-1)1.6124	(-1)1.4391	(-1)1.2832	(-1)1.1432	(-1)1.0175	(-2)9.0491	(-2)8.0408
3.2	(-1)1.3985	(-1)1.2443	(-1)1.1061	(-2)9.8240	(-2)8.7182	(-2)7.7305	(-2)6.8492
3.3	(-1)1.2064	(-1)1.0701	(-2)9.4842	(-2)8.3989	(-2)7.4318	(-2)6.5710	(-2)5.8055
3.4	(-1)1.0351	(-2)9.1545	(-2)8.0899	(-2)7.1436	(-2)6.3032	(-2)5.5576	(-2)4.8967
3.5	(-2)8.8335	(-2)7.7900	(-2)6.8646	(-2)6.0447	(-2)5.3190	(-2)4.6771	(-2)4.1098
3.6	(-2)7.4981	(-2)6.5939	(-2)5.7946	(-2)5.0887	(-2)4.4657	(-2)3.9164	(-2)3.4324
3.7	(-2)6.3306	(-2)5.5521	(-2)4.8660	(-2)4.2619	(-2)3.7304	(-2)3.2631	(-2)2.8525
3.8	(-2)5.3165	(-2)4.6503	(-2)4.0651	(-2)3.5512	(-2)3.1004	(-2)2.7052	(-2)2.3589
3.9	(-2)4.4411	(-2)3.8747	(-2)3.3784	(-2)2.9439	(-2)2.5638	(-2)2.2315	(-2)1.9411
4.0	(-2)3.6903	(-2)3.2115	(-2)2.7932	(-2)2.4280	(-2)2.1094	(-2)1.8316	(-2)1.5895
4.1	(-2)3.0502	(-2)2.6480	(-2)2.2975	(-2)1.9923	(-2)1.7268	(-2)1.4958	(-2)1.2951
4.2	(-2)2.5079	(-2)2.1720	(-2)1.8800	(-2)1.6265	(-2)1.4064	(-2)1.2155	(-2)1.0500
4.3	(-2)2.0512	(-2)1.7723	(-2)1.5305	(-2)1.3211	(-2)1.1397	(-3)9.8282	(-3)8.4709
4.4	(-2)1.6688	(-2)1.4386	(-2)1.2396	(-2)1.0676	(-3)9.1898	(-3)7.9071	(-3)6.8002
4.5	(-2)1.3507	(-2)1.1618	(-3)9.9881	(-3)8.5831	(-3)7.3725	(-3)6.3297	(-3)5.4320
4.6	(-2)1.0875	(-3)9.3333	(-3)8.0067	(-3)6.8657	(-3)5.8847	(-3)5.0418	(-3)4.3177
4.7	(-3)8.7099	(-3)7.4594	(-3)6.3856	(-3)5.4641	(-3)4.6736	(-3)3.9958	(-3)3.4150
4.8	(-3)6.9398	(-3)5.9310	(-3)5.0667	(-3)4.3266	(-3)3.6931	(-3)3.1511	(-3)2.6876
4.9	(-3)5.5007	(-3)4.6914	(-3)3.9996	(-3)3.4085	(-3)2.9036	(-3)2.4726	(-3)2.1047
5.0	(-3)4.3375	(-3)3.6919	(-3)3.1412	(-3)2.6716	(-3)2.2714	(-3)1.9305	(-3)1.6401

Таблица 19.1. $U(a, x)$ и $V(a, x)$

x	$V(-1.0,x)$	$V(-0.9,x)$	$V(-0.8,x)$	$V(-0.7,x)$	$V(-0.6,x)$	$V(-0.5,x)$	$V(-0.4,x)$
0.0	(-1)-6.5600	(-1)-5.5730	(-1)-4.3852	(-1)-3.0307	(-1)-1.5522	0.0000	(-1)1.5701
0.1	(-1)-5.8422	(-1)-4.7818	(-1)-3.5487	(-1)-2.1784	(-1)-0.7135	(-1)0.7972	(-1)2.3012
0.2	(-1)-5.0662	(-1)-3.9477	(-1)-2.6839	(-1)-1.3109	(-1)+0.1294	(-1)1.5905	(-1)3.0232
0.3	(-1)-4.2400	(-1)-3.0785	(-1)-1.7980	(-1)-0.4343	(-1) 0.9716	(-1)2.3760	(-1)3.7334
0.4	(-1)-3.3725	(-1)-2.1823	(-1)-0.8980	(-1)+0.4451	(-1) 1.8082	(-1)3.1502	(-1)4.4296
0.5	(-1)-2.4725	(-1)-1.2674	(-1)+0.0088	(-1) 1.3217	(-1) 2.6347	(-1)3.9099	(-1)5.1099
0.6	(-1)-1.5494	(-1)-0.3418	(-1) 0.9156	(-1) 2.1900	(-1) 3.4471	(-1)4.6526	(-1)5.7729
0.7	(-1)-0.6122	(-1)+0.5867	(-1) 1.8159	(-1) 3.0449	(-1) 4.2420	(-1)5.3763	(-1)6.4182
0.8	(-1)+0.3305	(-1) 1.5106	(-1) 2.7040	(-1) 3.8823	(-1) 5.0167	(-1)6.0797	(-1)7.0457
0.9	(-1) 1.2704	(-1) 2.4234	(-1) 3.5749	(-1) 4.6988	(-1) 5.7694	(-1)6.7626	(-1)7.6563
1.0	(-1) 2.2004	(-1) 3.3194	(-1) 4.4245	(-1) 5.4920	(-1) 6.4993	(-1)7.4254	(-1)8.2519
1.1	(-1) 3.1139	(-1) 4.1939	(-1) 5.2498	(-1) 6.2606	(-1) 7.2065	(-1)8.0697	(-1)8.8353
1.2	(-1) 4.0057	(-1) 5.0435	(-1) 6.0492	(-1) 7.0044	(-1) 7.8924	(-1)8.6982	(-1)9.4101
1.3	(-1) 4.8721	(-1) 5.8660	(-1) 6.8220	(-1) 7.7246	(-1) 8.5594	(-1)9.3147	(-1)9.9812
1.4	(-1) 5.7105	(-1) 6.6605	(-1) 7.5693	(-1) 8.4234	(-1) 9.2113	(-1)9.9240	(0)1.0555
1.5	(-1) 6.5198	(-1) 7.4279	(-1) 8.2931	(-1) 9.1046	(-1) 9.8533	(0)1.0532	(0)1.1138
1.6	(-1) 7.3008	(-1) 8.1704	(-1) 8.9974	(-1) 9.7734	(0) 1.0492	(0)1.1148	(0)1.1739
1.7	(-1) 8.0557	(-1) 8.8917	(-1) 9.6875	(0) 1.0437	(0) 1.1134	(0)1.1778	(0)1.2369
1.8	(-1) 8.7883	(-1) 9.5974	(0) 1.0370	(0) 1.1102	(0) 1.1791	(0)1.2436	(0)1.3038
1.9	(-1) 9.5044	(0) 1.0295	(0) 1.1054	(0) 1.1780	(0) 1.2472	(0)1.3132	(0)1.3762
2.0	(0) 1.0211	(0) 1.0992	(0) 1.1749	(0) 1.2482	(0) 1.3191	(0)1.3881	(0)1.4554
2.1	(0) 1.0918	(0) 1.1701	(0) 1.2468	(0) 1.3222	(0) 1.3964	(0)1.4699	(0)1.5435
2.2	(0) 1.1637	(0) 1.2434	(0) 1.3225	(0) 1.4015	(0) 1.4806	(0)1.5607	(0)1.6424
2.3	(0) 1.2380	(0) 1.3205	(0) 1.4037	(0) 1.4879	(0) 1.5740	(0)1.6625	(0)1.7546
2.4	(0) 1.3163	(0) 1.4032	(0) 1.4922	(0) 1.5837	(0) 1.6787	(0)1.7781	(0)1.8830
2.5	(0) 1.4005	(0) 1.4936	(0) 1.5902	(0) 1.6912	(0) 1.7975	(0)1.9104	(0)2.0311
2.6	(0) 1.4925	(0) 1.5939	(0) 1.7005	(0) 1.8134	(0) 1.9338	(0)2.0631	(0)2.2029
2.7	(0) 1.5949	(0) 1.7068	(0) 1.8259	(0) 1.9535	(0) 2.0911	(0)2.2404	(0)2.4032
2.8	(0) 1.7104	(0) 1.8355	(0) 1.9700	(0) 2.1157	(0) 2.2741	(0)2.4474	(0)2.6378
2.9	(0) 1.8424	(0) 1.9837	(0) 2.1371	(0) 2.3045	(0) 2.4881	(0)2.6902	(0)2.9136
3.0	(0) 1.9948	(0) 2.1558	(0) 2.3321	(0) 2.5258	(0) 2.7396	(0)2.9763	(0)3.2392
3.1	(0) 2.1722	(0) 2.3571	(0) 2.5609	(0) 2.7864	(0) 3.0365	(0)3.3147	(0)3.6249
3.2	(0) 2.3801	(0) 2.5940	(0) 2.8310	(0) 3.0945	(0) 3.3882	(0)3.7163	(0)4.0834
3.3	(0) 2.6253	(0) 2.8740	(0) 3.1511	(0) 3.4604	(0) 3.8066	(0)4.1947	(0)4.6305
3.4	(0) 2.9159	(0) 3.2066	(0) 3.5319	(0) 3.8966	(0) 4.3061	(0)4.7667	(0)5.2855
3.5	(0) 3.2618	(0) 3.6032	(0) 3.9868	(0) 4.4183	(0) 4.9045	(0)5.4531	(0)6.0726
3.6	(0) 3.6752	(0) 4.0781	(0) 4.5323	(0) 5.0449	(0) 5.6242	(0)6.2797	(0)7.0220
3.7	(0) 4.1712	(0) 4.6487	(0) 5.1887	(0) 5.8001	(0) 6.4930	(0)7.2790	(0)8.1716
3.8	(0) 4.7686	(0) 5.3371	(0) 5.9818	(0) 6.7138	(0) 7.5458	(0)8.4920	(0)9.5693
3.9	(0) 5.4910	(0) 6.1706	(0) 6.9437	(0) 7.8238	(0) 8.8266	(0)9.9703	(1)1.1276
4.0	(0) 6.3680	(0) 7.1841	(0) 8.1149	(0) 9.1775	(1) 1.0391	(1)1.1779	(1)1.3367
4.1	(0) 7.4368	(0) 8.4212	(0) 9.5470	(1) 1.0835	(1) 1.2311	(1)1.4002	(1)1.5942
4.2	(0) 8.7448	(0) 9.9377	(1) 1.1305	(1) 1.2875	(1) 1.4676	(1)1.6747	(1)1.9127
4.3	(1) 1.0352	(1) 1.1805	(1) 1.3474	(1) 1.5394	(1) 1.7604	(1)2.0149	(1)2.3082
4.4	(1) 1.2337	(1) 1.4113	(1) 1.6160	(1) 1.8520	(1) 2.1243	(1)2.4386	(1)2.8017
4.5	(1) 1.4797	(1) 1.6981	(1) 1.9502	(1) 2.2417	(1) 2.5787	(1)2.9687	(1)3.4202
4.6	(1) 1.7862	(1) 2.0559	(1) 2.3680	(1) 2.7297	(1) 3.1489	(1)3.6350	(1)4.1991
4.7	(1) 2.1698	(1) 2.5044	(1) 2.8928	(1) 3.3437	(1) 3.8676	(1)4.4765	(1)5.1846
4.8	(1) 2.6520	(1) 3.0694	(1) 3.5549	(1) 4.1199	(1) 4.7777	(1)5.5441	(1)6.4372
4.9	(1) 3.2611	(1) 3.7844	(1) 4.3944	(1) 5.1058	(1) 5.9359	(1)6.9051	(1)8.0370
5.0	(1) 4.0344	(1) 4.6937	(1) 5.4639	(1) 6.3641	(1) 7.4168	(1)8.6484	(2)1.0090

Таблица 19.1. $U(a,\ x)$ и $V(a,\ x)$

x	$U(-0.3,x)$	$U(-0.2,x)$	$U(-0.1,x)$	$U(0,x)$	$U(0.1,x)$	$U(0.2,x)$	$U(0.3,x)$
0.0	(0)1.1105	(0)1.1535	(0)1.1887	(0)1.2163	(0)1.2366	(0)1.2500	(0)1.2570
0.1	(0)1.0843	(0)1.1161	(0)1.1406	(0)1.1581	(0)1.1691	(0)1.1740	(0)1.1732
0.2	(0)1.0548	(0)1.0764	(0)1.0914	(0)1.1000	(0)1.1029	(0)1.1004	(0)1.0930
0.3	(0)1.0223	(0)1.0347	(0)1.0412	(0)1.0421	(0)1.0379	(0)1.0291	(0)1.0161
0.4	(-1)9.8697	(-1)9.9120	(-1)9.9016	(-1)9.8431	(-1)9.7411	(-1)9.6004	(-1)9.4255
0.5	(-1)9.4906	(-1)9.4609	(-1)9.3856	(-1)9.2695	(-1)9.1173	(-1)8.9333	(-1)8.7218
0.6	(-1)9.0890	(-1)8.9968	(-1)8.8661	(-1)8.7018	(-1)8.5082	(-1)8.2895	(-1)8.0498
0.7	(-1)8.6684	(-1)8.5228	(-1)8.3458	(-1)8.1419	(-1)7.9153	(-1)7.6699	(-1)7.4093
0.8	(-1)8.2324	(-1)8.0421	(-1)7.8273	(-1)7.5920	(-1)7.3400	(-1)7.0750	(-1)6.8000
0.9	(-1)7.7849	(-1)7.5583	(-1)7.3135	(-1)7.0542	(-1)6.7838	(-1)6.5055	(-1)6.2220
1.0	(-1)7.3298	(-1)7.0747	(-1)6.8072	(-1)6.5307	(-1)6.2482	(-1)5.9622	(-1)5.6753
1.1	(-1)6.8710	(-1)6.5946	(-1)6.3111	(-1)6.0235	(-1)5.7343	(-1)5.4457	(-1)5.1597
1.2	(-1)6.4124	(-1)6.1212	(-1)5.8278	(-1)5.5346	(-1)5.2436	(-1)4.9566	(-1)4.6753
1.3	(-1)5.9576	(-1)5.6576	(-1)5.3596	(-1)5.0655	(-1)4.7769	(-1)4.4953	(-1)4.2217
1.4	(-1)5.5101	(-1)5.2066	(-1)4.9087	(-1)4.6178	(-1)4.3352	(-1)4.0619	(-1)3.7986
1.5	(-1)5.0730	(-1)4.7706	(-1)4.4769	(-1)4.1927	(-1)3.9191	(-1)3.6565	(-1)3.4055
1.6	(-1)4.6492	(-1)4.3519	(-1)4.0657	(-1)3.7912	(-1)3.5288	(-1)3.2790	(-1)3.0417
1.7	(-1)4.2412	(-1)3.9524	(-1)3.6765	(-1)3.4139	(-1)3.1647	(-1)2.9290	(-1)2.7065
1.8	(-1)3.8510	(-1)3.5734	(-1)3.3102	(-1)3.0613	(-1)2.8266	(-1)2.6060	(-1)2.3990
1.9	(-1)3.4805	(-1)3.2162	(-1)2.9673	(-1)2.7334	(-1)2.5142	(-1)2.3093	(-1)2.1181
2.0	(-1)3.1309	(-1)2.8816	(-1)2.6482	(-1)2.4302	(-1)2.2270	(-1)2.0381	(-1)1.8627
2.1	(-1)2.8032	(-1)2.5700	(-1)2.3529	(-1)2.1513	(-1)1.9643	(-1)1.7913	(-1)1.6315
2.2	(-1)2.4980	(-1)2.2816	(-1)2.0812	(-1)1.8960	(-1)1.7252	(-1)1.5678	(-1)1.4232
2.3	(-1)2.2155	(-1)2.0162	(-1)1.8326	(-1)1.6637	(-1)1.5086	(-1)1.3665	(-1)1.2363
2.4	(-1)1.9556	(-1)1.7734	(-1)1.6064	(-1)1.4534	(-1)1.3136	(-1)1.1859	(-1)1.0695
2.5	(-1)1.7179	(-1)1.5526	(-1)1.4017	(-1)1.2640	(-1)1.1387	(-1)1.0248	(-2)9.2134
2.6	(-1)1.5020	(-1)1.3529	(-1)1.2174	(-1)1.0944	(-2)9.8278	(-2)8.8173	(-2)7.9031
2.7	(-1)1.3069	(-1)1.1734	(-1)1.0525	(-2)9.4322	(-2)8.4445	(-2)7.5534	(-2)6.7502
2.8	(-1)1.1317	(-1)1.0129	(-2)9.0579	(-2)8.0925	(-2)7.2235	(-2)6.4422	(-2)5.7406
2.9	(-2)9.7528	(-2)8.7027	(-2)7.7589	(-2)6.9114	(-2)6.1513	(-2)5.4703	(-2)4.8608
3.0	(-2)8.3643	(-2)7.4416	(-2)6.6151	(-2)5.8757	(-2)5.2146	(-2)4.6244	(-2)4.0978
3.1	(-2)7.1389	(-2)6.3330	(-2)5.6137	(-2)4.9721	(-2)4.4006	(-2)3.8918	(-2)3.4393
3.2	(-2)6.0636	(-2)5.3640	(-2)4.7415	(-2)4.1881	(-2)3.6967	(-2)3.2606	(-2)2.8739
3.3	(-2)5.1253	(-2)4.5215	(-2)3.9860	(-2)3.5114	(-2)3.0912	(-2)2.7194	(-2)2.3907
3.4	(-2)4.3112	(-2)3.7932	(-2)3.3351	(-2)2.9303	(-2)2.5730	(-2)2.2577	(-2)1.9799
3.5	(-2)3.6089	(-2)3.1669	(-2)2.7772	(-2)2.4340	(-2)2.1318	(-2)1.8659	(-2)1.6322
3.6	(-2)3.0063	(-2)2.6314	(-2)2.3018	(-2)2.0122	(-2)1.7580	(-2)1.5351	(-2)1.3396
3.7	(-2)2.4921	(-2)2.1759	(-2)1.8986	(-2)1.6558	(-2)1.4431	(-2)1.2571	(-2)1.0944
3.8	(-2)2.0558	(-2)1.7906	(-2)1.5587	(-2)1.3560	(-2)1.1791	(-2)1.0247	(-3)8.9001
3.9	(-2)1.6876	(-2)1.4664	(-2)1.2735	(-2)1.1053	(-3)9.5887	(-3)8.3139	(-3)7.2048
4.0	(-2)1.3786	(-2)1.1951	(-2)1.0355	(-3)8.9669	(-3)7.7613	(-3)6.7143	(-3)5.8057
4.1	(-2)1.1207	(-3)9.6928	(-3)8.3792	(-3)7.2400	(-3)6.2526	(-3)5.3973	(-3)4.6568
4.2	(-3)9.0656	(-3)7.8234	(-3)6.7481	(-3)5.8179	(-3)5.0135	(-3)4.3184	(-3)3.7179
4.3	(-3)7.2976	(-3)6.2839	(-3)5.4085	(-3)4.6529	(-3)4.0011	(-3)3.4390	(-3)2.9546
4.4	(-3)5.8457	(-3)5.0228	(-3)4.3139	(-3)3.7034	(-3)3.1779	(-3)2.7259	(-3)2.3371
4.5	(-3)4.6596	(-3)3.9954	(-3)3.4243	(-3)2.9336	(-3)2.5122	(-3)2.1504	(-3)1.8400
4.6	(-3)3.6961	(-3)3.1626	(-3)2.7050	(-3)2.3127	(-3)1.9765	(-3)1.6885	(-3)1.4419
4.7	(-3)2.9173	(-3)2.4912	(-3)2.1265	(-3)1.8145	(-3)1.5477	(-3)1.3195	(-3)1.1246
4.8	(-3)2.2914	(-3)1.9528	(-3)1.6637	(-3)1.4168	(-3)1.2061	(-3)1.0263	(-4)8.7305
4.9	(-3)1.7909	(-3)1.5233	(-3)1.2952	(-3)1.1009	(-4)9.3540	(-4)7.9449	(-4)6.7457
5.0	(-3)1.3929	(-3)1.1825	(-3)1.0035	(-4)8.5136	(-4)7.2201	(-4)6.1210	(-4)5.1875

Таблица 19.1. $U(a, x)$ и $V(a, x)$

x	$V(-0.3,x)$	$V(-0.2,x)$	$V(-0.1,x)$	$V(0,x)$	$V(0.1,x)$	$V(0.2,x)$	$V(0.3,x)$
0.0	(-1)3.0993	(-1)4.5280	(-1)5.7994	(-1)6.8621	(-1)7.6731	(-1)8.2008	(-1)8.4269
0.1	(-1)3.7442	(-1)5.0724	(-1)6.2358	(-1)7.1901	(-1)7.9000	(-1)8.3406	(-1)8.5002
0.2	(-1)4.3780	(-1)5.6069	(-1)6.6661	(-1)7.5184	(-1)8.1349	(-1)8.4974	(-1)8.5993
0.3	(-1)4.9991	(-1)6.1307	(-1)7.0905	(-1)7.8474	(-1)8.3788	(-1)8.6720	(-1)8.7250
0.4	(-1)5.6064	(-1)6.6436	(-1)7.5093	(-1)8.1782	(-1)8.6331	(-1)8.8660	(-1)8.8790
0.5	(-1)6.1992	(-1)7.1460	(-1)7.9238	(-1)8.5124	(-1)8.8994	(-1)9.0813	(-1)9.0632
0.6	(-1)6.7773	(-1)7.6386	(-1)8.3353	(-1)8.8519	(-1)9.1803	(-1)9.3205	(-1)9.2803
0.7	(-1)7.3412	(-1)8.1229	(-1)8.7460	(-1)9.1994	(-1)9.4787	(-1)9.5867	(-1)9.5336
0.8	(-1)7.8922	(-1)8.6009	(-1)9.1588	(-1)9.5583	(-1)9.7982	(-1)9.8840	(-1)9.8273
0.9	(-1)8.4321	(-1)9.0756	(-1)9.5771	(-1)9.9325	(0)1.0143	(0)1.0217	(0)1.0166
1.0	(-1)8.9640	(-1)9.5505	(0)1.0005	(0)1.0327	(0)1.0519	(0)1.0591	(0)1.0556
1.1	(-1)9.4914	(0)1.0030	(0)1.0449	(0)1.0747	(0)1.0932	(0)1.1013	(0)1.1005
1.2	(0)1.0019	(0)1.0521	(0)1.0913	(0)1.1200	(0)1.1389	(0)1.1490	(0)1.1520
1.3	(0)1.0553	(0)1.1028	(0)1.1406	(0)1.1693	(0)1.1898	(0)1.2032	(0)1.2110
1.4	(0)1.1100	(0)1.1559	(0)1.1936	(0)1.2236	(0)1.2470	(0)1.2649	(0)1.2789
1.5	(0)1.1668	(0)1.2125	(0)1.2513	(0)1.2839	(0)1.3115	(0)1.3353	(0)1.3569
1.6	(0)1.2267	(0)1.2734	(0)1.3147	(0)1.3515	(0)1.3848	(0)1.4160	(0)1.4466
1.7	(0)1.2908	(0)1.3400	(0)1.3853	(0)1.4277	(0)1.4683	(0)1.5085	(0)1.5499
1.8	(0)1.3603	(0)1.4136	(0)1.4645	(0)1.5142	(0)1.5639	(0)1.6150	(0)1.6692
1.9	(0)1.4368	(0)1.4958	(0)1.5542	(0)1.6130	(0)1.6738	(0)1.7379	(0)1.8070
2.0	(0)1.5220	(0)1.5886	(0)1.6563	(0)1.7265	(0)1.8005	(0)1.8799	(0)1.9665
2.1	(0)1.6178	(0)1.6941	(0)1.7734	(0)1.8572	(0)1.9470	(0)2.0446	(0)2.1517
2.2	(0)1.7267	(0)1.8149	(0)1.9083	(0)2.0085	(0)2.1171	(0)2.2360	(0)2.3672
2.3	(0)1.8513	(0)1.9541	(0)2.0645	(0)2.1841	(0)2.3149	(0)2.4589	(0)2.6185
2.4	(0)1.9950	(0)2.1153	(0)2.2459	(0)2.3887	(0)2.5457	(0)2.7195	(0)2.9124
2.5	(0)2.1614	(0)2.3028	(0)2.4576	(0)2.6278	(0)2.8159	(0)3.0247	(0)3.2572
2.6	(0)2.3551	(0)2.5218	(0)2.7053	(0)2.9080	(0)3.1330	(0)3.3834	(0)3.6627
2.7	(0)2.5818	(0)2.7785	(0)2.9961	(0)3.2376	(0)3.5064	(0)3.8063	(0)4.1415
2.8	(0)2.8478	(0)3.0803	(0)3.3387	(0)3.6263	(0)3.9474	(0)4.3064	(0)4.7084
2.9	(0)3.1612	(0)3.4366	(0)3.7435	(0)4.0864	(0)4.4700	(0)4.8998	(0)5.3820
3.0	(0)3.5318	(0)3.8584	(0)4.2236	(0)4.6326	(0)5.0914	(0)5.6065	(0)6.1855
3.1	(0)3.9715	(0)4.3596	(0)4.7948	(0)5.2835	(0)5.8328	(0)6.4510	(0)7.1472
3.2	(0)4.4950	(0)4.9572	(0)5.4768	(0)6.0617	(0)6.7208	(0)7.4640	(0)8.3029
3.3	(0)5.1205	(0)5.6722	(0)6.2941	(0)6.9957	(0)7.7882	(0)8.6838	(0)9.6969
3.4	(0)5.8704	(0)6.5308	(0)7.2770	(0)8.1210	(0)9.0763	(1)1.0158	(1)1.1385
3.5	(0)6.7730	(0)7.5658	(0)8.4638	(0)9.4818	(1)1.0637	(1)1.1948	(1)1.3438
3.6	(0)7.8635	(0)8.8182	(0)9.9023	(1)1.1134	(1)1.2535	(1)1.4130	(1)1.5945
3.7	(0)9.1860	(1)1.0340	(1)1.1653	(1)1.3149	(1)1.4854	(1)1.6799	(1)1.9019
3.8	(1)1.0797	(1)1.2196	(1)1.3793	(1)1.5616	(1)1.7699	(1)2.0080	(1)2.2804
3.9	(1)1.2766	(1)1.4470	(1)1.6419	(1)1.8649	(1)2.1203	(1)2.4130	(1)2.7486
4.0	(1)1.5185	(1)1.7268	(1)1.9656	(1)2.2395	(1)2.5539	(1)2.9150	(1)3.3300
4.1	(1)1.8169	(1)2.0725	(1)2.3663	(1)2.7041	(1)3.0927	(1)3.5401	(1)4.0554
4.2	(1)2.1864	(1)2.5016	(1)2.8646	(1)3.2829	(1)3.7653	(1)4.3219	(1)4.9644
4.3	(1)2.6464	(1)3.0366	(1)3.4870	(1)4.0073	(1)4.6086	(1)5.3040	(1)6.1085
4.4	(1)3.2213	(1)3.7065	(1)4.2680	(1)4.9179	(1)5.6708	(1)6.5433	(1)7.5550
4.5	(1)3.9432	(1)4.5494	(1)5.2524	(1)6.0680	(1)7.0147	(1)8.1143	(1)9.3921
4.6	(1)4.8541	(1)5.6148	(1)6.4990	(1)7.5270	(1)8.7230	(2)1.0115	(2)1.1736
4.7	(1)6.0085	(1)6.9677	(1)8.0849	(1)9.3866	(2)1.0904	(2)1.2674	(2)1.4740
4.8	(1)7.4787	(1)8.6937	(2)1.0112	(2)1.1768	(2)1.3703	(2)1.5964	(2)1.8608
4.9	(1)9.3598	(2)1.0906	(2)1.2715	(2)1.4831	(2)1.7309	(2)2.0211	(2)2.3611
5.0	(2)1.1778	(2)1.3756	(2)1.6073	(2)1.8791	(2)2.1979	(2)2.5720	(2)3.0112

Таблица 19.1. $U(a, x)$ и $V(a, x)$

x	$U(0.4,x)$	$U(0.5,x)$	$U(0.6,x)$	$U(0.7,x)$	$U(0.8,x)$	$U(0.9,x)$	$U(1.0,x)$
0.0	(0)1.2579	(0)1.2533	(0)1.2436	(0)1.2292	(0)1.2106	(0)1.1883	(0)1.1627
0.1	(0)1.1672	(0)1.1564	(0)1.1413	(0)1.1223	(0)1.1000	(0)1.0746	(0)1.0467
0.2	(0)1.0811	(0)1.0652	(0)1.0458	(0)1.0233	(-1)9.9813	(-1)9.7063	(-1)9.4122
0.3	(-1)9.9946	(-1)9.7955	(-1)9.5680	(-1)9.3162	(-1)9.0440	(-1)8.7549	(-1)8.4523
0.4	(-1)9.2205	(-1)8.9898	(-1)8.7372	(-1)8.4665	(-1)8.1811	(-1)7.8843	(-1)7.5790
0.5	(-1)8.4870	(-1)8.2327	(-1)7.9624	(-1)7.6795	(-1)7.3870	(-1)7.0879	(-1)6.7845
0.6	(-1)7.7928	(-1)7.5219	(-1)7.2403	(-1)6.9511	(-1)6.6567	(-1)6.3597	(-1)6.0622
0.7	(-1)7.1368	(-1)6.8555	(-1)6.5683	(-1)6.2776	(-1)5.9857	(-1)5.6945	(-1)5.4060
0.8	(-1)6.5181	(-1)6.2318	(-1)5.9437	(-1)5.6558	(-1)5.3699	(-1)5.0877	(-1)4.8105
0.9	(-1)5.9358	(-1)5.6493	(-1)5.3643	(-1)5.0826	(-1)4.8057	(-1)4.5347	(-1)4.2709
1.0	(-1)5.3894	(-1)5.1064	(-1)4.8280	(-1)4.5553	(-1)4.2896	(-1)4.0318	(-1)3.7826
1.1	(-1)4.8780	(-1)4.6019	(-1)4.3327	(-1)4.0713	(-1)3.8187	(-1)3.5753	(-1)3.3417
1.2	(-1)4.4008	(-1)4.1343	(-1)3.8765	(-1)3.6282	(-1)3.3898	(-1)3.1618	(-1)2.9443
1.3	(-1)3.9571	(-1)3.7022	(-1)3.4575	(-1)3.2235	(-1)3.0003	(-1)2.7881	(-1)2.5870
1.4	(-1)3.5459	(-1)3.3042	(-1)3.0739	(-1)2.8550	(-1)2.6475	(-1)2.4514	(-1)2.2665
1.5	(-1)3.1663	(-1)2.9390	(-1)2.7238	(-1)2.5204	(-1)2.3288	(-1)2.1487	(-1)1.9797
1.6	(-1)2.8171	(-1)2.6050	(-1)2.4053	(-1)2.2177	(-1)2.0419	(-1)1.8774	(-1)1.7240
1.7	(-1)2.4972	(-1)2.3007	(-1)2.1167	(-1)1.9447	(-1)1.7844	(-1)1.6351	(-1)1.4965
1.8	(-1)2.2054	(-1)2.0246	(-1)1.8561	(-1)1.6994	(-1)1.5540	(-1)1.4193	(-1)1.2948
1.9	(-1)1.9402	(-1)1.7749	(-1)1.6216	(-1)1.4798	(-1)1.3487	(-1)1.2278	(-1)1.1165
2.0	(-1)1.7003	(-1)1.5501	(-1)1.4115	(-1)1.2838	(-1)1.1664	(-1)1.0585	(-2)9.5952
2.1	(-1)1.4842	(-1)1.3486	(-1)1.2240	(-1)1.1097	(-1)1.0050	(-2)9.0923	(-2)8.2173
2.2	(-1)1.2904	(-1)1.1687	(-1)1.0574	(-2)9.5563	(-2)8.6280	(-2)7.7820	(-2)7.0122
2.3	(-1)1.1174	(-1)1.0088	(-2)9.0985	(-2)8.1979	(-2)7.3793	(-2)6.6361	(-2)5.9622
2.4	(-2)9.6358	(-2)8.6728	(-2)7.7984	(-2)7.0055	(-2)6.2874	(-2)5.6377	(-2)5.0508
2.5	(-2)8.2754	(-2)7.4258	(-2)6.6573	(-2)5.9630	(-2)5.3363	(-2)4.7714	(-2)4.2627
2.6	(-2)7.0773	(-2)6.3320	(-2)5.6603	(-2)5.0555	(-2)4.5115	(-2)4.0227	(-2)3.5839
2.7	(-2)6.0272	(-2)5.3770	(-2)4.7930	(-2)4.2689	(-2)3.7990	(-2)3.3782	(-2)3.0017
2.8	(-2)5.1111	(-2)4.5470	(-2)4.0418	(-2)3.5900	(-2)3.1863	(-2)2.8258	(-2)2.5042
2.9	(-2)4.3157	(-2)3.8288	(-2)3.3942	(-2)3.0068	(-2)2.6615	(-2)2.3543	(-2)2.0810
3.0	(-2)3.6284	(-2)3.2104	(-2)2.8384	(-2)2.5078	(-2)2.2142	(-2)1.9535	(-2)1.7224
3.1	(-2)3.0372	(-2)2.6803	(-2)2.3636	(-2)2.0830	(-2)1.8344	(-2)1.6144	(-2)1.4199
3.2	(-2)2.5313	(-2)2.2281	(-2)1.9598	(-2)1.7228	(-2)1.5134	(-2)1.3287	(-2)1.1658
3.3	(-2)2.1004	(-2)1.8441	(-2)1.6181	(-2)1.4189	(-2)1.2434	(-2)1.0890	(-3)9.5318
3.4	(-2)1.7351	(-2)1.5196	(-2)1.3301	(-2)1.1636	(-2)1.0172	(-3)8.8881	(-3)7.7615
3.5	(-2)1.4270	(-2)1.2468	(-2)1.0887	(-3)9.5009	(-3)8.2868	(-3)7.2238	(-3)6.2937
3.6	(-2)1.1683	(-2)1.0184	(-3)8.8715	(-3)7.7243	(-3)6.7217	(-3)5.8462	(-3)5.0820
3.7	(-3)9.5224	(-3)8.2810	(-3)7.1975	(-3)6.2525	(-3)5.4288	(-3)4.7111	(-3)4.0863
3.8	(-3)7.7263	(-3)6.7038	(-3)5.8136	(-3)5.0391	(-3)4.3655	(-3)3.7801	(-3)3.2716
3.9	(-3)6.2406	(-3)5.4026	(-3)4.6749	(-3)4.0432	(-3)3.4952	(-3)3.0200	(-3)2.6082
4.0	(-3)5.0176	(-3)4.3344	(-3)3.7425	(-3)3.2298	(-3)2.7861	(-3)2.4023	(-3)2.0704
4.1	(-3)4.0160	(-3)3.4617	(-3)2.9826	(-3)2.5686	(-3)2.2111	(-3)1.9025	(-3)1.6363
4.2	(-3)3.1995	(-3)2.7521	(-3)2.3663	(-3)2.0336	(-3)1.7470	(-3)1.5001	(-3)1.2876
4.3	(-3)2.5373	(-3)2.1781	(-3)1.8689	(-3)1.6029	(-3)1.3742	(-3)1.1776	(-3)1.0088
4.4	(-3)2.0029	(-3)1.7158	(-3)1.4693	(-3)1.2577	(-3)1.0761	(-4)9.2036	(-4)7.8686
4.5	(-3)1.5738	(-3)1.3455	(-3)1.1499	(-4)9.8235	(-4)8.3889	(-4)7.1610	(-4)6.1105
4.6	(-3)1.2308	(-3)1.0503	(-4)8.9583	(-4)7.6382	(-4)6.5103	(-4)5.5468	(-4)4.7242
4.7	(-4)9.5815	(-4)8.1601	(-4)6.9470	(-4)5.9121	(-4)5.0295	(-4)4.2772	(-4)3.6361
4.8	(-4)7.4240	(-4)6.3107	(-4)5.3625	(-4)4.5551	(-4)3.8680	(-4)3.2833	(-4)2.7861
4.9	(-4)5.7255	(-4)4.8579	(-4)4.1203	(-4)3.4935	(-4)2.9611	(-4)2.5090	(-4)2.1252
5.0	(-4)4.3948	(-4)3.7221	(-4)3.1512	(-4)2.6671	(-4)2.2566	(-4)1.9086	(-4)1.6108

Таблица 19.1. $U(a, x)$ и $V(a, x)$

x	$V(0.4,x)$	$V(0.5,x)$	$V(0.6,x)$	$V(0.7,x)$	$V(0.8,x)$	$V(0.9,x)$	$V(1.0,x)$
0.0	(−1)8.3485	(−1)7.9788	(−1)7.3474	(−1)6.4988	(−1)5.4912	(−1)4.3932	(−1)3.2800
0.1	(−1)8.3808	(−1)7.9988	(−1)7.3851	(−1)6.5836	(−1)5.6492	(−1)4.6453	(−1)3.6401
0.2	(−1)8.4468	(−1)8.0590	(1)7.4675	(−1)6.7147	(−1)5.8526	(−1)4.9394	(−1)4.0368
0.3	(−1)8.5475	(−1)8.1604	(−1)7.5954	(−1)6.8936	(−1)6.1035	(−1)5.2785	(−1)4.4742
0.4	(−1)8.6844	(−1)8.3045	(−1)7.7707	(−1)7.1224	(−1)6.4046	(−1)5.6664	(−1)4.9575
0.5	(−1)8.8595	(−1)8.4934	(−1)7.9958	(−1)7.4039	(−1)6.7596	(−1)6.1076	(−1)5.4924
0.6	(−1)9.0757	(−1)8.7302	(−1)8.2739	(−1)7.7419	(−1)7.1730	(−1)6.6077	(−1)6.0858
0.7	(−1)9.3364	(−1)9.0186	(−1)8.6092	(−1)8.1412	(−1)7.6504	(−1)7.1733	(−1)6.7457
0.8	(−1)9.6460	(−1)9.3633	(−1)9.0068	(−1)8.6076	(−1)8.1984	(−1)7.8124	(−1)7.4814
0.9	(0)1.0010	(−1)9.7698	(−1)9.4730	(−1)9.1481	(−1)8.8253	(−1)8.5344	(−1)8.3040
1.0	(0)1.0434	(0)1.0245	(0)1.0015	(−1)9.7713	(−1)9.5408	(−1)9.3507	(−1)9.2267
1.1	(0)1.0926	(0)1.0797	(0)1.0643	(0)1.0488	(0)1.0357	(0)1.0275	(0)1.0265
1.2	(0)1.1495	(0)1.1436	(0)1.1367	(0)1.1309	(0)1.1287	(0)1.1323	(0)1.1437
1.3	(0)1.2151	(0)1.2174	(0)1.2200	(0)1.2251	(0)1.2348	(0)1.2514	(0)1.2765
1.4	(0)1.2908	(0)1.3024	(0)1.3158	(0)1.3330	(0)1.3561	(0)1.3870	(0)1.4276
1.5	(0)1.3779	(0)1.4003	(0)1.4260	(0)1.4569	(0)1.4949	(0)1.5420	(0)1.5999
1.6	(0)1.4784	(0)1.5132	(0)1.5528	(0)1.5992	(0)1.6542	(0)1.7196	(0)1.7973
1.7	(0)1.5943	(0)1.6433	(0)1.6989	(0)1.7629	(0)1.8373	(0)1.9238	(0)2.0243
1.8	(0)1.7281	(0)1.7936	(0)1.8675	(0)1.9518	(0)2.0484	(0)2.1592	(0)2.2862
1.9	(0)1.8829	(0)1.9674	(0)2.0625	(0)2.1703	(0)2.2926	(0)2.4317	(0)2.5896
2.0	(0)2.0622	(0)2.1689	(0)2.2886	(0)2.4236	(0)2.5760	(0)2.7481	(0)2.9424
2.1	(0)2.2705	(0)2.4030	(0)2.5514	(0)2.7182	(0)2.9058	(0)3.1169	(0)3.3542
2.2	(0)2.5130	(0)2.6757	(0)2.8578	(0)3.0620	(0)3.2911	(0)3.5483	(0)3.8368
2.3	(0)2.7961	(0)2.9943	(0)3.2160	(0)3.4644	(0)3.7428	(0)4.0548	(0)4.4044
2.4	(0)3.1275	(0)3.3676	(0)3.6363	(0)3.9371	(0)4.2741	(0)4.6517	(0)5.0747
2.5	(0)3.5166	(0)3.8065	(0)4.1310	(0)4.4944	(0)4.9015	(0)5.3578	(0)5.8692
2.6	(0)3.9749	(0)4.3241	(0)4.7153	(0)5.1536	(0)5.6451	(0)6.1963	(0)6.8146
2.7	(0)4.5165	(0)4.9368	(0)5.4079	(0)5.9365	(0)6.5297	(0)7.1959	(0)7.9440
2.8	(0)5.1589	(0)5.6644	(0)6.2320	(0)6.8696	(0)7.5862	(0)8.3921	(0)9.2985
2.9	(0)5.9235	(0)6.5320	(0)7.2162	(0)7.9862	(0)8.8529	(0)9.8292	(1)1.0929
3.0	(0)6.8368	(0)7.5701	(0)8.3962	(0)9.3274	(1)1.0378	(1)1.1563	(1)1.2900
3.1	(0)7.9320	(0)8.8172	(0)9.8164	(1)1.0945	(1)1.2220	(1)1.3662	(1)1.5293
3.2	(0)9.2504	(1)1.0321	(1)1.1533	(1)1.2903	(1)1.4455	(1)1.6214	(1)1.8207
3.3	(1)1.0844	(1)1.2142	(1)1.3615	(1)1.5284	(1)1.7178	(1)1.9329	(1)2.1773
3.4	(1)1.2777	(1)1.4357	(1)1.6151	(1)1.8190	(1)2.0509	(1)2.3148	(1)2.6153
3.5	(1)1.5132	(1)1.7060	(1)1.9253	(1)2.1752	(1)2.4601	(1)2.7849	(1)3.1555
3.6	(1)1.8014	(1)2.0373	(1)2.3064	(1)2.6137	(1)2.9646	(1)3.3658	(1)3.8246
3.7	(1)2.1555	(1)2.4452	(1)2.7765	(1)3.1556	(1)3.5896	(1)4.0868	(1)4.6566
3.8	(1)2.5923	(1)2.9495	(1)3.3588	(1)3.8282	(1)4.3669	(1)4.9853	(1)5.6956
3.9	(1)3.1336	(1)3.5756	(1)4.0833	(1)4.6667	(1)5.3377	(1)6.1098	(1)6.9986
4.0	(1)3.8072	(1)4.3563	(1)4.9884	(1)5.7165	(1)6.5556	(1)7.5232	(1)8.6395
4.1	(1)4.6493	(1)5.3341	(1)6.1242	(1)7.0364	(1)8.0899	(1)9.3073	(2)1.0715
4.2	(1)5.7065	(1)6.5642	(1)7.5559	(1)8.7031	(2)1.0031	(2)1.1569	(2)1.3351
4.3	(1)7.0397	(1)8.1183	(1)9.3682	(2)1.0817	(2)1.2498	(2)1.4449	(2)1.6714
4.4	(1)8.7286	(2)1.0091	(2)1.1673	(2)1.3511	(2)1.5647	(2)1.8131	(2)2.1022
4.5	(2)1.0878	(2)1.2605	(2)1.4616	(2)1.6957	(2)1.9684	(2)2.2861	(2)2.6566
4.6	(2)1.3624	(2)1.5826	(2)1.8392	(2)2.1387	(2)2.4882	(2)2.8963	(2)3.3731
4.7	(2)1.7151	(2)1.9968	(2)2.3259	(2)2.7106	(2)3.1606	(2)3.6870	(2)4.3032
4.8	(2)2.1701	(2)2.5321	(2)2.9559	(2)3.4524	(2)4.0341	(2)4.7161	(2)5.5160
4.9	(2)2.7596	(2)3.2270	(2)3.7752	(2)4.4187	(2)5.1742	(2)6.0616	(2)7.1043
5.0	(2)3.5270	(2)4.1331	(2)4.8456	(2)5.6833	(2)6.6688	(2)7.8285	(2)9.1938

Таблица 19.1. $U(a, x)$ и $V(a, x)$

x	$U(1.5,x)$	$U(2.0,x)$	$U(2.5,x)$	$U(3.0,x)$	$U(3.5,x)$	$U(4.0,x)$	$U(4.5,x)$	$U(5.0,x)$
0.0	(0)1.0000	(-1)8.1085	(-1)6.2666	(-1)4.6509	(-1)3.3333	(-1)2.3167	(-1)1.5666	(-1)1.0335
0.1	(-1)8.8187	(-1)7.0232	(-1)5.3409	(-1)3.9060	(-1)2.7615	(-1)1.8950	(-1)1.2662	(-2)8.2588
0.2	(-1)7.7700	(-1)6.0787	(-1)4.5492	(-1)3.2786	(-1)2.2867	(-1)1.5494	(-1)1.0230	(-2)6.5971
0.3	(-1)6.8389	(-1)5.2566	(-1)3.8719	(-1)2.7501	(-1)1.8924	(-1)1.2662	(-2)8.2604	(-2)5.2673
0.4	(-1)6.0120	(-1)4.5410	(-1)3.2925	(-1)2.3050	(-1)1.5650	(-1)1.0340	(-2)6.6663	(-2)4.2032
0.5	(-1)5.2778	(-1)3.9182	(-1)2.7969	(-1)1.9302	(-1)1.2931	(-2)8.4374	(-2)5.3758	(-2)3.3518
0.6	(-1)4.6262	(-1)3.3763	(-1)2.3731	(-1)1.6146	(-1)1.0674	(-2)6.8788	(-2)4.3316	(-2)2.6707
0.7	(-1)4.0482	(-1)2.9051	(-1)2.0109	(-1)1.3490	(-2)8.8019	(-2)5.6025	(-2)3.4869	(-2)2.1262
0.8	(-1)3.5360	(-1)2.4957	(-1)1.7015	(-1)1.1256	(-2)7.2491	(-2)4.5579	(-2)2.8040	(-2)1.6910
0.9	(-1)3.0825	(-1)2.1403	(-1)1.4375	(-2)9.3785	(-2)5.9624	(-2)3.7035	(-2)2.2523	(-2)1.3434
1.0	(-1)2.6816	(-1)1.8321	(-1)1.2124	(-2)7.8022	(-2)4.8971	(-2)3.0053	(-2)1.8068	(-2)1.0660
1.1	(-1)2.3276	(-1)1.5651	(-1)1.0208	(-2)6.4802	(-2)4.0160	(-2)2.4351	(-2)1.4475	(-3)8.4479
1.2	(-1)2.0157	(-1)1.3343	(-2)8.5773	(-2)5.3727	(-2)3.2880	(-2)1.9701	(-2)1.1579	(-3)6.6856
1.3	(-1)1.7412	(-1)1.1350	(-2)7.1928	(-2)4.4461	(-2)2.6872	(-2)1.5913	(-3)9.2486	(-3)5.2831
1.4	(-1)1.5003	(-2)9.6317	(-2)6.0190	(-2)3.6721	(-2)2.1922	(-2)1.2831	(-3)7.3749	(-3)4.1683
1.5	(-1)1.2893	(-2)8.1541	(-2)5.0255	(-2)3.0265	(-2)1.7849	(-2)1.0327	(-3)5.8705	(-3)3.2833
1.6	(-1)1.1049	(-2)6.8857	(-2)4.1862	(-2)2.4890	(-2)1.4503	(-3)8.2953	(-3)4.6645	(-3)2.5816
1.7	(-2)9.4412	(-2)5.7994	(-2)3.4786	(-2)2.0423	(-2)1.1759	(-3)6.6500	(-3)3.6991	(-3)2.0262
1.8	(-2)8.0438	(-2)4.8712	(-2)2.8833	(-2)1.6718	(-3)9.5127	(-3)5.3198	(-3)2.9276	(-3)1.5873
1.9	(-2)6.8324	(-2)4.0801	(-2)2.3837	(-2)1.3652	(-3)7.6780	(-3)4.2463	(-3)2.3122	(-3)1.2409
2.0	(-2)5.7853	(-2)3.4076	(-2)1.9653	(-2)1.1120	(-3)6.1823	(-3)3.3818	(-3)1.8222	(-4)9.6810
2.1	(-2)4.8830	(-2)2.8375	(-2)1.6159	(-3)9.0339	(-3)4.9656	(-3)2.6869	(-3)1.4328	(-4)7.5364
2.2	(-2)4.1080	(-2)2.3556	(-2)1.3248	(-3)7.3193	(-3)3.9782	(-3)2.1296	(-3)1.1240	(-4)5.8538
2.3	(-2)3.4444	(-2)1.9495	(-2)1.0829	(-3)5.9138	(-3)3.1787	(-3)1.6837	(-4)8.7960	(-4)4.5364
2.4	(-2)2.8782	(-2)1.6082	(-3)8.8260	(-3)4.7646	(-3)2.5331	(-3)1.3277	(-4)6.8665	(-4)3.5071
2.5	(-2)2.3966	(-2)1.3223	(-3)7.1710	(-3)3.8275	(-3)2.0129	(-3)1.0442	(-4)5.3467	(-4)2.7047
2.6	(-2)1.9886	(-2)1.0837	(-3)5.8081	(-3)3.0655	(-3)1.5951	(-4)8.1895	(-4)4.1523	(-4)2.0806
2.7	(-2)1.6441	(-3)8.8509	(-3)4.6891	(-3)2.4478	(-3)1.2603	(-4)6.4052	(-4)3.2161	(-4)1.5964
2.8	(-2)1.3544	(-3)7.2040	(-3)3.7734	(-3)1.9484	(-4)9.9277	(-4)4.9954	(-4)2.4841	(-4)1.2216
2.9	(-2)1.1116	(-3)5.8431	(-3)3.0264	(-3)1.5460	(-4)7.7967	(-4)3.8845	(-4)1.9134	(-5)9.3228
3.0	(-3)9.0885	(-3)4.7224	(-3)2.4191	(-3)1.2228	(-4)6.1042	(-4)3.0117	(-4)1.4695	(-5)7.0950
3.1	(-3)7.4028	(-3)3.8030	(-3)1.9270	(-4)9.6394	(-4)4.7641	(-4)2.3279	(-4)1.1253	(-5)5.3843
3.2	(-3)6.0067	(-3)3.0513	(-3)1.5296	(-4)7.5735	(-4)3.7062	(-4)1.7938	(-5)8.5914	(-5)4.0742
3.3	(-3)4.8549	(-3)2.4392	(-3)1.2099	(-4)5.9301	(-4)2.8738	(-4)1.3778	(-5)6.5394	(-5)3.0738
3.4	(-3)3.9086	(-3)1.9426	(-4)9.5361	(-4)4.6274	(-4)2.2210	(-4)1.0550	(-5)4.9621	(-5)2.3121
3.5	(-3)3.1342	(-3)1.5412	(-4)7.4887	(-4)3.5982	(-4)1.7107	(-5)8.0514	(-5)3.7534	(-5)1.7338
3.6	(-3)2.5032	(-3)1.2181	(-4)5.8592	(-4)2.7880	(-4)1.3131	(-5)6.1244	(-5)2.8300	(-5)1.2961
3.7	(-3)1.9912	(-4)9.5895	(-4)4.5672	(-4)2.1526	(-4)1.0045	(-5)4.6430	(-5)2.1269	(-6)9.6590
3.8	(-3)1.5775	(-4)7.5202	(-4)3.5468	(-4)1.6559	(-5)7.6567	(-5)3.5080	(-5)1.5932	(-6)7.1749
3.9	(-3)1.2446	(-4)5.8741	(-4)2.7439	(-4)1.2692	(-5)5.8157	(-5)2.6413	(-5)1.1894	(-6)5.3123
4.0	(-4)9.7788	(-4)4.5702	(-4)2.1146	(-5)9.6913	(-5)4.4015	(-5)1.9818	(-6)8.8495	(-6)3.9203
4.1	(-4)7.6513	(-4)3.5414	(-4)1.6233	(-5)7.3727	(-5)3.3191	(-5)1.4817	(-6)6.5617	(-6)2.8834
4.2	(-4)5.9616	(-4)2.7331	(-4)1.2413	(-5)5.5875	(-5)2.4937	(-5)1.1039	(-6)4.8485	(-6)2.1136
4.3	(-4)4.6255	(-4)2.1007	(-5)9.4547	(-5)4.2185	(-5)1.8667	(-6)8.1946	(-6)3.5701	(-6)1.5440
4.4	(-4)3.5736	(-4)1.6081	(-5)7.1727	(-5)3.1726	(-5)1.3920	(-6)6.0609	(-6)2.6194	(-6)1.1240
4.5	(-4)2.7491	(-4)1.2259	(-5)5.4198	(-5)2.3767	(-5)1.0342	(-6)4.4663	(-6)1.9150	(-7)8.1539
4.6	(-4)2.1058	(-5)9.3061	(-5)4.0787	(-5)1.7736	(-6)7.6538	(-6)3.2790	(-6)1.3949	(-7)5.8942
4.7	(-4)1.6061	(-5)7.0352	(-5)3.0571	(-5)1.3183	(-6)5.6428	(-6)2.3983	(-6)1.0124	(-7)4.2455
4.8	(-4)1.2197	(-5)5.2961	(-5)2.2819	(-6)9.7593	(-6)4.1440	(-6)1.7475	(-7)7.3205	(-7)3.0469
4.9	(-5)9.2216	(-5)3.9701	(-5)1.6964	(-6)7.1961	(-6)3.0315	(-6)1.2685	(-7)5.2737	(-7)2.1788
5.0	(-5)6.9418	(-5)2.9634	(-5)1.2558	(-6)5.2847	(-6)2.2089	(-7)9.1724	(-7)3.7849	(-7)1.5523

Таблица 19.1. $U(a, x)$ и $V(a, x)$

x	$V(1.5,x)$	$V(2.0,x)$	$V(2.5,x)$	$V(3.0,x)$	$V(3.5,x)$	$V(4.0,x)$	$V(4.5,x)$	$V(5.0,x)$
0.0	0.0000	(−1)3.4311	(−1)7.9788	(−1)4.9200	0.0000	(0)0.8578	(0)2.3937	(0)1.7220
0.1	(−1)0.7999	(−1)3.9591	(−1)8.0788	(−1)5.8561	(−1)2.4076	(0)1.0483	(0)2.4477	(0)2.1545
0.2	(−1)1.6118	(−1)4.5665	(−1)8.3814	(−1)6.9684	(−1)4.8999	(0)1.2810	(0)2.6124	(0)2.6952
0.3	(−1)2.4481	(−1)5.2660	(−1)8.8948	(−1)8.2911	(−1)7.5647	(0)1.5652	(0)2.8954	(0)3.3715
0.4	(−1)3.3218	(−1)6.0721	(−1)9.6332	(−1)9.8651	(0)1.0497	(0)1.9126	(0)3.3098	(0)4.2178
0.5	(−1)4.2467	(−1)7.0024	(0)1.0617	(0)1.1740	(0)1.3802	(0)2.3376	(0)3.8751	(0)5.2778
0.6	(−1)5.2381	(−1)8.0774	(0)1.1873	(0)1.3975	(0)1.7600	(0)2.8579	(0)4.6180	(0)6.6060
0.7	(−1)6.3130	(−1)9.3217	(0)1.3438	(0)1.6644	(0)2.2033	(0)3.4955	(0)5.5736	(0)8.2721
0.8	(−1)7.4906	(0)1.0764	(0)1.5356	(0)1.9833	(0)2.7266	(0)4.2777	(0)6.7880	(1)1.0364
0.9	(−1)8.7928	(0)1.2440	(0)1.7683	(0)2.3652	(0)3.3501	(0)5.2386	(0)8.3200	(1)1.2993
1.0	(0)1.0245	(0)1.4390	(0)2.0490	(0)2.8230	(0)4.0980	(0)6.4206	(1)1.0245	(1)1.6301
1.1	(0)1.1877	(0)1.6665	(0)2.3862	(0)3.3729	(0)5.0002	(0)7.8765	(1)1.2659	(1)2.0469
1.2	(0)1.3724	(0)1.9325	(0)2.7905	(0)4.0346	(0)6.0933	(0)9.6727	(1)1.5683	(1)2.5728
1.3	(0)1.5826	(0)2.2442	(0)3.2748	(0)4.8322	(0)7.4224	(1)1.1892	(1)1.9473	(1)3.2373
1.4	(0)1.8234	(0)2.6104	(0)3.8551	(0)5.7959	(0)9.0439	(1)1.4640	(1)2.4227	(1)4.0782
1.5	(0)2.1005	(0)3.0418	(0)4.5511	(0)6.9626	(1)1.1028	(1)1.8048	(1)3.0195	(1)5.1442
1.6	(0)2.4211	(0)3.5514	(0)5.3869	(0)8.3782	(1)1.3461	(1)2.2284	(1)3.7699	(1)6.4978
1.7	(0)2.7936	(0)4.1551	(0)6.3925	(1)1.0100	(1)1.6454	(1)2.7558	(1)4.7150	(1)8.2198
1.8	(0)3.2284	(0)4.8722	(0)7.6047	(1)1.2199	(1)2.0145	(1)3.4139	(1)5.9076	(2)1.0415
1.9	(0)3.7380	(0)5.7267	(0)9.0697	(1)1.4765	(1)2.4708	(1)4.2370	(1)7.4155	(2)1.3218
2.0	(0)4.3378	(0)6.7480	(1)1.0844	(1)1.7910	(1)3.0364	(1)5.2689	(1)9.3262	(2)1.6806
2.1	(0)5.0463	(0)7.9725	(1)1.3000	(1)2.1774	(1)3.7393	(1)6.5656	(2)1.1753	(2)2.1408
2.2	(0)5.8865	(0)9.4452	(1)1.5626	(1)2.6535	(1)4.6150	(1)8.1989	(2)1.4841	(2)2.7325
2.3	(0)6.8869	(1)1.1222	(1)1.8834	(1)3.2418	(1)5.7092	(2)1.0262	(2)1.8781	(2)3.4948
2.4	(0)8.0823	(1)1.3374	(1)2.2765	(1)3.9709	(1)7.0801	(2)1.2873	(2)2.3822	(2)4.4794
2.5	(0)9.5162	(1)1.5987	(1)2.7597	(1)4.8771	(1)8.8025	(2)1.6189	(2)3.0285	(2)5.7544
2.6	(1)1.1243	(1)1.9172	(1)3.3555	(1)6.0069	(2)1.0973	(2)2.0411	(2)3.8596	(2)7.4093
2.7	(1)1.3329	(1)2.3068	(1)4.0926	(1)7.4199	(2)1.3716	(2)2.5801	(2)4.9310	(2)9.5631
2.8	(1)1.5860	(1)2.7849	(1)5.0074	(1)9.1925	(2)1.7193	(2)3.2701	(2)6.3162	(3)1.2374
2.9	(1)1.8943	(1)3.3738	(1)6.1466	(2)1.1423	(2)2.1614	(2)4.1562	(2)8.1119	(3)1.6051
3.0	(1)2.2710	(1)4.1018	(1)7.5701	(2)1.4240	(2)2.7252	(2)5.2976	(3)1.0447	(3)2.0877
3.1	(1)2.7333	(1)5.0049	(1)9.3551	(2)1.7809	(2)3.4467	(2)6.7721	(3)1.3491	(3)2.7227
3.2	(1)3.3028	(1)6.1295	(2)1.1601	(2)2.2345	(2)4.3729	(2)8.6829	(3)1.7474	(3)3.5606
3.3	(1)4.0070	(1)7.5350	(2)1.4437	(2)2.8131	(2)5.5657	(3)1.1167	(3)2.2698	(3)4.6697
3.4	(1)4.8812	(1)9.2982	(2)1.8032	(2)3.5537	(2)7.1071	(3)1.4407	(3)2.9574	(3)6.1422
3.5	(1)5.9708	(2)1.1519	(2)2.2604	(2)4.5048	(2)9.1055	(3)1.8646	(3)3.8650	(3)8.1029
3.6	(1)7.3343	(2)1.4325	(2)2.8441	(2)5.7308	(3)1.1705	(3)2.4212	(3)5.0672	(4)1.0722
3.7	(1)9.0472	(2)1.7887	(2)3.5920	(2)7.3166	(3)1.5100	(3)3.1543	(3)6.6645	(4)1.4232
3.8	(2)1.1208	(2)2.2424	(2)4.5540	(2)9.3755	(3)1.9547	(3)4.1233	(3)8.7939	(4)1.8950
3.9	(2)1.3945	(2)2.8227	(2)5.7960	(3)1.2058	(3)2.5393	(3)5.4084	(4)1.1642	(4)2.5313
4.0	(2)1.7425	(2)3.5678	(2)7.4057	(3)1.5567	(3)3.3108	(3)7.1188	(4)1.5465	(4)3.3924
4.1	(2)2.1870	(2)4.5283	(2)9.5001	(3)2.0173	(3)4.3324	(3)9.4032	(4)2.0613	(4)4.5614
4.2	(2)2.7569	(2)5.7716	(3)1.2236	(3)2.6243	(3)5.6903	(4)1.2465	(4)2.7570	(4)6.1538
4.3	(2)3.4909	(2)7.3873	(3)1.5823	(3)3.4272	(3)7.5019	(4)1.6584	(4)3.7005	(4)8.3306
4.4	(2)4.4399	(2)9.4956	(3)2.0545	(3)4.4934	(3)9.9277	(4)2.2145	(4)4.9845	(5)1.1316
4.5	(2)5.6724	(3)1.2258	(3)2.6786	(3)5.9146	(4)1.3188	(4)2.9680	(4)6.7384	(5)1.5426
4.6	(2)7.2797	(3)1.5893	(3)3.5069	(3)7.8166	(4)1.7588	(4)3.9929	(4)9.1425	(5)2.1103
4.7	(2)9.3849	(3)2.0695	(3)4.6106	(4)1.0372	(4)2.3547	(4)5.3922	(5)1.2450	(5)2.8973
4.8	(3)1.2154	(3)2.7065	(3)6.0871	(4)1.3819	(4)3.1649	(4)7.3096	(5)1.7018	(5)3.9923
4.9	(3)1.5812	(3)3.5553	(3)8.0706	(4)1.8487	(4)4.2708	(4)9.9472	(5)2.3348	(5)5.5212
5.0	(3)2.0666	(3)4.6909	(4)1.0746	(4)2.4833	(4)5.7864	(5)1.3589	(5)3.2156	(5)7.6639

Таблица 19.2. $W(a, \pm x)$

x	$W(-5.0, x)$	$W(-4.0, x)$	$W(-3.0, x)$	$W(-2.0, x)$	$W(-5.0, -x)$	$W(-4.0, -x)$	$W(-3.0, -x)$	$W(-2.0, -x)$
0.0	0.47348	0.50102	0.53933	0.60027	0.47348	0.50102	0.53933	0.60027
0.1	0.35697	0.39190	0.43901	0.51126	0.56641	0.59017	0.62350	0.67730
0.2	0.22267	0.26715	0.32555	0.41203	0.63113	0.65576	0.68900	0.74078
0.3	+0.07727	+0.13172	0.20231	0.30453	0.66435	0.69515	0.73381	0.78939
0.4	-0.07200	-0.00899	+0.07298	0.19088	0.66434	0.70666	0.75649	0.82206
0.5	-0.21764	-0.14933	-0.05857	+0.07334	0.63099	0.68972	0.75622	0.83798
0.6	-0.35231	-0.28362	-0.18832	-0.04569	0.56583	0.64485	0.73285	0.83665
0.7	-0.46911	-0.40634	-0.31226	-0.16377	0.47199	0.57370	0.68690	0.81785
0.8	-0.56198	-0.51236	-0.42646	-0.27838	0.35408	0.47898	0.61955	0.78173
0.9	-0.62597	-0.59713	-0.52722	-0.38697	0.21799	0.36441	0.53268	0.72875
1.0	-0.65752	-0.65688	-0.61113	-0.48704	+0.07061	0.23458	0.42880	0.65975
1.1	-0.65470	-0.68881	-0.67522	-0.57617	-0.08044	+0.09483	0.31103	0.57594
1.2	-0.61732	-0.69121	-0.71706	-0.65204	-0.22724	-0.04897	0.18303	0.47890
1.3	-0.54700	-0.66357	-0.73488	-0.71255	-0.36189	-0.19063	+0.04890	0.37059
1.4	-0.44716	-0.60670	-0.72761	-0.75583	-0.47700	-0.32388	-0.08688	0.25333
1.5	-0.32290	-0.52270	-0.69502	-0.78031	-0.56602	-0.44262	-0.21962	0.12978
1.6	-0.18077	-0.41495	-0.63774	-0.78484	-0.62369	-0.54122	-0.34454	+0.00294
1.7	-0.02851	-0.28803	-0.55733	-0.76869	-0.64634	-0.61480	-0.45694	-0.12397
1.8	+0.12535	-0.14758	-0.45625	-0.73166	-0.63218	-0.65945	-0.55237	-0.24749
1.9	0.27194	-0.00009	-0.33785	-0.67412	-0.58147	-0.67250	-0.62680	-0.36405
2.0	0.40253	+0.14739	-0.20633	-0.59707	-0.49661	-0.65271	-0.67684	-0.47006
2.1	0.50907	0.28751	-0.06661	-0.50217	-0.38212	-0.60042	-0.69989	-0.56198
2.2	0.58468	0.41299	+0.07581	-0.39174	-0.24445	-0.51764	-0.69432	-0.63649
2.3	0.62416	0.51702	0.21503	-0.26879	-0.09171	-0.40802	-0.65962	-0.69061
2.4	0.62438	0.59364	0.34495	-0.13696	+0.06678	-0.27680	-0.59652	-0.72184
2.5	0.58460	0.63810	0.45960	-0.00046	0.22095	-0.13062	-0.50704	-0.72830
2.6	0.50668	0.64722	0.55333	+0.13603	0.36067	+0.02276	-0.39454	-0.70889
2.7	0.39507	0.61968	0.62119	0.26749	0.47637	0.17482	-0.26363	-0.66340
2.8	0.25669	0.55625	0.65920	0.38872	0.55973	0.31672	-0.12008	-0.59265
2.9	+0.10057	0.45985	0.66463	0.49459	0.60434	0.43980	+0.02936	-0.49853
3.0	-0.06260	0.33555	0.63631	0.58021	0.60627	0.53615	0.17727	-0.38404
3.1	-0.22123	0.19042	0.57472	0.64123	0.56451	0.59915	0.31588	-0.25332
3.2	-0.36354	+0.03320	0.48225	0.67411	0.48124	0.62397	0.43747	-0.11153
3.3	-0.47850	-0.12614	0.36312	0.67637	0.36184	0.60808	0.53481	+0.03530
3.4	-0.55672	-0.27701	0.22333	0.64681	0.21471	0.55155	0.60167	0.18042
3.5	-0.59128	-0.40886	+0.07050	0.58576	+0.05079	0.45725	0.63325	0.31672
3.6	-0.57849	-0.51196	-0.08654	0.49519	-0.11714	0.33088	0.62663	0.43701
3.7	-0.51836	-0.57820	-0.23816	0.37883	-0.27544	0.18074	0.58111	0.53447
3.8	-0.41490	-0.60177	-0.37452	0.24205	-0.41066	+0.01731	0.49849	0.60305
3.9	-0.27601	-0.57982	-0.48622	+0.09180	-0.51073	-0.14737	0.38313	0.63793
4.0	-0.11306	-0.51295	-0.56500	-0.06370	-0.56615	-0.30058	0.24189	0.63597
4.1	+0.05995	-0.40534	-0.60443	-0.21535	-0.57098	-0.42985	+0.08387	0.59605
4.2	0.22741	-0.26474	-0.60059	-0.35365	-0.52367	-0.52406	-0.08010	0.51937
4.3	0.37359	-0.10210	-0.55252	-0.46937	-0.42750	-0.57448	-0.23812	0.40960
4.4	0.48406	+0.06923	-0.46263	-0.55413	-0.29056	-0.57571	-0.37804	0.27290
4.5	0.54726	0.23443	-0.33674	-0.60118	-0.12531	-0.52643	-0.48847	+0.11769
4.6	0.55583	0.37847	-0.18393	-0.60601	+0.05237	-0.42982	-0.55975	-0.04573
4.7	0.50770	0.48758	-0.01604	-0.56693	0.22465	-0.29363	-0.58492	-0.20576
4.8	0.40664	0.55059	+0.15314	-0.48549	0.37342	-0.12977	-0.56059	-0.35036
4.9	0.26226	0.56028	0.30893	-0.36666	0.48233	+0.04660	-0.48753	-0.46788
5.0	0.08936	0.51440	0.43707	-0.21874	0.53861	0.21827	-0.37095	-0.54818
	$\left[{(-3)7 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)7 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)6 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)5 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)7 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)6 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)6 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)5 \atop 6}\right]$

Значения $W(a, x)$ при целых значениях a взяты из книги [19.12].

Таблица 19.2. $W(a, \pm x)$

x	$W(2.0,x)$	$W(3.0,x)$	$W(4.0,x)$	$W(5.0,x)$	$W(2.0,-x)$	$W(3.0,-x)$	$W(4.0,-x)$	$W(5.0,-x)$
0.0	(-1) 6.0027	(-1) 5.3933	(-1) 5.0102	(-1) 4.7348	(-1) 6.0027	(-1) 5.3933	(-1) 5.0102	(-1) 4.7348
0.1	(-1) 5.2271	(-1) 4.5427	(-1) 4.1061	(-1) 3.7888	(-1) 6.8986	(-1) 6.4061	(-1) 6.1154	(-1) 5.9185
0.2	(-1) 4.5561	(-1) 3.8285	(-1) 3.3667	(-1) 3.0330	(-1) 7.9324	(-1) 7.6114	(-1) 7.4658	(-1) 7.3991
0.3	(-1) 3.9758	(-1) 3.2292	(-1) 2.7621	(-1) 2.4291	(-1) 9.1243	(-1) 9.0448	(-1) 9.1150	(-1) 9.2505
0.4	(-1) 3.4744	(-1) 2.7262	(-1) 2.2677	(-1) 1.9466	(0) 1.0497	(0) 1.0748	(0) 1.1128	(0) 1.1564
0.5	(-1) 3.0411	(-1) 2.3041	(-1) 1.8634	(-1) 1.5611	(0) 1.2075	(0) 1.2770	(0) 1.3583	(0) 1.4454
0.6	(-1) 2.6668	(-1) 1.9499	(-1) 1.5327	(-1) 1.2530	(0) 1.3888	(0) 1.5168	(0) 1.6574	(0) 1.8059
0.7	(-1) 2.3436	(-1) 1.6525	(-1) 1.2621	(-1) 1.0067	(0) 1.5967	(0) 1.8008	(0) 2.0215	(0) 2.2555
0.8	(-1) 2.0644	(-1) 1.4028	(-1) 1.0407	(-2) 8.0964	(0) 1.8345	(0) 2.1368	(0) 2.4643	(0) 2.8155
0.9	(-1) 1.8233	(-1) 1.1931	(-2) 8.5930	(-2) 6.5197	(0) 2.1061	(0) 2.5335	(0) 3.0019	(0) 3.5123
1.0	(-1) 1.6151	(-1) 1.0168	(-2) 7.1069	(-2) 5.2572	(0) 2.4156	(0) 3.0013	(0) 3.6538	(0) 4.3782
1.1	(-1) 1.4351	(-2) 8.6859	(-2) 5.8082	(-2) 4.2455	(0) 2.7674	(0) 3.5517	(0) 4.4431	(0) 5.4528
1.2	(-1) 1.2795	(-2) 7.4385	(-2) 4.8880	(-2) 3.4340	(0) 3.1662	(0) 4.1980	(0) 5.3970	(0) 6.7844
1.3	(-1) 1.1450	(-2) 6.3880	(-2) 4.0663	(-2) 2.7825	(0) 3.6169	(0) 4.9554	(0) 6.5479	(0) 8.4318
1.4	(-1) 1.0286	(-2) 5.5025	(-2) 3.3906	(-2) 2.2590	(0) 4.1247	(0) 5.8406	(0) 7.9336	(1) 1.0466
1.5	(-2) 9.2770	(-2) 4.7556	(-2) 2.8343	(-2) 1.8377	(0) 4.6948	(0) 6.8726	(0) 9.5984	(1) 1.2975
1.6	(-2) 8.4018	(-2) 4.1248	(-2) 2.3757	(-2) 1.4984	(0) 5.3324	(0) 8.0723	(1) 1.1594	(1) 1.6060
1.7	(-2) 7.6411	(-2) 3.5917	(-2) 1.9973	(-2) 1.2246	(0) 6.0424	(0) 9.4626	(1) 1.3979	(1) 1.9848
1.8	(-2) 6.9782	(-2) 3.1406	(-2) 1.6845	(-2) 1.0035	(0) 6.8296	(1) 1.1069	(1) 1.6824	(1) 2.4487
1.9	(-2) 6.3984	(-2) 2.7584	(-2) 1.4256	(-3) 8.2455	(0) 7.6980	(1) 1.2917	(1) 2.0206	(1) 3.0155
2.0	(-2) 5.8890	(-2) 2.4342	(-2) 1.2111	(-3) 6.7954	(0) 8.6507	(1) 1.5037	(1) 2.4216	(1) 3.7062
2.1	(-2) 5.4386	(-2) 2.1588	(-2) 1.0330	(-3) 5.6183	(0) 9.6899	(1) 1.7457	(1) 2.8952	(1) 4.5455
2.2	(-2) 5.0372	(-2) 1.9245	(-3) 8.8491	(-3) 4.6610	(1) 1.0816	(1) 2.0209	(1) 3.4529	(1) 5.5623
2.3	(-2) 4.6755	(-2) 1.7247	(-3) 7.6160	(-3) 3.8810	(1) 1.2027	(1) 2.3322	(1) 4.1069	(1) 6.7904
2.4	(-2) 4.3456	(-2) 1.5540	(-3) 6.5875	(-3) 3.2443	(1) 1.3319	(1) 2.6827	(1) 4.8711	(1) 8.2686
2.5	(-2) 4.0402	(-2) 1.4075	(-3) 5.7281	(-3) 2.7236	(1) 1.4686	(1) 3.0749	(1) 5.7600	(2) 1.0042
2.6	(-2) 3.7524	(-2) 1.2813	(-3) 5.0088	(-3) 2.2968	(1) 1.6117	(1) 3.5113	(1) 6.7894	(2) 1.2161
2.7	(-2) 3.4763	(-2) 1.1719	(-3) 4.4055	(-3) 1.9464	(1) 1.7597	(1) 3.9937	(1) 7.9756	(2) 1.4683
2.8	(-2) 3.2064	(-2) 1.0764	(-3) 3.8984	(-3) 1.6580	(1) 1.9108	(1) 4.5230	(1) 9.3355	(2) 1.7672
2.9	(-2) 2.9379	(-3) 9.9205	(-3) 3.4711	(-3) 1.4202	(1) 2.0626	(1) 5.0992	(2) 1.0886	(2) 2.1198
3.0	(-2) 2.6664	(-3) 9.1665	(-3) 3.1099	(-3) 1.2237	(1) 2.2123	(1) 5.7210	(2) 1.2643	(2) 2.5340
3.1	(-2) 2.3883	(-3) 8.4815	(-3) 2.8032	(-3) 1.0610	(1) 2.3564	(1) 6.3856	(2) 1.4620	(2) 3.0179
3.2	(-2) 2.1007	(-3) 7.8473	(-3) 2.5414	(-4) 9.2596	(1) 2.4910	(1) 7.0882	(2) 1.6831	(2) 3.5801
3.3	(-2) 1.8013	(-3) 7.2477	(-3) 2.3163	(-4) 8.1356	(1) 2.6116	(1) 7.8218	(2) 1.9284	(2) 4.2298
3.4	(-2) 1.4891	(-3) 6.6685	(-3) 2.1209	(-4) 7.1975	(1) 2.7132	(1) 8.5768	(2) 2.1983	(2) 4.9757
3.5	(-2) 1.1637	(-3) 6.0967	(-3) 1.9491	(-4) 6.4117	(1) 2.7908	(1) 9.3410	(2) 2.4925	(2) 5.8266
3.6	(-3) 8.2597	(-3) 5.5212	(-3) 1.7956	(-4) 5.7506	(1) 2.8386	(2) 1.0099	(2) 2.8101	(2) 6.7902
3.7	(-3) 4.7816	(-3) 4.9326	(-3) 1.6558	(-4) 5.1910	(1) 2.8513	(2) 1.0833	(2) 3.1488	(2) 7.8732
3.8	(-3)+1.2365	(-3) 4.3233	(-3) 1.5256	(-4) 4.7135	(1) 2.8234	(2) 1.1520	(2) 3.5057	(2) 9.0802
3.9	(-3)-2.3273	(-3) 3.6879	(-3) 1.4014	(-4) 4.3017	(1) 2.7502	(2) 1.2137	(2) 3.8760	(3) 1.0413
4.0	(-3)-5.8480	(-3) 3.0231	(-3) 1.2800	(-4) 3.9416	(1) 2.6275	(2) 1.2657	(2) 4.2539	(3) 1.1970
4.1	(-3)-9.2508	(-3) 2.3283	(-3) 1.1586	(-4) 3.6211	(1) 2.4523	(2) 1.3050	(2) 4.6317	(3) 1.3446
4.2	(-2)-1.2449	(-3) 1.6058	(-3) 1.0349	(-4) 3.3295	(1) 2.2234	(2) 1.3286	(2) 4.9999	(3) 1.5128
4.3	(-2)-1.5347	(-3) 0.8609	(-4) 9.0706	(-4) 3.0577	(1) 1.9410	(2) 1.3334	(2) 5.3475	(3) 1.6899
4.4	(-2)-1.7842	(-3)+0.1023	(-4) 7.7357	(-4) 2.7975	(1) 1.6079	(2) 1.3167	(2) 5.6617	(3) 1.8733
4.5	(-2)-1.9831	(-3)-0.6579	(-4) 6.3364	(-4) 2.5418	(1) 1.2294	(2) 1.2758	(2) 5.9283	(3) 2.0596
4.6	(-2)-2.1213	(-3)-1.4043	(-4) 4.8704	(-4) 2.2847	(0) 8.1345	(2) 1.2086	(2) 6.1317	(3) 2.2445
4.7	(-2)-2.1898	(-3)-2.1182	(-4) 3.3422	(-4) 2.0210	(0)+3.7101	(2) 1.1138	(2) 6.2561	(3) 2.4229
4.8	(-2)-2.1815	(-3)-2.7786	(-4) 1.7637	(-4) 1.7468	(0)-0.8430	(1) 9.9105	(2) 6.2853	(3) 2.5885
4.9	(-2)-2.0914	(-3)-3.3622	(-4)+0.1548	(-4) 1.4595	(0)-5.3626	(1) 8.4104	(2) 6.2040	(3) 2.7344
5.0	(-2)-1.9179	(-3)-3.8449	(-4)-1.4564	(-4) 1.1577	(0)-9.6664	(1) 6.6590	(2) 5.9987	(3) 2.8528

Об интерполировании см. 19.28.

Таблица 19.2. $W(a, \pm x)$

x	$W(-1.0,x)$	$W(-0.9,x)$	$W(-0.8,x)$	$W(-0.7,x)$	$W(-0.6,x)$	$W(-0.5,x)$	$W(-0.4,x)$
0.0	0.73148	0.75416	0.77982	0.80879	0.84130	0.87718	0.91553
0.1	0.65958	0.68457	0.71267	0.74421	0.77940	0.81803	0.85912
0.2	0.58108	0.60881	0.63980	0.67441	0.71281	0.75477	0.79925
0.3	0.49671	0.52750	0.56175	0.59981	0.64187	0.68766	0.73610
0.4	0.40726	0.44133	0.47908	0.52089	0.56693	0.61696	0.66984
0.5	0.31359	0.35102	0.39240	0.43811	0.48837	0.54293	0.60064
0.6	0.21659	0.25734	0.30233	0.35200	0.40658	0.46584	0.52866
0.7	0.11723	0.16111	0.20958	0.26311	0.32198	0.38601	0.45409
0.8	+0.01657	+0.06324	0.11490	0.17206	0.23506	0.30379	0.37715
0.9	-0.08429	-0.03529	+0.01912	+0.07954	0.14637	0.21956	0.29811
1.0	-0.18412	-0.13342	-0.07684	-0.01369	+0.05650	0.13380	0.21727
1.1	-0.28164	-0.23002	-0.17198	-0.10679	0.03384	+0.04704	0.13503
1.2	-0.37549	-0.32384	-0.26523	-0.19880	-0.12386	-0.04009	+0.05185
1.3	-0.46422	-0.41357	-0.35538	-0.28870	-0.21269	-0.12687	-0.03172
1.4	-0.54635	-0.49783	-0.44119	-0.37536	-0.29933	-0.21246	-0.11502
1.5	-0.62034	-0.57517	-0.52130	-0.45753	-0.38270	-0.29594	-0.19728
1.6	-0.68464	-0.64409	-0.59431	-0.53393	-0.46162	-0.37627	-0.27764
1.7	-0.73771	-0.70310	-0.65875	-0.60317	-0.53480	-0.45231	-0.35510
1.8	-0.77808	-0.75070	-0.71317	-0.66382	-0.60091	-0.52280	-0.42857
1.9	-0.80439	-0.78547	-0.75611	-0.71446	-0.65854	-0.58645	-0.49684
2.0	-0.81541	-0.80610	-0.78618	-0.75365	-0.70628	-0.64186	-0.55864
2.1	-0.81014	-0.81144	-0.80212	-0.78003	-0.74273	-0.68765	-0.61261
2.2	-0.78787	-0.80054	-0.80282	-0.79238	-0.76654	-0.72243	-0.65738
2.3	-0.74822	-0.77279	-0.78741	-0.78960	-0.77649	-0.74486	-0.69156
2.4	-0.69124	-0.72790	-0.75531	-0.77089	-0.77153	-0.75373	-0.71385
2.5	-0.61743	-0.66601	-0.70633	-0.73570	-0.75086	-0.74799	-0.72301
2.6	-0.52785	-0.58777	-0.64071	-0.68391	-0.71398	-0.72686	-0.71801
2.7	-0.42412	-0.49436	-0.55918	-0.61582	-0.66079	-0.68984	-0.69802
2.8	-0.30847	-0.38753	-0.46303	-0.53224	-0.59164	-0.63684	-0.66256
2.9	-0.18374	-0.26968	-0.35416	-0.43455	-0.50739	-0.56821	-0.61149
3.0	-0.05335	-0.14378	-0.23506	-0.32474	-0.40948	-0.48485	-0.54517
3.1	+0.07873	-0.01339	-0.10884	-0.20540	-0.29995	-0.38820	-0.46444
3.2	0.20811	+0.11741	+0.02083	-0.07973	-0.18146	-0.28034	-0.37075
3.3	0.33006	0.24412	0.14977	+0.04850	-0.05729	-0.16395	-0.26614
3.4	0.43974	0.36198	0.27340	0.17504	+0.06875	-0.04232	-0.15327
3.5	0.53233	0.46613	0.38695	0.29527	0.19236	+0.08071	-0.03541
3.6	0.60334	0.55184	0.48557	0.40440	0.30891	0.20083	+0.08365
3.7	0.64885	0.61476	0.56460	0.49761	0.41360	0.31342	0.19963
3.8	0.66575	0.65118	0.61986	0.57035	0.50168	0.41373	0.30797
3.9	0.65207	0.65834	0.64786	0.61858	0.56868	0.49706	0.40397
4.0	0.60721	0.63466	0.64616	0.63904	0.61072	0.55906	0.48303
4.1	0.53214	0.58002	0.61356	0.62958	0.62476	0.59598	0.54088
4.2	0.42952	0.49593	0.55042	0.58939	0.60892	0.60496	0.57391
4.3	0.30382	0.38565	0.45874	0.51923	0.56270	0.58437	0.57944
4.4	0.16115	0.25422	0.34234	0.42158	0.48725	0.53398	0.55599
4.5	+0.00918	+0.10831	0.20677	0.30072	0.38544	0.45522	0.50355
4.6	-0.14329	-0.04397	+0.05918	0.16266	0.26194	0.35129	0.42375
4.7	-0.28674	-0.19348	-0.09193	+0.01497	+0.12315	0.22716	0.31998
4.8	-0.41153	-0.33057	-0.23720	-0.13360	-0.02310	+0.08947	0.19740
4.9	-0.50861	-0.44572	-0.36694	-0.27352	-0.16782	-0.05374	+0.06277
5.0	-0.57025	-0.53023	-0.47182	-0.39516	-0.30146	-0.19341	-0.07580
	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)4\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)4\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)4\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)4\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)4\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)4\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)4\\5\end{smallmatrix}\right]$

Таблица 19.2. $W(a, \pm x)$

x	$W(-1.0,-x)$	$W(-0.9,-x)$	$W(-0.8,-x)$	$W(-0.7,-x)$	$W(-0.6,-x)$	$W(-0.5,-x)$	$W(-0.4,-x)$
0.0	0.73148	0.75416	0.77982	0.80879	0.84130	0.87718	0.91553
0.1	0.79607	0.81697	0.84073	0.86771	0.89814	0.93193	0.96827
0.2	0.85267	0.87241	0.89490	0.92053	0.94958	0.98201	1.01711
0.3	0.90067	0.91990	0.94182	0.96682	0.99522	1.02707	1.06178
0.4	0.93946	0.95892	0.98099	1.00612	1.03467	1.06677	1.10197
0.5	0.96849	0.98892	1.01192	1.03797	1.06749	1.10070	1.13729
0.6	0.98722	1.00940	1.03413	1.06191	1.09323	1.12843	1.16736
0.7	0.99521	1.01990	1.04713	1.07745	1.11143	1.14951	1.19170
0.8	0.99202	1.01997	1.05048	1.08414	1.12160	1.16343	1.20981
0.9	0.97734	1.00923	1.04374	1.08151	1.12325	1.16966	1.22114
1.0	0.95092	0.98738	1.02655	1.06912	1.11589	1.16769	1.22511
1.1	0.91262	0.95418	0.99859	1.04657	1.09904	1.15695	1.22112
1.2	0.86244	0.90952	0.95962	1.01355	1.07228	1.13693	1.20855
1.3	0.80055	0.85341	0.90954	0.96978	1.03523	1.10714	1.18680
1.4	0.72729	0.78603	0.84835	0.91515	0.98760	1.06714	1.15529
1.5	0.64322	0.70774	0.77623	0.84963	0.92923	1.01659	1.11351
1.6	0.54911	0.61912	0.69355	0.77341	0.86006	0.95525	1.06102
1.7	0.44603	0.52099	0.60091	0.68684	0.78025	0.88304	0.99750
1.8	0.33528	0.41443	0.49914	0.59053	0.69014	0.80004	0.92281
1.9	0.21849	0.30081	0.38936	0.48532	0.59032	0.70659	0.83697
2.0	+0.09757	0.18179	0.27298	0.37236	0.48166	0.60326	0.74025
2.1	-0.02528	+0.05934	0.15171	0.25309	0.36531	0.49090	0.63319
2.2	-0.14758	-0.06427	+0.02758	0.12930	0.24278	0.37070	0.51665
2.3	-0.26660	-0.18651	-0.09709	+0.00305	+0.11588	0.24419	0.39182
2.4	-0.37941	-0.30459	-0.21967	-0.12323	-0.01322	+0.11327	0.26028
2.5	-0.48297	-0.41552	-0.33731	-0.24685	-0.14203	-0.01983	+0.12398
2.6	-0.57415	-0.51623	-0.44698	-0.36487	-0.26774	-0.15248	-0.01472
2.7	-0.64990	-0.60356	-0.54551	-0.47416	-0.38730	-0.28178	-0.15309
2.8	-0.70733	-0.67449	-0.62975	-0.57149	-0.49748	-0.40451	-0.28802
2.9	-0.74387	-0.72615	-0.69663	-0.65363	-0.59492	-0.51729	-0.41615
3.0	-0.75737	-0.75605	-0.74331	-0.71748	-0.67629	-0.61660	-0.53384
3.1	-0.74633	-0.76219	-0.76738	-0.76019	-0.73841	-0.69897	-0.63739
3.2	-0.70996	-0.74323	-0.76692	-0.77937	-0.77841	-0.76108	-0.72310
3.3	-0.64841	-0.69863	-0.74077	-0.77320	-0.79386	-0.79994	-0.78743
3.4	-0.56281	-0.62881	-0.68862	-0.74065	-0.78300	-0.81309	-0.82721
3.5	-0.45542	-0.53525	-0.61114	-0.68160	-0.74490	-0.79874	-0.83985
3.6	-0.32961	-0.42059	-0.51016	-0.59701	-0.67961	-0.75603	-0.82349
3.7	-0.18992	-0.28860	-0.38867	-0.48899	-0.58833	-0.68515	-0.77725
3.8	-0.04191	-0.14423	-0.25086	-0.36092	-0.47349	-0.58750	-0.70141
3.9	+0.10799	+0.00657	-0.10208	-0.21739	-0.33863	-0.46582	-0.59756
4.0	0.25266	0.15702	+0.05134	-0.06416	-0.18934	-0.32421	-0.46872
4.1	0.38471	0.29976	0.20225	+0.09203	-0.03124	-0.16811	-0.31938
4.2	0.49679	0.42722	0.34303	0.24366	+0.12831	-0.00420	-0.15545
4.3	0.58208	0.53205	0.46597	0.38285	0.28140	+0.15987	+0.01587
4.4	0.63477	0.60759	0.56372	0.50171	0.41981	0.31572	0.18634
4.5	0.65055	0.64841	0.62979	0.59285	0.53543	0.45473	0.34702
4.6	0.62708	0.65075	0.65910	0.64997	0.62083	0.56851	0.48877
4.7	0.56440	0.61301	0.64846	0.66833	0.66982	0.64950	0.60280
4.8	0.46513	0.53614	0.59705	0.64531	0.67800	0.69154	0.68125
4.9	0.33464	0.42379	0.50672	0.58085	0.64328	0.69050	0.71794
5.0	0.18091	0.28240	0.38215	0.47771	0.56635	0.64481	0.70889
	$\begin{bmatrix}(-3)5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)6\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)6\\5\end{bmatrix}$

Таблица 19.2. $W(a, \pm x)$

x	$W(-0.3,x)$	$W(-0.2,x)$	$W(-0.1,x)$	$W(0,x)$	$W(0.1,x)$	$W(0.2,x)$	$W(0.3,x)$
0.0	0.95411	0.98880	1.01364	1.02277	1.01364	0.98880	0.95411
0.1	0.90030	0.93725	0.96381	0.97388	0.96480	0.93920	0.90311
0.2	0.84377	0.88381	0.91299	0.92496	0.91691	0.89145	0.85480
0.3	0.78461	0.82851	0.86116	0.87595	0.86984	0.84540	0.80896
0.4	0.72293	0.77137	0.80828	0.82673	0.82344	0.80084	0.76536
0.5	0.65878	0.71237	0.75426	0.77719	0.77753	0.75757	0.72375
0.6	0.59225	0.65150	0.69902	0.72716	0.73192	0.71533	0.68386
0.7	0.52341	0.58875	0.64245	0.67647	0.68637	0.67388	0.64540
0.8	0.45236	0.52410	0.58445	0.62496	0.64067	0.63296	0.60809
0.9	0.37924	0.45756	0.52493	0.57244	0.59459	0.59228	0.57163
1.0	0.30421	0.38918	0.46383	0.51877	0.54790	0.55160	0.53573
1.1	0.22751	0.31906	0.40111	0.46381	0.50038	0.51063	0.50010
1.2	0.14946	0.24734	0.33677	0.40744	0.45186	0.46915	0.46446
1.3	+0.07042	0.17425	0.27090	0.34961	0.40217	0.42691	0.42854
1.4	−0.00912	0.10007	0.20361	0.29032	0.35118	0.38374	0.39209
1.5	−0.08857	+0.02522	0.13514	0.22960	0.29883	0.33945	0.35491
1.6	−0.16725	−0.04982	+0.06577	0.16760	0.24510	0.29393	0.31679
1.7	−0.24435	−0.12443	−0.00407	0.10454	0.19006	0.24713	0.27761
1.8	−0.31894	−0.19788	−0.07387	+0.04073	0.13384	0.19904	0.23725
1.9	−0.38999	−0.26933	−0.14299	−0.02340	0.07667	0.14975	0.19569
2.0	−0.45633	−0.33779	−0.21066	−0.08731	+0.01891	0.09941	0.15296
2.1	−0.51674	−0.40219	−0.27600	−0.15034	−0.03902	+0.04828	0.10917
2.2	−0.56989	−0.46135	−0.33802	−0.21170	−0.09655	−0.00327	0.06450
2.3	−0.61444	−0.51400	−0.39560	−0.27048	−0.15300	−0.05478	+0.01926
2.4	−0.64903	−0.55882	−0.44755	−0.32569	−0.20756	−0.10567	−0.02617
2.5	−0.67233	−0.59448	−0.49261	−0.37619	−0.25934	−0.15523	−0.07129
2.6	−0.68311	−0.61966	−0.52947	−0.42082	−0.30731	−0.20267	−0.11551
2.7	−0.68033	−0.63315	−0.55686	−0.45833	−0.35040	−0.24709	−0.15811
2.8	−0.66313	−0.63385	−0.57356	−0.48749	−0.38745	−0.28749	−0.19829
2.9	−0.63097	−0.62088	−0.57846	−0.50710	−0.41729	−0.32288	−0.23518
3.0	−0.58369	−0.59365	−0.57063	−0.51607	−0.43878	−0.35203	−0.26783
3.1	−0.52157	−0.55190	−0.54943	−0.51344	−0.45085	−0.37401	−0.29526
3.2	−0.44541	−0.49584	−0.51451	−0.49851	−0.45256	−0.38777	−0.31648
3.3	−0.35655	−0.42613	−0.46594	−0.47084	−0.44315	−0.39239	−0.33055
3.4	−0.25697	−0.34402	−0.40427	−0.43039	−0.42215	−0.38713	−0.33663
3.5	−0.14924	−0.25134	−0.33055	−0.37754	−0.38941	−0.37148	−0.33401
3.6	−0.03654	−0.15050	−0.24643	−0.31318	−0.34517	−0.34523	−0.32218
3.7	+0.07742	−0.04453	−0.15413	−0.23871	−0.29013	−0.30852	−0.30091
3.8	0.18846	+0.06302	−0.05645	−0.15612	−0.22549	−0.26190	−0.27027
3.9	0.29213	0.16814	+0.04330	−0.06794	−0.15299	−0.20639	−0.23072
4.0	0.38382	0.26651	0.14132	+0.02278	−0.07486	−0.14349	−0.18313
4.1	0.45904	0.35370	0.23354	0.11257	+0.00615	−0.07518	−0.12880
4.2	0.51364	0.42535	0.31572	0.19762	0.08689	−0.00389	−0.06948
4.3	0.54413	0.47744	0.38368	0.27395	0.16386	+0.06754	−0.00733
4.4	0.54793	0.50658	0.43357	0.33764	0.23342	0.13597	+0.05511
4.5	0.52370	0.51029	0.46212	0.38503	0.29194	0.19809	0.11504
4.6	0.47151	0.48726	0.46690	0.41300	0.33601	0.25059	0.16948
4.7	0.39312	0.43762	0.44663	0.41921	0.36270	0.29037	0.21549
4.8	0.29197	0.36308	0.40138	0.40237	0.36981	0.31476	0.25027
4.9	0.17327	0.26703	0.33274	0.36248	0.35608	0.32171	0.27144
5.0	0.04376	0.15455	0.24393	0.30095	0.32145	0.31009	0.27719
	$\left[{(-3)4 \atop 5}\right]$	$\left[{(-3)3 \atop 5}\right]$	$\left[{(-3)3 \atop 5}\right]$	$\left[{(-3)3 \atop 5}\right]$	$\left[{(-3)3 \atop 5}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 5}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 5}\right]$

Таблица 19.2. $W(a,\pm x)$

x	$W(-0.3,-x)$	$W(-0.2,-x)$	$W(-0.1,-x)$	$W(0,-x)$	$W(0.1,-x)$	$W(0.2,-x)$	$W(0.3,-x)$
0.0	0.95411	0.98880	1.01364	1.02277	1.01364	0.98880	0.95411
0.1	1.00506	1.03835	1.06245	1.07165	1.06348	1.04037	1.00797
0.2	1.05296	1.08581	1.11016	1.12050	1.11435	1.09399	1.06483
0.3	1.09759	1.13097	1.15665	1.16924	1.16622	1.14968	1.12477
0.4	1.13868	1.17362	1.20172	1.21771	1.21899	1.20741	1.18782
0.5	1.17589	1.21344	1.24510	1.26568	1.27248	1.26706	1.25396
0.6	1.20884	1.25007	1.28645	1.31285	1.32644	1.32845	1.32307
0.7	1.23706	1.28307	1.32534	1.35884	1.38053	1.39129	1.39494
0.8	1.26006	1.31193	1.36129	1.40315	1.43429	1.45520	1.46928
0.9	1.27725	1.33606	1.39368	1.44521	1.48719	1.51968	1.54567
1.0	1.28802	1.35480	1.42185	1.48433	1.53855	1.58412	1.62356
1.1	1.29171	1.36744	1.44504	1.51974	1.58760	1.64775	1.70224
1.2	1.28761	1.37321	1.46241	1.55054	1.63341	1.70967	1.78087
1.3	1.27501	1.37129	1.47304	1.57575	1.67498	1.76885	1.85841
1.4	1.25320	1.36083	1.47598	1.59429	1.71113	1.82408	1.93366
1.5	1.22150	1.34098	1.47020	1.60502	1.74059	1.87401	2.00522
1.6	1.17926	1.31091	1.45469	1.60672	1.76201	1.91713	2.07150
1.7	1.12596	1.26983	1.42841	1.59813	1.77390	1.95181	2.13072
1.8	1.06115	1.21705	1.39039	1.57800	1.77474	1.97628	2.18093
1.9	0.98458	1.15200	1.33973	1.54509	1.76299	1.98870	2.22000
2.0	0.89620	1.07426	1.27565	1.49825	1.73709	1.98714	2.24569
2.1	0.79618	0.98365	1.19757	1.43644	1.69557	1.96968	2.25565
2.2	0.68503	0.88026	1.10510	1.35882	1.63706	1.93446	2.24752
2.3	0.56357	0.76448	0.99819	1.26478	1.56041	1.87972	2.21894
2.4	0.43300	0.63710	0.87711	1.15405	1.46471	1.80390	2.16770
2.5	0.29492	0.49932	0.74256	1.02673	1.34942	1.70575	2.09177
2.6	0.15140	0.35277	0.59571	0.88342	1.21444	1.58440	1.98946
2.7	+0.00489	0.19959	0.43825	0.72523	1.06021	1.43949	1.85956
2.8	−0.14168	+0.04242	0.27241	0.55388	0.88776	1.27129	1.70140
2.9	−0.28503	−0.11563	+0.10100	0.37173	0.69887	1.08078	1.51507
3.0	−0.42150	−0.27098	−0.07258	+0.18182	0.49606	0.86979	1.30151
3.1	−0.54722	−0.41967	−0.24442	−0.01213	0.28264	0.64105	1.06267
3.2	−0.65815	−0.55742	−0.41011	−0.20574	+0.06279	0.39827	0.80159
3.3	−0.75027	−0.67978	−0.56487	−0.39404	−0.15855	+0.14618	0.52249
3.4	−0.81974	−0.78229	−0.70368	−0.57158	−0.37567	−0.10952	+0.23083
3.5	−0.86311	−0.86067	−0.82147	−0.73259	−0.58228	−0.36221	−0.06670
3.6	−0.87754	−0.91101	−0.91331	−0.87118	−0.77162	−0.60449	−0.36232
3.7	−0.86098	−0.93010	−0.97470	−0.98158	−0.93674	−0.82836	−0.64721
3.8	−0.81248	−0.91559	−1.00185	−1.05844	−1.07077	−1.02554	−0.91187
3.9	−0.73233	−0.86631	−0.99193	−1.09719	−1.16728	−1.18779	−1.14634
4.0	−0.62227	−0.78249	−0.94343	−1.09434	−1.22069	−1.30732	−1.34070
4.1	−0.48559	−0.66595	−0.85640	−1.04786	−1.22662	−1.37730	−1.48554
4.2	−0.32717	−0.52024	−0.73270	−0.95753	−1.18240	−1.39231	−1.57256
4.3	−0.15346	−0.35070	−0.57611	−0.82515	−1.08743	−1.34891	−1.59514
4.4	+0.02771	−0.16437	−0.39249	−0.65483	−0.94350	−1.24610	−1.54901
4.5	0.20739	+0.03014	−0.18962	−0.45301	−0.75508	−1.08573	−1.43285
4.6	0.37594	0.22299	+0.02291	−0.22843	−0.52942	−0.87285	−1.24877
4.7	0.52351	0.40359	0.23414	+0.00810	−0.27649	−0.61582	−1.00271
4.8	0.64069	0.56113	0.43218	0.24408	−0.00874	−0.32626	−0.70462
4.9	0.71919	0.68534	0.60494	0.46598	+0.25940	−0.01876	−0.36835
5.0	0.75259	0.76721	0.74090	0.65996	0.51219	+0.28970	−0.01132
	$\begin{bmatrix}(-3)6\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)6\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)7\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)9\\5\end{bmatrix}$

Таблица 19.2. $W(a, \pm x)$

x	$W(0.4,x)$	$W(0.5,x)$	$W(0.6,x)$	$W(0.7,x)$	$W(0.8,x)$	$W(0.9,x)$	$W(1.0,x)$
0.0	0.91553	0.87718	0.84130	0.80879	0.77982	0.75416	0.73148
0.1	0.86271	0.82232	0.78433	0.74973	0.71874	0.69116	0.66667
0.2	0.81331	0.77155	0.73205	0.69590	0.66339	0.63436	0.60852
0.3	0.76709	0.72456	0.68408	0.64687	0.61328	0.58321	0.55639
0.4	0.72376	0.68104	0.64007	0.60222	0.56794	0.53718	0.50970
0.5	0.68304	0.64064	0.59964	0.56155	0.52692	0.49578	0.46791
0.6	0.64462	0.60305	0.56244	0.52446	0.48979	0.45853	0.43051
0.7	0.60820	0.56793	0.52810	0.49058	0.45614	0.42499	0.39703
0.8	0.57347	0.53495	0.49629	0.45952	0.42558	0.39476	0.36704
0.9	0.54011	0.50380	0.46666	0.43095	0.39774	0.36745	0.34013
1.0	0.50782	0.47414	0.43889	0.40452	0.37228	0.34271	0.31594
1.1	0.47630	0.44567	0.41266	0.37992	0.34888	0.32020	0.29412
1.2	0.44523	0.41808	0.38765	0.35682	0.32720	0.29960	0.27435
1.3	0.41435	0.39108	0.36358	0.33494	0.30697	0.28063	0.25634
1.4	0.38338	0.36438	0.34015	0.31399	0.28790	0.26299	0.23981
1.5	0.35206	0.33771	0.31709	0.29370	0.26973	0.24643	0.22451
1.6	0.32018	0.31084	0.29416	0.27382	0.25219	0.23071	0.21019
1.7	0.28752	0.28354	0.27111	0.25410	0.23506	0.21559	0.19662
1.8	0.25395	0.25561	0.24773	0.23433	0.21812	0.20085	0.18361
1.9	0.21934	0.22689	0.22384	0.21430	0.20115	0.18629	0.17094
2.0	0.18363	0.19726	0.19927	0.19384	0.18398	0.17173	0.15845
2.1	0.14682	0.16665	0.17390	0.17280	0.16644	0.15700	0.14595
2.2	0.10899	0.13504	0.14767	0.15107	0.14841	0.14195	0.13331
2.3	0.07029	0.10248	0.12054	0.12857	0.12976	0.12647	0.12038
2.4	+0.03094	0.06908	0.09255	0.10528	0.11045	0.11045	0.10707
2.5	−0.00872	0.03504	0.06378	0.08121	0.09043	0.09385	0.09330
2.6	−0.04827	+0.00063	0.03440	0.05645	0.06972	0.07662	0.07900
2.7	−0.08719	−0.03378	+0.00466	0.03113	0.04840	0.05879	0.06416
2.8	−0.12486	−0.06773	−0.02513	+0.00547	0.02659	0.04042	0.04879
2.9	−0.16058	−0.10069	−0.05457	−0.02025	+0.00447	0.02163	0.03296
3.0	−0.19356	−0.13202	−0.08319	−0.04569	−0.01769	+0.00259	0.01677
3.1	−0.22295	−0.16105	−0.11043	−0.07041	−0.03960	−0.01649	+0.00038
3.2	−0.24788	−0.18700	−0.13568	−0.09392	−0.06087	−0.03531	−0.01602
3.3	−0.26746	−0.20910	−0.15826	−0.11569	−0.08106	−0.05355	−0.03216
3.4	−0.28083	−0.22656	−0.17749	−0.13511	−0.09969	−0.07080	−0.04774
3.5	−0.28722	−0.23861	−0.19265	−0.15158	−0.11623	−0.08664	−0.06242
3.6	−0.28598	−0.24455	−0.20307	−0.16446	−0.13014	−0.10061	−0.07581
3.7	−0.27664	−0.24381	−0.20814	−0.17317	−0.14088	−0.11222	−0.08750
3.8	−0.25895	−0.23596	−0.20735	−0.17718	−0.14793	−0.12101	−0.09707
3.9	−0.23299	−0.22079	−0.20033	−0.17604	−0.15084	−0.12652	−0.10411
4.0	−0.19913	−0.19835	−0.18692	−0.16946	−0.14922	−0.12836	−0.10824
4.1	−0.15813	−0.16901	−0.16717	−0.15730	−0.14284	−0.12624	−0.10912
4.2	−0.11115	−0.13343	−0.14143	−0.13965	−0.13162	−0.11996	−0.10653
4.3	−0.05975	−0.09266	−0.11032	−0.11684	−0.11566	−0.10948	−0.10030
4.4	−0.00585	−0.04811	−0.07481	−0.08947	−0.09531	−0.09494	−0.09046
4.5	+0.04828	−0.00149	−0.03614	−0.05843	−0.07112	−0.07669	−0.07716
4.6	0.10016	+0.04518	+0.00411	−0.02485	−0.04392	−0.05525	−0.06075
4.7	0.14714	0.08968	0.04416	+0.00985	−0.01477	−0.03141	−0.04174
4.8	0.18659	0.12967	0.08203	0.04406	+0.01506	−0.00614	−0.02086
4.9	0.21607	0.16286	0.11567	0.07604	0.04414	+0.01943	+0.00100
5.0	0.23350	0.18712	0.14307	0.10399	0.07092	0.04399	0.02281
	$\left[{(-3)2 \atop 5}\right]$	$\left[{(-3)1 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)8 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)7 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)7 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)8 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)8 \atop 4}\right]$

Таблица 19.2. $W(a, \pm x)$

x	$W(0.4,-x)$	$W(0.5,-x)$	$W(0.6,-x)$	$W(0.7,-x)$	$W(0.8,-x)$	$W(0.9,-x)$	$W(1.0,-x)$
0.0	0.91553	0.87718	0.84130	0.80679	0.77982	0.75416	0.73148
0.1	0.97201	0.93642	0.90331	0.87352	0.84714	0.82396	0.80361
0.2	1.03235	1.00031	0.97072	0.94433	0.92122	0.90115	0.88375
0.3	1.09671	1.06911	1.04386	1.02166	1.00258	0.98636	0.97265
0.4	1.16520	1.14300	1.12302	1.10591	1.09173	1.08022	1.07106
0.5	1.23789	1.22215	1.20846	1.19746	1.18917	1.18338	1.17975
0.6	1.31475	1.30664	1.30040	1.29663	1.29538	1.29644	1.29949
0.7	1.39567	1.39648	1.39896	1.40371	1.41079	1.42000	1.43106
0.8	1.48046	1.49158	1.50419	1.51888	1.53574	1.55459	1.57519
0.9	1.56879	1.59174	1.61602	1.64225	1.67051	1.70068	1.73254
1.0	1.6602	1.6966	1.7343	1.7738	1.8153	1.8586	1.9037
1.1	1.7541	1.8057	1.8586	1.9133	1.9700	2.0286	2.0891
1.2	1.8497	1.9184	1.9884	2.0603	2.1345	2.2107	2.2891
1.3	1.9460	2.0337	2.1230	2.2144	2.3083	2.4048	2.5037
1.4	2.0418	2.1506	2.2613	2.3746	2.4909	2.6102	2.7327
1.5	2.1358	2.2677	2.4020	2.5397	2.6811	2.8264	2.9756
1.6	2.2263	2.3833	2.5437	2.7083	2.8777	3.0520	3.2316
1.7	2.3115	2.4956	2.6843	2.8785	3.0788	3.2856	3.4991
1.8	2.3891	2.6023	2.8216	3.0480	3.2823	3.5249	3.7762
1.9	2.4570	2.7009	2.9529	3.2141	3.4854	3.7674	4.0605
2.0	2.5125	2.7886	3.0752	3.3737	3.6849	4.0097	4.3487
2.1	2.5529	2.8623	3.1853	3.5231	3.8770	4.2479	4.6368
2.2	2.5754	2.9188	3.2793	3.6583	4.0573	4.4775	4.9201
2.3	2.5770	2.9546	3.3532	3.7748	4.2209	4.6931	5.1930
2.4	2.5548	2.9660	3.4030	3.8678	4.3624	4.8889	5.4490
2.5	2.5061	2.9496	3.4241	3.9321	4.4760	5.0582	5.6811
2.6	2.4283	2.9018	3.4124	3.9626	4.5555	5.1940	5.8811
2.7	2.3192	2.8196	3.3634	3.9538	4.5944	5.2887	6.0405
2.8	2.1772	2.7001	3.2734	3.9007	4.5863	5.3346	6.1502
2.9	2.0013	2.5413	3.1389	3.7984	4.5251	5.3240	6.2008
3.0	1.7914	2.3419	2.9573	3.6430	4.4050	5.2495	6.1832
3.1	1.5484	2.1015	2.7270	3.4312	4.2211	5.1041	6.0883
3.2	1.2745	1.8213	2.4478	3.1612	3.9697	4.8822	5.9081
3.3	0.9733	1.5038	2.1206	2.8324	3.6486	4.5794	5.6359
3.4	0.6496	1.1529	1.7487	2.4466	3.2576	4.1934	5.2669
3.5	+0.3098	0.7746	1.3369	2.0074	2.7987	3.7241	4.7985
3.6	-0.0381	+0.3767	0.8923	1.5210	2.2767	3.1746	4.2315
3.7	-0.3848	-0.0314	+0.4244	0.9962	1.6994	2.5511	3.5700
3.8	-0.7198	-0.4385	-0.0553	+0.4445	1.0779	1.8636	2.8225
3.9	-1.0317	-0.8319	-0.5332	-0.1199	+0.4263	1.1259	2.0016
4.0	-1.3084	-1.1977	-0.9940	-0.6804	-0.2378	+0.3558	1.1251
4.1	-1.5382	-1.5216	-1.4209	-1.2184	-0.8941	-0.4249	+0.2152
4.2	-1.7095	-1.7893	-1.7966	-1.7136	-1.5199	-1.1915	-0.7013
4.3	-1.8124	-1.9871	-2.1039	-2.1453	-2.0907	-1.9160	-1.5936
4.4	-1.8391	-2.1032	-2.3268	-2.4930	-2.5817	-2.5692	-2.4280
4.5	-1.7844	-2.1283	-2.4513	-2.7376	-2.9685	-3.1213	-3.1692
4.6	-1.6469	-2.0567	-2.4668	-2.8632	-3.2291	-3.5437	-3.7818
4.7	-1.4292	-1.8870	-2.3670	-2.8579	-3.3452	-3.8110	-4.2326
4.8	-1.1387	-1.6231	-2.1513	-2.7153	-3.3040	-3.9027	-4.4924
4.9	-0.7876	-1.2742	-1.8252	-2.4359	-3.0995	-3.8054	-4.5392
5.0	-0.3927	-0.8557	-1.4010	-2.0281	-2.7346	-3.5149	-4.3599
	$\left[\begin{matrix}(-2)1\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-2)1\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-2)1\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-2)2\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-2)2\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-2)2\\5\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-2)3\\5\end{matrix}\right]$

Таблица 19.3. Вспомогательные функции

Функции ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 — из 19.10 и 19.23, которые используются в разложениях Дарвина, и, аналогично, функция τ — из 19.7 и 19.20.

ξ	ϑ_1	ϑ_3	τ	ξ	ϑ_1	ϑ_2	τ
0.0	0.00000	0.39270	−0.70270	5.0	6.9519	5.5506	4.1079
0.1	0.05008	0.34278	−0.64181	5.1	7.2093	5.7981	4.2291
0.2	0.10066	0.29337	−0.57855	5.2	7.4716	6.0507	4.3511
0.3	0.15222	0.24498	−0.51304	5.3	7.7388	6.3084	4.4738
0.4	0.20521	0.19817	−0.44540	5.4	8.0109	6.5712	4.5972
0.5	0.26006	0.15355	−0.37574	5.5	8.2880	6.8391	4.7213
0.6	0.31713	0.11182	−0.30415	5.6	8.5700	7.1120	4.8461
0.7	0.37678	0.07387	−0.23071	5.7	8.8569	7.3901	4.9716
0.8	0.43929	0.04088	−0.15549	5.8	9.1487	7.6732	5.0977
0.9	0.50492	0.01468	−0.07857	5.9	9.4454	7.9614	5.2246
ξ	ϑ_1	ϑ_2	τ	ξ	ϑ_1	ϑ_2	τ
1.0	0.57390	0.00000	0.00000	6.0	9.7471	8.2546	5.3521
1.1	0.64640	0.01513	0.08015	6.1	10.0537	8.5530	5.4803
1.2	0.72261	0.04341	0.16185	6.2	10.3652	8.8564	5.6092
1.3	0.80265	0.08086	0.24502	6.3	10.6817	9.1649	5.7387
1.4	0.88666	0.12617	0.32964	6.4	11.0031	9.4784	5.8688
1.5	0.97473	0.17866	0.41566	6.5	11.3295	9.7970	5.9996
1.6	1.06696	0.23786	0.50304	6.6	11.6608	10.1207	6.1310
1.7	1.16344	0.30347	0.59175	6.7	11.9970	10.4494	6.2631
1.8	1.26422	0.37527	0.68175	6.8	12.3382	10.7832	6.3953
1.9	1.36937	0.45309	0.77300	6.9	12.6843	11.1220	6.5290
2.0	1.47894	0.53679	0.86549	7.0	13.0354	11.4659	6.6629
2.1	1.59299	0.62626	0.95917	7.1	13.3914	11.8148	6.7974
2.2	1.71155	0.72142	1.05403	7.2	13.7524	12.1688	6.9325
2.3	1.83466	0.82220	1.15004	7.3	14.1183	12.5278	7.0682
2.4	1.96236	0.92853	1.24716	7.4	14.4892	12.8919	7.2045
2.5	2.09467	1.04036	1.34539	7.5	14.8651	13.2610	7.3414
2.6	2.23163	1.15764	1.44470	7.6	15.2459	13.6352	7.4789
2.7	2.37325	1.28034	1.54506	7.7	15.6316	14.0144	7.6169
2.8	2.51956	1.40843	1.64646	7.8	16.0223	14.3987	7.7555
2.9	2.67058	1.54187	1.74888	7.9	16.4180	14.7880	7.8947
3.0	2.82632	1.68063	1.85229	8.0	16.8186	15.1823	8.0344
3.1	2.98681	1.82470	1.95669	8.1	17.2242	15.5817	8.1747
3.2	3.15205	1.97406	2.06206	8.2	17.6348	15.9861	8.3155
3.3	3.32207	2.12867	2.16837	8.3	18.0503	16.3956	8.4569
3.4	3.49688	2.28853	2.27562	8.4	18.4708	16.8101	8.5989
3.5	3.67648	2.45363	2.38378	8.5	18.8962	17.2296	8.7413
3.6	3.86089	2.62394	2.49285	8.6	19.3266	17.6542	8.8844
3.7	4.05011	2.79946	2.60281	8.7	19.7620	18.0838	9.0279
3.8	4.24416	2.98017	2.71365	8.8	20.2024	18.5184	9.1720
3.9	4.44305	3.16606	2.82536	8.9	20.6477	18.9581	9.3166
4.0	4.64678	3.35712	2.93791	9.0	21.0980	19.4028	9.4617
4.1	4.85537	3.55335	3.05131	9.1	21.5532	19.8525	9.6074
4.2	5.06880	3.75474	3.16554	9.2	22.0135	20.3073	9.7535
4.3	5.28711	3.96127	3.28058	9.3	22.4787	20.7671	9.9002
4.4	5.51028	4.17295	3.39643	9.4	22.9488	21.2319	10.0474
4.5	5.73833	4.38976	3.51308	9.5	23.4240	21.7017	10.1951
4.6	5.97126	4.61169	3.63051	9.6	23.9041	22.1766	10.3433
4.7	6.20908	4.83875	3.74872	9.7	24.3892	22.6565	10.4920
4.8	6.45178	5.07093	3.86770	9.8	24.8792	23.1414	10.6411
4.9	6.69938	5.30822	3.98743	9.9	25.3742	23.6314	10.7908
5.0	6.95188	5.55062	4.10792	10.0	25.8742	24.1264	10.9410
	$\left[{(-4)6 \atop 4}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 6}\right]$	$\left[{(-4)3 \atop 3}\right]$		$\left[{(-4)6 \atop 3}\right]$	$\left[{(-4)7 \atop 3}\right]$	$\left[{(-4)1 \atop 3}\right]$

При интерполировании значений ϑ_2 и ϑ_3 по ξ вблизи единицы лучше интерполировать значения τ, а потом использовать формулы $\vartheta_2 = \frac{2}{3}\tau^{3/2}$ или $\vartheta_3 = \frac{2}{3}(-\tau)^{3/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

19.1. Buchholz H. Die konfluente hypergeometrische Funktion. — B.: Springer-Verlag, 1953.

19.2. Darwin C. F. On Weber's function. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 1949, 2, p. 311—320.

19.3. Erdelyi A. et al. Higher transcendental functions.— N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V. 2. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. —М.: Наука, 1974, Т.II.

19.4. Miller J. C. P. On the choice of standard solutions to Weber's equation. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, 48, p. 428—435.

19.5. Olver F. W. J. Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large order. — J. Research NBS, 1959, 63B, № 2, p. 131—169. — Report № 63B2-14.

19.6. Watson G. N. A theory of asymptotic series. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1911, A211, p. 279—313.

19.7. Weber H. F. Ueber die Integration der partiellen Differential-gleichung: $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + k^2 u = 0$. — Math. Ann., 1869, 1, p. 1—36.

19.8. Whittaker E. T. On the functions associated with the parabolic cylinder in harmonic analysis. — Proc. London Math. Soc., 1903, 35, p. 417—427.

19.9. Whittaker E. T., Watson G. N. A course of modern analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952. Русский перевод: Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1963, Т.II.

Таблицы

19.10. British Association for the Advancement of Science. Mathematical Tables, V.1. Circular and hyperbolic functions, exponential, sine and cosine integrals, factorial (gamma) and derived functions, integrals of probability integral. — L.: British Association, 1931; Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1951.

19.11. National Physical Laboratory. Tables of Weber parabolic cylinder functions, Computed by Scientific Computing Service; Mathematical Introduction by J. C. P. Miller.— L.: Her Majesty's Stationery Office, 1955. Русский перевод: Миллер Дж. Ч. П. Таблицы функций Вебера (функций параболического цилиндра). — М.: ВЦ АН СССР, 1968.

19.12. National Physical Laboratory Mathematical Tables, V. 4. Tables of Weber parabolic cylinder functions and other functions for large arguments/ by L. Fox. — L.: Her Majesty's Stationery Office, 1960.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Книги и статьи

19.13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.

19.14. Керимов М. К. Некоторые новые результаты по теории функций Вебера. — В кн.: Миллер Дж. Ч. П. Таблицы функций Вебера. Перевод с англ. М., ВЦ АН СССР, 1968.

19.15. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1953.

Таблицы

19.16. Киреева И. Е., Карпов К. А. Таблицы функций Вебера. — М.: ВЦ АН СССР, 1959, Т.I.

Содержит $D_p[x(1+i)] = u_p(x) + iv_p(x)$, $u_p(x)$, $v_p(x)$; $\pm x = 0(0.01)5$, $p = 0.(0.1)2$; $\pm x = 5(0.01)10$, $p = 0(0.05)2$; $5 - 6D$.

19.17. Карпов К. А., Чистова Э. А. Таблицы функций Вебера. — М.: ВЦ АН СССР, 1964, Т.II.

$u_p(x)$, $v_p(x)$; $\pm x = 0(0.01)5$, $-p = 0(0.1)2$; $\pm x = 5(0.01)10$, $-p = 0(0.05)2$; 6D.

19.18. Карпов К. А., Чистова Э. А. Таблицы функций Вебера. М.: ВЦ АН СССР, 1968, Т.III.

$D_p(x)$; $x = 0(0.01)5$, $\dfrac{1}{x} = N(0.001)\,0.2$, $p = -1(0.1)1$; 7D.

N принимает значения, при которых в пределах принятой точности $D_p(x) = 0$.

$e^{-x^2/4} D_p(x)$; $-x = 0(0.01)5$, $-\dfrac{1}{x} = 0.0001(0.0001$ или $0.001)\,0.2$, $p = -1(0.1)1$; 7D

$D_p(ix) = a_p(x) + ib_p(x)$, $e^{-x^2/4}\,a_p x$, $e^{-x^2/4}\,b_p(x)$, $x = 0.(0.01)5$, $\dfrac{1}{x} = N(0.001)\,02$; 7 D.

Глава 20
ФУНКЦИИ МАТЬЕ

Г. БЛАНШ

СОДЕРЖАНИЕ

20.1. УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ

Каноническая форма дифференциального уравнения

20.1.1. $\dfrac{d^2y}{dz^2} + (a - 2q\cos 2z)\,y = 0.$

Модифицированное дифференциальное уравнение Матье

20.1.2. $\dfrac{d^2f}{du^2} - (a - 2q\,\mathrm{ch}\,2u)\,f = 0\ \ (z = iu,\ y = f).$

Связь уравнения Матье с волновым уравнением в координатах эллиптического цилиндра

Волновое уравнение в декартовых координатах имеет вид

20.1.3. $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2} + k^2 W = 0.$

Решение W получается методом разделения переменных в эллиптических координатах. Пусть

$$x = \rho \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = \rho \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = z,$$

ρ — положительная константа. Тогда 20.1.3 примет вид

$$\text{20.1.4.} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{2}{\rho^2(\operatorname{ch} 2u - \cos 2v)}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right) + k^2 W = 0.$$

Предполагая, что решение записывается в форме

$$W = \varphi(z) f(u) g(v)$$

и подставляя это выражение в 20.1.4, получаем после деления на W:

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dz^2} + G = 0,$$

где

$$G = \frac{2}{\rho^2(\operatorname{ch} 2u - \cos 2v)}\left\{\frac{d^2 f}{du^2}\frac{1}{f} + \frac{d^2 g}{dv^2}\frac{1}{g}\right\} + k^2.$$

Так как z, u, v — независимые переменные, то

$$\text{20.1.5.} \quad \frac{d^2\varphi}{dz^2} + c\varphi = 0,$$

где c — постоянная.

Далее, из того факта, что $G = c$ и что u и v — независимые переменные, следует

$$\text{20.1.6.} \quad a = \frac{d^2 f}{du^2}\frac{1}{f} + (k^2 - c)\frac{\rho^2}{2}\operatorname{ch} 2u,$$

$$a = -\frac{d^2 g}{dv^2}\frac{1}{g} + (k^2 - c)\frac{\rho^2}{2}\cos 2v,$$

где a — постоянная. Полученные уравнения эквивалентны 20.1.2 и 20.1.1. Постоянные c и a часто называют постоянными разделения согласно той роли, которую они играют в 20.1.5 и 20.1.6.

Для некоторых важных физических задач функция g должна быть периодической, периода π или 2π. Можно показать, что для уравнения 20.1.1 существует бесконечная счетная последовательность собственных значений $a = a_r(q)$, отвечающих четным периодическим решениям; существует также бесконечная счетная последовательность собственных значений $a = b_r(q)$, отвечающих нечетным периодическим решениям.

Известно, что существуют периодические решения периода $k\pi$, где k — любое положительное целое число. В дальнейшем, однако, термин «собственное значение» будет относиться только к значениям, связанным с решениями периода π или 2π. Эти собственные значения играют большую роль в общей теории дифференциального уравнения Матье для произвольных параметров a и q.

Алгебраическая форма уравнения Матье

$$\text{20.1.7.} \quad (1 - t^2)\frac{d^2 y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} + (a + 2q - 4qt^2)\, y = 0 \qquad (\cos z = t).$$

Связь со сфероидальным волновым уравнением

$$\text{20.1.8.} \quad (1 - t^2)\frac{d^2 y}{dt^2} - 2(b + 1)\, t\frac{dy}{dt} + (c - 4qt^2)\, y = 0.$$

Таким образом, уравнение Матье есть частный случай уравнения 20.1.8 при $b = -1/2$, $c = a + 2q$.

20.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Решение уравнения 20.1.1, имеющее период π или 2π, записывается в форме

$$\text{20.2.1.} \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos mz + B_m \sin mz),$$

где можно положить $B_0 = 0$. Подставляя это решение в 20.1.1, получим

$$\text{20.2.2.} \quad \sum_{m=-2}^{\infty} [(a - m^2) A_m - q(A_{m-2} + A_{m+2})] \cos mz + \sum_{m=-1}^{\infty} [(a - m^2) B_m - q(B_{m-2} + B_{m+2})] \sin mz = 0,$$

$$A_{-m}, B_{-m} = 0 \quad (m > 0).$$

Из уравнения 20.2.2 можно получить следующие четыре типа решений:

$$\text{20.2.3.} \quad y_0 = \sum_{m=}^{\infty} A_{2m+p} \cos (2m + p) z \quad (p = 0 \text{ или } 1),$$

$$\text{20.2.4.} \quad y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+p} \sin (2m + p) z \quad (p = 0 \text{ или } 1).$$

Если $p = 0$, решение имеет период π; если $p = 1$, решение имеет период 2π.

Рекуррентные соотношения для коэффициентов

Четные решения периода π:

$$\text{20.2.5.} \quad aA_0 - qA_2 = 0,$$

$$\text{20.2.6.} \quad (a - 4) A_2 - q(2A_0 + A_4) = 0,$$

$$\text{20.2.7.} \quad (a - m^2) A_m - q(A_{m-2} + A_{m+2}) = 0 \quad (m \geqslant 3).$$

Четные решения периода 2π:

$$\text{20.2.8.} \quad (a - 1) A_1 - q(A_1 + A_3) = 0,$$

для $m \geqslant 3$ имеет место 20.2.7.

Нечетные решения периода π:

20.2.9. $(a-4)B_2 - qB_4 = 0,$

20.2.10. $(a-m^2)B_m - q(B_{m-2}+B_{m+2}) = 0 \qquad (m \geqslant 3).$

Нечетные решения периода 2π:

20.2.11. $(a-1)B_1 + q(B_1 - B_3) = 0,$

для $m \geqslant 3$ имеет место 20.2.10.

Пусть

20.2.12. $Ge_m = A_m/A_{m-2}, \quad Go_m = B_m/B_{m-2},$

20.2.13. $V_m = (a-m^2)/q.$

Тогда рекуррентные соотношения 20.2.5—20.2.11 могут быть записаны в виде

20.2.14. $Ge_2 = V_0, \; Ge_4 = V_2 - 2/Ge_2$

(для четных решений периода π);

20.2.15. $Ge_3 = V_1 - 1$

(для четных решений периода 2π);

20.2.16. $Go_4 = V_2$

(для нечетных решений периода π);

20.2.17. $Go_3 = V_1 + 1$

(для нечетных решений периода 2π);

20.2.18. $G_m = 1/(V_m - G_{m+2}) \quad (m \geqslant 3).$

Здесь и ниже, во всех случаях, когда соотношения справедливы как для четных, так и для нечетных решений, употребляется символ G_m вместо Ge_m или Go_m.

Последнее трехчленное рекуррентное соотношение для коэффициентов показывает, что G_m может быть разложено в два типа непрерывных дробей:

20.2.19. $$G_m = \frac{1}{V_m - G_{m+2}} = \frac{1}{V_m -}\;\frac{1}{V_{m+2} -}\;\frac{1}{V_{m+4} -}\;\cdots \qquad (m \geqslant 3),$$

20.2.20. $$G_{m+2} = V_m - 1/G_m = V_m - \frac{1}{V_{m-2} -}\;\frac{1}{V_{m-4} -}\;\cdots\;\frac{\varphi_0}{V_{0+d} + \varphi_1} \qquad (m \geqslant 3),$$

где

$\varphi_1 = d = 0,\; \varphi_0 = 2,$ если $G_m = Ge_m$ (m четно);

$\varphi_1 = d = \varphi_0 = 0,$ если $G_m = Go_m$ (m четно);

$\varphi_1 = -1,\; \varphi_0 = d = 1;$ если $G_m = Ge_m$ (m нечетно);

$\varphi_1 = d = \varphi_0 = 1,$ если $G_m = Go_m$ (m нечетно).

Четыре набора значений параметров φ_1, φ_0, d соответствуют четырем типам решений 20.2.3, 20.2.4. Из 20.2.19 можно показать, что собственные значения $a_r(q)$ и $b_r(q)$ уравнения 20.1.1 являются корнями следующих четырех типов непрерывных дробей:

20.2.21. $V_0 - \dfrac{2}{V_2 -}\;\dfrac{1}{V_4 -}\;\dfrac{1}{V_6 -}\;\ldots = 0$, корни: a_{2r};

20.2.22. $V_1 - 1 - \dfrac{1}{V_3 -}\;\dfrac{1}{V_5 -}\;\dfrac{1}{V_7 -}\;\ldots = 0$, корни: a_{2r+1};

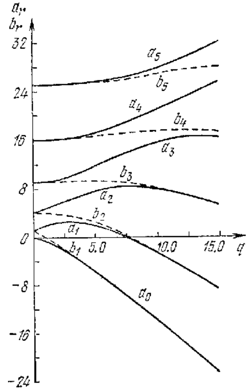


Рис. 20.1. Собственные значения a_r, b_r, $r = 0,1$ (1) 5.

20.2.23. $V_2 - \dfrac{1}{V_4 -}\;\dfrac{1}{V_6 -}\;\dfrac{1}{V_8 -}\;\ldots = 0$, корни: b_{2r};

20.2.24. $V_1 + 1 - \dfrac{1}{V_3 -}\;\dfrac{1}{V_5 -}\;\dfrac{1}{V_7 -}\;\ldots = 0$, корни: b_{2r+1}.

Если a есть корень одного из уравнений 20.2.21—20.2.24 для произвольного комплексного значения q, то соответствующее решение существует и является целой функцией z. Это решение принято обозначать через $ce_r(z, q)$ (четное решение, отвечающее собственному значению a_r) или через $se_r(z, q)$ (нечетное решение, отвечающее собственному значению b_r).

Пусть q — действительное число. Согласно теории Штурма—Лиувилля для линейных дифференциальных уравнений второго порядка имеем:

a) Для фиксированного действительного $q \neq 0$ собственные значения a_r и b_r действительны и различны; при этом, если $q > 0$, то

$$a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 \ldots,$$

и если $q < 0$, то

$$a_0 < a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 < b_4 \ldots$$

и $a_r(q)$ и $b_r(q)$ стремятся к r^2 при $q \to 0$.

b) Решение уравнения 20.1.1, отвечающее собственному значению a_r или собственному значению b_r, имеет r нулей в интервале $0 \leqslant z < \pi$ (q — действительное).

c) Из формул 20.2.21 и 20.2.23 следует, что если a_{2r} — корень уравнения 20.2.21 и $q \neq 0$, то a_{2r} не может быть корнем уравнения 20.2.23; аналогично, корень уравнения 20.2.22 не может быть корнем уравнения 20.2.24.

Из других соображений можно показать, что для пары значений $a, q, q \neq 0$, может существовать не более одного периодического решения периода π или 2π. Это не относится к решениям периода $s\pi$, $s \geqslant 3$; в этом случае все решения периодичны, если одно из них периодично.

Степенные ряды для собственных значений

$$\textbf{20.2.25.}\quad a_0(q) = -\frac{q^2}{2}+\frac{7q^4}{128}-\frac{29q^6}{2304}+\frac{68687q^8}{18874368}+\dots,$$

$$a_1(-q)=b_1(q)=1-q-\frac{q^2}{8}+\frac{q^3}{64}-\frac{q^4}{1536}-$$
$$-\frac{11q^5}{36864}+\frac{49q^6}{589824}-\frac{55q^7}{9437184}-\frac{83q^8}{35389440}+\dots,$$

$$b_2(q)=4-\frac{q^2}{12}+\frac{5q^4}{13824}-\frac{289q^6}{79626240}+$$
$$+\frac{21391q^8}{458647142400}+\dots,$$

$$a_2(q)=4+\frac{5q^2}{12}-\frac{763q^4}{13824}+\frac{1002401q^6}{79626240}-$$
$$-\frac{1669068401q^8}{458647142400}+\dots,$$

$$a_3(-q)=b_3(q)=9+\frac{q^2}{16}-\frac{q^3}{64}+\frac{13q^4}{20480}+$$
$$+\frac{5q^5}{16384}-\frac{1961q^6}{23592960}+\frac{609q^7}{104857600}+\dots,$$

$$b_4(q)=16+\frac{q^2}{30}-\frac{317q^4}{864000}+\frac{10049q^6}{2721600000}+\dots,$$

$$a_4(q)=16+\frac{q^2}{30}+\frac{433q^4}{864000}-\frac{5701q^6}{2721600000}+\dots,$$

$$a_5(-q)=b_5(q)=25+\frac{q^2}{48}+\frac{11q^4}{774144}-$$
$$-\frac{q^5}{147456}+\frac{37q^6}{891813888}+\dots,$$

$$b_6(q)=36+\frac{q^2}{70}+\frac{187q^4}{43904000}-$$
$$-\frac{5861633q^6}{92935987200000}+\dots,$$

$$a_6(q)=36+\frac{q^2}{70}+\frac{187q^4}{43904000}+$$
$$+\frac{6743617q^6}{92935987200000}+\dots$$

Для $r \geqslant 7$ и $|q|$ не слишком большого a_r приблизительно равно b_r и для них может быть использовано следующее приближение:

$$\textbf{20.2.26.}\quad \left.\begin{matrix}a_r\\ b_r\end{matrix}\right\}=r^2+\frac{q^2}{2(r^2-1)}+\frac{(5r^2+7)\,q^4}{32(r^2-1)^3(r^2-4)}+$$
$$+\frac{(9r^4+58r^2+29)\,q^6}{64(r^2-1)^5(r^2-4)(r^2-9)}+\dots$$

В этой формуле нужно ограничиться членами, не содержащими r^2-n^2 в знаменателе. Следующие члены разложения можно получить методом, предложенным Матье [20.27]. Малхоланд и Гольдштейн [20.38] вычислили собственные числа для чисто мнимых значений q и нашли, что существует такое значение $q_0(|q_0|\approx 1.468)$, для которого a_0 и a_2 — равные действительные числа. Баукамп [20.5] вычислил это значение q_0 с 8 знаками после запятой: $q_0 = \pm i\cdot 1.46876852$. Для значений $|q|>|q_0|$ a_0 и a_2 — комплексно сопряженные числа. Радиус сходимости ряда 20.2.25, определяющего a_0, не больше, чем $|q_0|$. В работе [20.36] показано, что радиус сходимости рядов для $a_{2n}(q)$, $n\geqslant 2$, больше 3. Кроме того,

$$a_r-b_r=O(q^r/r^{r-1})\quad \text{при } r\to\infty.$$

Заметим, что разложение 20.2.26 применимо не только к целым значениям r. Оно дает хорошую аппроксимацию для собственных значений уравнения Матье при $r=n+1/2$, где n — целое. Этим значениям отвечают решения с периодом 4π.

Степенные ряды по q для периодических функций $ce_r(z,q)$ и $se_r(z,q)$ (при достаточно малых q)

$$\textbf{20.2.27.}\quad ce_0(z,q)=$$
$$=2^{-1/2}\left[1-\frac{q}{2}\cos 2z+q^2\left(\frac{\cos 4z}{32}-\frac{1}{16}\right)-\right.$$
$$\left.-q^3\left(\frac{\cos 6z}{1152}-\frac{11\cos 2z}{128}\right)+\dots\right],$$

$$ce_1(z,q)=\cos z-\frac{q}{8}\cos 3z+$$
$$+q^2\left[\frac{\cos 5z}{192}-\frac{\cos 3z}{64}-\frac{\cos z}{128}\right]-$$
$$-q^3\left[\frac{\cos 7z}{9216}-\frac{\cos 5z}{1152}-\frac{\cos 3z}{3072}+\frac{\cos z}{512}\right]+\dots,$$

$$se_1(z,q)=\sin z-\frac{q}{8}\sin 3z+$$
$$+q^2\left[\frac{\sin 5z}{192}+\frac{\sin 3z}{64}-\frac{\sin z}{128}\right]-$$
$$-q^3\left[\frac{\sin 7z}{9216}+\frac{\sin 5z}{1152}-\frac{\sin 3z}{3072}-\frac{\sin z}{512}\right]+\dots,$$

$$ce_2(z,q)=\cos 2z-q\left(\frac{\cos 4z}{12}-\frac{1}{4}\right)+$$
$$+q^2\left(\frac{\cos 6z}{384}-\frac{19\cos 2z}{288}\right)+\dots,$$

$$se_2(z,q)=\sin 2z-q\,\frac{\sin 4z}{12}+$$
$$+q^2\left(\frac{\sin 6z}{384}-\frac{\sin 2z}{288}\right)+\dots$$

$$\textbf{20.2.28.}\quad \left.\begin{matrix}ce_r(z,q)\\ se_r(z,q)\end{matrix}\right\}=\cos(rz-p\pi/2)-$$
$$-q\left\{\frac{\cos[(r+2)z-p\pi/2]}{4(r+1)}-\frac{\cos[(r-2)z-p\pi/2]}{4(r-1)}\right\}+$$
$$+q^2\left\{\frac{\cos[(r+4)z-p\pi/2]}{32(r+1)(r+2)}+\frac{\cos[(r-4)z-p\pi/2]}{32(r-1)(r-2)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos[rz-p\pi/2]}{32}\left[\frac{2(r^2+1)}{(r^2-1)^2}\right]\right\}+\dots,$$

где $p=0$ для $ce_r(z,q)$, $p=1$ для $se_r(z,q)$ $(r\geqslant 3)$.

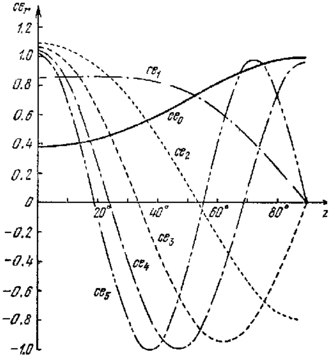


Рис. 20.2. Четные периодические функции Матье, порядки 0 — 5, $q = 1$.

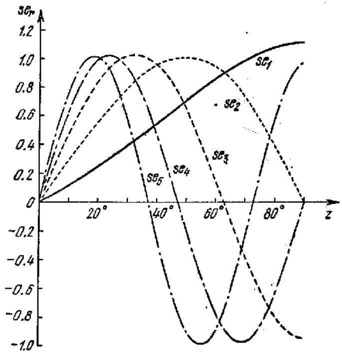


Рис. 20.3. Нечетные периодические функции Матье, порядки 1 — 5, $q = 1$.

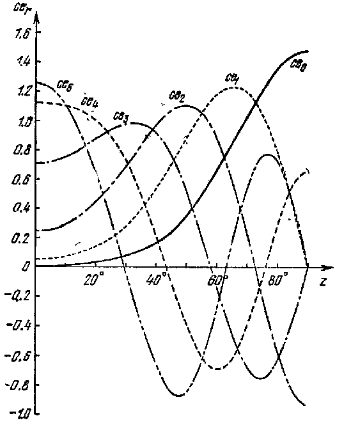


Рис. 20.4. Четные периодические функции Матье, порядки 0—5, $q = 10$.

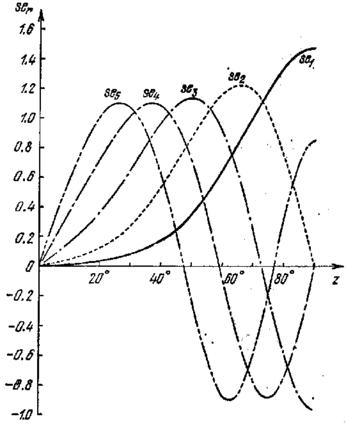


Рис. 20.5. Нечетные периодические функции Матье, порядки 1—5, $q = 10$.

Для соответствующих коэффициентов имеют место соотношения

20.2.29. $A_0^0(0) = 2^{-1/2}, \quad A_r^r(0) = B_r^r(0) = 1 \quad (r > 0),$

$$A_{2s}^0 = [(-1)^s q^s/(s!s!2^{2s-1})]\, A_0^0 + \ldots \quad (s > 0),$$

$$\left.\begin{matrix} A_{r+2s}^r \\ B_{r+2s}^r \end{matrix}\right\} = [(-1)^s r! q^s/(4^s(r+s)!\, s!)]\; C_r^r + \ldots,$$

$$A_{r-2s}^r \text{ или } \left.\begin{matrix} A_{r-2s}^r \\ B_{r-2s}^r \end{matrix}\right\} = \frac{(r-s-1)!}{s!(r-1)!}\,\frac{q^s}{4^s}\, C_r^r + \ldots,$$

где $rs > 0$, C_r^r равно A_r^r или B_r^r.

Асимптотические разложения собственных значений при $q \gg 1$

Пусть $w = 2r + 1$, $q = w^4\varphi$, φ — действительное число. Тогда

20.2.30. $a_r \sim b_{r+1} \sim -2q + 2w\sqrt{q} - $

$$-\frac{w^2+1}{8} - \frac{\left(w+\frac{3}{w}\right)}{2^7\sqrt{\varphi}} - \frac{d_1}{2^{12}\varphi} - \frac{d_2}{2^{17}\varphi^{3/2}} - $$

$$-\frac{d_3}{2^{20}\varphi^2} - \frac{d_4}{2^{25}\varphi^{5/2}} - \ldots,$$

где $d_1 = 5 + \frac{34}{w^2} + \frac{9}{w^4}$,

$$d_2 = \frac{33}{w} + \frac{410}{w^3} + \frac{405}{w^5},$$

$$d_3 = \frac{63}{w^2} + \frac{1260}{w^4} + \frac{2943}{w^6} + \frac{486}{w^8},$$

$$d_4 = \frac{527}{w^3} + \frac{15617}{w^5} + \frac{69001}{w^7} + \frac{41607}{w^9}.$$

20.2.31. $b_{r+1} - a_r \sim 2^{4r+5}\sqrt{2/\pi}q^{r/2+3/4}e^{-4\sqrt{q}}/r!$ $(q \to \infty)$ (дано в [20.36] без доказательства).

20.3. ТЕОРЕМА ФЛОКЕ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Так как коэффициенты уравнения Матье

20.3.1. $y'' + (a - 2q\cos 2z)\,y = 0$

являются периодическими функциями z, то из общей теории уравнений такого типа следует существование решения в форме

20.3.2. $F_\nu(z) = e^{i\nu z}P(z)$,

где ν зависит от a и q; $P(z)$ — периодическая функция того же периода, что и коэффициенты в 20.3.1, а именно π (теорема Флоке; ее более общую форму см. в [20.16] или в [20.22]). Постоянная ν называется характеристическим показателем. Если функция 20.3.2 удовлетворяет уравнению 20.3.1, то функция

20.3.3. $F_\nu(-z) = e^{-i\nu z}P(-z)$

также удовлетворяет этому уравнению. Функции $F_\nu(z)$ и $F_\nu(-z)$ обладают свойством

20.3.4. $y(z + k\pi) = C^k y(z)$,

где $y = F_\nu(z)$ или $y = F_\nu(-z)$,

$$C = e^{i\nu\pi} \text{ для } F_\nu(z),$$

$$C = e^{-i\nu\pi} \text{ для } F_\nu(-z).$$

Решения, обладающие свойством 20.3.4, будут в дальнейшем называться решениями Флоке. Если $F_\nu(z)$ и $F_\nu(-z)$ линейно независимы, то общее решение уравнения 20.3.1 может быть записано в форме

20.3.5. $y = AF_\nu(z) + BF_\nu(-z)$.

Если $AB \neq 0$, то это решение не будет решением Флоке. Позднее из метода определения ν при данных a и q будет показано, что ν определяется неоднозначно: ν может быть заменено на $\nu + 2k$, где k — целое. Это происходит потому, что добавление множителя $\exp(2ikz)$ в 20.3.2 не нарушает периодичности функции.

Если $a = a_r$ или $a = b_r$, то $\nu = 0$ или ν — целое. Удобно положить $\nu = r$ для $a_r(q)$ и $\nu = -r$ для $b_r(q)$ (см. [20.36]). В этом случае функции $F_\nu(z)$ и $F_\nu(-z)$ пропорциональны; тогда второе независимое решение уравнения 20.3.1 можно записать в форме

20.3.6. $y_2 = zce_r(z, q) + \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k+p}\sin(2k+p)z$

(соответствует $ce_r(z, q)$);

20.3.7. $y_2 = zse_r(z, q) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+p}\cos(2k+p)z$

(соответствует $se_r(z, q)$).

Коэффициенты d_{2k+p} и f_{2k+p} зависят соответственно от коэффициентов A_m и B_m (см. 20.2), а также от a и q. Более подробно этот вопрос см. в [20.30], гл. (7.50) — (7.51) и в [20.58], гл. V.

Если ν — нецелое, то решения Флоке $F_\nu(z)$ и $F_\nu(-z)$ линейно независимы. Очевидно, что 20.3.2 может быть записано в форме

20.3.8. $F_\nu(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k}e^{i(\nu+2k)z}$.

Из 20.3.8 следует, что если ν — правильная дробь m_1/m_2, то каждое решение уравнения 20.3.1 периодично, с периодом $2\pi m_2$. Это согласуется с результатами, полученными в 20.2: оба независимых решения периодичны, если одно периодично и если его период отличен от π и 2π.

Метод получения характеристического показателя

Рассмотрим два линейно независимых решения уравнения 20.3.1 при фиксированных a и q, определенных следующими начальными условиями:

20.3.9. $y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0,\ y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1.$

Можно показать, что

20.3.10. $\cos\pi\nu - y_1(\pi) = 0$,

20.3.11. $\cos\pi\nu - 1 - 2y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Таким образом, ν может быть получено, если известны $y_1(\pi)$ или $y_1'(\pi/2)$ и $y_1(\pi/2)$. Для вычислительных целей более удобно соотношение 20.3.11 ввиду более короткого интервала интегрирования и, следовательно, меньшего накопления ошибок округления. Из 20.3.11 очевидно, что ν определяется с точностью до знака и слагаемого, кратного 2. При фиксированном ν коэффициенты 20.3.8 могут быть определены с точностью до произвольного множителя, который не зависит от z.

Если имеется достаточно хорошее первое приближение к ν, то характеристический показатель может быть вычислен из разложения в непрерывную дробь (аналогичного разложениям из 20.2). Для систематического табулирования этот метод значительно удобнее, чем метод численного интегрирования. Подставляя 20.3.8 в 20.3.1, получаем следующее рекуррентное соотношение:

20.3.12. $V_{2n}c_{2n} = c_{2n-2} + c_{2n+2}$,

где

20.3.13. $V_{2n} = [a - (2n+\nu)^2]/q$ $(-\infty < n < \infty)$.

Когда ν — комплексное число, коэффициенты V_{2n} могут быть тоже комплексными числами.

Из непрерывных дробей

20.3.14. $$G_m = \frac{1}{V_m -}\ \frac{1}{V_{m+2} - \dots} \quad (m \geqslant 0),$$

$$H_{-m} = \frac{1}{V_{-m-2} -}\ \frac{1}{V_{-m-4} - \dots} \quad (m \geqslant 0)$$

можно получить соотношения

$$G_m = c_m/c_{m-2},\ H_{-m} = c_{-m-2}/c_{-m},$$

аналогично тому, как это сделано в 20.2.

Из выражения 20.3.13 и из известных свойств непрерывных дробей следует, что для достаточно больших значений $|m|$ обе дроби $|G_m|$ и $|H_{-m}|$ сходятся. Пусть имеются значения G_m и H_{-m} для достаточно большого значения m. Тогда по рекуррентным соотношениям 20.2.14—20.2.18 могут быть последовательно вычислены $G_{m-2}, G_{m-4}, \dots, G_0$, если они существуют. Аналогично могут быть получены $H_{-m+2}, H_{-m+4}, \dots \dots H_0$. Легко показать, что ν будет точным характеристическим показателем, соответствующим точке (a, q) в том и только том случае, когда $H_0 G_0 = 1$. Если полученные значения H_0 и G_0 таковы, что последнее равенство выполнено с недостаточной точностью, то для уточнения значения ν можно применить итерационный метод, предложенный в [20.3]. Затем легко находятся коэффициенты c_j, один из которых может быть выбран произвольно. Эти коэффициенты умножаются на множитель, зависящий только от q, но не от z, который выбирается из условия нормировки.

Известно, что непрерывные дроби могут быть выражены в форме определителя. Действительно, уравнение 20.3.14 может быть записано в виде определителя с бесконечным числом строк (частный случай определителя Хилла). См. [20.19], [20.36], [20.15] или [20.30]. Хотя этот определитель использовался в вычислениях на быстродействующих машинах, прямое применение непрерывных дробей представляется менее трудоемким.

Частные случаи (a, q — действительные числа)

Если $q = 0$, то $y_1 = \cos(\sqrt{a}z)$, $y_2 = \sin(\sqrt{a}\,z)$ и решениями Флоке являются функции $F_\nu(z) = \exp(iaz)$ и $F_\nu(-z) = \exp(-iaz)$. При действительных a и q линии равных значений характеристического показателя $\nu(q, a)$ являются кривыми в плоскости (q, a). При этом каждая из линий $a = a_r(q)$ и $a = b_r(q)$ является границей, отделяющей область, где ν — действительные числа от области, где ν — комплексные числа. В областях, где ν действительны, все решения уравнения 20.1.1 ограничены при действительных z. Эти области называются «областями устойчивости». При комплексных значениях ν имеются неограниченные решения уравнения 20.1.1. Поэтому соответствующие области получили название «областей неустойчивости». Области устойчивости (ν действительны) лежат между кривыми:

1) $a = a_r(q)$ и $a = b_{r+1}(q)$ $(q \geqslant 0)$,

2) $a = a_{2r}(q)$ и $a = a_{2r+1}(q)$ $(q \leqslant 0)$,

3) $a = b_{2r+1}(q)$ и $a = b_{2r+2}(q)$ $(q \leqslant 0)$;

области неустойчивости (ν — комплексные числа) лежат между кривыми:

1) $a = b_r(q)$ и $a = a_r(q)$ $(q \geqslant 0)$,

2) $a = a_{2r+1}(q)$ и $a = b_{2r+1}(q)$ $(q \leqslant 0)$,

3) $a = b_{2r}(q)$ и $a = a_{2r}(q)$ $(q \leqslant 0)$.

В некоторых задачах требуются решения только для действительных значений z. В таких случаях знания характеристического показателя ν и периодической функции $P(z)$ достаточно для вычисления требуемых функций. Для комплексных значений z ряды, определяющие $P(z)$, сходятся медленно. В следующем разделе будут определены другие решения, которые зависят от коэффициентов c_m, полученных в связи с теоремой Флоке.

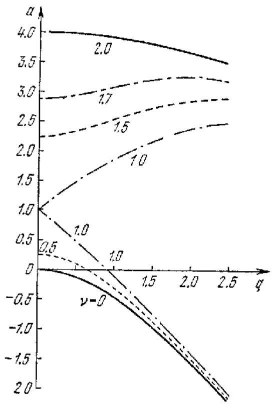


Рис. 20.6. Характеристический показатель. Первые две области устойчивости

$$y = e^{i\nu x} P(x),$$

где $P(x)$ — периодическая функция периода π.

Определение ν: в первой области устойчивости $0 \leqslant \nu \leqslant 1$, во второй области устойчивости $1 \leqslant \nu \leqslant 2$.

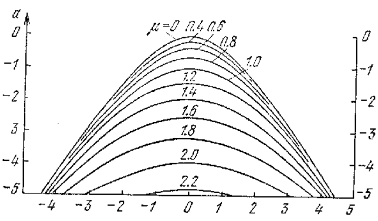
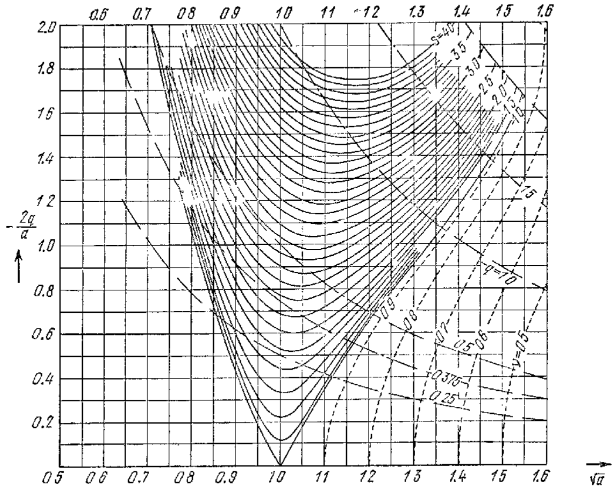


Рис. 20.7. Характеристический показатель в первой области неустойчивости. Дифференциальное уравнение:

$$y'' + (a - 2q\cos 2x)\, y = 0.$$

Решение Флоке $y = e^{i\nu x} P(x)$, где $P(x)$ — периодическая функция периода π. В первой области неустойчивости $\nu = i\mu$; μ задается для $a \geqslant -5$.



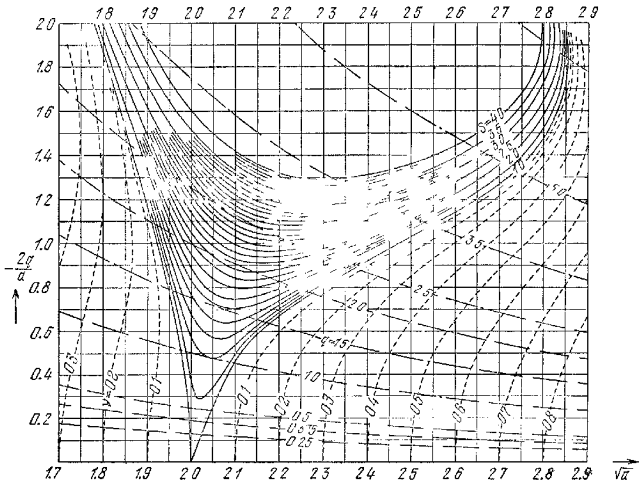


Рис. 20 8, Рис. 20 9 Карты характеристических показателей.
— $s = e^{2\nu\pi} = \text{const}$, в областях неустойчивости,
— — — $\nu = \text{const}$, в областях устойчивости, —·—·— линии постоянных значений — q.

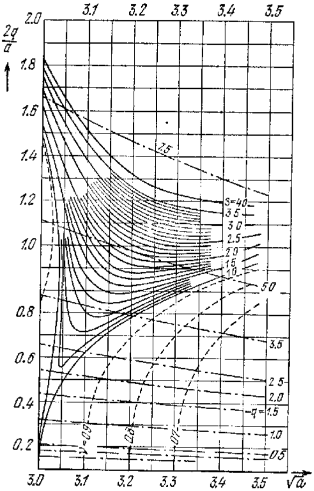


Рис. 20.10.

Разложения для малых q (см. [20.36], гл. 2)

Если ν и q фиксированы, то

20.3.15. $$a = \nu^2 + \frac{q^2}{2(\nu^2-1)} + \frac{(5\nu^2+7)\,q^4}{32(\nu^2-1)^3(\nu^2-4)} + \frac{(9\nu^4+58\nu^2+29)\,q^6}{64(\nu^2-1)^5\,(\nu^2-4)\,(\nu^2-9)} + \dots \quad (\nu \neq 1,\ 2,\ 3).$$

Для коэффициентов c_{2s} в разложении 20.3.8 имеем

20.3.16. $$c_2/c_0 = \frac{-q}{4(\nu+1)} - \frac{(\nu^2+4\nu+7)\,q^3}{128(\nu+1)^3\,(\nu+2)\,(\nu-1)} + \dots \quad (\nu \neq 1,\ 2),$$

$$c_4/c_0 = q^2/(32(\nu+1)\,(\nu+2)) + \dots,$$

$$c_{2s}/c_0 = (-1)^s\, q^s\,\Gamma(\nu+1)/(2^{2s}\,s!\;\Gamma(\nu+s+1)) + \dots$$

20.3.17. $$F_\nu(z) = c_0\left[e^{i\nu z} - q\left\{\frac{e^{i(\nu+2)z}}{4(\nu+1)} - \frac{e^{i(\nu-2)z}}{4(\nu-1)}\right\}\right] + \dots \quad (\nu \text{ — нецелое}).$$

Для малых значений a

20.3.18. $$\cos\nu\pi = \left(1 - \frac{a\pi^2}{2} + \frac{a^2\pi^4}{24} + \dots\right) - \frac{q^2\pi^2}{4}\left[1 + a\left(1 - \frac{\pi^2}{6}\right) + \dots\right] + q^4\left(\frac{\pi^4}{96} - \frac{25\pi^2}{256} + \dots\right) + \dots$$

20.4. ДРУГИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

Следуя Эрдейи ([20.14], [20.15]), определим

20.4.1. $$\varphi_k(z) = [e^{i\pi}\cos(z-b)/\cos(z+b)]^{k/2}\, J_k(f),$$

где

20.4.2. $$f = 2[q\cos(z-b)\cos(z+b)]^{1/2}$$

и $J_k(f)$ — функция Бесселя порядка k; b — фиксированное, произвольное комплексное число. Используя рекуррентные соотношения для функций Бесселя, получим

20.4.3. $$\frac{d^2\varphi_k}{dz^2} - 2q(\cos 2z)\,\varphi_k + q(\varphi_{k-2} + \varphi_{k+2}) + k^2\varphi_k = 0.$$

сли формальное решение уравнения 20.1.1 записать в виде

20.4.4. $$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}\varphi_{2n+\nu},$$

то получим коэффициенты c_{2n} те же, что и в решении Флоке. Как и прежде, ν может быть комплексным. Для всех значений, исключая целые, справедливо следующее соотношение:

$$\varphi_{2n+\nu+2}/\varphi_{2n-\nu} \sim \varphi_{-2n+\nu}/\varphi_{-2n+\nu+2} \sim -4n^2/(q\cos^2(z-b)) \quad (n\to\infty).$$

Это соотношение легко доказывается из асимптотического представления функций Бесселя $J_\nu(f)$. При целых значениях ν доказательство не проходит для $\varphi_{-2n+\nu}/\varphi_{-2n+\nu+2}$. В этом случае, используя соотношение

$$J_{-2n+\nu}(f) = (-1)^\nu\ J_{2n-\nu}(f),$$

получим

$$\varphi_{2n+\nu-2}/\varphi_{2n+\nu} \sim -4n^2/(q\cos^2(z-b)) \quad (n\to\infty),$$
$$\varphi_{-2n+\nu}/\varphi_{-2n+\nu+2} \sim -4n^2/(q\cos^2(z-b)) \quad (n\to\infty).$$

С другой стороны,

$$c_{2n}/c_{2n-2} \sim c_{-2n}/c_{-2n+2} \sim -q/4n^2 \quad (n\to\infty).$$

Из сказанного выше следует, что при нецелых значениях ν ряд 20.4.4 сходится абсолютно и равномерно в любой замкнутой области, где

$$|\cos(z-b)| > d_1 > 1.$$

Таким образом, существуют две непересекающиеся области сходимости ряда 20.4.4:

(I) $\operatorname{Im}(z-b) > d_2 > 0 \quad (|\cos(z-b)| > d_1 > 1)$,

(II) $\operatorname{Im}(z-b) < -d_2 < 0 \quad (|\cos(z-b)| > d_1 > 1)$.

Если ν — целое, то ряд 20.4.4 сходится для всех значений z.

Отметим некоторые представления решений уравнения Матье, получающиеся при частных значениях b.

20.4.5. $b = 0,\ y = e^{i\pi\nu/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}(-1)^n J_{2n+\nu}(2\sqrt{q}\cos z)$

$$(|\cos z| > 1,\quad |\arg 2\sqrt{q}\cos z| \leqslant \pi),$$

20.4.6. $b = \pi/2,$

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} J_{2n+\nu}(2i\sqrt{q}\sin z)$$

$$(|\sin z| > 1,\quad |\arg 2\sqrt{q}\sin z| \leqslant \pi).$$

Если $b \to \infty i$, y становится кратным решению 20.3.8. Тот факт, что 20.3.8, 20.4.5 и 20.4.6 являются частными случаями 20.4.4, объясняет, почему эти кажущиеся различными разложения имеют одни и те же коэффициенты c_{2n}.

Заменив в 20.4.1 $J_k(f)$ на функции Ханкеля $H_k^{(j)}(f)$ $(j = 1, 2)$ мы получим две функции ψ_k^j $(j=1, 2)$, которые в силу рекуррентных свойств функций Бесселя удовлетворяют уравнению 20.4.3. Следовательно, в формальном решении 20.4.4 уравнения 20.1.1 φ_k могут быть заменены на ψ_k^j.

Итак, пусть

$$\psi_k^j = [e^{i\pi}\cos(z - b)/\cos(z + b)]^{k/2}\ H_k^{(j)}(f),$$

где f определяется 20.4.2 Исследование отношения $\psi_{2n+\nu}/\psi_{2n+\nu-2}$ показывает, что $y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}\psi_{2n+\nu}^{(j)}$ является решением при условиях $|\cos(z - b)| > 1$, $|\cos(z + b)| > 1$. Эти два условия необходимы даже тогда, когда ν — целое. При фиксированном b область, в которой решения сходятся, может быть легко установлена.

Аналогично вышесказанному можно получить решения в виде рядов по функциям Бесселя $Y_k(f)$.

Следуя [20.36], положим

20.4.7. $J_p(x) = Z_p^{(1)}(x),\ Y_p(x) = Z_p^{(2)}(x),$

$$H_p^{(1)}(x) = Z_p^{(3)}(x),\ H_p^{(2)}(x) = Z_p^{(4)}(x).$$

Тогда решения уравнения 20.1.1, выраженные через функции $J_k(f)$, $Y_k(f)$ или $H_k^{(j)}(f)$ $(j = 1, 2)$, могут быть записаны в единой форме. Например, при $j = 1, 2, 3, 4$

$$b = 0,$$

$$y^{(j)} = e^{i\pi\nu/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}(-1)^n\ Z_{2n+\nu}^{(j)}(2\sqrt{q}\cos z)$$

$$(|\cos z| > 1,\quad |\arg(2\sqrt{q}\cos z)| \leqslant \pi),$$

$$b = \pi/2,$$

$$y^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}\ Z_{2n+\nu}^{(j)}(2i\sqrt{q}\sin z)$$

$$(|\sin z| > 1,\quad |\arg(2\sqrt{q}\sin z)| \leqslant \pi).$$

Если в этих формулах z заменить на $-iz$, то получим решения уравнения 20.1.2:

20.4.8. $y_1^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}(-1)^n\ Z_{2n+\nu}^{(j)}(2\sqrt{q}\operatorname{ch} z)$

$$(|\operatorname{ch} z| > 1,\ j = 1, 2, 3, 4),$$

20.4.9. $y_2^{(j)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}\ Z_{2n+\nu}^{(j)}(2\sqrt{q}\operatorname{sh} z)$

$$(|\operatorname{sh} z| > 1;\ j = 1, 2, 3, 4).$$

Связь между $y_1^{(j)}(z)$ и $y_2^{(j)}(z)$ может быть определена из асимптотических свойств функций Бесселя при больших значениях аргумента. Можно показать, что

20.4.10. $y_1^{(j)}(z)/y_2^{(j)}(z) = \left[F_\nu(0)/F_\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] e^{i\nu\pi/2}$

$$(\operatorname{Re} z > 0).$$

Когда ν — нецелое, эти решения не обращаются тождественно в нуль. Для целых значений ν см. 20.6.

Решения, содержащие произведения функций Бесселя

20.4.11. $y_3^{(j)}(z) =$

$$= \frac{1}{c_{2s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}(-1)^n\ Z_{n+\nu+s}^{(j)}(\sqrt{q}e^{iz})\ J_{n-s}(\sqrt{q}\ e^{-iz})$$

$$(j = 1, 2, 3, 4)$$

удовлетворяет уравнению 20.1.1, где $Z_n^{(j)}(u)$ определяются формулами 20.4.7, коэффициенты c_{2n} те же, что и в решении Флоке, и s — произвольное целое число, $c_{2s} \neq 0$. Это разложение сходится во всей комплексной плоскости z, если $q \neq 0$. Заменив z на $-iz$, получим решения уравнения 20.1.2:

20.4.12. $M_\nu^j(z, q) =$

$$= \frac{1}{c_{2s}^\nu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}^\nu(-1)^n Z_{n+\nu+s}^{(j)}(\sqrt{q}e^z)\ J_{n-s}(\sqrt{q}\ e^{-z}).$$

Из 20.4.8 и 20.4.12 можно вывести

20.4.13. $\dfrac{y_1^{(j)}(z)}{M_\nu^j(z, q)} = F_\nu(0)\quad (\operatorname{Re} z > 0)$

при условии $c_{2s} \neq 0$. Если $c_{2s} = 0$, коэффициент при $1/c_{2s}$ в 20.4.11 тождественно равен нулю (см. [20.43], [20.15], [20.36]).

Если s выбрано так, что $|c_{2s}|$ — наибольший из ряда коэффициентов $|c_{2j}|$, то при $\operatorname{Re} z > 0$ получается быстрая сходимость разложения 20.4.12. Нужно иметь в виду, что возможна потеря значащих цифр в процессе суммирования рядов, особенно тогда, когда q велико, а $|z|$ мало. (Если $j \neq 1$, то нужно определить аргумент логарифмического члена, содержащегося в 20.4.12, чтобы сделать функции однозначными.)

20.5. СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОСТИ И НОРМИРОВКА

Если $a(\nu+2p, q)$, $a(\nu+2s, q)$ — простые корни уравнения 20.3.10, то соответствующие решения Флоке $F_{\nu+2p}(z)$ и $F_{\nu+2s}(z)$ $(p \neq s)$ удовлетворяют условию ортогональности

20.5.1. $$\int_0^{\pi} F_{\nu+2p}(z)\, F_{\nu+2s}(-z)\, dz = 0,$$

если $p \neq s$, p и s — целые.

Определим

20.5.2. $$ce_\nu(z, q) = \frac{1}{2}[F_\nu(z) + F_\nu(-z)],$$

$$se_\nu(z, q) = -i\frac{1}{2}[F_\nu(z) - F_\nu(-z)].$$

При любых ν, отличных от целых чисел, функции $ce_\nu(z, q)$ и $se_\nu(z, q)$ являются соответственно четными и нечетными функциями от z. При целых значениях ν одна из функций 20.5.2 тождественно обращается в нуль и определение для нее теряет силу. Другая функция при этом является решением Флоке. Можно показать, что введение функций $ce_r(z, q)$ и $se_r(z, q)$ в 20.2 не противоречит определению 20.5.2; при целых $\nu = r$ функции $ce_r(z, q)$ связаны с a_r, а $se_r(z, q)$ с b_r.

Нормировка для целых ν и действительных q

20.5.3. $$\int_0^{2\pi} [ce_r(z, q)]^2\, dz = \int_0^{2\pi} [se_r(z, q)]^2\, dz = \pi.$$

Для целых значений ν суммирование 20.3.8 сводится к более простым формам 20.2.3—20.2.4; вследствие условия 20.5.3 коэффициенты A_m и B_m (для всех порядков r) обладают свойством

20.5.4. $$2A_0^2 + A_2^2 + \ldots = A_1^2 + A_3^2 + \ldots = $$
$$= B_1^2 + B_3^2 + \ldots = B_2^2 + B_4^2 + \ldots = 1.$$

20.5.5. $$A_0^{2s} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ce_{2s}(z, q)\, dz,$$

$$A_n^r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} ce_r(z, q)\cos(nz)\, dz \quad (n \neq 0),$$

$$B_n^r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} se_r(z, q)\sin(nz)\, dz \quad (n \neq 0).$$

Для целых значений ν функции $ce_r(z, q)$ и $se_r(z, q)$ образуют полную ортогональную систему на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 2\pi$. Каждая из четырех систем $ce_{2r}(z)$, $ce_{2r+1}(z)$, $se_{2r}(z)$, $se_{2r+1}(z)$ полна на меньшем отрезке $0 \leqslant z \leqslant \pi/2$ и каждая из систем $ce_r(z)$ и $se_r(z)$ полна на отрезке $0 \leqslant z \leqslant \pi$.

Если q — не действительное число, то существуют кратные корни уравнения 20.3.10; для таких частных значений $a(q)$ интегралы 20.5.3 обращаются в нуль и поэтому вышеуказанная нормировка невозможна. В приложениях вид нормировки не имеет большего значения и служит только для количественных отношений между решениями различных типов. Поэтому здесь не рассматривается нормировка функций $F_\nu(z)$ для произвольных комплексных значений a и q. Заметим, однако, что всегда возможно определить решения $\alpha ce_r(z, q)$ и $\beta se_r(z, q)$ так, чтобы выполнялись условия $\alpha ce_r(0, q) = 1$, $\left[\frac{d}{dz}\beta se_r(z, q)\right]_{z=0} = 1$. Эта нормировка принята в [20.59], а также в [20.58], где дается обширный табличный материал. Табличные входы в [20.58] содержат нормирующие множители $A = 1/\alpha$ и $B = 1/\beta$ и коэффициенты разложений. Переход от одной нормировки к другой легко осуществляется.

Нормировка функций 20.4.8 также не будет рассматриваться.

20.6. РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ν

(радиальные решения)

Решения первого рода

20.6.1. $$Ce_{2r+p}(z, q) = ce_{2r+p}(iz, q) = $$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+p}^{2r+p}(q)\,\mathrm{ch}\,(2k+p)z$$

(соответствуют a_{2r+p});

20.6.2. $$Se_{2r+p}(z, q) = -ise_{2r+p}(iz, q) = $$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+p}^{2r+p}(q)\,\mathrm{sh}\,(2k+p)z$$

(соответствуют b_{2r+p}).

Для краткости запишем

$$A_{2k+p}^{2r+p}(q) = A_{2k+p},$$
$$B_{2k+p}^{2r+p}(q) = B_{2k+p} \quad (p = 0, 1).$$

20.6.3. $$Ce_{2r}(z, q) = $$
$$= \frac{ce_{2r}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{A_0^{2r}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_{2k} J_{2k}(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\,z) = $$
$$= \frac{ce_{2r}(0, q)}{A_0^{2r}}\sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} J_{2k}(2\sqrt{q}\,\mathrm{sh}\,z).$$

20.6.4. $$Ce_{2r+1}(z, q) = $$
$$= \frac{ce'_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{\sqrt{q}\,A_1^{2r+1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} A_{2k+1} J_{2k+1}(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\,z) = $$
$$= \frac{ce_{2r+1}(0, q)}{\sqrt{q}\,A_1^{2r+1}}\,\mathrm{cth}\,z\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1) A_{2k+1} J_{2k+1}(2\sqrt{q}\,\mathrm{sh}\,z).$$

20.6.5. $Se_{2r}(z, q) =$

$$= \frac{se'_{2r}\left(\frac{\pi}{2}, q\right) \operatorname{th} z}{qB_2^{2r}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2kB_{2k} J_{2k}(2\sqrt{q} \operatorname{ch} z) =$$

$$= \frac{se'_{2r}(0, q)}{qB_2^{2r}} \operatorname{cth} z \sum_{k=1}^{\infty} 2kB_{2k} J_{2k}(2\sqrt{q} \operatorname{sh} z).$$

20.6.6. $$Se_{2r+1}(z, q) = \frac{se_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{\sqrt{q}\, B_1^{2r+1}} \operatorname{th} z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

$$(2k+1) B_{2k+1} J_{2k+1}(2\sqrt{q} \operatorname{ch} z) =$$

$$= \frac{se'_{2r+1}(0, q)}{\sqrt{q}\, B_1^{2r+1}} \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} J_{2k+1}(2\sqrt{q} \operatorname{sh} z).$$

Другие формулы см. в [20.30].

Решения второго рода, так же как и решения третьего и четвертого рода (аналоги функций Ханкеля), получаются из 20.4.12.

20.6.7. $Mc_{2r}^{(j)}(z, q) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{r+k} A_{2k}^{2r}(q) \left[J_{k-s}(u_1) Z_{k+s}^{(j)}(u_2) + \right.$$

$$\left. + J_{k+s}(u_1) Z_{k-s}^{(j)}(u_2)\right] / (\varepsilon_s A_{2s}^{2r}),$$

здесь и ниже s — произвольное целое, (соответствует a_{2r}); $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_s = 1$ для $s = 1, 2, \ldots$

20.6.8. $Mc_{2r+1}^{(j)}(z, q) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{r+k} A_{2k+1}^{2r+1}(q) \left[J_{k-s}(u_1) Z_{k+s+1}^{(j)}(u_2) + \right.$$

$$\left. + J_{k+s+1}(u_1) Z_{k-s}^{(j)}(u_2)\right] / A_{2s+1}^{2r+1}$$

(соответствует a_{2r+1}).

20.6.9. $Ms_{2r}^{(j)}(z, q) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+r} B_{2k}^{2r}(q) \left[J_{k-s}(u_1) Z_{k+s}^{(j)}(u_2) - \right.$$

$$\left. - J_{k+s}(u_1) Z_{k-s}^{(j)}(u_2)\right] / B_{2s}^{2r}$$

(соответствует b_{2r}).

20.6.10. $Ms_{2r+1}^{(j)}(z, q) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} B_{2k+1}^{2r+1}(q) \left[J_{k-s}(u_1) Z_{k+s+1}^{(j)}(u_2) - \right.$$

$$\left. - J_{k+s+1}(u_1) Z_{k-s}^{(j)}(u_2)\right] / B_{2s+1}^{2r+1}$$

(соответствует b_{2r+1}),

где $u_1 = \sqrt{q}e^{-z}$, $u_2 = \sqrt{q}e^{z}$, B_{2s+p}^{2r+p}, $A_{2s+p}^{2r+p} \neq 0$ $(p = 0, 1)$.

Определение $Z_m^{(j)}(x)$ см. в 20.4.7.

Решения 20.6.7—20.6.10 сходятся для всех значений z, когда $q \neq 0$. Если $j = 2, 3, 4$, то для однозначности функций необходимо выбрать ветвь логарифмических членов, входящих в функции Бесселя $Y_m(u_2)$. Это может быть сделано так же, как и в [20.58]:

20.6.11. $\ln(\sqrt{q}\, e^z) = \ln(\sqrt{q}) + z.$

Производные см. в [20.15], [20.36].

Другие выражения для радиальных функций (справедливые в более узких областях)

20.6.12. $$Mc_{2r}^{(j)}(z, q) = [ce_{2r}(0, q)]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} \times$$

$$\times A_{2k}^{2r}(q)\, Z_{2k}^{(j)}(2\sqrt{q} \operatorname{ch} z),$$

$$Mc_{2r+1}^{(j)}(z, q) = [ce_{2r+1}(0, q)]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} \times$$

$$\times A_{2k+1}^{2r+1}(q)\, Z_{2k+1}^{(j)}(2\sqrt{q} \operatorname{ch} z).$$

20.6.13. $$Ms_{2r}^{(j)}(z, q) = [se'_{2r}(0, q)]^{-1} \times$$

$$\times \operatorname{th} z \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+r} 2kB_{2k}^{2r}(q) Z_{2k}^{(j)}(2\sqrt{q} \operatorname{ch} z),$$

$$Ms_{2r+1}^{(j)}(z, q) = [se'_{2r+1}(0, q)]^{-1} \times$$

$$\times \operatorname{th} z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+1) B_{2k+1}^{2r+1}(q)\, Z_{2k+1}^{(j)}(2\sqrt{q} \operatorname{ch} z).$$

Разложения справедливы при $\operatorname{Re} z > 0$, $|\operatorname{ch} z| > 1$; если $j = 1$, они справедливы для всех z. Эти разложения согласуются с 20.6.7—20.6.10, если ветви функций Бесселя выбраны соответствующим образом. Пусть, например,

$$Y_m(u) = \frac{2}{\pi} (\ln u)\, J_m(u) + \varphi(u),$$

где $\varphi(u)$ однозначна для всех конечных значений u. Положим $u = 2q^{1/2} \operatorname{ch} z$; определим

20.6.14. $$\ln(2q^{1/2} \operatorname{ch} z) = \ln 2q^{1/2} + z + \ln \frac{1}{2}(1 + e^{-2z})$$

$$\left(-\pi/2 \leqslant \arg \frac{1}{2}(1 + e^{-2z}) \leqslant \pi/2\right)$$

(если q не положительно, то должен быть также определен аргумент $\ln(2q^{1/2})$; при этом не должна нарушаться непрерывность функции относительно z. Если $Y_m(u)$ определяется другим выражением, то это определение должно быть согласовано с 20.6.14).

Если $j = 1$, то $Mc_{2r+p}^{(1)}$ и $Ms_{2r+p}^{(1)}$ $(p = 0, 1)$ являются решениями первого рода, пропорциональными Ce_{2r+p} и Se_{2r+p} соответственно.

Таким образом,

20.6.15. $Ce_{2r}(z, q) =$

$$= \frac{ce_{2r}\left(\frac{\pi}{2}, q\right) ce_{2r}(0, q)}{(-1)^r A_0^{2r}} Mc_{2r}^{(1)}(z, q),$$

$$Ce_{2r+1}(z, q) = \frac{ce'_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right) ce_{2r+1}(0, q)}{(-1)^{r+1} \sqrt{q}\, A_1^{2r+1}} Mc_{2r+1}^{(1)}(z, q),$$

$$Se_{2r}(z, q) = \frac{se'_{2r}(0, q)\, se'_{2r}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{(-1)^r qB_2^{2r}} Ms_{2r}^{(1)}(z, q),$$

$$Se_{2r+1}(z, q) = \frac{se'_{2r+1}(0, q)\, se_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{(-1)^r \sqrt{q}\, B_1^{2r+1}} Ms_{2r+1}^{(1)}(z, q).$$

Функциями Матье—Ханкеля являются

20.6.16. $$M_r^{(3)}(z, q) = M_r^{(1)}(z, q) + iM_r^{(2)}(z, q),$$

$$M_r^{(4)}(z, q) = M_r^{(1)}(z, q) - iM_r^{(2)}(z, q),$$

$$M_r^{(j)} = Mc_r^{(j)} \text{ или } Ms_r^{(j)}.$$

Из 20.6.7–20.6.11 и из известных свойств функций Бесселя получаем

20.6.17.
$$M^{(2)}_{2r+p}(z+in\pi,\ q) = (-1)^{np}[M^{(2)}_{2r+p}(z,\ q)+2niM^{(1)}_{2r+p}(z,\ q)],$$
$$M^{(3)}_{2r+p}(z+in\pi,\ q) = (-1)^{np}[M^{(3)}_{2r+p}(z,\ q)-2nM^{(1)}_{2r+p}(z,\ q)],$$
$$M^{(4)}_{2r+p}(z+in\pi,\ q) = (-1)^{np}[M^{(4)}_{2r+p}(z,\ q)+2nM^{(1)}_{2r+p}(z,\ q)],$$

$M = Mc$ или $M = Ms$ всюду в этих уравнениях.

Другие свойства собственных функций

Пусть q — действительное число. Рассмотрим

20.6.18.
$$X_1 = Mc^{(2)}_r(z,q)+Mc^{(2)}_r(-z,\ q),$$
$$X_2 = Ms^{(2)}_r(z,\ q)-Ms^{(2)}_r(-z,\ q).$$

Поскольку X_1 есть четное решение, оно должно быть пропорционально $Mc^{(1)}_r(z,q)$, так как 20.1.2 допускает только одно четное решение (с точностью до произвольного постоянного множителя). Аналогично, X_2 пропорционально $Ms^{(1)}_r(z,q)$. Множители пропорциональности $f_{e,r}$ и $f_{o,r}$ могут быть найдены следующим образом. Пусть

20.6.19. $Mc^{(2)}_r(-z,\ q) = -Mc^{(2)}_r(z,\ q)-2f_{e,r}Mc^{(1)}_r(z,\ q),$

20.6.20. $Ms^{(2)}_r(-z,q) = Ms^{(2)}_r(z,q)-2f_{o,r}Ms^{(1)}_r(z,\ q),$

где

20.6.21. $f_{e,r} = -Mc^{(2)}_r(0,q)/Mc^{(1)}_r(0,\ q),$

$$f_{o,r} = \left[\frac{d}{dz}Ms^{(2)}_r(z,q)\Big/\frac{d}{dz}Ms^{(1)}_r(z,q)\right]_{z=0}$$

(см. [20.58]).

Ряды 20.6.12–20.6.13 сходятся при $\operatorname{Re} z<0$ и при $|\operatorname{ch} z|>1$, однако они не представляют тех же функций, что и 20.6.7–20.6.10. Поэтому соотношения 20.6.19–20.6.21 могут быть использованы для продолжения функций 20.6.12–20.6.13 на область $\operatorname{Re} z<0$.

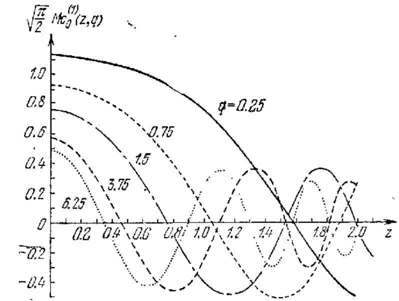


Рис. 20.11. Радиальная функция Матье первого рода.

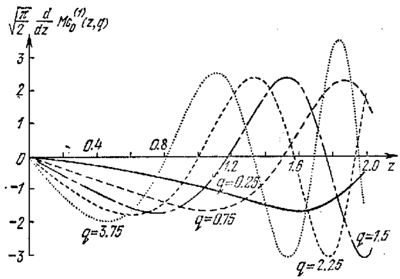


Рис. 20.12. Производная радиальной функции Матье первого рода.

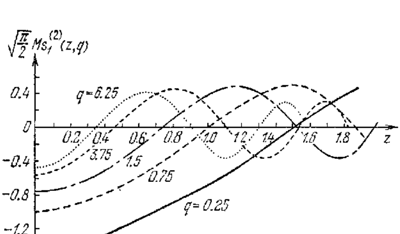


Рис. 20.13. Радиальная функция Матье второго рода.

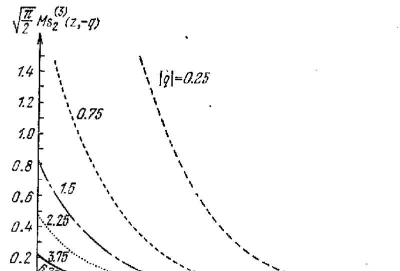


Рис. 20.14. Радиальная функция Матье третьего рода.

20.7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть функция

20.7.1. $G(u) = \oint_C K(u, t)\, V(t)\, dt$

определена для u из области U и контур C принадлежит области T комплексной t-плоскости, причем $t = \gamma_0$ — начальная точка контура и $t = \gamma_1$ — его конечная точка. Пусть ядро $K(u, t)$ и функция $V(t)$ удовлетворяют уравнению 20.7.3 и условиям 20.7.2.

20.7.2. $K(u, t)$ и его две первые частные производные по u и по t непрерывны: по t на контуре C и по u в области U; V и dV/dt непрерывны по t.

20.7.3. $$\left[\frac{\partial K}{\partial t} V - \frac{dV}{dt} K\right]_{\gamma_0}^{\gamma_1} = 0,$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} + (a - 2q\cos 2t)\, V = 0.$$

Если $K(u, t)$ удовлетворяет уравнению

20.7.4. $$\frac{\partial^2 K}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + 2q\,(\operatorname{ch} 2u - \cos 2t)\, K = 0,$$

то $G(u)$ есть решение модифицированного уравнения Матье 20.1.2.

Если $K(u, t)$ удовлетворяет уравнению

20.7.5. $$\frac{\partial^2 K}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + 2q\,(\cos 2u - \cos 2t)\, K = 0,$$

то $G(u)$ есть решение уравнения Матье 20.1.1 (в котором z заменено на u).

Ядра $K_1(z, t)$ и $K_2(z, t)$

20.7.6. $K_1(z, t) = Z_\nu^{(j)}(u)\,[M(z, t)]^{-\nu/2}$ $\quad(\operatorname{Re} z > 0)$,

где

20.7.7. $u = \sqrt{2q(\operatorname{ch} 2z + \cos 2t)}$,

20.7.8. $M(z, t) = \operatorname{ch}(z + it)/\operatorname{ch}(z - it)$.

Чтобы сделать функцию $M^{-\nu/2}$ однозначной, определим

20.7.9. $$\operatorname{ch}(z + i\pi) = e^{i\pi}\operatorname{ch}(z),$$
$$\operatorname{ch}(z - i\pi) = e^{-i\pi}\operatorname{ch}(z),$$
$$M(z, 0) = 1,$$
$$[M(z, \pi)]^{-\nu/2} = e^{-i\nu\pi} M(z, 0).$$

Пусть

20.7.10. $$G(z, q) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi K_1(u, t)\, F_\nu(t)\, dt \qquad (\operatorname{Re} z > 0),$$

где $F_\nu(t)$ определено формулой 20.3.8. Можно проверить, что K_1F_ν удовлетворяет 20.7.3, K удовлетворяет 20.7.2 и 20.7.4. Следовательно, G является решением уравнения 20.1.2 (с заменой u на z). Можно показать, что K_1 может быть заменена более общей функцией

20.7.11. $K_2(z, t) = Z_{\nu+2s}^{(j)}(u)\,[M(z, t)]^{-\nu/2+s}$,

s — любое целое число. $Z_{\nu+2s}^{(j)}(u)$ определяется соотношениями 20.4.7.

Из известных разложений для $Z_{\nu+2s}^{(j)}(u)$, когда $\operatorname{Re} z$ велико и положительно, следует

20.7.12. $$M_\nu^{(j)}(z, q) = \frac{(-1)^s}{\pi c_{2s}}\int_0^\pi Z_{\nu+2s}^{(j)}(u)\left[\frac{\operatorname{ch}(z + it)}{\operatorname{ch}(z - it)}\right]^{-\nu/2-s} F_\nu(t)\, dt$$
$$(\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re}(\nu + 1/2) > 0),$$

где $M_\nu^{(j)}(z, q)$ задается разложением 20.4.12, $s = 0, 1, \ldots$, $c_{2s} \neq 0$ и $F_\nu(t)$ — решение Флоке 20.3.8.

Ядро $K_3(z, t, a)$

20.7.13. $K_3(z, t, a) = e^{2i\sqrt{q}\,w}$,

где

20.7.14. $w = \operatorname{ch} z \cos a \cos t + \operatorname{sh} z \sin a \sin t$.

20.7.15. $$G(z, q, a) = \frac{1}{\pi}\oint_C e^{2i\sqrt{q}\,w} F_\nu(t)\, dt,$$

где $F_\nu(t)$ — решение Флоке 20.3.8.

Путь C выбран так, что $G(z, t, a)$ существует и выполняются условия 20.7.2 и 20.7.3. Тогда можно доказать, что ядро $K_3(z, t, a)$, рассматриваемое как функция z и t, удовлетворяет уравнению 20.7.4, и рассматриваемое как функция a и t, удовлетворяет уравнению 20.7.5. Следовательно, $G(z, q, a) = Y(z, q)\, y(a, q)$, где Y и y удовлетворяют уравнениям 20.1.2 и 20.1.1 соответственно.

Выбор пути C. Пути будут определены тремя способами:

20.7.16.

Путь C_3: от $-d_1 + i\infty$ до $d_2 - i\infty$, d_1, d_2 действительны,

$$-d_1 < \arg[\sqrt{q}\,\{\operatorname{ch}(z + ia) \pm 1\}] < \pi - d_1,$$
$$-d_2 < \arg[\sqrt{q}\,\{\operatorname{ch}(z - ia) \pm 1\}] < \pi - d_2.$$

20.7.17.

Путь C_4: от $d_2 - i\infty$ до $2\pi + i\infty - d_1$ (d_1 и d_2 те же, что и в 20.7.16).

20.7.18. $$F_\nu(a)\, M_\nu^j(z, q) = \frac{e^{-i\nu\pi/2}}{\pi}\oint_{C_j} e^{2i\sqrt{q}\,w} F_\nu(t)\, dt$$
$$(j = 3, 4),$$

где $M_\nu^j(z, q)$ определена в 20.4.12.

20.7.19. Путь C_1: от $-d_1 + i\infty$ до $2\pi - d_1 + i\infty$,

$$F_\nu(a)\, M_\nu^{(1)}(z, q) = \frac{e^{-i\nu\pi/2}}{2\pi}\oint_{C_1} e^{2i\sqrt{q}\,w} F_\nu(t)\, dt$$

(см. [20.36], п. 2.68).

Если ν — целое, можно взять более простые пути интегрирования, так как в этом случае $F_\nu(t)$ — периодическая функция и интегралы берутся от 0 до 2π. Возможны и дальнейшие упрощения, если, кроме того, z действительно.

Далее приводятся наиболее важные интегральные представления периодических функций $ce_r(z, q)$, $se_r(z, q)$ и соответствующих радиальных решений.

Пусть $r = 2s + p$, $p = 0$ или 1. Тогда

20.7.20. $$ce_r(z,\ q) = \rho_r \int_0^{\pi/2} \cos\left(2\sqrt{q}\cos z\cos t - p\frac{\pi}{2}\right) ce_r(t,\ q)\,dt,$$

20.7.21. $$ce_r(z,\ q) = \sigma_r \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(2\sqrt{q}\sin z\sin t)\times [(1-p) + p\cos z\cos t]\, ce_r(t,\ q)\,dt,$$

20.7.22. $$se_r(z,\ q) = \rho_r \int_0^{\pi/2} \sin\left(2\sqrt{q}\cos z\cos t + p\frac{\pi}{2}\right)\sin z\sin t\, se_r(t,\ q)\,dt,$$

20.7.23. $$se_r(z,\ q) = \sigma_r \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(2\sqrt{q}\sin z\sin t)\times [(1-p)\cos z\cos t + p]\, se_r(t,\ q)\,dt,$$

где

20.7.24. $$\rho_r = \frac{2}{\pi} ce_{2s}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)\Big/ A_0^{2s}(q), \qquad \text{если } p = 0,$$

$$\rho_r = -\frac{2}{\pi} ce'_{2s+1}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)\Big/ (\sqrt{q}A_1^{2s+1}(q)), \qquad \text{если } p = 1,$$

для функций $ce_r(z,\ q)$;

$$\rho_r = -\frac{4}{\pi} se'_{2s}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)\Big/ (\sqrt{q}B_2^{2s}(q)), \qquad \text{если } p = 0,$$

$$\rho_r = \frac{4}{\pi} se_{2s+1}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)\Big/ B_1^{2s+1}(q), \qquad \text{если } p = 1,$$

для функций $se_r(z,\ q)$;

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi} ce_{2s}(0,\ q)/A_0^{2s}(q), \quad \text{если } p = 0,$$

$$\sigma_r = \frac{4}{\pi} ce_{2s+1}(0,\ q)/A_1^{2s+1}(q), \quad \text{если } p = 1,$$

для функций $ce_r(z,\ q)$;

$$\sigma_r = \frac{4}{\pi} se'_{2s}(0,\ q)/(\sqrt{q}B_2^{2s}(q)), \quad \text{если } p = 0,$$

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi} se'_{2s+1}(0,\ q)/(\sqrt{q}B_1^{2s+1}(q)), \quad \text{если } p = 1,$$

для функций $se_r(z,\ q)$.

Интегралы, включающие ядра с функциями Бесселя

Пусть

20.7.25. $u = \sqrt{2q(\operatorname{ch} 2z + \cos 2t)}$ $(\operatorname{Re}\operatorname{ch} 2z > 1$; если $j = 1$, то допустимо также значение $z = 0)$. Тогда

20.7.26. $$Mc_{2r}^{(j)}(z,\ q) = \frac{(-1)^r 2}{\pi A_0^{2r}} \int_0^{\pi/2} Z_0^{(j)}(u)\, ce_{2r}(t,\ q)\,dt,$$

$$Mc_{2r+1}^{(j)}(z,\ q) = \frac{(-1)^r 8\sqrt{q}\operatorname{ch} z}{\pi A_1^{2r+1}} \int_0^{\pi/2} \frac{Z_1^{(j)}(u)\cos t}{u}\, ce_{2r+1}(t,\ q)\,dt,$$

20.7.27. $$Ms_{2r}^{(j)}(z,\ q) = \frac{(-1)^{r+1} 8q\operatorname{sh} 2z}{\pi B_2^{2r}} \int_0^{\pi/2} \frac{Z_2^{(j)}(u)\sin 2t\, se_{2r}(t,\ q)\,dt}{u^2},$$

$$Ms_{2r+1}^{(j)}(z,\ q) = \frac{(-1)^r 8\sqrt{q}\operatorname{sh} z}{\pi B_1^{2r+1}} \int_0^{\pi/2} \frac{Z_1^{(j)}(u)\sin t\, se_{2r+1}(t,\ q)\,dt}{u}.$$

В вышенаписанных выражениях применяются обозначения 20.4.7 и функции Mc, Ms определяются 20.6.7—20.6.10 (эти решения нормализованы так, что при $\operatorname{Re} z \to \infty$ они стремятся к соответствующим функциям Бесселя—Ханкеля).

Другие интегралы для $Mc_r^{(1)}(z,\ q)$ и $Ms_r^{(1)}(z,\ q)$

20.7.28. $$Mc_r^{(1)}(z,\ q) = \frac{(-1)^s 2}{\pi ce_r(0,\ q)} \int_0^{\pi/2} \cos\left(2\sqrt{q}\operatorname{ch} z\cos t - p\frac{\pi}{2}\right) ce_r(t, q)\,dt.$$

20.7.29. $$Mc_r^{(1)}(z,\ q) = \tau_r \int_0^{\pi/2} [(1-p) + p\operatorname{ch} z\cos t]\cos(2\sqrt{q}\operatorname{sh} z\sin t)\, ce_r(t,\ q)\,dt,$$

$$r = 2s + p,\ p = 0,\ 1;\ \tau_r = \frac{2}{\pi}(-1)^s/ce_{2s}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right), \quad \text{если } p = 0;$$

$$\tau_r = \frac{2}{\pi}(-1)^{s+1} 2\sqrt{q}/ce'_{2s+1}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right), \quad \text{если } p = 1.$$

20.7.30. $$Ms_{2r+1}^{(1)}(z, q) = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^r}{se_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)} \int_0^{\pi/2} \sin(2\sqrt{q}\operatorname{sh} z\sin t)\, se_{2r+1}(t,\ q)\,dt.$$

20.7.31. $Ms_{2r+1}^{(1)}(z,q)=\frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{q}(-1)^r}{se'_{2r+1}(0,q)}\int\limits_0^{\pi/2}\cos(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\,z\cos t)\,\mathrm{sh}\,z\sin t\;se_{2r+1}(t,q)\,dt.$

20.7.32. $Ms_{2r}^{(1)}(z,q)=\frac{4}{\pi}\sqrt{q}\frac{(-1)^{r+1}}{se'_{2r}(0,q)}\int\limits_0^{\pi/2}\sin(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\,z\cos t)\;\mathrm{sh}\,z\sin t\;se_{2r}(t,q)\,dt.$

20.7.33. $Ms_{2r}^{(1)}(z,q)=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^r\sqrt{q}}{se'_{2r}\left(\frac{\pi}{2},\,q\right)}\int\limits_0^{\pi/2}\sin(2\sqrt{q}\,\mathrm{sh}\,z\sin t)\;\mathrm{ch}\,z\cos t\;se_{2r}(t,q)\,dt.$

Далее, положив $w=\mathrm{ch}\,z\cos\alpha\cos t+\mathrm{sh}\,z\sin\alpha\sin t$, получим

20.7.34. $ce_r(\alpha,q)\,Mc_r^{(1)}(z,q)=\frac{(-1)^s(i)^{-p}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{2i\sqrt{q}w}ce_r(t,q)\,dt.$

20.7.35. $se_r(\alpha,q)Ms_r^{(1)}(z,q)=\frac{(-1)^s(-i)^p}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{2i\sqrt{q}w}se_r(t,q)\,dt.$

Продифференцировав вышенаписанные соотношения по α, получим

20.7.36. $ce'_r(\alpha,q)Mc_r^{(1)}(z,q)=\frac{(-1)^s(i)^{-p+1}\sqrt{q}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{2i\sqrt{q}w}\frac{\partial w}{\partial\alpha}ce_r(t,q)\,dt,$

20.7.37. $se'_r(\alpha,q)Ms_r^{(1)}(z,q)=\frac{(-1)^{s+p}(i)^{-p+1}\sqrt{q}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{2i\sqrt{q}w}\frac{\partial w}{\partial\alpha}se_r(t,q)\,dt.$

Интегралы с бесконечными пределами ($r=2s+p$)

В формулах 20.7.38—20.7.41 z и q — положительные.

20.7.38. $Mc_r^{(1)}(z,q)=\gamma_r\int\limits_0^\infty\sin\left(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\,z\,\mathrm{ch}\,t+p\frac{\pi}{2}\right)Mc_r^{(1)}(t,q)\,dt,$

$$\gamma_r=2ce_{2s}\left(\frac{\pi}{2},\,q\right)\Big/(\pi A_0^{2s}),\ \text{если } p=0;$$

$$\gamma_r=2ce'_{2s+1}\left(\frac{\pi}{2},\,q\right)\Big/(\sqrt{q}\pi A_1^{2s+1}),\ \text{если } p=1.$$

20.7.39. $Ms_r^{(1)}(z,q)=\gamma_r\int\limits_0^\infty\cos\left(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\,z\,\mathrm{ch}\,t-p\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{sh}\,z\,\mathrm{sh}\,t\,Ms_r^{(1)}(t,q)\,dt,$

$$\gamma_r=-4se'_{2s}\left(\frac{\pi}{2},\,q\right)\Big/(\sqrt{q}\pi B_2^{2s}),\ \text{если } p=0;$$

$$\gamma_r=-4se_{2s+1}\left(\frac{\pi}{2},\,q\right)\Big/(\pi B_1^{2s+1}),\ \text{если } p=1.$$

20.7.40. $Mc_r^{(2)}(z,q)=\gamma_r\int\limits_0^\infty\cos\left(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\,z\,\mathrm{ch}\,t-p\frac{\pi}{2}\right)Mc_r^{(1)}(t,q)\,dt,$

$$\gamma_r=-2ce_{2s}\left(\frac{\pi}{2},\,q\right)\Big/(\pi A_0^{2s}),\ \text{если } p=0;$$

$$\gamma_r=2ce'_{2s+1}\left(\frac{\pi}{2},\,q\right)\Big/(\pi\sqrt{q}A_1^{2s+1}),\ \text{если } p=1.$$

$$\textbf{20.7.41.}\ Ms_r^{(2)}(z, q) = \gamma_r \int\limits_0^\infty \sin\left(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\,z\,\mathrm{ch}\,t + p\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{sh}\,z\,\mathrm{sh}\,t\, Ms_r^{(1)}(t, q)\,dt,$$

$$\gamma_r = -4se_{2s}'\left(\frac{\pi}{2}, q\right)\Big/ (\sqrt{q}\pi B_2^{2s}), \text{ если } p = 0;$$

$$\gamma_r = 4se_{2s+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)\Big/ (\pi B_1^{2s+1}), \text{ если } p = 1.$$

Другие формулы см. в [20.30], [20.36], [20.15].

20.8. ДРУГИЕ СВОЙСТВА

Соотношения между решениями с параметрами q и $-q$

Заменяя в уравнении 20.1.1 z на $\frac{\pi}{2} - z$, получаем

20.8.1. $y'' + (a + 2q\cos 2z)\,y = 0.$

Отсюда, если $u(z)$ — решение уравнения 20.1.1, то $u\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ удовлетворяет уравнению 20.8.1. Можно показать, что (ν — нецелое).

20.8.2. $a(-\nu, q) = a(\nu, -q) = a(\nu, q),$

$$c_{2m}^{\nu}(-q) = \rho(-1)^m c_{2m}^{\nu}(q)$$

(c_{2m} определены формулой 20.3.8) и ρ зависит от нормировки;

$$F_\nu(z, -q) = \rho e^{-i\nu\pi/2} F_\nu\left(z + \frac{\pi}{2}, q\right) = \rho e^{i\nu\pi/2} F_\nu\left(z - \frac{\pi}{2}, q\right).$$

20.8.3. $a_{2r}(-q) = a_{2r}(q),\quad b_{2r}(-q) = b_{2r}(q),$

$a_{2r+1}(-q) = b_{2r+1}(q),\quad b_{2r+1}(-q) = a_{2r+1}(q)$

для целых ν.

20.8.4. $ce_{2r}(z, -q) = (-1)^r ce_{2r}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right),$

$$ce_{2r+1}(z, -q) = (-1)^r se_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right),$$

$$se_{2r+1}(z, -q) = (-1)^r ce_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right),$$

$$se_{2r}(z, -q) = (-1)^{r-1} se_{2r}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right).$$

Для коэффициентов, соответствующих вышенаписанным решениям при целом ν, имеем

20.8.5. $A_{2m}^{2r}(-q) = (-1)^{m-r} A_{2m}^{2r}(q),\ B_{2m}^{2r}(-q) = (-1)^{m-r} B_{2m}^{2r}(q),$

$$A_{2m+1}^{2r+1}(-q) = (-1)^{m-r} B_{2m+1}^{2r+1}(q),\ B_{2m+1}^{2r+1}(-q) = (-1)^{m-r} A_{2m+1}^{2r+1}(q).$$

Для соответствующего модифицированного уравнения

20.8.6. $y'' - (a + 2q\,\mathrm{ch}\,2z)\,y = 0$

имеем

20.8.7. $M_\nu^{(j)}(z, -q) = M_\nu^{(j)}\left(z + i\frac{\pi}{2}, q\right),$

$M_\nu^{(j)}(z, q)$ определена в 20.4.12.

Для целых значений ν положим

$$\textbf{20.8.8.}\ Ie_{2r}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+s} A_{2k}[I_{k-s}(u_1) I_{k+s}(u_2) + I_{k+s}(u_1) I_{k-s}(u_2)]/(A_{2s}\varepsilon_s),$$

$$Io_{2r}(z, q) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+s} B_{2k}[I_{k-s}(u_1) I_{k+s}(u_2) - I_{k+s}(u_1) I_{k-s}(u_2)]/B_{2s},$$

$$Ie_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+s} B_{2k+1}[I_{k-s}(u_1) I_{k+s+1}(u_2) + I_{k+s+1}(u_1) I_{k-s}(u_2)]/B_{2s+1},$$

$$Io_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+s} A_{2k+1}[I_{k-s}(u_1) I_{k+s+1}(u_2) - I_{k+s+1}(u_1) I_{k-s}(u_2)]/A_{2s+1};$$

$$\textbf{20.8.9.}\ Ke_{2r}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}[I_{k-s}(u_1) K_{k+s}(u_2) + I_{k+s}(u_1) K_{k-s}(u_2)]/(A_{2s}\varepsilon_s),$$

$$Ko_{2r}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}[I_{k-s}(u_1) K_{k+s}(u_2) - I_{k+s}(u_1) K_{k-s}(u_2)]/B_{2s},$$

$$Ke_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}[I_{k-s}(u_1) K_{k+s+1}(u_2) - I_{k+s+1}(u_1) K_{k-s}(u_2)]/B_{2s+1},$$

$$Ko_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}[I_{k-s}(u_1) K_{k+s+1}(u_2) + I_{k+s+1}(u_1) K_{k-s}(u_2)]/A_{2s+1},$$

$I_m(x), K_m(x)$ — модифицированные функции Бесселя, $u_1 = \sqrt{q}\,e^{-z}$, $u_2 = \sqrt{q}\,e^{z}$. Верхние индексы опущены; $\varepsilon_s = 2$, если $s = 0$; $\varepsilon_s = 1$, если $s \neq 0$.

Тогда для функций первого рода:

20.8.10.

$$Mc_{2r}^{(1)}(z, -q) = (-1)^r Ie_{2r}(z, q),$$

$$Ms_{2r}^{(1)}(z, -q) = (-1)^r Io_{2r}(z, q),$$

$$Mc_{2r+1}^{(1)}(z, -q) = (-1)^r iIe_{2r+1}(z, q),$$

$$Ms_{2r+1}^{(1)}(z, -q) = (-1)^r iIo_{2r+1}(z, q).$$

Для функций Матье — Ханкеля первого рода:

20.8.11.

$$Mc_{2r}^{(3)}(z,\ -q) = (-1)^{r+1}\, i\, \frac{2}{\pi}\, Ke_{2r}(z, q),$$

$$Ms_{2r}^{(3)}(z,\ -q) = (-1)^{r+1}\, i\, \frac{2}{\pi}\, Ko_{2r}(z, q),$$

$$Mc_{2r+1}^{(3)}(z,\ -q) = (-1)^{r+1}\, \frac{2}{\pi}\, Ke_{2r+1}(z, q),$$

$$Ms_{2r+1}^{(3)}(z,\ -q) = (-1)^{r+1}\, \frac{2}{\pi}\, Ko_{2r+1}(z, q).$$

Для $M_r^{(j)}(z, -q)\,(j = 2, 4)$ могут быть использованы определения:

$$M_r^{(2)}(z,\ -q) = -i[M_r^{(3)}(z,\ -q) - M_r^{(1)}(z,\ -q)],$$
$$M_r^{(4)}(z,\ -q) = 2M_r^{(1)}(z,\ -q) - M_r^{(3)}(z,\ -q),$$

где $M_r = Mc_r$ или Ms_r; z и q — действительные числа. Функции $M_r^{(j)}(z, -q)$ при $j = 2, 4$ являются комплексными функциями.

Нули функции при действительных значениях q

Более полные результаты см. в [20.36], гл. 2.8.

Нули функций $ce_r(z, q)$, $se_r(z, q)$, $Mc_r^{(1)}(z, q)$, $Ms_r^{(1)}(z, q)$

На интервале $0 \leqslant z < \pi$ функции $ce_r(z, q)$ и $se_r(z, q)$ имеют r действительных нулей.

Если $q > 0$, то имеются комплексные нули.

Если $z_0 = x_0 + iy_0$ — произвольный нуль функции $ce_r(z, q)$ или функции $se_r(z, q)$ при $-\pi/2 < x_0 < \pi/2$, то $k\pi \pm z_0$ и $k\pi \pm \bar{z}_0$ также являются нулями при k целом.

В полосе $-\pi/2 < x_0 < \pi/2$ мнимые нули функций $ce_r(z, q)$ и $se_r(z, q)$ являются действительными нулями функций $Ce_r(z, q)$ и $Se_r(z, q)$ и поэтому также действительными нулями функций $Mc_r^{(1)}(z, q)$ и $Ms_r^{(1)}(z, q)$ соответственно.

Для малых q большие нули функций $Ce_r(z, q)$ и $Se_r(z, q)$ приближаются к нулям функции $J_r(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\, z)$.

Табулирование нулей

Айнс [20.56] вычислил первые «нетривиальные» нули $\left(\text{т. е. отличные от } 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ для $ce_r(z, q)$, $se_r(z, q)$, $r=2(1)5$ и для $se_6(z, q)$ с точностью до 5D при $q = 0(1)\,10(2)\,40$. Он также дает «экстремальные» точки (нули производной) и разложение для них при малых q. Уилтс и Кинг ([20.61], [20.62]) вычислили первые два нетривиальных нуля функций $Mc_r^{(1)}(z, q)$ и $Ms_r^{(1)}(z, q)$ и их производных $(r = 0, 1, 2)$ для 6 или 7 значений q, лежащих между 0,25 и 10. На воспроизводимых здесь графиках указывается их положение.

Между двумя действительными нулями функций $Mc_r^{(1)}(z, q)$ (или $Ms_r^{(1)}(z, q)$) имеется нуль функции $Mc_r^{(2)}(z, q)$ (или $Ms_r^{(2)}(z, q)$). Таблиц этих нулей пока нет.

Имеющиеся таблицы указаны в разделе «Литература».

Наиболее полные таблицы характеристических чисел a_r, b_r (в несколько других обозначениях) и коэффициентов, пропорциональных A_m и B_m (см. 20.5.4 и 20.5.5), даются в [20.58]. Кроме того, эти таблицы содержат множители связи, с помощью которых можно получить значения $Mc_r^{(j)}(z, q)$ и $Ms_r^{(j)}(z, q)$ и их производных при $z = 0$. Значения функций $ce_r(z, q)$ и $se_r(z, q)$ до пятого или шестого порядка могут быть найдены в [20.56]. В других цитированных книгах приводятся менее обширные таблицы, но важные в некоторых аспектах. В данной главе даются только отдельные числовые значения различных функций и несколько графиков.

Частные значения для аргументов 0 и $\pi/2$

20.8.12.

$$ce_{2r}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right) = (-1)^r\, g_{e,2r}(q)\, A_0^{2r}(q) \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$ce'_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right) = (-1)^{r+1}\, g_{e,2r+1}(q)\, A_1^{2r+1}(q) \sqrt{\frac{\pi}{2}\, q},$$

$$se'_{2r}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right) = (-1)^r\, g_{o,2r}(q)\, B_2^{2r}(q)\, q \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$se_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right) = (-1)^r\, g_{o,2r+1}(q)\, B_1^{2r+1}(q) \sqrt{\frac{\pi}{2}\, q},$$

$$Mc_r^{(1)}(0, q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{g_{e,r}(q)},$$

$$Mc_r^{(2)}(0, q) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f_{e,r}(q)/g_{e,r}(q),$$

$$\frac{d}{dz}\,[Mc_r^{(2)}(z, q)]_{z=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, g_{e,r}(q),$$

$$\frac{d}{dz}\,[Ms_r^{(1)}(z, q)]_{z=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{g_{o,r}(q)},$$

$$\frac{d}{dz}\,[Ms_r^{(2)}(z, q)]_{z=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f_{o,r}(q)/g_{o,r}(q),$$

$$Ms_r^{(2)}(z, q) = -g_{o,r}(q) \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Функции $f_{o,r}$, $g_{o,r}$, $f_{e,r}$, $g_{e,r}$ протабулированы в [20.58] для $q \leqslant 25$.

20.9. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Представления, данные ниже, применимы к собственным решениям для действительных значений q. Показатель Флоке ν определен ниже, как и в [20.36], следующим образом:

в решениях, соответствующих a_r: $\nu = r$;

в решениях, соответствующих b_r: $\nu = -r$.

Для функций, определенных формулами 20.6.7 — 20.6.10, имеем

20.9.1.

$$\left.\begin{array}{l} Mc_r^{(3)}(z, q) \\ (-1)^r Ms_r^{(3)}(z,\ q) \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \frac{e^{i(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\, z - \nu\pi/2 - \pi/4)}}{\pi^{1/2} q^{1/4} (\mathrm{ch}\, z - \sigma)^{1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m}{[-4i\sqrt{q}(\mathrm{ch}\, z - \sigma)]^m}.$$

Коэффициенты D_m можно получить из следующих рекуррентных соотношений, положив $D_{-1} = D_{-2} = 0$, $D_0 = 1$:

20.9.2.

$$(m+1)\, D_{m+1} + \left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(m + \frac{1}{4}\right) 8i\sqrt{q}\,\sigma + 2q - a\right] D_m +$$

$$+ \left(m - \frac{1}{2}\right)[16q(1 - \sigma^2) - 8i\sqrt{q}\,\sigma m]\, D_{m-1} +$$

$$+ 4q\,(2m - 3)\,(2m - 1)\,(1 - \sigma^2)\, D_{m-2} = 0.$$

20.9.3. $\left.\begin{array}{l} Mc_r^{(4)}(z,\ q) \\ (-1)^r Ms_r^{(4)}(z,q) \end{array}\right\}\sim$

$$\sim \frac{e^{-i(2\sqrt{q}\ \mathrm{ch}\ z - \nu\pi/2 - \pi/4)}}{\pi^{1/2}q^{1/4}(\mathrm{ch}\ z - \sigma)^{1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{[4i\sqrt{q}(\mathrm{ch}\ z - \sigma)]^m}.$$

Коэффициенты d_m можно получить из следующих рекуррентных соотношений, положив $d_{-1} = d_{-2} = 0$, $d_0 = 1$:

$$\textbf{20.9.4.}\ (m+1)\,d_{m+1} + \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(m+\frac{1}{4}\right)8i\sqrt{q}\sigma + 2q - a\right]d_m + \left(m-\frac{1}{2}\right)[16q(1-\sigma^2) + 8i\sqrt{q}\,\sigma m]\,d_{m-1} + 4q(2m-3)(2m-1)(1-\sigma^2)\,d_{m-2} = 0.$$

В последних формулах

$$-2\pi < \arg\sqrt{q}\ \mathrm{ch}\ z < \pi,$$
$$|\mathrm{ch}\ z - \sigma| > |\sigma \pm 1|,\ \ \mathrm{Re}\, z > 0,$$

σ произвольно. Если $\sigma^2 = 1$, то 20.9.2 и 20.9.4 становятся трехчленными рекуррентными соотношениями.

Формулы 20.9.1 и 20.9.3 справедливы для произвольных a и q при условии, что ν известно; они дают функции, кратные функциям 20.4.12, нормированные так, что они стремятся к соответствующим функциям Ханкеля $H_\nu^{(1)}(\sqrt{q}e^z)$ и $H_\nu^{(2)}(\sqrt{q}\,e^z)$ при $z \to \infty$ (см. [20.36], раздел 2.63). Формулы рекомендуется использовать, если $|\mathrm{ch}\,z|$ — большое, а q — не слишком большое; так, если $\sigma = -1$, то главная часть абсолютной величины отношения двух последовательных членов разложения есть

$$\left|\left(\frac{\sqrt{q}}{m} + \frac{m}{4\sqrt{q}} + 2\right) \Big/ (\mathrm{ch}\ z + 1)\right|.$$

Если a, q, z, ν действительны, то действительной и мнимой компонентами функции $Mc_r^{(3)}(z,q)$ являются $Mc_r^{(1)}(z,\ q)$ и $Mc_r^{(2)}(z,q)$ соответственно; аналогично для функции $Ms_r^{(3)}(z,q)$. Если параметры комплексны, то

$$\textbf{20.9.5.}\ Mc_r^{(1)}(z,\ q) = \frac{1}{2}\,[Mc_r^{(3)}(z,\ q) + Mc_r^{(4)}(z,\ q)],$$

$$\textbf{20.9.6.}\ Mc_r^{(2)}(z,\ q) = -\frac{i}{2}\,[Mc_r^{(3)}(z,\ q) - Mc_r^{(4)}(z,\ q)].$$

(См. также 20.6.16.)

Заменяя в этих соотношениях c на s, получим соответствующие соотношения для функций $Ms_r^{(j)}(z,\ q)$.

Ниже даются формулы, в которые параметр a не входит явно.

Разложения Гольдштейна

$$\textbf{20.9.7.}\ Mc_r^{(3)}(z,q) \sim iMs_{r+1}^{(3)}(z,\ q) \approx [F_0(z) - iF_1(z)]\,e^{i\varphi}/(\pi^{1/2}q^{1/2}(\mathrm{ch}\ z)^{1/2}),$$

где

$$\textbf{20.9.8.}\ \varphi = 2\sqrt{q}\ \mathrm{sh}\ z - \frac{1}{2}(2r+1)\ \mathrm{arctg\ sh}\ z \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0,\ q \gg 1).$$

$$\textbf{20.9.9.}\ F_0(z) \sim 1 + \frac{w}{8\sqrt{q}\,\mathrm{ch}^2 z} + \frac{1}{2048q} \times \left[\frac{w^4 + 86w^2 + 105}{\mathrm{ch}^4 z} - \frac{w^4 + 22w^2 + 57}{\mathrm{ch}^2 z}\right] + \frac{1}{16384q^{3/2}} \times \left[\frac{-(w^5 + 14w^3 + 33w)}{\mathrm{ch}^2 z} - \frac{(2w^5 + 124w^3 + 1122w)}{\mathrm{ch}^4 z} + \frac{3w^5 + 290w^3 + 1627w}{\mathrm{ch}^6 z}\right] + \ldots$$

$$\textbf{20.9.10.}\ F_1(z) = \frac{\mathrm{sh}\ z}{\mathrm{ch}^2 z}\left[\frac{w^2+3}{32\sqrt{q}} + \frac{1}{512q} \times \left(w^3 + 3w + \frac{4w^3 + 44w}{\mathrm{ch}^2 z}\right) + \frac{1}{16384q^{3/2}} \times \left\{5w^4 + 34w^2 + 9 - \frac{(w^6 - 47w^4 + 667w^2 + 2835)}{12\ \mathrm{ch}^2 z} + \frac{(w^6 + 505w^4 + 12139w^2 + 10395)}{12\ \mathrm{ch}^4 z}\right\} + \ldots\right],$$

где $w = 2r + 1$.

Более подробное изложение см. в [20.18]; там дается также член $q^{-5/2}$; поправка к нему дана в [20.58].

Разложение 20.9.7 рекомендуется использовать, когда q велико и z не попадает в окрестность нуля. При $z = 0$ даже порядок величины $Mc_r^2(0, q)$ не может быть получен из этого разложения. Его можно с успехом использовать при $z = ix$, когда q велико и $|\cos x| \gg 0$; оно не годится при $x = \pi/2$. Если q и x действительны, то получим

$$\textbf{20.9.11.}\ ce_r(x,\ q) \sim \frac{ce_r(0,\ q)2^{r-1/2}}{F_0(0)} \times \{W_1[P_0(x) - P_1(x)] + W_2[P_0(x) + P_1(x)]\},$$

$$\textbf{20.9.12.}\ se_{r+1}(x,\ q) \sim se'_{r+1}(0,\ q)\ \tau_{r+1} \times \{W_1[P_0(x) - P_1(x)] - W_2[P_0(x) + P_1(x)]\}.$$

В последних формулах $P_0(x)$ и $P_1(x)$ получаются из $F_0(z)$ и $F_1(z)$ в 20.9.9—20.9.10 путем замены $\mathrm{ch}\,z$ на $\cos x$ и $\mathrm{sh}\,z$ на $\sin x$: $P_0(x) = F_0(ix)$, $P_1(x) = -iF_1(ix)$; W_1, W_2 и τ определяются формулами 20.9.13 и 20.9.14.

$$\textbf{20.9.13.}\ W_1 = e^{2\sqrt{q}\sin x}\left[\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^{2r+1} \Big/ (\cos x)^{r+1},$$

$$W_2 = e^{-2\sqrt{q}\sin x}\left[\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^{2r+1} \Big/ (\cos x)^{r+1}.$$

$$\textbf{20.9.14.}\ \tau_{r+1} \sim 2^{r-1/2} \Big/ \left[2\sqrt{q} - \frac{w}{4} - \frac{2w^2+3}{64\sqrt{q}} - \frac{7w^3 + 47w}{1024q} - \ldots\right].$$

Разложения, относящиеся к $ce_r(0, q)$ и $se'_r(0, q)$, даются формулами 20.9.23—20.9.24. Когда $|\cos x| > \sqrt{4r+2}/q^{1/2}$, то применяются формулы 20.9.11—20.9.12. Аппроксимации ухудшаются, когда r увеличивается.

Разложения по функциям параболического цилиндра

(Эти разложения рекомендуются для углов, близких к $\pi/2$, и для больших значений q, особенно когда $|\cos x| < 2^{1/4}/q^{1/8}$); см. [20.44—20.46]).

$$\textbf{20.9.15.}\ ce_r(x,\ q) \sim C_r[Z_0(\alpha) + Z_1(\alpha)].$$

$$\textbf{20.9.16.}\ se_{r+1}(x,\ q) \sim S_r[Z_0(\alpha) - Z_1(\alpha)]\sin x, \qquad \alpha = 2q^{1/4}\cos x.$$

Пусть $D_k = D_k(\alpha) = (-1)^k e^{\alpha^2/4}\dfrac{d^k}{d\alpha^k}e^{-\alpha^2/2}.$

Тогда

20.9.17. $$Z_0(\alpha)\sim D_r+\frac{1}{4q^{1/2}}\left[-\frac{D_{r+4}}{16}+\frac{3}{2}\binom{r}{4}D_{r-4}\right]+\frac{1}{16q}\left[\frac{D_{r+8}}{512}-\frac{(r+2)D_{r+4}}{16}+\frac{3}{2}(r-1)\binom{r}{4}D_{r-4}+\frac{315}{4}\binom{r}{8}D_{r-8}\right]+\ldots,$$

20.9.18. $$Z_1(\alpha)\sim\frac{1}{4q^{1/2}}\left[-\frac{1}{4}D_{r+2}-\frac{r(r-1)}{4}D_{r-2}\right]+\frac{1}{16q}\left[\frac{D_{r+6}}{64}+\frac{(r^2-25r-36)}{64}D_{r+2}-\frac{r(r-1)(-r^2-27r+10)}{64}D_{r-2}-\frac{45}{4}\binom{r}{6}D_{r-6}+\ldots\right].$$

20.9.19. $$C_r\sim\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4}q^{1/8}/(r!)^{1/2}\left[1+\frac{2r+1}{8q^{1/2}}+\frac{r^4+2r^3+263r^2+262r+108}{2048q}+\frac{f_1}{16384q^{3/2}}+\ldots\right]^{-1/2},$$

$$f_1=6r^5+15r^4+1280r^3+1905r^2+1778r+572;$$

20.9.20. $$S_r\sim\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4}q^{1/8}/(r!)^{1/2}\left[1-\frac{2r+1}{8q^{1/2}}+\frac{r^4+2r^3-121r^2-122r-84}{2048q}+\frac{f_2}{16384q^{3/2}}+\ldots\right]^{-1/2},$$

$$f_2=2r^5+5r^4-416r^3-629r^2-1162r-476.$$

Следует заметить, что 20.9.15 можно также рассматривать как приближение для $se_{r+1}(x,q)$, но 20.9.16 может дать несколько лучшие результаты (см. [20.4]).

Явные представления функций порядков 0 и 1

(до членов порядка $q^{-3/2}$; q — большие)

20.9.21. Для $r=0$:

$$Z_0\sim D_0-\frac{D_4}{64\sqrt{q}}+\frac{1}{16q}\left(-\frac{D_4}{8}+\frac{D_8}{512}\right)+\frac{1}{64q^{3/2}}\left(-\frac{99D_4}{256}-\frac{3D_8}{256}-\frac{D_{12}}{24576}\right)+\ldots,$$

$$Z_1\sim\frac{-D_2}{16\sqrt{q}}+\frac{1}{16q}\left(-\frac{9D_2}{16}+\frac{D_6}{64}\right)+\frac{1}{64q^{3/2}}\left(-\frac{61D_2}{32}+\frac{25D_6}{256}-\frac{5D_{10}}{10240}\right)+\ldots$$

20.9.22. Для $r=1$:

$$Z_0\sim D_1-\frac{D_5}{64\sqrt{q}}+\frac{1}{16q}\left(-\frac{3D_5}{16}+\frac{D_9}{512}\right)+\frac{1}{64q^{3/2}}\left(-\frac{207D_5}{256}+\frac{D_9}{64}-\frac{D_{13}}{24576}\right)+\ldots,$$

$$Z_1\sim\frac{-D_3}{16\sqrt{q}}+\frac{1}{16q}\left(-\frac{15D_3}{16}+\frac{D_7}{64}\right)+\frac{1}{64q^{3/2}}\left(-\frac{153D_3}{32}+\frac{35D_7}{256}-\frac{D_{11}}{2048}\right)+\ldots$$

Формулы, содержащие функции $ce_r(0,q)$ и $se_r'(0,q)$

20.9.23. $$\frac{ce_0(0,\,q)}{ce_0\left(\frac{\pi}{2},\,q\right)}\sim 2\sqrt{2}\,e^{-2\sqrt{q}}\left(1+\frac{1}{16\sqrt{q}}+\frac{9}{256q}+\ldots\right),$$

$$\frac{ce_2(0,\,q)}{ce_2\left(\frac{\pi}{2},q\right)}\sim-32q\sqrt{2}\,e^{-2\sqrt{q}}\left(1-\frac{1}{16\sqrt{q}}+\frac{29}{128q}+\ldots\right),$$

$$\frac{ce_1(0,\,q)}{ce_1'\left(\frac{\pi}{2},q\right)}\sim 4\sqrt{2}\,e^{-2\sqrt{q}}\left(1+\frac{3}{16\sqrt{q}}+\frac{45}{256q}+\ldots\right),$$

$$\frac{ce_3(0,\,q)}{ce_3'\left(\frac{\pi}{2},q\right)}\sim\frac{64}{3}q\sqrt{2}\,e^{-2\sqrt{q}}\left(1-\frac{3}{16\sqrt{q}}+\frac{47}{128q}+\ldots\right).$$

20.9.24. $$\frac{se_1'(0,\,q)}{se_1\left(\frac{\pi}{2},q\right)}\sim 4q\sqrt{2}\,e^{-2\sqrt{q}}\left(1-\frac{3}{16\sqrt{q}}-\frac{11}{256q}+\ldots\right),$$

$$\frac{se_3'(0,\,q)}{se_3\left(\frac{\pi}{2},q\right)}\sim-64q\sqrt{2}\,e^{-2\sqrt{q}}\left(1-\frac{21}{16\sqrt{q}}-\frac{17}{128q}+\ldots\right),$$

$$\frac{se_2'(0,\,q)}{se_2'\left(\frac{\pi}{2},q\right)}\sim-8q\sqrt{2}\,e^{-2\sqrt{q}}\left(1-\frac{9}{16\sqrt{q}}-\frac{39}{256q}+\ldots\right),$$

$$\frac{se_4'(0,\,q)}{se_4'\left(\frac{\pi}{2},q\right)}\sim\frac{128}{3}q\sqrt{2}\,e^{-2\sqrt{q}}\left(1-\frac{31}{16\sqrt{q}}-\frac{15}{128q}+\ldots\right).$$

Трудности получения этих отношений значительно возрастают с ростом порядка функций. Один из методов получения значений функций в начале координат состоит в следующем. Из разложения 20.9.15 вычисляют $ce_r(x,q)$ для такого значения x, для которого справедливо также 20.9.11. Затем решают уравнение 20.9.11 относительно $ce_r(0,q)$. Аналогично можно получить $se_r'(0,q)$.

Лангером [20.25] были получены другие асимптотические разложения, справедливые в различных областях комплексной z-плоскости, для действительных a и q. Однако не всегда легко так определить линейную комбинацию решений Лангера, чтобы она совпадала с данными здесь решениями.

20.10. РАЗЛИЧНЫЕ

	Данная книга	[20.58]	[20.59] Стреттон—Морс и др.
Параметры в 20.1.1	a q a_r b_r	$b = a + 2q$ $s = 4q$ $be_r = a_r + 2q$ $bo_r = b_r + 2q$	b $c = 2\sqrt{q}$ $b_r = a_r + 2q$ $b'_r = b_r + 2q$
Периодические решения уравнения 20.1.1 Четные Нечетные	$ce_r(z, q)$ $se_r(z, q)$	$A^r Se_r(s, x)$ $B^r So_r(s, x)$	$A^r Se_r^{(1)}(c, \cos x)$ $B^r So_r^{(1)}(c, \cos x)$
Коэффициенты периодических решений уравнения 20.1.1 Четные Нечетные	$A_m^r(q)$ $B_m^r(q)$	$A^r De_m^r(s)$ $B^r Do_m^r(s)$	$A^r D_m^r$ $B^r F_m^r$
$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y^2\,dx$ y — стандартное решение уравнения 20.1.1	1	$(A^r)^{-2}$ или $(B^r)^{-2}$	$(A^r)^{-2}$ или $(B^r)^{-2}$
Решения Флоке 20.3.8	$F_\nu(z)$		
Характеристический показатель	ν	$\mu = i\nu$	
Нормировка решений Флоке	**Не уточнено**		
Решение модифицированного уравнения 20.1.2	$Ce_r(z, q)$ $Se_r(z, q)$ $Mc_r^{(1)}(z, q)$ $Ms_r^{(1)}(z, q)$ $Mc_r^{(2)}(z, q)$ $Ms_r^{(2)}(z, q)$	$Age_{,r}(s)\ Je_r(s, q)$ $Bgo_{,r}(s)\ Jo_r(s, q)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Je_r(s, z)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Jo_r(s, z)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Ne_r(s, z)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,No_r(s, z)$	$Age_{,r}(s)\ Je_r(c, \operatorname{ch} x)$ $Bgo_{,r}(s)\ Jo_r(c, \operatorname{ch} x)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Je_r(c, \operatorname{ch} z)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Jo_r(c, \operatorname{ch} z)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Ne_r(c, \operatorname{ch} z)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,No_r(c, \operatorname{ch} z)$
Множители связи	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big/ Mc_r^{(1)}(0, q)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big/ \frac{d}{dz}[Ms_r^{(1)}(z, q)]_{z=0}$ $-Mc_r^{(2)}(0, q)/Mc_r^{(1)}(0, q)$ $\left[\dfrac{\frac{d}{dz}Ms_r^{(2)}(z, q)}{\frac{d}{dz}Ms_r^{(1)}(z, q)}\right]_{z=0}$	$g_{e,r}(s)$ $g_{o,r}(s)$ $f_{e,r}(s)$ $f_{o,r}(s)$	$\sqrt{2\pi}\,\lambda_r^{(e)}$ $\sqrt{2\pi}\,\lambda_r^{(o)}$ $-\frac{2}{\pi}\frac{K_1'}{K_1}$ $\frac{2}{\pi}\frac{K_3'}{K_3}$

Замечания 1. Нормирующие множители A^r и B^r протабулированы в [20.58] вместе с коэффициентами Фурье.
2. Множители p_r и s_r определены в [20.30], приложение 1, гл. 3, уравнения 3, 4, 5, 6.
3. См. [20.59], гл. (5.3) и (5.5). В уравнении (316), гл. (5.5), первый член должен быть со знаком —.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

[20.36] Майкснер и Шефке	[20.30] Мак-Лахлан	[20.15] Бейтмен	Примечания
λ h^2 a_r b_r	a q a_r b_r	h θ a_r b_r	
$ce_r(z, h^2)$ $se_r(z, h^2)$	$ce_r(z, q)$ $se_r(z, q)$	$ce_r(z, \theta)$ $se_r(z, \theta)$	См. замечание 1
A_m^r B_m^r	A_m^r B_m^r	A_m^r B_m^r	
1	1	1	См. замечание 1
$me_\nu(z, h^2)$	$\varphi(z)$		
ν	$\mu = i\nu$	$\mu = i\nu$	
$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi me_\nu(z, h^2) \times$ $\times me_{-\nu}(z, h^2)\, dz = 1$			
$Ce_r(z, q)$ $Se_r(z, q)$ $Mc_r^{(1)}(z, h)$ $Ms_r^{(1)}(z, h)$ $Mc^{(2)}(z, h)$ $Ms_r^{(2)}(z, h)$	$Ce_r(z, q)$ $Se_r(z, q)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Ce_r(z, q)/Ag_{e,r}(q)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Se_r(z, q)/Bg_{o,r}(q)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Fey_r(z, q)/Ag_{e,r}(q)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Gey_r(z, q)/Bg_{o,r}(q)$	$Ce_r(z, \theta)$ $Se_r(z, \theta)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Ce_r(z, \theta)/Ag_{e,r}(q)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Se_r(z, \theta)/Bg_{o,r}(q)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Fey_r(z, \theta)/Ag_{e,r}(q)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Gey_r(z, \theta)/Bg_{o,r}(q)$	
$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,/Mc_r^{(1)}(0, h)$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big/\frac{d}{dz}[Ms_r^{(1)}(z, h)]_{z=0}$	$(-1)^r p_r \sqrt{\frac{2}{\pi}}/A$ $(-1)^r s_r \sqrt{\frac{2}{\pi}}/B$	Как в [20.30]	См. замечание 2
$-Mc_r^{(2)}(0, h)/Mc_r^{(1)}(0, h)$	$\dfrac{-Fey_r(0, q)}{Ce_r(0, q)}$	Как в [20.30]	См. замечание 3
Как в этой книге	$\left[\dfrac{\frac{d}{dz}Gey_r(z, q)}{\frac{d}{dz}Se_r(z, q)}\right]_{z=0}$	Как в [20.30]	

Таблица 20.1. Собственные значения, множители связи, некоторые частные значения

Четные решения

r	q	a_r	$ce_r(0, q)$	$ce_r(\frac{1}{2}\pi, q)$	$(4q)^{\frac{1}{2}r} g_{e,r}(q)$	$(4q)^r f_{e,r}(q)$
0	0	0.00000 000	(-1)7.07106 781	(-1) 7.07106 78	(-1)7.97884 56	∞
	5	− 5.80004 602	(-2)4.48001 817	1.33484 87	1.97009 00	(− 3)1.86132 97
	10	− 13.93697 996	(-3)7.62651 757	1.46866 05	2.40237 95	(− 5)5.54257 96
	15	− 22.51303 776	(-3)1.93250 832	1.55010 82	2.68433 53	(− 6)3.59660 89
	20	− 31.31339 007	(-4)6.03743 829	1.60989 09	2.90011 25	(− 7)3.53093 01
	25	− 40.25677 955	(-4)2.15863 018	1.65751 03	3.07743 91	(− 8)4.53098 68
2	0	4.00000 000	1.00000 000	-1.00000 00	(1)1.27661 53	(1)8.14873 31
	5	7.44910 974	(-1)7.35294 308	(-1)-7.24488 15	(1)2.63509 89	(2)1.68665 79
	10	7.71736 985	(-1)2.45888 349	(-1)-9.26759 26	(1)7.22275 58	(1)6.89192 56
	15	5.07798 320	(-2)7.87928 278	-1.01996 62	(2)1.32067 71	(1)1.73770 48
	20	+ 1.15428 288	(-2)2.86489 431	-1.07529 32	(2)1.98201 14	4.29953 32
	25	− 3.52216 473	(-2)1.15128 663	-1.11627 90	(2)2.69191 26	1.11858 69
10	0	100.00000 000	1.00000 000	-1.00000 00	(12)1.51800 43	(23)2.30433 72
	5	100.12636 922	1.02599 503	(-1)-9.75347 49	(12)1.48332 54	(23)2.31909 77
	10	100.50677 002	1.05381 599	(-1)-9.51645 32	(12)1.45530 39	(23)2.36418 54
	15	101.14520 345	1.08410 631	(-1)-9.28548 06	(12)1.43299 34	(23)2.44213 04
	20	102.04891 602	1.11778 863	(-1)-9.05710 78	(12)1.41537 24	(23)2.55760 55
	25	103.23020 480	1.15623 992	(-1)-8.82691 92	(12)1.40118 52	(23)2.71854 15

r	q	a_r	$ce_r(0, q)$	$ce_r'(\frac{1}{2}\pi, q)$	$(4q)^{\frac{1}{2}r} g_{e,r}(q)$	$(4q)^r f_{e,r}(q)$
1	0	1.00000 000	1.00000 000	-1.00000 00	1.59576 91	2.54647 91
	5	+ 1.85818 754	(-1)2.56542 879	-3.46904 21	7.26039 84	1.02263 46
	10	− 2.39914 240	(-2)5.35987 478	-4.85043 83	(1)1.35943 49	(− 2)9.72660 12
	15	− 8.10110 513	(-2)1.50400 665	-5.76420 64	(1)1.91348 51	(− 2)1.19739 95
	20	− 14.49130 142	(-3)5.05181 376	-6.49056 58	(1)2.42144 01	(− 3)1.84066 20
	25	− 21.31489 969	(-3)1.91105 151	-7.10674 15	(1)2.89856 94	(− 4)3.33747 55
5	0	25.00000 000	1.00000 000	-5.00000 00	(4)4.90220 27	(8)4.80631 83
	5	25.54997 175	1.12480 725	-5.39248 61	(4)4.43075 22	(8)5.11270 71
	10	27.70376 873	1.25801 994	-5.32127 65	(4)4.19827 66	(8)6.83327 77
	15	31.95782 125	1.19343 223	-5.11914 99	(4)5.25017 04	(9)1.18373 72
	20	36.64498 973	(-1)9.36575 531	-5.77867 52	(4)8.96243 97	(9)1.85341 57
	25	40.05019 099	(-1)6.10694 310	-7.05988 45	(5)1.71582 55	(9)2.09679 12
15	0	225.00000 000	1.00000 000	(1) 1.50000 00	(20)5.60156 72	(40)2.09183 70
	5	225.05581 248	1.01129 373	(1) 1.51636 57	(20)5.54349 84	(40)2.09575 00
	10	225.22335 698	1.02287 828	(1) 1.53198 84	(20)5.49405 67	(40)2.10754 45
	15	225.50295 624	1.03479 365	(1) 1.54687 43	(20)5.45287 72	(40)2.12738 84
	20	225.89515 341	1.04708 434	(1) 1.56102 79	(20)5.41964 26	(40)2.15556 69
	25	226.40072 004	1.05980 044	(1) 1.57444 72	(20)5.39407 68	(40)2.19249 18

Взято из [20.58].

$$a_r + 2q - (4r+2)\sqrt{q}$$

$q^{-\frac{1}{2}} \backslash r$	0	1	2	5	10	15	$\langle q \rangle$
0.16	-0.25532 994	-1.30027 212	-3.45639 483	-17.84809 551	-76.04295 314	− 80.93485 048	39
0.12	-0.25393 098	-1.28658 972	-3.39777 782	-16.92019 225	-76.84607 855	-141.64507 841	69
0.08	-0.25257 851	-1.27371 191	-3.34441 938	-16.25305 645	-63.58155 264	-162.30500 052	156
0.04	-0.25126 918	-1.26154 161	-3.29538 745	-15.70968 373	-58.63500 546	-132.08298 271	625
0.00	-0.25000 000	-1.25000 000	-3.25000 000	-15.25000 000	-55.25000 000	-120.25000 000	∞

Для $g_{e,r}$ и $f_{e,r}$ см. 20.8.12.

$\langle q \rangle$ — ближайшее к q целое число.

Взято из [20.53].

Таблица 20.1. *Собственные значения, множители связи, некоторые частные значения*

Нечетные решения

r	q	b_r	$se'_r(0, q)$	$se'_r(\frac{1}{2}\pi, q)$	$(4q)^{\frac{1}{2}r} g_{o,r}(q)$	$(4q)^r f_{o,r}(q)$
2	0	4.00000 000	2.00000 00	−2.00000 00	6.38307 65	(1)8.14873 31
	5	+ 2.09946 045	(−1)7.33166 22	−3.64051 79	(1)1.24474 88	(1)2.24948 08
	10	− 2.38215 824	(−1)2.48822 84	−4.86342 21	(1)1.86133 36	3.91049 85
	15	− 8.09934 680	(−2)9.18197 14	−5.76557 38	(1)2.42888 57	(−1)7.18762 28
	20	− 14.49106 325	(−2)3.70277 78	−6.49075 22	(1)2.95502 89	(−1)1.47260 95
	25	− 21.31486 062	(−2)1.60562 17	−7.10677 19	(1)3.44997 83	(−2)3.33750 27
10	0	100.00000 000	(1)1.00000 00	(1)−1.00000 00	(11)1.51800 43	(23)2.30433 72
	5	100.12636 922	9.73417 32	(1)−1.02396 46	(11)1.56344 50	(23)2.31909 77
	10	100.50676 946	9.44040 54	(1)−1.04539 48	(11)1.62453 03	(23)2.36418 52
	15	101.14517 229	9.11575 13	(1)−1.06429 00	(11)1.70421 18	(23)2.44211 78
	20	102.04839 286	8.75554 51	(1)−1.08057 24	(11)1.80695 19	(23)2.55740 30
	25	103.22568 004	8.35267 84	(1)−1.09413 54	(11)1.93959 86	(23)2.71681 11

r	q	b_r	$se'_r(0, q)$	$se_r(\frac{1}{2}\pi, q)$	$(4q)^{\frac{1}{2}r} g_{o,r}(q)$	$(4q)^r f_{o,r}(q)$
1	0	+ 1.00000 000	1.00000 00	1.00000 00	1.59576 91	2.54647 91
	5	− 5.79008 060	(−1)1.74675 40	1.33743 39	2.27041 76	(−2)3.74062 82
	10	− 13.93655 248	(−2)4.40225 66	1.46875 57	2.63262 99	(−3)2.21737 88
	15	− 22.51300 350	(−2)1.39251 35	1.55011 51	2.88561 87	(−4)2.15798 83
	20	− 31.31338 617	(−3)5.07788 49	1.60989 16	3.08411 21	(−4)2.82474 71
	25	− 40.25677 898	(−3)2.04435 94	1.65751 04	3.24945 50	(−6)4.53098 74
5	0	25.00000 000	5.00000 00	1.00000 00	(3)9.80440 55	(8)4.80631 83
	5	25.51081 605	4.33957 00	(−1) 9.06077 93	(4)1.14793 21	(8)5.05257 20
	10	26.76642 636	3.40722 68	(−1) 8.46038 43	(4)1.52179 77	(8)5.46799 57
	15	27.96788 060	2.41166 65	(−1) 8.37949 34	(4)2.20680 20	(8)5.27524 17
	20	28.46822 133	1.56889 69	(−1) 8.63543 12	(4)3.27551 12	(8)4.26215 66
	25	28.06276 590	(−1)9.64071 62	(−1) 8.99268 33	(4)4.76476 62	(8)2.94147 89
15	0	225.00000 000	(1)1.50000 00	−1.00000 00	(19)3.73437 81	(40)2.09183 70
	5	225.05581 248	(1)1.48287 89	(−1)−9.88960 70	(19)3.78055 49	(40)2.09575 00
	10	225.22335 698	(1)1.46498 60	(−1)−9.78142 35	(19)3.83604 43	(40)2.10754 45
	15	225.50295 624	(1)1.44630 01	(−1)−9.67513 70	(19)3.90140 52	(40)2.12738 84
	20	225.89515 341	(1)1.42679 46	(−1)−9.57045 25	(19)3.97732 29	(40)2.15556 69
	25	226.40072 004	(1)1.40643 73	(−1)−9.46708 70	(19)4.06462 83	(40)2.19249 18

$$b_r + 2q - (4r-2)\sqrt{q}$$

$q^{-\frac{1}{2}} \backslash r$	1	2	5	10	15	$\langle q \rangle$
0.16	−0.25532 994	−1.30027 164	−11.53046 855	−51.32546 875	− 55.93485 112	39
0.12	−0.25393 098	−1.28658 971	−11.12574 983	−56.10964 961	−108.31442 060	69
0.08	−0.25257 851	−1.27371 191	−10.78895 146	−51.15347 975	−132.59692 424	156
0.04	−0.25126 918	−1.26154 161	−10.50135 748	−47.72149 533	−114.76358 461	625
0.00	−0.25000 000	−1.25000 000	−10.25000 000	−45.25000 000	−105.25000 000	∞

Для $g_{o,r}$ и $f_{o,r}$ см. 20.8.12.
$\langle q \rangle$ — ближайшее к q целое число.

Таблица 20.2. Коэффициенты A_m и B_m

A_m

$q=5$

$m \backslash r$	0	2	10
0	+0.54061 2446	+0.43873 7166	+0.00000 1679
2	−0.62711 5414	+0.65364 0260	+0.00003 3619
4	+0.14792 7090	−0.42657 8935	+0.00064 2987
6	−0.01784 8061	+0.07588 5673	+0.01078 4807
8	+0.00128 2863	−0.00674 1769	+0.13767 5121
10	−0.00006 0723	+0.00036 4942	+0.98395 5640
12	+0.00000 2028	−0.00001 3376	−0.11280 6780
14	−0.00000 0050	+0.00000 0355	+0.00589 2962
16	+0.00000 0001	−0.00000 0007	−0.00018 9166
18			+0.00000 4226
20			−0.00000 0071
22			+0.00000 0001

$m \backslash r$	1	5	15
1	+0.76246 3686	+0.07768 5798	0.00000 0000
3	−0.63159 6319	+0.30375 1030	+0.00000 0002
5	+0.13968 4806	+0.92772 8396	+0.00000 0106
7	−0.01491 5596	−0.20170 6148	+0.00000 4227
9	+0.00094 4842	+0.01827 4579	+0.00014 8749
11	−0.00003 9702	−0.00095 9038	+0.00428 1393
13	+0.00000 1189	+0.00003 3457	+0.08895 2014
15	−0.00000 0027	−0.00000 0839	+0.99297 4092
17	+0.00000 0001	+0.00000 0016	−0.07786 7946
19			+0.00286 6409
21			−0.00006 6394
23			+0.00000 1092
25			−0.00000 0014

$q=25$

$m \backslash r$	0	2	10
0	+0.42974 1038	+0.33086 5777	+0.00502 6361
2	−0.69199 9610	−0.04661 4551	+0.02075 4891
4	+0.36554 4890	−0.64770 5862	+0.07232 7761
6	−0.13057 5523	+0.55239 9372	+0.23161 1726
8	+0.03274 5863	−0.22557 4897	+0.55052 4391
10	−0.00598 3606	+0.05685 2843	+0.63227 5658
12	+0.00082 3792	−0.00984 6277	−0.46882 9197
14	−0.00008 7961	+0.00124 8919	+0.13228 7155
16	+0.00000 7466	−0.00012 1205	−0.02206 0893
18	−0.00000 0514	+0.00000 9296	+0.00252 2374
20	+0.00000 0029	−0.00000 0578	−0.00021 3672
22	−0.00000 0001	+0.00000 0030	+0.00001 4078
24		−0.00000 0001	−0.00000 0746
26			+0.00000 0032
28			−0.00000 0001

$m \backslash r$	1	5	15
1	+0.39125 2265	+0.65659 0398	+0.00000 4658
3	−0.74048 2467	+0.36900 8820	+0.00003 7337
5	+0.50665 3803	−0.19827 8625	+0.00032 0026
7	−0.19814 2336	−0.48837 4067	+0.00254 0806
9	+0.05064 0536	+0.37311 2810	+0.01770 9603
11	−0.00910 8920	−0.12278 1866	+0.10045 8755
13	+0.00121 2864	+0.02445 3933	+0.40582 7402
15	−0.00012 4121	−0.00335 1335	+0.83133 2650
17	+0.00001 0053	+0.00033 9214	−0.35924 8831
19	−0.00000 0660	−0.00002 6552	+0.06821 6074
21	+0.00000 0036	+0.00000 1661	−0.00802 4550
23	−0.00000 0002	−0.00000 0085	+0.00066 6432
25		+0.00000 0004	−0.00004 1930
27			+0.00000 2090
29			−0.00000 0085
31			+0.00000 0003

B_m

$q=5$

$m \backslash r$	2	10
2	+0.93342 9442	+0.00003 3444
4	−0.35480 3915	+0.00064 2976
6	+0.05296 3730	+0.01078 4807
8	−0.00429 5885	+0.13767 5120
10	+0.00021 9797	+0.98395 5640
12	−0.00000 7752	−0.11280 6780
14	+0.00000 0200	+0.00589 2962
16	−0.00000 0004	−0.00018 9166
18		+0.00000 4227
20		−0.00000 0070
22		+0.00000 0001

$m \backslash r$	1	5	15
1	+0.94001 9024	+0.05038 2462	0.00000 0000
3	−0.33654 1963	+0.29736 5513	+0.00000 0002
5	+0.05547 7529	+0.93156 6997	+0.00000 0106
7	−0.00508 9553	−0.20219 3638	+0.00000 4227
9	+0.00029 3879	+0.01830 5721	+0.00014 8749
11	−0.00001 1602	−0.00096 0277	+0.00428 1392
13	+0.00000 0332	+0.00003 3493	+0.08895 2014
15	−0.00000 0007	−0.00000 0842	+0.99297 4092
17		+0.00000 0017	−0.07786 7946
19			+0.00286 6409
21			−0.00006 6394
23			+0.00000 1093
25			−0.00000 0013

$q=25$

$m \backslash r$	2	10
2	+0.65743 9912	+0.01800 3596
4	−0.66571 9990	+0.07145 6762
6	+0.33621 0033	+0.23131 0990
8	−0.10507 3258	+0.55054 4783
10	+0.02236 2380	+0.63250 8750
12	−0.00344 2304	−0.46893 3949
14	+0.00040 0182	+0.13230 9765
16	−0.00003 6315	−0.02206 3990
18	+0.00000 2640	+0.00252 2676
20	−0.00000 0157	−0.00021 3694
22	+0.00000 0008	+0.00001 4079
24		−0.00000 0746
26		+0.00000 0033

$m \backslash r$	1	5	15
1	+0.81398 3846	+0.30117 4196	+0.00000 3717
3	−0.52931 0219	+0.62719 8468	+0.00003 7227
5	+0.22890 0813	+0.17707 1306	+0.00032 0013
7	−0.06818 2972	−0.60550 5349	+0.00254 0804
9	+0.01453 0886	+0.33003 2984	+0.01770 9603
11	−0.00229 5765	−0.09333 5984	+0.10045 8755
13	+0.00027 7422	+0.01694 2545	+0.40582 7403
15	−0.00002 6336	−0.00217 7430	+0.83133 2650
17	+0.00000 2009	+0.00021 0135	−0.35924 8830
19	−0.00000 0126	−0.00001 5851	+0.06821 6074
21	+0.00000 0007	+0.00000 0962	−0.00802 4551
23		−0.00000 0048	+0.00066 6432
25		+0.00000 0002	−0.00004 1930
27			+0.00000 2090
29			−0.00000 0086
31			+0.00000 0003

Для A_m и B_m см. 20.2.3—20.2.11.
Взято из [20.58].

ЛИТЕРАТУРА

20.1. Bickley W. G. The tabulation of Mathieu functions. — Math. Tables Aids Comp., 1945, **1**, p. 409—419.

20.2. Bickley W. G., McLachlan N. W. Mathieu functions of integral order and their tabulation. — Math. Tables Aids Comp., 1946, **2**, p. 1—11.

20.3. Blanch G. On the computation of Mathieu functions. — J. Math. Phys., 1946, **25**, p. 1—20.

20.4. Blanch G. The asymptotic expansions for the odd periodic Mathieu functions. — Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **97**, № 2, p. 357—366.

20.5. Bouwkamp C. J. A note on Mathieu functions. — Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 1948, **51**, p. 891—893.

20.6. Bouwkamp C. J. On spheroidal wave functions of order zero. — J. Math. Phys., 1947, **26**, p. 79—92.

20.7. Campbell M. R. Sur les solutions de période $2s\pi$ de l'equation de Mathieu associée. — C. R. Acad. Sci., P.: 1946, **223**, p. 123—125.

20.8. Campbell M. R. Sur une catégorie remarquable be solutions de l'équation de Mathieu associée. — C.R. Acad. Sci., P. — 1948, **226**, p. 2114—2116.

20.9. Cherry T. M. Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. — Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, p. 224—257.

20.10. Dhar S. C. Mathieu functions. — Calcutta: Calcutta Univ. Press, 1928.

20.11. Dougall J. The solution of Mathieu's differential equation. — Proc. Edinburgh Math. Soc., 1916, **34**, p. 176—196.

20.12. Dougall J. On the solutions of Mathieu's differential equation, and their asymptotic expansions. — Proc. Edinburgh Math. Soc., 1923, **41**, p. 26—48.

20.13. Erdélyi A. Über die Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale. — Math. Z., 1936, **41**, p. 653—664.

20.14. Erdélyi A. On certain expansions of the solutions of Mathieu's differential equations. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1942, **38**, p. 28—33.

20.15. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book CO; 1953, V. 3. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. —М.: Наука, 1967, Т.III.

20.16. Floquet G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. — Ann. École Norm. Sup., 1883, **12**, № 47.

20.17. Goldstein S. The second solution of Mathieu's differential equation. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1928, **24**, p. 223—230.

20.18. Goldstein S. Mathieu functions. — Trans. Cambridge Philos. Soc., 1927, **23**, p. 303—336.

20.19. Hill G. W. On the path of motion of the lunar perigee. — Acta Math., 1886, **8**, № 1.

20.20. Hille E. On the zeros of the Mathieu functions. — Proc. London Math. Soc., 1924, **23**, p. 185—237.

20.21. Ince E. L. A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1922, **21**, p. 117—120.

20.22. Ince E. L. Ordinary differential equations. — N.Y.: Dover Publications, 1944. Русский перевод: Айнс И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков, 1941.

20.23. Jeffreys H. On the modified Mathieu's equation. — Proc. London Math. Soc., 1924, **23**, p. 449—454.

20.24. Купрадзе В. Д. Основные задачи математической теории диффракции. — М.; Л.: ОНТИ, 1935.

20.25. Langer R. E. The solutions of the Mathieu equation with a complex variable and at least one parameter large. — Trans. Amer. Math. Soc., 1934, **36**, p. 637—695.

20.26. Lubkin S., Stoker J. J. Stability of columns and strings under periodically varying forces. — Quart. Appl. Math., 1943, **1**, p. 215—236.

20.27. Mathieu E. Memoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. — J. Math. Pures Appl., 1868, **13**, p. 137—203.

20.28. McLachlan N. W. Mathieu functions and their classification. — J. Math. Phys., 1946, **25**, p. 209—240.

20.29. McLachlan N. W. Mathieu functions of fractional order. — J. Math. Phys., 1947, **26**, p. 29—41.

20.30. McLachlan N. W. Theory and application of Mathieu functions. — Oxford: Clarendon Press, 1947. Русский перевод: Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. — М.: ИЛ, 1953.

20.31. McLachlan N. W. Application of Mathieu's equation to stability of non-linear oscillator. — Math. Gez., 1951, **35**, p. 105—107.

20.32. Meixner J. Über das asymptotische Verhalten von Funktionen, die durch Reihen nach Zylinderfunktionen dargestellt werden können. — Math. Nachr., 1949, **3**, p. 9—13; Reihenentwicklungen von Produkten zweier Mathieuschen Funktionen nach Produkten von Zylinder und Exponentialfunktionen. Ibid., p. 14—19.

20.33. Meixner J. Integralbeziehungen zwischen Mathieuschen Funktionen. — Math. Nachr., 1951, **5**, p. 371—378.

20.34. Meixner J. Reihenentwicklungen vom Siegerschen Typus für die Sphäroid Funktionen. — Arch. Math. Oberwolfach, 1949, **1**, p. 432—440.

20.35. Meixner J. Asymptotische Entwicklung der Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichungen der Sphäroidfunktionen und der Mathieuschen Funktionen. — Z. Angew. Math. Mech., 1948, **28**, p. 304—310.

20.36. Meixner J., Schäfke F. W. Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. — B.: Springer — Verlag, 1954.

20.37. Morse P. M., Rubinstein P. J. The diffraction of waves by ribbons and by slits. — Phys. Rev., 1938, **54**, p. 895—898.

20.38. Mulholland H. P., Goldstein S. The characteristic numbers of the Mathieu equation with purely imaginary parameters. — Phil. Mag., 1929, **8**, p. 834—840.

20.39. Onsager L. Solutions of the Mathieu equation of period 4π and certain related functions. — New Haven: Yale Univ. Dissertation, 1935.

20.40. Schäfke F. W. Über die Stabilitätskarte der Mathieuschen Differentialgleichung. — Math. Nachr., 1950, **4**, p. 175—183.

20.41. Schäfke F. W. Das Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen. — Math. Z., 1953, **58**, p. 436—447.

20.42. Schäfke F. W. Eine Methode zur Berechnung des charakteristischen Exponenten einer Hillschen Differentialgleichung. — Z. Angew. Math. Mech., 1953, **33**, p. 279—280.

20.43. Sieger B. Die Beugung einer ebenen elektrischen Welle an einem Schirm von elliptischem Querschnitt. — Ann. Physik, 1908, **4**, № 27, p. 626—664.

20.44. S i p s R. Représentation asymptotique des fonctions de Mathieu et des fonctions d'onde sphéroidales. — Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **66**, p. 93—134.

20.45. S i p s R. Représentation asymptotique des fonctions de Mathieu et des fonctions sphéroidales II. — Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, № 2, p. 340—368.

20.46. S i p s R. Recherches sur les fonctions de Mathieu. — Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1953, **22**, p. 341—355, 374—387, 444—455, 530—540; 1954, **23**, p. 37—47, 90—103.

20.47. S t r u t t M. J. O. Die Hillsche Differentialgleichung im komplexen Gebiet. — Nieuw. Arch. Wisk., 1935, **18**, p. 31—55.

20.48. S t r u t t M. J. O. Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. — Ergeb. Math. Grenzgeb., 1932, **1**, p. 199—323. Р у с с к и й п е р е в о д: С т р е т т М. Д. О. Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. — Харьков; Киев: ГНТИ Укр., 1935.

20.49. S t r u t t M. J. O. On Hill's problems with complex parameters and a real periodic function. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., 1948, **A62**, p. 278—296.

20.50. W h i t t a k e r E. T. On functions associated with elliptic cylinders in harmonic analysis, Proc. Intl. Congr. Math. Cambr., 1912, **1**, 366.

20.51. W h i t t a k e r E. T. On the general solution of Mathieu's equation. — Proc. Edinburgh Math. Soc., 1914, **32**, p. 75—80.

20.52. W h i t t a k e r E. T., W a t s o n G. N. A course of modern analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952. Р у с с к и й п е р е в о д: У и т т е к е р Э. Т., В а т с о н Д ж. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1962, 1963.

Таблицы

20.53. B l a n c h G., R h o d e s I. Table of characteristic values of Mathieu's equation for large values of the parameter. — J. Washington Acad. Sci., 1955, **45**, № 6, p. 166—196.
$Be_r(t) = a_r(q) + 2q - 2(2r+1)\sqrt{q}$, $Bo_r(t) = b_r(q) + 2q - 2(2r-1)\sqrt{q}$, $t = (1/2)\sqrt{q}$, $r = 0(1)15$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с δ^2 и δ^4; точность $\approx$ 8D; допускается интерполяция.

20.54. B r a i n e r d J. G., G r a y H. J., M e r w i n R. Solution of the Mathieu equation., — Am. Inst. Elec. Engres., 1948, **67**.
Характеристический показатель в широком диапазоне; μ, M для $\varepsilon = 1(1)10$; $k = 0.1(0.1)1$, 5D; $g(t)$, $h(t)$ для $t = 0(0.1)3.1$, π, 5D; $\varepsilon = 1(1)10$, $k = 0.1(0.1)1$, где $g(t)$ и $h(t)$ — решения уравнения $y'' + \varepsilon(1 + k\cos t)\,y = 0$ при $g(0) = h'(0) = 1$; $g'(0) = h(0) = 0$; $\cos 2\pi\mu = 2g(\pi)\,h'(\pi) - 1$; $M = [-g(\pi)\,g'(\pi)/h(\pi)\,h'(\pi)]^{1/2}$.

20.55. B r a i n e r d J. G., W e y g a n d t C. N. Solutions of Mathieu's equation. — Phil. Mag., 1940, **30**, p. 458—477.

20.56. I n c e E. L. Tables of the elliptic cylinder functions. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1932, **52**, p. 355—423; Zeros and turning points, Ibid, p. 424—433.
Собственные значения a_0, $a_1, \ldots, a_5$, b_1, $b_2, \ldots, b_6$ и коэффициенты для $\theta = 0(1)10(2)20(4)40$; 7D; также $ce_r(x, \theta)$, $se_r(x, 0)$, $\theta = 0(1)10$, $x = 0°(1°)90°$; 5D, соответствующие собственным значениям в табл. $a_r = be_r - 2q$; $b_r = bo_r - 2q$; $\theta = q$.

20.57. K i r k p a t r i c k E. T. Tables of values of the modified Mathieu function. — Math. Comp., 1960, **14**, 70.
$Ce_r(u, q)$, $r = 0(1)5$, $Se_r(u, q)$, $r = 1(1)6$;
$u = 0.1(0.1)1$; $q = 1(1)20$.

20.58. National Bureau of Standards. Tables relating to Mathieu functions. — N.Y.: Columbia Univ. Press, 1951.
Собственные значения $be_r(s)$, $bo_r(s)$ для $0 \leqslant s \leqslant 100$ с δ^2; интерполяция дает 8D; коэффициенты Фурье для функций $se_r(q)$ и $ce_r(q)$ для тех же s; интерполяция дает 9D; нормирующие множители A и B и множители связи $s^{r/2}g_{e,r}$; $s^{r/2}g_{0,r}$; $s^r f_{e,r}$; $s^r f_{0,r}$ с δ^0; интерполяция дает 8S. Р у с с к и й п е р е в о д: Таблицы для вычисления функций Матье; собственные значения, коэффициенты и множители связи.— М.: ВЦ АН СССР, 1967. — (БМТ; Вып. 42).

20.59. S t r a t t o n J. A., M o r s e P. M., C h u L. J., H u t n e r R. A. Elliptic cylinder and spheroidal wave functions. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1941.
Теория и таблицы для b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b'_1, b'_2, b'_3, b'_4 и коэффициенты Фурье для $Se_r(s, x)$ и $So_r(s, x)$; $c = 0(0.2)4.4$ $0.5(1)4.5$; точность до 5S; $c = 2q^{1/2}$; $b_r = a_r + 2q$; $b'_r = b_r + 2q$.

20.60. T a m i r T. Characteristic exponents of Mathieu equations. — Math. Comp., 1962, **16**, 77.
Характеристический показатель ν_r первых трех областей устойчивости; $r = 0, 1, 2$; $q = 0.1(0.1)2.5$; $a = r(0.1)\,r + 1$, 5D.

20.61. W i l t s e J. C., K i n g M. J. Values of the Mathieu functions. — The Johns Hopkins Univ. Radiation Laboratory Technical Report AF-53. — Baltimore, 1958.
$ce_n(v, q)/A$, $se_n(v, q)/B$ для 12 значений q между 0.25 и 10; от 8 до 14 значений v; $\sqrt{\pi/2}\ Mc_r^{(j)}(u, q)$, $\sqrt{\pi/2}\ Ms_r^{(j)}(u, q)$, $j = 1, 2$, от 6 до 8 значений q между 0.25 и 10 и около 20 значений u, $r = 0, 1, 2$; $\sqrt{\pi/2}\ Mc_r^{(3)}(-|u|, q)$, $\sqrt{\pi/2}Ms_r^{(3)}(-|u|, q)$, $r = 0,1,2$ около 9 значений u и q; всюду точность 2D — 4D.

20.62. W i l t s e J. C., K i n g M. J. Derivatives, zeros, and other data pertaining to Mathieu functions. — The Johns Hopkins Univ. Radiation Laboratory Technical Report AF-57. — Baltimore, 1958.

20.63. Z a r o o d n y S. J. An elementary review of the Mathieu-Hill equation of real variable based on numerical solutions. — Ballistic Research Laboratory Memorandum Report № 878. — Aberdeen Proving Ground, 1955.
Чертежи характеристических показателей (см. также [20.18]), значения a_r, b_r и коэффициенты Фурье для $ce_r(x, q)$, $se_r(x, q)$; $q = 40(20)100(50)200$; 5D.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

20.64. Б а р к Л. С., Д м и т р и е в а Н. И., З а х а р ь е в Л. Н., Л е м а н с к и й А. А. Таблицы собственных значений уравнения Матье. — М.: ВЦ АН СССР, 1970.
Собственные значения
для $n = 0(1)15$; $q = 1(0.1)100$;
$n = 16(1)50$; $q = 1(1)100$; 7S.

20.65. К у з н е ц о в а Т. Д., С м и р н о в Ю. Н. Таблицы характеристических показателей для уравнений Матье. — М.: ВЦ АН СССР, 1969. Значения характеристического показателя μ для уравнения Матье при $a = 0(0.1)15.9$ и $q = 0.1(0.1)19.8$; 4D; приведены линии равных значений μ для первых 3 зон неустойчивости.

20.66. С м и р н о в Ю. Н. Линии равного значения μ в зонах неустойчивости для уравнения Матье. — ДАН АН СССР, 1968, **178**, № 3, с. 546—547.

20.67. Е. Я н к е, Ф. Э м д е, Ф. Л ё ш. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

Глава 21

СФЕРОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

А. ЛОУЕН

СОДЕРЖАНИЕ

21.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

21.1.1. $\xi = \dfrac{r_1 + r_2}{2f},\quad \eta = \dfrac{r_1 - r_2}{2f};$

r_1 и r_2 — расстояния до фокусов семейств софокусных эллипсов и гипербол, $2f$ — расстояние между фокусами.

21.1.2. $a = f\xi,\quad b = f\sqrt{\xi^2 - 1},\quad e = \dfrac{f}{a};$

a — половина большой оси, b — половина малой оси, e — эксцентриситет.

Уравнение семейства софокусных эллипсов

21.1.3. $\dfrac{x^2}{\xi^2} + \dfrac{y^2}{\xi^2 - 1} = f^2 \quad (1 < \xi < \infty).$

Уравнение семейства софокусных гипербол

21.1.4. $\dfrac{x^2}{\eta^2} - \dfrac{y^2}{1 - \eta^2} = f^2 \quad (-1 < \eta < 1).$

Соотношения между декартовыми и эллиптическими координатами

21.1.5. $x = f\xi\eta,\quad y = f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}.$

21.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫТЯНУТЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Если система софокусных эллипсов 21.1.3 и гипербол 21.1.4 вращается вокруг большой оси, то

21.2.1. $$\frac{x^2}{\xi^2}+\frac{r^2}{\xi^2-1}=f^2,\quad \frac{x^2}{\eta^2}-\frac{r^2}{1-\eta^2}=f^2,$$
$$y=r\cos\varphi,\quad z=r\sin\varphi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$
где ξ, η и φ — вытянутые сфероидальные координаты.

Соотношения между декартовыми и вытянутыми сфероидальными координатами

21.2.2. $$x=f\xi\eta,\quad y=f\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi,$$
$$z=f\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi.$$

21.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЛЮСНУТЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Если система софокусных эллипсов 21.1.3 и гипербол 21.1.4 вращается вокруг малой оси, то

21.3.1. $$\frac{r^2}{\xi^2}+\frac{y^2}{\xi^2-1}=f^2,\quad \frac{r^2}{\eta^2}-\frac{y^2}{1-\eta^2}=f^2,$$
$$z=r\cos\varphi,\quad x=r\sin\varphi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$
где ξ, η и φ — сплюснутые сфероидальные координаты.

Соотношения между декартовыми и сплюснутыми сфероидальными координатами

21.3.2. $$x=f\xi\eta\sin\varphi,$$
$$y=f\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)},\quad z=f\xi\eta\cos\varphi.$$

21.4. ЛАПЛАСИАН В СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

21.4.1. $$\nabla^2=\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta h_\varphi}{h_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi h_\varphi}{h_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right],$$
$$h_\xi^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2,$$
$$h_\eta^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2,$$
$$h_\varphi^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2.$$

Метрические коэффициенты для вытянутых сфероидальных координат

21.4.2. $$h_\xi=f\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}},\quad h_\eta=f\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}},$$
$$h_\varphi=f\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}.$$

Метрические коэффициенты для сплюснутых сфероидальных координат

21.4.3. $$h_\xi=f\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}},\quad h_\eta=f\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}},$$
$$h_\varphi=f\xi\eta.$$

21.5. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ В ВЫТЯНУТЫХ И СПЛЮСНУТЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Волновое уравнение в вытянутых сфероидальных координатах

21.5.1. $$\nabla^2\Phi+k^2\Phi=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right]+\frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+c^2(\xi^2-\eta^2)\Phi=0\quad\left(c=\frac{1}{2}fk\right).$$

Волновое уравнение в сплюснутых сфероидальных координатах

21.5.2. $$\nabla^2\Phi+k^2\Phi=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi^2+1)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right]+\frac{\xi^2+\eta^2}{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+c^2(\xi^2+\eta^2)\Phi=0\quad\left(c=\frac{1}{2}fk\right).$$

21.5.2 может быть получено из 21.5.1 с помощью преобразования $\xi\to\pm i\xi$, $c\to\mp ic$.

21.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАДИАЛЬНЫХ И УГЛОВЫХ ВОЛНОВЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Дифференциальные уравнения для вытянутых функций

Положим в 21.5.1

$$\Phi = R_{mn}(c, \xi)\, S_{mn}(c, \eta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, m\varphi.$$

Тогда радиальное решение $R_{mn}(c, \xi)$ и угловое решение $S_{mn}(c, \eta)$ будут удовлетворять дифференциальным уравнениям

21.6.1. $$\frac{d}{d\xi}\left[(\xi^2 - 1)\frac{d}{d\xi} R_{mn}(c, \xi)\right] - \left(\lambda_{mn} - c^2\xi^2 + \frac{m^2}{\xi^2 - 1}\right) R_{mn}(c, \xi) = 0,$$

21.6.2. $$\frac{d}{d\eta}\left[(1 - \eta^2)\frac{d}{d\eta} S_{mn}(c, \eta)\right] + \left(\lambda_{mn} - c^2\eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2}\right) S_{mn}(c, \eta) = 0,$$

где постоянные разделения (собственные значения) λ_{mn} определяются так, чтобы $R_{mn}(c, \xi)$ и $S_{mn}(c, \eta)$ были конечны при $\xi = \pm 1$ и при $\eta = \pm 1$ соответственно.

Сравнивая 21.6.1 и 21.6.2, видим, что вытянутые радиальные и угловые сфероидальные функции удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению, рассматриваемому на разных интервалах изменения независимой переменной.

Дифференциальные уравнения для сплюснутых функций

21.6.3. $$\frac{d}{d\xi}\left[(\xi^2 + 1)\frac{d}{d\xi} R_{mn}(c, \xi)\right] - \left(\lambda_{mn} - c^2\xi^2 - \frac{m^2}{\xi^2 + 1}\right) R_{mn}(c, \xi) = 0.$$

21.6.4. $$\frac{d}{d\eta}\left[(1 - \eta^2)\frac{d}{d\eta} S_{mn}(c, \eta)\right] + \left(\lambda_{mn} + c^2\eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2}\right) S_{mn}(c, \eta) = 0.$$

21.6.3 может быть получено из 21.6.1 с помощью преобразования $\xi \to \pm i\xi$, $c \to \mp ic$; 21.6.4 может быть получено из 21.6.2 с помощью преобразования $c \to \mp ic$.

21.7. ВЫТЯНУТЫЕ УГЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

21.7.1. $$S_{mn}^{(1)}(c, \eta) = {\sum_{r=0,1}^{\infty}}' d_r^{mn}(c)\, P_{m+r}^m(\eta)$$

— *вытянутая угловая функция первого рода.*

21.7.2. $$S_{mn}^{(2)}(c, \eta) = {\sum_{r=-\infty}^{\infty}}' d_r^{mn}(c)\, Q_{m+r}^m(\eta)$$

— *вытянутая угловая функция второго рода.*

$P_n^m(\eta)$ и $Q_n^m(\eta)$ — присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно. Для $-1 \leqslant z \leqslant 1$ $P_n^m(z) = (1 - z^2)^{m/2}\, d^m P_n(z)/dz^m$ (см. 8.6.6). Суммирование выполняется либо по четным, либо по нечетным значениям r в соответствии с четностью $n - m$.

Рекуррентные соотношения между коэффициентами

21.7.3. $\alpha_k d_{k+2} + (\beta_k - \lambda_{mn})\, d_k + \gamma_k d_{k-2} = 0,$

$$\alpha_k = \frac{(2m + k + 2)(2m + k + 1)\, c^2}{(2m + 2k + 3)(2m + 2k + 5)},$$

$$\beta_k = (m + k)(m + k + 1) + \frac{2(m + k)(m + k + 1) - 2m^2 - 1}{(2m + 2k - 1)(2m + 2k + 3)}\, c^2,$$

$$\gamma_k = \frac{k(k - 1)\, c^2}{(2m + 2k - 3)(2m + 2k - 1)}.$$

Трансцендентное уравнение для λ_{mn}

21.7.4. $U(\lambda_{mn}) = U_1(\lambda_{mn}) + U_2(\lambda_{mn}) = 0,$

$$U_1(\lambda_{mn}) = \gamma_r^m - \lambda_{mn} - \frac{\beta_r^m}{\gamma_{r-2}^m - \lambda_{mn} -}\ \frac{\beta_{r-2}^m}{\gamma_{r-4}^m - \lambda_{mn} -}\ \dots,$$

$$U_2(\lambda_{mn}) = -\frac{\beta_{r+2}^m}{\gamma_{r+2}^m - \lambda_{mn} -}\ \frac{\beta_{r+4}^m}{\gamma_{r+4}^m - \lambda_{mn} -}\ \dots,$$

$$\beta_k^m = \frac{k(k - 1)(2m + k)(2m + k - 1)\, c^4}{(2m + 2k - 1)^2 (2m + 2k + 1)(2m + 2k - 3)} \quad (k \geqslant 2),$$

$$\gamma_k^m = (m + k)(m + k + 1) + \frac{1}{2} c^2 \left[1 - \frac{4m^2 - 1}{(2m + 2k - 1)(2m + 2k + 3)}\right] \quad (k \geqslant 0).$$

(Выбор r в 21.7.4 произволен.)

Степенное разложение λ_{mn}

21.7.5. $$\lambda_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} l_{2k}\, c^{2k},$$

$$l_0 = n(n + 1),\quad l_2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(2m - 1)(2m + 1)}{(2n - 1)(2n + 3)}\right],$$

$$l_4 = \frac{-(n-m+1)(n-m+2)(n+m+1)(n+m+2)}{2(2n+1)(2n+3)^3(2n+5)} + \frac{(n-m-1)(n-m)(n+m-1)(n+m)}{2(2n-3)(2n-1)^3(2n+1)},$$

$$l_6 = (4m^2-1)\left[\frac{(n-m+1)(n-m+2)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)^5(2n+5)(2n+7)} - \frac{(n-m-1)(n-m)(n+m-1)(n+m)}{(2n-5)(2n-3)(2n-1)^5(2n+1)(2n+3)}\right],$$

$$l_8 = 2(4m^2-1)^2 A + \frac{1}{16}B + \frac{1}{8}C + \frac{1}{2}D,$$

$$A = \frac{(n-m-1)(n-m)(n+m-1)(n+m)}{(2n-5)^2(2n-3)(2n-1)^7(2n+1)(2n+3)^2} - \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n-1)^2(2n+1)(2n+3)^7(2n+5)(2n+7)^2},$$

$$B = \frac{(n-m-3)(n-m-2)(n-m-1)(n-m)(n+m-3)(n+m-2)(n+m-1)(n+m)}{(2n-7)(2n-5)^2(2n-3)^3(2n-1)^4(2n+1)} -$$

$$- \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)(n-m+4)(n+m+1)(n+m+2)(n+m+3)(n+m+4)}{(2n+1)(2n+3)^4(2n+5)^3(2n+7)^2(2n+9)},$$

$$C = \frac{(n-m+1)^2(n-m+2)^2(n+m+1)^2(n+m+2)^2}{(2n+1)^2(2n+3)^7(2n+5)^2} - \frac{(n-m-1)^2(n-m)^2(n+m-1)^2(n+m)^2}{(2n-3)^2(2n-1)^7(2n+1)^2},$$

$$D = \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)(n-m+2)(n+m-1)(n+m)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n-3)(2n-1)^4(2n+1)^2(2n+3)^4(2n+5)}.$$

Асимптотическое разложение λ_{mn}

21.7.6.
$$\lambda_{mn}(c) = cq + m^2 - \frac{1}{8}(q^2+5) - \frac{q}{64c}(q^2+11-32m^2) - \frac{1}{1024c^2}[5(q^4+26q^2+21) - 384m^2(q^2+1)] -$$
$$- \frac{1}{c^3}\left[\frac{1}{128^2}(33q^5+1594q^3+5621q) - \frac{m^2}{128}(37q^3+167q) + \frac{m^4}{8}q\right] -$$
$$- \frac{1}{c^4}\left[\frac{1}{256^2}(63q^6+4940q^4+43327q^2+22470) - \frac{m^2}{512}(115q^4+1310q^2+735) + \frac{3m^4}{8}(q^2+1)\right] -$$
$$- \frac{1}{c^5}\left[\frac{1}{1024^2}(527q^7+61529q^5+1043961q^3+2241599q) - \frac{m^2}{32\cdot 1024}(5739q^5+127550q^3+298951q) + \frac{m^4}{512}(355q^3+1505q) - \frac{m^6 q}{16}\right] + O(c^{-6}),$$
$$q = 2(n-m)+1.$$

Уточнение приближенных значений для λ_{mn}

Пусть $\lambda_{mn}^{(1)}$ — приближенное значение λ_{mn}, полученное из 21.7.5 либо из 21.7.6.

21.7.7.
$$\lambda_{mn} = \lambda_{mn}^{(1)} + \delta\lambda_{mn},$$
$$\delta\lambda_{mn} = \frac{U_1(\lambda_{mn}^{(1)}) + U_2(\lambda_{mn}^{(1)})}{\Delta_1 + \Delta_2},$$

$$\Delta_1 = 1 + \frac{\beta_r^m}{(N_r^m)^2} + \frac{\beta_r^m \beta_{r-2}^m}{(N_r^m N_{r-2}^m)^2} + \frac{\beta_r^m \beta_{r-2}^m \beta_{r-4}^m}{(N_r^m N_{r-2}^m N_{r-4}^m)^2} + \ldots,$$

$$\Delta_2 = \frac{(N_{r+2}^m)^2}{\beta_{r+2}^m} + \frac{(N_{r+2}^m N_{r+4}^m)^2}{\beta_{r+2}^m \beta_{r+4}^m} + \frac{(N_{r+2}^m N_{r+4}^m N_{r+6}^m)^2}{\beta_{r+2}^m \beta_{r+4}^m \beta_{r+6}^m} + \ldots,$$

$$N_r^m = \frac{(2m+r)(2m+r-1)c^2}{(2m+2r-1)(2m+2r+1)} \frac{d_r}{d_{r-2}} \quad (r \geqslant 2),$$

$$\beta_r^m = -\frac{r(r-1)(2m+r)(2m+r-1)c^4}{(2m+2r-1)^2(2m+2r+1)(2m+2r-3)} \quad (r \geqslant 2).$$

Вычисление коэффициентов

1-й шаг. Вычисляются N_r^m по формулам

21.7.8.
$$N_{r+2}^m = \gamma_r^m - \lambda_{mn} - \frac{\beta_r^m}{N_r^m} \quad (r \geqslant 2),$$
$$N_2^m = \gamma_0^m - \lambda_{mn}, \quad N_3^m = \gamma_1^m - \lambda_{mn},$$
$$\gamma_r^m = (m+r)(m+r+1) + \frac{1}{2}c^2 \times \left[1 - \frac{4m^2-1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)}\right] \quad (r \geqslant 0).$$

2-й шаг. Вычисляются отношения d_0/d_{2r} и d_1/d_{2p+1} по формулам

21.7.9.
$$\frac{d_0}{d_{2r}} = \left(\frac{d_0}{d_2}\right)\left(\frac{d_2}{d_4}\right)\ldots\left(\frac{d_{2r-2}}{d_{2r}}\right),$$

21.7.10.
$$\frac{d_1}{d_{2p+1}} = \left(\frac{d_1}{d_3}\right)\left(\frac{d_3}{d_5}\right)\ldots\left(\frac{d_{2p-1}}{d_{2p+1}}\right)$$

и формуле для N_r^m в 21.7.7.

Коэффициенты d_r^{mn} определяются с точностью до произвольного множителя d_0 для r четных или d_1 для r нечетных. Выбор этих множителей зависит от принятой нормировки.

Нормировка угловых функций

Нормировка Майкснера—Щефке

21.7.11. $$\int_{-1}^{1} [S_{mn}(c, \eta)]^2 \, d\eta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Нормировка Стреттона—Морса—Чжу—Литтла—Корбато

21.7.12. $$\sum_{r=0,\,1}^{\;\;\prime} \frac{(r+2m)!}{r!} d_r = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

(При такой нормировке $S_{mn}(c, \eta) \to P_n^m(\eta)$, когда $\eta \to 1$.)

Нормировка Фламмера [21.4]

21.7.13. $$S_{mn}(c, 0) = P_n^m(0) = \frac{(-1)^{(n-m)/2}(n+m)!}{2^n((n-m)/2)!\,((n+m)/2)!},$$

$(n-m)$ — четное.

21.7.14. $$S'_{mn}(c, 0) = P_n^{m\prime}(0) = \frac{(-1)^{(n-m-1)/2}(n+m+1)!}{2^n((n-m-1)/2)!((n+m+1)/2)!},$$

$(n-m)$ — нечетное.

Такая нормировка приводит к следующим условиям для d_r^{mn}:

21.7.15. $$\sum_{r=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{r/2}(r+2m)!}{2^r\left(\frac{r}{2}\right)!\left(\frac{r+2m}{2}\right)!} d_r^{mn} = \frac{(-1)^{(n-m)/2}(n+m)!}{2^{n-m}\left(\frac{n-m}{2}\right)!\left(\frac{n+m}{2}\right)!}, \quad (n-m) \text{ — четное},$$

21.7.16. $$\sum_{r=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{(r-1)/2}(r+2m+1)!}{2^r\left(\frac{r-1}{2}\right)!\left(\frac{r+2m+1}{2}\right)!} d_r^{mn} = \frac{(-1)^{(n-m-1)/2}(n+m+1)!}{2^{n-m}\left(\frac{n-m-1}{2}\right)!\left(\frac{n+m+1}{2}\right)!},$$

$(n-m)$ — нечетное.

(Нормировка 21.7.13—21.7.14 используется также в [21.10].)

Асимптотические разложения $S_{mn}(c, \eta)$

21.7.17. $$S_{mn}(c, \eta) = (1-\eta^2)^{1/2}\, U_{mn}(c, \eta) \quad (c \to \infty),$$

$$U_{mn}(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_r^l D_{l+r}(x), \; l = n - m,$$

где $D_r(x)$ — функции параболического цилиндра (см. гл. 19):

$$D_r(x) = (-1)^r e^{x^2/4} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2} = 2^{-r/2} e^{-x^2/4} H_r\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

и $H_r(x)$ — многочлены Эрмита (см. гл. 22). (Таблицы значений $h_{\pm r}^l/h_0^l$ см. в [21.4].)

Разложение $S_{mn}(c, \eta)$ по степеням η

21.7.18. $$S_{mn}(c, \eta) = (1-\eta^2)^{m/2} \sum_{r=0,\,1}^{\infty}{}' p_r^{mn}(c)\, \eta^r,$$

$$(r+1)(r+2)\, p_{r+2}^{mn}(c) - [r(r+2m+1) + m(m+1) - \lambda_{mn}(c)] \times p_r^{mn}(c) - c^2 p_{r-2}^{mn}(c) = 0.$$

Вывод трансцендентного уравнения для λ_{mn} подобен выводу 21.7.4 из 21.7.3.

Разложение $S_{mn}(c, \eta)$ по степеням $(1-\eta^2)$

21.7.19. $$S_{mn}(c, \eta) = (1-\eta^2)^{m/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}^{mn}(1-\eta^2)^k,$$

$(n-m)$ — четное,

21.7.20. $$S_{mn}(c, \eta) = \eta(1-\eta^2)^{m/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}^{mn}(1-\eta^2)^k,$$

$(n-m)$ — нечетное,

$$c_{2k}^{mn} = \frac{1}{2^m k!(m+k)!} \sum_{r=k}^{\infty} \frac{(2m+2r)!}{(2r)!} (-r)_k \left(m + r + \frac{1}{2}\right)_k d_{2r}^{mn},$$

$(n-m)$ — четное,

$$c_{2k}^{mn} = \frac{1}{2^m k!(m+k)!} \sum_{r=k}^{\infty} \frac{(2m+2r+1)!}{(2r+1)!} (-r)_k \left(m + r + \frac{3}{2}\right)_k d_{2r+1}^{mn},$$

$(n-m)$ — нечетное,

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k+1),$$

d_r^{mn} — коэффициенты разложения 21.7.1.

Вытянутые угловые функции второго рода

Разложение 21.7.2 можно привести к виду

21.7.21. $$S_{mn}^{(2)}(c, \eta) = \sum_{r=-2m,\,-2m+1}^{\infty}{}' d_r^{mn} Q_{m+r}^m(\eta) + \sum_{r=2m+2,\,2m+1}^{\infty}{}' d_{r|r}^{mn} P_{r-m-1}^m(\eta).$$

Коэффициенты d_r^{mn} те же самые, что и в 21.7.1; коэффициенты $d_{r|r}^{mn}$ протабулированы в [21.4].

21.8. СПЛЮСНУТЫЕ УГЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Степенной ряд для собственных значений

21.8.1. $\lambda_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k l_{2k} c^{2k},$

где l_k те же самые, что в 21.7.5.

Асимптотическое разложение собственных значений [21.4]

21.8.2. $\lambda_{mn} = -c^2 + 2c(2\nu + m + 1) - 2\nu(\nu + m + 1) - (m+1) + \Lambda_{mn},$

$$\nu = \frac{1}{2}(n-m) \text{ для } (n-m) \text{ четного},$$

$$\nu = \frac{1}{2}(n-m-1) \text{ для } (n-m) \text{ нечетного},$$

$$\Lambda_{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{mn} c^{-k},$$

$$\beta_1^{mn} = -2^{-3} q(q^2 + 1 - m^2),$$

$$\beta_2^{mn} = -2^{-6}[5q^4 + 10q^2 + 1 - 2m^2(3q^2 + 1) + m^4],$$

$$\beta_3^{mn} = -2^{-9} q[33q^4 + 114q^2 + 37 - 2m^2(23q^2 + 25) + 13m^4],$$

$$\beta_4^{mn} = -2^{-10}[63q^6 + 340q^4 + 239q^2 + 14 - 10m^2(10q^4 + 23q^2 + 3) + m^4(39q^2 - 18) - 2m^6],$$

$$\beta_k^{mn} = \nu(\nu + m) a_k^{-1} + (\nu + 1)(\nu + m + 1) a_k^{+1},$$

$q = n + 1$ для $(n-m)$ четного, $q = n$ для $(n-m)$ нечетного. Определение $a_k^{\pm r}$ см. в 21.8.3.

Асимптотическое разложение сплюснутых угловых функций

21.8.3. $S_{mn}(-ic, \eta) \sim$

$$\sim (1-\eta^2)^{m/2} \sum_{s=-\nu}^{\infty} A_s^{mn}\{e^{-c(1-\eta)} L_{\nu+s}^{(m)}[2c(1-\eta)] + (-1)^{n-m} e^{-c(1+\eta)} L_{\nu+s}^{(m)}[2c(1+\eta)]\},$$

где $L_\nu^{(m)}(x)$ — многочлены Лагерра (см гл. 22) и

$$A_{\pm r}^{mn}/A_0^{mn} = \sum_{k=r}^{\infty} a_k^{\pm r}(m, n)\, c^{-k}.$$

Выражения для $a_k^{\pm r}$ даются в [21.4].

21.9. РАДИАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ СФЕРОИДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

21.9.1. $R_{mn}^{(p)}(c, \xi) =$

$$= \left\{ \sum_{r=0,1}^{\infty}{}' \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn} \right\}^{-1} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^{m/2} \times \sum_{r=0,1}^{\infty}{}' i^{r+m-n} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn} Z_{m+r}^{(p)}(c\xi),$$

$$Z_n^{(p)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, J_{n+1/2}(z) \quad (p = 1),$$

$$Z_n^{(p)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, Y_{n+1/2}(z) \quad (p = 2),$$

$J_{n+1/2}(x)$ и $Y_{n+1/2}(x)$ — функции Бесселя порядка $n + 1/2$ первого и второго рода соответственно (см. гл. 10).

21.9.2. $R_{mn}^{(3)}(c, \xi) = R_{mn}^{(1)}(c, \xi) + iR_{mn}^{(2)}(c, \xi).$

21.9.3. $R_{mn}^{(4)}(c, \xi) = R_{mn}^{(1)}(c, \xi) - iR_{mn}^{(2)}(c, \xi).$

Асимптотическое поведение $R_{mn}^{(1)}(c, \xi)$ и $R_{mn}^{(2)}(c, \xi)$

21.9.4. $R_{mn}^{(1)}(c, \xi) \xrightarrow[c\xi \to \infty]{} \frac{1}{c\xi} \cos\left[c\xi - \frac{1}{2}(n+1)\pi\right].$

21.9.5. $R_{mn}^{(2)}(c, \xi) \xrightarrow[c\xi \to \infty]{} \frac{1}{c\xi} \sin\left[c\xi - \frac{1}{2}(n+1)\pi\right].$

21.10. МНОЖИТЕЛИ СВЯЗИ ДЛЯ ВЫТЯНУТЫХ ВОЛНОВЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

21.10.1. $S_{mn}^{(1)}(c, \xi) = k_{mn}^{(1)}(c)\, R_{mn}^{(1)}(c, \xi),$

$$k_{mn}^{(1)}(c) = \frac{(2m+1)(n+m)! \sum_{r=0}^{\infty}{}' d_r^{mn}(2m+r)!/r!}{2^{n+m} d_0^{mn}(c)\, c^m m! \left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)!},$$

$(n-m)$ — четное,

$$k_{mn}^{(1)}(c) = \frac{(2m+3)(n+m+1)! \sum_{r=1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(2m+r)!/r!}{2^{n+m} d_1^{mn}(c)\, c^{m+1} m! \left(\frac{n-m-1}{2}\right)! \left(\frac{n+m+1}{2}\right)!},$$

$(n-m)$ — нечетное.

21.10.2. $S_{mn}^{(2)}(c, \xi) = k_{mn}^{(2)}(c)\, R_{mn}^{(2)}(c, \xi),$

$$k_{mn}^{(2)}(c) = \frac{2^{n-m}(2m)! \left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)! d_{-2m}^{mn}(c)}{(2m-1)\, m!\, (n+m)!\, c^{m-1}} \times \sum_{r=0}^{\infty}{}' \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(c), \quad (n-m) \text{ — четное},$$

$$k_{mn}^{(2)}(c) = -\frac{2^{n-m}(2m)! \left(\frac{n-m-1}{2}\right)! \left(\frac{n+m+1}{2}\right)! d_{-2m+1}^{mn}(c)}{(2m-3)(2m-1)\, m!(n+m+1)!\, c^{m-2}} \times \sum_{r=1}^{\infty}{}' \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(c), \quad (n-m) \text{ — нечетное}.$$

Выражения множителей связи, относящихся к сплюснутым функциям, могут быть получены из вышеприведенных формул преобразованием $c \to -ic$.

21.11. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначения вытянутых волновых сфероидальных функций

	Угловая координата	Радиальная координата	Независимая переменная	Угловая волновая функция	Радиальная волновая функция	Собственное значение	Нормировка угловых функций	Связь с обозначениями Фламмера
Стреттон, Морс, Чжу, Литтл и Корбато [21.10]	η	ξ	h	$S_{ml}(h, \eta)$	$je_{ml}(h, \xi)$ $ne_{ml}(h, \xi)$ $he_{ml}(h, \xi)$	$A_{ml}(h)$	$S_{ml}(h, 1) = P_l^m(1)$	$l = n$ $A_{ml} = \lambda_{mn}$
Фламмер [21.4] и данная книга	η	ξ	c	$S_{mn}(c, \eta)$	$R_{mn}^{(i)}(c, \xi)$	$\lambda_{mn}(c)$	$S_{mn}(c, 0) = P_n^m(0)$ $(n-m)$ — четное $S'_{mn}(c, 0) = P_n^{m\prime}(0)$ $(n-m)$ — нечетное	
Чжу и Стреттон [21.9]	η	ξ	c	$S_{ml}^{(1)}(c, \eta)$	$R_{ml}^{(i)}(c, \xi)$	A_{ml}	$S_{m}^{(1)}(c, 0) = P_{m+l}^m(0)$ l — четное $S_{ml}^{(1)\prime}(c, 0) = P_{m+l}^{m\prime}(0)$ l — нечетное	$l = n -$ $A_{ml} =$ $= -\lambda_{m,\, n-m}$
Майкснер и Шефке [21.6]	η	ξ	γ	$PS_n^m(\eta, \gamma^2)$	$S_n^{m(j)}(\xi, \gamma^2)$	$\lambda_n^m(\gamma^2)$	$\int\limits_{-1}^{1} [PS_n^m(\eta, \gamma^2)]^2\, d\eta =$ $= \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}$	$\lambda_n^m(\gamma^2) =$ $= \lambda_{mn}(c) - c^2$
Морс и Фешбах [21.7]	$\eta = \cos\vartheta$	$\xi = \operatorname{ch}\mu$	h	$S_{ml}(h, \eta)$	$je_{ml}(h, \xi)$ $ne_{ml}(h, \xi)$ $he_{ml}(h, \xi)$	A_{ml}	$[(1-\eta^2)^{-m/2} S_{ml}(h, \eta)]_{\eta=1} =$ $= [(1-\eta^2)^{-m/2} P_l^m(\eta)]_{\eta=1}$	$l = n$ $A_{ml} = \lambda_{mn}$
Пейдж [21.8]	ξ	η	ϵ	$U_{lm}(\xi)$	$v_{lm}(\eta)$ $p_{lm}(\eta)$ $q_{lm}(\eta)$	α_{lm}	$[(1-\xi^2)^{-m/2} U_{lm}(\xi)] = 1$ $\xi = 1$	$l = n$ $\alpha_{ml} = \lambda_{mn} - c^2$

(продолжение)

Обозначения сплюснутых волновых сфероидальных функций

	Угловая координата	Радиальная координата	Независимая переменная	Угловая волновая функция	Радиальная волновая функция	Собственное значение	Нормировка угловых функций	Связь с обозначениями Фламмера
Стреттон, Морс, Чжу, Литтл и Корбато [21.10]	η	ξ	g	$S_{ml}(ig, \eta)$	$je_{ml}(ig, -i\xi)$	A_{ml}	$S_{ml}(ig, 1) = P_l^m(1)$	$l = n$ $A_{ml} = \lambda_{mn}$
Фламмер [21.4] и данная книга	η	ξ	c	$S_{mn}(-ic, \xi)$	$R_{mn}^{(i)}(-ic, i\xi)$	$\lambda_{mn}(-ic)$	$S_{mn}(-ic, 0) = P_n^m(0)$ $(n-m)$ — четное $S'_{mn}(-ic, 0) = P_n^{m\prime}(0)$ $(n-m)$ — нечетное	
Чжу и Стреттон [21.9]	η	ξ	c	$S_{ml}^{(1)}(-ic, \eta)$	$R_{ml}^{(1)}(-ic, i\xi)$	B_{ml}	$S_{ml}^{(1)}(-ic, 0) = P_{m+l}^m(0)$ l — четное $S_{ml}^{(1)\prime}(-ic, 0) = P_{m+l}^{m\prime}(0)$ l — нечетное	$l = n - m$ $B_{lm} =$ $= -\lambda_{m,\, n-m}$
Майкснер и Шефке [21.6]	η	ξ	γ	$ps_n^m(\eta, -\gamma^2)$	$S_n^{m(j)}(-i\xi, i\gamma^2)$	$\lambda_n^m(-\gamma^2)$	$\int_{-1}^{1} [ps_n^m(\eta, -\gamma^2)]^2\, d\eta =$ $= \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$	$\lambda_n^m(-\gamma^2) =$ $= \lambda_{mn}(-ic) +$ $+ c^2$
Морс и Фешбах [21.7]	$\eta = \cos\vartheta$	$\xi = \mathrm{sh}\,\mu$	g	$S_{ml}(ig, \eta)$	$je_{ml}(ig, -i\xi)$ $ne_{ml}(ig, -i\xi)$ $he_{ml}(ig, -i\xi)$	A_{ml}	$[(1-\eta^2)^{-m/2} S_{ml}(ig, \eta)]_{\eta=1} =$ $= [(1-\eta^2)^{-m/2} P_l^m(\eta)]_{\eta=1}$	$l = n$ $A_{ml} = \lambda_{mn}$
Лейтнер и Спенс [21.5]	η	ξ	ε	$U_{lm}(\eta)$	$(i)_{v_{lm}(\xi)}$	α_{lm}	$[(1-\eta^2)^{-m/2} U_{lm}(\eta)]_{\eta=1} = 1$	$l = n$ $\alpha_{lm} = \lambda_{mn} +$ $+ c^2$

Таблица 21.1. Собственные значения — вытянутые и сплюснутые

Вытянутые

$\lambda_{mn}(c) - m(m+1)$

$\lambda_{0n}(c)$

$c^2 \backslash n$	0	1	2	3	4
0	0.000000	2.000000	6.000000	12.000000	20.000000
1	0.319000	2.593084	6.533471	12.514462	20.508274
2	0.611314	3.172127	7.084258	13.035830	21.020137
3	0.879933	3.736869	7.649317	13.564354	21.535636
4	1.127734	4.287128	8.225713	14.100203	22.054829
5	1.357356	4.822809	8.810735	14.643458	22.577779
6	1.571155	5.343903	9.401958	15.194110	23.104553
7	1.771183	5.850492	9.997251	15.752059	23.635223
8	1.959206	6.342739	10.594773	16.317122	24.169860
9	2.136732	6.820888	11.192938	16.889030	24.708534
10	2.305040	7.285254	11.790394	17.467444	25.251312
11	2.465217	7.736212	12.385986	18.051962	25.798254
12	2.618185	8.174189	12.978730	18.642128	26.349411
13	2.764731	8.599648	13.567791	19.237446	26.904827
14	2.905523	9.013085	14.152458	19.837389	27.464530
15	3.041137	9.415010	14.732130	20.441413	28.028539
16	3.172067	9.805943	15.306299	21.048960	28.596854
	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)3\\6\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)2\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)2\\6\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)9\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)5\\5\end{smallmatrix}\right]$

$c^{-1}[\lambda_{0n}(c)]$

$c^{-1} \backslash n$	0	1	2	3	4
0.25	0.793016	2.451485	3.826574	5.26224	7.14921
0.24	0.802442	2.477117	3.858771	5.25133	7.05054
0.23	0.811763	2.503218	3.895890	5.25040	6.96237
0.22	0.820971	2.529593	3.937869	5.26046	6.88638
0.21	0.830059	2.556036	3.984499	5.28251	6.82460
0.20	0.839025	2.582340	4.035382	5.31747	6.77941
0.19	0.847869	2.608310	4.089903	5.36610	6.75360
0.18	0.856592	2.633778	4.147207	5.42883	6.75030
0.17	0.865200	2.658616	4.206229	5.50551	6.77286
0.16	0.873698	2.682743	4.265772	5.59516	6.82451
0.15	0.882095	2.706127	4.324653	5.69566	6.90779
0.14	0.890399	2.728784	4.381878	5.80359	7.02356
0.13	0.898617	2.750762	4.436798	5.91452	7.16962
0.12	0.906758	2.772133	4.489168	6.02383	7.33916
0.11	0.914827	2.792971	4.539096	6.12806	7.52035
0.10	0.922830	2.813346	4.586895	6.22577	7.69932
0.09	0.930772	2.833316	4.632927	6.31730	7.86638
0.08	0.938657	2.852927	4.677506	6.40385	8.01951
0.07	0.946487	2.872213	4.720863	6.48655	8.16148
0.06	0.954267	2.891203	4.763160	6.56618	8.29538
0.05	0.961998	2.909920	4.804519	6.64326	8.42315
0.04	0.969683	2.928382	4.845033	6.71812	8.54594
0.03	0.977324	2.946608	4.884779	6.79104	8.66452
0.02	0.984923	2.964611	4.923820	6.86221	8.77945
0.01	0.992481	2.982404	4.962212	6.93182	8.89116
0.00	1.000000	3.000000	5.000000	7.00000	9.00000
	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)2\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)9\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)6\\6\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)2\\6\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)4\\9\end{smallmatrix}\right]$

Таблица 21.1. Собственные значения — вытянутые и сплюснутые

Сплюснутые

$\lambda_{mn}(-ic) - m(m+1)$

$\lambda_{0n}(-ic)$

$c^2 \backslash n$	0	1	2	3	4
0	0.000000	2.000000	6.000000	12.000000	20.000000
1	−0.348602	1.393206	5.486800	11.492120	19.495276
2	−0.729391	0.773097	4.996484	10.990438	18.994079
3	−1.144328	+0.140119	4.531027	10.494512	18.496395
4	−1.594493	−0.505243	4.091509	10.003863	18.002228
5	−2.079934	−1.162477	3.677958	9.517982	17.511597
6	−2.599668	−1.831050	3.289357	9.036338	17.024540
7	−3.151841	−2.510421	2.923796	8.558395	16.541110
8	−3.733981	−3.200049	2.578730	8.083615	16.061382
9	−4.343292	−3.899400	2.251269	7.611465	15.585448
10	−4.976895	−4.607952	1.938419	7.141427	15.113424
11	−5.632021	−5.325200	1.637277	6.673001	14.645441
12	−6.306116	−6.050659	1.345136	6.205705	14.181652
13	−6.996903	−6.783867	1.059541	5.739084	13.722230
14	−7.702385	−7.524384	0.778305	5.272706	13.267364
15	−8.420841	−8.271795	0.499495	4.806165	12.817261
16	−9.150793	−9.025710	0.221407	4.339082	12.372144
	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)4\\7\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)2\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)3\\7\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)8\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)6\\5\end{smallmatrix}\right]$

$c^{-2}[\lambda_{0n}(-ic)]$

$c^{-1} \backslash n$	0	1	2	3	4
0.25	−0.571924	−0.564106	+0.013837	0.271192	0.77325
0.24	−0.585248	−0.579552	−0.009136	0.213225	0.67822
0.23	−0.599067	−0.595037	−0.031481	0.157464	0.58772
0.22	−0.613349	−0.610591	−0.053477	0.103825	0.50191
0.21	−0.628058	−0.626242	−0.075480	0.052196	0.42099
0.20	−0.643161	−0.642016	−0.097943	+0.002437	0.34521
0.19	−0.658625	−0.657938	−0.121428	−0.045635	0.27490
0.18	−0.674418	−0.674031	−0.146603	−0.092251	0.21043
0.17	−0.690515	−0.690310	−0.174201	−0.137692	0.15215
0.16	−0.706891	−0.706792	−0.204894	−0.182301	0.10020
0.15	−0.723530	−0.723486	−0.239109	−0.226469	0.05428
0.14	−0.740416	−0.740399	−0.276886	−0.270627	+0.01332
0.13	−0.757541	−0.757535	−0.317881	−0.315206	−0.02476
0.12	−0.774896	−0.774894	−0.361548	−0.360594	−0.06337
0.11	−0.792476	−0.792476	−0.407352	−0.407081	−0.10723
0.10	−0.810279	−0.810279	−0.454896	−0.454839	−0.16065
0.09	−0.828301	−0.828301	−0.503937	−0.503928	−0.22419
0.08	−0.846539	−0.846539	−0.554337	−0.554337	−0.29513
0.07	−0.864992	−0.864992	−0.606021	−0.606021	−0.37117
0.06	−0.883657	−0.883657	−0.658931	−0.658931	−0.45125
0.05	−0.902532	−0.902532	−0.713025	−0.713025	−0.53495
0.04	−0.921616	−0.921616	−0.768262	−0.768262	−0.62200
0.03	−0.940906	−0.940906	−0.824608	−0.824608	−0.71218
0.02	−0.960402	−0.960402	−0.882031	−0.882031	−0.80533
0.01	−0.980100	−0.980100	−0.940503	−0.940503	−0.90131
0.00	−1.000000	−1.000000	−1.000000	−1.000000	−1.00000
	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)6\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)3\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)4\\7\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)3\\6\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)1\\8\end{smallmatrix}\right]$

Таблица 21.1. Собственные значения — вытянутые и сплюснутые

Вытянутые

$\lambda_{mn}(c) - m(m+1)$

$\lambda_{1n}(c) - 2$

$c^2 \backslash n$	1	2	3	4	5
0	0.000000	4.000000	10.000000	18.000000	28.000000
1	0.195548	4.424699	10.467915	18.481696	28.488065
2	0.382655	4.841718	10.937881	18.965685	28.977891
3	0.561975	5.251162	11.409266	19.451871	29.469456
4	0.734111	5.653149	11.881493	19.940143	29.962738
5	0.899615	6.047807	12.354034	20.430382	30.457716
6	1.058995	6.435272	12.826413	20.922458	30.954363
7	1.212711	6.815691	13.298196	21.416235	31.452653
8	1.361183	7.189213	13.768997	21.911569	31.952557
9	1.504795	7.555998	14.238466	22.408312	32.454044
10	1.643895	7.916206	14.706292	22.906311	32.957080
11	1.778798	8.270004	15.172199	23.405410	33.461629
12	1.909792	8.617558	15.635940	23.905451	33.967652
13	2.037141	8.959038	16.097297	24.406277	34.475109
14	2.161081	9.294612	16.556078	24.907729	34.983956
15	2.281832	9.624450	17.012115	25.409649	35.494147
16	2.399593	9.948719	17.465260	25.911881	36.005634
	$\left[{(-3)1 \atop 5}\right]$	$\left[{(-3)1 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)4 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)8 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)2 \atop 4}\right]$

$c^{-1}[\lambda_{1n}(c) - 2]$

$c^{-1} \backslash n$	1	2	3	4	5
0.25	0.599898	2.487179	4.366315	6.47797	9.00140
0.24	0.613295	2.491544	4.338520	6.38296	8.80891
0.23	0.627023	2.497852	4.315609	6.29522	8.62445
0.22	0.641073	2.506130	4.297923	6.21556	8.44916
0.21	0.655431	2.516383	4.285792	6.14494	8.28436
0.20	0.670084	2.528591	4.279522	6.08438	8.13163
0.19	0.685014	2.542705	4.279366	6.03498	7.99282
0.18	0.700204	2.558644	4.285495	5.99788	7.87010
0.17	0.715632	2.576296	4.297965	5.97420	7.76598
0.16	0.731281	2.595516	4.316672	5.96496	7.68328
0.15	0.747129	2.616135	4.341320	5.97090	7.62508
0.14	0.763159	2.637968	4.371397	5.99230	7.59446
0.13	0.779353	2.660829	4.406191	6.02874	7.59407
0.12	0.795696	2.684536	4.444844	6.07889	7.62539
0.11	0.812174	2.708934	4.486445	6.14051	7.68773
0.10	0.828776	2.733891	4.530151	6.21063	7.77728
0.09	0.845493	2.759305	4.575277	6.28624	7.88714
0.08	0.862316	2.785099	4.621329	6.36482	8.00897
0.07	0.879237	2.811212	4.667984	6.44473	8.13579
0.06	0.896251	2.837600	4.715031	6.52505	8.26355
0.05	0.913352	2.864224	4.762333	6.60532	8.39048
0.04	0.930535	2.891056	4.809790	6.68528	8.51592
0.03	0.947796	2.918069	4.857332	6.76480	8.63963
0.02	0.965129	2.945243	4.904906	6.84378	8.76153
0.01	0.982531	2.972558	4.952472	6.92219	8.88164
0.00	1.000000	3.000000	5.000000	7.00000	9.00000
	$\left[{(-5)4 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)2 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)8 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)4 \atop 7}\right]$

Таблица 21.1. Собственные значения — вытянутые и сплюснутые

Сплюснутые

$\lambda_{mn}(-ic)-m(m+1)$

$\lambda_{1n}(-ic)-2$

$c^2\backslash n$	1	2	3	4	5
0	0.000000	4.000000	10.000000	18.000000	28.000000
1	-0.204695	3.567527	9.534818	17.520683	27.513713
2	-0.419293	3.127202	9.073104	17.043817	27.029223
3	-0.644596	2.678958	8.615640	16.569461	26.546548
4	-0.881446	2.222747	8.163245	16.097655	26.065706
5	-1.130712	1.758534	7.716768	15.628426	25.586715
6	-1.393280	1.286300	7.277072	15.161786	25.109592
7	-1.670028	0.806045	6.845015	14.697727	24.634357
8	-1.961809	+0.317782	6.421425	14.236229	24.161031
9	-2.269420	-0.178458	6.007074	13.777252	23.689634
10	-2.593577	-0.682630	5.602649	13.320743	23.220190
11	-2.934882	-1.194673	5.208724	12.866634	22.752726
12	-3.293803	-1.714511	4.825732	12.414840	22.287271
13	-3.670646	-2.242055	4.453947	11.965266	21.823856
14	-4.065548	-2.777205	4.093464	11.517803	21.362516
15	-4.478470	-3.319848	3.744202	11.072331	20.903290
16	-4.909200	-3.869861	3.405903	10.628718	20.446222
	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)2\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)1\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)1\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)3\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)3\\4\end{smallmatrix}\right]$

$c^{-2}[\lambda_{1n}(-ic)-2]$

$c^{-1}\backslash n$	1	2	3	4	5
0.25	-0.306825	-0.241866	0.21286	0.66429	1.2778
0.24	-0.318148	-0.266693	0.17062	0.57759	1.1420
0.23	-0.330984	-0.291340	0.13125	0.49460	1.0120
0.22	-0.345469	-0.315894	0.09476	0.41533	0.8879
0.21	-0.361702	-0.340450	0.06107	0.33974	0.7697
0.20	-0.379735	-0.365113	0.03001	0.26779	0.6575
0.19	-0.399564	-0.389998	+0.00127	0.19942	0.5515
0.18	-0.421125	-0.415222	-0.02563	0.13449	0.4520
0.17	-0.444308	-0.440907	-0.05142	0.07282	0.3591
0.16	-0.468974	-0.467166	-0.07710	+0.01411	0.2735
0.15	-0.494976	-0.494104	-0.10406	-0.04205	0.1958
0.14	-0.522180	-0.521805	-0.13412	-0.09625	0.1271
0.13	-0.550474	-0.550335	-0.16924	-0.14929	0.0680
0.12	-0.579775	-0.579732	-0.21076	-0.20210	+0.0183
0.11	-0.610027	-0.610016	-0.25868	-0.25572	-0.0250
0.10	-0.641193	-0.641191	-0.31185	-0.31111	-0.0685
0.09	-0.673251	-0.673251	-0.36901	-0.36888	-0.1219
0.08	-0.706186	-0.706186	-0.42934	-0.42932	-0.1907
0.07	-0.739985	-0.739985	-0.49242	-0.49242	-0.2714
0.06	-0.774638	-0.774638	-0.55807	-0.55807	-0.3598
0.05	-0.810135	-0.810135	-0.62616	-0.62616	-0.4542
0.04	-0.846468	-0.846468	-0.69657	-0.69657	-0.5540
0.03	-0.883628	-0.883628	-0.76923	-0.76923	-0.6588
0.02	-0.921608	-0.921608	-0.84406	-0.84406	-0.7682
0.01	-0.960401	-0.960401	-0.92100	-0.92100	-0.8820
0.00	-1.000000	-1.000000	-1.00000	-1.00000	-1.0000
	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)2\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)1\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)8\\6\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)5\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)2\\7\end{smallmatrix}\right]$

Таблица 21.1. Собственные значения — вытянутые и сплюснутые

Вытянутые

$\lambda_{mn}(c) - m(m+1)$

$\lambda_{2n}(c) - 6$

$c^2 \backslash n$	2	3	4	5	6
0	0.000000	6.000000	14.000000	24.000000	36.000000
1	0.140948	6.331101	14.402353	24.436145	36.454889
2	0.278219	6.657791	14.804100	24.872744	36.910449
3	0.412006	6.980147	15.205077	25.309731	37.366657
	0.542495	7.298250	15.605133	25.747043	37.823486
5	0.669857	7.612179	16.004126	26.184612	38.280913
6	0.794252	7.922016	16.401931	26.622373	38.738910
7	0.915832	8.227840	16.798429	27.060261	39.197451
8	1.034738	8.529734	17.193516	27.498208	39.656510
9	1.151100	8.827778	17.587093	27.936151	40.116059
10	1.265042	9.122052	17.979073	28.374023	40.576070
11	1.376681	9.412636	18.369377	28.811761	41.036514
12	1.486122	9.699610	18.757932	29.249302	41.497364
13	1.593469	9.983052	19.144675	29.686584	41.958589
14	1.698816	10.263039	19.529549	30.123544	42.420160
15	1.802252	10.539650	19.912501	30.560125	42.882048
16	1.903860	10.812958	20.293486	30.996267	43.344222
	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)5\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)6\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)2\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)6\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)8\\4\end{smallmatrix}\right]$

$c^{-1}[\lambda_{2n}(c) - 6]$

$c^{-1} \backslash n$	2	3	4	5	6
0.25	0.475965	2.703239	5.073371	7.74906	10.8360
0.24	0.489447	2.683149	4.994116	7.58138	10.5536
0.23	0.503526	2.665356	4.919290	7.41971	10.2781
0.22	0.518220	2.650003	4.849313	7.26479	10.0103
0.21	0.533551	2.637236	4.784640	7.11743	9.7512
0.20	0.549534	2.627196	4.725757	6.97858	9.5023
0.19	0.566185	2.620017	4.673177	6.84931	9.2649
0.18	0.583513	2.615819	4.627427	6.73081	9.0409
0.17	0.601526	2.614701	4.589031	6.62442	8.8323
0.16	0.620224	2.616735	4.558480	6.53155	8.6417
0.15	0.639604	2.621954	4.536196	6.45371	8.4718
0.14	0.659659	2.630349	4.522485	6.39236	8.3260
0.13	0.680376	2.641862	4.517479	6.34878	8.2078
0.12	0.701737	2.656384	4.521086	6.32389	8.1208
0.11	0.723722	2.673764	4.532956	6.31794	8.0678
0.10	0.746308	2.693817	4.552484	6.33030	8.0507
0.09	0.769471	2.716339	4.578871	6.35935	8.0688
0.08	0.793186	2.741120	4.611219	6.40263	8.1184
0.07	0.817429	2.767960	4.648642	6.45738	8.1932
0.06	0.842175	2.796673	4.690346	6.52096	8.2864
0.05	0.867402	2.827089	4.735658	6.59127	8.3919
0.04	0.893087	2.859059	4.784022	6.66670	8.5057
0.03	0.919209	2.892449	4.834980	6.74607	8.6249
0.02	0.945747	2.927138	4.888160	6.82849	8.7477
0.01	0.972684	2.963019	4.943252	6.91330	8.8730
0.00	1.000000	3.000000	5.000000	7.00000	9.0000
	$\left[\begin{smallmatrix}(-5)9\\4\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-4)4\\5\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)1\\6\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)2\\6\end{smallmatrix}\right]$	$\left[\begin{smallmatrix}(-3)4\\5\end{smallmatrix}\right]$

Таблица 21.1. Собственные значения — вытянутые и сплюснутые

Сплюснутые

$\lambda_{mn}(-ic) - m(m+1)$

$\lambda_{2n}(-ic)-6$

$c^2 \backslash n$	2	3	4	5	6
0	0.000000	6.000000	14.000000	24.000000	36.000000
1	−0.144837	5.664409	13.597220	23.564371	35.545806
2	−0.293786	5.324253	13.194206	23.129322	35.092330
3	−0.447086	4.979458	12.791168	22.694912	34.639597
4	−0.604989	4.629951	12.388328	22.261201	34.187627
5	−0.767764	4.275662	11.985928	21.828245	33.736444
6	−0.935698	3.916525	11.584224	21.396098	33.286069
7	−1.109090	3.552475	11.183489	20.964812	32.836522
8	−1.288259	3.183450	10.784014	20.534436	32.387826
9	−1.473539	2.809393	10.386106	20.105013	31.940000
10	−1.665278	2.430250	9.990084	19.676587	31.493066
11	−1.863838	2.045970	9.596286	19.249195	31.047043
12	−2.069595	1.656508	9.205059	18.822869	30.601952
13	−2.282933	1.261822	8.816762	18.397640	30.157814
14	−2.504245	0.861875	8.431761	17.973532	29.714648
15	−2.733927	0.456635	8.050424	17.550565	29.272476
16	−2.972375	0.046076	7.673121	17.128753	28.831317
	$\begin{bmatrix}(-3)1\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)7\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)5\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)1\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)1\\4\end{bmatrix}$

$c^{-2}[\lambda_{2n}(-ic)-6]$

$c^{-1} \backslash n$	2	3	4	5	6
0.25	−0.185773	+0.002879	0.47957	1.07054	1.8019
0.24	−0.190754	−0.030028	0.41280	0.95365	1.6261
0.23	−0.196680	−0.062228	0.34933	0.84167	1.4577
0.22	−0.203790	−0.093813	0.28933	0.73461	1.2965
0.21	−0.212386	−0.124893	0.23297	0.63251	1.1428
0.20	−0.222841	−0.155607	0.18049	0.53537	0.9964
0.19	−0.235596	−0.186120	0.13215	0.44322	0.8574
0.18	−0.251126	−0.216631	0.08816	0.35607	0.7260
0.17	−0.269873	−0.247375	0.04864	0.27389	0.6022
0.16	−0.292149	−0.278624	+0.01342	0.19662	0.4863
0.15	−0.318047	−0.310677	−0.01813	0.12409	0.3785
0.14	−0.347414	−0.343847	−0.04727	+0.05600	0.2795
0.13	−0.379928	−0.378432	−0.07609	−0.00822	0.1901
0.12	−0.415213	−0.414688	−0.10778	−0.06954	0.1120
0.11	−0.452947	−0.452800	−0.14643	−0.12937	+0.0470
0.10	−0.492902	−0.492871	−0.19508	−0.18959	−0.0051
0.09	−0.534942	−0.534937	−0.25333	−0.25217	−0.0517
0.08	−0.578991	−0.578991	−0.31876	−0.31861	−0.1076
0.07	−0.625006	−0.625006	−0.38955	−0.38955	−0.1844
0.06	−0.672956	−0.672956	−0.46494	−0.46494	−0.2768
0.05	−0.722813	−0.722813	−0.54456	−0.54456	−0.3791
0.04	−0.774556	−0.774556	−0.62821	−0.62821	−0.4895
0.03	−0.828164	−0.828164	−0.71571	−0.71571	−0.6073
0.02	−0.883618	−0.883618	−0.80691	−0.80691	−0.7319
0.01	−0.940902	−0.940902	−0.90171	−0.90171	−0.8629
0.00	−1.000000	−1.000000	−1.00000	−1.00000	−1.0000
	$\begin{bmatrix}(-4)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)1\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)6\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)3\\8\end{bmatrix}$

Таблица 21.2. Угловые функции — вытянутые и сплюснутые

Вытянутые

$S_{mn}(c, \cos\theta)$

m	n	$c\backslash\theta$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0	0	1	0.8481	0.8525	0.8651	0.8847	0.9091	0.9354	0.9606	0.9815	0.9952	1.000
		2	0.5315	0.5431	0.5772	0.6320	0.7032	0.7842	0.8654	0.9355	0.9831	1.000
		3	0.2675	0.2815	0.3242	0.3967	0.4980	0.6226	0.7571	0.8805	0.9682	1.000
		4	0.1194	0.1312	0.1689	0.2379	0.3442	0.4885	0.6589	0.8271	0.9530	1.000
		5	0.0502	0.0585	0.0861	0.1419	0.2380	0.3839	0.5742	0.7776	0.9383	1.000
0	1	1	0.9046	0.8936	0.8602	0.8035	0.7225	0.6169	0.4878	0.3381	0.1731	0
		2	0.6681	0.6665	0.6598	0.6429	0.6081	0.5472	0.4540	0.3270	0.1717	0
		3	0.4034	0.4099	0.4273	0.4489	0.4630	0.4543	0.4068	0.3110	0.1695	0
		4	0.2042	0.2138	0.2415	0.2833	0.3294	0.3618	0.3566	0.2929	0.1669	0
		5	0.0916	0.1001	0.1262	0.1703	0.2279	0.2840	0.3104	0.2752	0.1643	0
0	2	1	1.022	0.9795	0.8553	0.6621	0.4198	0.1556	-0.0988	-0.3105	-0.4509	-0.5000
		2	1.064	1.030	0.9271	0.7579	0.5296	0.2602	-0.0192	-0.2668	-0.4385	-0.5000
		3	1.041	1.023	0.9640	0.8497	0.6660	0.4104	+0.1061	-0.1938	-0.4171	-0.5000
		4	0.8730	0.8768	0.8787	0.8513	0.7549	0.5553	0.2512	-0.0998	-0.3879	-0.5000
		5	0.6018	0.6233	0.6792	0.7407	0.7537	0.6494	0.3844	+0.0008	-0.3542	-0.5000
0	3	1	0.9892	0.9042	0.6692	0.3400	-0.0045	-0.2816	-0.4259	-0.4085	-0.2467	0
		2	0.9590	0.8864	0.6816	0.3840	+0.0560	-0.2261	-0.3907	-0.3949	-0.2447	0
		3	0.9090	0.8546	0.6957	0.4485	0.1501	-0.1364	-0.3319	-0.3714	-0.2412	0
		4	0.8197	0.7877	0.6868	0.5087	0.2591	-0.0215	-0.2514	-0.3376	-0.2361	0
		5	0.6650	0.6560	0.6183	0.5245	0.3482	+0.0971	-0.1575	-0.2952	-0.2293	0
1	1	1	0	0.1578	0.3134	0.4643	0.6067	0.7355	0.8450	0.9290	0.9819	1.000
		2	0	0.1194	0.2437	0.3757	0.5149	0.6562	0.7892	0.9000	0.9740	1.000
		3	0	0.0776	0.1654	0.2724	0.4030	0.5546	0.7144	0.8597	0.9627	1.000
		4	0	0.0449	0.1018	0.1832	0.2994	0.4537	0.6353	0.8150	0.9497	1.000
		5	0	0.0239	0.0588	0.1179	0.2162	0.3650	0.5602	0.7698	0.9361	1.000
1	2	1	0	0.4788	0.9054	1.232	1.417	1.435	1.276	0.9562	0.5119	0
		2	0	0.3896	0.7509	1.052	1.253	1.316	1.212	0.9335	0.5088	0
		3	0	0.2780	0.5538	0.8148	1.030	1.149	1.118	0.8992	0.5039	0
		4	0	0.1762	0.3683	0.5813	0.7968	0.9643	1.008	0.8575	0.4979	0
		5	0	0.1011	0.2254	0.3896	0.5906	0.7879	0.8957	0.8127	0.4911	0
1	3	1	0	0.9928	1.745	2.075	1.903	1.280	0.3775	-0.5521	-1.244	-1.500
		2	0	0.9559	1.710	2.092	1.998	1.432	0.5298	-0.4541	-1.214	-1.500
		3	0	0.8745	1.611	2.063	2.097	1.640	0.7606	-0.2972	-1.174	-1.500
		4	0	0.7393	1.418	1.934	2.128	1.841	1.032	-0.0951	-1.097	-1.500
		5	0	0.5662	1.146	1.691	2.047	1.975	1.299	+0.1319	-1.017	-1.500
2	2	1	0	0.0844	0.3295	0.7111	1.189	1.710	2.211	2.627	2.903	3.000
		2	0	0.0690	0.2744	0.6092	1.054	1.572	2.101	2.566	2.886	3.000
		3	0	0.0500	0.2051	0.4773	0.8738	1.380	1.944	2.475	2.859	3.000
		4	0	0.0328	0.1405	0.3487	0.6876	1.171	1.764	2.367	2.827	3.000
		5	0	0.0198	0.0898	0.2414	0.5212	0.9701	1.580	2.251	2.791	3.000
2	3	1	0	0.4222	1.570	3.116	4.596	5.530	5.548	4.501	2.522	0
		2	0	0.3597	1.358	2.755	4.175	5.170	5.327	4.417	2.510	0
		3	0	0.2765	1.070	2.255	3.576	4.641	4.994	4.286	2.491	0
		4	0	0.1934	0.7758	1.723	2.909	4.025	4.588	4.122	2.466	0
		5	0	0.1244	0.5226	1.243	2.269	3.395	4.150	3.936	2.437	0

Взято из [21.4].

Таблица 21.2. Угловые функции — вытянутые и сплюснутые

Сплюснутые

$S_{mn}(-ic, \eta)$

m	n	$c \backslash \eta$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0	1	1.000	1.002	1.007	1.016	1.028	1.044	1.064	1.088	1.115	1.147	1.183
		2	1.000	1.008	1.032	1.073	1.132	1.210	1.310	1.434	1.585	1.767	1.986
		3	1.000	1.022	1.089	1.205	1.377	1.617	1.940	2.366	2.923	3.648	4.589
		4	1.000	1.047	1.191	1.449	1.854	2.452	3.319	4.557	6.323	8.837	12.42
		5	1.000	1.083	1.341	1.835	2.648	3.952	6.000	9.211	14.23	22.11	34.48
0	1	1	0	0.1001	0.2009	0.3027	0.4065	0.5128	0.6222	0.7353	0.8530	0.9760	1.105
		2	0	0.1004	0.2034	0.3114	0.4274	0.5542	0.6952	0.8539	1.035	1.243	1.484
		3	0	0.1011	0.2079	0.3273	0.4664	0.6338	0.8398	1.098	1.425	1.842	2.378
		4	0	0.1016	0.2150	0.3526	0.5298	0.7681	1.096	1.552	2.195	3.105	4.396
		5	0	0.1032	0.2252	0.3884	0.6252	0.9804	1.525	2.369	3.684	5.741	8.970
0	2	1	−0.5000	−0.4863	−0.4450	−0.3757	−0.2779	−0.1507	+0.0070	0.1965	0.4197	0.6784	0.9749
		2	−0.5000	−0.4897	−0.4585	−0.4052	−0.3277	−0.2231	−0.0872	+0.0849	0.2999	0.5660	0.8930
		3	−0.5000	−0.4943	−0.4766	−0.4448	−0.3952	−0.3223	−0.2183	−0.0721	+0.1311	0.3845	0.7958
		4	−0.5000	−0.4994	−0.4966	−0.4891	−0.4716	−0.4356	−0.3681	−0.2485	−0.0458	0.2868	0.8201
		5	−0.5000	−0.5061	−0.5234	−0.5495	−0.5780	−0.5977	−0.5869	−0.5067	−0.2880	0.1892	1.132
0	3	1	0	−0.1477	−0.2810	−0.3855	−0.4466	−0.4491	−0.3768	−0.2130	+0.0600	0.4613	1.011
		2	0	−0.1480	−0.2839	−0.3947	−0.4668	−0.4839	−0.4275	−0.2757	−0.0015	0.4274	1.051
		3	0	−0.1486	−0.2885	−0.4097	−0.4998	−0.5421	−0.5140	−0.3841	−0.1091	0.3711	1.138
		4	0	−0.1495	−0.2949	−0.4306	−0.5415	−0.6270	−0.6432	−0.5540	−0.2765	0.2912	1.327
		5	0	−0.1504	−0.3033	−0.4589	−0.6123	−0.7489	−0.8356	−0.8080	−0.5447	0.1715	1.723
1	1	1	1.000	0.9961	0.9838	0.9628	0.9316	0.8884	0.8299	0.7506	0.6402	0.4731	0
		2	1.000	0.9994	0.9973	0.9923	0.9827	0.9652	0.9340	0.8802	0.7864	0.6118	0
		3	1.000	1.006	1.025	1.055	1.093	1.135	1.172	1.188	1.149	0.9724	0
		4	1.000	1.020	1.079	1.178	1.319	1.498	1.708	1.920	2.067	1.950	0
		5	1.000	1.041	1.174	1.406	1.776	2.242	2.878	3.642	4.400	4.651	0
1	2	1	0	0.2987	0.5897	0.8643	1.113	1.322	1.478	1.554	1.508	1.247	0
		2	0	0.2985	0.5950	0.8815	1.153	1.398	1.600	1.730	1.734	1.487	0
		3	0	0.3005	0.6043	0.9140	1.228	1.541	1.837	2.082	2.200	2.000	0
		4	0	0.3022	0.6213	0.9640	1.349	1.780	2.250	2.723	3.092	3.033	0
		5	0	0.2990	0.6400	1.040	1.537	2.165	2.947	3.868	4.786	5.138	0
1	3	1	−1.500	−1.421	−1.189	−0.8136	−0.3165	0.2710	0.9015	1.501	1.946	1.988	0
		2	−1.500	−1.431	−1.228	−0.8941	−0.4427	+0.1060	0.7174	1.329	1.826	1.951	0
		3	−1.500	−1.447	−1.289	−1.024	−0.6502	−0.1738	+0.3916	1.006	1.572	1.834	0
		4	−1.500	−1.467	−1.364	−1.184	−0.9148	−0.5415	−0.0538	0.5403	1.177	1.619	0
		5	−1.500	−1.486	−1.442	−1.353	−1.198	−0.9435	−0.5506	0.0161	0.7471	1.439	0
2	2	1	3.000	2.972	2.889	2.748	2.549	2.291	1.970	1.585	1.131	0.6041	0
		2	3.000	2.979	2.915	2.805	2.644	2.425	2.138	1.770	1.305	0.7234	0
		3	3.000	2.992	2.965	2.915	2.830	2.693	2.481	2.161	1.687	0.9944	0
		4	3.000	3.013	3.052	3.111	3.170	3.200	3.157	2.966	2.512	1.615	0
		5	3.000	3.052	3.211	3.469	3.813	4.202	4.564	4.746	4.460	3.188	0
2	3	1	0	1.486	2.886	4.115	5.086	5.704	5.877	5.503	4.477	2.683	0
		2	0	1.488	2.906	4.180	5.226	5.954	6.251	5.982	4.990	3.077	0
		3	0	1.494	2.943	4.295	5.482	6.413	6.951	6.904	6.008	3.879	0
		4	0	1.498	2.996	4.475	5.891	7.166	8.132	8.515	7.857	5.408	0
		5	0	1.509	3.073	4.738	6.515	8.347	10.07	11.28	11.21	8.354	0

Таблица 21.3. **Вытянутые радиальные функции первого и второго рода**

			$R^{(1)}_{mn}(c,\xi)$				.16, $R^{(2)}_{mn}(c,\xi)$			
m	n	$c\backslash\xi$	1.005	1.020	1.044	1.077	1.005	1.020	1.044	1.077
0	0	1	(−1)9.468	(−1)9.419	(−1)9.339	(−1)9.228	(0)−2.838	(0)−2.096	(0)−1.666	(0)−1.356
		2	(−1)8.257	(−1)8.077	(−1)7.789	(−1)7.392	(0)−1.244	(−1)−8.020	(−1)−5.341	(−1)−3.333
		3	(−1)7.026	(−1)6.662	(−1)6.091	(−1)5.330	(−1)−7.104	(−1)−3.422	(−1)−1.281	(−2) 3.51
		4	(−1)6.054	(−1)5.471	(−1)4.585	(−1)3.463	(−1)−4.508	(−1)−1.287	(−2) 6.61	(−1) 1.952
		5	(−1)5.313	(−1)4.488	(−1)3.287	(−1)1.869	(−1)−3.052	(−2)−1.02	(−1) 1.537	(−1) 2.291
0	1	1	(−1)3.153	(−1)3.190	(−1)3.249	(−1)3.328	(0)−6.912	(0)−4.801	(0)−3.669	(0)−2.920
		2	(−1)5.289	(−1)5.298	(−1)5.308	(−1)5.311	(0)−2.189	(0)−1.540	(0)−1.177	(−1)−9.216
		3	(−1)6.064	(−1)5.960	(−1)5.786	(−1)5.529	(0)−1.133	(−1)−7.365	(−1)−4.987	(−1)−3.207
		4	(−1)5.892	(−1)5.612	(−1)5.162	(−1)4.542	(−1)−6.741	(−1)−3.528	(−1)−1.534	(−3)−4.9
		5	(−1)5.381	(−1)4.888	(−1)4.125	(−1)3.137	(−1)−4.293	(−1)−1.390	(−2) 3.87	(−1) 1.594
0	2	1	(−2)4.470	(−2)4.655	(−2)4.954	(−2)5.373	(1)−3.593	(1)−2.185	(1)−1.484	(1)−1.056
		2	(−1)1.696	(−1)1.749	(−1)1.833	(−1)1.947	(0)−5.241	(0)−3.358	(0)−2.403	(0)−1.807
		3	(−1)3.295	(−1)3.346	(−1)3.421	(−1)3.509	(0)−2.031	(0)−1.364	(0)−1.007	(−1)−7.694
		4	(−1)4.507	(−1)4.477	(−1)4.413	(−1)4.293	(0)−1.095	(−1)−7.053	(−1)−4.783	(−1)−3.115
		5	(−1)4.952	(−1)4.763	(−1)4.444	(−1)3.976	(−1)−7.388	(−1)−4.417	(−1)−2.630	(−1)−1.340
0	3	1	(−3)3.912	(−3)4.249	(−3)4.814	(−3)5.638	(−2)−3.288	(2)−1.659	(2)−1.082	(1)−6.916
		2	(−2)3.085	(−2)3.317	(−2)3.700	(−2)4.249	(−1)−2.194	(1)−1.223	(0)−7.705	(0)−5.123
		3	(−2)9.956	(−1)1.054	(−1)1.147	(−1)1.275	(0)−5.020	(0)−2.966	(0)−1.985	(0)−1.408
		4	(−1)2.107	(−1)2.183	(−1)2.298	(−1)2.443	(0)−2.043	(0)−1.293	(−1)−9.141	(−1)−6.749
		5	(−1)3.298	(−1)3.329	(−1)3.360	(−1)3.362	(0)−1.149	(−1)−7.422	(−1)−5.182	(−1)−3.612
1	1	1	(−2)3.270	(−2)6.544	(−2)9.716	(−1)1.287	(1)−1.506	(0)−7.294	(0)−4.734	(0)−3.432
		2	(−2)6.187	(−1)1.227	(−1)1.793	(−1)2.323	(0)−4.079	(0)−2.077	(0)−1.417	(0)−1.071
		3	(−2)8.596	(−1)1.677	(−1)2.386	(−1)2.973	(0)−2.019	(0)−1.075	(−1)−7.453	(−1)−5.480
		4	(−1)1.053	(−1)2.007	(−1)2.744	(−1)3.221	(0)−1.273	(−1)−6.911	(−1)−4.585	(−1)−2.924
		5	(−1)1.211	(−1)2.235	(−1)2.894	(−1)3.118	(−1)−9.101	(−1)−4.885	(−1)−2.874	(−1)−1.248
1	2	1	(−3)6.503	(−2)1.322	(−2)2.012	(−2)2.754	(1)−7.295	(1)−3.269	(1)−1.939	(1)−1.275
		2	(−2)2.378	(−2)4.802	(−2)7.227	(−2)9.738	(1)−1.014	(0)−4.717	(0)−2.932	(0)−2.038
		3	(−2)4.658	(−2)9.296	(−1)1.372	(−1)1.798	(0)−3.552	(0)−1.751	(0)−1.156	(−1)−8.473
		4	(−2)6.975	(−1)1.367	(−1)1.960	(−1)2.460	(0)−1.842	(−1)−9.597	(−1)−6.533	(−1)−4.718
		5	(−2)9.035	(−1)1.739	(−1)2.376	(−1)2.803	(0)−1.778	(−1)−6.362	(−1)−4.170	(−1)−2.651
1	3	1	(−4)7.586	(−3)1.577	(−3)2.483	(−3)3.556	(2)−6.014	(2)−2.491	(2)−1.354	(1)−8.127
		2	(−3)5.725	(−2)1.183	(−2)1.845	(−2)2.607	(1)−4.027	(1)−1.707	(0)−9.553	(0)−5.934
		3	(−2)1.737	(−2)3.553	(−2)5.453	(−2)7.529	(0)−9.025	(0)−3.994	(0)−2.354	(0)−1.552
		4	(−2)3.516	(−2)7.089	(−1)1.063	(−1)1.418	(0)−3.449	(0)−1.629	(0)−1.032	(−1)−7.288
		5	(−2)5.604	(−1)1.108	(−1)1.608	(−1)2.048	(0)−1.692	(−1)−8.600	(−1)−5.214	(−1)−3.006
2	2	1	(−4)6.612	(−3)2.659	(−3)5.898	(−2)1.044	(2)−3.750	(1)−9.112	(1)−3.973	(1)−2.156
		2	(−3)2.566	(−2)1.025	(−2)2.249	(−2)3.920	(1)−4.852	(1)−1.203	(0)−5.417	(0)−3.077
		3	(−3)5.520	(−2)2.181	(−2)4.698	(−2)7.974	(1)−1.515	(0)−3.889	(0)−1.852	(0)−1.126
		4	(−3)9.302	(−2)3.616	(−2)7.587	(−1)1.239	(0)−6.821	(0)−1.843	(−1)−9.431	(−1)−6.132
		5	(−2)1.372	(−2)5.223	(−1)1.058	(−1)1.639	(0)−3.755	(0)−1.081	(−1)−5.907	(−1)−3.910
2	3	1	(−5)9.415	(−4)3.845	(−4)8.736	(−3)1.596	(3)−2.609	(2)−6.096	(2)−2.517	(2)−1.279
		2	(−4)7.128	(−3)2.896	(−3)6.525	(−2)1.178	(2)−1.728	(1)−4.095	(1)−1.727	(0)−9.031
		3	(−3)2.208	(−3)8.889	(−2)1.974	(−2)3.492	(1)−3.745	(0)−9.098	(0)−3.994	(0)−2.208
		4	(−3)4.683	(−2)1.862	(−2)4.048	(−2)6.946	(1)−1.334	(0)−3.370	(0)−1.573	(−1)−9.397
		5	(−3)8.060	(−2)3.150	(−2)6.657	(−1)1.096	(0)−6.274	(0)−1.671	(−1)−8.409	(−1)−5.379

Взято из [21.4].

Таблица 21.4. Сплюснутые радиальные функции первого и второго рода

			$R^{(1)}_{mn}(-ic,\ i\xi)$		$R^{(2)}_{mn}(-ic,\ i\xi)$	
m	n	$c\backslash\xi$	0	0.75	0	0.75
0	0	0.2	(-1) 9.9557	(-1) 9.9183	(0) -7.7864	(0) -4.5290
		0.5	(-1) 9.7265	(-1) 9.4976	(0) -2.9707	(0) -1.5906
		0.8	(-1) 9.3168	(-1) 8.7520	(0) -1.7002	(-1) -7.5527
		1.0	(-1) 8.9565	(-1) 8.1032	(0) -1.2524	(-1) -4.4277
		1.5	(-1) 7.8320	(-1) 6.1209	(-1) -6.2189	(-2) +1.2204
		2.0	(-1) 6.5571	(-1) 3.9526	(-1) -3.0356	(-1) 2.2634
		2.5	(-1) 5.3430	(-1) 1.9680	(-1) -1.3758	(-1) 3.0225
0	1	0.2	0	(-2) 4.9808	(1) -7.5120	(1) -2.3239
		0.5	0	(-1) 1.2202	(1) -1.2120	(0) -4.0338
		0.8	0	(-1) 1.8802	(0) -4.8077	(0) -1.7744
		1.0	0	(-1) 2.2696	(0) -3.1202	(0) -1.2314
		1.5	0	(-1) 3.0132	(0) -1.4537	(-1) -6.3156
		2.0	0	(-1) 3.3765	(-1) -8.7035	(-1) -3.4641
		2.5	0	(-1) 3.3530	(-1) -6.0006	(-1) -1.5694
0	2	0.2	(-4) 8.8992	(-3) 2.3840	(3) -2.2106	(2) -3.4260
		0.5	(-3) 5.5964	(-2) 1.4744	(2) -1.4205	(1) -2.2700
		0.8	(-2) 1.4489	(-2) 3.6993	(1) -3.5130	(0) -5.9376
		1.0	(-2) 2.2868	(-2) 5.6728	(1) -1.8068	(0) -3.2496
		1.5	(-2) 5.3150	(-1) 1.1932	(0) -5.5629	(0) -1.2084
		2.0	(-2) 9.7914	(-1) 1.9147	(0) -2.5149	(-1) -6.5653
		2.5	(-1) 1.5649	(-1) 2.5730	(0) -1.4263	(-1) -3.9702
1	1	0.2	(-2) 6.6454	(-2) 8.2880	(1) -5.9560	(1) -2.1507
		0.5	(-1) 1.6336	(-1) 2.0133	(1) -1.0060	(0) -3.8583
		0.8	(-1) 2.5333	(-1) 3.0524	(0) -4.2765	(0) -1.7483
		1.0	(-1) 3.0762	(-1) 3.6283	(0) -2.9165	(0) -1.2196
		1.5	(-1) 4.1708	(-1) 4.5492	(0) -1.4980	(-1) -5.8081
		2.0	(-1) 4.8229	(-1) 4.6553	(-1) -9.1106	(-1) -2.3210
		2.5	(-1) 5.0170	(-1) 4.0221	(-1) -5.7028	(-3) +3.168
1	2	0.2	0	(-3) 2.4923	(3) -1.8781	(2) -3.2287
		0.5	0	(-2) 1.5314	(2) -1.2123	(1) -2.1474
		0.8	0	(-2) 3.7974	(1) -3.0070	(0) -5.6543
		1.0	0	(-2) 5.7617	(1) -1.5622	(0) -3.1109
		1.5	0	(-1) 1.1699	(0) -4.8667	(0) -1.1709
		2.0	0	(-1) 1.7976	(0) -2.1999	(-1) -6.4134
		2.5	0	(-1) 2.3200	(0) -1.2282	(-1) -3.9677
1	3	0.2	(-5) 1.5236	(-5) 7.2462	(4) -9.6745	(3) -8.1316
		0.5	(-4) 2.3850	(-3) 1.1206	(3) -2.4841	(2) -2.1259
		0.8	(-4) 9.7909	(-3) 4.4965	(2) -3.8151	(1) -3.3786
		1.0	(-3) 1.9166	(-3) 8.6200	(2) -1.5721	(1) -1.4390
		1.5	(-3) 6.5244	(-2) 2.7259	(1) -3.1742	(0) -3.2838
		2.0	(-2) 1.5669	(-2) 5.8920	(1) -1.0386	(0) -1.2924
		2.5	(-2) 3.1147	(-1) 1.0193	(0) -4.4705	(-1) -6.9734
2	2	0.2	(-3) 2.6602	(-3) 4.1496	(3) -1.1093	(2) -2.6888
		0.5	(-2) 1.6413	(-2) 2.5393	(1) -7.2682	(1) -1.8121
		0.8	(-2) 4.1024	(-2) 6.2453	(1) -1.8724	(0) -4.9121
		1.0	(-2) 6.2694	(-2) 9.4031	(0) -9.9297	(0) -2.7508
		1.5	(-1) 1.3055	(-1) 1.8562	(0) -3.4267	(0) -1.0939
		2.0	(-1) 2.0801	(-1) 2.7317	(0) -1.7581	(-1) -6.0206
		2.5	(-1) 2.8190	(-1) 3.3111	(0) -1.0954	(-1) -3.3594

Таблица 21.5. Множители связи для вытянутых функций первого рода

c	$\kappa^{(1)}_{00}$	$\kappa^{(1)}_{01}$	$\kappa^{(1)}_{02}$	$\kappa^{(1)}_{11}$	$\kappa^{(1)}_{12}$	$\kappa^{(1)}_{13}$	$\kappa^{(1)}_{22}$
1	(-1) 8.943	(-1) 9.422	(1) 4.637	(0) 2.770	(1) 4.319	(2) 7.919	(1) 4.234
2	(-1) 6.391	(0) 1.586	(1) 1.268	(0) 1.095	(0) 9.527	(2) 1.002	(0) 8.838
3	(-1) 3.742	(0) 1.829	(0) 6.352	(-1) 5.011	(0) 3.417	(1) 2.982	(0) 2.935
4	(-1) 1.909	(0) 1.795	(0) 3.867	(-1) 2.294	(0) 1.413	(1) 1.222	(0) 1.118
5	(-2) 8.97	(0) 1.665	(0) 2.401	(-1) 1.023	(-1) 6.067	(0) 5.725	(-1) 4.455

Взято из [21.4].

ЛИТЕРАТУРА

21.1. Abramowitz M. Asymptotic expansion of spheroidal wave functions. — J. Math. Phys., 1949, **28**, p. 195—199.

21.2. Blanch G. On the computation of Mathieu functions. — J. Math. Phys., 1946, **25**, p. 1—20.

21.3. Bouwkamp C. J. Theoretische en numerieke behandeling van de buiging door en ronde opening: Diss. — Groningen, 1941.

21.4. Flammer C. Spheroidal wave functions. — Stanford: Stanford Univ. Press, 1957. Русский перевод: Фламмер К Таблицы волновых сфероидальных функций. —М.: ВЦ АН СССР, 1962. — (БМТ; Вып. 17).

21.5. Leitner A., Spence R. D. The oblate spheroidal wave functions. — J. Franklin Inst., 1950, **249**, p. 299—321.

21.6. Meixner J., Schäfke F. W. Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. — B.: Springer-Verlag, 1954.

21.7. Morse P. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953. Русский перевод: Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, 1958, Т.1; 1960, Т.2.

21.8. Page L. The electrical oscillations of a prolate spheroid. — Phys. Rev., 1944, **65**, p. 98—117.

21.9. Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Hutner R. A. Elliptic cylinder and spheroidal wave functions. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1941.

21.10. Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Little J. D. C., Corbató F. J. Spheroidal wave functions. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1956.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

21.11. Ерашевская С. П., Иванов Е. А., Пальцев А. А., Соколова Н. Д. Таблицы сфероидальных волновых функций и их первых производных. — Минск: Наука и техника, 1973, Т.1.

21.12. Комаров И. В., Пономарёв Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. — М.: Наука, 1976.

Глава 22
ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

У. ХОХШТРАССЕР

СОДЕРЖАНИЕ

22.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Система многочленов $f_n(x)$ ($[f_n(x)] = n$ — степень многочлена) называется ортогональной на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ с весовой функцией $w(x)$, если

22.1.1. $$\int_a^b w(x)\, f_n(x)\, f_m(x)\, dx = 0$$

$$(n \neq m;\ n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Весовая функция $w(x)$ ($w(x) \geqslant 0$) определяет каждый многочлен системы ортогональных многочленов $f_n(x)$ с точностью до постоянного множителя. Спецификация этих множителей называется *стандартизацией*.

Введем обозначения:

22.1.2. $$\int_a^b w(x)\, f_n^2(x)\, dx = h_n,$$

$$f_n(x) = k_n x^n + k_n' x^{n-1} + \ldots \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Ортогональные многочлены обладают целым рядом общих свойств. Наиболее важными из них являются следующие:

Дифференциальное уравнение

22.1.3. $g_2(x)\, f_n'' + g_1(x)\, f_n' + a_n f_n = 0,$

где $g_2(x)$, $g_1(x)$ не зависят от n, a_n — постоянная, зависящая только от n.

Рекуррентная формула

22.1.4. $f_{n+1} = (a_n + x b_n) f_n - c_n f_{n-1},$

где

22.1.5. $$b_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad a_n = b_n\left(\frac{k_{n+1}'}{k_{n+1}} - \frac{k_n'}{k_n}\right),$$

$$c_n = \frac{k_{n+1} k_{n-1} h_n}{k_n^2 h_{n-1}}.$$

Формула Родрига

22.1.6. $$f_n = \frac{1}{e_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{ w(x)\, [g(x)]^n \},$$

где $g(x)$ — многочлен от x, не зависящий от n. Система $\left\{ \frac{df_n}{dx} \right\}$ также состоит из ортогональных многочленов.

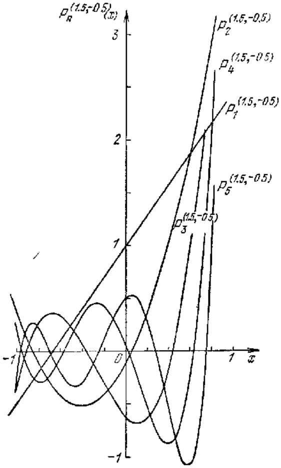


Рис. 22.1. Многочлены Якоби $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$; $\alpha = 1.5$, $\beta = -0.5$, $n = 1(1)5$.

22.2. КЛАССИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

	$f_n(x)$	Название многочлена	a	b	$w(x)$	Стандартизация	h_n	Примечания
22.2.1.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Якоби	-1	1	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}$	$\dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\,\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\alpha>-1$, $\beta>-1$
22.2.2.	$G_n(p, q, x)$	Якоби	0	1	$(1-x)^{p-q}x^{q-1}$	$k_n=1$	$\dfrac{n!\Gamma(n+q)\Gamma(n+p)\Gamma(n+p-q+1)}{(2n+p)\Gamma^2(2n+p)}$	$p-q>-1$, $q>0$
22.2.3.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	Ультрасферический (Гегенбауэра)	-1	1	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$	$C_n^{(\alpha)}(1)=\binom{n+2\alpha-1}{n}$ $(\alpha\neq 0)$ $C_n^{(0)}(1)=\dfrac{2}{n}$, $C_0^{(0)}(1)=1$	$\dfrac{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n!\,(n+\alpha)[\Gamma(\alpha)]^2}$ $(\alpha\neq 0)$ $\dfrac{2\pi}{n^2}$ $(\alpha=0)$	$\alpha>-1/2$
22.2.4.	$T_n(x)$	Чебышева первого рода	-1	1	$(1-x^2)^{-1/2}$	$T_n(1)=1$	$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & n\neq 0\\ \pi, & n=0\end{cases}$	
22.2.5.	$U_n(x)$	Чебышева второго рода	-1	1	$(1-x^2)^{1/2}$	$U_n(1)=n+1$	$\dfrac{\pi}{2}$	
22.2.6.	$C_n(x)$	Чебышева первого рода	-2	2	$\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)^{-1/2}$	$C_n(2)=2$	$\begin{cases}4\pi, & n\neq 0\\ 8\pi, & n=0\end{cases}$	
22.2.7.	$S_n(x)$	Чебышева второго рода	-2	2	$\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)^{1/2}$	$S_n(2)=n+1$	π	
22.2.8.	$T_n^*(x)$	Смещенный Чебышева первого рода	0	1	$(x-x^2)^{-1/2}$	$T_n^*(1)=1$	$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & n\neq 0\\ \pi, & n=0\end{cases}$	
22.2.9.	$U_n^*(x)$	Смещенный Чебышева второго рода	0	1	$(x-x^2)^{1/2}$	$U_n^*(1)=n+1$	$\dfrac{\pi}{8}$	
22.2.10.	$P_n(x)$	Лежандра сферический	-1	1	1	$P_n(1)=1$	$\dfrac{2}{2n+1}$	
22.2.11.	$P_n^*(x)$	Смещенный Лежандра	0	1	1		$\dfrac{1}{2n+1}$	
22.2.12.	$L_n^{(\alpha)}(x)$	Обобщенный Лагерра	0	∞	$e^{-x}x^\alpha$	$k_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$	$\alpha>-1$
22.2.13.	$L_n(x)$	Лагерра	0	∞	e^{-x}	$k_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}$	1	
22.2.14.	$H_n(x)$	Эрмита	$-\infty$	∞	e^{-x^2}	$e_n=(-1)^n$	$\sqrt{\pi}2^n n!$	
22.2.15.	$He_n(x)$	Эрмита	$-\infty$	∞	$e^{-x^2/2}$	$e_n=(-1)^n$	$\sqrt{2\pi}n!$	

22.3. ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$$f_n(x) = d_n \sum_{m=0}^{N} c_m g_m(x)$$

	$f_n(x)$	N	d_n	c_m	$g_m(x)$	k_n	Примечания
22.3.1.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	n	$\frac{1}{2^n}$	$\binom{n+\alpha}{m}\binom{n+\beta}{n-m}$	$(x-1)^{n-m}(x+1)^m$	$\frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}$	$\alpha > -1$, $\beta > -1$
22.3.2.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	n	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$	$\binom{n}{m}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+m+1)}{2^m\Gamma(\alpha+m+1)}$	$(x-1)^m$	$\frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}$	$\alpha > -1$, $\beta > -1$
22.3.3.	$G_n(p, q, x)$	n	$\frac{\Gamma(q+n)}{\Gamma(p+2n)}$	$(-1)^m\binom{n}{m}\frac{\Gamma(p+2n-m)}{\Gamma(q+n-m)}$	x^{n-m}	1	$p-q > -1$, $q > 0$
22.3.4.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$	$(-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+n-m)}{m!(n-2m)!}$	$(2x)^{n-2m}$	$\frac{2^n}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha > -1/2$, $\alpha \neq 0$
22.3.5.	$C_n^{(0)}(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	1	$(-1)^m\frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}$	$(2x)^{n-2m}$	$\frac{2^n}{n}\ (n \neq 0)$	$n \neq 0$, $C_0^{(0)}(1) = 1$
22.3.6.	$T_n(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{n}{2}$	$(-1)^m\frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}$	$(2x)^{n-2m}$	2^{n-1}	
22.3.7.	$U_n(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	1	$(-1)^m\frac{(n-m)!}{m!(n-2m)!}$	$(2x)^{n-2m}$	2^n	
22.3.8.	$P_n(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{1}{2^n}$	$(-1)^m\binom{n}{m}\binom{2n-2m}{n}$	x^{n-2m}	$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$	
22.3.9.	$L_n^{(\alpha)}(x)$	n	1	$(-1)^m\binom{n+\alpha}{n-m}\frac{1}{m!}$	x^m	$\frac{(-1)^n}{n!}$	$\alpha > -1$
22.3.10.	$H_n(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$n!$	$(-1)^m\frac{1}{m!(n-2m)!}$	$(2x)^{n-2m}$	2^n	См. 22.11
22.3.11.	$He_n(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$n!$	$(-1)^m\frac{1}{m!2^m(n-2m)!}$	x^{n-2m}	1	

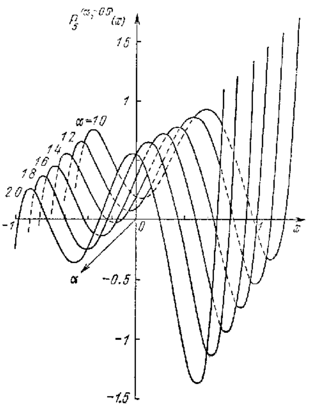


Рис. 22.2. Многочлены Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$; $\alpha = 1(0.2)2$, $\beta = -0.5$, $n = 5$.

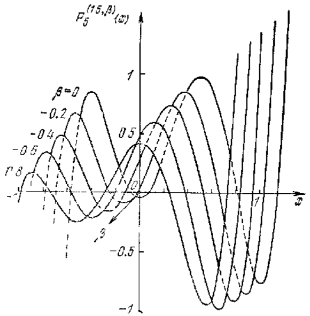


Рис. 22.3. Многочлены Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$; $\alpha = 1.5$, $\beta = -0.8(0.2)0$, $n = 5$.

Явные выражения, содержащие тригонометрические функции

$$f_n(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{n} a_m \cos(n-2m)\theta$$

	$f_n(\cos\theta)$	a_m	Примечания
22.3.12.	$C_n^{(\alpha)}(\cos\theta)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+m)\,\Gamma(\alpha+n-m)}{m!(n-m)!\,[\Gamma(\alpha)]^2}$	$\alpha\neq 0$
22.3.13.	$P_n(\cos\theta)$	$\dfrac{1}{4^n}\dbinom{2m}{n}\dbinom{2n-2m}{n-m}$	

22.3.14. $C_n^{(0)}(\cos\theta) = \dfrac{2}{n}\cos n\theta.$

22.3.15. $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$

22.3.16. $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$

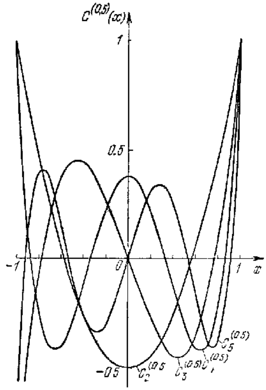


Рис. 22.4. Многочлены Гегенбауэра (ультрасферические) $C_n^{(\alpha)}(x)$; $\alpha = 0.5$, $n = 2(1)5$.

22.4. ЧАСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

	$f_n(x)$	$f_n(-x)$	$f_n(1)$	$f_n(0)$	$f_0(x)$	$f_1(x)$
22.4.1.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$	$\binom{n+\alpha}{n}$		1	$\frac{1}{2}[\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)x]$
22.4.2.	$C_n^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha\neq 0)$	$(-1)^n C_n^{(\alpha)}(x)$	$\binom{n+2\alpha-1}{n}$	$\begin{cases}0, & n=2m+1\\ (-1)^{n/2}\dfrac{\Gamma(\alpha+n/2)}{\Gamma(\alpha)(n/2)!}, & n=2m\end{cases}$	1	$2\alpha x$
22.4.3.	$C_n^{(0)}(x)$	$(-1)^n C_n^{(0)}(x)$	$\dfrac{2}{n}$ $(n\neq 0)$	$\begin{cases}\dfrac{(-1)^m}{m}, & n=2m\neq 0\\ 0, & n=2m+1\end{cases}$	1	$2x$
22.4.4.	$T_n(x)$	$(-1)^n T_n(x)$	1	$\begin{cases}(-1)^m, & n=2m\\ 0, & n=2m+1\end{cases}$	1	x
22.4.5.	$U_n(x)$	$(-1)^n U_n(x)$	$n+1$	$\begin{cases}(-1)^m, & n=2m\\ 0, & n=2m+1\end{cases}$	1	$2x$
22.4.6.	$P_n(x)$	$(-1)^n P_n(x)$	1	$\begin{cases}\dfrac{(-1)^m}{4^m}\dbinom{2m}{m}, & n=2m\\ 0, & n=2m+1\end{cases}$	1	x
22.4.7.	$L_n^{(\alpha)}(x)$			$\binom{n+\alpha}{n}$	1	$-x+\alpha+1$
22.4.8.	$H_n(x)$	$(-1)^n H_n(x)$		$\begin{cases}(-1)^m\dfrac{(2m)!}{m!}, & n=2m\\ 0, & n=2m+1\end{cases}$	1	$2x$

22.5. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

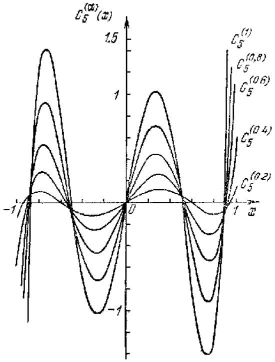


Рис. 22.5. Многочлены Гегенбауэра (ультрасферические) $C_n^{(\alpha)}(x)$; $\alpha = 0.2(0.2)1$, $n = 5$.

Соотношения между ортогональными многочленами одного и того же семейства

Многочлены Якоби

22.5.1. $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) =$

$$= \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\, G_n\left(\alpha+\beta+1,\ \beta+1,\ \frac{x+1}{2}\right).$$

22.5.2. $G_n(p, q, x) = \dfrac{n!\,\Gamma(n+p)}{\Gamma(2n+p)} P_n^{(p-q,\,q-1)}(2x-1)$

(см. [22.21]).

22.5.3. $F_n(p, q, x) = (-1)^n n! \dfrac{\Gamma(q)}{\Gamma(q+n)} P_n^{(p-q,\,q-1)}(2x-1)$

(см. [22.13]).

Ультрасферические многочлены

22.5.4. $C_n^{(0)}(x) = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1}{\alpha} C_n^{(\alpha)}(x).$

Многочлены Чебышева

22.5.5. $T_n(x) = \frac{1}{2} C_n(2x) = T_n^*\left(\frac{1+x}{2}\right)$.

22.5.6. $T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$.

22.5.7. $T_n(x) = xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$.

22.5.8. $T_n(x) = \frac{1}{2}[U_n(x) - U_{n-2}(x)]$.

22.5.9. $U_n(x) = S_n(2x) = U_n^*\left(\frac{1+x}{2}\right)$.

22.5.10. $U_{n-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}[xT_n(x) - T_{n+1}(x)]$.

22.5.11. $C_n(x) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right) = 2T_n^*\left(\frac{x+2}{4}\right)$.

22.5.12. $C_n(x) = S_n(x) - S_{n-2}(x)$.

22.5.13. $S_n(x) = U_n\left(\frac{x}{2}\right) = U_n^*\left(\frac{x+2}{4}\right)$.

22.5.14. $T_n^*(x) = T_n(2x-1) = \frac{1}{2} C_n(4x-2)$

(см. [22.22]).

22.5.15. $U_n^*(x) = S_n(4x-2) = U_n(2x-1)$

(см. [22.22]).

Обобщенные многочлены Лагерра

22.5.16. $L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$.

22.5.17. $L_n^{(m)}(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}[L_{n+m}(x)]$.

Многочлены Эрмита

22.5.18. $He_n(x) = 2^{-n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ (см. [22.20])

22.5.19. $H_n(x) = 2^{n/2} He_n(x\sqrt{2})$ (см. [22.13], [22.20]).

Соотношения между ортогональными многочленами разных семейств

Многочлены Якоби

22.5.20. $P_n^{(\alpha-1/2,\, \alpha-1/2)}(x) =$

$$= \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(\alpha+n+1/2)}{\Gamma(2\alpha+n)\,\Gamma(\alpha+1/2)} C_n^{(\alpha)}(x).$$

22.5.21. $P_n^{(\alpha,\,-1/2)}(x) =$

$$= \frac{(1/2)_{n+1}}{\sqrt{\frac{x+1}{2}}\,(\alpha+1/2)_{n+1}} C_{2n+1}^{(\alpha+1/2)}\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right).$$

22.5.22. $P_n^{(\alpha,\,-1/2)}(x) =$

$$= \frac{(1/2)_n}{(\alpha+1/2)_n} C_{2n}^{(\alpha+1/2)}\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right).$$

22.5.23. $P_n^{(-1/2,\,-1/2)}(x) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} T_n(x)$.

22.5.24. $P_n^{(0,0)}(x) = P_n(x)$.

Ультрасферические многочлены

22.5.25. $C_{2n}^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n)\,n!\,2^{2n}}{\Gamma(\alpha)\,(2n)!} P_n^{(\alpha-1/2,\,-1/2)}(2x^2-1)$

$(\alpha \neq 0)$.

22.5.26. $C_{2n+1}^{(\alpha)}(x) =$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,n!\,2^{2n+1}}{\Gamma(\alpha)(2n+1)!} x P_n^{(\alpha-1/2,\,1/2)}(2x^2-1)$$

$(\alpha \neq 0)$.

22.5.27. $C_n^{(\alpha)}(x) =$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1/2)\,\Gamma(2\alpha+n)}{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(\alpha+n+1/2)} P_n^{(\alpha-1/2,\,\alpha-1/2)}(x)$$

$(\alpha \neq 0)$.

22.5.28. $C_n^{(0)}(x) = \frac{2}{n} T_n(x) =$

$$= 2\frac{(n-1)!}{\Gamma(n+1/2)} \sqrt{\pi}\, P_n^{(-1/2,\,-1/2)}(x).$$

Многочлены Чебышева

22.5.29. $T_{2n+1}(x) = \frac{n!\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1/2)} x P_n^{(-1/2,\,1/2)}(2x^2-1)$.

22.5.30. $U_{2n}(x) = \frac{n!\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1/2)} P_n^{(1/2,\,-1/2)}(2x^2-1)$.

22.5.31. $T_n(x) = \frac{n!\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1/2)} P_n^{(-1/2,\,-1/2)}(x)$.

22.5.32. $U_n(x) = \frac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2\Gamma(n+3/2)} P_n^{(1/2,\,1/2)}(x)$.

22.5.33. $T_n(x) = \frac{n}{2} C_n^{(0)}(x)$.

22.5.34. $U_n(x) = C_n^{(1)}(x)$.

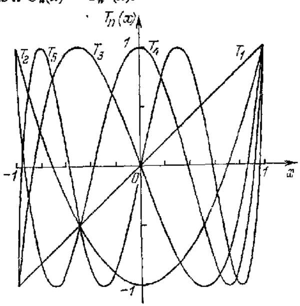


Рис. 22.6. Многочлены Чебышева $T_n(x)$; $n = 1(1)5$.

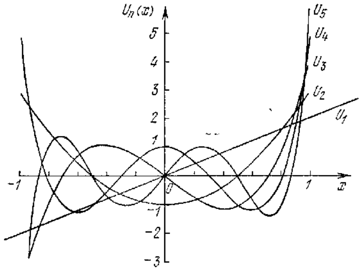


Рис. 22.7. Многочлены Чебышева $U_n(x)$; $n = 1(1)5$.

Многочлены Лежандра

22.5.35. $P_n(x) = P_n^{(0,\,0)}(x)$.

22.5.36. $P_n(x) = C_n^{(1/2)}(x)$.

22.5.37. $$\frac{d^m}{dx^m}[P_n(x)] = 1 \cdot 3 \ldots (2m-1)\, C_{n-m}^{(m+1/2)}(x) \qquad (m \leqslant n).$$

Обобщенные многочлены Лагерра

22.5.38. $$L_n^{(-1/2)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^{2n}} H_{2n}(\sqrt{x}).$$

22.5.39. $$L_n^{(1/2)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^{2n+1}\sqrt{x}} H_{2n+1}(\sqrt{x}).$$

Многочлены Эрмита

22.5.40. $H_{2m}(x) = (-1)^m 2^{2m} m!\, L_m^{(-1/2)}(x^2)$.

22.5.41. $H_{2m+1}(x) = (-1)^m 2^{2m+1} m!\, x L_m^{(1/2)}(x^2)$.

Выражение ортогональных многочленов через гипергеометрические функции (см. гл. 15)

$$f_n(x) = dF(a,\ b;\ c;\ g(x))$$

Кроме приводимых здесь, имеется много других представлений ортогональных многочленов через гипергеометрические функции.

	$f_n(x)$	d	a	b	c	$g(x)$
22.5.42.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$\binom{n+\alpha}{n}$	$-n$	$n+\alpha+\beta+1$	$\alpha+1$	$\frac{1-x}{2}$
22.5.43.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$\binom{2n+\alpha+\beta}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$	$-n$	$-n-\alpha$	$-2n-\alpha-\beta$	$\frac{2}{1-x}$
22.5.44.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$\binom{n+\alpha}{n}\left(\frac{1+x}{2}\right)^n$	$-n$	$-n-\beta$	$\alpha+1$	$\frac{x-1}{x+1}$
22.5.45.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$\binom{n+\beta}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$	$-n$	$-n-\alpha$	$\beta+1$	$\frac{x+1}{x-1}$
22.5.46.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{n!\,\Gamma(2\alpha)}$	$-n$	$n+2\alpha$	$\alpha+1/2$	$\frac{1-x}{2}$
22.5.47.	$T_n(x)$	1	$-n$	n	$1/2$	$\frac{1-x}{2}$
22.5.48.	$U_n(x)$	$n+1$	$-n$	$n+2$	$3/2$	$\frac{1-x}{2}$
22.5.49.	$P_n(x)$	1	$-n$	$n+1$	1	$\frac{1-x}{2}$
22.5.50.	$P_n(x)$	$\binom{2n}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$	$-n$	$-n$	$-2n$	$\frac{2}{1-x}$
22.5.51.	$P_n(x)$	$\binom{2n}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$	$-n/2$	$\frac{1-n}{2}$	$1/2-n$	$\frac{1}{x^2}$
22.5.52.	$P_{2n}(x)$	$(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$	$-n$	$n+1/2$	$1/2$	x^2
22.5.53.	$P_{2n+1}(x)$	$(1)^n\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}x$	$-n$	$n+3/2$	$3/2$	x^2

Выражение ортогональных многочленов через вырожденные гипергеометрические функции
(см. гл. 13)

22.5.54. $L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} M(-n,\ \alpha+1,\ x).$

Выражение ортогональных многочленов через функции параболического цилиндра
(см. гл. 19)

22.5.55. $H_n(x) = 2^n U\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n,\ \frac{3}{2},\ x^2\right).$

22.5.56. $H_{2m}(x) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} M\left(-m,\ \frac{1}{2},\ x^2\right).$

22.5.57. $H_{2m+1}(x) = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} 2xM\left(-m,\ \frac{3}{2},\ x^2\right).$

22.5.58. $H_n(x) = 2^{n/2} e^{x^2/2} D_n(\sqrt{2}x) =$

$$= 2^{n/2} e^{x^2/2} U\left(-n - \frac{1}{2},\ \sqrt{2}x\right).$$

22.5.59. $He_n(x) = e^{x^2/4} D_n(x) = e^{x^2/4} U\left(-n,\ -\frac{1}{2},\ x\right).$

Выражение ортогональных многочленов через функции Лежандра (см. гл. 8)

22.5.60. $C_n^{(\alpha)}(x) =$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)\,\Gamma(2\alpha + n)}{n!\,\Gamma(2\alpha)} \left[\frac{1}{4}(x^2 - 1)\right]^{1/4 - \alpha/2} \times$$

$$\times P^{(1/2-\alpha)}_{n+\alpha-1/2}(x) \quad (\alpha \neq 0).$$

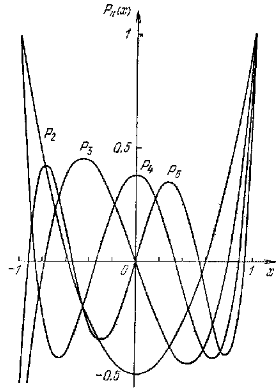


Рис. 22.8. Многочлены Лежандра $P_n(x)$; $n = 2(1)5$.

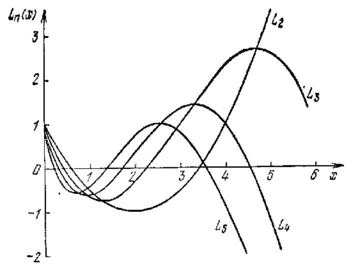


Рис. 22.9. Многочлены Лагерра $L_n(x)$; $n = 2(1)5$.

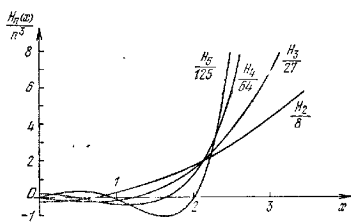


Рис. 22.10. Многочлены Эрмита $H_n(x)/n^3$; $n = 2(1)5$.

22.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$g_2(x)\,y'' + g_1(x)\,y' + g_0(x)\,y = 0$$

	y	$g_2(x)$	$g_1(x)$	$g_0(x)$
22.6.1.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$1-x^2$	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$	$n(n+\alpha+\beta+1)$
22.6.2.	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$1-x^2$	$\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)x$	$(n+1)(n+\alpha+\beta)$
22.6.3.	$(1-x)^{(\alpha+1)/2}(1+x)^{(\beta+1)/2}\times$ $\times P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	1	0	$\frac{1}{4}\frac{1-\alpha^2}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\frac{1-\beta^2}{(1+x)^2}+$ $+\frac{2n(n+\alpha+\beta+1)+(\alpha+1)(\beta+1)}{2(1-x^2)}$
22.6.4.	$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{\beta+1/2}\times$ $\times P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos x)$	1	0	$\frac{1-4\alpha^2}{16\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1-4\beta^2}{16\cos^2\frac{x}{2}}+$ $+\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2$
22.6.5.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$1-x^2$	$-(2\alpha+1)x$	$n(n+2\alpha)$
22.6.6.	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}C_n^{(\alpha)}(x)$	$1-x^2$	$(2\alpha-3)x$	$(n+1)(n+2\alpha-1)$
22.6.7.	$(1-x^2)^{\alpha/2+1/4}C_n^{(\alpha)}(x)$	1	0	$\frac{(n+\alpha)^2}{1-x^2}+\frac{2+4\alpha-4\alpha^2+x^2}{4(1-x^2)^2}$
22.6.8.	$(\sin x)^{\alpha}C_n^{(\alpha)}(\cos x)$	1	0	$(n+\alpha)^2+\frac{\alpha(1-\alpha)}{\sin^2 x}$
22.6.9.	$T_n(x)$	$1-x^2$	$-x$	n^2
22.6.10.	$T_n(\cos x)$	1	0	n^2
22.6.11.	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x),\ U_{n-1}(x)$	$1-x^2$	$-3x$	n^2-1
22.6.12.	$U_n(x)$	$1-x^2$	$-3x$	$n(n+2)$
22.6.13.	$P_n(x)$	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
22.6.14.	$\sqrt{1-x^2}\,P_n(x)$	1	0	$\frac{n(n+1)}{1-x^2}+\frac{1}{(1-x^2)^2}$
22.6.15.	$L_n^{(\alpha)}(x)$	x	$\alpha+1-x$	n
22.6.16.	$e^{-x}x^{-\alpha/2}L_n^{(\alpha)}(x)$	x	$x+1$	$n+\frac{\alpha}{2}+1-\frac{\alpha^2}{4x}$
22.6.17.	$e^{-x/2}x^{(\alpha+1)/2}L_n^{(\alpha)}(x)$	1	0	$\frac{2n+\alpha+1}{2x}+\frac{1-\alpha^2}{4x^2}-\frac{1}{4}$
22.6.18.	$e^{-x^2/2}x^{\alpha+1/2}L_n^{(\alpha)}(x^2)$	1	0	$4n+2\alpha+2-x^2+\frac{1-4\alpha^2}{4x^2}$
22.6.19.	$H_n(x)$	1	$-2x$	$2n$
22.6.20.	$e^{-x^2/2}H_n(x)$	1	0	$2n+1-x^2$
22.6.21.	$He_n(x)$	1	$-x$	n

22.7. РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рекуррентные формулы относительно степени n

$$a_{1n} f_{n+1}(x) = (a_{2n} + a_{3n}x) f_n(x) - a_{4n} f_{n-1}(x)$$

	f_n	a_{1n}	a_{2n}	a_{3n}	a_{4n}
22.7.1.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)\times$ $\times(2n+\alpha+\beta)$	$(2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2)$	$(2n+\alpha+\beta)_3$	$2(n+\alpha)(n+\beta)\times$ $\times(2n+\alpha+\beta+2)$
22.7.2.	$G_n(p, q, x)$	$(2n+p-2)_4(2n+p-1)$	$-[2n(n+p)+q(p-1)]\times$ $\times(2n+p-2)_3$	$(2n+p-2)_4\times$ $\times(2n+p-1)$	$n(n+q-1)(n+p-1)\times$ $\times(n+p-q)(2n+p+1)$
22.7.3.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$n+1$	0	$2(n+\alpha)$	$n+2\alpha-1$
22.7.4.	$T_n(x)$	1	0	2	1
22.7.5.	$U_n(x)$	1	0	2	1
22.7.6.	$S_n(x)$	1	0	1	1
22.7.7.	$C_n(x)$	1	0	1	1
22.7.8.	$T_n^*(x)$	1	-2	4	1
22.7.9.	$U_n^*(x)$	1	-2	4	1
22.7.10.	$P_n(x)$	$n+1$	0	$2n+1$	n
22.7.11.	$P_n^*(x)$	$n+1$	$-2n-1$	$4n+2$	n
22.7.12.	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$n+1$	$2n+\alpha+1$	-1	$n+\alpha$
22.7.13.	$H_n(x)$	1	0	2	$2n$
22.7.14.	$He_n(x)$	1	0	1	n

Различные рекуррентные формулы

Многочлены Якоби

22.7.15. $\left(n+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+1\right)(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) = (n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x).$

22.7.16. $\left(n+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+1\right)(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x) = (n+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + (n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x).$

22.7.17. $(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) + (1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x) = 2P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$

22.7.18. $(2n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x) = (n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$

22.7.19. $(2n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x) = (n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + (n+\alpha)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$

22.7.20. $P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x) - P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x) = P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$

Ультрасферические многочлены

22.7.21. $2\alpha(1-x^2)C_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = (2\alpha+n-1)C_{n-1}^{(\alpha)}(x) - nxC_n^{(\alpha)}(x).$

22.7.22. $2\alpha(1-x^2)C_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = (n+2\alpha)xC_n^{(\alpha)}(x) - (n+1)C_{n+1}^{(\alpha)}(x).$

22.7.23. $(n+\alpha)C_{n+1}^{(\alpha-1)}(x) = (\alpha-1)[C_{n+1}^{(\alpha)}(x) - C_{n-1}^{(\alpha)}(x)].$

Многочлены Чебышева

22.7.24. $2T_m(x)T_n(x) = T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) \quad (n \geqslant m).$

22.7.25. $2(x^2-1)U_{m-1}(x)U_{n-1}(x) = T_{n+m}(x) - T_{n-m}(x) \quad (n \geqslant m).$

22.7.26. $2T_m(x)U_{n-1}(x) = U_{n+m-1}(x) + U_{n-m-1}(x) \quad (n > m).$

22.7.27. $2T_n(x)U_{m-1}(x) = U_{n+m-1}(x) - U_{n-m-1}(x) \quad (n > m).$

22.7.28. $2T_n(x)U_{n-1}(x) = U_{2n-1}(x).$

Обобщенные многочлены Лагерра

22.7.29. $L_n^{(\alpha+1)}(x) = \frac{1}{x}[(x-n)L_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha+n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)].$

22.7.30. $L_n^{(\alpha-1)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x).$

22.7.31. $L_n^{(\alpha+1)}(x) = \frac{1}{x}[(n+\alpha+1)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)].$

22.7.32. $L_n^{(\alpha-1)}(x) = \frac{1}{n+\alpha}[(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (n+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)].$

22.8. ПРОИЗВОДНЫЕ

$$g_2(x)\frac{d}{dx}f_n(x) = g_1(x)f_n(x) + g_0(x)f_{n-1}(x)$$

	f_n	g_2	g_1	g_0
22.8.1.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$(2n+\alpha+\beta)(1-x^2)$	$n[\alpha-\beta-(2n+\alpha+\beta)x]$	$2(n+\alpha)(n+\beta)$
22.8.2.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$1-x^2$	$-nx$	$n+2\alpha-1$
22.8.3.	$T_n(x)$	$1-x^2$	$-nx$	n
22.8.4.	$U_n(x)$	$1-x^2$	$-nx$	$n+1$
22.8.5.	$P_n(x)$	$1-x^2$	$-nx$	n
22.8.6.	$L_n^{(\alpha)}(x)$	x	n	$-(n+\alpha)$
22.8.7.	$H_n(x)$	1	0	$2n$
22.8.8.	$He_n(x)$	1	0	n

22.9. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

$$g(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) z^n, \quad R = \sqrt{1-2xz+z^2}$$

	$f_n(x)$	a_n	$g(x, z)$	Примечания
22.9.1.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$2^{-\alpha-\beta}$	$R^{-1}(1-z+R)^{-\alpha}(1+z+R)^{-\beta}$	$\lvert z\rvert<1$
22.9.2.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$\dfrac{2^{1/2-\alpha}\Gamma(\alpha+1/2+n)\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(2\alpha+n)}$	$R^{-1}(1-xz+R)^{1/2-\alpha}$	$\lvert z\rvert<1,\ \alpha\neq 0$
22.9.3.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	1	$R^{-2\alpha}$	$\lvert z\rvert<1,\ \alpha\neq 0$
22.9.4.	$C_n^{(0)}(x)$	1	$-\ln R^2$	$\lvert z\rvert<1$
22.9.5.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$\dfrac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(2\alpha+n)}$	$e^{z\cos\theta}\left(\dfrac{z}{2}\sin\theta\right)^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(z\sin\theta)$	$x=\cos\theta$
22.9.6.	$T_n(x)$	2	$\left(\dfrac{1-z^2}{R^2}+1\right)$	$-1<x<1,\ \lvert z\rvert<1$
22.9.7.	$T_n(x)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4^n}\dbinom{2n}{n}$	$R^{-1}(1-xz+R)^{1/2}$	$-1<x<1,\ \lvert z\rvert<1$
22.9.8.	$T_n(x)$	$\dfrac{1}{n}$	$1-\dfrac{1}{2}\ln R^2$	$a_0=1,\ -1<x<1,$ $\lvert z\rvert<1$
22.9.9.	$T_n(x)$	1	$\dfrac{1-xz}{R^2}$	$-1<x<1,\ \lvert z\rvert<1$
22.9.10.	$U_n(x)$	1	R^{-2}	$-1<x<1,\ \lvert z\rvert<1$
22.9.11.	$U_n(x)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4^{n+1}}\dbinom{2n+2}{n+1}$	$\dfrac{1}{R}(1-xz+R)^{-1/2}$	$-1<x<1,\ \lvert z\rvert<1$
22.9.12.	$P_n(x)$	1	R^{-1}	$-1<x<1,\ \lvert z\rvert<1$
22.9.13.	$P_n(x)$	$\dfrac{1}{n!}$	$e^{z\cos\theta}J_0(z\sin\theta)$	$x=\cos\theta$

(*продолжение*)

	$f_n(x)$	a_n	$g(x, z)$	Примечания
22.9.14.	$S_n(x)$	1	$(1 - xz + z^2)^{-1}$	$-2 < x < 2, \quad \|z\| < 1$
22.9.15.	$L_n^{(\alpha)}(x)$	1	$(1 - z)^{-\alpha-1} \exp\left(\dfrac{xz}{z-1}\right)$	$\|z\| < 1$
22.9.16.	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$\dfrac{1}{\Gamma(n + \alpha + 1)}$	$(xz)^{-\alpha/2} e^z J_\alpha[2(xz)^{1/2}]$	
22.9.17.	$H_n(x)$	$\dfrac{1}{n!}$	$e^{2xz - z^2}$	
22.9.18.	$H_{2n}(x)$	$\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$	$e^z \cos(2x\sqrt{z})$	
22.9.19.	$H_{2n+1}(x)$	$\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$	$z^{-1/2} e^z \sin(2x\sqrt{z})$	

22.10. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Представления в виде контурных интегралов

$$f_n(x) = \frac{g_0(x)}{2\pi i} \int_C [g_1(z, x)]^n g_2(z, x)\, dz,$$

где C — замкнутый контур, обходящий точку $z = a$ в положительном направлении.

	$f_n(x)$	$g_0(x)$	$g_1(z, x)$	$g_2(z, x)$	a	Примечания
22.10.1.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$\dfrac{1}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}$	$\dfrac{z^2 - 1}{2(z - x)}$	$\dfrac{(1-z)^\alpha (1+z)^\beta}{z - x}$	x	± 1 лежит вне C
22.10.2.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	1	$1/z$	$(1 - 2xz + z^2)^{-\alpha} z^{-1}$	0	Оба нуля функции $y(z) = 1 - 2xz + z^2$ расположены вне C, $\alpha > 0$
22.10.3.	$T_n(x)$	$1/2$	$1/z$	$\dfrac{1 - z^2}{z(1 - 2xz + z^2)}$	0	Оба нуля функции $y(z) = 1 - 2xz + z^2$ расположены вне C
22.10.4.	$U_n(x)$	1	$1/z$	$\dfrac{1}{z(1 - 2xz + z^2)}$	0	Оба нуля функции $y(z) = 1 - 2xz + z^2$ расположены вне C
22.10.5.	$P_n(x)$	1	$1/z$	$\dfrac{1}{z}(1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$	0	Оба нуля функции $y(z) = 1 - 2xz + z^2$ расположены вне C
22.10.6.	$P_n(x)$	$1/2^n$	$\dfrac{z^2 - 1}{z - x}$	$\dfrac{1}{z - x}$	x	
22.10.7.	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$e^x x^{-\alpha}$	$\dfrac{z}{z - x}$	$\dfrac{z^\alpha}{z - x} e^{-z}$	x	Нуль расположен вне C
22.10.8.	$L_n^{(\alpha)}(x)$	1	$1 + \dfrac{x}{z}$	$e^{-z}\left(1 + \dfrac{z}{x}\right)^\alpha 1/z$	0	$z = -x$ расположен вне C
22.10.9.	$H_n(z)$	$n!$	$1/z$	$\dfrac{e^{2xz - z^2}}{z}$	0	

Различные интегральные представления

22.10.10. $C_n^{(\alpha)}(x) =$

$$= \frac{2^{(1-2\alpha)}\Gamma(n+2\alpha)}{n![\Gamma(\alpha)]^2} \int_0^{\pi} [x + \sqrt{x^2-1} \cos\varphi]^n (\sin\varphi)^{2\alpha-1} d\varphi$$

$(\alpha > 0)$.

22.10.11. $C_n^{(\alpha)}(\cos\theta) =$

$$= \frac{2^{1-\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n![\Gamma(\alpha)]^2} (\sin\theta)^{1-2\alpha} \int_0^{\theta} \frac{\cos(n+\alpha)\varphi}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1-\alpha}} d\varphi$$

$(\alpha > 0)$.

22.10.12. $P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos\theta + i \sin\theta \cos\varphi)^n d\varphi.$

22.10.13. $P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)\varphi \, d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}.$

22.10.14. $L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha/2}}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{tx})\, dt.$

22.10.15. $H_n(x) = e^{x^2} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^n \cos\left(2xt - \frac{n}{2}\pi\right) dt.$

22.11. ФОРМУЛА РОДРИГА

$$f_n(x) = \frac{1}{a_n \rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{\rho(x)(g(x))^n\}$$

Среди ортогональных многочленов этой формуле удовлетворяют только многочлены, данные в следующей таблице.

	$f_n(x)$	a_n	$\rho(x)$	$g(x)$
22.11.1.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$(-1)^n 2^n n!$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$1-x^2$
22.11.2.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$(-1)^n 2^n n! \frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha+n+1/2)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(n+2\alpha)}$	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$	$1-x^2$
22.11.3.	$T_n(x)$	$(-1)^n 2^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}}$	$(1-x^2)^{1/2}$	$1-x^2$
22.11.4.	$U_n(x)$	$(-1)^n 2^{n+1} \frac{\Gamma(n+3/2)}{(n+1)\sqrt{\pi}}$	$(1-x^2)^{1/2}$	$1-x^2$
22.11.5.	$P_n(x)$	$(-1)^n 2^n n!$	1	$1-x^2$
22.11.6.	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$n!$	$e^{-x} x^\alpha$	x
22.11.7.	$H_n(x)$	$(-1)^n$	e^{-x^2}	1
22.11.8.	$He_n(x)$	$(-1)^n$	$e^{-x^2/2}$	1

22.12. ФОРМУЛЫ СУММИРОВАНИЯ

Формула Кристоффеля — Дарбу

22.12.1. $\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{h_m} f_m(x) f_m(y) =$

$$= \frac{k_n}{k_{n+1} h_n} \frac{f_{n+1}(x) f_n(y) - f_n(x) f_{n+1}(y)}{x - y}$$

(определение k_n см. в 22.1.2).

Различные формулы суммирования

(Здесь даются только некоторые из них)

22.12.2. $\sum_{m=0}^{n} T_{2m}(x) = \frac{1}{2}[1 + U_{2n}(x)].$

22.12.3. $\sum_{m=0}^{n-1} T_{2m+1}(x) = \frac{1}{2} U_{2n-1}(x).$

22.12.4. $\sum_{m=0}^{n} U_{2m}(x) = \frac{1 - T_{2n+2}(x)}{2(1-x^2)}.$

22.12.5. $\sum_{m=0}^{n-1} U_{2m+1}(x) = \frac{x - T_{2n+1}(x)}{2(1-x^2)}.$

22.12.6. $\sum_{m=0}^{n} L_m^{(\alpha)}(x) L_{n-m}^{(\beta)}(y) = L_n^{(\alpha+\beta+1)}(x+y).$

22.12.7. $\sum_{m=0}^{n} \binom{n+\alpha}{m} \mu^{n-m}(1-\mu)^m L_{n-m}^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(\mu x).$

22.12.8. $H_n(x+y) =$

$$= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(\sqrt{2}x) H_{n-k}(\sqrt{2}y).$$

22.13. ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

22.13.1. $2n\int_0^x (1-y)^\alpha (1+y)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(y)\,dy =$

$$= P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(0) - (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

22.13.2. $\frac{n(2\alpha+n)}{2\alpha}\int_0^x (1-y^2)^{\alpha-1/2} C_n^{(\alpha)}(y)\,dy =$

$$= C_{n-1}^{(\alpha+1)}(0) - (1-x^2)^{\alpha+1/2} C_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

22.13.3. $vp \int_{-1}^{1} \frac{T_n(y)\,dy}{(y-x)\sqrt{1-y^2}} = \pi U_{n-1}(x).$

22.13.4. $vp \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-y^2}\,U_{n-1}(y)\,dy}{(y-x)} = -\pi T_n(x).$

22.13.5. $\int_{-1}^{1} (1-x)^{-1/2} P_n(x)\,dx = \frac{2^{3/2}}{2n+1}.$

22.13.6. $\int_0^\pi P_{2n}(\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{16^n}\binom{2n}{n}^2.$

22.13.7. $\int_0^\pi P_{2n+1}(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4^{2n+1}}\binom{2n}{n}\binom{2n+2}{n+1}.$

22.13.8. $\int_0^1 x^\lambda P_{2n}(x)\,dx =$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n-\lambda/2)\Gamma(1/2+\lambda/2)}{2\Gamma(-\lambda/2)\Gamma(n+3/2+\lambda/2)} \quad (\lambda > -1).$$

22.13.9. $\int_0^1 x^\lambda P_{2n+1}(x)\,dx =$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n+1/2-\lambda/2)\Gamma(1+\lambda/2)}{2\Gamma(n+2+\lambda/2)\Gamma(1/2-\lambda/2)} \quad (\lambda > -2).$$

22.13.10. $\int_{-1}^{x} \frac{P_n(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} =$

$$= \frac{1}{(n+1/2)\sqrt{1+x}}[T_n(x) + T_{n+1}(x)].$$

22.13.11. $\int_x^1 \frac{P_n(t)\,dt}{\sqrt{t-x}} =$

$$= \frac{1}{(n+1/2)\sqrt{1-x}}[T_n(x) - T_{n+1}(x)].$$

22.13.12. $\int_x^\infty e^{-t} L_n^{(\alpha)}(t)\,dt = e^{-x}[L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)].$

22.13.13. $\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\int_0^x (x-t)^{\beta-1} t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t)\,dt =$

$$= \Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta)\,x^{\alpha+\beta} L_n^{(\alpha+\beta)}(x)$$

$$(\mathrm{Re}\,\alpha > -1,\ \mathrm{Re}\,\beta > 0).$$

22.13.14. $\int_0^x L_m(t) L_n(x-t)\,dt =$

$$= \int_0^x L_{m+n}(t)\,dt = L_{m+n}(x) - L_{m+n+1}(x).$$

22.13.15. $\int_0^x e^{-t^2} H_n(t)\,dt = H_{n-1}(0) - e^{-x^2} H_{n-1}(x).$

22.13.16. $\int_0^x H_n(t)\,dt = \frac{1}{2(n+1)}[H_{n+1}(x) - H_{n+1}(0)].$

22.13.17. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_{2m}(tx)\,dt = \sqrt{\pi}\,\frac{(2m)!}{m!}(x^2-1)^m.$

22.13.18. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t H_{2m+1}(tx)\,dt =$

$$= \sqrt{\pi}\,\frac{(2m+1)!}{m!}\,x(x^2-1)^m.$$

22.13.19. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^n H_n(xt)\,dt = \sqrt{\pi}\,n!\,P_n(x).$

22.13.20. $\int_0^\infty e^{-t^2}[H_n(t)]^2 \cos(xt)\,dt =$

$$= \sqrt{\pi}\,2^{n-1} n!\,e^{-x^2/4} L_n\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

22.14. НЕРАВЕНСТВА

22.14.1. $|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| \leqslant$

$$\leqslant \begin{cases} \binom{n+q}{n} \approx n^q, \text{ если } q = \max(\alpha, \beta) \geqslant -1/2 \\ \qquad\qquad (\alpha > -1,\ \beta > -1), \\ |P_n^{(\alpha,\beta)}(x')| \approx \sqrt{\dfrac{1}{n}}, \text{ если } q < -1/2. \end{cases}$$

x' — ближайшая к $\dfrac{(\beta-\alpha)}{(\alpha+\beta+1)}$ точка максимума.

22.14.2. $$|C_n^{(\alpha)}(x)| \leqslant \begin{cases} \binom{n+2\alpha-1}{n} & (\alpha > 0), \\ |C_n^{(\alpha)}(x')| & (-1/2 < \alpha < 0). \end{cases}$$

$x' = 0$, если $n = 2m$; x' — точка максимума, ближайшая к нулю, если $n = 2m+1$.

22.14.3. $$|C_n^{(\alpha)}(\cos\theta)| < 2^{1-\alpha} \frac{n^{\alpha-1}}{(\sin\theta)^\alpha\,\Gamma(\alpha)} \quad (0 < \alpha < 1,\ 0 < \theta < \pi).$$

22.14.4. $|T_n(x)| \leqslant 1 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$

22.14.5. $\left|\dfrac{dT_n(x)}{dx}\right| \leqslant n^2 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$

22.14.6. $|U_n(x)| \leqslant n+1 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$

22.14.7. $|P_n(x)| \leqslant 1 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$

22.14.8. $\left|\dfrac{dP_n(x)}{dx}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}n(n+1) \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$

22.14.9. $|P_n(x)| \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x \leqslant 1).$

22.14.10. $$P_n^2(x) - P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) < \frac{2n+1}{3n(n+1)} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

22.14.11. $$P_n^2(x) - P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \geqslant \frac{1-P_n^2(x)}{(2n-1)(n+1)} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

22.14.12. $|L_n(x)| \leqslant e^{x/2} \quad (x \geqslant 0).$

22.14.13. $$|L_n^{(\alpha)}(x)| \leqslant \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} e^{x/2} \quad (\alpha \geqslant 0,\ x \geqslant 0).$$

22.14.14. $$|L_n^{(\alpha)}(x)| \leqslant \left[2 - \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\right] e^{x/2} \quad (-1 < \alpha < 0,\ x \geqslant 0).$$

22.14.15. $$|H_{2m}(x)| \leqslant e^{x^2/2}\, 2^{2m} m! \left[2 - \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}\right].$$

22.14.16. $$|H_{2m+1}(x)| \leqslant x e^{x^2/2}\frac{(2m+2)!}{(m+1)!} \quad (x \geqslant 0).$$

22.14.17. $|H_n(x)| < e^{x^2/2} k 2^{n/2}\sqrt{n!}, \quad k \approx 1.086435.$

22.15. ПРЕДЕЛЫ

22.15.1. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^\alpha}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\cos\frac{x}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right) = \left(\frac{2}{x}\right)^\alpha J_\alpha(x).$$

22.15.2. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^\alpha}L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{n}\right)\right] = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}).$$

22.15.3. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{4^n\,n!}H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x.$$

22.15.4. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^n}{4^n\,n!}H_{2n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{\ }}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x.$$

22.15.5. $$\lim_{\beta\to\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1 - \frac{2x}{\beta}\right) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

22.15.6. $$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha^{n/2}}C_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{1}{n!}H_n(x).$$

Асимптотические разложения см. в [22.5], [22.17].

22.16. НУЛИ

Таблицы нулей и соответствующих весовых множителей для квадратурных формул типа Гаусса см. в гл. 25. Все нули ортогональных многочленов являются действительными, простыми и лежат внутри интервала ортогональности.

Явные выражения, асимптотические формулы и неравенства

Обозначения:

$x_m^{(n)}$ — m-й нуль $f_n(x)$ $\quad (x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)})$,

$\theta_m^{(n)} = \arccos x_{n-m+1}^{(n)} \quad (0 < \theta_1^{(n)} < \theta_2^{(n)} < \ldots < \theta_n^{(n)} < \pi)$,

$j_{\alpha,m}$ — m-й положительный нуль функции Бесселя $J_\alpha(x)$, $0 < j_{\alpha,1} < j_{\alpha,2} < \ldots$

	$f_n(x)$	Соотношение
22.16.1.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$	$\lim\limits_{n\to\infty} n\theta_m^{(n)} = j_{\alpha,m} \quad (\alpha > -1,\ \beta > -1)$
22.16.2.	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$x_m^{(n)} = 1 - \frac{j^2_{\alpha-1/2,m}}{2n^2}\left[1 - \frac{2\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$
22.16.3.	$C_n^{(\alpha)}(\cos\theta)$	$\frac{(m+\alpha-1)\pi}{n+\alpha} \leqslant \theta_m^{(n)} \leqslant \frac{m\pi}{n+\alpha} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$
22.16.4.	$T_n(x)$	$x_m^{(n)} = \cos\frac{2m-1}{2n}\pi$
22.16.5.	$U_n(x)$	$x_m^{(n)} = \cos\frac{m}{n+1}\pi$
22.16.6.	$P_n(\cos\theta)$	$\begin{cases} \frac{2m-1}{2n+1}\pi \leqslant \theta_m^{(n)} \leqslant \frac{2m}{2n+1}\pi \\ \theta_m^{(n)} = \frac{4m-1}{4n+2}\pi + \frac{1}{8n^2}\operatorname{ctg}\frac{4m-1}{4n+2}\pi + O(n^{-3}) \end{cases}$
22.16.7.	$P_n(x)$	$\begin{cases} x_m^{(n)} = 1 - \frac{j^2_{0,m}}{2n^2}\left[1 - \frac{1}{n} + O(n^{-2})\right] \\ x_m^{(n)} = 1 - \frac{4\xi_m^{(n)}}{2n+1+\xi_m^{(n)}},\ \xi_m^{(n)} = \frac{j^2_{0,m}}{4n+2}\left[1 + \frac{j^2_{0,m}-2}{12(2n+1)^2}\right] + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \end{cases}$
22.16.8.	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$\left.\begin{cases} x_m^{(n)} > \frac{j^2_{\alpha,m}}{4k_n} \\ x_m^{(n)} < \frac{k_m}{k_n}\left(2k_m + \sqrt{4k_m^2 + 1/4 - \alpha^2}\right) \\ x_m^{(n)} = \frac{j^2_{\alpha,m}}{4k_n}\left(1 + \frac{2(\alpha^2-1) + j^2_{\alpha,m}}{48k_n^2}\right) + O(n^{-5}) \end{cases}\right\} k_r = r + \frac{\alpha+1}{2}$

Оценки ошибок см. в [22.6].

22.17. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В этом разделе рассматриваются многочлены $f_n(x)$, условие ортогональности которых задается с помощью скалярного произведения

22.17.1. $(f_n, f_m) = \sum\limits_i w^*(x_i) f_n(x_i) f_m(x_i)$.

x_i — целые числа, принадлежащие отрезку $a \leqslant x_i \leqslant b$, и $w^*(x_i)$ — положительная функция, причем сумма $\sum\limits_i w^*(x_i)$ конечна. Условием ортогональности многочлен $f_n(x)$ определяется с точностью до постоянного множителя, который можно получить, например, из следующего явного представления (аналог формулы Родрига):

22.17.2. $f_n(x) = \frac{1}{r_n w^*(x)} \Delta^n[w^*(x)\, g(x, n)]$, где $g(x, n) = g(x)\, g(x-1) \ldots g(x-n+1)$ и $g(x)$ — многочлен от x, не зависящий от n.

Название многочлена	a	b	$w^*(x)$	r_n	$g(x, n)$	Примечания
Чебышева	0	$N-1$	1	$1/n!$	$\binom{x}{n}\binom{x-N}{n}$	
Кравчука	0	N	$p^x q^{N-x}\binom{N}{x}$	$(-1)^n\ n!$	$\dfrac{q^n x!}{(x-n)!}$	$p, q > 0;\ p + q = 1$
Шарлье	0	∞	$\dfrac{e^{-a}a^x}{x!}$	$(-1)^n\sqrt{a^n n!}$	$\dfrac{x!}{(x-n)!}$	$a > 0$
Майкснера	0	∞	$\dfrac{c^x\,\Gamma(b+x)}{\Gamma(b)x!}$	c^n	$\dfrac{x!}{(x-n)!}$	$b > 0,\ 0 < c < 1$
Гана	0	∞	$\dfrac{\Gamma(b)\,\Gamma(c+x)\,\Gamma(d+x)}{x!\,\Gamma(b+x)\,\Gamma(c)\,\Gamma(d)}$	$n!$	$\dfrac{x!\,\Gamma(b+x)}{(x-n)!\,\Gamma(b+x-n)}$	

Более полное изложение свойств этих многочленов см. в [22.5], [22.17].

ПРИМЕРЫ

22.18. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ И РАСШИРЕНИЕ ТАБЛИЦ

Вычисление ортогонального многочлена, коэффициенты которого заданы численно.

Пример 1. Вычислить $L_6(1.5)$ и его первую и вторую производные, используя табл. 22.10 и схему Горнера.

1	−36	450	−2400	5400	−4320	720
$x = 1.5$	1.5	−51.75	597.375	−2703.9375	4044.09375	−413.859375
1	−34.5	398.25	−1802.625	2696.0625	−275.90625	306.140625
1.5	1.5	−49.5	523.125	−1919.25	1165.21875	$L_6 = \dfrac{306.140625}{720} = 0.42519\,53$
1	−33.0	348.75	−1279.500	776.8125	889.3125	
1.5	1.5	−47.25	452.250	−1240.875		$L_6' = \dfrac{889.3125}{720} = 1.23515\,625$
1	−31.5	301.50	−827.250	−464.0625		$L_6'' = 2\,\dfrac{[-464.0625]}{720} = -1.28906\,25$

Вычисление ортогонального многочлена из его явного представления, когда численные значения коэффициентов не даны.

Если надо вычислить отдельное значение ортогонального многочлена $f_n(x)$, используем соответствующее явное выражение, записав его в виде

$$f_n(x) = d_n(x)a_0(x).$$

Причем a_0 находим по рекуррентной формуле

$$a_{m-1}(x) = 1 - \frac{b_m}{c_m} f(x)\, a_m(x) \quad (m = n, n-1, \ldots, 2, 1,\ a_n(x) = 1).$$

$d_n(x)$ b_m, c_m, $f(x)$ для многочленов этой главы приведены в следующей таблице:

$f_n(x)$	$d_n(x)$	b_m	c_m	$f(x)$
$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$\binom{n+\alpha}{n}$	$(n-m+1)(\alpha+\beta+n+m)$	$2m(\alpha+m)$	$1-x$
$C_{2n}^{(\alpha)}$	$(-1)^n \frac{(\alpha)_n}{n!}$	$2(n-m+1)(\alpha+n+m-1)$	$m(2m-1)$	x^2
$C_{2n+1}^{(\alpha)}$	$(-1)^n \frac{(\alpha)_{n+1}}{n!} 2x$	$2(n-m+1)(\alpha+n+m)$	$m(2m+1)$	x^2
T_{2n}	$(-1)^n$	$2(n-m+1)(n+m-1)$	$m(2m-1)$	x^2
T_{2n+1}	$(-1)^n(2n+1)x$	$2(n-m+1)(n+m)$	$m(2m+1)$	x^2
U_{2n}	$(-1)^n$	$2(n-m+1)(n+m)$	$m(2m-1)$	x^2
U_{2n+1}	$(-1)^n 2(n+1)x$	$2(n-m+1)(n+m+1)$	$m(2m+1)$	x^2
P_{2n}	$\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$	$(n-m+1)(2n+2m-1)$	$m(2m-1)$	x^2
P_{2n+1}	$\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n+1}{n}(n+1)x$	$(n-m+1)(2n+2m+1)$	$m(2m+1)$	x^2
$L_n^{(\alpha)}$	$\binom{n+\alpha}{n}$	$n-m+1$	$m(\alpha+m)$	x
H_{2n}	$(-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$	$2(n-m+1)$	$m(2m-1)$	x^2
H_{2n+1}	$(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2x$	$2(n-m+1)$	$m(2m+1)$	x^2

Пример 2. Вычислить $P_8^{(1/2,\,3/2)}(2)$. Здесь $d_8 = \binom{8.5}{8} = 3.33847$, $f(2) = -1$.

m	8	7	6	5	4	3	2	1	0
a_m	1	1.132353	1.366667	1.841026	3.008392	6.849651	26.44156	223.1091	6545.533
b_m	18	34	48	60	70	78	84	88	90
c_m	136	105	78	55	36	21	10	3	0

$$P_8^{(1/2,\,3/2)}(2) = d_8 a_0(2) = (3.33847)(6545.533) = 21\,852.07.$$

Вычисление ортогональных многочленов с помощью рекуррентных формул.

Пример 3. Вычислить $C_n^{(1/4)}(2.5)$ для $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Из табл. 22.2 находим значения $C_0^{(1/4)} = 1$, $C_1^{(1/4)} = 1.25$. Согласно 22.7 рекуррентное соотношение в данном случае имеет вид

$$C_{n+1}^{(1/4)}(2.5) = [5(n+1/4)\, C_n^{(1/4)}(2.5) - (n-1/2)\, C_{n-1}^{(1/4)}(2.5)]/(n+1).$$

n	2	3	4	5	6
$C_n^{(1/4)}(2.5)$	3.65625	13.08594	50.87648	207.0649	867.7516

Для контроля можно вычислить $C_6^{(1/4)}(2.5)$ методом примера 2.

Изменение интервала ортогональности

В некоторых приложениях более удобно использовать многочлены, ортогональные на отрезке [0, 1]. Эти многочлены можно получить из многочленов, данных в этой главе, с помощью подстановки $x = 2\tilde{x} - 1$. Коэффициенты нового многочлена могут быть получены из коэффициентов старого с помощью следующей рекуррентной схемы (при условии, что стандартизация не изменяется). Пусть

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m,$$

$$f_n^*(x) = f_n(2x - 1) = \sum_{m=0}^{n} a_m^* x^m;$$

тогда a_m^* задаются рекуррентно через a_m соотношениями

$$a_m^{(j)} = 2a_m^{(j-1)} - a_{m+1}^{(j)} \quad (m = n-1, n-2, \ldots, j;$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$a_m^{(-1)} = a_m/2 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$a_n^{(j)} = 2^j a_n \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$a_m^{(m)} = a_m^* \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 4. Дано $T_5(x) = 5x - 20x^3 + 16x^5$; найти $T_5^*(x)$.

j \ m	5	4	3	2	1	0
-1	$8 = a_5^{(-1)}$	0	$-10 = a_3^{(-1)}$	0	$2.5 = a_1^{(-1)}$	0
0	16	-16	4	4	1	$-1 = a_0^*$
1	32	-64	56	-48	$50 = a_1^*$	
2	64	-192	304	$-400 = a_2^*$		
3	128	-512	$1120 = a_3^*$			
4	256	$-1280 = a_4^*$				
5	$512 = a_5^*$					

Итак, $T_5^*(x) = 512x^5 - 1280x^4 + 1120x^3 - 400x^2 + 50x - 1$.

22.19. ПРИБЛИЖЕНИЯ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Постановка задачи. Дана функция $f(x)$ (заданная аналитически или в виде таблицы) в области D, которая может быть непрерывным интервалом или множеством дискретных точек *). Аппроксимировать $f(x)$ многочленом $F_n(x)$ заданной степени n так, чтобы взвешенная сумма квадратов погрешностей в D была наименьшей.

Решение. Пусть $w(x) \geqslant 0$ — весовая функция, выбранная в соответствии с относительной величиной погрешности в различных частях D. Пусть $f_m(x)$ — многочлены, ортогональные в D относительно $w(x)$, т.е. $(f_m, f_n) = 0$ для $m \neq n$, где

$$(f, g) = \begin{cases} \int\limits_D (wx) f(x)\, g(x)\, dx, & \text{если } D \text{ — непрерывный интервал,} \\ \sum\limits_{m=1}^{N} w(x_m) f(x_m)\, g(x_m), & \text{если } D \text{ — множество } N \text{ дискретных точек } x_m. \end{cases}$$

Тогда

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m f_m(x),$$

где

$$a_m = (f, f_m)/(f_m, f_m).$$

*) $f(x)$ — функция с интегрируемым квадратом (см., например, [22.17]).

D — непрерывный интервал

Пример 5. Найти по методу наименьших квадратов многочлен пятой степени, аппроксимирующий функцию $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ на отрезке $2 \leqslant x \leqslant 5$, используя весовую функцию

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)(5-x)}},$$

При такой весовой функции наибольшая точность аппроксимации достигается в окрестности концов отрезка.

Перейдем к отрезку $[-1, 1]$: $t = \dfrac{2x-7}{3}$,

$$w(x(t)) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Из 22.2

$$f_m(t) = T_m(t),$$

$$a_m = \frac{4}{3\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{t+3} T_m(t)\, dt \quad (m \neq 0),$$

$$a_0 = \frac{2}{3\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t+3}.$$

Вычисляя интегралы, получим

$$\frac{1}{1+x} \sim 0.235703 - 0.080880T_1\left(\frac{2x-7}{3}\right) + 0.013876T_2\left(\frac{2x-7}{3}\right) - 0.002380T_3\left(\frac{2x-7}{3}\right) + 0.000408T_4\left(\frac{2x-7}{3}\right) - 0.000070T_5\left(\frac{2x-7}{3}\right).$$

D — множество дискретных точек

Если $x_m = m\ (m = 0, 1, 2, \ldots, N)$ и $w(x) = 1$, используем многочлены Чебышева дискретного переменного из 22.17. Удобно ввести здесь несколько другую стандартизацию. А именно такую, чтобы

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m}\binom{n+m}{m} \frac{x!(N-m)!}{(x-m)!\,N!},$$

$$(f_n, f_n) = \frac{(N+n+1)!\,(N-n)!}{(2n+1)\,(N!)^2}.$$

Рекуррентная формула:

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = 1 - \frac{2x}{N},$$

$$(n+1)(N-n)f_{n+1}(x) = (2n+1)(N-2x)f_n(x) - n(N+n+1)f_{n-1}(x).$$

Пример 6. Аппроксимировать способом наименьших квадратов посредством многочлена третьей степени функцию $f(x)$, заданную следующей таблицей:

x	$f(x)$	$\bar{x} = \frac{x-10}{2}$	$f_0(\bar{x})$	$f_1(\bar{x})$	$f_2(\bar{x})$	$f_3(\bar{x})$
10	0.3162	0	1	1	1	1
12	0.2887	1	1	1/2	−1/2	−2
14	0.2673	2	1	0	−1	0
16	0.2500	3	1	−1/2	1/2	2
18	0.2357	4	1	−1	1	−1

	$f_0(\bar{x})$	$f_1(\bar{x})$	$f_2(\bar{x})$	$f_3(\bar{x})$
$(f_n, f_n) = \sum_{\bar{x}=0}^{4} f_n^2(\bar{x})$	5	2.5	3.5	10
$(f, f_n) = \sum_{\bar{x}=0}^{4} f(\bar{x}) f(2\bar{x}+10)$	1.3579	0.09985	0.01525	0.0031
$a_n = \frac{(f, f_n)}{(f_n, f_n)}$	0.271580	0.039940	0.0043571	0.000310

$$f(x) \sim 0.27158 + 0.03994\,(3.5 - 0.25x) + 0.0043571(23.5 - 3.5x + 0.125x^2) + 0.00031(266 - 59.8333x + 4.375x^2 - 0.10417x^3),$$

$$f(x) \sim 0.59447 - 0.043658x + 0.0019009x^2 - 0.000032292x^3.$$

22.20. ЭКОНОМИЗАЦИЯ РЯДОВ

Постановка задачи. Дано $f(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $R > 0$. Найти $\bar{f}(x) = \sum_{m=0}^{N} b_m x^m$ с наименьшим возможным N так, чтобы $|\bar{f}(x) - f(x)| < R$.

Решение. Выразим $f(x)$ через чебышевские многочлены, используя табл. 22.3:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} b_m T_m(x).$$

Тогда, так как $|T_m(x)| \leqslant 1\ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$, то

$$\bar{f}(x) = \sum_{m=0}^{N} b_m T_m(x)$$

удовлетворяет требуемой точности, если

$$\sum_{m=N+1}^{n} |b_m| < R.$$

$\bar{f}(x)$ удобнее всего вычислять, используя рекуррентную формулу (см. 22.7).

Пример 7. Экономизировать

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6},\quad R = 0.05.$$

Из табл. 22.3

$$f(x) = \frac{1}{120}[149T_0(x) + 32T_2(x) + 3T_4(x)] + \frac{1}{96}[76T_1(x) + 11T_3(x) + T_5(x)].$$

Тогда

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{120}[149T_0(x) + 32T_2(x)] + \frac{1}{96}[76T_1(x) + 11T_3(x)],$$

так как

$$|\bar{f}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{40} + \frac{1}{96} < 0.05.$$

Таблица 22.1. Коэффициенты многочленов Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = a_n^{-1} \sum_{m=0}^{n} c_m (x-1)^m$$

	a_n	$(x-1)^0$	$(x-1)^1$	$(x-1)^2$	$(x-1)^3$	$(x-1)^4$	$(x-1)^5$	$(x-1)^6$
$P_0^{(\alpha,\beta)}$	1	1						
$P_1^{(\alpha,\beta)}$	2	$2(\alpha+1)$	$\alpha+\beta+2$					
$P_2^{(\alpha,\beta)}$	8	$4(\alpha+1)_2$	$4(\alpha+\beta+3)(\alpha+2)$	$(\alpha+\beta+3)_2$				
$P_3^{(\alpha,\beta)}$	48	$8(\alpha+1)_3$	$12(\alpha+\beta+4)(\alpha+2)_2$	$6(\alpha+\beta+4)_2(\alpha+3)$	$(\alpha+\beta+4)_3$			
$P_4^{(\alpha,\beta)}$	384	$16(\alpha+1)_4$	$32(\alpha+\beta+5)(\alpha+2)_3$	$24(\alpha+\beta+5)_2(\alpha+3)_2$	$8(\alpha+\beta+5)_3(\alpha+4)$	$(\alpha+\beta+5)_4$		
$P_5^{(\alpha,\beta)}$	3840	$32(\alpha+1)_5$	$80(\alpha+\beta+6)(\alpha+2)_4$	$80(\alpha+\beta+6)_2(\alpha+3)_3$	$40(\alpha+\beta+6)_3(\alpha+4)_2$	$10(\alpha+\beta+6)_4(\alpha+5)$	$(\alpha+\beta+6)_5$	
$P_6^{(\alpha,\beta)}$	46080	$64(\alpha+1)_6$	$192(\alpha+\beta+7)(\alpha+2)_5$	$240(\alpha+\beta+7)_2(\alpha+3)_4$	$160(\alpha+\beta+7)_3(\alpha+4)_3$	$60(\alpha+\beta+7)_4(\alpha+5)_2$	$12(\alpha+\beta+7)_5(\alpha+6)$	$(\alpha+\beta+7)_6$

$$(m)_n = m(m+1)(m+2)\ \ldots\ (m+n-1)$$

$$P_5^{(1,1)}(x) = \frac{1}{3840}\left[(8)_5(x-1)^5 + 10(8)_4(6)(x-1)^4 + 40(8)_3(5)_2(x-1)^3 + 80(8)_2(4)_3(x-1)^2 + 80(8)(3)_4(x-1) + 32(2)_5\right]$$

$$P_5^{(1,1)}(x) = \frac{1}{3840}\left[95040(x-1)^5 + 475200(x-1)^4 + 864000(x-1)^3 + 691200(x-1)^2 + 230400(x-1) + 23040\right]$$

Таблица 22.2. Коэффициенты ультрасферических многочленов $C_n^{(\alpha)}(x)$ и выражений x^n через $C_m^{(\alpha)}(x)$

$$C_n^{(\alpha)}(x) = a_n^{-1} \sum_{m=0}^{n} c_m x^m \qquad x^n = b_n^{-1} \sum_{m=0}^{n} d_m C_m^{(\alpha)}(x) \qquad (\alpha \neq 0)$$

		x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	
	b_n	1	2α	$2(\alpha)_2$	$4(\alpha)_3$	$4(\alpha)_4$	$8(\alpha)_5$	$8(\alpha)_6$	
$C_0^{(\alpha)}$	a_n 1	1 1		α		$3\alpha(\alpha+3)$		$15\alpha(\alpha+4)(\alpha+5)$	$C_0^{(\alpha)}$
$C_1^{(\alpha)}$	1		2α 1		$3(\alpha+1)$		$15(\alpha+1)(\alpha+4)$		$C_1^{(\alpha)}$
$C_2^{(\alpha)}$	1	$-\alpha$		$2(\alpha)_2$ 1		$6(\alpha+2)$		$45(\alpha+2)(\alpha+5)$	$C_2^{(\alpha)}$
$C_3^{(\alpha)}$	3		$-6(\alpha)_2$		$4(\alpha)_3$ 3		$30(\alpha+3)$		$C_3^{(\alpha)}$
$C_4^{(\alpha)}$	6	$3(\alpha)_2$		$-12(\alpha)_3$		$4(\alpha)_4$ 6		$90(\alpha+4)$	$C_4^{(\alpha)}$
$C_5^{(\alpha)}$	15		$15(\alpha)_3$		$-20(\alpha)_4$		$4(\alpha)_5$ 30		$C_5^{(\alpha)}$
$C_6^{(\alpha)}$	90	$-15(\alpha)_3$		$90(\alpha)_4$		$-60(\alpha)_5$		$8(\alpha)_6$ 90	$C_6^{(\alpha)}$
		x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ \ldots\ (\alpha+n-1)$$

$$C_3^{(2)}(x) = \frac{1}{3}\left[4(2)_3x^3 - 6(2)_2x\right] \qquad x^3 = \frac{1}{4(2)_3}\left[3(3)C_1^{(2)}(x) + 3C_3^{(2)}(x)\right]$$

$$C_3^{(2)}(x) = \frac{1}{3}\left[96x^3 - 36x\right] \qquad x^3 = \frac{1}{96}\left[9C_1^{(2)}(x) + 3C_3^{(2)}(x)\right]$$

Таблица 22.3. Коэффициенты многочленов Чебышева $T_n(x)$ и выражений x^n через $T_m(x)$

$$T_n(x)=\sum_{m=0}^{n} c_m x^m \qquad x^n=b_n^{-1}\sum_{m=0}^{n} d_m T_m(x)$$

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	
b_n	1	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	
T_0	1 1		1		3		10		35		126		462	T_0
T_1		1 1		3		10		35		126		462		T_1
T_2	−1		2 1		4		15		56		210		792	T_2
T_3		−3		4 1		5		21		84		330		T_3
T_4	1		−8		8 1		6		28		120		495	T_4
T_5		5		−20		16 1		7		36		165		T_5
T_6	−1		18		−48		32 1		8		45		220	T_6
T_7		−7		56		−112		64 1		9		55		T_7
T_8	1		−32		160		−256		128 1		10		66	T_8
T_9		9		−120		432		−576		256 1		11		T_9
T_{10}	−1		50		−400		1120		−1280		512 1		12	T_{10}
T_{11}		−11		220		−1232		2816		−2816		1024 1		T_{11}
T_{12}	1		−72		840		−3584		6912		−6144		2048 1	T_{12}
	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	

$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1 \qquad x^6=\frac{1}{32}[10T_0+15T_2+6T_4+T_6]$$

Таблица 22.4. Значения многочленов Чебышева $T_n(x)$

$n \backslash x$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	+1.00000 00000	+1.00000 00000	+1.00000 00000	+1.00000 00000	1
1	+0.20000 00000	+0.40000 00000	+0.60000 00000	+0.80000 00000	1
2	−0.92000 00000	−0.68000 00000	−0.28000 00000	+0.28000 00000	1
3	−0.56800 00000	−0.94400 00000	−0.93600 00000	−0.35200 00000	1
4	+0.69280 00000	−0.07520 00000	−0.84320 00000	−0.84320 00000	1
5	+0.84512 00000	+0.88384 00000	−0.07584 00000	−0.99712 00000	1
6	−0.35475 20000	+0.78227 20000	+0.75219 20000	−0.75219 20000	1
7	−0.98702 08000	−0.25802 24000	+0.97847 04000	−0.20638 72000	1
8	−0.04005 63200	−0.98868 99200	+0.42197 24800	+0.42197 24800	1
9	+0.97099 82720	−0.53292 95360	−0.47210 34240	+0.88154 31680	1
10	+0.42845 56288	+0.56234 62912	−0.98849 65888	+0.98849 65888	1
11	−0.79961 60205	+0.98280 65690	−0.71409 24826	+0.70005 13741	1
12	−0.74830 20370	+0.22389 89640	+0.13158 56097	+0.13158 56097	1

Таблица 22.5. Коэффициенты многочленов Чебышева $U_n(x)$ и выражений x^n через $U_m(x)$

$$U_n(x)=\sum_{m=0}^{n} c_m x^m \qquad x^n = b_n^{-1}\sum_{m=0}^{n} d_m U_m(x)$$

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	
b_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	
U_0	1 1		1		2		5		14		42		132	U_0
U_1		2 1		2		5		14		42		132		U_1
U_2	−1		4 1		3		9		28		90		297	U_2
U_3		−4		8 1		4		14		48		165		U_3
U_4	1		−12		16 1		5		20		75		275	U_4
U_5		6		−32		32 1		6		27		110		U_5
U_6	−1		24		−80		64 1		7		35		154	U_6
U_7		−8		80		−192		128 1		8		44		U_7
U_8	1		−40		240		−448		256 1		9		54	U_8
U_9		10		−160		672		−1024		512 1		10		U_9
U_{10}	−1		60		−560		1792		−2304		1024 1		11	U_{10}
U_{11}		−12		280		−1792		4608		−5120		2048 1		U_{11}
U_{12}	1		−84		1120		−5376		11520		−11264		4096 1	U_{12}
	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	

$$U_6(x)=64x^6-80x^4+24x^2-1 \qquad x^6=\frac{1}{64}[5U_0+9U_2+5U_4+U_6]$$

Таблица 22.6. Значения многочленов Чебышева $U_n(x)$

$n\backslash x$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	+1.00000 00000	+1.00000 00000	+1.00000 00000	+1.00000 00000	1
1	+0.40000 00000	+0.80000 00000	+1.20000 00000	+1.60000 00000	2
2	−0.84000 00000	−0.36000 00000	+0.44000 00000	+1.56000 00000	3
3	−0.73600 00000	−1.08800 00000	−0.67200 00000	+0.89600 00000	4
4	+0.54560 00000	−0.51040 00000	−1.24640 00000	−0.12640 00000	5
5	+0.95424 00000	+0.67968 00000	−0.82368 00000	−1.09824 00000	6
6	−0.16390 40000	+1.05414 40000	+0.25798 40000	−1.63078 40000	7
7	−1.01980 16000	+0.16363 52000	+1.13326 08000	−1.51101 44000	8
8	−0.24401 66400	−0.92323 58400	+1.10192 89600	−0.78683 90400	9
9	+0.92219 49440	−0.90222 38720	+0.18905 39520	+0.25207 19360	10
10	+0.61289 46176	+0.20145 67424	−0.87506 42176	+1.19015 41376	11
11	−0.67703 70970	+1.06338 92659	−1.23913 10131	+1.65217 46842	12
12	−0.88370 94564	+0.64925 46703	−0.61189 29981	+1.45332 53571	13

Таблица 22.7. Коэффициенты многочленов Чебышева $C_n(x)$ и выражений x^n через $C_m(x)$

$$C_n(x)=\sum_{m=0}^{n} c_m x^m \qquad x^n=b_n^{-1}\sum_{m=0}^{n} d_m C_m(x)$$

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	
b_n	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_0	2 1		1		3		10		35		126		462	C_0
C_1		1 1		3		10		35		126		462		C_1
C_2	−2		1 1		4		15		56		210		792	C_2
C_3		−3		1 1		5		21		84		330		C_3
C_4	2		−4		1 1		6		28		120		495	C_4
C_5		5		−5		1 1		7		36		165		C_5
C_6	−2		9		−6		1 1		8		45		220	C_6
C_7		−7		14		−7		1 1		9		55		C_7
C_8	2		−16		20		−8		1 1		10		65	C_8
C_9		9		−30		27		−9		1 1		11		C_9
C_{10}	−2		25		−50		35		−10		1 1		12	C_{10}
C_{11}		−11		55		−77		44		−11		1 1		C_{11}
C_{12}	2		−36		105		−112		54		−12		1 1	C_{12}
	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	

$$C_6(x)=x^6-6x^4+9x^2-2 \qquad x^6=10C_0+15C_2+6C_4+C_6$$

Таблица 22.8. Коэффициенты многочленов Чебышева $S_n(x)$ и выражений x^n через $S_m(x)$

$$S_n(x)=\sum_{m=0}^{n} c_m x^m \qquad x^n=\sum_{m=0}^{n} d_m S_m(x)$$

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	
S_0	1 1		1		2		5		14		42		132	S_0
S_1		1 1		2		5		14		42		132		S_1
S_2	−1		1 1		3		9		28		90		297	S_2
S_3		−2		1 1		4		14		48		165		S_3
S_4	1		−3		1 1		5		20		75		275	S_4
S_5		3		−4		1 1		6		27		110		S_5
S_6	−1		6		−5		1 1		7		35		154	S_6
S_7		−4		10		−6		1 1		8		44		S_7
S_8	1		−10		15		−7		1 1		9		54	S_8
S_9		5		−20		21		−8		1 1		10		S_9
S_{10}	−1		15		−35		28		−9		1 1		11	S_{10}
S_{11}		−6		35		−56		36		−10		1 1		S_{11}
S_{12}	1		−21		70		−84		45		−11		1 1	S_{12}
	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	

$$S_6(x)=x^6-5x^4+6x^2-1 \qquad x^6=5S_0+9S_2+5S_4+S_6$$

Таблица 22.9. Коэффициенты многочленов Лежандра $P_n(x)$ и выражений x^n через $P_m(x)$

$$P_n(x)=a_n^{-1}\sum_{m=0}^{n} c_m x^m \qquad x^n=b_n^{-1}\sum_{m=0}^{n} d_m P_m(x)$$

		x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	
	a_n b_n	1	1	3	5	35	63	231	429	6435	12155	46189	88179	676039	b_n
P_0	1	1 1		1		7		33		715		4199		52003	P_0
P_1	1		1 1		3		27		143		3315		20349		P_1
P_2	2	−1		3 2		20		110		2600		16150		208012	P_2
P_3	2		−3		5 2		28		182		4760		31654		P_3
P_4	8	3		−30		35 8		72		2160		15504		220248	P_4
P_5	8		15		−70		63 8		88		2992		23408		P_5
P_6	16	−5		105		−315		231 16		832		7904		133952	P_6
P_7	16		−35		315		−693		429 16		960		10080		P_7
P_8	128	35		−1260		6930		−12012		6435 128		2176		50048	P_8
P_9	128		315		−4620		18018		−25740		12155 128		2432		P_9
P_{10}	256	−63		3465		−30030		90090		−109395		46189 256		16752	P_{10}
P_{11}	256		−693		15015		−90090		218790		−230945		88179 256		P_{11}
P_{12}	1024	231		−18018		225225		−1021020		2078505		−1939938		676039 1024	P_{12}
		x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	

$$P_6(x)=\frac{1}{16}[231x^6-315x^4+105x^2-5] \qquad x^6=\frac{1}{231}[33P_0+110P_2+72P_4+16P_6]$$

Значения $P_n(x)$ см. в гл. 8.

Т а б л и ц а 22.10. Коэффициенты многочленов Лагерра $L_n(x)$ и выражений x^n через $L_m(x)$

$$L_n(x)=a_n^{-1}\sum_{m=0}^{n} c_m x^m \qquad x^n=\sum_{m=0}^{n} d_m L_m(x)$$

	a_n	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	
L_0	1	1 1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800	39916800	479001600	L_0
L_1	1	1	−1 −1	−4	−18	−96	−600	−4320	−35280	−322560	−3265920	−36288000	−439084800	−5748019200	L_1
L_2	2	2	−4	1 2	18	144	1200	10800	105840	1128960	13063680	163296000	2195424000	31614105600	L_2
L_3	6	6	−18	9	−1 −6	−96	−1200	−14400	−176400	−2257920	−30481920	−435456000	−6586272000	−105380352000	L_3
L_4	24	24	−96	72	−16	1 24	600	10800	176400	2822400	45722880	762048000	13172544000	237105792000	L_4
L_5	120	120	−600	600	−200	25	−1 −120	−4320	−105840	−2257920	−45722880	−914457600	−18441561600	−379369267200	L_5
L_6	720	720	−4320	5400	−2400	450	−36	1 720	35280	1128960	30481920	762048000	18441561600	442597478400	L_6
L_7	5040	5040	−35280	52920	−29400	7350	−882	49	−1 −5040	−322560	−13063680	−435456000	−13172544000	−379369267200	L_7
L_8	40320	40320	−322560	564480	−376320	117600	−18816	1568	−64	1 40320	3265920	163296000	6586272000	237105792000	L_8
L_9	362880	362880	−3265920	6531840	−5080320	1905120	−381024	42336	−2592	81	−1 −362880	−36288000	−2195424000	−105380352000	L_9
L_{10}	3628800	3628800	−36288000	81648000	−72576000	31752000	−7620480	1058400	−86400	4050	−100	1 3628800	439084800	31614105600	L_{10}
L_{11}	39916800	39916800	−439084800	1097712000	−1097712000	548856000	−153679680	25613280	−2613600	163350	−6050	121	−1 −39916800	−5748019200	L_{11}
L_{12}	479001600	479001600	−5748019200	15807052800	−17563392000	9879408000	−3161410560	614718720	−75271680	5880600	−290400	8712	−144	1 479001600	L_{12}
	a_n	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	

$$L_6(x)=\frac{1}{720}\left[x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+5400x^2-4320x+720\right] \qquad x^6=720L_0-4320L_1+10800L_2-14400L_3+10800L_4-4320L_5+720L_6$$

Таблица 22.11. Значения многочленов Лагерра $L_n(x)$

$n \backslash x$	0.5	1.0	3.0	5.0	10.0
0	+1.00000 00000	+1.00000 00000	+1.00000 00000	+1.00000 00000	+1.00000 00000
1	+0.50000 00000	0.00000 00000	−2.00000 00000	−4.00000 00000	−9.00000 00000
2	+0.12500 00000	−0.50000 00000	−0.50000 00000	+3.50000 00000	+31.00000 00000
3	−0.14583 33333	−0.66666 66667	+1.00000 00000	+2.66666 66667	−45.66666 66667
4	−0.33072 91667	−0.62500 00000	+1.37500 00000	−1.29166 66667	+11.00000 00000
5	−0.44557 29167	−0.46666 66667	+0.85000 00000	−3.16666 66667	+34.33333 33333
6	−0.50414 49653	−0.25694 44444	−0.01250 00000	−2.09027 77778	−3.44444 44444
7	−0.51833 92237	−0.04047 61905	−0.74642 85714	+0.32539 68254	−30.90476 19048
8	−0.49836 29984	+0.15399 30556	−1.10870 53571	+2.23573 90873	−16.30158 73016
9	−0.45291 95204	+0.30974 42681	−1.06116 07143	+2.69174 38272	+14.79188 71252
10	−0.38937 44141	+0.41894 59325	−0.70002 23214	+1.75627 61795	+27.98412 69841
11	−0.31390 72988	+0.48013 41791	−0.18079 95130	+0.10754 36909	+14.53695 68703
12	−0.23164 96389	+0.49621 22235	+0.34035 46063	−1.44860 42948	−9.90374 64593

Таблица 22.12. Коэффициенты многочленов Эрмита $H_n(x)$ и выражений x^n через $H_m(x)$

$$H_n(x)=\sum_{m=0}^{n} c_m x^m \qquad x^n=b_n^{-1}\sum_{m=0}^{n} d_m H_m(x)$$

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	
b_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	b_n
H_0	1 1		2		12		120		1680		30240		665280	H_0
H_1		2 1		6		60		840		15120		332640		H_1
H_2	−2		4 1		12		180		3360		75600		1995840	H_2
H_3		−12		8 1		20		420		10080		277200		H_3
H_4	12		−48		16 1		30		840		25200		831600	H_4
H_5		120		−160		32 1		42		1512		55440		H_5
H_6	−120		720		−480		64 1		56		2520		110880	H_6
H_7		−1680		3360		−1344		128 1		72		3960		H_7
H_8	1680		−13440		13440		−3584		256 1		90		5940	H_8
H_9		30240		−80640		48384		−9216		512 1		110		H_9
H_{10}	−30240		302400		−403200		161280		−23040		1024 1		132	H_{10}
H_{11}		−665280		2217600		−1774080		506880		−56320		2048 1		H_{11}
H_{12}	665280		−7983360		13305600		−7096320		1520640		−135168		4096 1	H_{12}
	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	

$$H_6(x)=64x^6-480x^4+720x^2-120 \qquad x^6=\frac{1}{64}[120H_0+180H_2+30H_4+H_6]$$

Таблица 22.13. Значения многочленов Эрмита $H_n(x)$

$n \backslash x$	0.5	1.0	3.0	5.0	10.0
0	+1.00000	+1.00000	+1.00000 00	1.00000 00000	1.00000 00000
1	+1.00000	+2.00000	+6.00000 00	(1)1.00000 00000	(1)2.00000 00000
2	−1.00000	+2.00000	(1)+3.40000 00	(1)9.80000 00000	(2)3.98000 00000
3	−5.00000	−4.00000	(2)+1.80000 00	(2)9.40000 00000	(3)7.88000 00000
4	+1.00000	(1)−2.00000	(2)+8.76000 00	(3)8.81200 00000	(5)1.55212 00000
5	(1)+4.10000	(0)−8.00000	(3)+3.81600 00	(4)8.06000 00000	(6)3.04120 00000
6	(1)+3.10000	(2)+1.84000	(4)+1.41360 00	(5)7.17880 00000	(7)5.92718 80000
7	(2)−4.61000	(2)+4.64000	(4)+3.90240 00	(6)6 21160 00000	(9)1.14894 32000
8	(2)−8.95000	(3)−1.64800	(4)+3.62400 00	(7)5.20656 80000	(10)2.21490 57680
9	(3)+6.48100	(4)−1.07200	(5)−4.06944 00	(8)4.21271 20000	(11)4.24598 06240
10	(4)+2.25910	(3)+8.22400	(6)−3.09398 40	(9)3.27552 97600	(12)8.09327 82098
11	(5)−1.07029	(5)+2.30848	(7)−1.04250 24	(10)2.43298 73600	(14)1.53373 60295
12	(5)−6.04031	(5)+2.80768	(6)+5.51750 40	(11)1.71237 08128	(15)2.88941 99383

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

22.1. Bibliography on orthogonal polynomials. — Bull. of the National Research Council, Washington, 1940, № 103.

22.2. Чебышев П. Л. Об интерполировании. — Полн. собр. соч. М.; Л: Изд-во АН СССР, 1947, Т.II, с. 357—374.

22.3. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. — N.Y.: Interscience Publishers, 1953, V. 1, Ch. 7. Русский перевод: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. — М.: Гостехиздат, 1951, Т.1, Гл. 7.

22.4. Doetsch G. Die in der Statistik seltener Ereignisse auftretenden Charlierschen Polynome und eine demit zusammenhängende Differentialdifferenzengleichung. — Math. Ann. 1934, **109**, p. 257—266.

22.5. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953, V. 2, Ch. 10. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974, Т.II.

22.6. Gatteschi L. Limitazione degli errori nelle formule asintotiche per le funzioni speciali. — Rend. Sem. Mat. Univ. Torina, 1956—1957, **16**, p. 83—94.

22.7. Геронимус Я. Л. Теория ортогональных многочленов. — М.: Гостехиздат, 1950.

22.8. Hahn W. Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleichungen genügen. — Math. Nachr., 1949, **2**, p. 4—34.

22.9. Kaczmarz St., Steinhaus H. Theorie der Orthogonalreihen. — N.Y.: Chelsea Publishing Co., 1951, Ch. 4. Русский перевод: Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. — М.: Физматгиз, 1958.

22.10. Krawtchouk M. Sur une généralisation des polynomes d'Hermite. — C.R. Acad. Sci. Paris, 1929, **187**, p. 620—622.

22.11. Lanczos C. Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. — J. Math. Phys., 1938, **17**, p. 123—199.

22.12. Lanczos C. Applied analysis. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1956. Русский перевод: Ланцош С. Практические методы прикладного анализа. — М: Физматгиз, 1961.

22.13. Magnus W., Oberhettinger F. Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. — B.: Springer-Verlag, 1948, Ch. 5.

22.14. Meixner J. Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion. — J. London Math. Soc., 1934, **9**, p. 6—13.

22.15. Sansone G. Orthogonal functions. — N.Y.: Interscience Publishers, 1959. — (Pure and Applied Mathematics; V. IX).

22.16. Shohat J. Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebichef. — Mém. Soc. Math., P., 1934, **66** Gauthier-Villars, 1934, **66**.

22.17. Szegö G. Orthogonal polynomials. — Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 1959, **23**. Русский перевод: Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

22.18. Tricomi F. G. Vorlesungen über Orthogonalreihen. — B.: Springer-Verlag, 1955, Ch. 4—6.

Таблицы

22.19. British Association for the Advancement of Science. Legendre Polynomials. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1946. — (Mathematical Tables, Part — vol. A).

$P_n(x)$, $x = 0(0.01)6$, $n = 1(1)12$, $7 - 8D$.

22.20. Jörgensen N. R. Undersögelser over frekvens.-flader og korrelation. — Copenhagen: Busck, 1916.

$He_n(x)$, $x = 0(0.01)4$, $n = 1(1)6$, точные.

22.21. Кармазина Л. Н. Таблицы полиномов Якоби. — М.: Изд-во АН СССР, 1954.

$G_n(p, q, x)$, $x = 0(0.01)1$, $q = 0.1(0.1)1$,

$p = 1.1(0.1)3$, $n = 1(1)5$, $7D$.

22.22. National Bureau of Standards. Tables of Chebyshev polynomials $S_n(x)$ and $C_n(x)$. Washington: Government Printing Office, 1952. — (Applied Math. Series; 9). Русский перевод: Таблицы полиномов Чебышева $S_n(x)$ и $C_n(x)$. — М.: ВЦ АН СССР, 1963. — (БМТ; Вып. 19). $x = 0(0.001)2$, $n=2(1)12$, $12D$; коэффициенты многочленов $T_n(x)$, $U_n(x)$, $C_n(x)$ и $S_n(x)$ для $n = 0(1)12$.

22.23. Russel J. B. A table of Hermite functions. — J. Math. Phys. 1933, 12, p. 291—297.

$e^{-x^2/2}\ H_n(x)$, $x = 0(0.04)1(0.1)4(0.2)7(0.5)8$,

$n = 0(1)11$, $5D$.

22.24. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1949.

$L_n(x)$, $n = 0(1)5$, $x = 0(0.01)0.1(0.1)18(0.2)$

$20(0.5)21(1)26(2)30$, $3-5D$.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

22.25. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. — М.: ИЛ, 1948.

22.26. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963.

22.27. Митропольский А. А. Интеграл вероятностей. — Л.: Лесотехн. акад., 1948.

$H_n(x)$, $x = 0(0.01)4$, $n = 2, 3, 4$; $4 - 8D$.

22.28. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. — М.: Наука, 1974.

22.29. Таблицы специальных функций / Под ред. Я. Н. Шпильрейна. — М.: ГТТИ, 1934.

$P_n(x)$, $x = 0(0.01)1$; $P_n(\cos\theta)$,

$\theta = 0(1°)90°$; $n = 1(1)7$; $4D$.

Глава 23

МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНУЛЛИ, МНОГОЧЛЕНЫ ЭЙЛЕРА, ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

Э. ХЕЙНСВОРТ, К. ГОЛЬДБЕРГ

СОДЕРЖАНИЕ

23.1. МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНУЛЛИ, МНОГОЧЛЕНЫ ЭЙЛЕРА И ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА — МАКЛОРЕНА

Производящие функции

23.1.1. $$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (|t| < 2\pi),$$

$$\frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (|t| < \pi).$$

Числа Бернулли и числа Эйлера

23.1.2. $B_n = B_n(0) \quad (n = 0, 1, \ldots)$,

$E_n = 2^n E_n(1/2)$ — целое $(n = 0, 1, \ldots)$.

23.1.3. $B_0 = 1, \ B_1 = -1/2, \ B_2 = 1/6, \ B_4 = -1/30,$

$E_0 = 1, \ E_2 = -1, \ E_4 = 5.$

Использование B_n и E_n в разложениях тригонометрических функций в степенные ряды см. в гл. 4.

Суммы степеней

23.1.4. $\sum_{k=1}^{m} k^n = \frac{B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}}{n+1} \quad (m, n = 1, 2, \ldots),$

$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} k^n = \frac{E_n(m+1) + (-1)^m E_n(0)}{2} \quad (m, n = 1, 2, \ldots).$

Производные и разности

23.1.5. $B_n'(x) = nB_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$

$E_n'(x) = nE_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$

23.1.6. $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \quad (n = 0, 1, \ldots),$

$E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n \quad (n = 0, 1, \ldots).$

Разложения в ряд ($n = 0, 1, \ldots$)

23.1.7. $B_n(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) h^{n-k},$

$E_n(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x) h^{n-k},$

$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k}.$

Функциональные соотношения ($n = 0, 1, \ldots$)

23.1.8. $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x),$

$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x).$

23.1.9. $(-1)^n B_n(-x) = B_n(x) + nx^{n-1},$

$(-1)^{n+1} E_n(-x) = E_n(x) - 2x^n.$

Формулы для кратного аргумента

23.1.10. $B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{k}{m}\right)$

$(n = 0, 1, \ldots; \ m = 1, 2, \ldots),$

$E_n(mx) = m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k E_n\left(x + \frac{k}{m}\right)$

$(n = 0, 1, \ldots; \ m = 1, 3, \ldots).$

$E_n(mx) = -\frac{2}{n+1} m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k B_{n+1}\left(x + \frac{k}{m}\right)$

$(n = 0, 1, \ldots; \ m = 2, 4, \ldots),$

Интегралы

23.1.11. $\int_a^x B_n(t)\, dt = \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(a)}{n+1},$

$\int_a^x E_n(t)\, dt = \frac{E_{n+1}(x) - E_{n+1}(a)}{n+1}.$

23.1.12. $\int_0^1 B_n(t) B_m(t)\, dt = (-1)^{n-1} \frac{m!n!}{(m+n)!} B_{m+n}$

$(m, n = 1, 2, \ldots),$

$\int_0^1 E_n(t) E_m(t)\, dt = (-1)^n 4(2^{m+n+2} - 1) \frac{m!n!}{(m+n+2)!} B_{m+n+2}$

$(m, n = 0, 1, \ldots).$

Эти многочлены ортогональны при нечетных $m + n$.

Неравенства

23.1.13. $|B_{2n}| > |B_{2n}(x)| \quad (n = 1, 2, \ldots; \ 1 > x > 0),$

$4^{-n} |E_{2n}| > (-1)^n E_{2n}(x) > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots; \ 1/2 > x > 0).$

23.1.14. $\frac{2(2n+1)}{(2\pi)^{2n+1}} \left(\frac{1}{1 - 2^{-2n}}\right) > (-1)^{n+1} B_{2n+1}(x) > 0$

$(n = 1, 2, \ldots; \ 1/2 > x > 0),$

$\frac{4(2n-1)!}{\pi^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2n} - 2}\right) > (-1)^n E_{2n-1}(x) > 0$

$(n = 1, 2, \ldots; \ 1/2 > x > 0).$

23.1.15. $\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \left(\frac{1}{1 - 2^{1-2n}}\right) > (-1)^{n+1} B_{2n} > \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$

$(n = 1, 2, \ldots),$

$\frac{4^{n+1}(2n)!}{\pi^{2n+1}} > (-1)^n E_{2n} > \frac{4^{n+1}(2n)!}{\pi^{2n+1}} \left(\frac{1}{1 + 3^{-1-2n}}\right)$

$(n = 0, 1, \ldots).$

Разложения Фурье

23.1.16. $B_n(x) = -2\dfrac{n!}{(2\pi)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2\pi kx - \pi n/2)}{k^n}$

$(n > 1, 1 \geqslant x \geqslant 0;\ n = 1,\ 1 > x > 0)$,

$E_n(x) = 4\dfrac{n!}{\pi^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin((2k+1)\pi x - \pi n/2)}{(2k+1)^{n+1}}$

$(n > 0,\ 1 \geqslant x \geqslant 0;\ n = 0,\ 1 > x > 0)$.

23.1.17. $B_{2n-1}(x) = \dfrac{(-1)^n 2(2n-1)!}{(2\pi)^{2n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2k\pi x}{k^{2n-1}}$

$(n > 1,\ 1 \geqslant x \geqslant 0;\ n = 1,\ 1 > x > 0)$,

$E_{2n-1}(x) = \dfrac{(-1)^n 4(2n-1)!}{\pi^{2n}}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n}}$

$(n = 1, 2, \ldots;\ 1 \geqslant x \geqslant 0)$.

23.1.18. $B_{2n}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}}$

$(n = 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant x \leqslant 1)$,

$E_{2n}(x) = \dfrac{(-1)^n 4(2n)!}{\pi^{2n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n+1}}$

$(n > 0,\ 1 \geqslant x \geqslant 0;\ n = 0,\ 1 > x > 0)$.

Частные значения

23.1.19. $B_{2n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$, $\qquad E_{2n+1} = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

23.1.20. $B_n(0) = (-1)^n B_n(1)$, $\qquad E_n(0) = -E_n(1)$,

$B_n(0) = B_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$, $\qquad E_n(0) = -2(n+1)^{-1}(2^{n+1} - 1)B_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

23.1.21. $B_n(1/2) = -(1 - 2^{1-n})B_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$, $\qquad E_n(1/2) = 2^{-n}E_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

23.1.22. $B_n(1/4) = (-1)^n B_n(3/4)$,

$B_n(1/4) = -2^{-n}(1 - 2^{1-n})B_n - n4^{-n}E_{n-1}$

$(n = 1, 2, \ldots)$

23.1.23. $B_{2n}(1/3) = B_{2n}(2/3)$,

$B_{2n}(1/3) = -2^{-1}(1 - 3^{1-2n})B_{2n} \quad (n = 0, 1, \ldots)$

$E_{2n-1}(1/3) = -E_{2n-1}(2/3)$,

$E_{2n-1}(1/3) = -(2n)^{-1}(1 - 3^{1-2n})(2^{2n} - 1)B_{2n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

23.1.24. $B_{2n}(1/6) = B_{2n}(5/6)$,

$B_{2n}(1/6) = 2^{-1}(1 - 2^{1-2n})(1 - 3^{1-2n})B_{2n}$

$(n = 0, 1, \ldots)$

Символические соотношения

23.1.25. $p(B(x) + 1) - p(B(x)) = p'(x)$, $\qquad p(E(x) + 1) + p(E(x)) = 2p(x)$.

23.1.26. $B_n(x + h) = (B(x) + h)^n \quad (n = 0, 1, \ldots)$, $\qquad E_n(x + h) = (E(x) + h)^n \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Здесь $p(x)$ — многочлен относительно x и $[B(x)]^n = B_n(x)$, $[E(x)]^n = E_n(x)$.

Соотношения между многочленами

23.1.27. $E_{n-1}(x) = \dfrac{2^n}{n}\left\{B_n\left(\dfrac{x+1}{2}\right) - B_n\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}$,

$E_{n-1}(x) = \dfrac{2}{n}\left\{B_n(x) - 2^n B_n\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}$

$(n = 1, 2, \ldots)$,

23.1.28. $E_{n-2}(x) =$

$= 2\binom{n}{2}^{-1}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}(2^{n-k} - 1)B_{n-k}B_k(x) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$,

23.1.29. $B_n(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}E_k(2x)$

$(n = 0, 1, \ldots)$.

Формулы Эйлера — Маклорена

Пусть $F(x)$ имеет $2n$ непрерывных производных на интервале (a, b). Разделим этот интервал на m равных частей, и пусть $h = (b - a)/m$. Тогда для некоторого θ $(1 > \theta > 0)$, зависящего от $F^{(2n)}(x)$ на (a, b), имеем

23.1.30. $\sum_{k=0}^{m} F(a + kh) =$

$$= \frac{1}{h}\int_a^b F(t)\,dt + \frac{1}{2}\{F(b) + F(a)\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}\{F^{(2k-1)}(b) - F^{(2k-1)}(a)\} +$$

$$+ \frac{h^{2n}}{(2n)!}B_{2n}\sum_{k=0}^{m-1}F^{(2n)}(a + kh + \theta h).$$

Эквивалентное равенство:

23.1.31. $$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)\,dt = \frac{1}{2}\{F(x+h)+F(x)\} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}\{F^{(2k-1)}(x+h)-F^{(2k-1)}(x)\} - \frac{h^{2n}}{(2n)!}B_{2n}F^{(2n)}(x+\theta h)\quad (b-h\geqslant x\geqslant a).$$

Пусть $\hat{B}_n(x) = B_n(x-[x])$. Формула суммирования Эйлера имеет вид

23.1.32. $$\sum_{k=0}^{m-1} F(a+kh+\omega h) = \frac{1}{h}\int_a^b F(t)\,dt + \sum_{k=1}^{p}\frac{h^{k-1}}{k!}B_k(\omega)\{F^{(k-1)}(b)-F^{(k-1)}(a)\} - \frac{h^p}{p!}\int_0^1 \hat{B}_p(\omega-t)\left\{\sum_{k=0}^{m-1}F^{(p)}(a+kh+th)\right\}dt$$
$$(p\leqslant 2n,\quad 1\geqslant\omega\geqslant 0)$$

23.2. ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА И ДРУГИЕ СУММЫ ОБРАТНЫХ СТЕПЕНЕЙ

23.2.1. $\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\quad (\operatorname{Re} s>1).$

23.2.2. $\zeta(s)=\prod_p (1-p^{-s})^{-1}\quad (\operatorname{Re} s>1).$

(произведение берется по всем простым p).

23.2.3. $$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\prod\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{2k}\binom{s+2k-2}{2k-1} - \binom{s+2n}{2n+1}\int_1^{\infty}\frac{B_{2n+1}(x-[x])}{x^{s+2n+1}}\,dx$$
$$(s\neq 1,\ n=1,2,\ldots,\quad \operatorname{Re} s>-2n).$$

23.2.4. $$\zeta(s)=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_c\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\,dz$$

Контур c в формуле 23.2.4 начинается в бесконечности на положительной действительной оси, обходит начало координат в положительном направлении и возвращается к начальной точке; при этом точки $\pm 2ni\pi$ $(n=1,2,\ldots)$ не должны попасть внутрь контура.

23.2.5. $$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\gamma_n(s-1)^n,$$

где

$$\gamma_n=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{(\ln k)^n}{k}-\frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1}\right\}\quad (\operatorname{Re} s>0).$$

2.3.2.6. $\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin(\pi s/2)\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s).$

23.2.7. $$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx\quad (\operatorname{Re} s>1).$$

23.2.8. $$\zeta(s)=\frac{1}{(1-2^{1-s})\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,dx.$$

23.2.9. $$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{n}k^{-s}+(s-1)^{-1}n^{1-s}-s\int_n^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx$$
$$(n=1,2,\ldots,\quad \operatorname{Re} s>0).$$

23.2.10. $$\zeta(s)=\frac{\exp(\ln 2\pi-1-\gamma/2)\,s}{2(s-1)\,\Gamma(s/2+1)}\prod\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}$$

произведение берется по всем нулям ρ функции $\zeta(s)$ при $\operatorname{Re}\rho>0$. Функция $\zeta(s)$ регулярна для всех значений s, за исключением $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом 1.

Частные значения $(n=1,2,\ldots)$

23.2.11. $\zeta(0)=-1/2.$

23.2.12. $\zeta(1)=\infty.$

23.2.13. $\zeta'(0)=-\frac{1}{2}\ln 2\pi.$

23.2.14. $\zeta(-2n)=0.$

23.2.15. $\zeta(1-2n)=-B_{2n}/2n.$

23.2.16. $\zeta(2n)=\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}|B_{2n}|.$

23.2.17. $$\zeta(2n+1)=\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n+1}}{2(2n+1)!}\int_0^1 B_{2n+1}(x)\operatorname{ctg}(\pi x)\,dx$$

Суммы обратных степеней

23.2.18. $\zeta(n)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-n}\quad (n=2,3,\ldots).$

23.2.19. $$\eta(n)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{-n}=(1-2^{1-n})\,\zeta(n)\quad (n=1,2,\ldots).$$

23.2.20. $$\lambda(n)=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{-n}=(1-2^{-n})\,\zeta(n)\quad (n=2,3\ \ldots).$$

23.2.21. $\beta(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$

Эти суммы могут быть вычислены с помощью многочленов Бернулли и Эйлера путем применения 23.2.16, 23.2.17 (заметим, что $\eta(1) = \ln 2$) и формул

23.2.22. $\beta(2n+1) = \dfrac{(\pi/2)^{2n+1}}{2(2n)!} |E_{2n}| \quad (n = 0, 1, \ldots),$

23.2.23. $\beta(2n) =$

$$= \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4(2n-1)!} \int_0^1 E_{2n-1}(x) \sec(\pi x)\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$\beta(2)$ — постоянная Каталана. Некоторые другие частные значения:

23.2.24. $\zeta(2) = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots = \dfrac{\pi^2}{6},$

23.2.25. $\zeta(4) = 1 + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \ldots = \dfrac{\pi^4}{90},$

23.2.26. $\eta(2) = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \ldots = \dfrac{\pi^2}{12},$

23.2.27. $\eta(4) = 1 - \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} - \ldots = \dfrac{7\pi^4}{720},$

23.2.28. $\lambda(2) = 1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots = \dfrac{\pi^2}{8},$

23.2.29. $\lambda(4) = 1 + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^4} + \ldots = \dfrac{\pi^4}{96},$

23.2.30. $\beta(1) = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \ldots = \dfrac{\pi}{4},$

23.2.31. $\beta(3) = 1 - \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{5^3} - \ldots = \dfrac{\pi^3}{32}.$

Таблица 23.1. Коэффициенты b_k многочленов Бернулли

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1															
1	$-\frac{1}{2}$	1														
2	$\frac{1}{6}$	-1	1													
3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1												
4	$-\frac{1}{30}$	0	1	-2	1											
5	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{2}$	1										
6	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	-3	1									
7	0	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{7}{6}$	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1								
8	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	-4	1							
9	0	$-\frac{3}{10}$	0	2	0	$-\frac{21}{5}$	0	6	$-\frac{9}{2}$	1						
10	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	5	0	-7	0	$\frac{15}{2}$	-5	1					
11	0	$\frac{5}{6}$	0	$-\frac{11}{2}$	0	11	0	-11	0	$\frac{55}{6}$	$-\frac{11}{2}$	1				
12	$-\frac{691}{2730}$	0	5	0	$-\frac{33}{2}$	0	22	0	$-\frac{33}{2}$	0	11	-3	1			
13	0	$-\frac{691}{210}$	0	$\frac{65}{3}$	0	$-\frac{429}{10}$	0	$\frac{286}{7}$	0	$-\frac{143}{6}$	0	13	$-\frac{13}{2}$	1		
14	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{691}{30}$	0	$\frac{455}{6}$	0	$-\frac{1001}{10}$	0	$\frac{143}{2}$	0	$-\frac{1001}{30}$	0	$\frac{91}{6}$	-7	1	
15	0	$\frac{35}{2}$	0	$-\frac{691}{6}$	0	$\frac{455}{2}$	0	$-\frac{429}{2}$	0	$\frac{715}{6}$	0	$-\frac{91}{2}$	0	$\frac{35}{2}$	$-\frac{15}{2}$	1

Коэффициенты e_k многочленов Эйлера $E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e_k x^k$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1															
1	$-\frac{1}{2}$	1														
2	0	-1	1													
3	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	1												
4	0	1	0	-2	1											
5	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	1										
6	0	-3	0	5	0	-3	1									
7	$\frac{17}{8}$	0	$-\frac{21}{2}$	0	$\frac{35}{4}$	0	$-\frac{7}{2}$	1								
8	0	17	0	-28	0	14	0	-4	1							
9	$-\frac{31}{2}$	0	$\frac{153}{2}$	0	-63	0	21	0	$-\frac{9}{2}$							
10	0	-155	0	255	0	-126	0	30	0	-5	1					
11	$\frac{691}{4}$	0	$-\frac{1705}{2}$	0	$\frac{2805}{4}$	0	-231	0	$\frac{165}{4}$	0	$-\frac{11}{2}$	1				
12	0	2073	0	-3410	0	1683	0	-396	0	55	0	-6	1			
13	$-\frac{5461}{2}$	0	$\frac{26949}{2}$	0	$-\frac{22165}{2}$	0	$\frac{7293}{2}$	0	$-\frac{1287}{2}$	0	$\frac{143}{2}$	0	$-\frac{13}{2}$	1		
14	0	-38227	0	62881	0	-31031	0	7293	0	-1001	0	91	0	-7	1	
15	$\frac{929569}{16}$		$-\frac{573405}{2}$	0	$\frac{943215}{4}$	0	$-\frac{155155}{2}$	0	$\frac{109395}{8}$	0	$-\frac{3003}{2}$	0	$\frac{455}{4}$	0	$-\frac{15}{2}$	1

Таблица 23.2. Числа Бернулли и числа Эйлера

$B_n = N/D$

n	N	D	B_n
0	1	1	(0) 1.0000 00000
1	−1	2	(−1) −5.0000 00000
2	1	6	(−1) 1.6666 66667
4	−1	30	(−2) −3.3333 33333
6	1	42	(−2) 2.3809 52381
8	−1	30	(−2) −3.3333 33333
10	5	66	(−2) 7.5757 57576
12	−691	2730	(−1) −2.5311 35531
14	7	6	(0) 1.1666 66667
16	−3617	510	(0) −7.0921 56863
18	43867	798	(1) 5.4971 17794
20	−1 74611	330	(2) −5.2912 42424
22	8 54513	138	(3) 6.1921 23188
24	−2363 64091	2730	(4) −8.6580 25311
26	85 53103	6	(6) 1.4255 17167
28	−2 37494 61029	870	(7) −2.7298 23107
30	861 58412 76005	14322	(8) 6.0158 08739
32	−770 93210 41217	510	(10) −1.5116 31577
34	257 76878 58367	6	(11) 4.2961 46431
36	−26315 27155 30534 77373	19 19190	(13) −1.3711 65521
38	2 92999 39138 41559	6	(14) 4.8833 23190
40	−2 61082 71849 64491 22051	13530	(16) −1.9296 57934
42	15 20097 64391 80708 02691	1806	(17) 8.4169 30476
44	−278 33269 57930 10242 35023	690	(19) −4.0338 07185
46	5964 51111 59391 21632 77961	282	(21) 2.1150 74864
48	−560 94033 68997 81768 62491 27547	46410	(23) −1.2086 62652
50	49 50572 05241 07964 82124 77525	66	(24) 7.5008 66746
52	−80116 57181 35489 95734 79249 91853	1590	(26) −5.0387 78101
54	29 14996 36348 84862 42141 81238 12691	798	(28) 3.6528 77648
56	−2479 39292 93132 26753 68541 57396 63229	870	(30) −2.8498 76930
58	84483 61334 88800 41862 04677 59940 36021	354	(32) 2.3865 42750
60	−121 52331 40483 75557 20403 04994 07982 02460 41491	567 86730	(34) −2.1399 94926

n	E_n
0	1
2	−1
4	5
6	−61
8	1385
10	−50521
12	27 02765
14	−1993 60981
16	1 93915 12145
18	−240 48796 75441
20	37037 11882 37525
22	−69 34887 43931 37901
24	15514 53416 35570 86905
26	−40 87072 50929 31238 92361
28	12522 59641 40362 98654 68285
30	−44 15438 93249 02310 45536 82821
32	17751 93915 79539 28943 66647 89665
34	−80 72329 92358 87898 06216 82474 53281
36	41222 06033 95177 02122 34707 96712 59045
38	−234 89580 52704 31082 52017 82857 61989 47741
40	1 48511 50718 11498 00178 77156 78140 58266 84425
42	−1036 46227 33519 61211 93979 57304 74518 59763 10201
44	7 94757 94225 97592 70360 80405 10088 07061 95192 73805
46	−6667 53751 66855 44977 43502 84747 73748 19752 41076 84661
48	60 96278 64556 85421 58691 68574 28768 43153 97653 90444 35185
50	−60532 85248 18862 18963 14383 78511 16490 88103 49822 51468 15121
52	650 61624 86684 60884 77158 70634 08082 29834 83644 23676 53855 76565
54	−7 54665 99390 08739 09806 14325 65889 73674 42122 40024 71169 98586 45581
56	9420 32189 64202 41204 20228 62376 90583 22720 93888 52599 64600 93949 05945
58	−126 22019 25180 62187 19903 40923 72874 89255 48234 10611 91825 59406 99649 20041
60	181089 11496 57923 04965 45807 74165 21586 88733 48734 92363 14106 00809 54542 31325

Взято из [23.13].

Таблица 23.3. Суммы обратных степеней

n	$\zeta(n)=\sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}$	$\eta(n)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{-n}$
1	∞	0.69314 71805 59945 30942
2	1.64493 40668 48226 43647	0.82246 70334 24113 21824
3	1.20205 69031 59594 28540	0.90154 26773 69695 71405
4	1.08232 32337 11138 19152	0.94703 28294 97245 91758
5	1.03692 77551 43369 92633	0.97211 97704 46909 30594
6	1.01734 30619 84449 13971	0.98555 10912 97435 10410
7	1.00834 92773 81922 82684	0.99259 38199 22830 28267
8	1.00407 73561 97944 33938	0.99623 30018 52647 89923
9	1.00200 83928 26082 21442	0.99809 42975 41605 33077
10	1.00099 45751 27818 08534	0.99903 95075 98271 56564
11	1.00049 41886 04119 46456	0.99951 71434 98060 75414
12	1.00024 60865 53308 04830	0.99975 76851 43858 19085
13	1.00012 27133 47578 48915	0.99987 85427 63265 11549
14	1.00006 12481 35058 70483	0.99993 91703 45979 71817
15	1.00003 05882 36307 02049	0.99996 95512 13099 23808
16	1.00001 52822 59408 65187	0.99998 47642 14906 10644
17	1.00000 76371 97637 89976	0.99999 23782 92041 01198
18	1.00000 38172 93264 99984	0.99999 61878 69610 11348
19	1.00000 19082 12716 55394	0.99999 80935 08171 67511
20	1.00000 09539 62033 87280	0.99999 90466 11581 52212
21	1.00000 04769 32986 78781	0.99999 95232 58215 54282
22	1.00000 02384 50502 72773	0.99999 97616 13230 82255
23	1.00000 01192 19925 96531	0.99999 98808 01318 43950
24	1.00000 00596 08189 05126	0.99999 99403 98892 39463
25	1.00000 00298 03503 51465	0.99999 99701 98856 96283
26	1.00000 00149 01554 82837	0.99999 99850 99231 99657
27	1.00000 00074 50711 78984	0.99999 99925 49550 48496
28	1.00000 00037 25334 02479	0.99999 99962 74753 40011
29	1.00000 00018 62659 72351	0.99999 99981 37369 41811
30	1.00000 00009 31327 43242	0.99999 99990 68682 28145
31	1.00000 00004 65662 90650	0.99999 99995 34340 33145
32	1.00000 00002 32831 18337	0.99999 99997 67169 89595
33	1.00000 00001 16415 50173	0.99999 99998 83584 85805
34	1.00000 00000 58207 72088	0.99999 99999 41792 39905
35	1.00000 00000 29103 85044	0.99999 99999 70896 18953
36	1.00000 00000 14551 92189	0.99999 99999 85448 09143
37	1.00000 00000 07275 95984	0.99999 99999 92724 04461
38	1.00000 00000 03637 97955	0.99999 99999 96362 02193
39	1.00000 00000 01818 98965	0.99999 99999 98181 01084
40	1.00000 00000 00909 49478	0.99999 99999 99090 50538
41	1.00000 00000 00454 74738	0.99999 99999 99545 25268
42	1.00000 00000 00227 37368	0.99999 99999 99772 62633

Для $n > 42$ $\zeta(n+1) = \frac{1}{2}[1+\zeta(n)]$, $\eta(n+1) = \frac{1}{2}[1+\eta(n)]$.

Взято из [23.13].

Таблица 23.3. Суммы обратных степеней

n	$\lambda(n)=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{-n}$	$\beta(n)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)^{-n}$
1	∞	0.78539 81633 97448 310
2	1.23370 05501 36169 82735	0.91596 55941 77219 015
3	1.05179 97902 64644 99972	0.96894 61462 59369 380
4	1.01467 80316 04192 05455	0.98894 45517 41105 336
5	1.00452 37627 95139 61613	0.99615 78280 77088 064
6	1.00144 70766 40942 12191	0.99868 52222 18438 135
7	1.00047 15486 52376 55476	0.99955 45078 90539 909
8	1.00015 51790 25296 11930	0.99984 99902 46829 657
9	1.00005 13451 83843 77259	0.99994 96841 87220 090
10	1.00001 70413 63044 82549	0.99998 31640 26196 877
11	1.00000 56660 51090 10935	0.99999 43749 73823 699
12	1.00000 18858 48583 11958	0.99999 81223 50587 882
13	1.00000 06280 55421 80232	0.99999 93735 83771 841
14	1.00000 02092 40519 21150	0.99999 97910 87248 735
15	1.00000 00697 24703 12929	0.99999 99303 40842 624
16	1.00000 00232 37157 37916	0.99999 99767 75950 903
17	1.00000 00077 44839 45587	0.99999 99922 57782 104
18	1.00000 00025 81437 55666	0.99999 99974 19086 745
19	1.00000 00008 60444 11452	0.99999 99991 39660 745
20	1.00000 00002 86807 69746	0.99999 99997 13213 274
21	1.00000 00000 95601 16531	0.99999 99999 04403 029
22	1.00000 00000 31866 77514	0.99999 99999 68134 064
23	1.00000 00000 10622 20241	0.99999 99999 89377 965
24	1.00000 00000 03540 72294	0.99999 99999 96459 311
25	1.00000 00000 01180 23874	0.99999 99999 98819 768
26	1.00000 00000 00393 41247	0.99999 99999 99606 589
27	1.00000 00000 00131 13740	0.99999 99999 99868 863
28	1.00000 00000 00043 71245	0.99999 99999 99956 288
29	1.00000 00000 00014 57081	0.99999 99999 99985 429
30	1.00000 00000 00004 85694	0.99999 99999 99995 143
31	1.00000 00000 00001 61898	0.99999 99999 99998 381
32	1.00000 00000 00000 53966	0.99999 99999 99999 460
33	1.00000 00000 00000 17989	0.99999 99999 99999 820
34	1.00000 00000 00000 05996	0.99999 99999 99999 940
35	1.00000 00000 00000 01999	0.99999 99999 99999 980
36	1.00000 00000 00000 00666	0.99999 99999 99999 993
37	1.00000 00000 00000 00222	0.99999 99999 99999 998
38	1.00000 00000 00000 00074	0.99999 99999 99999 999
39	1.00000 00000 00000 00025	
40	1.00000 00000 00000 00008	
41	1.00000 00000 00000 00003	
42	1.00000 00000 00000 00001	

Таблица 23.4. Суммы положительных степеней $\sum_{k=1}^{m} k^n$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	3	5	9	17	33	65
3	6	14	36	98	276	794
4	10	30	100	354	1300	4890
5	15	55	225	979	4425	20515
6	21	91	441	2275	12201	67171
7	28	140	784	4676	29008	1 84820
8	36	204	1296	8772	61776	4 46964
9	45	285	2025	15333	1 20825	9 78405
10	55	385	3025	25333	2 20825	19 78405
11	66	506	4356	39974	3 81876	37 49966
12	78	650	6084	60710	6 30708	67 35950
13	91	819	8281	89271	10 02001	115 62759
14	105	1015	11025	1 27687	15 39825	190 92295
15	120	1240	14400	1 78312	22 99200	304 82920
16	136	1496	18496	2 43848	33 47776	472 60136
17	153	1785	23409	3 27369	47 67633	713 97705
18	171	2109	29241	4 32345	66 57201	1054 09929
19	190	2470	36100	5 62666	91 33300	1524 55810
20	210	2870	44100	7 22666	123 33300	2164 55810
21	231	3311	53361	9 17147	164 17401	3022 21931
22	253	3795	64009	11 51403	215 71033	4156 01835
23	276	4324	76176	14 31244	280 07376	5636 37724
24	300	4900	90000	17 63020	359 70000	7547 40700
25	325	5525	1 05625	21 53645	457 35625	9988 81325
26	351	6201	1 23201	26 10621	576 17001	13077 97101
27	378	6930	1 42884	31 42062	719 65908	16952 17590
28	406	7714	1 64836	37 56718	891 76276	21771 07894
29	435	8555	1 89225	44 63999	1096 87425	27719 31215
30	465	9455	2 16225	52 73999	1339 87425	35009 31215
31	496	10416	2 46016	61 97520	1626 16576	43884 34896
32	528	11440	2 78784	72 46096	1961 71008	54621 76720
33	561	12529	3 14721	84 32017	2353 06401	67536 44689
34	595	13685	3 54025	97 68353	2807 41825	82984 49105
35	630	14910	3 96900	112 68978	3332 63700	1 01367 14730
36	666	16206	4 43556	129 48594	3937 29876	1 23134 97066
37	703	17575	4 94209	148 22755	4630 73833	1 48792 23475
38	741	19019	5 49081	169 07891	5423 09001	1 78901 59859
39	780	20540	6 08400	192 21332	6325 33200	2 14089 03620
40	820	22140	6 72400	217 81332	7349 33200	2 55049 03620
41	861	23821	7 41321	246 07093	8507 89401	3 02550 07861
42	903	25585	8 15409	277 18789	9814 80633	3 57440 39605
43	946	27434	8 94916	311 37590	11284 89076	4 20654 02654
44	990	29370	9 80100	348 85686	12934 05300	4 93217 16510
45	1035	31395	10 71225	389 86311	14779 33425	5 76254 82135
46	1081	33511	11 68561	434 63767	16838 96401	6 70997 79031
47	1128	35720	12 72384	483 43448	19132 41408	7 78789 94360
48	1176	38024	13 82976	536 51864	21680 45376	9 01095 84824
49	1225	40425	15 00625	594 16665	24505 20625	10 39508 72025
50	1275	42925	16 25625	656 66665	27630 20625	11 95758 72025

Взято из [23.13].

Таблица 23.4. Суммы положительных степеней $\sum_{k=1}^{m} k^n$

$m\backslash n$	1	2	3	4	5	6
51	1326	45526	17 58276	724 31866	31080 45876	13 71721 59826
52	1378	48230	18 98884	797 43482	34882 49908	15 69427 69490
53	1431	51039	20 47761	876 33963	39064 45401	17 91071 30619
54	1485	53955	22 05225	961 37019	43656 10425	20 39020 41915
55	1540	56980	23 71600	1052 87644	48688 94800	23 15826 82540
56	1596	60116	25 47216	1151 22140	54196 26576	26 24236 61996
57	1653	63365	27 32409	1256 78141	60213 18633	29 67201 09245
58	1711	66729	29 27521	1369 94637	66776 75401	33 47888 01789
59	1770	70210	31 32900	1491 11998	73925 99700	37 69693 35430
60	1830	73810	33 48900	1620 71998	81701 99700	42 36253 35430
61	1891	77531	35 75881	1759 17839	90147 96001	47 51457 09791
62	1953	81375	38 14209	1906 94175	99309 28833	53 19459 45375
63	2016	85344	40 64256	2064 47136	1 09233 65376	59 44694 47584
64	2080	89440	43 26400	2232 24352	1 19971 07200	66 31889 24320
65	2145	93665	46 01025	2410 74977	1 31573 97825	73 86078 14945
66	2211	98021	48 88521	2600 49713	1 44097 30401	82 12617 64961
67	2278	1 02510	51 89284	2802 00834	1 57598 55508	91 17201 47130
68	2346	1 07134	55 03716	3015 82210	1 72137 89076	101 05876 29754
69	2415	1 11895	58 32225	3242 49331	1 87778 20425	111 85057 92835
70	2485	1 16795	61 75225	3482 59331	2 04585 20425	123 61547 92835
71	2556	1 21836	65 33136	3736 71012	2 22627 49776	136 42550 76756
72	2628	1 27020	69 06384	4005 44868	2 41976 67408	150 35691 46260
73	2701	1 32349	72 95401	4289 43109	2 62707 39001	165 49033 72549
74	2775	1 37825	77 00625	4589 29685	2 84897 45625	181 91098 62725
75	2850	1 43450	81 22500	4905 70310	3 08627 92500	199 70883 78350
76	2926	1 49226	85 61476	5239 32486	3 33983 17876	218 97883 06926
77	3003	1 55155	90 18009	5590 85527	3 61051 02033	239 82106 87015
78	3081	1 61239	94 92561	5961 00583	3 89922 76401	262 34102 87719
79	3160	1 67480	99 85600	6350 50664	4 20693 32800	286 64977 43240
80	3240	1 73880	104 97600	6760 10664	4 53461 32800	312 86417 43240
81	3321	1 80441	110 29041	7190 57385	4 88329 17201	341 10712 79721
82	3403	1 87165	115 80409	7642 69561	5 25403 15633	371 50779 51145
83	3486	1 94054	121 52196	8117 27882	5 64793 56276	404 20183 24514
84	3570	2 01110	127 44900	8615 15018	6 06614 75700	439 33163 56130
85	3655	2 08335	133 59025	9137 15643	6 50985 28825	477 04658 71755
86	3741	2 15731	139 95081	9684 16459	6 98027 99001	517 50331 06891
87	3828	2 23300	146 53584	10257 06220	7 47870 08208	560 86593 07900
88	3916	2 31044	153 35056	10856 75756	8 00643 27376	607 30633 94684
89	4005	2 38965	160 40025	11484 17997	8 56483 86825	657 00446 85645
90	4095	2 47065	167 69025	12140 27997	9 15532 86825	710 14856 85645
91	4186	2 55346	175 22596	12826 02958	9 77936 08276	766 93549 37686
92	4278	2 63810	183 01284	13542 42254	10 43844 23508	827 57099 39030
93	4371	2 72459	191 05641	14290 47455	11 13413 07201	892 27001 22479
94	4465	2 81295	199 36225	15071 22351	11 86803 47425	961 25699 03535
95	4560	2 90320	207 93600	15885 72976	12 64181 56800	1034 76617 94160
96	4656	2 99536	216 78336	16735 07632	13 45718 83776	1113 04195 83856
97	4753	3 08945	225 91009	17620 36913	14 31592 24033	1196 33915 88785
98	4851	3 18549	235 32201	18542 73729	15 21984 32001	1284 92339 69649
99	4950	3 28350	245 02500	19503 33330	16 17083 32500	1379 07141 19050
100	5050	3 38350	255 02500	20503 33330	17 17083 32500	1479 07141 19050

Таблица 23.4. Суммы положительных степеней $\sum_{k=1}^{m} k^n$

$m \backslash n$	7	8	9
1	1	1	1
2	129	257	513
3	2316	6818	20196
4	18700	72354	2 82340
5	96825	4 62979	22 35465
6	3 76761	21 42595	123 13161
7	12 00304	79 07396	526 66768
8	32 97456	246 84612	1868 84496
9	80 80425	677 31333	5743 04985
10	180 80425	1677 31333	15743 04985
11	375 67596	3820 90214	39322 52676
12	733 99404	8120 71910	90920 33028
13	1361 47921	16278 02631	1 96965 32401
14	2415 61425	31035 91687	4 03575 79185
15	4124 20800	56664 82312	7 88009 38560
16	6808 56256	99614 49608	14 75204 15296
17	10911 94929	1 69372 07049	26 61082 91793
18	17034 14961	2 79571 67625	46 44675 82161
19	25972 86700	4 49407 30666	78 71552 79940
20	38772 86700	7 05407 30666	129 91552 79940
21	56783 75241	10 83635 90027	209 34353 26521
22	81727 33129	16 32394 63563	330 07045 44313
23	1 15775 58576	24 15504 48844	510 18572 05776
24	1 61640 30000	35 16257 63020	774 36647 46000
25	2 22675 45625	50 42136 53645	1155 83620 11625
26	3 02993 55801	71 30407 18221	1698 78656 90601
27	4 07597 09004	99 54702 54702	2461 34631 75588
28	5 42526 37516	137 32722 53038	3519 19191 28996
29	7 15025 13825	187 35186 65999	4969 90651 04865
30	9 33725 13825	252 96186 65999	6938 20651 04865
31	12 08851 27936	338 25097 03440	9582 16872 65536
32	15 52448 66304	448 20213 31216	13100 60593 54368
33	19 78633 09281	588 84299 49457	17741 75437 56321
34	25 03866 59425	767 42238 54353	23813 45365 22785
35	31 47259 56300	992 60992 44978	31695 01751 94660
36	39 30901 20396	1274 72091 52434	41851 01318 63076
37	48 80219 97529	1625 96886 06355	54847 18716 58153
38	60 24375 80121	2060 74807 44851	71368 79729 21001
39	73 96685 86800	2595 94900 05332	92241 63340 79760
40	90 35085 86800	3251 30900 05332	1 18456 03340 79760
41	109 82628 60681	4049 80152 34453	1 51194 22684 73721
42	132 88021 93929	5018 06672 30869	1 91861 36523 23193
43	160 06208 05036	6186 88675 08470	2 42120 62642 60036
44	191 98986 14700	7591 70911 33686	3 03932 81037 69540
45	229 35680 67825	9273 22165 24311	3 79600 87463 47665
46	272 93857 25041	11277 98287 56247	4 71819 89090 16721
47	323 60088 45504	13659 11154 18008	5 83732 93821 19488
48	382 30771 87776	16477 03958 47064	7 18993 48427 14176
49	450 13002 60625	19800 33264 16665	8 81834 84406 24625
50	528 25502 60625	23706 58264 16665	10 77147 34406 24625

Таблица 23.4. Суммы положительных степеней $\sum_{k=1}^{m} k^n$

$m \backslash n$	7	8	9
51	617 99609 38476	28283 37709 87066	13 10563 86137 15076
52	720 80326 41004	33629 34995 18522	15 88554 44973 50788
53	838 27437 80841	39855 31899 29883	19 18530 80891 52921
54	972 16689 90825	47085 51512 69019	23 08961 40014 66265
55	1124 41042 25200	55458 90891 59644	27 69498 05854 50640
56	1297 11990 74736	65130 64007 33660	33 11115 00335 95536
57	1492 60965 67929	76273 55978 45661	39 46261 19889 79593
58	1713 40807 35481	89079 86395 63677	46 89027 07286 24521
59	1962 27322 20300	1 03762 90771 67998	55 55326 65472 79460
60	2242 20922 20300	1 20559 06771 67998	65 63096 25472 79460
61	2556 48350 56321	1 39729 79901 65279	77 32510 86401 13601
62	2908 64496 62529	1 61563 80957 50175	90 86219 51863 77153
63	3302 54303 01696	1 86379 38760 17696	106 49600 93432 30976
64	3742 34768 12800	2 14526 88527 28352	124 51040 78527 12960
65	4232 57047 03425	2 46391 36656 18977	145 22232 06906 03585
66	4778 08654 04481	2 82395 42718 88673	168 98500 07044 03521
67	5384 15770 09804	3 23002 19494 45314	196 19153 51006 98468
68	6056 45658 28236	3 68718 51890 98690	227 27863 53971 28036
69	6801 09190 80825	4 20098 35635 27331	262 73072 32327 04265
70	7624 63490 80825	4 77746 36635 27331	303 08433 02327 04265
71	8534 14692 39216	5 42321 71947 73092	348 93283 09511 53296
72	9537 20822 43504	6 14542 13310 81828	400 93152 87653 82288
73	10641 94807 62601	6 95188 14229 75909	459 80311 54736 50201
74	11857 07610 35625	7 85107 61631 79685	526 34352 62487 29625
75	13191 91497 07500	8 85220 53135 70310	601 42821 25280 26500
76	14656 43442 79276	9 96524 01010 25286	686 01885 63746 04676
77	16261 28675 46129	11 20097 63925 72967	781 17055 08237 76113
78	18017 84364 01041	12 57109 07632 56103	888 03947 17370 60721
79	19938 23453 87200	14 08819 95731 62664	1007 89106 77196 79040
80	22035 38653 87200	15 76592 11731 62664	1142 10879 57196 79040
81	24323 06578 42161	17 61894 13620 14505	1292 20343 10166 78161
82	26815 92048 98929	19 66308 22206 69481	1459 82298 14263 86193
83	29529 52558 88556	21 91537 44528 08522	1646 76323 66939 26596
84	32480 42905 44300	24 39413 33638 91018	1854 97898 52248 56260
85	35686 19993 72425	27 11903 86142 81643	2086 59593 15080 59385
86	39165 47815 94121	30 11121 78853 47499	2343 92334 88197 23001
87	42938 02610 81904	33 39333 46007 84620	2629 46750 30627 52528
88	47024 78207 18896	36 98967 98488 39916	2945 94588 48916 18576
89	51447 91556 14425	40 92626 86545 41997	3296 30228 85991 03785
90	56230 88456 14425	45 23094 07545 41997	3683 72277 75991 03785
91	61398 49475 50156	49 93346 60306 93518	4111 65257 77288 92196
92	66976 96076 73804	55 06565 47620 69134	4583 81394 10154 48868
93	72993 96947 34561	60 66147 28587 19535	5104 22502 40039 36161
94	79478 74541 53825	66 75716 22441 30351	5677 21982 62325 52865
95	86462 11837 63200	73 39136 65570 20976	6307 46923 59571 62240
96	93976 59315 74016	80 60526 23468 59312	7000 00323 17816 42496
97	1 02056 42160 52129	88 44269 59412 36273	7760 23429 04362 07713
98	1 10737 67693 76801	96 95032 61670 54129	8593 98205 25663 57601
99	1 20058 33041 67500	106 17777 31113 33330	9507 49930 00499 98500
100	1 30058 33041 67500	116 17777 31113 33330	10507 49930 00499 98500

Таблица 23.4. Суммы положительных степеней $\sum_{k=1}^{m} k^n$

$m\backslash n$	10	$m\backslash n$	10
1	1	51	613 38941 75112 62626
2	1025	52	757 94452 34603 19650
3	60074	53	932 83199 38258 32699
4	11 08650	54	1143 66451 30907 53275
5	108 74275	55	1396 95967 52098 93900
6	713 40451	56	1700 26516 43060 08076
7	3538 15700	57	2062 29849 57628 99325
8	14275 57524	58	2493 10270 26623 05149
9	49143 41925	59	3004 21945 59629 46550
10	1 49143 41925	60	3608 88121 59629 46550
11	4 08517 66526	61	4322 22412 76258 29151
12	10 27691 30750	62	5161 52349 34941 69375
13	24 06276 22599	63	6146 45378 53759 60224
14	52 98822 77575	64	7299 37528 99828 07200
15	110 65326 68200	65	8645 64962 44456 97825
16	220 60442 95976	66	10213 98650 53564 93601
17	422 20381 96425	67	12036 82430 99082 55050
18	779 25054 23049	68	14150 74713 00654 65674
19	1392 35716 80850	69	16596 94119 07202 25475
20	2416 35716 80850	70	19421 69368 07202 25475
21	4084 34526 59051	71	22676 93723 17301 06676
22	6740 33754 50475	72	26420 84347 43545 94100
23	10882 98866 64124	73	30718 46930 40581 51749
24	17223 32676 29500	74	35642 45970 14140 29125
25	26760 06992 70125	75	41273 81117 23612 94750
26	40876 77949 23501	76	47702 70010 47012 36126
27	61465 89270 18150	77	55029 38057 72874 36775
28	91085 56937 13574	78	63365 15640 85236 36199
29	1 33156 29270 13775	79	72833 43249 11504 83400
30	1 92205 29270 13775	80	83570 85073 11504 83400
31	2 74168 12139 94576	81	95728 51619 02074 12201
32	3 86758 11208 37200	82	1 09473 31932 38034 70825
33	5 39916 01061 01649	83	1 24989 36051 10093 24274
34	7 46353 78601 61425	84	1 42479 48338 76074 16050
35	10 22208 52136 77050	85	1 62166 92382 16796 81675
36	13 87824 36537 40026	86	1 84297 08171 04827 52651
37	18 68682 80261 57875	87	2 09139 42312 96263 21500
38	24 96503 98741 46099	88	2 36989 52073 05665 33724
39	33 10544 59593 37700	89	2 68171 24066 05327 17325
40	43 59120 59593 37700	90	3 03039 08467 05327 17325
41	57 01386 52694 90101	91	3 41980 69648 23434 62726
42	74 09406 33911 67925	92	3 85419 54190 47066 76550
43	95 70554 57044 52174	93	4 33817 77262 26359 94799
44	122 90290 66428 70350	94	4 87679 28403 21259 64975
45	156 95353 55588 85975	95	5 47552 97795 59638 55600
46	199 37428 30416 62551	96	6 14036 24155 51139 60176
47	251 97341 52774 92600	97	6 87778 65424 46067 86225
48	316 89847 73860 37624	98	7 69485 93493 33614 75249
49	396 69074 36836 49625	99	8 59924 14243 42419 24250
50	494 34699 36836 49625	100	9 59924 14243 42419 24250

Таблица 23.5. $x^n/n!$

$n\backslash x$	2	3	4	5
1	(0) 2.0000 00000	(0) 3.0000 00000	(0) 4.0000 00000	(0) 5.0000 00000
2	(0) 2.0000 00000	(0) 4.5000 00000	(0) 8.0000 00000	(1) 1.2500 00000
3	(0) 1.3333 33333	(0) 4.5000 00000	(1) 1.0666 66667	(1) 2.0833 33333
4	(− 1) 6.6666 66667	(0) 3.3750 00000	(1) 1.0666 66667	(1) 2.6041 66667
5	(− 1) 2.6666 66667	(0) 2.0250 00000	(0) 8.5333 33333	(1) 2.6041 66667
6	(− 2) 8.8888 88889	(0) 1.0125 00000	(0) 5.6888 88889	(1) 2.1701 38889
7	(− 2) 2.5396 82540	(− 1) 4.3392 85714	(0) 3.2507 93651	(1) 1.5500 99206
8	(− 3) 6.3492 06349	(− 1) 1.6272 32143	(0) 1.6253 96825	(0) 9.6881 20040
9	(− 3) 1.4109 34744	(− 2) 5.4241 07143	(− 1) 7.2239 85891	(0) 5.3822 88911
10	(− 4) 2.8218 69489	(− 2) 1.6272 32144	(− 1) 2.8895 94356	(0) 2.6911 44455
11	(− 5) 5.1306 71797	(− 3) 4.4379 05844	(− 1) 1.0507 61584	(0) 1.2232 47480
12	(− 6) 8.5511 19662	(− 3) 1.1094 76461	(− 2) 3.5025 38614	(− 1) 5.0968 64499
13	(− 6) 1.3155 56871	(− 4) 2.5603 30295	(− 2) 1.0777 04189	(− 1) 1.9603 32500
14	(− 7) 1.8793 66959	(− 5) 5.4864 22060	(− 3) 3.0791 54825	(− 2) 7.0011 87499
15	(− 8) 2.5058 22612	(− 5) 1.0972 84412	(− 4) 8.2110 79534	(− 2) 2.3337 29166
16	(− 9) 3.1322 78264	(− 6) 2.0574 08272	(− 4) 2.0527 69883	(− 3) 7.2929 03644
17	(−10) 3.6850 33252	(− 7) 3.6307 20481	(− 5) 4.8300 46785	(− 3) 2.1449 71660
18	(−11) 4.0944 81391	(− 8) 6.0512 00801	(− 5) 1.0733 43730	(− 4) 5.9582 54611
19	(−12) 4.3099 80412	(− 9) 9.5545 27582	(− 6) 2.2596 71011	(− 4) 1.5679 61740
20	(−13) 4.3099 80413	(− 9) 1.4331 79137	(− 7) 4.5193 42021	(− 5) 3.9199 04350
21	(−14) 4.1047 43250	(−10) 2.0473 98768	(− 8) 8.6082 70516	(− 6) 9.3331 05595
22	(−15) 3.7315 84772	(−11) 2.7919 07410	(− 8) 1.5651 40093	(− 6) 2.1211 60362
23	(−16) 3.2448 56324	(−12) 3.6416 18361	(− 9) 2.7219 82772	(− 7) 4.6112 18179
24	(−17) 2.7040 46937	(−13) 4.5520 22952	(−10) 4.5366 37953	(− 8) 9.6067 04540
25	(−18) 2.1632 37550	(−14) 5.4624 27543	(−11) 7.2586 20726	(− 8) 1.9213 40908
26	(−19) 1.6640 28884	(−15) 6.3028 01010	(−11) 1.1167 10881	(− 9) 3.6948 86362
27	(−20) 1.2326 13988	(−16) 7.0031 12233	(−12) 1.6543 86490	(−10) 6.8423 82151
28	(−22) 8.8043 85630	(−17) 7.5033 34535	(−13) 2.3634 09271	(−10) 1.2218 53956
29	(−23) 6.0719 90089	(−18) 7.7620 70209	(−14) 3.2598 74857	(−11) 2.1066 44751
30	(−24) 4.0479 93393	(−19) 7.7620 70209	(−15) 4.3464 99810	(−12) 3.5110 74585
31	(−25) 2.6116 08641	(−20) 7.5116 80847	(−16) 5.6083 86851	(−13) 5.6630 23524
32	(−26) 1.6322 55401	(−21) 7.0422 00795	(−17) 7.0104 83564	(−14) 8.8484 74257
33	(−28) 9.8924 56972	(−22) 6.4020 00722	(−18) 8.4975 55834	(−14) 1.3406 77918
34	(−29) 5.8190 92337	(−23) 5.6488 24167	(−19) 9.9971 24513	(−15) 1.9715 85173
35	(−30) 3.3251 95620	(−24) 4.8418 49284	(−19) 1.1425 28515	(−16) 2.8165 50246
36	(−31) 1.8473 30900	(−25) 4.0348 74405	(−20) 1.2694 76128	(−17) 3.9118 75343
37	(−33) 9.9855 72436	(−26) 3.2715 19788	(−21) 1.3724 06625	(−18) 5.2863 18032
38	(−34) 5.2555 64439	(−27) 2.5827 78779	(−22) 1.4446 38552	(−19) 6.9556 81619
39	(−35) 2.6951 61251	(−28) 1.9867 52908	(−23) 1.4816 80567	(−20) 8.9175 40539
40	(−36) 1.3475 80626	(−29) 1.4900 64681	(−24) 1.4816 80567	(−20) 1.1146 92567
41	(−38) 6.5735 64028	(−30) 1.0902 91230	(−25) 1.4455 42017	(−21) 1.3593 81180
42	(−39) 3.1302 68584	(−32) 7.7877 94496	(−26) 1.3767 06682	(−22) 1.6183 10928
43	(−40) 1.4559 38876	(−33) 5.4333 44999	(−27) 1.2806 57379	(−23) 1.8817 56893
44	(−42) 6.6179 03983	(−34) 3.7045 53408	(−28) 1.1642 33981	(−24) 2.1383 60106
45	(−43) 2.9412 90659	(−35) 2.4697 02271	(−29) 1.0348 74650	(−25) 2.3759 55673
46	(−44) 1.2788 22026	(−36) 1.6106 75395	(−31) 8.9989 09998	(−26) 2.5825 60514
47	(−46) 5.4417 95855	(−37) 1.0280 90677	(−32) 7.6586 46807	(−27) 2.7474 04803
48	(−47) 2.2674 14940	(−39) 6.4255 66736	(−33) 6.3822 05674	(−28) 2.8618 80003
49	(−49) 9.2547 54855	(−40) 3.9340 20450	(−34) 5.2099 63815	(−29) 2.9202 85717
50	(−50) 3.7019 01942	(−41) 2.3604 12270	(−35) 4.1679 71052	(−30) 2.9202 85717

Для $x = 1$ см. табл. 6.3.

Таблица 23.5. $x^n/n!$

$n \backslash x$	6	7	8	9
1	(0)6.0000 00000	(0)7.0000 00000	(0)8.0000 00000	(0)9.0000 00000
2	(1)1.8000 00000	(1)2.4500 00000	(1)3.2000 00000	(1)4.0500 00000
3	(1)3.6000 00000	(1)5.7166 66667	(1)8.5333 33333	(2)1.2150 00000
4	(1)5.4000 00000	(2)1.0004 16667	(2)1.7066 66667	(2)2.7337 50000
5	(1)6.4800 00000	(2)1.4005 83333	(2)2.7306 66667	(2)4.9207 50000
6	(1)6.4800 00000	(2)1.6340 13889	(2)3.6408 88889	(2)7.3811 25000
7	(1)5.5542 85714	(2)1.6340 13889	(2)4.1610 15873	(2)9.4900 17857
8	(1)4.1657 14286	(2)1.4297 62153	(2)4.1610 15873	(3)1.0676 27009
9	(1)2.7771 42857	(2)1.1120 37230	(2)3.6986 80776	(3)1.0676 27009
10	(1)1.6662 85714	(1)7.7842 60610	(2)2.9589 44621	(2)9.6086 43080
11	(0)9.0888 31169	(1)4.9536 20388	(2)2.1519 59724	(2)7.8616 17066
12	(0)4.5444 15584	(1)2.8896 11893	(2)1.4346 39816	(2)5.8962 12799
13	(0)2.0974 22577	(1)1.5559 44865	(1)8.8285 52715	(2)4.0819 93476
14	(-1)8.9889 53903	(0)7.7797 24327	(1)5.0448 87266	(2)2.6241 38663
15	(-1)3.5955 81561	(0)3.6305 38019	(1)2.6906 06542	(2)1.5744 83198
16	(-1)1.3483 43085	(0)1.5883 60383	(1)1.3453 03271	(1)8.8564 67988
17	(-2)4.7588 57949	(-1)6.5403 07461	(0)6.3308 38921	(1)4.6887 18347
18	(-2)1.5862 85983	(-1)2.5434 52902	(0)2.8137 06187	(1)2.3443 59173
19	(-3)5.0093 24157	(-2)9.3706 15954	(0)1.1847 18395	(1)1.1104 85924
20	(-3)1.5027 97247	(-2)3.2797 15584	(-1)4.7388 73579	(0)4.9971 86660
21	(-4)4.2937 06421	(-2)1.0932 38528	(-1)1.8052 85173	(0)2.1416 51426
22	(-4)1.1710 10841	(-3)3.4784 86224	(-2)6.5646 73354	(-1)8.7613 01284
23	(-5)3.0548 10892	(-3)1.0586 69721	(-2)2.2833 64645	(-1)3.4283 35286
24	(-6)7.6370 27230	(-4)3.0877 86685	(-3)7.6112 15485	(-1)1.2856 25732
25	(-6)1.8328 86535	(-5)8.6458 02721	(-3)2.4355 88956	(-2)4.6282 52637
26	(-7)4.2297 38158	(-5)2.3277 16117	(-4)7.4941 19863	(-2)1.6020 87451
27	(-8)9.3994 18129	(-6)6.0348 19562	(-4)2.2204 79959	(-3)5.3402 91503
28	(-8)2.0141 61028	(-6)1.5087 04890	(-5)6.3442 28454	(-3)1.7165 22269
29	(-9)4.1672 29712	(-7)3.6417 01460	(-5)1.7501 31987	(-4)5.3271 38075
30	(-10)8.3344 59424	(-8)8.4973 03406	(-6)4.6670 18634	(-4)1.5981 41423
31	(-10)1.6131 21179	(-8)1.9187 45930	(-6)1.2043 91905	(-5)4.6397 65421
32	(-11)3.0246 02211	(-9)4.1972 56723	(-7)3.0109 79764	(-5)1.3049 34025
33	(-12)5.4992 76746	(-10)8.9032 71836	(-8)7.2993 44881	(-6)3.5589 10976
34	(-13)9.7046 06024	(-10)1.8330 26555	(-8)1.7174 92913	(-7)9.4206 46703
35	(-13)1.6636 46746	(-11)3.6660 53108	(-9)3.9256 98086	(-7)2.4224 52008
36	(-14)2.7727 44578	(-12)7.1284 36600	(-10)8.7237 73527	(-8)6.0561 30022
37	(-15)4.4963 42559	(-12)1.3486 23141	(-10)1.8862 21303	(-8)1.4731 12708
38	(-16)7.0994 88250	(-13)2.4843 05785	(-11)3.9709 92217	(-9)3.4889 51151
39	(-16)1.0922 28962	(-14)4.4590 10384	(-12)8.1456 25061	(-10)8.0514 25733
40	(-17)1.6383 43443	(-15)7.8032 68172	(-12)1.6291 25012	(-10)1.8115 70790
41	(-18)2.3975 75770	(-15)1.3322 65298	(-13)3.1787 80512	(-11)3.9766 18807
42	(-19)3.4251 08241	(-16)2.2204 42162	(-14)6.0548 20021	(-12)8.5213 26014
43	(-20)4.7792 20803	(-17)3.6146 73288	(-14)1.1264 78144	(-12)1.7835 33352
44	(-21)6.5171 19276	(-18)5.7506 16594	(-15)2.0481 42079	(-13)3.6481 36401
45	(-22)8.6894 92366	(-19)8.9454 03590	(-16)3.6411 41473	(-14)7.2962 72802
46	(-22)1.1334 12048	(-19)1.3612 57068	(-17)6.3324 19955	(-14)1.4275 31635
47	(-23)1.4469 08998	(-20)2.0274 04144	(-17)1.0778 58716	(-15)2.7335 71217
48	(-24)1.8086 36247	(-21)2.9566 31045	(-18)1.7964 31193	(-16)5.1254 46033
49	(-25)2.2146 56629	(-22)4.2237 58634	(-19)2.9329 48887	(-17)9.4140 84548
50	(-26)2.6575 87955	(-23)5.9132 62088	(-20)4.6927 18219	(-17)1.6945 35219

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

23.1. Boole G. The calculus of finite differences. — N.Y.: Hafner Publishing Co., 1932.

23.2. Briggs W. E., Chowla S. The power series coefficients of $\zeta(s)$. — Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, p. 323—325.

23.3. Fort T. Finite differences. — Oxford: Clarendon Press, 1948.

23.4. Jordan C. Calculus of finite differences. — N.Y.: Chelsea Publishing Co., 1960.

23.5. Knopp K. Theory and application of infinite series. — L.: Blackie and Son, 1951.

23.6. Milne-Thomson L. M. Calculus of finite differences. — L.: Mac-millan Co., 1951.

23.7. Norlund N. E. Vorlesungen über Differenzenrechnung. — Ann. Arbor: Edwards Bros., 1945.

23.8. Richardson C. H. An introduction to the calculus of finite differences. — N.Y.: Van Nostrand Co., 1954.

23.9. Steffensen J. F. Interpolation. — N.Y.: Chelsea Publishing Co., 1950.

23.10. Titchmarsh E. C. The zeta-function of Riemann. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1930. Русский перевод: Титчмарш Э. Дзета-функция Римана. — М.: ИЛ, 1947.

23.11. Wheelon A. D. A short table of summable series. — Report № SM-14642. — Santa Monica: Douglas Aircraft Co., 1953.

Таблицы

23.12. Blanch G., Siegel R. Table of modified Bernoulli polynomials. — J. Research NBS, 1950, **44**, p. 103—107. Report № 2060.

23.13. Davis H. T. Tables of the higher mathematical functions. — Bloomington: Principia Press, 1935, V. II.

23.14. Hensman R. Tables of the generalized Riemann Zeta function. — Telecommunications Research Establishment. — Report № T2111. — Great Malvern, Worcestershire, Ministry of Supply, 1948.

$\zeta(s, a)$, $s = -10(0.1)0$, $a = 0(0.1)2$, 5D;

$(s-1)\,\zeta(s, a)$, $s = 0(0.1)1$, $a = 0(0.1)2$, 5D.

23.15. Lehmer D. H. On the maxima and minima of Bernoulli polynomials. — Amer. Math. Monthly, 1940, **47**, p. 533—538.

23.16. Powell E. O. A table of the generalized Riemann Zeta function in a particular case. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 1952, **5**, p. 116—123.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

23.17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973, Т.I.

23.18. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.

23.19. Титчмарш Э. Теория дзета-функции Римана. — М.: ИЛ, 1953.

23.20. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.

Глава 24
КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ

К. ГОЛЬДБЕРГ, М. НЕЙМАН, Э. ХЕЙНСВОРТ

СОДЕРЖАНИЕ

Каждый параграф этой главы построен по следующему плану:

I. **Определения.**

A. Комбинаторные определения

B. Производящие функции

C. Явные выражения

II. **Соотношения.**

A. Рекуррентные формулы

B. Соотношения для контроля вычислений

C. Основные применения в численном анализе

III. **Асимптотика и частные значени**

В большинстве случаев используемые обозначения стандартны. Это относится к разностному оператору Δ (определенному для функции от x так:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \Delta^{n+1}f(x) = \Delta(\Delta^n f(x)),$$

к дельта-функции Кронекера δ_{ij}, к дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и к наибольшему общему делителю (m, n). При суммировании, когда у знака суммы не обозначены пределы, эти пределы указываются справа от формулы.

Обозначения нестандартны для мультиномиальных коэффициентов, для которых в этой главе используются произвольные обозначения, а также для чисел Стирлинга, обозначения которых никогда не были стандартизованы.

Для чисел Стирлинга первого рода используется символ $S_n^{(m)}$, для чисел Стирлинга второго рода — символ $\sigma_n^{(m)}$.

24.1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

24.1.1. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

I. **Определения.**

A. $\binom{n}{m}$ есть число способов выбора m предметов из собрания n различных предметов независимо от их порядка.

B. Производящие функции:

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$(1-x)^{-m-1} = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} x^{n-m} \quad (|x| < 1).$$

C. Явное выражение:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{n-m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} \quad (n \geqslant m).$$

II. **Соотношения.**

A. Рекуррентные формулы:

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} \quad (n \geqslant m \geqslant 1),$$

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \ldots + \binom{n-m}{0} \quad (n \geqslant m).$$

B. Контрольные соотношения:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{r}{m}\binom{s}{n-m} = \binom{r+s}{n} \quad (r+s \geqslant n),$$

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{r}{m} = \binom{r-1}{n} \quad (r \geqslant n+1),$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n_0}{m_0}\binom{n_1}{m_1} \ldots (\operatorname{mod} p),$$

где p — простое число и

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k p^k, \quad m = \sum_{k=0}^{\infty} m_k p^k \quad (p > m_k,\ n_k \geqslant 0).$$

C. Численный анализ:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} f(x+m) = -\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \Delta^{n+k} f(x-r),$$

$$\sum_{m=0}^{s} (-1)^m \binom{n}{m} f(x-m) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \binom{n-k-1}{s-k} \Delta^k f(x-s) \quad (s < n).$$

III. **Частные значения.**

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{2^n(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{n!}.$$

24.1.2. МУЛЬТИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

I. **Определения.**

A. $(n; n_1, n_2, \ldots, n_m)$ — число способов помещения $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ различных предметов в m различных ящиков, где n_k — число предметов в k-м ящике, $k = 1, 2, \ldots, m$. $(n; a_1, a_2, \ldots, a_n)^*$ — число перестановок $n = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n$ символов, составленных из циклов a_k длины k для $k = 1, 2, \ldots, n$.

$(n; a_1, a_2, \ldots, a_n)'$ — число всех возможных разбиений множества из $n = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n$ различных предметов на подмножества a_k, содержащие k предметов, $k = 1, 2, \ldots, n$.

B. Производящие функции:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \Sigma(n; n_1, n_2, \ldots, n_m)\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m},$$

суммирование по $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$;

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}\,t^k\right)^m = m!\sum_{n=m}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum(n;\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)^*\, x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k!}\,t^k\right)^m = m!\sum_{n=m}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum(n;\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)'\, x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n},$$

суммирование по $a_1+2a_2+\dots+na_n=n$ и $a_1+a_2+\dots+a_n=m$.

C. Явные выражения:

$$(n;\ n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_m)=n!/(n_1!\ n_2!\dots n_m!)\qquad (n_1+n_2+\dots+n_m=n),$$

$$(n;\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)^*=n!/(1^{a_1}a_1!\ 2^{a_2}a_2!\ \dots\ n^{a_n}a_n!)\qquad (a_1+2a_2+\dots+na_n=n),$$

$$(n;\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)'=n!/((1!)^{a_1}a_1!\,(2!)^{a_2}a_2!\dots(n!)^{a_n}a_n!)\qquad (a_1+2a_2+\dots+na_n=n)$$

II. Соотношения.

A. Рекуррентные формулы:

$$(n+m;\ n_1+1,\ n_2+1,\ \dots,\ n_m+1)=\sum_{k=1}^{m}(n+m-1;\ n_1+1,\ \dots,\ n_{k-1}+1,\ n_k,\ n_{k+1}+1,\ \dots,\ n_m+1).$$

B. Контрольные соотношения:

$$\sum(n;\ n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_m)=\begin{cases}m^n & \text{для всех } n_i\geqslant 1\\ m!\ \sigma_n^{(m)}\end{cases}$$

суммирование по $n_1+n_2+\dots+n_m=n$;

$$\sum(n;\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)^*=(-1)^{n-m}\,S_n^{(m)},$$
$$\sum(n;\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)'=\sigma_n^{(m)},$$

суммирование по $a_1+2a_2+\dots+na_n=n$ и $a_1+a_2+\dots+a_n=m$.

C. Численный анализ (формула Фаа ди Бруно):

$$\frac{d^n}{dx^n}f(g(x))=\sum_{m=0}^{n}f^{(m)}(g(x))\sum(n;\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)'\times\{g'(x)\}^{a_1}\{g''(x)\}^{a_2}\dots\{g^{(n)}(x)\}^{a_n},$$

суммирование по $a_1+2a_2+\dots+na_n=n$ и $a_1+a_2+\dots+a_n=m$;

$$\begin{vmatrix}P_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ P_2 & P_1 & 2 & \dots & .\\ P_3 & P_2 & P_1 & \dots & .\\ . & . & . & \dots & \\ . & . & . & \dots & 0\\ . & . & . & \dots & n-1\\ P_n & P_{n-1} & P_{n-2} & \dots & P_1\end{vmatrix}=\sum(-1)^{n-\Sigma a_i}(n;\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)^*\,P_1^{a_1}P_2^{a_2}\dots P_n^{a_n},$$

суммирование по $a_1+2a_2+\dots+na_n=n$; так, если $P_k=\sum_{j=1}^{r}x_j^k$ для $k=1,2,\dots,n$, то определитель и сумма равны $n!\sum x_1x_2\dots x_n$. Последняя сумма обозначает n-ю элементарную симметрическую функцию от $x_1, x_2, \dots, x_r$.

24.1.3. ЧИСЛА СТИРЛИНГА ПЕРВОГО РОДА

I. Определения.

A. $(-1)^{n-m}S_n^{(m)}$ — число перестановок из n символов, которые имеют точно m циклов.

B. Производящие функции:

$$x(x-1)\dots(x-n+1)=\sum_{m=0}^{n}S_n^{(m)}x^m,$$

$$\{\ln(1+x)\}^m=m!\sum_{n=m}^{\infty}S_n^{(m)}\frac{x^n}{n!}\qquad(|x|<1).$$

C. Явное выражение (см. выражение для $\sigma_n^{(m)}$):

$$S_n^{(m)}=\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n-1+k}{n-m+k}\binom{2n-m}{n-m-k}\sigma_{n-m+k}^{(k)}.$$

II. Соотношения.

A. Рекуррентные формулы:

$$S_{n+1}^{(m)}=S_n^{(m-1)}-nS_n^{(m)}\qquad(n\geqslant m\geqslant 1),$$

$$\binom{m}{r}S_n^{(m)}=\sum_{k=m-r}^{n-r}\binom{n}{k}S_{n-k}^{(r)}S_k^{(m-r)}\qquad(n\geqslant m\geqslant r).$$

B. Контрольные соотношения:

$$\sum_{m=1}^{n}S_n^{(m)}=0\qquad(n>1),$$

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}S_n^{(m)}=n!,$$

$$\sum_{k=m}^{n}S_{n+1}^{(k+1)}n^{k-m}=S_n^{(m)}.$$

C. Численный анализ:

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x) = m! \sum_{n=m}^{\infty} \frac{S_n^{(m)}}{n!} \Delta^n f(x),$$

если ряд сходится.

III. Асимптотика и частные значения.

$$|S_n^{(m)}| \sim (n-1)!\,(\gamma + \ln n)^{m-1}/(m-1)!$$

для $m = o\,(\ln n)$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_{n+m}^{(m)}}{m^{2n}} = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}^{(m)}}{nS_n^{(m)}} = -1,$$

$$S_n^{(0)} = \delta_{0n},$$

$$S_n^{(1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$S_n^{(n-1)} = -\binom{n}{2},$$

$$S_n^{(n)} = 1.$$

24.1.4. ЧИСЛА СТИРЛИНГА ВТОРОГО РОДА

I. Определения.

A. $\sigma_n^{(m)}$ — число способов разбиения множества из n элементов на m непустых подмножеств.

B. Производящие функции:

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} \sigma_n^{(m)} x(x-1)\ldots(x-m+1)$$

$$(e^x - 1)^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} \sigma_n^{(m)} \frac{x^n}{n!},$$

$$(1-x)^{-1}(1-2x)^{-1}\ldots(1-mx)^{-1} = \sum_{n=m}^{\infty} \sigma_n^{(m)} x^{n-m}$$

$(|x| < m^{-1})$.

C. Явное выражение:

$$\sigma_n^{(m)} = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k} k^n.$$

II. Соотношения.

A. Рекуррентные формулы:

$$\sigma_{n+1}^{(m)} = m\sigma_n^{(m)} + \sigma_n^{(m-1)} \qquad (n \geqslant m \geqslant 1),$$

$$\binom{m}{r}\sigma_n^{(m)} = \sum_{k=m-r}^{n-r} \binom{n}{k} \sigma_{n-k}^{(r)} \sigma_k^{(m-r)} \qquad (n \geqslant m \geqslant r).$$

B. Контрольные соотношения:

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} m!\, \sigma_n^{(m)} = 1,$$

$$\sum_{k=m}^{n} \sigma_{k-1}^{(m-1)}\, m^{n-k} = \sigma_n^{(m)},$$

$$\sigma_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-1+k}{n-m+k}\binom{2n-m}{n-m-k} S_{n-m+k}^{(k)},$$

$$\sum_{k=m}^{n} S_k^{(m)} \sigma_n^{(k)} = \sum_{k=m}^{n} S_n^{(k)} \sigma_k^{(m)} = \delta_{mn}.$$

C. Численный анализ:

$$\Delta^m f(x) = m! \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\sigma_n^{(m)}}{n!} f^{(n)}(x),$$

если ряд сходится.

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \sum_{k=0}^{m} k!\, \sigma_m^{(k)} \binom{n+1}{k+1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^m x^k = \sum_{j=0}^{m} \sigma_m^{(j)} x^j \frac{d^j}{dx^j}\left\{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right\}.$$

III. Асимптотика и частные значения.

$$\lim_{n\to\infty} m^{-n}\sigma_n^{(m)} = (m!)^{-1},$$

$$\sigma_{n+m}^{(m)} \sim \frac{m^{2n}}{2^n n!} \text{ для } n = o(m^{1/2}),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{n+1}^{(m)}}{\sigma_n^{(m)}} = m,$$

$$\sigma_n^{(0)} = \delta_{0n},$$

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(n)} = 1,$$

$$\sigma_n^{(n-1)} = \binom{n}{2}.$$

24.2. РАЗБИЕНИЯ

24.2.1. НЕУПОРЯДОЧЕННЫЕ РАЗБИЕНИЯ

I. Определения.

A. $p(n)$ — число разбиений целого числа n на целые слагаемые независимо от их порядка.

Например, $5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, так что $p(5) = 7$.

B. Производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{(3n^2+n)/2} \right\}^{-1} \qquad (|x| < 1).$$

C. Явное выражение:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} A_k(n) \frac{d}{dn} \frac{\left\{\frac{\pi}{k}\sqrt{(2/3)}\sqrt{n - 1/24}\right\}}{\sqrt{n - 1/24}},$$

где

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0<h\leqslant k \\ (h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k)} e^{-2\pi i h n/k},$$

$$s(h, k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k}\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right),$$

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - 1/2, & \text{если } x \text{ — нецелое,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — целое.} \end{cases}$$

II. Соотношения.

A. Рекуррентные формулы:

$$p(n) = \sum_{1\leqslant(3k^2\pm k)/2\leqslant n} (-1)^{k-1} p\left(n - \frac{3k^2 \pm k}{2}\right),$$

$$p(0) = 1,$$

$$p(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_1(k)\, p(n-k).$$

B. Контрольное соотношение:

$$p(n) + \sum_{1\leqslant(3k^2\pm k)/2\leqslant n} (-1)^k \frac{3k^2 \pm k}{2} p\left(n - \frac{3k^2 \pm k}{2}\right) = \sigma_1(n).$$

III. Асимптотика.

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}}.$$

24.2.2. РАЗБИЕНИЯ С НЕРАВНЫМИ ЧАСТЯМИ

I. Определения.

A. $q(n)$ — число разбиений целого числа n на неравные целые слагаемые независимо от их порядка. Например, $5 = 1 + 4 = 2 + 3$, так что $q(5) = 3$.

B. Производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(n)\, x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n-1})^{-1} \qquad (|x| < 1).$$

C. Явное выражение:

$$q(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1}(n) \frac{d}{dn} J_0\left(\frac{\pi i}{2k-1}\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{n + \frac{1}{24}}\right),$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка, а $A_{2k-1}(n)$ определено в I.C предыдущего параграфа.

II. Соотношения.

A. Рекуррентные формулы:

$$\sum_{0\leqslant(3k^2\pm k)/2\leqslant n} (-1)^k q\left(n - \frac{3k^2 \pm k}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{если } n = 3r^2 \pm r, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$q(0) = 1,$$

$$q(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left\{\sigma_1(k) - 2\sigma_1\left(\frac{k}{2}\right)\right\} q(n-k).$$

B. Контрольное соотношение:

$$\sum_{0\leqslant 3k^2\pm k\leqslant n} (-1)^k q(n - (3k^2 \pm k)) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = (r^2 - r)/2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

III. Асимптотика.

$$q(n) \sim \frac{1}{4 \cdot 3^{1/4} \cdot n^{3/4}} e^{\pi\sqrt{1/3}\sqrt{n}}.$$

24.3. ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

24.3.1. ФУНКЦИЯ МЁБИУСА

I. Определения.

A.
$$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n=1,\\ (-1)^k, & \text{если } n - \text{произведение } k \text{ различных простых чисел},\\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат целого числа} >1.\end{cases}$$

B. Производящие функции:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\,n^{-s}=1/\zeta(s)\quad(\operatorname{Re}s>1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\,x^n}{1-x^n}=x\qquad(|x|<1).$$

II. Соотношения.

A. Рекуррентная формула:

$$\mu(mn)=\begin{cases}\mu(m)\,\mu(n), & \text{если } (m,n)=1,\\ 0, & \text{если } (m,n)>1.\end{cases}$$

B. Контрольное соотношение:

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\delta_{n1}.$$

C. Численный анализ:

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d)$$

для всех n тогда и только тогда, когда $f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\,g(n/d)$ для всех n;

$$g(n)=\prod_{d|n}f(d)$$

для всех n тогда и только тогда, когда $f(n)=\prod_{d|n}g(n/d)^{\mu(d)}$ для всех n;

$$g(x)=\sum_{n=1}^{[x]}f(n/x)$$

для всех $x>0$ тогда и только тогда, когда $f(x)=\sum_{n=1}^{[x]}\mu(n)\,g(x/n)$ для всех $x>0$;

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f(nx)$$

для всех $x>0$ тогда и только тогда, когда $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\,g(nx)$ для всех $x>0$
и если

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|f(mnx)|=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_0(n)\,|f(nx)|$$

сходится.

Круговой многочлен порядка n есть $\prod_{d|n}(x^d-1)^{\mu(n/d)}$.

III. Асимптотика.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\ln n=-1,$$

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}).$$

24.3.2. ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА

I. Определения.

A. $\varphi(n)$ — число целых чисел, не превышающих n и взаимно простых с ним.

B. Производящие функции:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\,n^{-s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\quad(\operatorname{Re}s>2),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n}=\frac{x}{(1-x)^2}\quad(|x|<1).$$

C. Явное выражение:

$$\varphi(n)=n\prod_{p|n}(1-1/p).$$

Произведение берется по различным простым p, делящим n.

II. Соотношения.

A. Рекуррентная формула:

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\,\varphi(n),\qquad (m,n)=1.$$

B. Контрольные соотношения:

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n,$$

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(n/d)\,d,$$

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1(\operatorname{mod} n),\ (a,n)=1.$$

III. Асимптотика.

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)=\frac{3}{\pi^2}+O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

24.3.3. ФУНКЦИЯ $\sigma_k(n)$

I. Определения.

A. $\sigma_k(n)$ — сумма k-х степеней делителей n. Часто $\sigma_0(n)$ обозначают через $d(n)$ и $\sigma_1(n)$ через $\sigma(n)$.

B. Производящие функции:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_k(n)\,n^{-s}=\zeta(s)\,\zeta(s-k)\quad(\operatorname{Re}s>k+1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_k(n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^kx^n}{1-x^n}\quad(|x|<1).$$

C. Явное выражение:

$$\sigma_k(n) = \sum_{d \mid n} d^k = \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^{k(a_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}$$

$$(n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}).$$

II. Соотношения.

A. Рекуррентные формулы:

$$\sigma_k(mn) = \sigma_k(m)\,\sigma_k(n), \quad (m,\ n) = 1,$$

$$\sigma_k(np) = \sigma_k(n)\,\sigma_k(p) - p^k \sigma_k(n/p) \quad (p \text{ — простое}).$$

III. Асимптотика.

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sigma_0(m) = \ln n + 2\gamma - 1 + O(n^{-1/2})$$

(γ — постоянная Эйлера),

$$\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n} \sigma_1(m) = \frac{\pi^2}{12} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

24.3.4. ПЕРВООБРАЗНЫЕ КОРНИ

I. Определения.

Целые числа, не превышающие данное число n и взаимно простые с ним, образуют группу; эта группа является циклической тогда и только тогда, когда $n = 2, 4$, или n представимо в форме p^k или $2p^k$, где $p > 2$ есть простое число. Тогда число g есть первообразный корень числа n, если оно порождает эту группу, т.е. если $g, g^2, \dots, g^{\varphi(n)}$ различны по модулю n. Имеется $\varphi(\varphi(n))$ первообразных корней числа n.

II. Соотношения.

A. Рекуррентные формулы. **Если** g — первообразный корень простого числа p и $g^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, то g — первообразный корень числа p^k для всех k. Если $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, то $g + p$ — первообразный корень числа p^k для всех k.

Если g — первообразный корень числа p^k, то либо g, либо $g + p^k$, а именно то из этих чисел, которое нечетно, является первообразным корнем числа $2p^k$.

B. Контрольное соотношение. Если g — первообразный корень числа n, то g^k — первообразный корень числа n тогда и только тогда, когда $(k, \varphi(n)) = 1$ и каждый первообразный корень числа n представим в такой же форме.

Таблица 24.1. Биномиальные коэффициенты $\binom{n}{m}$

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	1 25970
21	1	21	210	1330	5985	20349	54264	1 16280	2 03490
22	1	22	231	1540	7315	26334	74613	1 70544	3 19770
23	1	23	253	1771	8855	33649	1 00947	2 45157	4 90314
24	1	24	276	2024	10626	42504	1 34596	3 46104	7 35471
25	1	25	300	2300	12650	53130	1 77100	4 80700	10 81575
26	1	26	325	2600	14950	65780	2 30230	6 57800	15 62275
27	1	27	351	2925	17550	80730	2 96010	8 88030	22 20075
28	1	28	378	3276	20475	98280	3 76740	11 84040	31 08105
29	1	29	406	3654	23751	1 18755	4 75020	15 60780	42 92145
30	1	30	435	4060	27405	1 42506	5 93775	20 35800	58 52925
31	1	31	465	4495	31465	1 69911	7 36281	26 29575	78 88725
32	1	32	496	4960	35960	2 01376	9 06192	33 65856	105 18300
33	1	33	528	5456	40920	2 37336	11 07568	42 72048	138 84156
34	1	34	561	5984	46376	2 78256	13 44904	53 79616	181 56204
35	1	35	595	6545	52360	3 24632	16 23160	67 24520	235 35820
36	1	36	630	7140	58905	3 76992	19 47792	83 47680	302 60340
37	1	37	666	7770	66045	4 35897	23 24784	102 95472	386 08020
38	1	38	703	8436	73815	5 01942	27 60681	126 20256	489 03492
39	1	39	741	9139	82251	5 75757	32 62623	153 80937	615 23748
40	1	40	780	9880	91390	6 58008	38 38380	186 43560	769 04685
41	1	41	820	10660	101270	7 49398	44 96388	224 81940	955 48245
42	1	42	861	11480	111930	8 50668	52 45786	269 78328	1180 30185
43	1	43	903	12341	123410	9 62598	60 96454	322 24114	1450 08513
44	1	44	946	13244	135751	10 86008	70 59052	383 20568	1772 32627
45	1	45	990	14190	148995	12 21759	81 45060	453 79620	2155 53195
46	1	46	1035	15180	163185	13 70754	93 66819	535 24680	2609 32815
47	1	47	1081	16215	178365	15 33939	107 37573	628 91499	3144 57495
48	1	48	1128	17296	194580	17 12304	122 71512	736 29072	3773 48994
49	1	49	1176	18424	211876	19 06884	139 83816	859 00584	4509 78066
50	1	50	1225	19600	230300	21 18760	158 90700	998 84400	5368 78650

Взято из [24.22].

Таблица 24.1. Биномиальные коэффициенты $\binom{n}{m}$

n \ m	9	10	11	12	13
9	1				
10	10	1			
11	55	11	1		
12	220	66	12	1	
13	715	286	78	13	1
14	2002	1001	364	91	14
15	5005	3003	1365	55	105
16	11440	8008	4368	1820	560
17	24310	19448	12376	6188	2380
18	48620	43758	31824	18564	8568
19	92378	92378	75582	50388	27132
20	1 67960	1 84756	1 67960	1 25970	77520
21	2 93930	3 52716	3 52716	2 93930	2 03490
22	4 97420	6 46646	7 05432	6 46646	4 97420
23	8 17190	11 44066	13 52078	13 52078	11 44066
24	13 07504	19 61256	24 96144	27 04156	24 96144
25	20 42975	32 68760	44 57400	52 00300	52 00300
26	31 24550	53 11735	77 26160	96 57700	104 00600
27	46 86825	84 36285	130 37895	173 83860	200 58300
28	69 06900	131 23110	214 74180	304 21755	374 42160
29	100 15005	200 30010	345 97290	518 95935	678 63915
30	143 07150	300 45015	546 27300	864 93225	1197 59850
31	201 60075	443 52165	846 72315	1411 20525	2062 53075
32	280 48800	645 12240	1290 24480	2257 92840	3473 73600
33	385 67100	925 61040	1935 36720	3548 17320	5731 66440
34	524 51256	1311 28140	2860 97760	5483 54040	9279 83760
35	706 07460	1835 79396	4172 25900	8344 51800	14763 37800
36	941 43280	2541 86856	6008 05296	12516 77700	23107 89600
37	1244 03620	3483 30136	8549 92152	18524 82996	35624 67300
38	1630 11640	4727 33756	12033 22288	27074 75148	54149 50296
39	2119 15132	6357 45396	16760 56044	39107 97436	81224 25444
40	2734 38880	8476 60528	23118 01440	55868 53480	1 20332 22880
41	3503 43565	11210 99408	31594 61968	78986 54920	1 76200 76360
42	4458 91810	14714 42973	42805 61376	1 10581 16888	2 55187 31280
43	5639 21995	19173 34783	57520 04349	1 53386 78264	3 65768 48168
44	7089 30508	24812 56778	76693 39132	2 10906 82613	5 19155 26432
45	8861 63135	31901 87286	1 01505 95910	2 87600 21745	7 30062 09045
46	11017 16330	40763 50421	1 33407 83196	3 89106 17655	10 17662 30790
47	13626 49145	51780 66751	1 74171 33617	5 22514 00851	14 06768 48445
48	16771 06640	65407 15696	2 25952 00368	6 96685 34468	19 29282 49296
49	20544 55634	82178 22536	2 91359 16264	9 22637 34836	26 25967 83764
50	25054 33700	1 02722 78170	3 73537 38800	12 13996 51100	35 48605 18600

Таблица 24.1. Биномиальные коэффициенты $\binom{n}{m}$

$n\backslash m$	14	15	16	17	18	19
14	1					
15	15	1				
16	120	16	1			
17	680	136	17	1		
18	3060	816	153	18	1	
19	11628	3876	969	171	19	1
20	38760	15504	4845	1140	190	20
21	1 16280	54264	20349	5985	1330	210
22	3 19770	1 70544	74613	26334	7315	1540
23	8 17190	4 90314	2 45157	1 00947	33649	8855
24	19 61256	13 07504	7 35471	3 46104	1 34596	42504
25	44 57400	32 68760	20 42975	10 81575	4 80700	1 77100
26	96 57700	77 26160	53 11735	31 24550	15 62275	6 57800
27	200 58300	173 83860	130 37895	84 36285	46 86825	22 20075
28	401 16600	374 42160	304 21755	214 74180	131 23110	69 06900
29	775 58760	775 58760	678 63915	518 95935	345 97290	200 30010
30	1454 22675	1551 17520	1454 22675	1197 59850	864 93225	546 27300
31	2651 82525	3005 40195	3005 40195	2651 82525	2062 53075	1411 20525
32	4714 35600	5657 22720	6010 80390	5657 22720	4714 35600	3473 73600
33	8188 09200	10371 58320	11668 03110	11668 03110	10371 58320	8188 09200
34	13919 75640	18559 67520	22039 61430	23336 06220	22039 61430	18559 67520
35	23199 59400	32479 43160	40599 28950	45375 67650	45375 67650	40599 28950
36	37962 97200	55679 02560	73078 72110	85974 96600	90751 35300	85974 96600
37	61070 86800	93641 99760	1 28757 74670	1 59053 68710	1 76726 31900	1 76726 31900
38	96695 54100	1 54712 86560	2 22399 74430	2 87811 43380	3 35780 00610	3 53452 63800
39	1 50845 04396	2 51408 40660	3 77112 60990	5 10211 17810	6 23591 43990	6 89232 64410
40	2 32069 29840	4 02253 45056	6 28521 01650	8 87323 78800	11 33802 61800	13 12824 08400
41	3 52401 52720	6 34322 74896	10 30774 46706	15 15844 80450	20 21126 40600	24 46626 70200
42	5 28602 29080	9 86724 27616	16 65097 21602	25 46619 27156	35 36971 21050	44 67753 10800
43	7 83789 60360	15 15326 56696	26 51821 49218	42 11716 48758	60 83590 48206	80 04724 31850
44	11 49558 08528	22 99116 17056	41 67148 05914	68 63537 97976	102 95306 96964	140 88314 80056
45	16 68713 34960	34 48674 25584	64 66264 22970	110 30686 03890	171 58844 94940	243 83621 77020
46	23 98775 44005	51 17387 60544	99 14938 48554	174 96950 26860	281 89530 98830	415 42466 71960
47	34 16437 74795	75 16163 04549	150 32326 09098	274 11888 75414	456 86481 25690	697 31997 70790
48	48 23206 23240	109 32600 79344	225 48489 13647	424 44214 84512	730 98370 01104	1154 18478 96480
49	67 52488 72536	157 55807 02584	334 81089 92991	649 92703 98159	1155 42584 85616	1885 16848 97584
50	93 78456 56300	225 08295 75120	492 36896 95575	984 73793 91150	1805 35288 83775	3040 59433 83200

$n\backslash m$	20	21	22	23	24	25
20	1					
21	21	1				
22	231	22	1			
23	1771	253	23	1		
24	10626	2024	276	24	1	
25	53130	12650	2300	300	25	1
26	2 30230	65780	14950	2600	325	26
27	8 88030	2 96010	80730	17550	2925	351
28	31 08105	11 84040	3 76740	98280	20475	3276
29	100 15005	42 92145	15 60780	4 75020	1 18755	23751
30	300 45015	143 07150	58 52925	20 35800	5 93775	1 42506
31	846 72315	443 52165	201 60075	78 88725	26 29575	7 36281
32	2257 92840	1290 24480	645 12240	280 48800	105 18300	33 65856
33	5731 66440	3548 17320	1935 36720	925 61040	385 67100	138 84156
34	13919 75640	9279 83760	5483 54040	2860 97760	1311 28140	524 51256
35	32479 43160	23199 59400	14763 37800	8344 51800	4172 25900	1835 79396
36	73078 72110	55679 02560	37962 97200	23107 89600	12516 77700	6008 05296
37	1 59053 68710	1 28757 74670	93641 99760	61070 86800	35624 67300	18524 82996
38	3 35780 00610	2 87811 43380	2 22399 74430	1 54712 86560	96695 54100	54149 50296
39	6 89232 64410	6 23591 43990	5 10211 17810	3 77112 60990	2 51408 40660	1 50845 04396
40	13 78465 28620	13 12824 08400	11 33802 61800	8 87323 78800	6 28521 01650	4 02253 45056
41	26 91289 37220	26 91289 37220	24 46626 70200	20 21126 40600	15 15844 80450	10 30774 46706
42	51 37916 07420	53 82578 74440	51 37916 07420	44 67753 10800	35 36971 21050	25 46619 27156
43	96 05669 18220	105 20494 81860	105 20494 81860	96 05669 18220	80 04724 31850	60 83590 48206
44	176 10393 50070	201 26164 00080	210 40989 63720	201 26164 00080	176 10393 50070	140 88314 80056
45	316 98708 30126	377 36557 50150	411 67153 63800	411 67153 63800	377 36557 50150	316 98708 30126
46	560 82330 07146	694 35265 80276	789 03711 13950	823 34307 27600	789 03711 13950	694 35265 80276
47	976 24796 79106	1255 17595 87422	1483 38976 94226	1612 38018 41550	1612 38018 41550	1483 38976 94226
48	1673 56794 49896	2231 42392 66528	2738 56572 81648	3095 76995 35776	3224 76036 83100	3095 76995 35776
49	2827 75273 46376	3904 99187 16424	4969 98965 48176	5834 33568 17424	6320 53032 18876	6320 53032 18876
50	4712 92122 43960	6732 74460 62800	8874 98152 64600	10804 32533 65600	12154 86600 36300	12641 06064 37752

Таблица 24.2. Мультиномиальные коэффициенты и разбиения

$\pi = 1^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, n^{a_n},\ n = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n,\ m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$M_1 = (n; n_1, n_2, \ldots, n_m) = n!/(1!)^{a_1}(2!)^{a_2} \ldots (n!)^{a_n}$

$M_2 = (n; a_1, a_2, \ldots, a_n)^* = n!/1^{a_1}a_1!2^{a_2}a_2! \ldots n^{a_n}a_n!$

$M_3 = (n; a_1, a_2, \ldots, a_n)' = n!/(1!)^{a_1}a_1!(2!)^{a_2}a_2! \ldots (n!)^{a_n}a_n!$

n	m	π	M_1	M_2	M_3
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	1
	2	1^2	2	1	1
3	1	3	1	2	1
	2	1, 2	3	3	3
	3	1^3	6	1	1
4	1	4	1	6	1
	2	1, 3	4	8	4
		2^2	6	3	3
	3	1^2, 2	12	6	6
	4	1^4	24	1	1
5	1	5	1	24	1
	2	1, 4	5	30	5
		2, 3	10	20	10
	3	1^2, 3	20	20	10
		1, 2^2	30	15	15
	4	1^3, 2	60	10	10
	5	1^5	120	1	1
6	1	6	1	120	1
	2	1, 5	6	144	6
		2, 4	15	90	15
		3^2	20	40	10
	3	1^2, 4	30	90	15
		1, 2, 3	60	120	60
		2^3	90	15	15
	4	1^3, 3	120	40	20
		1^2, 2^2	180	45	45
	5	1^4, 2	360	15	15
	6	1^6	720	1	1
7	1	7	1	720	1
	2	1, 6	7	840	7
		2, 5	21	504	21
		3, 4	35	420	35
	3	1^2, 5	42	504	21
		1, 2, 4	105	630	105
		1, 3^2	140	280	70
		2^2, 3	210	210	105
	4	1^3, 4	210	210	35
		1^2, 2, 3	420	420	210
		1, 2^3	630	105	105
	5	1^4, 3	840	70	35
		1^3, 2^2	1260	105	105
	6	1^5, 2	2520	21	21
	7	1^7	5040	1	1
8	1	8	1	5040	1
	2	1, 7	8	5760	8
		2, 6	28	3360	28
		3, 5	56	2688	56
		4^2	70	1260	35
	3	1^2, 6	56	3360	28
		1, 2, 5	168	4032	168
		1, 3, 4	280	3360	280
		2^2, 4	420	1260	210
		2, 3^2	560	1120	280
	4	1^3, 5	336	1344	56
		1^2, 2, 4	840	2520	420
		1^2, 3^2	1120	1120	280
		1, 2^2, 3	1680	1680	840
		2^4	2520	105	105
	5	1^4, 4	1680	420	70
		1^3, 2, 3	3360	1120	560
		1^2, 2^3	5040	420	420
	6	1^5, 3	6720	112	56
		1^4, 2^2	10080	210	210
	7	1^6, 2	20160	28	28
	8	1^8	40320	1	1
9	1	9	1	40320	1
	2	1, 8	9	45360	9
		2, 7	36	25920	36
		3, 6	84	20160	84
		4, 5	126	18144	126
	3	1^2, 7	72	25920	36
		1, 2, 6	252	30240	252
		1, 3, 5	504	24192	504
		1, 4^2	630	11340	315
		2^2, 5	756	9072	378
		2, 3, 4	1260	15120	1260
		3^3	1680	2240	280
	4	1^3, 6	504	10080	84
		1^2, 2, 5	1512	18144	756
		1^2, 3, 4	2520	15120	1260
		1, 2^2, 4	3780	11340	1890
		1, 2, 3^2	5040	10080	2520
		2^3, 3	7560	2520	1260
	5	1^4, 5	3024	3024	126
		1^3, 2, 4	7560	7560	1260
		1^3, 3^2	10080	3360	840
		1^2, 2^2, 3	15120	7560	3780
		1, 2^4	22680	945	945
	6	1^5, 4	15120	756	126
		1^4, 2, 3	30240	2520	1260
		1^3, 2^3	45360	1260	1260
	7	1^6, 3	60480	168	84
		1^5, 2^2	90720	378	378
	8	1^7, 2	181440	36	36
	9	1^9	362880	1	1

Таблица 24.2. Мультиномиальные коэффициенты и разбиения

n	m	π	M_1	M_2	M_3	n	m	π	M_1	M_2	M_3
10	1	10	1	362880	1	10		$2^3, 4$	18900	18900	3150
	2	1, 9	10	403200	10			$2^2, 3^2$	25200	25200	6300
		2, 8	45	226800	45		5	$1^4, 6$	5040	25200	210
		3, 7	120	172800	120			$1^3, 2, 5$	15120	60480	2520
		4, 6	210	151200	210			$1^3, 3, 4$	25200	50400	4200
		5^2	252	72576	126			$1^2, 2^2, 4$	37800	56700	9450
	3	$1^2, 8$	90	226800	45			$1^2, 2, 3^2$	50400	50400	12600
		1, 2, 7	360	259200	360			$1, 2^3, 3$	75600	25200	12600
		1, 3, 6	840	201600	840			2^5	113400	945	945
		1, 4, 5	1260	181440	1260		6	$1^5, 5$	30240	6048	252
		$2^2, 6$	1260	75600	630			$1^4, 2, 4$	75600	18900	3150
		2, 3, 5	2520	120960	2520			$1^4, 3^2$	100800	8400	2100
		$2, 4^2$	3150	56700	1575			$1^3, 2^2, 3$	151200	25200	12600
		$3^2, 4$	4200	50400	2100			$1^2, 2^4$	226800	4725	4725
	4	$1^3, 7$	720	86400	120		7	$1^6, 4$	151200	1260	210
		$1^2, 2, 6$	2520	151200	1260			$1^5, 2, 3$	302400	5040	2520
		$1^2, 3, 5$	5040	120960	2520			$1^4, 2^3$	453600	3150	3150
		$1^2, 4^2$	6300	56700	1575		8	$1^7, 3$	604800	240	120
		$1, 2^2, 5$	7560	90720	3780			$1^6, 2^2$	907200	630	630
		1, 2, 3, 4	12600	151200	12600		9	$1^8, 2$	1814400	45	45
		$1, 3^3$	16800	22400	2800		10	1^{10}	3628800	1	1

Таблица 24.3. Числа Стирлинга первого рода $S_n^{(m)}$

$n\backslash m$	1	2	3
1	1		
2	−1	1	
3	2	−3	1
4	−6	11	−6
5	24	−50	35
6	−120	274	−225
7	720	−1764	1624
8	−5040	13068	− 13132
9	40320	−1 09584	1 18124
10	−3 62880	10 26576	−11 72700
11	36 28800	−106 28640	127 53576
12	−399 16800	1205 43840	−1509 17976
13	4790 01600	− 14864 42880	19315 59552
14	− 62270 20800	1 98027 59040	−2 65967 17056
15	8 71782 91200	−28 34656 47360	39 21567 97824
16	−130 76743 68000	433 91630 01600	−616 58176 14720
17	2092 27898 88000	−7073 42823 93600	10299 22448 37120
18	− 35568 74280 96000	1 22340 55905 79200	−1 82160 24446 24640
19	6 40237 37057 28000	−22 37698 80585 21600	34 01224 95938 22720
20	−121 64510 04088 32000	431 56514 68176 38400	−668 60973 03411 53280
21	2432 90200 81766 40000	−8752 94803 67616 00000	13803 75975 36407 04000
22	− 51090 94217 17094 40000	1 86244 81078 01702 40000	−2 98631 90286 32163 84000
23	11 24000 72777 76076 80000	−41 48476 77933 54547 20000	67 56146 67377 09306 88000
24	−258 52016 73888 49766 40000	965 38966 65249 30662 40000	−1595 39850 27606 68605 44000
25	6204 48401 73323 94393 60000	−23427 87216 39871 85664 00000	39254 95373 27809 77192 96000

$n\backslash m$	4	5	6
4	1		
5	−10	1	
6	85	−15	1
7	−735	175	−21
8	6769	−1960	322
9	− 67284	22449	−4536
10	7 23680	−2 69325	63273
11	−84 09500	34 16930	−9 02055
12	1052 58076	−459 95730	133 39535
13	− 14140 14888	6572 06836	−2060 70150
14	2 03137 53096	− 99577 03756	33361 18786
15	−31 09892 60400	15 97216 05680	−5 66633 66760
16	505 69957 03824	−270 68133 45600	100 96721 07080
17	−8707 77488 75904	4836 60092 33424	−1886 15670 58880
18	1 58331 39757 27488	− 90929 99058 44112	36901 26492 34384
19	−30 32125 40077 19424	17 95071 22809 21504	−7 55152 75920 63024
20	610 11607 57404 91776	−371 38478 73452 28000	161 42973 65301 18960
21	− 12870 93124 51509 88800	8037 81182 26450 51776	−3599 97951 79476 07200
22	2 84093 31590 18114 68800	−1 81664 97952 06970 76096	83637 38169 95448 02976
23	−65 48684 85270 30686 97600	42 80722 86535 71471 42912	−20 21687 37691 06827 41568
24	1573 75898 28594 15107 32800	−1050 05310 75591 74529 84576	507 79532 53430 28501 98976
25	−39365 61409 13866 31181 31200	26775 03356 42796 03823 62624	−13237 14091 57918 58577 60000

Таблица 24.3. Числа Стирлинга первого рода $S_n^{(m)}$

$n\backslash m$	7	8	9
7	1		
8	−28	1	
9	546	−36	1
10	−9450	870	−45
11	1 57773	− 18150	1320
12	−26 37558	3 57423	− 32670
13	449 90231	−69 26634	7 49463
14	−7909 43153	1350 36473	−166 69653
15	1 44093 22928	− 26814 53775	3684 11615
16	−27 28032 10680	5 46311 29553	− 82076 28000
17	537 45234 77960	−114 69012 83528	18 59531 77553
18	− 11022 84661 84200	2487 18452 97936	−430 81053 01929
19	2 35312 50405 49984	− 55792 16815 47048	10241 77407 32658
20	−52 26090 33625 12720	12 95363 69899 43896	−2 50385 87554 67550
21	1206 64780 37803 73360	−311 33364 31613 90640	63 03081 20992 94896
22	− 28939 58339 73354 47760	7744 65431 01695 76800	−1634 98069 72465 83456
23	7 20308 21644 09246 53696	−1 99321 97822 10661 37360	43714 22964 95944 12832
24	−185 88776 35505 19497 76576	53 04713 71552 54458 12976	−12 04749 26016 17376 32496
25	4969 10165 05554 96448 36800	−1459 01905 52766 26492 88000	342 18695 95940 71489 92880

$n\backslash m$	10	11	12
10	1		
11	−55	1	
12	1925	−66	1
13	− 55770	2717	−78
14	14 74473	− 91091	3731
15	−373 12275	27 49747	−1 43325
16	9280 95740	−785 58480	48 99622
17	−2 30571 59840	21850 31420	−1569 52432
18	57 79248 94833	−6 02026 93980	48532 22764
19	−1471 07534 08923	166 15733 86473	−14 75607 03732
20	38192 20555 02195	−4628 06477 51910	446 52267 57381
21	−10 14229 98655 11450	1 30753 50105 40395	− 13558 51828 99530
22	276 01910 92750 35346	−37 60053 50868 59745	4 15482 38514 30525
23	−7707 40110 12973 61068	1103 23088 11859 49736	−129 00665 98183 31295
24	2 20984 45497 94337 17396	− 33081 71136 85742 04996	4070 38405 70075 69521
25	−65 08376 17966 81468 50000	10 14945 52782 52146 37300	−1 30770 92873 67558 73500

$n\backslash m$	13	14	15	16
13	1			
14	−91	1		
15	5005	−105	1	
16	−2 18400	6580	−120	1
17	83 94022	−3 23680	8500	−136
18	−2996 50806	138 96582	−4 68180	10812
19	1 02469 37272	−5497 89282	223 23822	−6 62796
20	−34 22525 11900	2 06929 33630	−9739 41900	349 16946
21	1131 02769 95381	−75 61111 84500	4 01717 71630	− 16722 80820
22	− 37310 09998 02531	2718 86118 69881	−159 97183 88730	7 52896 68850
23	12 36304 58470 86207	− 97125 04609 39913	6238 24164 21941	−325 60911 03430
24	−413 35671 43013 14056	34 70180 64487 04206	−2 40604 60386 44556	13727 25118 00831
25	13990 94520 02391 06865	−1246 20006 90702 15000	92 44691 13761 73550	−5 70058 63218 64500

$n\backslash m$	17	18	19	20	21	22	23	24	25
17	1								
18	−153	1							
19	13566	−171	1						
20	−9 20550	16815	−190	1					
21	533 27946	−12 56850	20615	−210	1				
22	− 27921 67686	797 21796	−16 89765	25025	−231	1			
23	13 67173 57942	− 45460 47198	1168 96626	−22 40315	30107	−253	1		
24	−640 05903 36096	24 12764 43496	− 72346 69596	1684 23871	−29 32776	35926	−276	1	
25	29088 66798 67135	−1219 12249 80000	41 49085 13800	−1 12768 42500	2388 10495	−37 95000	42550	−300	1

Таблица 24.4. Числа Стирлинга второго рода $\sigma_n^{(m)}$

$n\backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1
7	1	63	301	350	140	21
8	1	127	966	1701	1050	266
9	1	255	3025	7770	6951	2646
10	1	511	9330	34105	42525	22827
11	1	1023	28501	1 45750	2 46730	1 79487
12	1	2047	86526	6 11501	13 79400	13 23652
13	1	4095	2 61625	25 32530	75 08501	93 21312
14	1	8191	7 88970	103 91745	400 75035	634 36373
15	1	16383	23 75101	423 55950	2107 66920	4206 93273
16	1	32767	71 41686	1717 98901	10961 90550	27349 26558
17	1	65535	214 57825	6943 37290	56527 51651	1 75057 49898
18	1	1 31071	644 39010	27988 06985	2 89580 95545	11 06872 51039
19	1	2 62143	1934 48101	1 12596 66950	14 75892 84710	69 30816 01779
20	1	5 24287	5806 06446	4 52321 15901	74 92060 90500	430 60788 95384
21	1	10 48575	17423 43625	18 15090 70050	379 12625 68401	2658 56794 62804
22	1	20 97151	52280 79450	72 77786 23825	1913 78219 12055	16330 53393 45225
23	1	41 94303	1 56863 35501	291 63425 74750	9641 68881 84100	99896 98579 83405
24	1	83 88607	4 70632 00806	1168 10566 34501	48500 07834 95250	6 09023 60360 84530
25	1	167 77215	14 11979 91025	4677 12897 38810	2 43668 49741 10751	37 02641 70000 02430

$n\backslash m$	7	8	9	10
7	1			
8	28	1		
9	462	36	1	
10	5880	750	45	1
11	63987	11880	1155	55
12	6 27396	1 59027	22275	1705
13	57 15424	18 99612	3 59502	39325
14	493 29280	209 12320	51 35130	7 52752
15	4087 41333	2166 27840	671 28490	126 62650
16	32818 82604	21417 64053	8207 84250	1937 54990
17	2 57081 04786	2 04159 95028	95288 22303	27583 34150
18	19 74624 83400	18 90360 65010	10 61753 95755	3 71121 63803
19	149 29246 34839	170 97510 03480	114 46146 26805	47 72970 33785
20	1114 35540 45652	1517 09326 62679	1201 12826 44725	591 75849 64655
21	8231 09572 14948	13251 10153 47084	12327 24764 65204	7118 71322 91275
22	60276 23799 67440	1 14239 90799 91620	1 24196 33035 33920	83514 37993 77954
23	4 38264 19991 17305	9 74195 50199 00400	12 32006 88117 96900	9 59340 12973 13460
24	31 67746 38518 04540	82 31828 21583 20505	120 62257 43260 72500	108 25408 17849 31500
25	227 83248 29987 16310	690 22372 11183 68580	1167 92145 10929 73005	1203 16339 21753 87500

$n\backslash m$	11	12	13	14
11	1			
12	66	1		
13	2431	78	1	
14	66066	3367	91	1
15	14 79478	1 06470	4550	105
16	289 36908	27 57118	1 65620	6020
17	5120 60978	620 22324	49 10178	2 49900
18	83910 04908	12563 28866	1258 54638	84 08778
19	12 94132 17791	2 34669 51300	28924 39160	2435 77530
20	190 08424 29486	41 10166 33391	6 10686 60380	63025 24580
21	2682 68516 89001	683 30420 30178	120 49092 18331	14 93040 04500
22	36628 25008 70286	10882 33560 51137	2249 68618 68481	329 51652 81331
23	4 86425 13089 51100	1 67216 27734 83930	40128 25603 41390	6862 91758 07115
24	63 10016 56957 75560	24 93020 45907 58260	6 88883 60579 22000	1 36209 10216 41000
25	802 35590 44384 62660	362 26262 07848 74680	114 48507 33437 44260	25 95811 03608 96000

$n\backslash m$	15	16	17	18	19
15	1				
16	120	1			
17	7820	136	1		
18	3 67200	9996	153	1	
19	139 16778	5 27136	12597	171	1
20	4523 29200	223 50954	7 41285	15675	190
21	1 30874 62580	8099 44464	349 52799	10 23435	19285
22	34 56159 43200	2 60465 74004	14041 42047	533 74629	13 89850
23	847 94044 29331	76 23611 27264	4 99169 88803	23648 85369	797 81779
24	19582 02422 47080	2067 71824 65555	161 09499 36915	9 24849 25445	38807 39170
25	4 29939 46553 47200	52665 51616 95960	4806 33313 93110	327 56785 94925	16 62189 69675

$n\backslash m$	20	21	22	23	24	25
20	1					
21	210	1				
22	23485	231	1			
23	18 59550	28336	253	1		
24	1169 72779	24 54606	33902	276	1	
25	62201 94750	1685 19505	32 00450	40250	300	1

Таблица 24.5. **Числа неупорядоченных разбиений и числа разбиений с неравными частями**

n	$p(n)$	$q(n)$	n	$p(n)$	$q(n)$	n	$p(n)$	$q(n)$	n	$p(n)$	$q(n)$
0		1	50	2 04226	3658	100	1905 69292	4 44793	150	4 08532 35313	194 06016
1	1	1	51	2 39943	4097	101	2144 81126	4 83330	151	4 50606 24582	207 92120
2	2	1	52	2 81589	4582	102	2412 65379	5 25016	152	4 96862 88421	222 72512
3	3	2	53	3 29931	5120	103	2712 48950	5 70078	153	5 47703 76324	238 53318
4	5	2	54	3 86155	5718	104	3048 01365	6 18784	154	6 03566 73280	255 40982
5	7	3	55	4 51276	6378	105	3423 25709	6 71418	155	6 64931 82097	273 42421
6	11	4	56	5 26823	7108	106	3842 76336	7 28260	156	7 32322 43759	292 64960
7	15	5	57	6 14154	7917	107	4311 49389	7 89640	157	8 06309 64769	313 16314
8	22	6	58	7 15220	8808	108	4835 02844	8 55906	158	8 87517 78802	335 04746
9	30	8	59	8 31820	9792	109	5419 46240	9 27406	159	9 76627 28555	358 39008
10	42	10	60	9 66467	10880	110	6071 63746	10 04544	160	10 74381 59466	383 28320
11	56	12	61	11 21505	12076	111	6799 03203	10 87744	161	11 81590 68427	409 82540
12	77	15	62	13 00156	13394	112	7610 02156	11 77438	162	12 99139 04637	438 12110
13	101	18	63	15 05499	14848	113	8513 76628	12 74118	163	14 27989 95930	468 28032
14	135	22	64	17 41630	16444	114	9520 50665	13 78304	164	15 69194 75295	500 42056
15	176	27	65	20 12558	18200	115	10641 44451	14 90528	165	17 23898 00255	534 66624
16	231	32	66	23 23520	20132	116	11889 08248	16 11388	166	18 93348 22579	571 14844
17	297	38	67	26 79689	22250	117	13277 10076	17 41521	167	20 78904 20102	610 00704
18	385	46	68	30 87735	24576	118	14820 74143	18 81578	168	22 82047 32751	651 39008
19	490	54	69	35 54345	27130	119	16536 68665	20 32290	169	25 04389 25115	695 45358
20	627	64	70	40 87968	29927	120	18443 49560	21 94432	170	27 47686 17130	742 36384
21	792	76	71	46 97205	32992	121	20561 48051	23 68800	171	30 13848 02048	792 29676
22	1002	89	72	53 92783	36352	122	22913 20912	25 56284	172	33 04954 99613	845 43782
23	1255	104	73	61 85689	40026	123	25523 38241	27 57826	173	36 23268 59895	901 98446
24	1575	122	74	70 89500	44046	124	28419 40500	29 74400	174	39 71250 74750	962 14550
25	1958	142	75	81 18264	48446	125	31631 27352	32 07086	175	43 51576 97830	1026 14114
26	2436	165	76	92 89091	53250	126	35192 22692	34 57027	176	47 67158 57290	1094 20549
27	3010	192	77	106 19863	58499	127	39138 64295	37 25410	177	52 21158 31195	1166 58616
28	3718	222	78	121 32164	64234	128	43510 78600	40 13544	178	57 17016 05655	1243 54422
29	4565	256	79	138 48650	70488	129	48352 71870	43 22816	179	62 58467 53120	1325 35702
30	5604	296	80	157 96476	77312	130	53713 15400	46 54670	180	68 49573 90936	1412 31780
31	6842	340	81	180 04327	84756	131	59645 39504	50 10688	181	74 94744 11781	1504 73568
32	8349	390	82	205 06255	92864	132	66208 30889	53 92550	182	81 98769 08323	1602 93888
33	10143	448	83	233 36469	101698	133	73466 29512	58 02008	183	89 66848 17527	1707 27424
34	12310	512	84	265 43660	111322	134	81490 40695	62 40974	184	98 04628 80430	1818 10744
35	14883	585	85	301 67357	121792	135	90358 36076	67 11480	185	107 18237 74337	1935 82642
36	17977	668	86	342 62962	133184	136	1 00155 81680	72 15644	186	117 14326 92373	2060 84096
37	21637	760	87	388 87673	145578	137	1 10976 45016	77 55776	187	128 00110 42268	2193 58315
38	26015	864	88	441 08109	159046	138	1 22923 41831	83 34326	188	139 83417 45571	2334 51098
39	31185	982	89	499 95925	173682	139	1 36109 49895	89 53856	189	152 72735 99625	2484 10816
40	37338	1113	90	566 34173	189586	140	1 50658 78135	96 17150	190	166 77274 04093	2642 88462
41	44583	1260	91	641 12359	206848	141	1 66706 89208	103 27156	191	182 07011 00652	2811 38048
42	53174	1426	92	725 33807	225585	142	1 84402 93320	110 86968	192	198 72768 56363	2990 16608
43	63261	1610	93	820 10177	245920	143	2 03909 82757	118 99934	193	216 86271 05469	3179 84256
44	75175	1816	94	926 69720	267968	144	2 25406 54445	127 69602	194	236 60227 41845	3381 04630
45	89134	2048	95	1046 51419	291874	145	2 49088 58009	136 99699	195	258 08402 12973	3594 44904
46	105558	2304	96	1181 14304	317788	146	2 75170 52599	146 94244	196	281 45709 87591	3820 75868
47	124754	2590	97	1332 30930	345856	147	3 03886 71978	157 57502	197	306 88298 78530	4060 72422
48	147273	2910	98	1501 98136	376256	148	3 35494 19497	168 93952	198	334 53659 83698	4315 13602
49	173525	3264	99	1692 29875	409174	149	3 70273 55200	181 08418	199	364 60724 32125	4584 82688
50	204226	3658	100	1905 69292	444793	150	4 08532 35313	194 06016	200	397 29990 29388	4870 67746

Взято из [24.19].

Таблица 24.5. Числа неупорядоченных разбиений и числа разбиений с неравными частями

n	$p(n)$	$q(n)$	n	$p(n)$	$q(n)$
200	397 29990 29388	4870 67746	250	23079 35543 64681	85192 80128
201	432 83636 58647	5173 61670	251	24929 14511 68559	89949 26602
202	471 45668 86083	5494 62336	252	26923 27012 52579	94961 58208
203	513 42052 87973	5834 73184	253	29072 69579 16112	1 00243 00890
204	559 00883 17495	6195 03296	254	31389 19913 06665	1 05807 47264
205	608 52538 59260	6576 67584	255	33885 42642 48680	1 11669 59338
206	662 29877 08040	6980 87424	256	36574 95668 70782	1 17844 71548
207	720 68417 06490	7408 90786	257	39472 36766 55357	1 24348 95064
208	784 06562 26137	7862 12446	258	42593 30844 09356	1 31199 20928
209	852 85813 02375	8341 94700	259	45954 57504 48675	1 38413 23582
210	927 51025 75355	8849 87529	260	49574 19347 60846	1 46009 65705
211	1008 50658 85767	9387 48852	261	53471 50629 08609	1 54008 01856
212	1096 37072 05259	9956 45336	262	57667 26749 47168	1 62428 82560
213	1191 66812 36278	10558 52590	263	62183 74165 09615	1 71293 59744
214	1295 00959 25895	11195 55488	264	67044 81230 60170	1 80624 90974
215	1407 05456 99287	11869 49056	265	72276 09536 90372	1 90446 44146
216	1528 51512 48481	12582 38720	266	77905 06295 62167	2 00783 03620
217	1660 15981 07914	13336 40710	267	83961 17303 66814	2 11660 75136
218	1802 81825 16671	14133 83026	268	90476 01083 16360	2 23106 91192
219	1957 38561 61145	14977 05768	269	97483 43699 44625	2 35150 17984
220	2124 82790 09367	15868 61606	270	1 05019 74899 31117	2 47820 61070
221	2306 18711 73849	16811 16852	271	1 13123 85039 38606	2 61149 71540
222	2502 58737 60111	17807 51883	272	1 21837 43498 44333	2 75170 53882
223	2715 24089 25615	18860 61684	273	1 31205 18008 16215	2 89917 72486
224	2945 45499 41750	19973 57056	274	1 41274 95651 73450	3 05427 58738
225	3194 63906 96157	21149 65120	275	1 52098 04928 51175	3 21738 19904
226	3464 31263 22519	22392 29960	276	1 63729 39693 37171	3 38889 46600
227	3756 11335 82570	23705 13986	277	1 76227 84330 57269	3 56923 20960
228	4071 80636 27362	25091 98528	278	1 89656 41035 91584	3 75883 26642
229	4413 29348 84255	26556 84608	279	2 04082 58525 75075	3 95815 57440
230	4782 62397 45920	28103 94454	280	2 19578 63116 82516	4 16768 26624
231	5182 00518 38712	29737 72212	281	2 36221 91453 37711	4 38791 78240
232	5613 81486 70947	31462 84870	282	2 54095 25900 45698	4 61938 97032
233	6080 61354 38329	33284 23936	283	2 73287 31835 47535	4 86265 19094
234	6585 15859 70275	35207 06304	284	2 93892 97939 29555	5 11828 44672
235	7130 41855 14919	37236 75326	285	3 16013 78671 48997	5 38689 49522
236	7719 58926 63512	39379 02688	286	3 39758 40119 86773	5 66911 97084
237	8356 11039 25871	41639 89458	287	3 65243 08360 71053	5 96562 52987
238	9043 68396 68817	44025 67324	288	3 92592 21614 89422	6 27710 98024
239	9786 29337 03585	46543 00706	289	4 21938 85285 87095	6 60430 42088
240	10588 22467 22733	49198 87992	290	4 53425 31269 00886	6 94797 40554
241	11454 08845 53038	52000 62976	291	4 87203 80564 72084	7 30892 09120
242	12388 84430 77259	54955 97248	292	5 23437 10697 53672	7 68798 39744
243	13397 82593 44888	58073 01632	293	5 62299 26919 50605	8 08604 19136
244	14486 76924 96445	61360 27874	294	6 03976 38820 95515	8 50401 45750
245	15661 84125 27946	64826 71322	295	6 48667 41270 79088	8 94286 47940
246	16929 67223 91554	68481 72604	296	6 96585 01441 95831	9 40360 04868
247	18297 38898 54026	72335 19619	297	7 47956 50785 10584	9 88727 65938
248	19772 65166 81672	76397 50522	298	8 03024 83849 43040	10 39499 71456
249	21363 69198 20625	80679 55712	299	8 62049 62754 65025	10 92791 76298
250	23079 35543 64681	85192 80128	300	9 25308 29367 23602	11 48724 72064

Таблица 24.5. Числа неупорядоченных разбиений и числа разбиений с неравными частями

n	$p(n)$	$q(n)$	n	$p(n)$	$q(n)$
300	9 25308 29367 23602	11 48724 72064	350	279 36332 84837 02152	126 91829 24648
301	9 93097 23924 03501	12 07425 10607	351	298 33006 30627 58076	132 93477 19190
302	10 65733 12325 48839	12 69025 30816	352	318 55597 37883 29084	139 22769 71520
303	11 43554 20778 22104	13 33663 83848	353	340 12281 00485 77428	145 80938 18816
304	12 26921 80192 29465	14 01485 59930	354	363 11751 20481 10005	152 69267 15868
305	13 16221 78950 57704	14 72642 18618	355	387 63253 29190 29223	159 89096 56578
306	14 11866 26652 80005	15 47292 17536	356	413 76618 09333 42362	167 41824 09148
307	15 14295 27388 57194	16 25601 42890	357	441 62298 19293 58437	175 28907 55072
308	16 23978 65358 29663	17 07743 43642	358	471 31406 42683 98780	183 51867 38752
309	17 41418 01331 47295	17 93899 64242	359	502 95756 65060 00020	192 12289 32216
310	18 67148 82996 00364	18 84259 79304	360	536 67907 03106 91121	201 11827 04478
311	20 01742 67625 76945	19 79022 32212	361	572 61205 88980 37559	210 52205 02772
312	21 45809 60373 52891	20 78394 72390	362	610 89840 37518 84101	220 35221 50410
313	23 00000 66554 87337	21 82593 94656	363	651 68887 99972 06959	230 62751 50210
314	24 65010 61508 30490	22 91846 82870	364	695 14371 34589 46040	241 36750 01278
315	26 41580 76335 66326	24 06390 52286	365	741 43315 98840 81684	252 59255 33946
316	28 30502 03409 96003	25 26472 94208	366	790 73811 96494 11319	264 32392 51488
317	30 32618 19898 42964	26 52353 25352	367	843 25078 85625 28427	276 58376 86784
318	32 48829 33514 66654	27 84302 35904	368	899 17534 83960 88349	289 39517 78822
319	34 80095 48694 40830	29 22603 40224	369	958 72869 79123 38045	302 78222 57408
320	37 27440 57767 48077	30 67552 32574	370	1022 14122 83673 45362	316 77000 44480
321	39 91956 55269 99991	32 19458 41664	371	1089 65764 44243 99782	331 38466 77248
322	42 74807 80359 54696	33 78644 88192	372	1161 53783 48499 62850	346 65347 41118
323	45 77235 85435 78028	35 45449 47722	373	1238 05779 41191 25085	362 60483 21048
324	49 00564 36352 37875	37 20225 12608	374	1319 51059 97274 73500	379 26834 76992
325	52 46204 42288 28641	39 03340 57172	375	1406 20744 65614 84054	396 67487 30794
326	56 15660 21128 74289	40 95181 08690	376	1498 47874 35905 81081	414 85655 73659
327	60 10534 98396 66544	42 96149 17632	377	1596 67527 44907 56791	433 84690 00206
328	64 32537 46091 14550	45 06665 31450	378	1701 16942 79758 13525	453 68080 55808
329	68 83488 59460 73850	47 27168 74732	379	1812 35649 97394 72950	474 39464 06976
330	73 65328 78618 50339	49 58118 28759	380	1930 65607 23504 65812	496 02629 40968
331	78 80125 53026 66615	51 99993 15040	381	2056 51347 53366 33805	518 61523 80864
332	84 30081 56362 25119	54 53293 85792	382	2190 40133 24237 65131	542 20259 26436
333	90 17543 49805 49623	57 18543 13990	383	2332 82119 85438 92336	566 83119 27092
334	96 45011 01922 02760	59 96286 87918	384	2484 30529 42654 18180	592 54565 72864
335	103 15146 63217 35325	62 87095 13216	385	2645 41834 06887 63701	619 39246 14094
336	110 30786 04252 92772	65 91563 14788	386	2816 75950 32179 42792	647 42001 16480
337	117 94949 15461 13972	69 10312 43770	387	2998 96444 77364 52194	676 67872 37064
338	126 10851 78337 96355	72 43991 92576	388	3192 70751 84335 32826	707 22110 32064
339	134 81918 06233 01520	75 93279 10200	389	3398 70404 13581 60275	739 10183 03854
340	144 11793 65278 73832	79 58881 23110	390	3617 71276 38676 04423	772 37784 71936
341	154 04359 73795 76030	83 41536 64940	391	3850 53843 46674 29186	807 10844 79444
342	164 63747 91657 61044	87 42016 06890	392	4098 03453 56265 94791	843 35537 42947
343	175 94355 98104 22753	91 61123 94270	393	4361 10617 07622 84114	881 18291 29614
344	188 00864 70522 92980	95 99699 92704	394	4640 71312 46996 23515	920 65799 74150
345	200 88255 62876 83159	100 58620 35461	395	4937 87309 67881 91655	961 85031 43424
346	214 61829 97432 86299	105 38799 77632	396	5253 66512 44169 75163	1004 83241 32444
347	229 27228 68712 17150	110 41192 60918	397	5589 23320 25954 04488	1049 67982 04736
348	244 90453 74553 82406	115 66794 79970	398	5945 79011 47078 74597	1096 47115 85280
349	261 57890 73511 44125	121 16645 56454	399	6324 62148 25042 94325	1145 28826 89344
350	279 36332 84837 02152	126 91829 24648	400	6727 09005 17410 41926	1196 21634 00706

Таблица 24.5. Числа неупорядоченных разбиений и числа разбиений с неравными частями

n	$p(n)$	$q(n)$	n	$p(n)$	$q(n)$
400	6727 09005 17410 41926	1196 21634 00706	450	1 34508 18800 15729 23840	9893 14440 61528
401	7154 64022 26539 42321	1249 34404 08000	451	1 42573 13615 53474 04229	10307 93957 13070
402	7608 80284 33398 79269	1304 76365 81998	452	1 51112 26207 19173 13678	10739 65687 10144
403	8091 20027 64844 65581	1362 57124 07808	453	1 60152 90524 45537 15585	11188 96810 43072
404	8603 55175 93486 55060	1422 86674 81438	454	1 69723 95104 64580 40965	11656 57102 54336
405	9147 67906 88591 17602	1485 75420 52794	455	1 79855 91645 39582 67598	12143 19032 12544
406	9725 51251 37420 21729	1551 34186 29884	456	1 90581 04044 26519 31034	12649 57862 22432
407	10339 09726 71239 47241	1619 74236 54282	457	2 01933 37928 51146 88629	13176 51755 08648
408	10990 60006 37759 26994	1691 07292 29128	458	2 13948 90703 27330 69132	13724 81881 00782
409	11682 31627 71923 17780	1765 45549 15430	459	2 26665 62143 58313 45565	14295 32530 93376
410	12416 67740 31511 90382	1843 01696 07104	460	2 40123 65561 39251 92081	14888 91233 20640
411	13196 25896 69254 35702	1923 88934 65516	461	2 54365 39575 85741 99975	15506 48874 75476
412	14023 78888 35188 47344	2008 20999 30208	462	2 69435 60521 29549 94471	16148 99826 46592
413	14902 15629 03099 48968	2096 12178 16576	463	2 85381 55524 19619 86287	16817 42073 15550
414	15834 42088 44881 87770	2187 77324 80960	464	3 02253 16287 25766 36605	17512 77348 45952
415	16823 82278 71392 35544	2283 31930 70488	465	3 20103 13615 29932 90544	18236 11274 38194
416	17873 79296 96898 76004	2382 92048 69148	466	3 38987 12724 95254 32549	18988 53505 94524
417	18987 96426 73316 64557	2486 74417 20078	467	3 58963 89376 81628 76613	19771 17881 29024
418	20170 18301 88059 33659	2594 96435 42056	468	3 80095 46876 31205 98477	20585 22576 95744
419	21424 52136 02556 36320	2707 76199 52640	469	4 02447 33986 17114 75160	21431 90268 83034
420	22755 29021 65800 25259	2825 32529 77152	470	4 26088 63801 56524 13417	22312 48299 10884
421	24167 05302 14413 63961	2947 84998 62528	471	4 51092 33635 50960 99864	23228 28849 04960
422	25664 64021 38377 14846	3075 53960 09352	472	4 77535 45970 81641 15593	24180 69117 98586
423	27253 16454 62304 21739	3208 60580 00384	473	5 05499 30531 42046 29558	25171 11509 01902
424	28938 03725 70847 98150	3347 26867 45954	474	5 35069 67535 16072 62125	26201 03821 12696
425	30724 98514 70950 51099	3491 75707 60097	475	5 66337 12186 58055 99675	27271 99448 23232
426	32620 06861 74102 32189	3642 30895 45254	476	5 99397 20478 23018 52926	28385 57585 65430
427	34629 70071 39035 75934	3799 17171 07136	477	6 34350 76365 37870 28583	29543 43443 69603
428	36760 66724 18315 27309	3962 60256 14146	478	6 71304 20389 67318 07232	30747 28468 94368
429	39020 14800 02372 59665	4132 86891 79000	479	7 10369 79823 66282 38005	31998 90573 73738
430	41415 73920 71023 58378	4310 24877 85006	480	7 51666 00419 49931 25591	33300 14373 57056
431	43955 47717 05181 16534	4495 03113 72460	481	7 95317 79841 47582 32180	34652 91433 03468
432	46647 86328 42292 67991	4687 51640 62334	482	8 41457 02874 28236 49455	36059 20520 80640
433	49501 89040 94051 50715	4888 01685 40672	483	8 90222 78495 19280 88294	37521 07873 43946
434	52527 07072 91082 40605	5096 85706 20480	484	9 41761 78911 49976 98055	39040 67468 62530
435	55733 46514 46362 86656	5314 37439 57460	485	9 96228 80660 85734 11012	40620 21308 45496
436	59131 71430 91696 18645	5540 91949 44512	486	10 53787 07886 24553 46513	42261 99712 45764
437	62733 07137 60430 79215	5776 85678 02880	487	11 14608 77893 64264 84248	43968 41621 12802
438	66549 43656 69662 97367	6022 56498 45546	488	11 78875 49115 57358 02646	45741 94910 51264
439	70593 39364 65621 35510	6278 43769 39520	489	12 46778 71600 12729 19665	47585 16717 64998
440	74878 24841 94708 86233	6544 88391 85792	490	13 18520 40161 22702 33223	49500 73777 62304
441	79418 06934 64434 02240	6822 32867 92200	491	13 94313 50322 44478 16939	51491 42772 84172
442	84227 73040 77294 99781	7111 21361 67457	492	14 74382 57204 03639 53132	53560 10694 36938
443	89322 95632 13536 45667	7411 99762 56080	493	15 58964 37499 49778 06173	55709 75216 10170
444	94720 37025 78934 71820	7725 15750 89318	494	16 48308 54706 61724 38760	57943 45082 47040
445	1 00437 54417 17528 47604	8051 18865 81728	495	17 42678 27774 77609 81187	60264 40509 50309
446	1 06493 05190 52391 18581	8390 60575 94564	496	18 42351 03350 31598 91466	62675 93600 10788
447	1 12906 52519 91961 03354	8743 94352 40798	497	19 47619 31798 76580 64007	65181 48774 31176
448	1 19698 71278 27202 05954	9111 75744 62854	498	20 58791 47204 28849 01563	67784 63214 30326
449	1 26891 54269 09814 18000	9494 62459 05984	499	21 76192 51543 92874 61625	70489 07325 21792
450	1 34508 18800 15729 23840	9893 14440 61528	500	23 00165 03257 43239 95027	73298 65212 45024

Таблица 24.6. Арифметические функции

n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1
1	1	1	1	51	32	4	72	101	100	2	102	151	150	2	152	201	132	4	272
2	1	2	3	52	24	6	98	102	32	8	216	152	72	8	300	202	100	4	306
3	2	2	4	53	52	2	54	103	102	2	104	153	96	6	234	203	168	4	240
4	2	3	7	54	18	8	120	104	48	8	210	154	60	8	288	204	64	12	504
5	4	2	6	55	40	4	72	105	48	8	192	155	120	4	192	205	160	4	252
6	2	4	12	56	24	8	120	106	52	4	162	156	48	12	392	206	102	4	312
7	6	2	8	57	36	4	80	107	106	2	108	157	156	2	158	207	132	6	312
8	4	4	15	58	28	4	90	108	36	12	280	158	78	4	240	208	96	10	434
9	6	3	13	59	58	2	60	109	108	2	110	159	104	4	216	209	180	4	240
10	4	4	18	60	16	12	168	110	40	8	216	160	64	12	378	210	48	16	576
11	10	2	12	61	60	2	62	111	72	4	152	161	132	4	192	211	210	2	212
12	4	6	28	62	30	4	96	112	48	10	248	162	54	10	363	212	104	6	378
13	12	2	14	63	36	6	104	113	112	2	114	163	162	2	164	213	140	4	288
14	6	4	24	64	32	7	127	114	36	8	240	164	80	6	294	214	106	4	324
15	8	4	24	65	48	4	84	115	88	4	144	165	80	8	288	215	168	4	264
16	8	5	31	66	20	8	144	116	56	6	210	166	82	4	252	216	72	16	600
17	16	2	18	67	66	2	68	117	72	6	182	167	166	2	168	217	180	4	256
18	6	6	39	68	32	6	126	118	58	4	180	168	48	16	480	218	108	4	330
19	18	2	20	69	44	4	96	119	96	4	144	169	156	3	183	219	144	4	296
20	8	6	42	70	24	8	144	120	32	16	360	170	64	8	324	220	80	12	504
21	12	4	32	71	70	2	72	121	110	3	133	171	108	6	260	221	192	4	252
22	10	4	36	72	24	12	195	122	60	4	186	172	84	6	308	222	72	8	456
23	22	2	24	73	72	2	74	123	80	4	168	173	172	2	174	223	222	2	224
24	8	8	60	74	36	4	114	124	60	6	224	174	56	8	360	224	96	12	504
25	20	3	31	75	40	6	124	125	100	4	156	175	120	6	248	225	120	9	403
26	12	4	42	76	36	6	140	126	36	12	312	176	80	10	372	226	112	4	342
27	18	4	40	77	60	4	96	127	126	2	128	177	116	4	240	227	226	2	228
28	12	6	56	78	24	8	168	128	64	8	255	178	88	4	270	228	72	12	560
29	28	2	30	79	78	2	80	129	84	4	176	179	178	2	180	229	228	2	230
30	8	8	72	80	32	10	186	130	48	8	252	180	48	18	546	230	88	8	432
31	30	2	32	81	54	5	121	131	130	2	132	181	180	2	182	231	120	8	384
32	16	6	63	82	40	4	126	132	40	12	336	182	72	8	336	232	112	8	450
33	20	4	48	83	82	2	84	133	108	4	160	183	120	4	248	233	232	2	234
34	16	4	54	84	24	12	224	134	66	4	204	184	88	8	360	234	72	12	546
35	24	4	48	85	64	4	108	135	72	8	240	185	144	4	228	235	184	4	288
36	12	9	91	86	42	4	132	136	64	8	270	186	60	8	384	236	116	6	420
37	36	2	38	87	56	4	120	137	136	2	138	187	160	4	216	237	156	4	320
38	18	4	60	88	40	8	180	138	44	8	288	188	92	6	336	238	96	8	432
39	24	4	56	89	88	2	90	139	138	2	140	189	108	8	320	239	238	2	240
40	16	8	90	90	24	12	234	140	48	12	336	190	72	8	360	240	64	20	744
41	40	2	42	91	72	4	112	141	92	4	192	191	190	2	192	241	240	2	242
42	12	8	96	92	44	6	168	142	70	4	216	192	64	14	508	242	110	6	399
43	42	2	44	93	60	4	128	143	120	4	168	193	192	2	194	243	162	6	364
44	20	6	84	94	46	4	144	144	48	15	403	194	96	4	294	244	120	6	434
45	24	6	78	95	72	4	120	145	112	4	180	195	96	8	336	245	168	6	342
46	22	4	72	96	32	12	252	146	72	4	222	196	84	9	399	246	80	8	504
47	46	2	48	97	96	2	98	147	84	6	228	197	196	2	198	247	216	4	280
48	16	10	124	98	42	6	171	148	72	6	266	198	60	12	468	248	120	8	480
49	42	3	57	99	60	6	156	149	148	2	150	199	198	2	200	249	164	4	336
50	20	6	93	100	40	9	217	150	40	12	372	200	80	12	465	250	100	8	468

Взято из [24.17].

Таблица 24.6. Арифметические функции

n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1
251	250	2	252	301	252	4	352	351	216	8	560	401	400	2	402	451	400	4	504
252	72	18	728	302	150	4	456	352	160	12	756	402	132	8	816	452	224	6	798
253	220	4	288	303	200	4	408	353	352	2	354	403	360	4	448	453	300	4	608
254	126	4	384	304	144	10	620	354	116	8	720	404	200	6	714	454	226	4	684
255	128	8	432	305	240	4	372	355	280	4	432	405	216	10	726	455	288	8	672
256	128	9	511	306	96	12	702	356	176	6	630	406	168	8	720	456	144	16	1200
257	256	2	258	307	306	2	308	357	192	8	576	407	360	4	456	457	456	2	458
258	84	8	528	308	120	12	672	358	178	4	540	408	128	16	1080	458	228	4	690
259	216	4	304	309	204	4	416	359	358	2	360	409	408	2	410	459	288	8	720
260	96	12	588	310	120	8	576	360	96	24	1170	410	160	8	756	460	176	12	1008
261	168	6	390	311	310	2	312	361	342	3	381	411	272	4	552	461	460	2	462
262	130	4	396	312	96	16	840	362	180	4	546	412	204	6	728	462	120	16	1152
263	262	2	264	313	312	2	314	363	220	6	532	413	348	4	480	463	462	2	464
264	80	16	720	314	156	4	474	364	144	12	784	414	132	12	936	464	224	10	930
265	208	4	324	315	144	12	624	365	288	4	444	415	328	4	504	465	240	8	768
266	108	8	480	316	156	6	560	366	120	8	744	416	192	12	882	466	232	4	702
267	176	4	360	317	316	2	318	367	366	2	368	417	276	4	560	467	466	2	468
268	132	6	476	318	104	8	648	368	176	10	744	418	180	8	720	468	144	18	1274
269	268	2	270	319	280	4	360	369	240	6	546	419	418	2	420	469	396	4	544
270	72	16	720	320	128	14	762	370	144	8	684	420	96	24	1344	470	184	8	864
271	270	2	272	321	212	4	432	371	312	4	432	421	420	2	422	471	312	4	632
272	128	10	558	322	132	8	576	372	120	12	896	422	210	4	636	472	232	8	900
273	144	8	448	323	288	4	360	373	372	2	374	423	276	6	624	473	420	4	528
274	136	4	414	324	108	15	847	374	160	8	648	424	208	8	810	474	156	8	960
275	200	6	372	325	240	6	434	375	200	8	624	425	320	6	558	475	360	6	620
276	88	12	672	326	162	4	492	376	184	8	720	426	140	8	864	476	192	12	1008
277	276	2	278	327	216	4	440	377	336	4	420	427	360	4	496	477	312	6	702
278	138	4	420	328	160	8	630	378	108	16	960	428	212	6	756	478	238	4	720
279	180	6	416	329	276	4	384	379	378	2	380	429	240	8	672	479	478	2	480
280	96	16	720	330	80	16	864	380	144	12	840	430	168	8	792	480	128	24	1512
281	280	2	282	331	330	2	332	381	252	4	512	431	430	2	432	481	432	4	532
282	92	8	576	332	164	6	588	382	190	4	576	432	144	20	1240	482	240	4	726
283	282	2	284	333	216	6	494	383	382	2	384	433	432	2	434	483	264	8	768
284	140	6	504	334	166	4	504	384	128	16	1020	434	180	8	768	484	220	9	931
285	144	8	480	335	264	4	408	385	240	8	576	435	224	8	720	485	384	4	588
286	120	8	504	336	96	20	992	386	192	4	582	436	216	6	770	486	162	12	1092
287	240	4	336	337	336	2	338	387	252	6	572	437	396	4	480	487	486	2	488
288	96	18	819	338	156	6	549	388	192	6	686	438	144	8	888	488	240	8	930
289	272	3	307	339	224	4	456	389	388	2	390	439	438	2	440	489	324	4	656
290	112	8	540	340	128	12	756	390	96	16	1008	440	160	16	1080	490	168	12	1026
291	192	4	392	341	300	4	384	391	352	4	432	441	252	9	741	491	490	2	492
292	144	6	578	342	108	12	780	392	168	12	855	442	192	8	756	492	160	12	1176
293	292	2	294	343	294	4	400	393	260	4	528	443	442	2	444	493	448	4	540
294	84	12	684	344	168	8	660	394	196	4	594	444	144	12	1064	494	216	8	840
295	232	4	360	345	176	8	576	395	312	4	480	445	352	4	540	495	240	12	936
296	144	8	570	346	172	4	522	396	120	18	1092	446	222	4	672	496	240	10	992
297	180	8	480	347	346	2	348	397	396	2	398	447	296	4	600	497	420	4	576
298	148	4	450	348	112	12	840	398	198	4	600	448	192	14	1016	498	164	8	1008
299	264	4	336	349	348	2	350	399	216	8	640	449	448	2	450	499	498	2	500
300	80	18	868	350	120	12	744	400	160	15	961	450	120	18	1209	500	200	12	1092

Таблица 24.6. Арифметические функции

n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1
501	332	4	672	551	504	4	600	601	600	2	602	651	360	8	1024	701	700	2	702
502	250	4	756	552	176	16	1440	602	252	8	1056	652	324	6	1148	702	216	16	1680
503	502	2	504	553	468	4	640	603	396	6	884	653	652	2	654	703	648	4	760
504	144	24	1560	554	276	4	834	604	300	6	1064	654	216	8	1320	704	320	14	1524
505	400	4	612	555	288	8	912	605	440	6	798	655	520	4	792	705	368	8	1152
506	220	8	864	556	276	6	980	606	200	8	1224	656	320	10	1302	706	352	4	1062
507	312	6	732	557	556	2	558	607	606	2	608	657	432	6	962	707	600	4	816
508	252	6	896	558	180	12	1248	608	288	12	1260	658	276	8	1152	708	232	12	1680
509	508	2	510	559	504	4	616	609	336	8	960	659	658	2	660	709	708	2	710
510	128	16	1296	560	192	20	1488	610	240	8	1116	660	160	24	2016	710	280	8	1296
511	432	4	592	561	320	8	864	611	552	4	672	661	660	2	662	711	468	6	1040
512	256	10	1023	562	280	4	846	612	192	18	1638	662	330	4	996	712	352	8	1350
513	324	8	800	563	562	2	564	613	612	2	614	663	384	8	1008	713	660	4	768
514	256	4	774	564	184	12	1344	614	306	4	924	664	328	8	1260	714	192	16	1728
515	408	4	624	565	448	4	684	615	320	8	1008	665	432	8	960	715	480	8	1008
516	168	12	1232	566	282	4	852	616	240	16	1440	666	216	12	1482	716	356	6	1260
517	460	4	576	567	324	10	968	617	616	2	618	667	616	4	720	717	476	4	960
518	216	8	912	568	280	8	1080	618	204	8	1248	668	332	6	1176	718	358	4	1080
519	344	4	696	569	568	2	570	619	618	2	620	669	444	4	896	719	718	2	720
520	192	16	1260	570	144	16	1440	620	240	12	1344	670	264	8	1224	720	192	30	2418
521	520	2	522	571	570	2	572	621	396	8	960	671	600	4	744	721	612	4	832
522	168	12	1170	572	240	12	1176	622	310	4	936	672	192	24	2016	722	342	6	1143
523	522	2	524	573	380	4	768	623	528	4	720	673	672	2	674	723	430	4	968
524	260	6	924	574	240	6	1008	624	192	20	1736	674	336	4	1014	724	360	6	1274
525	240	12	992	575	440	6	744	625	500	5	781	675	360	12	1240	725	560	6	930
526	262	4	792	576	192	21	1651	626	312	4	942	676	312	9	1281	726	220	12	1596
527	480	4	576	577	576	2	578	627	360	8	960	677	676	2	678	727	726	2	728
528	160	20	1488	578	272	6	921	628	312	6	1106	678	224	8	1368	728	288	16	1680
529	506	3	553	579	384	4	776	629	576	4	684	679	576	4	784	729	486	7	1093
530	208	8	972	580	224	12	1260	630	144	24	1872	680	256	16	1620	730	288	8	1332
531	348	6	780	581	492	4	672	631	630	2	632	681	452	4	912	731	672	4	792
532	216	12	1120	582	192	8	1176	632	312	8	1200	682	300	8	1152	732	240	12	1736
533	480	4	588	583	520	4	648	633	420	4	848	683	682	2	684	733	732	2	734
534	176	8	1080	584	288	8	1110	634	316	4	954	684	216	18	1820	734	366	4	1104
535	424	4	648	585	288	12	1092	635	504	4	768	685	544	4	828	735	336	12	1368
536	264	8	1020	586	292	4	882	636	208	12	1512	686	294	8	1200	736	352	12	1512
537	356	4	720	587	586	2	588	637	504	6	798	687	456	4	920	737	660	4	816
538	268	4	810	588	168	18	1596	638	280	8	1080	688	336	10	1364	738	240	12	1638
539	420	6	684	589	540	4	640	639	420	6	936	689	624	4	756	739	738	2	740
540	144	24	1680	590	232	8	1080	640	256	16	1530	690	176	16	1728	740	288	12	1596
541	540	2	542	591	392	4	792	641	640	2	642	691	690	2	692	741	432	8	1120
542	270	4	816	592	288	10	1178	642	212	8	1296	692	344	6	1218	742	312	8	1296
543	360	4	728	593	592	2	594	643	642	2	644	693	360	12	1248	743	742	2	744
544	256	12	1134	594	180	16	1440	644	264	12	1344	694	346	4	1044	744	240	16	1920
545	432	4	660	595	384	8	864	645	336	8	1056	695	552	4	840	745	592	4	900
546	144	16	1344	596	296	6	1050	646	288	8	1080	696	224	16	1800	746	372	4	1122
547	546	2	548	597	396	4	800	647	646	2	648	697	640	4	756	747	492	6	1092
548	272	6	966	598	264	8	1008	648	216	20	1815	698	348	4	1050	748	320	12	1512
549	360	6	806	599	598	2	600	649	580	4	720	699	464	4	936	749	636	4	864
550	200	12	1116	600	160	24	1860	650	240	12	1302	700	240	18	1736	750	200	16	1872

Таблица 24.6. Арифметические функции

n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1	n	$\varphi(n)$	σ_0	σ_1
751	750	2	752	801	528	6	1170	851	792	4	912	901	832	4	972	951	632	4	1272
752	368	10	1488	802	400	4	1206	852	280	12	2016	902	400	8	1512	952	384	16	2160
753	500	4	1008	803	720	4	888	853	852	2	854	903	504	8	1408	953	952	2	954
754	336	8	1260	804	264	12	1904	854	360	8	1488	904	448	8	1710	954	312	12	2106
755	600	4	912	805	528	8	1152	855	432	12	1560	905	720	4	1092	955	760	4	1152
756	216	24	2240	806	360	8	1344	856	424	8	1620	906	300	8	1824	956	476	6	1680
757	756	2	758	807	536	4	1080	857	856	2	858	907	906	2	908	957	560	8	1440
758	378	4	1140	808	400	8	1530	858	240	16	2016	908	452	6	1596	958	478	4	1440
759	440	8	1152	809	808	2	810	859	858	2	860	909	600	6	1326	959	816	4	1104
760	288	16	1800	810	216	20	2178	860	336	12	1848	910	288	16	2016	960	256	28	3048
761	760	2	762	811	810	2	812	861	480	8	1344	911	910	2	912	961	930	3	993
762	252	8	1536	812	336	12	1680	862	430	4	1296	912	288	20	2480	962	432	8	1596
763	648	4	880	813	540	4	1088	863	862	2	864	913	820	4	1008	963	636	6	1404
764	380	6	1344	814	360	8	1368	864	288	24	2520	914	456	4	1374	964	480	6	1694
765	384	12	1404	815	648	4	984	865	688	4	1044	915	480	8	1488	965	768	4	1164
766	382	4	1152	816	256	20	2232	866	432	4	1302	916	456	6	1610	966	264	16	2304
767	696	4	840	817	756	4	880	867	544	6	1228	917	780	4	1056	967	966	2	968
768	256	18	2044	818	408	4	1230	868	360	12	1792	918	288	16	2160	968	440	12	1995
769	768	2	770	819	432	12	1456	869	780	4	960	919	918	2	920	969	576	8	1440
770	240	16	1728	820	320	12	1764	870	224	16	2160	920	352	16	2160	970	384	8	1764
771	512	4	1032	821	820	2	822	871	792	4	952	921	612	4	1232	971	970	2	972
772	384	6	1358	822	272	8	1656	872	432	8	1650	922	460	4	1386	972	324	18	2548
773	772	2	774	823	822	2	824	873	576	6	1274	923	840	4	1008	973	828	4	1120
774	252	12	1716	824	408	8	1560	874	396	8	1440	924	240	24	2688	974	486	4	1464
775	600	6	992	825	400	12	1488	875	600	8	1248	925	720	6	1178	975	480	12	1736
776	384	8	1470	826	348	8	1440	876	288	12	2072	926	462	4	1392	976	480	10	1922
777	432	8	1216	827	826	2	828	877	876	2	878	927	612	6	1352	977	976	2	978
778	388	4	1170	828	264	18	2184	878	438	4	1320	928	448	12	1890	978	324	8	1968
779	720	4	840	829	828	2	830	879	584	4	1176	929	928	2	930	979	880	4	1080
780	192	24	2352	830	328	8	1512	880	320	20	2232	930	240	16	2304	980	336	18	2394
781	700	4	864	831	552	4	1112	881	880	2	882	931	756	6	1140	981	648	6	1430
782	352	8	1296	832	384	14	1778	882	252	18	2223	932	464	6	1638	982	490	4	1476
783	504	8	1200	833	672	6	1026	883	882	2	884	933	620	4	1248	983	982	2	984
784	336	15	1767	834	276	8	1680	884	384	12	1764	934	466	4	1404	984	320	16	2520
785	624	4	948	835	664	4	1008	885	464	8	1440	935	640	8	1296	985	784	4	1188
786	260	8	1584	836	360	12	1680	886	442	4	1332	936	288	24	2730	986	448	8	1620
787	786	2	788	837	540	8	1280	887	886	2	888	937	936	2	938	987	552	8	1536
788	392	6	1386	838	418	4	1260	888	288	16	2280	938	396	8	1632	988	432	12	1960
789	524	4	1056	839	838	2	840	889	756	4	1024	939	624	4	1256	989	924	4	1056
790	312	8	1440	840	192	32	2880	890	352	8	1620	940	368	12	2016	990	240	24	2808
791	672	4	912	841	812	3	871	891	540	10	1452	941	940	2	942	991	990	2	992
792	240	24	2340	842	420	4	1266	892	444	6	1568	942	312	8	1896	992	480	12	2016
793	720	4	868	843	560	4	1128	893	828	4	960	943	880	4	1008	993	660	4	1328
794	396	4	1194	844	420	6	1484	894	296	8	1800	944	464	10	1860	994	420	8	1728
795	416	8	1296	845	624	6	1098	895	712	4	1080	945	432	16	1920	995	792	4	1200
796	396	6	1400	846	276	12	1872	896	384	16	2040	946	420	8	1584	996	328	12	2352
797	796	2	798	847	660	6	1064	897	528	8	1344	947	946	2	948	997	996	2	998
798	216	16	1920	848	416	10	1674	898	448	4	1350	948	312	12	2240	998	498	4	1500
799	736	4	864	849	564	4	1136	899	840	4	960	949	864	4	1036	999	648	8	1520
800	320	18	1953	850	320	12	1674	900	240	27	2821	950	360	12	1860	1000	400	16	2340

Таблица 24.7. Разложения на множители

000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
0	—	1	2	3	2^2	5	$2\cdot3$	7	2^3	3^2	0
1	$2\cdot5$	11	$2^2\cdot3$	13	$2\cdot7$	$3\cdot5$	2^4	17	$2\cdot3^2$	19	1
2	$2^2\cdot5$	$3\cdot7$	$2\cdot11$	23	$2^3\cdot3$	5^2	$2\cdot13$	3^3	$2^2\cdot7$	29	2
3	$2\cdot3\cdot5$	31	2^5	$3\cdot11$	$2\cdot17$	$5\cdot7$	$2^2\cdot3^2$	37	$2\cdot19$	$3\cdot13$	3
4	$2^3\cdot5$	41	$2\cdot3\cdot7$	43	$2^2\cdot11$	$3^2\cdot5$	$2\cdot23$	47	$2^4\cdot3$	7^2	4
5	$2\cdot5^2$	$3\cdot17$	$2^2\cdot13$	53	$2\cdot3^3$	$5\cdot11$	$2^3\cdot7$	$3\cdot19$	$2\cdot29$	59	5
6	$2^2\cdot3\cdot5$	61	$2\cdot31$	$3^2\cdot7$	2^6	$5\cdot13$	$2\cdot3\cdot11$	67	$2^2\cdot17$	$3\cdot23$	6
7	$2\cdot5\cdot7$	71	$2^3\cdot3^2$	73	$2\cdot37$	$3\cdot5^2$	$2^2\cdot19$	$7\cdot11$	$2\cdot3\cdot13$	79	7
8	$2^4\cdot5$	3^4	$2\cdot41$	83	$2^2\cdot3\cdot7$	$5\cdot17$	$2\cdot43$	$3\cdot29$	$2^3\cdot11$	89	8
9	$2\cdot3^2\cdot5$	$7\cdot13$	$2^2\cdot23$	$3\cdot31$	$2\cdot47$	$5\cdot19$	$2^5\cdot3$	97	$2\cdot7^2$	$3^2\cdot11$	9
10	$2^2\cdot5^2$	101	$2\cdot3\cdot17$	103	$2^3\cdot13$	$3\cdot5\cdot7$	$2\cdot53$	107	$2^2\cdot3^3$	109	10
11	$2\cdot5\cdot11$	$3\cdot37$	$2^4\cdot7$	113	$2\cdot3\cdot19$	$5\cdot23$	$2^2\cdot29$	$3^2\cdot13$	$2\cdot59$	$7\cdot17$	11
12	$2^3\cdot3\cdot5$	11^2	$2\cdot61$	$3\cdot41$	$2^2\cdot31$	5^3	$2\cdot3^2\cdot7$	127	2^7	$3\cdot43$	12
13	$2\cdot5\cdot13$	131	$2^2\cdot3\cdot11$	$7\cdot19$	$2\cdot67$	$3^3\cdot5$	$2^3\cdot17$	137	$2\cdot3\cdot23$	139	13
14	$2^2\cdot5\cdot7$	$3\cdot47$	$2\cdot71$	$11\cdot13$	$2^4\cdot3^2$	$5\cdot29$	$2\cdot73$	$3\cdot7^2$	$2^2\cdot37$	149	14
15	$2\cdot3\cdot5^2$	151	$2^3\cdot19$	$3^2\cdot17$	$2\cdot7\cdot11$	$5\cdot31$	$2^2\cdot3\cdot13$	157	$2\cdot79$	$3\cdot53$	15
16	$2^5\cdot5$	$7\cdot23$	$2\cdot3^4$	163	$2^2\cdot41$	$3\cdot5\cdot11$	$2\cdot83$	167	$2^3\cdot3\cdot7$	13^2	16
17	$2\cdot5\cdot17$	$3^2\cdot19$	$2^2\cdot43$	173	$2\cdot3\cdot29$	$5^2\cdot7$	$2^4\cdot11$	$3\cdot59$	$2\cdot89$	179	17
18	$2^2\cdot3^2\cdot5$	181	$2\cdot7\cdot13$	$3\cdot61$	$2^3\cdot23$	$5\cdot37$	$2\cdot3\cdot31$	$11\cdot17$	$2^2\cdot47$	$3^3\cdot7$	18
19	$2\cdot5\cdot19$	191	$2^6\cdot3$	193	$2\cdot97$	$3\cdot5\cdot13$	$2^2\cdot7^2$	197	$2\cdot3^2\cdot11$	199	19
20	$2^3\cdot5^2$	$3\cdot67$	$2\cdot101$	$7\cdot29$	$2^2\cdot3\cdot17$	$5\cdot41$	$2\cdot103$	$3^2\cdot23$	$2^4\cdot13$	$11\cdot19$	20
21	$2\cdot3\cdot5\cdot7$	211	$2^2\cdot53$	$3\cdot71$	$2\cdot107$	$5\cdot43$	$2^3\cdot3^3$	$7\cdot31$	$2\cdot109$	$3\cdot73$	21
22	$2^2\cdot5\cdot11$	$13\cdot17$	$2\cdot3\cdot37$	223	$2^5\cdot7$	$3^2\cdot5^2$	$2\cdot113$	227	$2^2\cdot3\cdot19$	229	22
23	$2\cdot5\cdot23$	$3\cdot7\cdot11$	$2^3\cdot29$	233	$2\cdot3^2\cdot13$	$5\cdot47$	$2^2\cdot59$	$3\cdot79$	$2\cdot7\cdot17$	239	23
24	$2^4\cdot3\cdot5$	241	$2\cdot11^2$	3^5	$2^2\cdot61$	$5\cdot7^2$	$2\cdot3\cdot41$	$13\cdot19$	$2^3\cdot31$	$3\cdot83$	24
25	$2\cdot5^3$	251	$2^2\cdot3^2\cdot7$	$11\cdot23$	$2\cdot127$	$3\cdot5\cdot17$	2^8	257	$2\cdot3\cdot43$	$7\cdot37$	25
26	$2^2\cdot5\cdot13$	$3^2\cdot29$	$2\cdot131$	263	$2^3\cdot3\cdot11$	$5\cdot53$	$2\cdot7\cdot19$	$3\cdot89$	$2^2\cdot67$	269	26
27	$2\cdot3^3\cdot5$	271	$2^4\cdot17$	$3\cdot7\cdot13$	$2\cdot137$	$5^2\cdot11$	$2^2\cdot3\cdot23$	277	$2\cdot139$	$3^2\cdot31$	27
28	$2^3\cdot5\cdot7$	281	$2\cdot3\cdot47$	283	$2^2\cdot71$	$3\cdot5\cdot19$	$2\cdot11\cdot13$	$7\cdot41$	$2^5\cdot3^2$	17^2	28
29	$2\cdot5\cdot29$	$3\cdot97$	$2^2\cdot73$	293	$2\cdot3\cdot7^2$	$5\cdot59$	$2^3\cdot37$	$3^3\cdot11$	$2\cdot149$	$13\cdot23$	29
30	$2^2\cdot3\cdot5^2$	$7\cdot43$	$2\cdot151$	$3\cdot101$	$2^4\cdot19$	$5\cdot61$	$2\cdot3^2\cdot17$	307	$2^2\cdot7\cdot11$	$3\cdot103$	30
31	$2\cdot5\cdot31$	311	$2^3\cdot3\cdot13$	313	$2\cdot157$	$3^2\cdot5\cdot7$	$2^2\cdot79$	317	$2\cdot3\cdot53$	$11\cdot29$	31
32	$2^6\cdot5$	$3\cdot107$	$2\cdot7\cdot23$	$17\cdot19$	$2^2\cdot3^4$	$5^2\cdot13$	$2\cdot163$	$3\cdot109$	$2^3\cdot41$	$7\cdot47$	32
33	$2\cdot3\cdot5\cdot11$	331	$2^2\cdot83$	$3^2\cdot37$	$2\cdot167$	$5\cdot67$	$2^4\cdot3\cdot7$	337	$2\cdot13^2$	$3\cdot113$	33
34	$2^2\cdot5\cdot17$	$11\cdot31$	$2\cdot3^2\cdot19$	7^3	$2^3\cdot43$	$3\cdot5\cdot23$	$2\cdot173$	347	$2^2\cdot3\cdot29$	349	34
35	$2\cdot5^2\cdot7$	$3^3\cdot13$	$2^5\cdot11$	353	$2\cdot3\cdot59$	$5\cdot71$	$2^2\cdot89$	$3\cdot7\cdot17$	$2\cdot179$	359	35
36	$2^3\cdot3^2\cdot5$	19^2	$2\cdot181$	$3\cdot11^2$	$2^2\cdot7\cdot13$	$5\cdot73$	$2\cdot3\cdot61$	367	$2^4\cdot23$	$3^2\cdot41$	36
37	$2\cdot5\cdot37$	$7\cdot53$	$2^2\cdot3\cdot31$	373	$2\cdot11\cdot17$	$3\cdot5^3$	$2^3\cdot47$	$13\cdot29$	$2\cdot3^3\cdot7$	379	37
38	$2^2\cdot5\cdot19$	$3\cdot127$	$2\cdot191$	383	$2^7\cdot3$	$5\cdot7\cdot11$	$2\cdot193$	$3^2\cdot43$	$2^2\cdot97$	389	38
39	$2\cdot3\cdot5\cdot13$	$17\cdot23$	$2^3\cdot7^2$	$3\cdot131$	$2\cdot197$	$5\cdot79$	$2^2\cdot3^2\cdot11$	397	$2\cdot199$	$3\cdot7\cdot19$	39
40	$2^4\cdot5^2$	401	$2\cdot3\cdot67$	$13\cdot31$	$2^2\cdot101$	$3^4\cdot5$	$2\cdot7\cdot29$	$11\cdot37$	$2^3\cdot3\cdot17$	409	40
41	$2\cdot5\cdot41$	$3\cdot137$	$2^2\cdot103$	$7\cdot59$	$2\cdot3^2\cdot23$	$5\cdot83$	$2^5\cdot13$	$3\cdot139$	$2\cdot11\cdot19$	419	41
42	$2^2\cdot3\cdot5\cdot7$	421	$2\cdot211$	$3^2\cdot47$	$2^3\cdot53$	$5^2\cdot17$	$2\cdot3\cdot71$	$7\cdot61$	$2^2\cdot107$	$3\cdot11\cdot13$	42
43	$2\cdot5\cdot43$	431	$2^4\cdot3^3$	433	$2\cdot7\cdot31$	$3\cdot5\cdot29$	$2^2\cdot109$	$19\cdot23$	$2\cdot3\cdot73$	439	43
44	$2^3\cdot5\cdot11$	$3^2\cdot7^2$	$2\cdot13\cdot17$	443	$2^2\cdot3\cdot37$	$5\cdot89$	$2\cdot223$	$3\cdot149$	$2^6\cdot7$	449	44
45	$2\cdot3^2\cdot5^2$	$11\cdot41$	$2^2\cdot113$	$3\cdot151$	$2\cdot227$	$5\cdot7\cdot13$	$2^3\cdot3\cdot19$	457	$2\cdot229$	$3^3\cdot17$	45
46	$2^2\cdot5\cdot23$	461	$2\cdot3\cdot7\cdot11$	463	$2^4\cdot29$	$3\cdot5\cdot31$	$2\cdot233$	467	$2^2\cdot3^2\cdot13$	$7\cdot67$	46
47	$2\cdot5\cdot47$	$3\cdot157$	$2^3\cdot59$	$11\cdot43$	$2\cdot3\cdot79$	$5^2\cdot19$	$2^2\cdot7\cdot17$	$3^2\cdot53$	$2\cdot239$	479	47
48	$2^5\cdot3\cdot5$	$13\cdot37$	$2\cdot241$	$3\cdot7\cdot23$	$2^2\cdot11^2$	$5\cdot97$	$2\cdot3^5$	487	$2^3\cdot61$	$3\cdot163$	48
49	$2\cdot5\cdot7^2$	491	$2^2\cdot3\cdot41$	$17\cdot29$	$2\cdot13\cdot19$	$3^2\cdot5\cdot11$	$2^4\cdot31$	$7\cdot71$	$2\cdot3\cdot83$	499	49

499

Взято из [24.20].

500

50	$2^2\cdot5^3$	$3\cdot167$	$2\cdot251$	503	$2^3\cdot3^2\cdot7$	$5\cdot101$	$2\cdot11\cdot23$	$3\cdot13^2$	$2^2\cdot127$	509	50
51	$2\cdot3\cdot5\cdot17$	$7\cdot73$	2^9	$3^3\cdot19$	$2\cdot257$	$5\cdot103$	$2^2\cdot3\cdot43$	$11\cdot47$	$2\cdot7\cdot37$	$3\cdot173$	51
52	$2^3\cdot5\cdot13$	521	$2\cdot3^2\cdot29$	523	$2^2\cdot131$	$3\cdot5^2\cdot7$	$2\cdot263$	$17\cdot31$	$2^4\cdot3\cdot11$	23^2	52
53	$2\cdot5\cdot53$	$3^2\cdot59$	$2^2\cdot7\cdot19$	$13\cdot41$	$2\cdot3\cdot89$	$5\cdot107$	$2^3\cdot67$	$3\cdot179$	$2\cdot269$	$7^2\cdot11$	53
54	$2^2\cdot3^3\cdot5$	541	$2\cdot271$	$3\cdot181$	$2^5\cdot17$	$5\cdot109$	$2\cdot3\cdot7\cdot13$	547	$2^2\cdot137$	$3^2\cdot61$	54
55	$2\cdot5^2\cdot11$	$19\cdot29$	$2^3\cdot3\cdot23$	$7\cdot79$	$2\cdot277$	$3\cdot5\cdot37$	$2^2\cdot139$	557	$2\cdot3^2\cdot31$	$13\cdot43$	55
56	$2^4\cdot5\cdot7$	$3\cdot11\cdot17$	$2\cdot281$	563	$2^2\cdot3\cdot47$	$5\cdot113$	$2\cdot283$	$3^4\cdot7$	$2^3\cdot71$	569	56
57	$2\cdot3\cdot5\cdot19$	571	$2^2\cdot11\cdot13$	$3\cdot191$	$2\cdot7\cdot41$	$5^2\cdot23$	$2^6\cdot3^2$	577	$2\cdot17^2$	$3\cdot193$	57
58	$2^2\cdot5\cdot29$	$7\cdot83$	$2\cdot3\cdot97$	$11\cdot53$	$2^3\cdot73$	$3^2\cdot5\cdot13$	$2\cdot293$	587	$2^2\cdot3\cdot7^2$	$19\cdot31$	58
59	$2\cdot5\cdot59$	$3\cdot197$	$2^4\cdot37$	593	$2\cdot3^3\cdot11$	$5\cdot7\cdot17$	$2^2\cdot149$	$3\cdot199$	$2\cdot13\cdot23$	599	59
60	$2^3\cdot3\cdot5^2$	601	$2\cdot7\cdot43$	$3^2\cdot67$	$2^2\cdot151$	$5\cdot11^2$	$2\cdot3\cdot101$	607	$2^5\cdot19$	$3\cdot7\cdot29$	60
61	$2\cdot5\cdot61$	$13\cdot47$	$2^2\cdot3^2\cdot17$	613	$2\cdot307$	$3\cdot5\cdot41$	$2^3\cdot7\cdot11$	617	$2\cdot3\cdot103$	619	61
62	$2^2\cdot5\cdot31$	$3^3\cdot23$	$2\cdot311$	$7\cdot89$	$2^4\cdot3\cdot13$	5^4	$2\cdot313$	$3\cdot11\cdot19$	$2^2\cdot157$	$17\cdot37$	62
63	$2\cdot3^2\cdot5\cdot7$	631	$2^3\cdot79$	$3\cdot211$	$2\cdot317$	$5\cdot127$	$2^2\cdot3\cdot53$	$7^2\cdot13$	$2\cdot11\cdot29$	$3^2\cdot71$	63
64	$2^7\cdot5$	641	$2\cdot3\cdot107$	643	$2^2\cdot7\cdot23$	$3\cdot5\cdot43$	$2\cdot17\cdot19$	647	$2^3\cdot3^4$	$11\cdot59$	64
65	$2\cdot5^2\cdot13$	$3\cdot7\cdot31$	$2^2\cdot163$	653	$2\cdot3\cdot109$	$5\cdot131$	$2^4\cdot41$	$3^2\cdot73$	$2\cdot7\cdot47$	659	65
66	$2^2\cdot3\cdot5\cdot11$	661	$2\cdot331$	$3\cdot13\cdot17$	$2^3\cdot83$	$5\cdot7\cdot19$	$2\cdot3^2\cdot37$	$23\cdot29$	$2^2\cdot167$	$3\cdot223$	66
67	$2\cdot5\cdot67$	$11\cdot61$	$2^5\cdot3\cdot7$	673	$2\cdot337$	$3^3\cdot5^2$	$2^2\cdot13^2$	677	$2\cdot3\cdot113$	$7\cdot97$	67
68	$2^3\cdot5\cdot17$	$3\cdot227$	$2\cdot11\cdot31$	683	$2^2\cdot3^2\cdot19$	$5\cdot137$	$2\cdot7^3$	$3\cdot229$	$2^4\cdot43$	$13\cdot53$	68
69	$2\cdot3\cdot5\cdot23$	691	$2^2\cdot173$	$3^2\cdot7\cdot11$	$2\cdot347$	$5\cdot139$	$2^3\cdot3\cdot29$	$17\cdot41$	$2\cdot349$	$3\cdot233$	69
70	$2^2\cdot5^2\cdot7$	701	$2\cdot3^3\cdot13$	$19\cdot37$	$2^6\cdot11$	$3\cdot5\cdot47$	$2\cdot353$	$7\cdot101$	$2^2\cdot3\cdot59$	709	70
71	$2\cdot5\cdot71$	$3^2\cdot79$	$2^3\cdot89$	$23\cdot31$	$2\cdot3\cdot7\cdot17$	$5\cdot11\cdot13$	$2^2\cdot179$	$3\cdot239$	$2\cdot359$	719	71
72	$2^4\cdot3^2\cdot5$	$7\cdot103$	$2\cdot19^2$	$3\cdot241$	$2^2\cdot181$	$5^2\cdot29$	$2\cdot3\cdot11^2$	727	$2^3\cdot7\cdot13$	3^6	72
73	$2\cdot5\cdot73$	$17\cdot43$	$2^2\cdot3\cdot61$	733	$2\cdot367$	$3\cdot5\cdot7^2$	$2^5\cdot23$	$11\cdot67$	$2\cdot3^2\cdot41$	739	73
74	$2^2\cdot5\cdot37$	$3\cdot13\cdot19$	$2\cdot7\cdot53$	743	$2^3\cdot3\cdot31$	$5\cdot149$	$2\cdot373$	$3^2\cdot83$	$2^2\cdot11\cdot17$	$7\cdot107$	74
75	$2\cdot3\cdot5^3$	751	$2^4\cdot47$	$3\cdot251$	$2\cdot13\cdot29$	$5\cdot151$	$2^2\cdot3^3\cdot7$	757	$2\cdot379$	$3\cdot11\cdot23$	75
76	$2^3\cdot5\cdot19$	761	$2\cdot3\cdot127$	$7\cdot109$	$2^2\cdot191$	$3^2\cdot5\cdot17$	$2\cdot383$	$13\cdot59$	$2^8\cdot3$	769	76
77	$2\cdot5\cdot7\cdot11$	$3\cdot257$	$2^2\cdot193$	773	$2\cdot3^2\cdot43$	$5^2\cdot31$	$2^3\cdot97$	$3\cdot7\cdot37$	$2\cdot389$	$19\cdot41$	77
78	$2^2\cdot3\cdot5\cdot13$	$11\cdot71$	$2\cdot17\cdot23$	$3^3\cdot29$	$2^4\cdot7^2$	$5\cdot157$	$2\cdot3\cdot131$	787	$2^2\cdot197$	$3\cdot263$	78
79	$2\cdot5\cdot79$	$7\cdot113$	$2^3\cdot3^2\cdot11$	$13\cdot61$	$2\cdot397$	$3\cdot5\cdot53$	$2^2\cdot199$	797	$2\cdot3\cdot7\cdot19$	$17\cdot47$	79
80	$2^5\cdot5^2$	$3^2\cdot89$	$2\cdot401$	$11\cdot73$	$2^2\cdot3\cdot67$	$5\cdot7\cdot23$	$2\cdot13\cdot31$	$3\cdot269$	$2^3\cdot101$	809	80
81	$2\cdot3^4\cdot5$	811	$2^2\cdot7\cdot29$	$3\cdot271$	$2\cdot11\cdot37$	$5\cdot163$	$2^4\cdot3\cdot17$	$19\cdot43$	$2\cdot409$	$3^2\cdot7\cdot13$	81
82	$2^2\cdot5\cdot41$	821	$2\cdot3\cdot137$	823	$2^3\cdot103$	$3\cdot5^2\cdot11$	$2\cdot7\cdot59$	827	$2^2\cdot3^2\cdot23$	829	82
83	$2\cdot5\cdot83$	$3\cdot277$	$2^6\cdot13$	$7^2\cdot17$	$2\cdot3\cdot139$	$5\cdot167$	$2^2\cdot11\cdot19$	$3^3\cdot31$	$2\cdot419$	839	83
84	$2^3\cdot3\cdot5\cdot7$	29^2	$2\cdot421$	$3\cdot281$	$2^2\cdot211$	$5\cdot13^2$	$2\cdot3^2\cdot47$	$7\cdot11^2$	$2^4\cdot53$	$3\cdot283$	84
85	$2\cdot5^2\cdot17$	$23\cdot37$	$2^2\cdot3\cdot71$	853	$2\cdot7\cdot61$	$3^2\cdot5\cdot19$	$2^3\cdot107$	857	$2\cdot3\cdot11\cdot13$	859	85
86	$2^2\cdot5\cdot43$	$3\cdot7\cdot41$	$2\cdot431$	863	$2^5\cdot3^3$	$5\cdot173$	$2\cdot433$	$3\cdot17^2$	$2^2\cdot7\cdot31$	$11\cdot79$	86
87	$2\cdot3\cdot5\cdot29$	$13\cdot67$	$2^3\cdot109$	$3^2\cdot97$	$2\cdot19\cdot23$	$5^3\cdot7$	$2^2\cdot3\cdot73$	877	$2\cdot439$	$3\cdot293$	87
88	$2^4\cdot5\cdot11$	881	$2\cdot3^2\cdot7^2$	883	$2^2\cdot13\cdot17$	$3\cdot5\cdot59$	$2\cdot443$	887	$2^3\cdot3\cdot37$	$7\cdot127$	88
89	$2\cdot5\cdot89$	$3^4\cdot11$	$2^2\cdot223$	$19\cdot47$	$2\cdot3\cdot149$	$5\cdot179$	$2^7\cdot7$	$3\cdot13\cdot23$	$2\cdot449$	$29\cdot31$	89
90	$2^2\cdot3^2\cdot5^2$	$17\cdot53$	$2\cdot11\cdot41$	$3\cdot7\cdot43$	$2^3\cdot113$	$5\cdot181$	$2\cdot3\cdot151$	907	$2^2\cdot227$	$3^2\cdot101$	90
91	$2\cdot5\cdot7\cdot13$	911	$2^4\cdot3\cdot19$	$11\cdot83$	$2\cdot457$	$3\cdot5\cdot61$	$2^2\cdot229$	$7\cdot131$	$2\cdot3^3\cdot17$	919	91
92	$2^3\cdot5\cdot23$	$3\cdot307$	$2\cdot461$	$13\cdot71$	$2^2\cdot3\cdot7\cdot11$	$5^2\cdot37$	$2\cdot463$	$3^2\cdot103$	$2^5\cdot29$	929	92
93	$2\cdot3\cdot5\cdot31$	$7^2\cdot19$	$2^2\cdot233$	$3\cdot311$	$2\cdot467$	$5\cdot11\cdot17$	$2^3\cdot3^2\cdot13$	937	$2\cdot7\cdot67$	$3\cdot313$	93
94	$2^2\cdot5\cdot47$	941	$2\cdot3\cdot157$	$23\cdot41$	$2^4\cdot59$	$3^3\cdot5\cdot7$	$2\cdot11\cdot43$	947	$2^2\cdot3\cdot79$	$13\cdot73$	94
95	$2\cdot5^2\cdot19$	$3\cdot317$	$2^3\cdot7\cdot17$	953	$2\cdot3^2\cdot53$	$5\cdot191$	$2^2\cdot239$	$3\cdot11\cdot29$	$2\cdot479$	$7\cdot137$	95
96	$2^6\cdot3\cdot5$	31^2	$2\cdot13\cdot37$	$3^2\cdot107$	$2^2\cdot241$	$5\cdot193$	$2\cdot3\cdot7\cdot23$	967	$2^3\cdot11^2$	$3\cdot17\cdot19$	96
97	$2\cdot5\cdot97$	971	$2^2\cdot3^5$	$7\cdot139$	$2\cdot487$	$3\cdot5^2\cdot13$	$2^4\cdot61$	977	$2\cdot3\cdot163$	$11\cdot89$	97
98	$2^2\cdot5\cdot7^2$	$3^2\cdot109$	$2\cdot491$	983	$2^3\cdot3\cdot41$	$5\cdot197$	$2\cdot17\cdot29$	$3\cdot7\cdot47$	$2^2\cdot13\cdot19$	$23\cdot43$	98
99	$2\cdot3^2\cdot5\cdot11$	991	$2^5\cdot31$	$3\cdot331$	$2\cdot7\cdot71$	$5\cdot199$	$2^2\cdot3\cdot83$	997	$2\cdot499$	$3^3\cdot37$	99

999

Таблица 24.7. Разложения на множители

1000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
100	$2^3\cdot5^3$	$7\cdot11\cdot13$	$2\cdot3\cdot167$	$17\cdot59$	$2^2\cdot251$	$3\cdot5\cdot67$	$2\cdot503$	$19\cdot53$	$2^4\cdot3^2\cdot7$	**1009**	100
101	$2\cdot5\cdot101$	$3\cdot337$	$2^2\cdot11\cdot23$	**1013**	$2\cdot3\cdot13^2$	$5\cdot7\cdot29$	$2^3\cdot127$	$3^2\cdot113$	$2\cdot509$	**1019**	101
102	$2^2\cdot3\cdot5\cdot17$	**1021**	$2\cdot7\cdot73$	$3\cdot11\cdot31$	2^{10}	$5^2\cdot41$	$2\cdot3^3\cdot19$	$13\cdot79$	$2^2\cdot257$	$3\cdot7^3$	102
103	$2\cdot5\cdot103$	**1031**	$2^3\cdot3\cdot43$	**1033**	$2\cdot11\cdot47$	$3^2\cdot5\cdot23$	$2^2\cdot7\cdot37$	$17\cdot61$	$2\cdot3\cdot173$	**1039**	103
104	$2^4\cdot5\cdot13$	$3\cdot347$	$2\cdot521$	$7\cdot149$	$2^2\cdot3^2\cdot29$	$5\cdot11\cdot19$	$2\cdot523$	$3\cdot349$	$2^3\cdot131$	**1049**	104
105	$2\cdot3\cdot5^2\cdot7$	**1051**	$2^2\cdot263$	$3^4\cdot13$	$2\cdot17\cdot31$	$5\cdot211$	$2^5\cdot3\cdot11$	$7\cdot151$	$2\cdot23^2$	$3\cdot353$	105
106	$2^2\cdot5\cdot53$	**1061**	$2\cdot3^2\cdot59$	**1063**	$2^3\cdot7\cdot19$	$3\cdot5\cdot71$	$2\cdot13\cdot41$	$11\cdot97$	$2^2\cdot3\cdot89$	**1069**	106
107	$2\cdot5\cdot107$	$3^2\cdot7\cdot17$	$2^4\cdot67$	$29\cdot37$	$2\cdot3\cdot179$	$5^2\cdot43$	$2^2\cdot269$	$3\cdot359$	$2\cdot7^2\cdot11$	$13\cdot83$	107
108	$2^3\cdot3^3\cdot5$	$23\cdot47$	$2\cdot541$	$3\cdot19^2$	$2^2\cdot271$	$5\cdot7\cdot31$	$2\cdot3\cdot181$	**1087**	$2^6\cdot17$	$3^2\cdot11^2$	108
109	$2\cdot5\cdot109$	**1091**	$2^2\cdot3\cdot7\cdot13$	**1093**	$2\cdot547$	$3\cdot5\cdot73$	$2^3\cdot137$	**1097**	$2\cdot3^2\cdot61$	$7\cdot157$	109
110	$2^2\cdot5^2\cdot11$	$3\cdot367$	$2\cdot19\cdot29$	**1103**	$2^4\cdot3\cdot23$	$5\cdot13\cdot17$	$2\cdot7\cdot79$	$3^3\cdot41$	$2^2\cdot277$	**1109**	110
111	$2\cdot3\cdot5\cdot37$	$11\cdot101$	$2^3\cdot139$	$3\cdot7\cdot53$	$2\cdot557$	$5\cdot223$	$2^2\cdot3^2\cdot31$	**1117**	$2\cdot13\cdot43$	$3\cdot373$	111
112	$2^5\cdot5\cdot7$	$19\cdot59$	$2\cdot3\cdot11\cdot17$	**1123**	$2^2\cdot281$	$3^2\cdot5^3$	$2\cdot563$	$7^2\cdot23$	$2^3\cdot3\cdot47$	**1129**	112
113	$2\cdot5\cdot113$	$3\cdot13\cdot29$	$2^2\cdot283$	$11\cdot103$	$2\cdot3^4\cdot7$	$5\cdot227$	$2^4\cdot71$	$3\cdot379$	$2\cdot569$	$17\cdot67$	113
114	$2^2\cdot3\cdot5\cdot19$	$7\cdot163$	$2\cdot571$	$3^2\cdot127$	$2^3\cdot11\cdot13$	$5\cdot229$	$2\cdot3\cdot191$	$31\cdot37$	$2^2\cdot7\cdot41$	$3\cdot383$	114
115	$2\cdot5^2\cdot23$	**1151**	$2^7\cdot3^2$	**1153**	$2\cdot577$	$3\cdot5\cdot7\cdot11$	$2^2\cdot17^2$	$13\cdot89$	$2\cdot3\cdot193$	$19\cdot61$	115
116	$2^3\cdot5\cdot29$	$3^3\cdot43$	$2\cdot7\cdot83$	**1163**	$2^2\cdot3\cdot97$	$5\cdot233$	$2\cdot11\cdot53$	$3\cdot389$	$2^4\cdot73$	$7\cdot167$	116
117	$2\cdot3^2\cdot5\cdot13$	**1171**	$2^2\cdot293$	$3\cdot17\cdot23$	$2\cdot587$	$5^2\cdot47$	$2^3\cdot3\cdot7^2$	$11\cdot107$	$2\cdot19\cdot31$	$3^2\cdot131$	117
118	$2^2\cdot5\cdot59$	**1181**	$2\cdot3\cdot197$	$7\cdot13^2$	$2^5\cdot37$	$3\cdot5\cdot79$	$2\cdot593$	**1187**	$2^2\cdot3^3\cdot11$	$29\cdot41$	118
119	$2\cdot5\cdot7\cdot17$	$3\cdot397$	$2^3\cdot149$	**1193**	$2\cdot3\cdot199$	$5\cdot239$	$2^2\cdot13\cdot23$	$3^2\cdot7\cdot19$	$2\cdot599$	$11\cdot109$	119
120	$2^4\cdot3\cdot5^2$	**1201**	$2\cdot601$	$3\cdot401$	$2^2\cdot7\cdot43$	$5\cdot241$	$2\cdot3^2\cdot67$	$17\cdot71$	$2^3\cdot151$	$3\cdot13\cdot31$	120
121	$2\cdot5\cdot11^2$	$7\cdot173$	$2^2\cdot3\cdot101$	**1213**	$2\cdot607$	$3^5\cdot5$	$2^6\cdot19$	**1217**	$2\cdot3\cdot7\cdot29$	$23\cdot53$	121
122	$2^2\cdot5\cdot61$	$3\cdot11\cdot37$	$2\cdot13\cdot47$	**1223**	$2^3\cdot3^2\cdot17$	$5^2\cdot7^2$	$2\cdot613$	$3\cdot409$	$2^2\cdot307$	**1229**	122
123	$2\cdot3\cdot5\cdot41$	**1231**	$2^4\cdot7\cdot11$	$3^2\cdot137$	$2\cdot617$	$5\cdot13\cdot19$	$2^2\cdot3\cdot103$	**1237**	$2\cdot619$	$3\cdot7\cdot59$	123
124	$2^3\cdot5\cdot31$	$17\cdot73$	$2\cdot3^3\cdot23$	$11\cdot113$	$2^2\cdot311$	$3\cdot5\cdot83$	$2\cdot7\cdot89$	$29\cdot43$	$2^5\cdot3\cdot13$	**1249**	124
125	$2\cdot5^4$	$3^2\cdot139$	$2^2\cdot313$	$7\cdot179$	$2\cdot3\cdot11\cdot19$	$5\cdot251$	$2^3\cdot157$	$3\cdot419$	$2\cdot17\cdot37$	**1259**	125
126	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7$	$13\cdot97$	$2\cdot631$	$3\cdot421$	$2^4\cdot79$	$5\cdot11\cdot23$	$2\cdot3\cdot211$	$7\cdot181$	$2^2\cdot317$	$3^3\cdot47$	126
127	$2\cdot5\cdot127$	$31\cdot41$	$2^3\cdot3\cdot53$	$19\cdot67$	$2\cdot7^2\cdot13$	$3\cdot5^2\cdot17$	$2^2\cdot11\cdot29$	**1277**	$2\cdot3^2\cdot71$	**1279**	127
128	$2^8\cdot5$	$3\cdot7\cdot61$	$2\cdot641$	**1283**	$2^2\cdot3\cdot107$	$5\cdot257$	$2\cdot643$	$3^2\cdot11\cdot13$	$2^3\cdot7\cdot23$	**1289**	128
129	$2\cdot3\cdot5\cdot43$	**1291**	$2^2\cdot17\cdot19$	$3\cdot431$	$2\cdot647$	$5\cdot7\cdot37$	$2^4\cdot3^4$	**1297**	$2\cdot11\cdot59$	$3\cdot433$	129
130	$2^2\cdot5^2\cdot13$	**1301**	$2\cdot3\cdot7\cdot31$	**1303**	$2^3\cdot163$	$3^2\cdot5\cdot29$	$2\cdot653$	**1307**	$2^2\cdot3\cdot109$	$7\cdot11\cdot17$	130
131	$2\cdot5\cdot131$	$3\cdot19\cdot23$	$2^5\cdot41$	$13\cdot101$	$2\cdot3^2\cdot73$	$5\cdot263$	$2^2\cdot7\cdot47$	$3\cdot439$	$2\cdot659$	**1319**	131
132	$2^3\cdot3\cdot5\cdot11$	**1321**	$2\cdot661$	$3^3\cdot7^2$	$2^2\cdot331$	$5^2\cdot53$	$2\cdot3\cdot13\cdot17$	**1327**	$2^4\cdot83$	$3\cdot443$	132
133	$2\cdot5\cdot7\cdot19$	11^3	$2^2\cdot3^2\cdot37$	$31\cdot43$	$2\cdot23\cdot29$	$3\cdot5\cdot89$	$2^3\cdot167$	$7\cdot191$	$2\cdot3\cdot223$	$13\cdot103$	133
134	$2^2\cdot5\cdot67$	$3^2\cdot149$	$2\cdot11\cdot61$	$17\cdot79$	$2^6\cdot3\cdot7$	$5\cdot269$	$2\cdot673$	$3\cdot449$	$2^2\cdot337$	$19\cdot71$	134
135	$2\cdot3^3\cdot5^2$	$7\cdot193$	$2^3\cdot13^2$	$3\cdot11\cdot41$	$2\cdot677$	$5\cdot271$	$2^2\cdot3\cdot113$	$23\cdot59$	$2\cdot7\cdot97$	$3^2\cdot151$	135
136	$2^4\cdot5\cdot17$	**1361**	$2\cdot3\cdot227$	$29\cdot47$	$2^2\cdot11\cdot31$	$3\cdot5\cdot7\cdot13$	$2\cdot683$	**1367**	$2^3\cdot3^2\cdot19$	37^2	136
137	$2\cdot5\cdot137$	$3\cdot457$	$2^2\cdot7^3$	**1373**	$2\cdot3\cdot229$	$5^3\cdot11$	$2^5\cdot43$	$3^4\cdot17$	$2\cdot13\cdot53$	$7\cdot197$	137
138	$2^2\cdot3\cdot5\cdot23$	**1381**	$2\cdot691$	$3\cdot461$	$2^3\cdot173$	$5\cdot277$	$2\cdot3^2\cdot7\cdot11$	$19\cdot73$	$2^2\cdot347$	$3\cdot463$	138
139	$2\cdot5\cdot139$	$13\cdot107$	$2^4\cdot3\cdot29$	$7\cdot199$	$2\cdot17\cdot41$	$3^2\cdot5\cdot31$	$2^2\cdot349$	$11\cdot127$	$2\cdot3\cdot233$	**1399**	139
140	$2^3\cdot5^2\cdot7$	$3\cdot467$	$2\cdot701$	$23\cdot61$	$2^2\cdot3^3\cdot13$	$5\cdot281$	$2\cdot19\cdot37$	$3\cdot7\cdot67$	$2^7\cdot11$	**1409**	140
141	$2\cdot3\cdot5\cdot47$	$17\cdot83$	$2^2\cdot353$	$3^2\cdot157$	$2\cdot7\cdot101$	$5\cdot283$	$2^3\cdot3\cdot59$	$13\cdot109$	$2\cdot709$	$3\cdot11\cdot43$	141
142	$2^2\cdot5\cdot71$	$7^2\cdot29$	$2\cdot3^2\cdot79$	**1423**	$2^4\cdot89$	$3\cdot5^2\cdot19$	$2\cdot23\cdot31$	**1427**	$2^2\cdot3\cdot7\cdot17$	**1429**	142
143	$2\cdot5\cdot11\cdot13$	$3^3\cdot53$	$2^3\cdot179$	**1433**	$2\cdot3\cdot239$	$5\cdot7\cdot41$	$2^2\cdot359$	$3\cdot479$	$2\cdot719$	**1439**	143
144	$2^5\cdot3^2\cdot5$	$11\cdot131$	$2\cdot7\cdot103$	$3\cdot13\cdot37$	$2^2\cdot19^2$	$5\cdot17^2$	$2\cdot3\cdot241$	**1447**	$2^3\cdot181$	$3^2\cdot7\cdot23$	144
145	$2\cdot5^2\cdot29$	**1451**	$2^2\cdot3\cdot11^2$	**1453**	$2\cdot727$	$3\cdot5\cdot97$	$2^4\cdot7\cdot13$	$31\cdot47$	$2\cdot3^6$	**1459**	145
146	$2^2\cdot5\cdot73$	$3\cdot487$	$2\cdot17\cdot43$	$7\cdot11\cdot19$	$2^3\cdot3\cdot61$	$5\cdot293$	$2\cdot733$	$3^2\cdot163$	$2^2\cdot367$	$13\cdot113$	146
147	$2\cdot3\cdot5\cdot7^2$	**1471**	$2^6\cdot23$	$3\cdot491$	$2\cdot11\cdot67$	$5^2\cdot59$	$2^2\cdot3^2\cdot41$	$7\cdot211$	$2\cdot739$	$3\cdot17\cdot29$	147
148	$2^3\cdot5\cdot37$	**1481**	$2\cdot3\cdot13\cdot19$	**1483**	$2^2\cdot7\cdot53$	$3^3\cdot5\cdot11$	$2\cdot743$	**1487**	$2^4\cdot3\cdot31$	**1489**	148
149	$2\cdot5\cdot149$	$3\cdot7\cdot71$	$2^2\cdot373$	**1493**	$2\cdot3^2\cdot83$	$5\cdot13\cdot23$	$2^3\cdot11\cdot17$	$3\cdot499$	$2\cdot7\cdot107$	**1499**	149

1499

1500

150	$2^2\cdot3\cdot5^3$	$19\cdot79$	$2\cdot751$	$3^2\cdot167$	$2^5\cdot47$	$5\cdot7\cdot43$	$2\cdot3\cdot251$	$11\cdot137$	$2^2\cdot13\cdot29$	$3\cdot503$	150
151	$2\cdot5\cdot151$	**1511**	$2^3\cdot3^3\cdot7$	$17\cdot89$	$2\cdot757$	$3\cdot5\cdot101$	$2^2\cdot379$	$37\cdot41$	$2\cdot3\cdot11\cdot23$	$7^2\cdot31$	151
152	$2^4\cdot5\cdot19$	$3^2\cdot13^2$	$2\cdot761$	**1523**	$2^2\cdot3\cdot127$	$5^2\cdot61$	$2\cdot7\cdot109$	$3\cdot509$	$2^3\cdot191$	$11\cdot139$	152
153	$2\cdot3^2\cdot5\cdot17$	**1531**	$2^2\cdot383$	$3\cdot7\cdot73$	$2\cdot13\cdot59$	$5\cdot307$	$2^9\cdot3$	$29\cdot53$	$2\cdot769$	$3^4\cdot19$	153
154	$2^2\cdot5\cdot7\cdot11$	$23\cdot67$	$2\cdot3\cdot257$	**1543**	$2^3\cdot193$	$3\cdot5\cdot103$	$2\cdot773$	$7\cdot13\cdot17$	$2^2\cdot3^2\cdot43$	**1549**	154
155	$2\cdot5^2\cdot31$	$3\cdot11\cdot47$	$2^4\cdot97$	**1553**	$2\cdot3\cdot7\cdot37$	$5\cdot311$	$2^2\cdot389$	$3^2\cdot173$	$2\cdot19\cdot41$	**1559**	155
156	$2^3\cdot3\cdot5\cdot13$	$7\cdot223$	$2\cdot11\cdot71$	$3\cdot521$	$2^2\cdot17\cdot23$	$5\cdot313$	$2\cdot3^3\cdot29$	**1567**	$2^5\cdot7^2$	$3\cdot523$	156
157	$2\cdot5\cdot157$	**1571**	$2^2\cdot3\cdot131$	$11^2\cdot13$	$2\cdot787$	$3^2\cdot5^2\cdot7$	$2^3\cdot197$	$19\cdot83$	$2\cdot3\cdot263$	**1579**	157
158	$2^2\cdot5\cdot79$	$3\cdot17\cdot31$	$2\cdot7\cdot113$	**1583**	$2^4\cdot3^2\cdot11$	$5\cdot317$	$2\cdot13\cdot61$	$3\cdot23^2$	$2^2\cdot397$	$7\cdot227$	158
159	$2\cdot3\cdot5\cdot53$	$37\cdot43$	$2^3\cdot199$	$3^3\cdot59$	$2\cdot797$	$5\cdot11\cdot29$	$2^2\cdot3\cdot7\cdot19$	**1597**	$2\cdot17\cdot47$	$3\cdot13\cdot41$	159
160	$2^6\cdot5^2$	**1601**	$2\cdot3^2\cdot89$	$7\cdot229$	$2^2\cdot401$	$3\cdot5\cdot107$	$2\cdot11\cdot73$	**1607**	$2^3\cdot3\cdot67$	**1609**	160
161	$2\cdot5\cdot7\cdot23$	$3^2\cdot179$	$2^2\cdot13\cdot31$	**1613**	$2\cdot3\cdot269$	$5\cdot17\cdot19$	$2^4\cdot101$	$3\cdot7^2\cdot11$	$2\cdot809$	**1619**	161
162	$2^2\cdot3^4\cdot5$	**1621**	$2\cdot811$	$3\cdot541$	$2^3\cdot7\cdot29$	$5^4\cdot13$	$2\cdot3\cdot271$	**1627**	$2^2\cdot11\cdot37$	$3^2\cdot181$	162
163	$2\cdot5\cdot163$	$7\cdot233$	$2^5\cdot3\cdot17$	$23\cdot71$	$2\cdot19\cdot43$	$3\cdot5\cdot109$	$2^2\cdot409$	**1637**	$2\cdot3^2\cdot7\cdot13$	$11\cdot149$	163
164	$2^3\cdot5\cdot41$	$3\cdot547$	$2\cdot821$	$31\cdot53$	$2^2\cdot3\cdot137$	$5\cdot7\cdot47$	$2\cdot823$	$3^3\cdot61$	$2^4\cdot103$	$17\cdot97$	164
165	$2\cdot3\cdot5^2\cdot11$	$13\cdot127$	$2^2\cdot7\cdot59$	$3\cdot19\cdot29$	$2\cdot827$	$5\cdot331$	$2^3\cdot3^2\cdot23$	**1657**	$2\cdot829$	$3\cdot7\cdot79$	165
166	$2^2\cdot5\cdot83$	$11\cdot151$	$2\cdot3\cdot277$	**1663**	$2^7\cdot13$	$3^2\cdot5\cdot37$	$2\cdot7^2\cdot17$	**1667**	$2^2\cdot3\cdot139$	**1669**	166
167	$2\cdot5\cdot167$	$3\cdot557$	$2^3\cdot11\cdot19$	$7\cdot239$	$2\cdot3^3\cdot31$	$5^2\cdot67$	$2^2\cdot419$	$3\cdot13\cdot43$	$2\cdot839$	$23\cdot73$	167
168	$2^4\cdot3\cdot5\cdot7$	41^2	$2\cdot29^2$	$3^2\cdot11\cdot17$	$2^2\cdot421$	$5\cdot337$	$2\cdot3\cdot281$	$7\cdot241$	$2^3\cdot211$	$3\cdot563$	168
169	$2\cdot5\cdot13^2$	$19\cdot89$	$2^2\cdot3^2\cdot47$	**1693**	$2\cdot7\cdot11^2$	$3\cdot5\cdot113$	$2^5\cdot53$	**1697**	$2\cdot3\cdot283$	**1699**	169
170	$2^2\cdot5^2\cdot17$	$3^5\cdot7$	$2\cdot23\cdot37$	$13\cdot131$	$2^3\cdot3\cdot71$	$5\cdot11\cdot31$	$2\cdot853$	$3\cdot569$	$2^2\cdot7\cdot61$	**1709**	170
171	$2\cdot3^2\cdot5\cdot19$	$29\cdot59$	$2^4\cdot107$	$3\cdot571$	$2\cdot857$	$5\cdot7^3$	$2^2\cdot3\cdot11\cdot13$	$17\cdot101$	$2\cdot859$	$3^2\cdot191$	171
172	$2^3\cdot5\cdot43$	**1721**	$2\cdot3\cdot7\cdot41$	**1723**	$2^2\cdot431$	$3\cdot5^2\cdot23$	$2\cdot863$	$11\cdot157$	$2^6\cdot3^3$	$7\cdot13\cdot19$	172
173	$2\cdot5\cdot173$	$3\cdot577$	$2^2\cdot433$	**1733**	$2\cdot3\cdot17^2$	$5\cdot347$	$2^3\cdot7\cdot31$	$3^2\cdot193$	$2\cdot11\cdot79$	$37\cdot47$	173
174	$2^2\cdot3\cdot5\cdot29$	**1741**	$2\cdot13\cdot67$	$3\cdot7\cdot83$	$2^4\cdot109$	$5\cdot349$	$2\cdot3^2\cdot97$	**1747**	$2^2\cdot19\cdot23$	$3\cdot11\cdot53$	174
175	$2\cdot5^3\cdot7$	$17\cdot103$	$2^3\cdot3\cdot73$	**1753**	$2\cdot877$	$3^3\cdot5\cdot13$	$2^2\cdot439$	$7\cdot251$	$2\cdot3\cdot293$	**1759**	175
176	$2^5\cdot5\cdot11$	$3\cdot587$	$2\cdot881$	$41\cdot43$	$2^2\cdot3^2\cdot7^2$	$5\cdot353$	$2\cdot883$	$3\cdot19\cdot31$	$2^3\cdot13\cdot17$	$29\cdot61$	176
177	$2\cdot3\cdot5\cdot59$	$7\cdot11\cdot23$	$2^2\cdot443$	$3^2\cdot197$	$2\cdot887$	$5^2\cdot71$	$2^4\cdot3\cdot37$	**1777**	$2\cdot7\cdot127$	$3\cdot593$	177
178	$2^2\cdot5\cdot89$	$13\cdot137$	$2\cdot3^4\cdot11$	**1783**	$2^3\cdot223$	$3\cdot5\cdot7\cdot17$	$2\cdot19\cdot47$	**1787**	$2^2\cdot3\cdot149$	**1789**	178
179	$2\cdot5\cdot179$	$3^2\cdot199$	$2^8\cdot7$	$11\cdot163$	$2\cdot3\cdot13\cdot23$	$5\cdot359$	$2^2\cdot449$	$3\cdot599$	$2\cdot29\cdot31$	$7\cdot257$	179
180	$2^3\cdot3^2\cdot5^2$	**1801**	$2\cdot17\cdot53$	$3\cdot601$	$2^2\cdot11\cdot41$	$5\cdot19^2$	$2\cdot3\cdot7\cdot43$	$13\cdot139$	$2^4\cdot113$	$3^3\cdot67$	180
181	$2\cdot5\cdot181$	**1811**	$2^2\cdot3\cdot151$	$7^2\cdot37$	$2\cdot907$	$3\cdot5\cdot11^2$	$2^3\cdot227$	$23\cdot79$	$2\cdot3^2\cdot101$	$17\cdot107$	181
182	$2^2\cdot5\cdot7\cdot13$	$3\cdot607$	$2\cdot911$	**1823**	$2^5\cdot3\cdot19$	$5^2\cdot73$	$2\cdot11\cdot83$	$3^2\cdot7\cdot29$	$2^2\cdot457$	$31\cdot59$	182
183	$2\cdot3\cdot5\cdot61$	**1831**	$2^3\cdot229$	$3\cdot13\cdot47$	$2\cdot7\cdot131$	$5\cdot367$	$2^2\cdot3^3\cdot17$	$11\cdot167$	$2\cdot919$	$3\cdot613$	183
184	$2^4\cdot5\cdot23$	$7\cdot263$	$2\cdot3\cdot307$	$19\cdot97$	$2^2\cdot461$	$3^2\cdot5\cdot41$	$2\cdot13\cdot71$	**1847**	$2^3\cdot3\cdot7\cdot11$	43^2	184
185	$2\cdot5^2\cdot37$	$3\cdot617$	$2^2\cdot463$	$17\cdot109$	$2\cdot3^2\cdot103$	$5\cdot7\cdot53$	$2^6\cdot29$	$3\cdot619$	$2\cdot929$	$11\cdot13^2$	185
186	$2^2\cdot3\cdot5\cdot31$	**1861**	$2\cdot7^2\cdot19$	$3^4\cdot23$	$2^3\cdot233$	$5\cdot373$	$2\cdot3\cdot311$	**1867**	$2^2\cdot467$	$3\cdot7\cdot89$	186
187	$2\cdot5\cdot11\cdot17$	**1871**	$2^4\cdot3^2\cdot13$	**1873**	$2\cdot937$	$3\cdot5^4$	$2^2\cdot7\cdot67$	**1877**	$2\cdot3\cdot313$	**1879**	187
188	$2^3\cdot5\cdot47$	$3^2\cdot11\cdot19$	$2\cdot941$	$7\cdot269$	$2^2\cdot3\cdot157$	$5\cdot13\cdot29$	$2\cdot23\cdot41$	$3\cdot17\cdot37$	$2^5\cdot59$	**1889**	188
189	$2\cdot3^3\cdot5\cdot7$	$31\cdot61$	$2^2\cdot11\cdot43$	$3\cdot631$	$2\cdot947$	$5\cdot379$	$2^3\cdot3\cdot79$	$7\cdot271$	$2\cdot13\cdot73$	$3^2\cdot211$	189
190	$2^2\cdot5^2\cdot19$	**1901**	$2\cdot3\cdot317$	$11\cdot173$	$2^4\cdot7\cdot17$	$3\cdot5\cdot127$	$2\cdot953$	**1907**	$2^2\cdot3^2\cdot53$	$23\cdot83$	190
191	$2\cdot5\cdot191$	$3\cdot7^2\cdot13$	$2^3\cdot239$	**1913**	$2\cdot3\cdot11\cdot29$	$5\cdot383$	$2^2\cdot479$	$3^3\cdot71$	$2\cdot7\cdot137$	$19\cdot101$	191
192	$2^7\cdot3\cdot5$	$17\cdot113$	$2\cdot31^2$	$3\cdot641$	$2^2\cdot13\cdot37$	$5^2\cdot7\cdot11$	$2\cdot3^2\cdot107$	$41\cdot47$	$2^3\cdot241$	$3\cdot643$	192
193	$2\cdot5\cdot193$	**1931**	$2^2\cdot3\cdot7\cdot23$	**1933**	$2\cdot967$	$3^2\cdot5\cdot43$	$2^4\cdot11^2$	$13\cdot149$	$2\cdot3\cdot17\cdot19$	$7\cdot277$	193
194	$2^2\cdot5\cdot97$	$3\cdot647$	$2\cdot971$	$29\cdot67$	$2^3\cdot3^5$	$5\cdot389$	$2\cdot7\cdot139$	$3\cdot11\cdot59$	$2^2\cdot487$	**1949**	194
195	$2\cdot3\cdot5^2\cdot13$	**1951**	$2^5\cdot61$	$3^2\cdot7\cdot31$	$2\cdot977$	$5\cdot17\cdot23$	$2^2\cdot3\cdot163$	$19\cdot103$	$2\cdot11\cdot89$	$3\cdot653$	195
196	$2^3\cdot5\cdot7^2$	$37\cdot53$	$2\cdot3^2\cdot109$	$13\cdot151$	$2^2\cdot491$	$3\cdot5\cdot131$	$2\cdot983$	$7\cdot281$	$2^4\cdot3\cdot41$	$11\cdot179$	196
197	$2\cdot5\cdot197$	$3^3\cdot73$	$2^2\cdot17\cdot29$	**1978**	$2\cdot3\cdot7\cdot47$	$5^2\cdot79$	$2^3\cdot13\cdot19$	$3\cdot659$	$2\cdot23\cdot43$	**1979**	197
198	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11$	$7\cdot283$	$2\cdot991$	$3\cdot661$	$2^6\cdot31$	$5\cdot397$	$2\cdot3\cdot331$	**1987**	$2^2\cdot7\cdot71$	$3^2\cdot13\cdot17$	198
199	$2\cdot5\cdot199$	$11\cdot181$	$2^3\cdot3\cdot83$	**1993**	$2\cdot997$	$3\cdot5\cdot7\cdot19$	$2^2\cdot499$	**1997**	$2\cdot3^3\cdot37$	**1999**	199

1999

Таблица 24.7. Разложения на множители

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
200	$2^4\cdot5^3$	3·23·29	2·7·11·13	2003	$2^2\cdot3\cdot167$	5·401	2·17·59	$3^2\cdot223$	$2^3\cdot251$	$7^2\cdot41$	200
201	2·3·5·67	2011	$2^2\cdot503$	3·11·61	2·19·53	5·13·31	$2^5\cdot3^2\cdot7$	2017	2·1009	3·673	201
202	$2^2\cdot5\cdot101$	43·47	2·3·337	$7\cdot17^2$	$2^3\cdot11\cdot23$	$3^4\cdot5^2$	2·1013	2027	$2^2\cdot3\cdot13^2$	2029	202
203	2·5·7·29	3·677	$2^4\cdot127$	19·107	$2\cdot3^2\cdot113$	5·11·37	$2^2\cdot509$	3·7·97	2·1019	2039	203
204	$2^3\cdot3\cdot5\cdot17$	13·157	2·1021	$3^2\cdot227$	$2^2\cdot7\cdot73$	5·409	2·3·11·31	23·89	2^{11}	3·683	204
205	$2\cdot5^2\cdot41$	7·293	$2^2\cdot3^3\cdot19$	2053	2·13·79	3·5·137	$2^3\cdot257$	$11^2\cdot17$	$2\cdot3\cdot7^3$	29·71	205
206	$2^2\cdot5\cdot103$	$3^2\cdot229$	2·1031	2063	$2^4\cdot3\cdot43$	5·7·59	2·1033	3·13·53	$2^2\cdot11\cdot47$	2069	206
207	$2\cdot3^2\cdot5\cdot23$	19·109	$2^3\cdot7\cdot37$	3·691	2·17·61	$5^2\cdot83$	$2^2\cdot3\cdot173$	31·67	2·1039	$3^3\cdot7\cdot11$	207
208	$2^5\cdot5\cdot13$	2081	2·3·347	2083	$2^2\cdot521$	3·5·139	2·7·149	2087	$2^3\cdot3^2\cdot29$	2089	208
209	2·5·11·19	3·17·41	$2^2\cdot523$	7·13·23	2·3·349	5·419	$2^4\cdot131$	$3^2\cdot233$	2·1049	2099	209
210	$2^2\cdot3\cdot5^2\cdot7$	11·191	2·1051	3·701	$2^3\cdot263$	5·421	$2\cdot3^4\cdot13$	$7^2\cdot43$	$2^2\cdot17\cdot31$	3·19·37	210
211	2·5·211	2111	$2^6\cdot3\cdot11$	2113	2·7·151	$3^2\cdot5\cdot47$	$2^2\cdot23^2$	29·73	2·3·353	13·163	211
212	$2^3\cdot5\cdot53$	3·7·101	2·1061	11·193	$2^2\cdot3^2\cdot59$	$5^3\cdot17$	2·1063	3·709	$2^4\cdot7\cdot19$	2129	212
213	2·3·5·71	2131	$2^2\cdot13\cdot41$	$3^3\cdot79$	2·11·97	5·7·61	$2^3\cdot3\cdot89$	2137	2·1069	3·23·31	213
214	$2^2\cdot5\cdot107$	2141	$2\cdot3^2\cdot7\cdot17$	2143	$2^5\cdot67$	3·5·11·13	2·29·37	19·113	$2^2\cdot3\cdot179$	7·307	214
215	$2\cdot5^2\cdot43$	$3^2\cdot239$	$2^3\cdot269$	2153	2·3·359	5·431	$2^2\cdot7^2\cdot11$	3·719	2·13·83	17·127	215
216	$2^4\cdot3^3\cdot5$	2161	2·23·47	3·7·103	$2^2\cdot541$	5·433	$2\cdot3\cdot19^2$	11·197	$2^3\cdot271$	$3^2\cdot241$	216
217	2·5·7·31	13·167	$2^2\cdot3\cdot181$	41·53	2·1087	$3\cdot5^2\cdot29$	$2^7\cdot17$	7·311	$2\cdot3^2\cdot11^2$	2179	217
218	$2^2\cdot5\cdot109$	3·727	2·1091	37·59	$2^3\cdot3\cdot7\cdot13$	5·19·23	2·1093	3^7	$2^2\cdot547$	11·199	218
219	2·3·5·73	7·313	$2^4\cdot137$	3·17·43	2·1097	5·439	$2^2\cdot3^2\cdot61$	13^3	2·7·157	3·733	219
220	$2^3\cdot5^2\cdot11$	31·71	2·3·367	2203	$2^2\cdot19\cdot29$	$3^2\cdot5\cdot7^2$	2·1103	2207	$2^5\cdot3\cdot23$	47^2	220
221	2·5·13·17	3·11·67	$2^2\cdot7\cdot79$	2213	$2\cdot3^3\cdot41$	5·443	$2^3\cdot277$	3·739	2·1109	7·317	221
222	$2^2\cdot3\cdot5\cdot37$	2221	2·11·101	$3^2\cdot13\cdot19$	$2^4\cdot139$	$5^2\cdot89$	2·3·7·53	17·131	$2^2\cdot557$	3·743	222
223	2·5·223	23·97	$2^3\cdot3^2\cdot31$	7·11·29	2·1117	3·5·149	$2^2\cdot13\cdot43$	2237	2·3·373	2239	223
224	$2^6\cdot5\cdot7$	$3^3\cdot83$	2·19·59	2243	$2^2\cdot3\cdot11\cdot17$	5·449	2·1123	3·7·107	$2^3\cdot281$	13·173	224
225	$2\cdot3^2\cdot5^3$	2251	$2^2\cdot563$	3·751	$2\cdot7^2\cdot23$	5·11·41	$2^4\cdot3\cdot47$	37·61	2·1129	$3^2\cdot251$	225
226	$2^2\cdot5\cdot113$	7·17·19	2·3·13·29	31·73	$2^3\cdot283$	3·5·151	2·11·103	2267	$2^2\cdot3^4\cdot7$	2269	226
227	2·5·227	3·757	$2^5\cdot71$	2273	2·3·379	$5^2\cdot7\cdot13$	$2^2\cdot569$	$3^2\cdot11\cdot23$	2·17·67	43·53	227
228	$2^3\cdot3\cdot5\cdot19$	2281	2·7·163	3·761	$2^2\cdot571$	5·457	$2\cdot3^2\cdot127$	2287	$2^4\cdot11\cdot13$	3·7·109	228
229	2·5·229	29·79	$2^2\cdot3\cdot191$	2293	2·31·37	$3^3\cdot5\cdot17$	$2^3\cdot7\cdot41$	2297	2·3·383	$11^2\cdot19$	229
230	$2^2\cdot5^2\cdot23$	3·13·59	2·1151	$7^2\cdot47$	$2^8\cdot3^2$	5·461	2·1153	3·769	$2^2\cdot577$	2309	230
231	2·3·5·7·11	2311	$2^3\cdot17^2$	$3^2\cdot257$	2·13·89	5·463	$2^2\cdot3\cdot193$	7·331	2·19·61	3·773	231
232	$2^4\cdot5\cdot29$	11·211	$2\cdot3^3\cdot43$	23·101	$2^2\cdot7\cdot83$	$3\cdot5^2\cdot31$	2·1163	13·179	$2^3\cdot3\cdot97$	17·137	232
233	2·5·233	$3^2\cdot7\cdot37$	$2^2\cdot11\cdot53$	2333	2·3·389	5·467	$2^5\cdot73$	3·19·41	2·7·167	2339	233
234	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot13$	2341	2·1171	3·11·71	$2^3\cdot293$	5·7·67	2·3·17·23	2347	$2^2\cdot587$	$3^4\cdot29$	234
235	$2\cdot5^2\cdot47$	2351	$2^4\cdot3\cdot7^2$	13·181	2·11·107	3·5·157	$2^2\cdot19\cdot31$	2357	$2\cdot3^2\cdot131$	7·337	235
236	$2^3\cdot5\cdot59$	3·787	2·1181	17·139	$2^2\cdot3\cdot197$	5·11·43	$2\cdot7\cdot13^2$	$3^2\cdot263$	$2^6\cdot37$	23·103	236
237	2·3·5·79	2371	$2^2\cdot593$	3·7·113	2·1187	$5^3\cdot19$	$2^3\cdot3^3\cdot11$	2377	2·29·41	3·13·61	237
238	$2^2\cdot5\cdot7\cdot17$	2381	2·3·397	2383	$2^4\cdot149$	$3^2\cdot5\cdot53$	2·1193	7·11·31	$2^2\cdot3\cdot199$	2389	238
239	2·5·239	3·797	$2^3\cdot13\cdot23$	2393	$2\cdot3^2\cdot7\cdot19$	5·479	$2^2\cdot599$	3·17·47	2·11·109	2399	239
240	$2^5\cdot3\cdot5^2$	7^4	2·1201	$3^3\cdot89$	$2^2\cdot601$	5·13·37	2·3·401	29·83	$2^3\cdot7\cdot43$	3·11·73	240
241	2·5·241	2411	$2^2\cdot3^2\cdot67$	19·127	2·17·71	3·5·7·23	$2^4\cdot151$	2417	2·3·13·31	41·59	241
242	$2^2\cdot5\cdot11^2$	$3^2\cdot269$	2·7·173	2423	$2^3\cdot3\cdot101$	$5^2\cdot97$	2·1213	3·809	$2^2\cdot607$	7·347	242
243	$2\cdot3^5\cdot5$	11·13·17	$2^7\cdot19$	3·811	2·1217	5·487	$2^2\cdot3\cdot7\cdot29$	2437	2·23·53	$3^2\cdot271$	243
244	$2^3\cdot5\cdot61$	2441	2·3·11·37	7·349	$2^2\cdot13\cdot47$	3·5·163	2·1223	2447	$2^4\cdot3^2\cdot17$	31·79	244
245	$2\cdot5^2\cdot7^2$	3·19·43	$2^2\cdot613$	11·223	2·3·409	5·491	$2^3\cdot307$	$3^3\cdot7\cdot13$	2·1229	2459	245
246	$2^2\cdot3\cdot5\cdot41$	23·107	2·1231	3·821	$2^5\cdot7\cdot11$	5·17·29	$2\cdot3^2\cdot137$	2467	$2^2\cdot617$	3·823	246
247	2·5·13·19	7·353	$2^3\cdot3\cdot103$	2473	2·1237	$3^2\cdot5^2\cdot11$	$2^2\cdot619$	2477	2·3·7·59	37·67	247
248	$2^4\cdot5\cdot31$	3·827	2·17·73	13·191	$2^2\cdot3^3\cdot23$	5·7·71	2·11·113	3·829	$2^3\cdot311$	19·131	248
249	2·3·5·83	47·53	$2^2\cdot7\cdot89$	$3^2\cdot277$	2·29·43	5·499	$2^6\cdot3\cdot13$	11·227	2·1249	$3\cdot7^2\cdot17$	249

2500

250	$2^2\cdot5^4$	$41\cdot61$	$2\cdot3^2\cdot139$	**2503**	$2^3\cdot313$	$3\cdot5\cdot167$	$2\cdot7\cdot179$	$23\cdot109$	$2^2\cdot3\cdot11\cdot19$	$13\cdot193$	250
251	$2\cdot5\cdot251$	$3^4\cdot31$	$2^4\cdot157$	$7\cdot359$	$2\cdot3\cdot419$	$5\cdot503$	$2^2\cdot17\cdot37$	$3\cdot839$	$2\cdot1259$	$11\cdot229$	251
252	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$	**2521**	$2\cdot13\cdot97$	$3\cdot29^2$	$2^2\cdot631$	$5^2\cdot101$	$2\cdot3\cdot421$	$7\cdot19^2$	$2^5\cdot79$	$3^2\cdot281$	252
253	$2\cdot5\cdot11\cdot23$	**2531**	$2^2\cdot3\cdot211$	$17\cdot149$	$2\cdot7\cdot181$	$3\cdot5\cdot13^2$	$2^3\cdot317$	$43\cdot59$	$2\cdot3^3\cdot47$	**2539**	253
254	$2^2\cdot5\cdot127$	$3\cdot7\cdot11^2$	$2\cdot31\cdot41$	**2543**	$2^4\cdot3\cdot53$	$5\cdot509$	$2\cdot19\cdot67$	$3^2\cdot283$	$2^2\cdot7^2\cdot13$	**2549**	254
255	$2\cdot3\cdot5^2\cdot17$	**2551**	$2^3\cdot11\cdot29$	$3\cdot23\cdot37$	$2\cdot1277$	$5\cdot7\cdot73$	$2^2\cdot3^2\cdot71$	**2557**	$2\cdot1279$	$3\cdot853$	255
256	$2^9\cdot5$	$13\cdot197$	$2\cdot3\cdot7\cdot61$	$11\cdot233$	$2^2\cdot641$	$3^3\cdot5\cdot19$	$2\cdot1283$	$17\cdot151$	$2^3\cdot3\cdot107$	$7\cdot367$	256
257	$2\cdot5\cdot257$	$3\cdot857$	$2^2\cdot643$	$31\cdot83$	$2\cdot3^2\cdot11\cdot13$	$5^2\cdot103$	$2^4\cdot7\cdot23$	$3\cdot859$	$2\cdot1289$	**2579**	257
258	$2^2\cdot3\cdot5\cdot43$	$29\cdot89$	$2\cdot1291$	$3^2\cdot7\cdot41$	$2^3\cdot17\cdot19$	$5\cdot11\cdot47$	$2\cdot3\cdot431$	$13\cdot199$	$2^2\cdot647$	$3\cdot863$	258
259	$2\cdot5\cdot7\cdot37$	**2591**	$2^5\cdot3^4$	**2593**	$2\cdot1297$	$3\cdot5\cdot173$	$2^2\cdot11\cdot59$	$7^2\cdot53$	$2\cdot3\cdot433$	$23\cdot113$	259
260	$2^3\cdot5^2\cdot13$	$3^2\cdot17^2$	$2\cdot1301$	$19\cdot137$	$2^2\cdot3\cdot7\cdot31$	$5\cdot521$	$2\cdot1303$	$3\cdot11\cdot79$	$2^4\cdot163$	**2609**	260
261	$2\cdot3^2\cdot5\cdot29$	$7\cdot373$	$2^2\cdot653$	$3\cdot13\cdot67$	$2\cdot1307$	$5\cdot523$	$2^3\cdot3\cdot109$	**2617**	$2\cdot7\cdot11\cdot17$	$3^3\cdot97$	261
262	$2^2\cdot5\cdot131$	**2621**	$2\cdot3\cdot19\cdot23$	$43\cdot61$	$2^6\cdot41$	$3\cdot5^3\cdot7$	$2\cdot13\cdot101$	$37\cdot71$	$2^2\cdot3^2\cdot73$	$11\cdot239$	262
263	$2\cdot5\cdot263$	$3\cdot877$	$2^3\cdot7\cdot47$	**2633**	$2\cdot3\cdot439$	$5\cdot17\cdot31$	$2^2\cdot659$	$3^2\cdot293$	$2\cdot1319$	$7\cdot13\cdot29$	263
264	$2^4\cdot3\cdot5\cdot11$	$19\cdot139$	$2\cdot1321$	$3\cdot881$	$2^2\cdot661$	$5\cdot23^2$	$2\cdot3^3\cdot7^2$	**2647**	$2^3\cdot331$	$3\cdot883$	264
265	$2\cdot5^2\cdot53$	$11\cdot241$	$2^2\cdot3\cdot13\cdot17$	$7\cdot379$	$2\cdot1327$	$3^2\cdot5\cdot59$	$2^5\cdot83$	**2657**	$2\cdot3\cdot443$	**2659**	265
266	$2^2\cdot5\cdot7\cdot19$	$3\cdot887$	$2\cdot11^3$	**2663**	$2^3\cdot3^2\cdot37$	$5\cdot13\cdot41$	$2\cdot31\cdot43$	$3\cdot7\cdot127$	$2^2\cdot23\cdot29$	$17\cdot157$	266
267	$2\cdot3\cdot5\cdot89$	**2671**	$2^4\cdot167$	$3^5\cdot11$	$2\cdot7\cdot191$	$5^2\cdot107$	$2^2\cdot3\cdot223$	**2677**	$2\cdot13\cdot103$	$3\cdot19\cdot47$	267
268	$2^3\cdot5\cdot67$	$7\cdot383$	$2\cdot3^2\cdot149$	**2683**	$2^2\cdot11\cdot61$	$3\cdot5\cdot179$	$2\cdot17\cdot79$	**2687**	$2^7\cdot3\cdot7$	**2689**	268
269	$2\cdot5\cdot269$	$3^2\cdot13\cdot23$	$2^2\cdot673$	**2693**	$2\cdot3\cdot449$	$5\cdot7^2\cdot11$	$2^3\cdot337$	$3\cdot29\cdot31$	$2\cdot19\cdot71$	**2699**	269
270	$2^2\cdot3^3\cdot5^2$	$37\cdot73$	$2\cdot7\cdot193$	$3\cdot17\cdot53$	$2^4\cdot13^2$	$5\cdot541$	$2\cdot3\cdot11\cdot41$	**2707**	$2^2\cdot677$	$3^2\cdot7\cdot43$	270
271	$2\cdot5\cdot271$	**2711**	$2^3\cdot3\cdot113$	**2713**	$2\cdot23\cdot59$	$3\cdot5\cdot181$	$2^2\cdot7\cdot97$	$11\cdot13\cdot19$	$2\cdot3^2\cdot151$	**2719**	271
272	$2^5\cdot5\cdot17$	$3\cdot907$	$2\cdot1361$	$7\cdot389$	$2^2\cdot3\cdot227$	$5^2\cdot109$	$2\cdot29\cdot47$	$3^3\cdot101$	$2^3\cdot11\cdot31$	**2729**	272
273	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13$	**2731**	$2^2\cdot683$	$3\cdot911$	$2\cdot1367$	$5\cdot547$	$2^4\cdot3^2\cdot19$	$7\cdot17\cdot23$	$2\cdot37^2$	$3\cdot11\cdot83$	273
274	$2^2\cdot5\cdot137$	**2741**	$2\cdot3\cdot457$	$13\cdot211$	$2^3\cdot7^3$	$3^2\cdot5\cdot61$	$2\cdot1373$	$41\cdot67$	$2^2\cdot3\cdot229$	**2749**	274
275	$2\cdot5^3\cdot11$	$3\cdot7\cdot131$	$2^6\cdot43$	**2753**	$2\cdot3^4\cdot17$	$5\cdot19\cdot29$	$2^2\cdot13\cdot53$	$3\cdot919$	$2\cdot7\cdot197$	$31\cdot89$	275
276	$2^3\cdot3\cdot5\cdot23$	$11\cdot251$	$2\cdot1381$	$3^2\cdot307$	$2^2\cdot691$	$5\cdot7\cdot79$	$2\cdot3\cdot461$	**2767**	$2^4\cdot173$	$3\cdot13\cdot71$	276
277	$2\cdot5\cdot277$	$17\cdot163$	$2^2\cdot3^2\cdot7\cdot11$	$47\cdot59$	$2\cdot19\cdot73$	$3\cdot5^2\cdot37$	$2^3\cdot347$	**2777**	$2\cdot3\cdot463$	$7\cdot397$	277
278	$2^2\cdot5\cdot139$	$3^3\cdot103$	$2\cdot13\cdot107$	$11^2\cdot23$	$2^5\cdot3\cdot29$	$5\cdot557$	$2\cdot7\cdot199$	$3\cdot929$	$2^2\cdot17\cdot41$	**2789**	278
279	$2\cdot3^2\cdot5\cdot31$	**2791**	$2^3\cdot349$	$3\cdot7^2\cdot19$	$2\cdot11\cdot127$	$5\cdot13\cdot43$	$2^2\cdot3\cdot233$	**2797**	$2\cdot1399$	$3^2\cdot311$	279
280	$2^4\cdot5^2\cdot7$	**2801**	$2\cdot3\cdot467$	**2803**	$2^2\cdot701$	$3\cdot5\cdot11\cdot17$	$2\cdot23\cdot61$	$7\cdot401$	$2^3\cdot3^3\cdot13$	53^2	280
281	$2\cdot5\cdot281$	$3\cdot937$	$2^2\cdot19\cdot37$	$29\cdot97$	$2\cdot3\cdot7\cdot67$	$5\cdot563$	$2^8\cdot11$	$3^2\cdot313$	$2\cdot1409$	**2819**	281
282	$2^2\cdot3\cdot5\cdot47$	$7\cdot13\cdot31$	$2\cdot17\cdot83$	$3\cdot941$	$2^3\cdot353$	$5^2\cdot113$	$2\cdot3^2\cdot157$	$11\cdot257$	$2^2\cdot7\cdot101$	$3\cdot23\cdot41$	282
283	$2\cdot5\cdot283$	$19\cdot149$	$2^4\cdot3\cdot59$	**2833**	$2\cdot13\cdot109$	$3^4\cdot5\cdot7$	$2^2\cdot709$	**2837**	$2\cdot3\cdot11\cdot43$	$17\cdot167$	283
284	$2^3\cdot5\cdot71$	$3\cdot947$	$2\cdot7^2\cdot29$	**2843**	$2^2\cdot3^2\cdot79$	$5\cdot569$	$2\cdot1423$	$3\cdot13\cdot73$	$2^5\cdot89$	$7\cdot11\cdot37$	284
285	$2\cdot3\cdot5^2\cdot19$	**2851**	$2^2\cdot23\cdot31$	$3^2\cdot317$	$2\cdot1427$	$5\cdot571$	$2^3\cdot3\cdot7\cdot17$	**2857**	$2\cdot1429$	$3\cdot953$	285
286	$2^2\cdot5\cdot11\cdot13$	**2861**	$2\cdot3^3\cdot53$	$7\cdot409$	$2^4\cdot179$	$3\cdot5\cdot191$	$2\cdot1433$	$47\cdot61$	$2^2\cdot3\cdot239$	$19\cdot151$	286
287	$2\cdot5\cdot7\cdot41$	$3^2\cdot11\cdot29$	$2^3\cdot359$	$13^2\cdot17$	$2\cdot3\cdot479$	$5^3\cdot23$	$2^2\cdot719$	$3\cdot7\cdot137$	$2\cdot1439$	**2879**	287
288	$2^6\cdot3^2\cdot5$	$43\cdot67$	$2\cdot11\cdot131$	$3\cdot31^2$	$2^2\cdot7\cdot103$	$5\cdot577$	$2\cdot3\cdot13\cdot37$	**2887**	$2^3\cdot19^2$	$3^3\cdot107$	288
289	$2\cdot5\cdot17^2$	$7^2\cdot59$	$2^2\cdot3\cdot241$	$11\cdot263$	$2\cdot1447$	$3\cdot5\cdot193$	$2^4\cdot181$	**2897**	$2\cdot3^2\cdot7\cdot23$	$13\cdot223$	289
290	$2^2\cdot5^2\cdot29$	$3\cdot967$	$2\cdot1451$	**2903**	$2^3\cdot3\cdot11^2$	$5\cdot7\cdot83$	$2\cdot1453$	$3^2\cdot17\cdot19$	$2^2\cdot727$	**2909**	290
291	$2\cdot3\cdot5\cdot97$	$41\cdot71$	$2^5\cdot7\cdot13$	$3\cdot971$	$2\cdot31\cdot47$	$5\cdot11\cdot53$	$2^2\cdot3^6$	**2917**	$2\cdot1459$	$3\cdot7\cdot139$	291
292	$2^3\cdot5\cdot73$	$23\cdot127$	$2\cdot3\cdot487$	$37\cdot79$	$2^2\cdot17\cdot43$	$3^2\cdot5^2\cdot13$	$2\cdot7\cdot11\cdot19$	**2927**	$2^4\cdot3\cdot61$	$29\cdot101$	292
293	$2\cdot5\cdot293$	$3\cdot977$	$2^2\cdot733$	$7\cdot419$	$2\cdot3^2\cdot163$	$5\cdot587$	$2^3\cdot367$	$3\cdot11\cdot89$	$2\cdot13\cdot113$	**2939**	293
294	$2^2\cdot3\cdot5\cdot7^2$	$17\cdot173$	$2\cdot1471$	$3^3\cdot109$	$2^7\cdot23$	$5\cdot19\cdot31$	$2\cdot3\cdot491$	$7\cdot421$	$2^2\cdot11\cdot67$	$3\cdot983$	294
295	$2\cdot5^2\cdot59$	$13\cdot227$	$2^3\cdot3^2\cdot41$	**2953**	$2\cdot7\cdot211$	$3\cdot5\cdot197$	$2^2\cdot739$	**2957**	$2\cdot3\cdot17\cdot29$	$11\cdot269$	295
296	$2^4\cdot5\cdot37$	$3^2\cdot7\cdot47$	$2\cdot1481$	**2963**	$2^2\cdot3\cdot13\cdot19$	$5\cdot593$	$2\cdot1483$	$3\cdot23\cdot43$	$2^3\cdot7\cdot53$	**2969**	296
297	$2\cdot3^3\cdot5\cdot11$	**2971**	$2^2\cdot743$	$3\cdot991$	$2\cdot1487$	$5^2\cdot7\cdot17$	$2^5\cdot3\cdot31$	$13\cdot229$	$2\cdot1489$	$3^2\cdot331$	297
298	$2^2\cdot5\cdot149$	$11\cdot271$	$2\cdot3\cdot7\cdot71$	$19\cdot157$	$2^3\cdot373$	$3\cdot5\cdot199$	$2\cdot1493$	$29\cdot103$	$2^2\cdot3^2\cdot83$	$7^2\cdot61$	298
299	$2\cdot5\cdot13\cdot23$	$3\cdot997$	$2^4\cdot11\cdot17$	$41\cdot73$	$2\cdot3\cdot499$	$5\cdot599$	$2^2\cdot7\cdot107$	$3^4\cdot37$	$2\cdot1499$	**2999**	299

2999

Таблица 24.7. Разложения на множители

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
300	$2^{3}\cdot3\cdot5^{3}$	**3001**	2·19·79	3·7·11·13	$2^{2}\cdot751$	5·601	$2\cdot3^{2}\cdot167$	31·97	$2^{6}\cdot47$	3·17·59	300
301	2·5·7·43	**3011**	$2^{2}\cdot3\cdot251$	23·131	2·11·137	$3^{2}\cdot5\cdot67$	$2^{3}\cdot13\cdot29$	7·431	2·3·503	**3019**	301
302	$2^{2}\cdot5\cdot151$	3·19·53	2·1511	**3023**	$2^{4}\cdot3^{3}\cdot7$	$5^{2}\cdot11^{2}$	2·17·89	3·1009	$2^{2}\cdot757$	13·233	302
303	2·3·5·101	7·433	$2^{3}\cdot379$	$3^{2}\cdot337$	2·37·41	5·607	$2^{2}\cdot3\cdot11\cdot23$	**3037**	$2\cdot7^{2}\cdot31$	3·1013	303
304	$2^{5}\cdot5\cdot19$	**3041**	$2\cdot3^{2}\cdot13^{2}$	17·179	$2^{2}\cdot761$	3·5·7·29	2·1523	11·277	$2^{3}\cdot3\cdot127$	**3049**	304
305	$2\cdot5^{2}\cdot61$	$3^{3}\cdot113$	$2^{2}\cdot7\cdot109$	43·71	2·3·509	5·13·47	$2^{4}\cdot191$	3·1019	2·11·139	7·19·23	305
306	$2^{2}\cdot3^{2}\cdot5\cdot17$	**3061**	2·1531	3·1021	$2^{3}\cdot383$	5·613	2·3·7·73	**3067**	$2^{2}\cdot13\cdot59$	$3^{2}\cdot11\cdot31$	306
307	2·5·307	37·83	$2^{10}\cdot3$	7·439	2·29·53	$3\cdot5^{2}\cdot41$	$2^{2}\cdot769$	17·181	$2\cdot3^{4}\cdot19$	**3079**	307
308	$2^{3}\cdot5\cdot7\cdot11$	3·13·79	2·23·67	**3083**	$2^{2}\cdot3\cdot257$	5·617	2·1543	$3^{2}\cdot7^{3}$	$2^{4}\cdot193$	**3089**	308
309	2·3·5·103	11·281	$2^{2}\cdot773$	3·1031	2·7·13·17	5·619	$2^{3}\cdot3^{2}\cdot43$	19·163	2·1549	3·1033	309
310	$2^{2}\cdot5^{2}\cdot31$	7·443	2·3·11·47	29·107	$2^{5}\cdot97$	$3^{3}\cdot5\cdot23$	2·1553	13·239	$2^{2}\cdot3\cdot7\cdot37$	**3109**	310
311	2·5·311	3·17·61	$2^{3}\cdot389$	11·283	$2\cdot3^{2}\cdot173$	5·7·89	$2^{2}\cdot19\cdot41$	3·1039	2·1559	**3119**	311
312	$2^{4}\cdot3\cdot5\cdot13$	**3121**	2·7·223	$3^{2}\cdot347$	$2^{2}\cdot11\cdot71$	5^{5}	2·3·521	53·59	$2^{3}\cdot17\cdot23$	3·7·149	312
313	2·5·313	31·101	$2^{2}\cdot3^{3}\cdot29$	13·241	2·1567	3·5·11·19	$2^{6}\cdot7^{2}$	**3137**	2·3·523	43·73	313
314	$2^{2}\cdot5\cdot157$	$3^{2}\cdot349$	2·1571	7·449	$2^{3}\cdot3\cdot131$	5·17·37	$2\cdot11^{2}\cdot13$	3·1049	$2^{2}\cdot787$	47·67	314
315	$2\cdot3^{2}\cdot5^{2}\cdot7$	23·137	$2^{4}\cdot197$	3·1051	2·19·83	5·631	$2^{2}\cdot3\cdot263$	7·11·41	2·1579	$3^{5}\cdot13$	315
316	$2^{3}\cdot5\cdot79$	29·109	2·3·17·31	**3163**	$2^{2}\cdot7\cdot113$	3·5·211	2·1583	**3167**	$2^{5}\cdot3^{2}\cdot11$	**3169**	316
317	2·5·317	3·7·151	$2^{2}\cdot13\cdot61$	19·167	$2\cdot3\cdot23^{2}$	$5^{2}\cdot127$	$2^{3}\cdot397$	$3^{2}\cdot353$	2·7·227	$11\cdot17^{2}$	317
318	$2^{2}\cdot3\cdot5\cdot53$	**3181**	2·37·43	3·1061	$2^{4}\cdot199$	$5\cdot7^{2}\cdot13$	$2\cdot3^{3}\cdot59$	**3187**	$2^{2}\cdot797$	3·1063	318
319	2·5·11·29	**3191**	$2^{3}\cdot3\cdot7\cdot19$	31·103	2·1597	$3^{2}\cdot5\cdot71$	$2^{2}\cdot17\cdot47$	23·139	2·3·13·41	7·457	319
320	$2^{7}\cdot5^{2}$	3·11·97	2·1601	**3203**	$2^{2}\cdot3^{2}\cdot89$	5·641	2·7·229	3·1069	$2^{3}\cdot401$	**3209**	320
321	2·3·5·107	$13^{2}\cdot19$	$2^{2}\cdot11\cdot73$	$3^{3}\cdot7\cdot17$	2·1607	5·643	$2^{4}\cdot3\cdot67$	**3217**	2·1609	3·29·37	321
322	$2^{2}\cdot5\cdot7\cdot23$	**3221**	$2\cdot3^{2}\cdot179$	11·293	$2^{3}\cdot13\cdot31$	$3\cdot5^{2}\cdot43$	2·1613	7·461	$2^{2}\cdot3\cdot269$	**3229**	322
323	2·5·17·19	$3^{2}\cdot359$	$2^{5}\cdot101$	53·61	$2\cdot3\cdot7^{2}\cdot11$	5·647	$2^{2}\cdot809$	3·13·83	2·1619	41·79	323
324	$2^{3}\cdot3^{4}\cdot5$	7·463	2·1621	3·23·47	$2^{2}\cdot811$	5·11·59	2·3·541	17·191	$2^{4}\cdot7\cdot29$	$3^{2}\cdot19^{2}$	324
325	$2\cdot5^{3}\cdot13$	**3251**	$2^{2}\cdot3\cdot271$	**3253**	2·1627	3·5·7·31	$2^{3}\cdot11\cdot37$	**3257**	$2\cdot3^{2}\cdot181$	**3259**	325
326	$2^{2}\cdot5\cdot163$	3·1087	2·7·233	13·251	$2^{6}\cdot3\cdot17$	5·653	2·23·71	$3^{3}\cdot11^{2}$	$2^{2}\cdot19\cdot43$	7·467	326
327	2·3·5·109	**3271**	$2^{3}\cdot409$	3·1091	2·1637	$5^{2}\cdot131$	$2^{2}\cdot3^{2}\cdot7\cdot13$	29·113	2·11·149	3·1093	327
328	$2^{4}\cdot5\cdot41$	17·193	2·3·547	$7^{2}\cdot67$	$2^{2}\cdot821$	$3^{2}\cdot5\cdot73$	2·31·53	19·173	$2^{3}\cdot3\cdot137$	11·13·23	328
329	2·5·7·47	3·1097	$2^{2}\cdot823$	37·89	$2\cdot3^{3}\cdot61$	5·659	$2^{5}\cdot103$	3·7·157	2·17·97	**3299**	329
330	$2^{2}\cdot3\cdot5^{2}\cdot11$	**3301**	2·13·127	$3^{2}\cdot367$	$2^{3}\cdot7\cdot59$	5·661	2·3·19·29	**3307**	$2^{2}\cdot827$	3·1103	330
331	2·5·331	7·11·43	$2^{4}\cdot3^{2}\cdot23$	**3313**	2·1657	3·5·13·17	$2^{2}\cdot829$	31·107	2·3·7·79	**3319**	331
332	$2^{3}\cdot5\cdot83$	$3^{4}\cdot41$	2·11·151	**3323**	$2^{2}\cdot3\cdot277$	$5^{2}\cdot7\cdot19$	2·1663	3·1109	$2^{8}\cdot13$	**3329**	332
333	$2\cdot3^{2}\cdot5\cdot37$	**3331**	$2^{2}\cdot7^{2}\cdot17$	3·11·101	2·1667	5·23·29	$2^{3}\cdot3\cdot139$	47·71	2·1669	$3^{2}\cdot7\cdot53$	333
334	$2^{2}\cdot5\cdot167$	13·257	2·3·557	**3343**	$2^{4}\cdot11\cdot19$	3·5·223	2·7·239	**3347**	$2^{2}\cdot3^{3}\cdot31$	17·197	334
335	$2\cdot5^{2}\cdot67$	3·1117	$2^{3}\cdot419$	7·479	2·3·13·43	5·11·61	$2^{2}\cdot839$	$3^{2}\cdot373$	2·23·73	**3359**	335
336	$2^{5}\cdot3\cdot5\cdot7$	**3361**	$2\cdot41^{2}$	3·19·59	$2^{2}\cdot29^{2}$	5·673	$2\cdot3^{2}\cdot11\cdot17$	7·13·37	$2^{3}\cdot421$	3·1123	336
337	2·5·337	**3371**	$2^{2}\cdot3\cdot281$	**3373**	2·7·241	$3^{3}\cdot5^{3}$	$2^{4}\cdot211$	11·307	2·3·563	31·109	337
338	$2^{2}\cdot5\cdot13^{2}$	$3\cdot7^{2}\cdot23$	2·19·89	17·199	$2^{3}\cdot3^{2}\cdot47$	5·677	2·1693	3·1129	$2^{2}\cdot7\cdot11^{2}$	**3389**	338
339	2·3·5·113	**3391**	$2^{6}\cdot53$	$3^{2}\cdot13\cdot29$	2·1697	5·7·97	$2^{2}\cdot3\cdot283$	43·79	2·1699	3·11·103	339
340	$2^{3}\cdot5^{2}\cdot17$	19·179	$2\cdot3^{5}\cdot7$	41·83	$2^{2}\cdot23\cdot37$	3·5·227	2·13·131	**3407**	$2^{4}\cdot3\cdot71$	7·487	340
341	2·5·11·31	$3^{2}\cdot379$	$2^{2}\cdot853$	**3413**	2·3·569	5·683	$2^{3}\cdot7\cdot61$	3·17·67	2·1709	13·263	341
342	$2^{2}\cdot3^{2}\cdot5\cdot19$	11·311	2·29·59	3·7·163	$2^{5}\cdot107$	$5^{2}\cdot137$	2·3·571	23·149	$2^{2}\cdot857$	$3^{3}\cdot127$	342
343	$2\cdot5\cdot7^{3}$	47·73	$2^{3}\cdot3\cdot11\cdot13$	**3433**	2·17·101	3·5·229	$2^{2}\cdot859$	7·491	$2\cdot3^{2}\cdot191$	19·181	343
344	$2^{4}\cdot5\cdot43$	3·31·37	2·1721	11·313	$2^{2}\cdot3\cdot7\cdot41$	5·13·53	2·1723	$3^{2}\cdot383$	$2^{3}\cdot431$	**3449**	344
345	$2\cdot3\cdot5^{2}\cdot23$	7·17·29	$2^{2}\cdot863$	3·1151	2·11·157	5·691	$2^{7}\cdot3^{3}$	**3457**	2·7·13·19	3·1153	345
346	$2^{2}\cdot5\cdot173$	**3461**	2·3·577	**3463**	$2^{3}\cdot433$	$3^{2}\cdot5\cdot7\cdot11$	2·1733	**3467**	$2^{2}\cdot3\cdot17^{2}$	**3469**	346
347	2·5·347	3·13·89	$2^{4}\cdot7\cdot31$	23·151	$2\cdot3^{2}\cdot193$	$5^{2}\cdot139$	$2^{2}\cdot11\cdot79$	3·19·61	2·37·47	$7^{2}\cdot71$	347
348	$2^{3}\cdot3\cdot5\cdot29$	59^{2}	2·1741	$3^{4}\cdot43$	$2^{2}\cdot13\cdot67$	5·17·41	2·3·7·83	11·317	$2^{5}\cdot109$	3·1163	348
349	2·5·349	**3491**	$2^{2}\cdot3^{2}\cdot97$	7·499	2·1747	3·5·233	$2^{3}\cdot19\cdot23$	13·269	2·3·11·53	**3499**	349

3500

350	$2^2\cdot5^3\cdot7$	$3^2\cdot389$	$2\cdot17\cdot103$	$31\cdot113$	$2^4\cdot3\cdot73$	$5\cdot701$	$2\cdot1753$	$3\cdot7\cdot167$	$2^2\cdot877$	$11^2\cdot29$	350
351	$2\cdot3^3\cdot5\cdot13$	**3511**	$2^3\cdot439$	$3\cdot1171$	$2\cdot7\cdot251$	$5\cdot19\cdot37$	$2^2\cdot3\cdot293$	**3517**	$2\cdot1759$	$3^2\cdot17\cdot23$	351
352	$2^6\cdot5\cdot11$	$7\cdot503$	$2\cdot3\cdot587$	$13\cdot271$	$2^2\cdot881$	$3\cdot5^2\cdot47$	$2\cdot41\cdot43$	**3527**	$2^3\cdot3^2\cdot7^2$	**3529**	352
353	$2\cdot5\cdot353$	$3\cdot11\cdot107$	$2^2\cdot883$	**3533**	$2\cdot3\cdot19\cdot31$	$5\cdot7\cdot101$	$2^4\cdot13\cdot17$	$3^3\cdot131$	$2\cdot29\cdot61$	**3539**	353
354	$2^2\cdot3\cdot5\cdot59$	**3541**	$2\cdot7\cdot11\cdot23$	$3\cdot1181$	$2^3\cdot443$	$5\cdot709$	$2\cdot3^2\cdot197$	**3547**	$2^2\cdot887$	$3\cdot7\cdot13^2$	354
355	$2\cdot5^2\cdot71$	$53\cdot67$	$2^5\cdot3\cdot37$	$11\cdot17\cdot19$	$2\cdot1777$	$3^2\cdot5\cdot79$	$2^2\cdot7\cdot127$	**3557**	$2\cdot3\cdot593$	**3559**	355
356	$2^3\cdot5\cdot89$	$3\cdot1187$	$2\cdot13\cdot137$	$7\cdot509$	$2^2\cdot3^4\cdot11$	$5\cdot23\cdot31$	$2\cdot1783$	$3\cdot29\cdot41$	$2^4\cdot223$	$43\cdot83$	356
357	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot17$	**3571**	$2^2\cdot19\cdot47$	$3^2\cdot397$	$2\cdot1787$	$5^2\cdot11\cdot13$	$2^3\cdot3\cdot149$	$7^2\cdot73$	$2\cdot1789$	$3\cdot1193$	357
358	$2^2\cdot5\cdot179$	**3581**	$2\cdot3^2\cdot199$	**3583**	$2^9\cdot7$	$3\cdot5\cdot239$	$2\cdot11\cdot163$	$17\cdot211$	$2^2\cdot3\cdot13\cdot23$	$37\cdot97$	358
359	$2\cdot5\cdot359$	$3^3\cdot7\cdot19$	$2^3\cdot449$	**3593**	$2\cdot3\cdot599$	$5\cdot719$	$2^2\cdot29\cdot31$	$3\cdot11\cdot109$	$2\cdot7\cdot257$	$59\cdot61$	359
360	$2^4\cdot3^2\cdot5^2$	$13\cdot277$	$2\cdot1801$	$3\cdot1201$	$2^2\cdot17\cdot53$	$5\cdot7\cdot103$	$2\cdot3\cdot601$	**3607**	$2^3\cdot11\cdot41$	$3^3\cdot401$	360
361	$2\cdot5\cdot19^2$	$23\cdot157$	$2^2\cdot3\cdot7\cdot43$	**3613**	$2\cdot13\cdot139$	$3\cdot5\cdot241$	$2^5\cdot113$	**3617**	$2\cdot3^3\cdot67$	$7\cdot11\cdot47$	361
362	$2^2\cdot5\cdot181$	$3\cdot17\cdot71$	$2\cdot1811$	**3623**	$2^3\cdot3\cdot151$	$5^4\cdot29$	$2\cdot7^2\cdot37$	$3^2\cdot13\cdot31$	$2^2\cdot907$	$19\cdot191$	362
363	$2\cdot3\cdot5\cdot11^2$	**3631**	$2^4\cdot227$	$3\cdot7\cdot173$	$2\cdot23\cdot79$	$5\cdot727$	$2^2\cdot3^2\cdot101$	**3637**	$2\cdot17\cdot107$	$3\cdot1213$	363
364	$2^3\cdot5\cdot7\cdot13$	$11\cdot331$	$2\cdot3\cdot607$	**3643**	$2^2\cdot911$	$3^6\cdot5$	$2\cdot1823$	$7\cdot521$	$2^6\cdot3\cdot19$	$41\cdot89$	364
365	$2\cdot5^2\cdot73$	$3\cdot1217$	$2^2\cdot11\cdot83$	$13\cdot281$	$2\cdot3^2\cdot7\cdot29$	$5\cdot17\cdot43$	$2^3\cdot457$	$3\cdot23\cdot53$	$2\cdot31\cdot59$	**3659**	365
366	$2^2\cdot3\cdot5\cdot61$	$7\cdot523$	$2\cdot1831$	$3^2\cdot11\cdot37$	$2^4\cdot229$	$5\cdot733$	$2\cdot3\cdot13\cdot47$	$19\cdot193$	$2^2\cdot7\cdot131$	$3\cdot1223$	366
367	$2\cdot5\cdot367$	**3671**	$2^3\cdot3^3\cdot17$	**3673**	$2\cdot11\cdot167$	$3\cdot5^2\cdot7^2$	$2^2\cdot919$	**3677**	$2\cdot3\cdot613$	$13\cdot283$	367
368	$2^5\cdot5\cdot23$	$3^2\cdot409$	$2\cdot7\cdot263$	$29\cdot127$	$2^2\cdot3\cdot307$	$5\cdot11\cdot67$	$2\cdot19\cdot97$	$3\cdot1229$	$2^3\cdot461$	$7\cdot17\cdot31$	368
369	$2\cdot3^2\cdot5\cdot41$	**3691**	$2^2\cdot13\cdot71$	$3\cdot1231$	$2\cdot1847$	$5\cdot739$	$2^4\cdot3\cdot7\cdot11$	**3697**	$2\cdot43^2$	$3^3\cdot137$	369
370	$2^2\cdot5^2\cdot37$	**3701**	$2\cdot3\cdot617$	$7\cdot23^2$	$2^3\cdot463$	$3\cdot5\cdot13\cdot19$	$2\cdot17\cdot109$	$11\cdot337$	$2^2\cdot3^2\cdot103$	**3709**	370
371	$2\cdot5\cdot7\cdot53$	$3\cdot1237$	$2^7\cdot29$	$47\cdot79$	$2\cdot3\cdot619$	$5\cdot743$	$2^2\cdot929$	$3^2\cdot7\cdot59$	$2\cdot11\cdot13^2$	**3719**	371
372	$2^3\cdot3\cdot5\cdot31$	61^2	$2\cdot1861$	$3\cdot17\cdot73$	$2^2\cdot7^2\cdot19$	$5^2\cdot149$	$2\cdot3^4\cdot23$	**3727**	$2^4\cdot233$	$3\cdot11\cdot113$	372
373	$2\cdot5\cdot373$	$7\cdot13\cdot41$	$2^2\cdot3\cdot311$	**3733**	$2\cdot1867$	$3^2\cdot5\cdot83$	$2^3\cdot467$	$37\cdot101$	$2\cdot3\cdot7\cdot89$	**3739**	373
374	$2^2\cdot5\cdot11\cdot17$	$3\cdot29\cdot43$	$2\cdot1871$	$19\cdot197$	$2^5\cdot3^2\cdot13$	$5\cdot7\cdot107$	$2\cdot1873$	$3\cdot1249$	$2^2\cdot937$	$23\cdot163$	374
375	$2\cdot3\cdot5^4$	$11^2\cdot31$	$2^3\cdot7\cdot67$	$3^3\cdot139$	$2\cdot1877$	$5\cdot751$	$2^2\cdot3\cdot313$	$13\cdot17^2$	$2\cdot1879$	$3\cdot7\cdot179$	375
376	$2^4\cdot5\cdot47$	**3761**	$2\cdot3^2\cdot11\cdot19$	$53\cdot71$	$2^2\cdot941$	$3\cdot5\cdot251$	$2\cdot7\cdot269$	**3767**	$2^3\cdot3\cdot157$	**3769**	376
377	$2\cdot5\cdot13\cdot29$	$3^2\cdot419$	$2^2\cdot23\cdot41$	$7^3\cdot11$	$2\cdot3\cdot17\cdot37$	$5^2\cdot151$	$2^6\cdot59$	$3\cdot1259$	$2\cdot1889$	**3779**	377
378	$2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7$	$19\cdot199$	$2\cdot31\cdot61$	$3\cdot13\cdot97$	$2^4\cdot11\cdot43$	$5\cdot757$	$2\cdot3\cdot631$	$7\cdot541$	$2^2\cdot947$	$3^2\cdot421$	378
379	$2\cdot5\cdot379$	$17\cdot223$	$2^4\cdot3\cdot79$	**3793**	$2\cdot7\cdot271$	$3\cdot5\cdot11\cdot23$	$2^2\cdot13\cdot73$	**3797**	$2\cdot3^2\cdot211$	$29\cdot131$	379
380	$2^3\cdot5^2\cdot19$	$3\cdot7\cdot181$	$2\cdot1901$	**3803**	$2^2\cdot3\cdot317$	$5\cdot761$	$2\cdot11\cdot173$	$3^4\cdot47$	$2^6\cdot7\cdot17$	$13\cdot293$	380
381	$2\cdot3\cdot5\cdot127$	$37\cdot103$	$2^2\cdot953$	$3\cdot31\cdot41$	$2\cdot1907$	$5\cdot7\cdot109$	$2^3\cdot3^2\cdot53$	$11\cdot347$	$2\cdot23\cdot83$	$3\cdot19\cdot67$	381
382	$2^2\cdot5\cdot191$	**3821**	$2\cdot3\cdot7^2\cdot13$	**3823**	$2^4\cdot239$	$3^2\cdot5^2\cdot17$	$2\cdot1913$	$43\cdot89$	$2^2\cdot3\cdot11\cdot29$	$7\cdot547$	382
383	$2\cdot5\cdot383$	$3\cdot1277$	$2^3\cdot479$	**3833**	$2\cdot3^3\cdot71$	$5\cdot13\cdot59$	$2^2\cdot7\cdot137$	$3\cdot1279$	$2\cdot19\cdot101$	$11\cdot349$	383
384	$2^8\cdot3\cdot5$	$23\cdot167$	$2\cdot17\cdot113$	$3^2\cdot7\cdot61$	$2^2\cdot31^2$	$5\cdot769$	$2\cdot3\cdot641$	**3847**	$2^3\cdot13\cdot37$	$3\cdot1283$	384
385	$2\cdot5^2\cdot7\cdot11$	**3851**	$2^2\cdot3^2\cdot107$	**3853**	$2\cdot41\cdot47$	$3\cdot5\cdot257$	$2^4\cdot241$	$7\cdot19\cdot29$	$2\cdot3\cdot643$	$17\cdot227$	385
386	$2^2\cdot5\cdot193$	$3^3\cdot11\cdot13$	$2\cdot1931$	**3863**	$2^3\cdot3\cdot7\cdot23$	$5\cdot773$	$2\cdot1933$	$3\cdot1289$	$2^2\cdot967$	$53\cdot73$	386
387	$2\cdot3^2\cdot5\cdot43$	$7^2\cdot79$	$2^5\cdot11^2$	$3\cdot1291$	$2\cdot13\cdot149$	$5^3\cdot31$	$2^2\cdot3\cdot17\cdot19$	**3877**	$2\cdot7\cdot277$	$3^2\cdot431$	387
388	$2^3\cdot5\cdot97$	**3881**	$2\cdot3\cdot647$	$11\cdot353$	$2^2\cdot971$	$3\cdot5\cdot7\cdot37$	$2\cdot29\cdot67$	$13^2\cdot23$	$2^4\cdot3^5$	**3889**	388
389	$2\cdot5\cdot389$	$3\cdot1297$	$2^2\cdot7\cdot139$	$17\cdot229$	$2\cdot3\cdot11\cdot59$	$5\cdot19\cdot41$	$2^3\cdot487$	$3^2\cdot433$	$2\cdot1949$	$7\cdot557$	389
390	$2^2\cdot3\cdot5^2\cdot13$	$47\cdot83$	$2\cdot1951$	$3\cdot1301$	$2^6\cdot61$	$5\cdot11\cdot71$	$2\cdot3^2\cdot7\cdot31$	**3907**	$2^2\cdot977$	$3\cdot1303$	390
391	$2\cdot5\cdot17\cdot23$	**3911**	$2^3\cdot3\cdot163$	$7\cdot13\cdot43$	$2\cdot19\cdot103$	$3^3\cdot5\cdot29$	$2^2\cdot11\cdot89$	**3917**	$2\cdot3\cdot653$	**3919**	391
392	$2^4\cdot5\cdot7^2$	$3\cdot1307$	$2\cdot37\cdot53$	**3923**	$2^2\cdot3^2\cdot109$	$5^2\cdot157$	$2\cdot13\cdot151$	$3\cdot7\cdot11\cdot17$	$2^3\cdot491$	**3929**	392
393	$2\cdot3\cdot5\cdot131$	**3931**	$2^2\cdot983$	$3^2\cdot19\cdot23$	$2\cdot7\cdot281$	$5\cdot787$	$2^5\cdot3\cdot41$	$31\cdot127$	$2\cdot11\cdot179$	$3\cdot13\cdot101$	393
394	$2^2\cdot5\cdot197$	$7\cdot563$	$2\cdot3^3\cdot73$	**3943**	$2^3\cdot17\cdot29$	$3\cdot5\cdot263$	$2\cdot1973$	**3947**	$2^2\cdot3\cdot7\cdot47$	$11\cdot359$	394
395	$2\cdot5^2\cdot79$	$3^2\cdot439$	$2^4\cdot13\cdot19$	$59\cdot67$	$2\cdot3\cdot659$	$5\cdot7\cdot113$	$2^2\cdot23\cdot43$	$3\cdot1319$	$2\cdot1979$	$37\cdot107$	395
396	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot11$	$17\cdot233$	$2\cdot7\cdot283$	$3\cdot1321$	$2^2\cdot991$	$5\cdot13\cdot61$	$2\cdot3\cdot661$	**3967**	$2^7\cdot31$	$3^4\cdot7^2$	396
397	$2\cdot5\cdot397$	$11\cdot19^2$	$2^2\cdot3\cdot331$	$29\cdot137$	$2\cdot1987$	$3\cdot5^2\cdot53$	$2^3\cdot7\cdot71$	$41\cdot97$	$2\cdot3^2\cdot13\cdot17$	$23\cdot173$	397
398	$2^2\cdot5\cdot199$	$3\cdot1327$	$2\cdot11\cdot181$	$7\cdot569$	$2^4\cdot3\cdot83$	$5\cdot797$	$2\cdot1993$	$3^2\cdot443$	$2^2\cdot997$	**3989**	398
399	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot19$	$13\cdot307$	$2^3\cdot499$	$3\cdot11^3$	$2\cdot1997$	$5\cdot17\cdot47$	$2^2\cdot3^3\cdot37$	$7\cdot571$	$2\cdot1999$	$3\cdot31\cdot43$	399

3999

4000

Таблица 24.7. Разложения на множители

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
400	$2^5\cdot5^2$	4001	$2\cdot3\cdot23\cdot29$	4003	$2^2\cdot7\cdot11\cdot13$	$3^2\cdot5\cdot89$	$2\cdot2003$	4007	$2^3\cdot3\cdot167$	$19\cdot211$	400
401	$2\cdot5\cdot401$	$3\cdot7\cdot191$	$2^2\cdot17\cdot59$	4013	$2\cdot3^2\cdot223$	$5\cdot11\cdot73$	$2^4\cdot251$	$3\cdot13\cdot103$	$2\cdot7^2\cdot41$	4019	401
402	$2^2\cdot3\cdot5\cdot67$	4021	$2\cdot2011$	$3^3\cdot149$	$2^3\cdot503$	$5^2\cdot7\cdot23$	$2\cdot3\cdot11\cdot61$	4027	$2^2\cdot19\cdot53$	$3\cdot17\cdot79$	402
403	$2\cdot5\cdot13\cdot31$	$29\cdot139$	$2^6\cdot3^2\cdot7$	$37\cdot109$	$2\cdot2017$	$3\cdot5\cdot269$	$2^2\cdot1009$	$11\cdot367$	$2\cdot3\cdot673$	$7\cdot577$	403
404	$2^3\cdot5\cdot101$	$3^2\cdot449$	$2\cdot43\cdot47$	$13\cdot311$	$2^2\cdot3\cdot337$	$5\cdot809$	$2\cdot7\cdot17^2$	$3\cdot19\cdot71$	$2^4\cdot11\cdot23$	4049	404
405	$2\cdot3^4\cdot5^2$	4051	$2^2\cdot1013$	$3\cdot7\cdot193$	$2\cdot2027$	$5\cdot811$	$2^3\cdot3\cdot13^2$	4057	$2\cdot2029$	$3^2\cdot11\cdot41$	405
406	$2^2\cdot5\cdot7\cdot29$	$31\cdot131$	$2\cdot3\cdot677$	$17\cdot239$	$2^5\cdot127$	$3\cdot5\cdot271$	$2\cdot19\cdot107$	$7^2\cdot83$	$2^2\cdot3^2\cdot113$	$13\cdot313$	406
407	$2\cdot5\cdot11\cdot37$	$3\cdot23\cdot59$	$2^3\cdot509$	4073	$2\cdot3\cdot7\cdot97$	$5^2\cdot163$	$2^2\cdot1019$	$3^3\cdot151$	$2\cdot2039$	4079	407
408	$2^4\cdot3\cdot5\cdot17$	$7\cdot11\cdot53$	$2\cdot13\cdot157$	$3\cdot1361$	$2^2\cdot1021$	$5\cdot19\cdot43$	$2\cdot3^2\cdot227$	$61\cdot67$	$2^3\cdot7\cdot73$	$3\cdot29\cdot47$	408
409	$2\cdot5\cdot409$	4091	$2^2\cdot3\cdot11\cdot31$	4093	$2\cdot23\cdot89$	$3^2\cdot5\cdot7\cdot13$	2^{12}	$17\cdot241$	$2\cdot3\cdot683$	4099	409
410	$2^2\cdot5^2\cdot41$	$3\cdot1367$	$2\cdot7\cdot293$	$11\cdot373$	$2^3\cdot3^3\cdot19$	$5\cdot821$	$2\cdot2053$	$3\cdot37^2$	$2^2\cdot13\cdot79$	$7\cdot587$	410
411	$2\cdot3\cdot5\cdot137$	4111	$2^4\cdot257$	$3^2\cdot457$	$2\cdot11^2\cdot17$	$5\cdot823$	$2^2\cdot3\cdot7^3$	$23\cdot179$	$2\cdot29\cdot71$	$3\cdot1373$	411
412	$2^3\cdot5\cdot103$	$13\cdot317$	$2\cdot3^2\cdot229$	$7\cdot19\cdot31$	$2^2\cdot1031$	$3\cdot5^3\cdot11$	$2\cdot2063$	4127	$2^5\cdot3\cdot43$	4129	412
413	$2\cdot5\cdot7\cdot59$	$3^5\cdot17$	$2^2\cdot1033$	4133	$2\cdot3\cdot13\cdot53$	$5\cdot827$	$2^3\cdot11\cdot47$	$3\cdot7\cdot197$	$2\cdot2069$	4139	413
414	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot23$	$41\cdot101$	$2\cdot19\cdot109$	$3\cdot1381$	$2^4\cdot7\cdot37$	$5\cdot829$	$2\cdot3\cdot691$	$11\cdot13\cdot29$	$2^2\cdot17\cdot61$	$3^2\cdot461$	414
415	$2\cdot5^2\cdot83$	$7\cdot593$	$2^3\cdot3\cdot173$	4153	$2\cdot31\cdot67$	$3\cdot5\cdot277$	$2^2\cdot1039$	4157	$2\cdot3^3\cdot7\cdot11$	4159	415
416	$2^6\cdot5\cdot13$	$3\cdot19\cdot73$	$2\cdot2081$	$23\cdot181$	$2^2\cdot3\cdot347$	$5\cdot7^2\cdot17$	$2\cdot2083$	$3^2\cdot463$	$2^3\cdot521$	$11\cdot379$	416
417	$2\cdot3\cdot5\cdot139$	$43\cdot97$	$2^2\cdot7\cdot149$	$3\cdot13\cdot107$	$2\cdot2087$	$5^2\cdot167$	$2^4\cdot3^2\cdot29$	4177	$2\cdot2089$	$3\cdot7\cdot199$	417
418	$2^2\cdot5\cdot11\cdot19$	$37\cdot113$	$2\cdot3\cdot17\cdot41$	$47\cdot89$	$2^3\cdot523$	$3^2\cdot5\cdot31$	$2\cdot7\cdot13\cdot23$	$53\cdot79$	$2^2\cdot3\cdot349$	$59\cdot71$	418
419	$2\cdot5\cdot419$	$3\cdot11\cdot127$	$2^5\cdot131$	$7\cdot599$	$2\cdot3^2\cdot233$	$5\cdot839$	$2^2\cdot1049$	$3\cdot1399$	$2\cdot2099$	$13\cdot17\cdot19$	419
420	$2^3\cdot3\cdot5^2\cdot7$	4201	$2\cdot11\cdot191$	$3^2\cdot467$	$2^2\cdot1051$	$5\cdot29^2$	$2\cdot3\cdot701$	$7\cdot601$	$2^4\cdot263$	$3\cdot23\cdot61$	420
421	$2\cdot5\cdot421$	4211	$2^2\cdot3^4\cdot13$	$11\cdot383$	$2\cdot7^2\cdot43$	$3\cdot5\cdot281$	$2^3\cdot17\cdot31$	4217	$2\cdot3\cdot19\cdot37$	4219	421
422	$2^2\cdot5\cdot211$	$3^2\cdot7\cdot67$	$2\cdot2111$	$41\cdot103$	$2^7\cdot3\cdot11$	$5^2\cdot13^2$	$2\cdot2113$	$3\cdot1409$	$2^2\cdot7\cdot151$	4229	422
423	$2\cdot3^2\cdot5\cdot47$	4231	$2^3\cdot23^2$	$3\cdot17\cdot83$	$2\cdot29\cdot73$	$5\cdot7\cdot11^2$	$2^2\cdot3\cdot353$	$19\cdot223$	$2\cdot13\cdot163$	$3^3\cdot157$	423
424	$2^4\cdot5\cdot53$	4241	$2\cdot3\cdot7\cdot101$	4243	$2^2\cdot1061$	$3\cdot5\cdot283$	$2\cdot11\cdot193$	$31\cdot137$	$2^3\cdot3^2\cdot59$	$7\cdot607$	424
425	$2\cdot5^3\cdot17$	$3\cdot13\cdot109$	$2^2\cdot1063$	4253	$2\cdot3\cdot709$	$5\cdot23\cdot37$	$2^5\cdot7\cdot19$	$3^2\cdot11\cdot43$	$2\cdot2129$	4259	425
426	$2^2\cdot3\cdot5\cdot71$	4261	$2\cdot2131$	$3\cdot7^2\cdot29$	$2^3\cdot13\cdot41$	$5\cdot853$	$2\cdot3^3\cdot79$	$17\cdot251$	$2^2\cdot11\cdot97$	$3\cdot1423$	426
427	$2\cdot5\cdot7\cdot61$	4271	$2^4\cdot3\cdot89$	4273	$2\cdot2137$	$3^2\cdot5^2\cdot19$	$2^2\cdot1069$	$7\cdot13\cdot47$	$2\cdot3\cdot23\cdot31$	$11\cdot389$	427
428	$2^3\cdot5\cdot107$	$3\cdot1427$	$2\cdot2141$	4283	$2^2\cdot3^2\cdot7\cdot17$	$5\cdot857$	$2\cdot2143$	$3\cdot1429$	$2^6\cdot67$	4289	428
429	$2\cdot3\cdot5\cdot11\cdot13$	$7\cdot613$	$2^2\cdot29\cdot37$	$3^4\cdot53$	$2\cdot19\cdot113$	$5\cdot859$	$2^3\cdot3\cdot179$	4297	$2\cdot7\cdot307$	$3\cdot1433$	429
430	$2^2\cdot5^2\cdot43$	$11\cdot17\cdot23$	$2\cdot3^2\cdot239$	$13\cdot331$	$2^4\cdot269$	$3\cdot5\cdot7\cdot41$	$2\cdot2153$	$59\cdot73$	$2^2\cdot3\cdot359$	$31\cdot139$	430
431	$2\cdot5\cdot431$	$3^2\cdot479$	$2^3\cdot7^2\cdot11$	$19\cdot227$	$2\cdot3\cdot719$	$5\cdot863$	$2^2\cdot13\cdot83$	$3\cdot1439$	$2\cdot17\cdot127$	$7\cdot617$	431
432	$2^5\cdot3^3\cdot5$	$29\cdot149$	$2\cdot2161$	$3\cdot11\cdot131$	$2^2\cdot23\cdot47$	$5^2\cdot173$	$2\cdot3\cdot7\cdot103$	4327	$2^4\cdot541$	$3^2\cdot13\cdot37$	432
433	$2\cdot5\cdot433$	$61\cdot71$	$2^2\cdot3\cdot19^2$	$7\cdot619$	$2\cdot11\cdot197$	$3\cdot5\cdot17^2$	$2^3\cdot271$	4337	$2\cdot3^2\cdot241$	4339	433
434	$2^2\cdot5\cdot7\cdot31$	$3\cdot1447$	$2\cdot13\cdot167$	$43\cdot101$	$2^3\cdot3\cdot181$	$5\cdot11\cdot79$	$2\cdot41\cdot53$	$3^3\cdot7\cdot23$	$2^2\cdot1087$	4349	434
435	$2\cdot3\cdot5^2\cdot29$	$19\cdot229$	$2^8\cdot17$	$3\cdot1451$	$2\cdot7\cdot311$	$5\cdot13\cdot67$	$2^2\cdot3^2\cdot11^2$	4357	$2\cdot2179$	$3\cdot1453$	435
436	$2^3\cdot5\cdot109$	$7^2\cdot89$	$2\cdot3\cdot727$	4363	$2^2\cdot1091$	$3^2\cdot5\cdot97$	$2\cdot37\cdot59$	$11\cdot397$	$2^4\cdot3\cdot7\cdot13$	$17\cdot257$	436
437	$2\cdot5\cdot19\cdot23$	$3\cdot31\cdot47$	$2^2\cdot1093$	4373	$2\cdot3^7$	$5^4\cdot7$	$2^3\cdot547$	$3\cdot1459$	$2\cdot11\cdot199$	$29\cdot151$	437
438	$2^2\cdot3\cdot5\cdot73$	$13\cdot337$	$2\cdot7\cdot313$	$3^2\cdot487$	$2^6\cdot137$	$5\cdot877$	$2\cdot3\cdot17\cdot43$	$41\cdot107$	$2^2\cdot1097$	$3\cdot7\cdot11\cdot19$	438
439	$2\cdot5\cdot439$	4391	$2^3\cdot3^2\cdot61$	$23\cdot191$	$2\cdot13^3$	$3\cdot5\cdot293$	$2^2\cdot7\cdot157$	4397	$2\cdot3\cdot733$	$53\cdot83$	439
440	$2^4\cdot5^2\cdot11$	$3^3\cdot163$	$2\cdot31\cdot71$	$7\cdot17\cdot37$	$2^2\cdot3\cdot367$	$5\cdot881$	$2\cdot2203$	$3\cdot13\cdot113$	$2^3\cdot19\cdot29$	4409	440
441	$2\cdot3^2\cdot5\cdot7^2$	$11\cdot401$	$2^2\cdot1103$	$3\cdot1471$	$2\cdot2207$	$5\cdot883$	$2^6\cdot3\cdot23$	$7\cdot631$	$2\cdot47^2$	$3^2\cdot491$	441
442	$2^2\cdot5\cdot13\cdot17$	4421	$2\cdot3\cdot11\cdot67$	4423	$2^3\cdot7\cdot79$	$3\cdot5^2\cdot59$	$2\cdot2213$	$19\cdot233$	$2^2\cdot3^3\cdot41$	$43\cdot103$	442
443	$2\cdot5\cdot443$	$3\cdot7\cdot211$	$2^4\cdot277$	$11\cdot13\cdot31$	$2\cdot3\cdot739$	$5\cdot887$	$2^2\cdot1109$	$3^2\cdot17\cdot29$	$2\cdot7\cdot317$	$23\cdot193$	443
444	$2^3\cdot3\cdot5\cdot37$	4441	$2\cdot2221$	$3\cdot1481$	$2^2\cdot11\cdot101$	$5\cdot7\cdot127$	$2\cdot3^2\cdot13\cdot19$	4447	$2^5\cdot139$	$3\cdot1483$	444
445	$2\cdot5^2\cdot89$	4451	$2^2\cdot3\cdot7\cdot53$	$61\cdot73$	$2\cdot17\cdot131$	$3^4\cdot5\cdot11$	$2^3\cdot557$	4457	$2\cdot3\cdot743$	$7^3\cdot13$	445
446	$2^2\cdot5\cdot223$	$3\cdot1487$	$2\cdot23\cdot97$	4463	$2^4\cdot3^2\cdot31$	$5\cdot19\cdot47$	$2\cdot7\cdot11\cdot29$	$3\cdot1489$	$2^2\cdot1117$	$41\cdot109$	446
447	$2\cdot3\cdot5\cdot149$	$17\cdot263$	$2^3\cdot13\cdot43$	$3^2\cdot7\cdot71$	$2\cdot2237$	$5^2\cdot179$	$2^2\cdot3\cdot373$	$11^2\cdot37$	$2\cdot2239$	$3\cdot1493$	447
448	$2^7\cdot5\cdot7$	4481	$2\cdot3^3\cdot83$	4483	$2^2\cdot19\cdot59$	$3\cdot5\cdot13\cdot23$	$2\cdot2243$	$7\cdot641$	$2^3\cdot3\cdot11\cdot17$	67^2	448
449	$2\cdot5\cdot449$	$3^2\cdot499$	$2^2\cdot1123$	4493	$2\cdot3\cdot7\cdot107$	$5\cdot29\cdot31$	$2^4\cdot281$	$3\cdot1499$	$2\cdot13\cdot173$	$11\cdot409$	449

4499

4500

450	$2^2\cdot3^2\cdot5^3$	$7\cdot643$	$2\cdot2251$	$3\cdot19\cdot79$	$2^3\cdot563$	$5\cdot17\cdot53$	$2\cdot3\cdot751$	**4507**	$2^2\cdot7^2\cdot23$	$3^3\cdot167$	450
451	$2\cdot5\cdot11\cdot41$	$13\cdot347$	$2^5\cdot3\cdot47$	**4513**	$2\cdot37\cdot61$	$3\cdot5\cdot7\cdot43$	$2^2\cdot1129$	**4517**	$2\cdot3^2\cdot251$	**4519**	451
452	$2^3\cdot5\cdot113$	$3\cdot11\cdot137$	$2\cdot7\cdot17\cdot19$	**4523**	$2^2\cdot3\cdot13\cdot29$	$5^2\cdot181$	$2\cdot31\cdot73$	$3^2\cdot503$	$2^4\cdot283$	$7\cdot647$	452
453	$2\cdot3\cdot5\cdot151$	$23\cdot197$	$2^2\cdot11\cdot103$	$3\cdot1511$	$2\cdot2267$	$5\cdot907$	$2^3\cdot3^4\cdot7$	$13\cdot349$	$2\cdot2269$	$3\cdot17\cdot89$	453
454	$2^2\cdot5\cdot227$	$19\cdot239$	$2\cdot3\cdot757$	$7\cdot11\cdot59$	$2^6\cdot71$	$3^2\cdot5\cdot101$	$2\cdot2273$	**4547**	$2^2\cdot3\cdot379$	**4549**	454
455	$2\cdot5^2\cdot7\cdot13$	$3\cdot37\cdot41$	$2^3\cdot569$	$29\cdot157$	$2\cdot3^2\cdot11\cdot23$	$5\cdot911$	$2^2\cdot17\cdot67$	$3\cdot7^2\cdot31$	$2\cdot43\cdot53$	$47\cdot97$	455
456	$2^4\cdot3\cdot5\cdot19$	**4561**	$2\cdot2281$	$3^3\cdot13^2$	$2^2\cdot7\cdot163$	$5\cdot11\cdot83$	$2\cdot3\cdot761$	**4567**	$2^3\cdot571$	$3\cdot1523$	456
457	$2\cdot5\cdot457$	$7\cdot653$	$2^2\cdot3^2\cdot127$	$17\cdot269$	$2\cdot2287$	$3\cdot5^2\cdot61$	$2^5\cdot11\cdot13$	$23\cdot199$	$2\cdot3\cdot7\cdot109$	$19\cdot241$	457
458	$2^2\cdot5\cdot229$	$3^2\cdot509$	$2\cdot29\cdot79$	**4583**	$2^3\cdot3\cdot191$	$5\cdot7\cdot131$	$2\cdot2293$	$3\cdot11\cdot139$	$2^2\cdot31\cdot37$	$13\cdot353$	458
459	$2\cdot3^3\cdot5\cdot17$	**4591**	$2^4\cdot7\cdot41$	$3\cdot1531$	$2\cdot2297$	$5\cdot919$	$2^2\cdot3\cdot383$	**4597**	$2\cdot11^2\cdot19$	$3^2\cdot7\cdot73$	459
460	$2^3\cdot5^2\cdot23$	$43\cdot107$	$2\cdot3\cdot13\cdot59$	**4603**	$2^2\cdot1151$	$3\cdot5\cdot307$	$2\cdot7^2\cdot47$	$17\cdot271$	$2^9\cdot3^2$	$11\cdot419$	460
461	$2\cdot5\cdot461$	$3\cdot29\cdot53$	$2^2\cdot1153$	$7\cdot659$	$2\cdot3\cdot769$	$5\cdot13\cdot71$	$2^3\cdot577$	$3^5\cdot19$	$2\cdot2309$	$31\cdot149$	461
462	$2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$	**4621**	$2\cdot2311$	$3\cdot23\cdot67$	$2^4\cdot17^2$	$5^4\cdot37$	$2\cdot3^2\cdot257$	$7\cdot661$	$2^2\cdot13\cdot89$	$3\cdot1543$	462
463	$2\cdot5\cdot463$	$11\cdot421$	$2^3\cdot3\cdot193$	$41\cdot113$	$2\cdot7\cdot331$	$3^2\cdot5\cdot103$	$2^2\cdot19\cdot61$	**4637**	$2\cdot3\cdot773$	**4639**	463
464	$2^5\cdot5\cdot29$	$3\cdot7\cdot13\cdot17$	$2\cdot11\cdot211$	**4643**	$2^2\cdot3^3\cdot43$	$5\cdot929$	$2\cdot23\cdot101$	$3\cdot1549$	$2^3\cdot7\cdot83$	**4649**	464
465	$2\cdot3\cdot5^2\cdot31$	**4651**	$2^2\cdot1163$	$3^2\cdot11\cdot47$	$2\cdot13\cdot179$	$5\cdot7^2\cdot19$	$2^4\cdot3\cdot97$	**4657**	$2\cdot17\cdot137$	$3\cdot1553$	465
466	$2^2\cdot5\cdot233$	$59\cdot79$	$2\cdot3^2\cdot7\cdot37$	**4663**	$2^3\cdot11\cdot53$	$3\cdot5\cdot311$	$2\cdot2333$	$13\cdot359$	$2^2\cdot3\cdot389$	$7\cdot23\cdot29$	466
467	$2\cdot5\cdot467$	$3^3\cdot173$	$2^6\cdot73$	**4673**	$2\cdot3\cdot19\cdot41$	$5^2\cdot11\cdot17$	$2^2\cdot7\cdot167$	$3\cdot1559$	$2\cdot2339$	**4679**	467
468	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot13$	$31\cdot151$	$2\cdot2341$	$3\cdot7\cdot223$	$2^2\cdot1171$	$5\cdot937$	$2\cdot3\cdot11\cdot71$	$43\cdot109$	$2^4\cdot293$	$3^2\cdot521$	468
469	$2\cdot5\cdot7\cdot67$	**4691**	$2^2\cdot3\cdot17\cdot23$	$13\cdot19^2$	$2\cdot2347$	$3\cdot5\cdot313$	$2^3\cdot587$	$7\cdot11\cdot61$	$2\cdot3^4\cdot29$	$37\cdot127$	469
470	$2^2\cdot5^2\cdot47$	$3\cdot1567$	$2\cdot2351$	**4703**	$2^6\cdot3\cdot7^2$	$5\cdot941$	$2\cdot13\cdot181$	$3^2\cdot523$	$2^2\cdot11\cdot107$	$17\cdot277$	470
471	$2\cdot3\cdot5\cdot157$	$7\cdot673$	$2^3\cdot19\cdot31$	$3\cdot1571$	$2\cdot2357$	$5\cdot23\cdot41$	$2^2\cdot3^2\cdot131$	$53\cdot89$	$2\cdot7\cdot337$	$3\cdot11^2\cdot13$	471
472	$2^4\cdot5\cdot59$	**4721**	$2\cdot3\cdot787$	**4723**	$2^2\cdot1181$	$3^3\cdot5^2\cdot7$	$2\cdot17\cdot139$	$29\cdot163$	$2^3\cdot3\cdot197$	**4729**	472
473	$2\cdot5\cdot11\cdot43$	$3\cdot19\cdot83$	$2^2\cdot7\cdot13^2$	**4733**	$2\cdot3^2\cdot263$	$5\cdot947$	$2^7\cdot37$	$3\cdot1579$	$2\cdot23\cdot103$	$7\cdot677$	473
474	$2^2\cdot3\cdot5\cdot79$	$11\cdot431$	$2\cdot2371$	$3^2\cdot17\cdot31$	$2^3\cdot593$	$5\cdot13\cdot73$	$2\cdot3\cdot7\cdot113$	$47\cdot101$	$2^2\cdot1187$	$3\cdot1583$	474
475	$2\cdot5^3\cdot19$	**4751**	$2^4\cdot3^3\cdot11$	$7^2\cdot97$	$2\cdot2377$	$3\cdot5\cdot317$	$2^2\cdot29\cdot41$	$67\cdot71$	$2\cdot3\cdot13\cdot61$	**4759**	475
476	$2^3\cdot5\cdot7\cdot17$	$3^2\cdot23^2$	$2\cdot2381$	$11\cdot433$	$2^2\cdot3\cdot397$	$5\cdot953$	$2\cdot2383$	$3\cdot7\cdot227$	$2^4\cdot149$	$19\cdot251$	476
477	$2\cdot3^2\cdot5\cdot53$	$13\cdot367$	$2^2\cdot1193$	$3\cdot37\cdot43$	$2\cdot7\cdot11\cdot31$	$5^2\cdot191$	$2^3\cdot3\cdot199$	$17\cdot281$	$2\cdot2389$	$3^4\cdot59$	477
478	$2^2\cdot5\cdot239$	$7\cdot683$	$2\cdot3\cdot797$	**4783**	$2^4\cdot13\cdot23$	$3\cdot5\cdot11\cdot29$	$2\cdot2393$	**4787**	$2^2\cdot3^2\cdot7\cdot19$	**4789**	478
479	$2\cdot5\cdot479$	$3\cdot1597$	$2^3\cdot599$	**4793**	$2\cdot3\cdot17\cdot47$	$5\cdot7\cdot137$	$2^2\cdot11\cdot109$	$3^2\cdot13\cdot41$	$2\cdot2399$	**4799**	479
480	$2^6\cdot3\cdot5^2$	**4801**	$2\cdot7^4$	$3\cdot1601$	$2^2\cdot1201$	$5\cdot31^2$	$2\cdot3^3\cdot89$	$11\cdot19\cdot23$	$2^3\cdot601$	$3\cdot7\cdot229$	480
481	$2\cdot5\cdot13\cdot37$	$17\cdot283$	$2^2\cdot3\cdot401$	**4813**	$2\cdot29\cdot83$	$3^2\cdot5\cdot107$	$2^4\cdot7\cdot43$	**4817**	$2\cdot3\cdot11\cdot73$	$61\cdot79$	481
482	$2^2\cdot5\cdot241$	$3\cdot1607$	$2\cdot2411$	$7\cdot13\cdot53$	$2^3\cdot3^2\cdot67$	$5^2\cdot193$	$2\cdot19\cdot127$	$3\cdot1609$	$2^2\cdot17\cdot71$	$11\cdot439$	482
483	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot23$	**4831**	$2^5\cdot151$	$3^3\cdot179$	$2\cdot2417$	$5\cdot967$	$2^2\cdot3\cdot13\cdot31$	$7\cdot691$	$2\cdot41\cdot59$	$3\cdot1613$	483
484	$2^3\cdot5\cdot11^2$	$47\cdot103$	$2\cdot3^2\cdot269$	$29\cdot167$	$2^2\cdot7\cdot173$	$3\cdot5\cdot17\cdot19$	$2\cdot2423$	$37\cdot131$	$2^4\cdot3\cdot101$	$13\cdot373$	484
485	$2\cdot5^2\cdot97$	$3^2\cdot7^2\cdot11$	$2^2\cdot1213$	$23\cdot211$	$2\cdot3\cdot809$	$5\cdot971$	$2^3\cdot607$	$3\cdot1619$	$2\cdot7\cdot347$	$43\cdot113$	485
486	$2^2\cdot3^5\cdot5$	**4861**	$2\cdot11\cdot13\cdot17$	$3\cdot1621$	$2^8\cdot19$	$5\cdot7\cdot139$	$2\cdot3\cdot811$	$31\cdot157$	$2^2\cdot1217$	$3^2\cdot541$	486
487	$2\cdot5\cdot487$	**4871**	$2^3\cdot3\cdot7\cdot29$	$11\cdot443$	$2\cdot2437$	$3\cdot5^3\cdot13$	$2^2\cdot23\cdot53$	**4877**	$2\cdot3^2\cdot271$	$7\cdot17\cdot41$	487
488	$2^4\cdot5\cdot61$	$3\cdot1627$	$2\cdot2441$	$19\cdot257$	$2^2\cdot3\cdot11\cdot37$	$5\cdot977$	$2\cdot7\cdot349$	$3^3\cdot181$	$2^3\cdot13\cdot47$	**4889**	488
489	$2\cdot3\cdot5\cdot163$	$67\cdot73$	$2^2\cdot1223$	$3\cdot7\cdot233$	$2\cdot2447$	$5\cdot11\cdot89$	$2^5\cdot3^2\cdot17$	$59\cdot83$	$2\cdot31\cdot79$	$3\cdot23\cdot71$	489
490	$2^2\cdot5^2\cdot7^2$	$13^2\cdot29$	$2\cdot3\cdot19\cdot43$	**4903**	$2^3\cdot613$	$3^2\cdot5\cdot109$	$2\cdot11\cdot223$	$7\cdot701$	$2^2\cdot3\cdot409$	**4909**	490
491	$2\cdot5\cdot491$	$3\cdot1637$	$2^4\cdot307$	17^3	$2\cdot3^3\cdot7\cdot13$	$5\cdot983$	$2^2\cdot1229$	$3\cdot11\cdot149$	$2\cdot2459$	**4919**	491
492	$2^3\cdot3\cdot5\cdot41$	$7\cdot19\cdot37$	$2\cdot23\cdot107$	$3^2\cdot547$	$2^2\cdot1231$	$5^2\cdot197$	$2\cdot3\cdot821$	$13\cdot379$	$2^6\cdot7\cdot11$	$3\cdot31\cdot53$	492
493	$2\cdot5\cdot17\cdot29$	**4931**	$2^2\cdot3^2\cdot137$	**4933**	$2\cdot2467$	$3\cdot5\cdot7\cdot47$	$2^3\cdot617$	**4937**	$2\cdot3\cdot823$	$11\cdot449$	493
494	$2^2\cdot5\cdot13\cdot19$	$3^4\cdot61$	$2\cdot7\cdot353$	**4943**	$2^4\cdot3\cdot103$	$5\cdot23\cdot43$	$2\cdot2473$	$3\cdot17\cdot97$	$2^2\cdot1237$	$7^2\cdot101$	494
495	$2\cdot3^2\cdot5^2\cdot11$	**4951**	$2^3\cdot619$	$3\cdot13\cdot127$	$2\cdot2477$	$5\cdot991$	$2^2\cdot3\cdot7\cdot59$	**4957**	$2\cdot37\cdot67$	$3^2\cdot19\cdot29$	495
496	$2^5\cdot5\cdot31$	$11^2\cdot41$	$2\cdot3\cdot827$	$7\cdot709$	$2^2\cdot17\cdot73$	$3\cdot5\cdot331$	$2\cdot13\cdot191$	**4967**	$2^3\cdot3^3\cdot23$	**4969**	496
497	$2\cdot5\cdot7\cdot71$	$3\cdot1657$	$2^2\cdot11\cdot113$	**4973**	$2\cdot3\cdot829$	$5^2\cdot199$	$2^4\cdot311$	$3^2\cdot7\cdot79$	$2\cdot19\cdot131$	$13\cdot383$	497
498	$2^2\cdot3\cdot5\cdot83$	$17\cdot293$	$2\cdot47\cdot53$	$3\cdot11\cdot151$	$2^3\cdot7\cdot89$	$5\cdot997$	$2\cdot3^2\cdot277$	**4987**	$2^2\cdot29\cdot43$	$3\cdot1663$	498
499	$2\cdot5\cdot499$	$7\cdot23\cdot31$	$2^7\cdot3\cdot13$	4993	$2\cdot11\cdot227$	$3^3\cdot5\cdot37$	$2^2\cdot1249$	$19\cdot263$	$2\cdot3\cdot7^2\cdot17$	**4999**	499

4999

Таблица 24.7. Разложения на множители

5000 — 5499

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
500	$2^3\cdot5^4$	3·1667	2·41·61	**5003**	$2^2\cdot3^2\cdot139$	5·7·11·13	2·2503	3·1669	$2^4\cdot313$	**5009**	500
501	2·3·5·167	**5011**	$2^2\cdot7\cdot179$	$3^2\cdot557$	2·23·109	5·17·59	$2^3\cdot3\cdot11\cdot19$	29·173	2·13·193	3·7·239	501
502	$2^2\cdot5\cdot251$	**5021**	$2\cdot3^4\cdot31$	**5023**	$2^5\cdot157$	$3\cdot5^2\cdot67$	2·7·359	11·457	$2^2\cdot3\cdot419$	47·107	502
503	2·5·503	$3^2\cdot13\cdot43$	$2^3\cdot17\cdot37$	7·719	2·3·839	5·19·53	$2^2\cdot1259$	3·23·73	2·11·229	**5039**	503
504	$2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$	71^2	2·2521	$3\cdot41^2$	$2^2\cdot13\cdot97$	5·1009	$2\cdot3\cdot29^2$	$7^2\cdot103$	$2^3\cdot631$	$3^3\cdot11\cdot17$	504
505	$2\cdot5^2\cdot101$	**5051**	$2^2\cdot3\cdot421$	31·163	$2\cdot7\cdot19^2$	3·5·337	$2^6\cdot79$	13·389	$2\cdot3^2\cdot281$	**5059**	505
506	$2^2\cdot5\cdot11\cdot23$	3·7·241	2·2531	61·83	$2^3\cdot3\cdot211$	5·1013	2·17·149	$3^2\cdot563$	$2^2\cdot7\cdot181$	37·137	506
507	$2\cdot3\cdot5\cdot13^2$	11·461	$2^4\cdot317$	3·19·89	2·43·59	$5^2\cdot7\cdot29$	$2^2\cdot3^3\cdot47$	**5077**	2·2539	3·1693	507
508	$2^3\cdot5\cdot127$	**5081**	$2\cdot3\cdot7\cdot11^2$	13·17·23	$2^2\cdot31\cdot41$	$3^2\cdot5\cdot113$	2·2543	**5087**	$2^5\cdot3\cdot53$	7·727	508
509	2·5·509	3·1697	$2^2\cdot19\cdot67$	11·463	$2\cdot3^2\cdot283$	5·1019	$2^3\cdot7^2\cdot13$	3·1699	2·2549	**5099**	509
510	$2^2\cdot3\cdot5^2\cdot17$	**5101**	2·2551	$3^6\cdot7$	$2^4\cdot11\cdot29$	5·1021	2·3·23·37	**5107**	$2^2\cdot1277$	3·13·131	510
511	2·5·7·73	19·269	$2^3\cdot3^2\cdot71$	**5113**	2·2557	3·5·11·31	$2^2\cdot1279$	7·17·43	2·3·853	**5119**	511
512	$2^{10}\cdot5$	$3^2\cdot569$	2·13·197	47·109	$2^2\cdot3\cdot7\cdot61$	$5^3\cdot41$	2·11·233	3·1709	$2^3\cdot641$	23·223	512
513	$2\cdot3^3\cdot5\cdot19$	7·733	$2^2\cdot1283$	3·29·59	2·17·151	5·13·79	$2^4\cdot3\cdot107$	11·467	2·7·367	$3^2\cdot571$	513
514	$2^2\cdot5\cdot257$	53·97	2·3·857	37·139	$2^3\cdot643$	$3\cdot5\cdot7^3$	2·31·83	**5147**	$2^2\cdot3^2\cdot11\cdot13$	19·271	514
515	$2\cdot5^2\cdot103$	3·17·101	$2^5\cdot7\cdot23$	**5153**	2·3·859	5·1031	$2^2\cdot1289$	$3^3\cdot191$	2·2579	7·11·67	515
516	$2^3\cdot3\cdot5\cdot43$	13·397	2·29·89	3·1721	$2^2\cdot1291$	5·1033	$2\cdot3^2\cdot7\cdot41$	**5167**	$2^4\cdot17\cdot19$	3·1723	516
517	2·5·11·47	**5171**	$2^2\cdot3\cdot431$	7·739	2·13·199	$3^2\cdot5^2\cdot23$	$2^3\cdot647$	31·167	2·3·863	**5179**	517
518	$2^2\cdot5\cdot7\cdot37$	3·11·157	2·2591	71·73	$2^6\cdot3^4$	5·17·61	2·2593	3·7·13·19	$2^2\cdot1297$	**5189**	518
519	2·3·5·173	29·179	$2^3\cdot11\cdot59$	$3^2\cdot577$	$2\cdot7^2\cdot53$	5·1039	$2^2\cdot3\cdot433$	**5197**	2·23·113	3·1733	519
520	$2^4\cdot5^2\cdot13$	7·743	$2\cdot3^2\cdot17^2$	$11^2\cdot43$	$2^2\cdot1301$	3·5·347	2·19·137	41·127	$2^3\cdot3\cdot7\cdot31$	**5209**	520
521	2·5·521	$3^3\cdot193$	$2^2\cdot1303$	13·401	2·3·11·79	5·7·149	$2^5\cdot163$	3·37·47	2·2609	17·307	521
522	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot29$	23·227	2·7·373	3·1741	$2^3\cdot653$	$5^2\cdot11\cdot19$	2·3·13·67	**5227**	$2^2\cdot1307$	$3^2\cdot7\cdot83$	522
523	2·5·523	**5231**	$2^4\cdot3\cdot109$	**5233**	2·2617	3·5·349	$2^2\cdot7\cdot11\cdot17$	**5237**	$2\cdot3^3\cdot97$	$13^2\cdot31$	523
524	$2^3\cdot5\cdot131$	3·1747	2·2621	$7^2\cdot107$	$2^2\cdot3\cdot19\cdot23$	5·1049	2·43·61	$3^2\cdot11\cdot53$	$2^7\cdot41$	29·181	524
525	$2\cdot3\cdot5^3\cdot7$	59·89	$2^2\cdot13\cdot101$	3·17·103	2·37·71	5·1051	$2^3\cdot3^2\cdot73$	7·751	2·11·239	3·1753	525
526	$2^2\cdot5\cdot263$	**5261**	2·3·877	19·277	$2^4\cdot7\cdot47$	$3^4\cdot5\cdot13$	2·2633	23·229	$2^2\cdot3\cdot439$	11·479	526
527	2·5·17·31	3·7·251	$2^3\cdot659$	**5273**	$2\cdot3^2\cdot293$	$5^2\cdot211$	$2^2\cdot1319$	3·1759	2·7·13·29	**5279**	527
528	$2^5\cdot3\cdot5\cdot11$	**5281**	2·19·139	$3^2\cdot587$	$2^2\cdot1321$	5·7·151	2·3·881	17·311	$2^3\cdot661$	3·41·43	528
529	$2\cdot5\cdot23^2$	11·13·37	$2^2\cdot3^3\cdot7^2$	67·79	2·2647	3·5·353	$2^4\cdot331$	**5297**	2·3·883	7·757	529
530	$2^2\cdot5^2\cdot53$	$3^2\cdot19\cdot31$	2·11·241	**5303**	$2^3\cdot3\cdot13\cdot17$	5·1061	2·7·379	3·29·61	$2^2\cdot1327$	**5309**	530
531	$2\cdot3^2\cdot5\cdot59$	47·113	$2^6\cdot83$	3·7·11·23	2·2657	5·1063	$2^2\cdot3\cdot443$	13·409	2·2659	$3^3\cdot197$	531
532	$2^3\cdot5\cdot7\cdot19$	17·313	2·3·887	**5323**	$2^2\cdot11^3$	$3\cdot5^2\cdot71$	2·2663	7·761	$2^4\cdot3^2\cdot37$	73^2	532
533	2·5·13·41	3·1777	$2^2\cdot31\cdot43$	**5333**	2·3·7·127	5·11·97	$2^3\cdot23\cdot29$	$3^2\cdot593$	2·17·157	19·281	533
534	$2^2\cdot3\cdot5\cdot89$	$7^2\cdot109$	2·2671	3·13·137	$2^5\cdot167$	5·1069	$2\cdot3^5\cdot11$	**5347**	$2^2\cdot7\cdot191$	3·1783	534
535	$2\cdot5^2\cdot107$	**5351**	$2^3\cdot3\cdot223$	53·101	2·2677	$3^2\cdot5\cdot7\cdot17$	$2^2\cdot13\cdot103$	11·487	2·3·19·47	23·233	535
536	$2^4\cdot5\cdot67$	3·1787	2·7·383	31·173	$2^2\cdot3^2\cdot149$	5·29·37	2·2683	3·1789	$2^3\cdot11\cdot61$	7·13·59	536
537	2·3·5·179	41·131	$2^2\cdot17\cdot79$	$3^3\cdot199$	2·2687	$5^3\cdot43$	$2^8\cdot3\cdot7$	19·283	2·2689	3·11·163	537
538	$2^2\cdot5\cdot269$	**5381**	$2\cdot3^2\cdot13\cdot23$	7·769	$2^3\cdot673$	3·5·359	2·2693	**5387**	$2^2\cdot3\cdot449$	17·317	538
539	$2\cdot5\cdot7^2\cdot11$	$3^2\cdot599$	$2^4\cdot337$	**5393**	2·3·29·31	5·13·83	$2^2\cdot19\cdot71$	3·7·257	2·2699	**5399**	539
540	$2^3\cdot3^3\cdot5^2$	11·491	2·37·73	3·1801	$2^2\cdot7\cdot193$	5·23·47	2·3·17·53	**5407**	$2^5\cdot13^2$	$3^2\cdot601$	540
541	2·5·541	7·773	$2^2\cdot3\cdot11\cdot41$	**5413**	2·2707	$3\cdot5\cdot19^2$	$2^3\cdot677$	**5417**	$2\cdot3^2\cdot7\cdot43$	**5419**	541
542	$2^2\cdot5\cdot271$	3·13·139	2·2711	11·17·29	$2^4\cdot3\cdot113$	$5^2\cdot7\cdot31$	2·2713	$3^4\cdot67$	$2^2\cdot23\cdot59$	61·89	542
543	2·3·5·181	**5431**	$2^3\cdot7\cdot97$	3·1811	2·11·13·19	5·1087	$2^2\cdot3^2\cdot151$	**5437**	2·2719	$3\cdot7^2\cdot37$	543
544	$2^6\cdot5\cdot17$	**5441**	2·3·907	**5443**	$2^2\cdot1361$	$3^2\cdot5\cdot11^2$	2·7·389	13·419	$2^3\cdot3\cdot227$	**5449**	544
545	$2\cdot5^2\cdot109$	3·23·79	$2^2\cdot29\cdot47$	7·19·41	$2\cdot3^3\cdot101$	5·1091	$2^4\cdot11\cdot31$	3·17·107	2·2729	53·103	545
546	$2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13$	43·127	2·2731	$3^2\cdot607$	$2^3\cdot683$	5·1093	2·3·911	7·11·71	$2^2\cdot1367$	3·1823	546
547	2·5·547	**5471**	$2^5\cdot3^2\cdot19$	13·421	2·7·17·23	$3\cdot5^2\cdot73$	$2^2\cdot37^2$	**5477**	2·3·11·83	**5479**	547
548	$2^3\cdot5\cdot137$	$3^3\cdot7\cdot29$	2·2741	**5483**	$2^2\cdot3\cdot457$	5·1097	2·13·211	3·31·59	$2^4\cdot7^3$	11·499	548
549	$2\cdot3^2\cdot5\cdot61$	$17^2\cdot19$	$2^2\cdot1373$	3·1831	2·41·67	5·7·157	$2^3\cdot3\cdot229$	23·239	2·2749	$3^2\cdot13\cdot47$	549

5500–5999

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
550	$2^2\cdot5^3\cdot11$	**5501**	2·3·7·131	**5503**	$2^7\cdot43$	3·5·367	2·2753	**5507**	$2^2\cdot3^4\cdot17$	7·787	550
551	2·5·19·29	3·11·167	$2^3\cdot13\cdot53$	37·149	2·3·919	5·1103	$2^2\cdot7\cdot197$	$3^2\cdot613$	2·31·89	**5519**	551
552	$2^4\cdot3\cdot5\cdot23$	**5521**	2·11·251	3·7·263	$2^2\cdot1381$	$5^2\cdot13\cdot17$	$2\cdot3^2\cdot307$	**5527**	$2^3\cdot691$	3·19·97	552
553	2·5·7·79	**5531**	$2^2\cdot3\cdot461$	11·503	2·2767	$3^2\cdot5\cdot41$	$2^5\cdot173$	$7^2\cdot113$	2·3·13·71	29·191	553
554	$2^2\cdot5\cdot277$	3·1847	2·17·163	23·241	$2^3\cdot3^2\cdot7\cdot11$	5·1109	2·47·59	$3\cdot43^2$	$2^2\cdot19\cdot73$	31·179	554
555	$2\cdot3\cdot5^2\cdot37$	7·13·61	$2^4\cdot347$	$3^2\cdot617$	2·2777	5·11·101	$2^2\cdot3\cdot463$	**5557**	2·7·397	3·17·109	555
556	$2^3\cdot5\cdot139$	67·83	$2\cdot3^3\cdot103$	**5563**	$2^2\cdot13\cdot107$	3·5·7·53	$2\cdot11^2\cdot23$	19·293	$2^6\cdot3\cdot29$	**5569**	556
557	2·5·557	$3^2\cdot619$	$2^2\cdot7\cdot199$	**5573**	2·3·929	$5^2\cdot223$	$2^3\cdot17\cdot41$	$3\cdot11\cdot13^2$	2·2789	7·797	557
558	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot31$	**5581**	2·2791	3·1861	$2^4\cdot349$	5·1117	$2\cdot3\cdot7^2\cdot19$	37·151	$2^2\cdot11\cdot127$	$3^5\cdot23$	558
559	2·5·13·43	**5591**	$2^3\cdot3\cdot233$	7·17·47	2·2797	3·5·373	$2^2\cdot1399$	29·193	$2\cdot3^2\cdot311$	11·509	559
560	$2^4\cdot5^2\cdot7$	3·1867	2·2801	13·431	$2^2\cdot3\cdot467$	5·19·59	2·2803	$3^2\cdot7\cdot89$	$2^4\cdot701$	71·79	560
561	2·3·5·11·17	31·181	$2^2\cdot23\cdot61$	3·1871	2·7·401	5·1123	$2^4\cdot3^3\cdot13$	41·137	$2\cdot53^2$	3·1873	561
562	$2^2\cdot5\cdot281$	7·11·73	2·3·937	**5623**	$2^3\cdot19\cdot37$	$3^2\cdot5^4$	2·29·97	17·331	$2^2\cdot3\cdot7\cdot67$	13·433	562
563	2·5·563	3·1877	$2^9\cdot11$	43·131	$2\cdot3^2\cdot313$	$5\cdot7^2\cdot23$	$2^2\cdot1409$	3·1879	2·2819	**5639**	563
564	$2^3\cdot3\cdot5\cdot47$	**5641**	2·7·13·31	$3^3\cdot11\cdot19$	$2^2\cdot17\cdot83$	5·1129	2·3·941	**5647**	$2^4\cdot353$	3·7·269	564
565	$2\cdot5^2\cdot113$	**5651**	$2^2\cdot3^2\cdot157$	**5653**	2·11·257	3·5·13·29	$2^3\cdot7\cdot101$	**5657**	2·3·23·41	**5659**	565
566	$2^2\cdot5\cdot283$	$3^2\cdot17\cdot37$	2·19·149	7·809	$2^5\cdot3\cdot59$	5·11·103	2·2833	3·1889	$2^2\cdot13\cdot109$	**5669**	566
567	$2\cdot3^4\cdot5\cdot7$	53·107	$2^3\cdot709$	3·31·61	2·2837	$5^2\cdot227$	$2^2\cdot3\cdot11\cdot43$	7·811	2·17·167	$3^2\cdot631$	567
568	$2^4\cdot5\cdot71$	13·19·23	2·3·947	**5683**	$2^2\cdot7^2\cdot29$	3·5·379	2·2843	$11^2\cdot47$	$2^3\cdot3^2\cdot79$	**5689**	568
569	2·5·569	3·7·271	$2^2\cdot1423$	**5693**	2·3·13·73	5·17·67	$2^6\cdot89$	$3^3\cdot211$	2·7·11·37	41·139	569
570	$2^2\cdot3\cdot5^2\cdot19$	**5701**	2·2851	3·1901	$2^3\cdot23\cdot31$	5·7·163	$2\cdot3^2\cdot317$	13·439	$2^2\cdot1427$	3·11·173	570
571	2·5·571	**5711**	$2^4\cdot3\cdot7\cdot17$	29·197	2·2857	$3^2\cdot5\cdot127$	$2^2\cdot1429$	**5717**	2·3·953	7·19·43	571
572	$2^3\cdot5\cdot11\cdot13$	3·1907	2·2861	59·97	$2^2\cdot3^3\cdot53$	$5^2\cdot229$	2·7·409	3·23·83	$2^5\cdot179$	17·337	572
573	2·3·5·191	11·521	$2^2\cdot1433$	$3^2\cdot7^2\cdot13$	2·47·61	5·31·37	$2^3\cdot3\cdot239$	**5737**	2·19·151	3·1913	573
574	$2^2\cdot5\cdot7\cdot41$	**5741**	$2\cdot3^3\cdot11\cdot29$	**5743**	$2^4\cdot359$	3·5·383	$2\cdot13^2\cdot17$	7·821	$2^2\cdot3\cdot479$	**5749**	574
575	$2\cdot5^3\cdot23$	$3^4\cdot71$	$2^3\cdot719$	11·523	2·3·7·137	5·1151	$2^2\cdot1439$	3·19·101	2·2879	13·443	575
576	$2^7\cdot3^2\cdot5$	7·823	2·43·67	3·17·113	$2^2\cdot11\cdot131$	5·1153	$2\cdot3\cdot31^2$	73·79	$2^3\cdot7\cdot103$	$3^2\cdot641$	576
577	2·5·577	29·199	$2^2\cdot3\cdot13\cdot37$	23·251	2·2887	$3\cdot5^2\cdot7\cdot11$	$2^4\cdot19^2$	53·109	$2\cdot3^3\cdot107$	**5779**	577
578	$2^2\cdot5\cdot17^2$	3·41·47	$2\cdot7^2\cdot59$	**5783**	$2^3\cdot3\cdot241$	5·13·89	2·11·263	$3^2\cdot643$	$2^2\cdot1447$	7·827	578
579	2·3·5·193	**5791**	$2^5\cdot181$	3·1931	2·2897	5·19·61	$2^2\cdot3^2\cdot7\cdot23$	11·17·31	2·13·223	3·1933	579
580	$2^3\cdot5^2\cdot29$	**5801**	2·3·967	7·829	$2^2\cdot1451$	$3^3\cdot5\cdot43$	2·2903	**5807**	$2^4\cdot3\cdot11^2$	37·157	580
581	2·5·7·83	3·13·149	$2^2\cdot1453$	**5813**	$2\cdot3^2\cdot17\cdot19$	5·1163	$2^3\cdot727$	3·7·277	2·2909	$11\cdot23^2$	581
582	$2^2\cdot3\cdot5\cdot97$	**5821**	2·41·71	$3^2\cdot647$	$2^6\cdot7\cdot13$	$5^2\cdot233$	2·3·971	**5827**	$2^2\cdot31\cdot47$	3·29·67	582
583	2·5·11·53	$7^3\cdot17$	$2^3\cdot3^6$	19·307	2·2917	3·5·389	$2^2\cdot1459$	13·449	2·3·7·139	**5839**	583
584	$2^4\cdot5\cdot73$	$3^2\cdot11\cdot59$	2·23·127	**5843**	$2^2\cdot3\cdot487$	5·7·167	2·37·79	3·1949	$2^3\cdot17\cdot43$	**5849**	584
585	$2\cdot3^2\cdot5^2\cdot13$	**5851**	$2^2\cdot7\cdot11\cdot19$	3·1951	2·2927	5·1171	$2^5\cdot3\cdot61$	**5857**	2·29·101	$3^3\cdot7\cdot31$	585
586	$2^2\cdot5\cdot293$	**5861**	2·3·977	11·13·41	$2^3\cdot733$	3·5·17·23	2·7·419	**5867**	$2^2\cdot3^2\cdot163$	**5869**	586
587	2·5·587	3·19·103	$2^4\cdot367$	7·839	2·3·11·89	$5^3\cdot47$	$2^2\cdot13\cdot113$	$3^2\cdot653$	2·2939	**5879**	587
588	$2^3\cdot3\cdot5\cdot7^2$	**5881**	2·17·173	3·37·53	$2^2\cdot1471$	5·11·107	$2\cdot3^3\cdot109$	$7\cdot29^2$	$2^8\cdot23$	3·13·151	588
589	2·5·19·31	43·137	$2^2\cdot3\cdot491$	71·83	2·7·421	$3^2\cdot5\cdot131$	$2^3\cdot11\cdot67$	**5897**	2·3·983	17·347	589
590	$2^2\cdot5^2\cdot59$	3·7·281	2·13·227	**5903**	$2^4\cdot3^2\cdot41$	5·1181	2·2953	3·11·179	$2^2\cdot7\cdot211$	19·311	590
591	2·3·5·197	23·257	$2^3\cdot739$	$3^4\cdot73$	2·2957	$5\cdot7\cdot13^2$	$2^2\cdot3\cdot17\cdot29$	61·97	2·11·269	3·1973	591
592	$2^5\cdot5\cdot37$	31·191	$2\cdot3^2\cdot7\cdot47$	**5923**	$2^2\cdot1481$	$3\cdot5^2\cdot79$	2·2963	**5927**	$2^3\cdot3\cdot13\cdot19$	$7^2\cdot11^2$	592
593	2·5·593	$3^2\cdot659$	$2^2\cdot1483$	17·349	2·3·23·43	5·1187	$2^4\cdot7\cdot53$	3·1979	2·2969	**5939**	593
594	$2^2\cdot3^3\cdot5\cdot11$	13·457	2·2971	3·7·283	$2^3\cdot743$	5·29·41	2·3·991	19·313	$2^2\cdot1487$	$3^2\cdot661$	594
595	$2\cdot5^2\cdot7\cdot17$	11·541	$2^6\cdot3\cdot31$	**5953**	2·13·229	3·5·397	$2^2\cdot1489$	7·23·37	$2\cdot3^2\cdot331$	59·101	595
596	$2^3\cdot5\cdot149$	3·1987	2·11·271	67·89	$2^2\cdot3\cdot7\cdot71$	5·1193	2·19·157	$3^3\cdot13\cdot17$	$2^4\cdot373$	47·127	596
597	2·3·5·199	7·853	$2^2\cdot1493$	3·11·181	2·29·103	$5^2\cdot239$	$2^3\cdot3^2\cdot83$	43·139	$2\cdot7^2\cdot61$	3·1993	597
598	$2^2\cdot5\cdot13\cdot23$	**5981**	2·3·997	31·193	$2^5\cdot11\cdot17$	$3^2\cdot5\cdot7\cdot19$	2·41·73	**5987**	$2^2\cdot3\cdot499$	53·113	598
599	2·5·599	3·1997	$2^3\cdot7\cdot107$	13·461	$2\cdot3^4\cdot37$	5·11·109	$2^2\cdot1499$	3·1999	2·2999	7·857	599

6000 — 6499

Таблица 24.7. Разложения на множители

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
600	$2^4\cdot3\cdot5^3$	17·353	2·3001	$3^2\cdot23\cdot29$	$2^2\cdot19\cdot79$	5·1201	2·3·7·11·13	**6007**	$2^3\cdot751$	3·2003	600
601	2·5·601	**6011**	$2^2\cdot3^2\cdot167$	7·859	2·31·97	3·5·401	$2^7\cdot47$	11·547	2·3·17·59	13·463	601
602	$2^2\cdot5\cdot7\cdot43$	$3^3\cdot223$	2·3011	19·317	$2^3\cdot3\cdot251$	$5^2\cdot241$	2·23·131	$3\cdot7^2\cdot41$	$2^2\cdot11\cdot137$	**6029**	602
603	$2\cdot3^2\cdot5\cdot67$	37·163	$2^4\cdot13\cdot29$	3·2011	2·7·431	5·17·71	$2^2\cdot3\cdot503$	**6037**	2·3019	$3^2\cdot11\cdot61$	603
604	$2^3\cdot5\cdot151$	7·863	2·3·19·53	**6043**	$2^2\cdot1511$	3·5·13·31	2·3023	**6047**	$2^5\cdot3^3\cdot7$	23·263	604
605	$2\cdot5^2\cdot11^2$	3·2017	$2^2\cdot17\cdot89$	**6053**	2·3·1009	5·7·173	$2^3\cdot757$	$3^2\cdot673$	2·13·233	73·83	605
606	$2^2\cdot3\cdot5\cdot101$	11·19·29	2·7·433	3·43·47	$2^4\cdot379$	5·1213	$2\cdot3^2\cdot337$	**6067**	$2^2\cdot37\cdot41$	$3\cdot7\cdot17^2$	606
607	2·5·607	13·467	$2^3\cdot3\cdot11\cdot23$	**6073**	2·3037	$3^5\cdot5^2$	$2^2\cdot7^2\cdot31$	59·103	2·3·1013	**6079**	607
608	$2^6\cdot5\cdot19$	3·2027	2·3041	7·11·79	$2^2\cdot3^2\cdot13^2$	5·1217	2·17·179	3·2029	$2^3\cdot761$	**6089**	608
609	2·3·5·7·29	**6091**	$2^2\cdot1523$	$3^2\cdot677$	2·11·277	5·23·53	$2^4\cdot3\cdot127$	7·13·67	2·3049	3·19·107	609
610	$2^2\cdot5^2\cdot61$	**6101**	$2\cdot3^3\cdot113$	17·359	$2^3\cdot7\cdot109$	3·5·11·37	2·43·71	31·197	$2^2\cdot3\cdot509$	41·149	610
611	2·5·13·47	$3^2\cdot7\cdot97$	$2^5\cdot191$	**6113**	2·3·1019	5·1223	$2^2\cdot11\cdot139$	3·2039	2·7·19·23	29·211	611
612	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot17$	**6121**	2·3061	3·13·157	$2^2\cdot1531$	$5^3\cdot7^2$	2·3·1021	11·557	$2^4\cdot383$	$3^3\cdot227$	612
613	2·5·613	**6131**	$2^2\cdot3\cdot7\cdot73$	**6133**	2·3067	3·5·409	$2^3\cdot13\cdot59$	$17\cdot19^2$	$2\cdot3^2\cdot11\cdot31$	7·877	613
614	$2^2\cdot5\cdot307$	3·23·89	2·37·83	**6143**	$2^{11}\cdot3$	5·1229	2·7·439	$3^2\cdot683$	$2^2\cdot29\cdot53$	11·13·43	614
615	$2\cdot3\cdot5^2\cdot41$	**6151**	$2^3\cdot769$	3·7·293	2·17·181	5·1231	$2^2\cdot3^4\cdot19$	47·131	2·3079	3·2053	615
616	$2^4\cdot5\cdot7\cdot11$	61·101	2·3·13·79	**6163**	$2^2\cdot23\cdot67$	$3^2\cdot5\cdot137$	2·3083	7·881	$2^3\cdot3\cdot257$	31·199	616
617	2·5·617	$3\cdot11^2\cdot17$	$2^2\cdot1543$	**6173**	$2\cdot3^2\cdot7^3$	$5^2\cdot13\cdot19$	$2^5\cdot193$	3·29·71	2·3089	37·167	617
618	$2^2\cdot3\cdot5\cdot103$	7·883	2·11·281	$3^3\cdot229$	$2^3\cdot773$	5·1237	2·3·1031	23·269	$2^2\cdot7\cdot13\cdot17$	3·2063	618
619	2·5·619	41·151	$2^4\cdot3^2\cdot43$	11·563	2·19·163	3·5·7·59	$2^2\cdot1549$	**6197**	2·3·1033	**6199**	619
620	$2^3\cdot5^2\cdot31$	$3^2\cdot13\cdot53$	2·7·443	**6203**	$2^2\cdot3\cdot11\cdot47$	5·17·73	2·29·107	3·2069	$2^6\cdot97$	7·887	620
621	$2\cdot3^3\cdot5\cdot23$	**6211**	$2^2\cdot1553$	3·19·109	2·13·239	5·11·113	$2^3\cdot3\cdot7\cdot37$	**6217**	2·3109	$3^2\cdot691$	621
622	$2^2\cdot5\cdot311$	**6221**	2·3·17·61	$7^2\cdot127$	$2^4\cdot389$	$3\cdot5^2\cdot83$	2·11·283	13·479	$2^2\cdot3^2\cdot173$	**6229**	622
623	2·5·7·89	3·31·67	$2^3\cdot19\cdot41$	23·271	2·3·1039	5·29·43	$2^2\cdot1559$	$3^4\cdot7\cdot11$	2·3119	17·367	623
624	$2^5\cdot3\cdot5\cdot13$	79^2	2·3121	3·2081	$2^2\cdot7\cdot223$	5·1249	$2\cdot3^2\cdot347$	**6247**	$2^3\cdot11\cdot71$	3·2083	624
625	$2\cdot5^5$	7·19·47	$2^2\cdot3\cdot521$	$13^2\cdot37$	2·53·59	$3^2\cdot5\cdot139$	$2^4\cdot17\cdot23$	**6257**	2·3·7·149	11·569	625
626	$2^2\cdot5\cdot313$	3·2087	2·31·101	**6263**	$2^3\cdot3^3\cdot29$	5·7·179	2·13·241	3·2089	$2^2\cdot1567$	**6269**	626
627	2·3·5·11·19	**6271**	$2^7\cdot7^2$	$3^2\cdot17\cdot41$	2·3137	$5^2\cdot251$	$2^2\cdot3\cdot523$	**6277**	2·43·73	3·7·13·23	627
628	$2^3\cdot5\cdot157$	11·571	$2\cdot3^2\cdot349$	61·103	$2^2\cdot1571$	3·5·419	2·7·449	**6287**	$2^4\cdot3\cdot131$	19·331	826
629	2·5·17·37	$3^3\cdot233$	$2^2\cdot11^2\cdot13$	7·29·31	2·3·1049	5·1259	$2^3\cdot787$	3·2099	2·47·67	**6299**	629
630	$2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7$	**6301**	2·23·137	3·11·191	$2^5\cdot197$	5·13·97	2·3·1051	7·17·53	$2^2\cdot19\cdot83$	$3^2\cdot701$	630
631	2·5·631	**6311**	$2^3\cdot3\cdot263$	59·107	2·7·11·41	3·5·421	$2^2\cdot1579$	**6317**	$2\cdot3^5\cdot13$	71·89	631
632	$2^4\cdot5\cdot79$	$3\cdot7^2\cdot43$	2·29·109	**6323**	$2^2\cdot3\cdot17\cdot31$	$5^2\cdot11\cdot23$	2·3163	$3^2\cdot19\cdot37$	$2^3\cdot7\cdot113$	**6329**	632
633	2·3·5·211	13·487	$2^2\cdot1583$	3·2111	2·3167	5·7·181	$2^6\cdot3^2\cdot11$	**6337**	2·3169	3·2113	633
634	$2^2\cdot5\cdot317$	17·373	2·3·7·151	**6343**	$2^3\cdot13\cdot61$	$3^3\cdot5\cdot47$	2·19·167	11·577	$2^2\cdot3\cdot23^2$	7·907	634
635	$2\cdot5^2\cdot127$	3·29·73	$2^4\cdot397$	**6353**	$2\cdot3^2\cdot353$	5·31·41	$2^2\cdot7\cdot227$	3·13·163	$2\cdot11\cdot17^2$	**6359**	635
636	$2^3\cdot3\cdot5\cdot53$	**6361**	2·3181	$3^2\cdot7\cdot101$	$2^2\cdot37\cdot43$	5·19·67	2·3·1061	**6367**	$2^5\cdot199$	3·11·193	636
637	$2\cdot5\cdot7^2\cdot13$	23·277	$2^2\cdot3^3\cdot59$	**6373**	2·3187	$3\cdot5^3\cdot17$	$2^3\cdot797$	7·911	2·3·1063	**6379**	637
638	$2^2\cdot5\cdot11\cdot29$	$3^2\cdot709$	2·3191	13·491	$2^5\cdot3\cdot7\cdot19$	5·1277	2·31·103	3·2129	$2^2\cdot1597$	**6389**	638
639	$2\cdot3^2\cdot5\cdot71$	7·11·83	$2^3\cdot17\cdot47$	3·2131	2·23·139	5·1279	$2^2\cdot3\cdot13\cdot41$	**6397**	2·7·457	$3^4\cdot79$	639
640	$2^8\cdot5^2$	37·173	2·3·11·97	19·337	$2^2\cdot1601$	3·5·7·61	2·3203	43·149	$2^3\cdot3^2\cdot89$	13·17·29	640
641	2·5·641	3·2137	$2^2\cdot7\cdot229$	$11^2\cdot53$	2·3·1069	5·1283	$2^5\cdot401$	$3^2\cdot23\cdot31$	2·3209	$7^2\cdot131$	641
642	$2^2\cdot3\cdot5\cdot107$	**6421**	$2\cdot13^2\cdot19$	3·2141	$2^3\cdot11\cdot73$	$5^2\cdot257$	$2\cdot3^3\cdot7\cdot17$	**6427**	$2^2\cdot1607$	3·2143	642
643	2·5·643	59·109	$2^5\cdot3\cdot67$	7·919	2·3217	$3^2\cdot5\cdot11\cdot13$	$2^2\cdot1609$	41·157	2·3·29·37	47·137	643
644	$2^3\cdot5\cdot7\cdot23$	3·19·113	2·3221	17·379	$2^2\cdot3^2\cdot179$	5·1289	2·11·293	3·7·307	$2^4\cdot13\cdot31$	**6449**	644
645	$2\cdot3\cdot5^2\cdot43$	**6451**	$2^2\cdot1613$	$3^3\cdot239$	2·7·461	5·1291	$2^3\cdot3\cdot269$	11·587	2·3229	3·2153	645
646	$2^2\cdot5\cdot17\cdot19$	7·13·71	$2\cdot3^2\cdot359$	23·281	$2^6\cdot101$	3·5·431	2·53·61	29·223	$2^2\cdot3\cdot7^2\cdot11$	**6469**	646
647	2·5·647	$3^2\cdot719$	$2^3\cdot809$	**6473**	2·3·13·83	$5^2\cdot7\cdot37$	$2^2\cdot1619$	3·17·127	2·41·79	11·19·31	647
648	$2^4\cdot3^4\cdot5$	**6481**	2·7·463	3·2161	$2^2\cdot1621$	5·1297	2·3·23·47	13·499	$2^3\cdot811$	$3^2\cdot7\cdot103$	648
649	2·5·11·59	**6491**	$2^2\cdot3\cdot541$	43·151	2·17·191	3·5·433	$2^5\cdot7\cdot29$	73·89	$2\cdot3^2\cdot19^2$	67·97	649

6500

650	$2^2\ 5^3\ 13$	3 11 197	2 3251	7 929	2^3 3 271	5 1301	2 3253	3^3 241	2^2 1627	23 283	650
651	2 3 5 7 31	17 383	2^4 11 37	3 13 167	2 3257	5 1303	$2^2\ 3^2$ 181	7^3 19	2 3259	3 41 53	651
652	2^3 5 163	6521	2 3 1087	11 593	2^2 7 233	$3^2\ 5^2$ 29	2 13 251	61 107	2^7 3 17	6529	652
653	2 5 653	3 7 311	2^2 23 71	47 139	$2\ 3^3\ 11^2$	5 1307	2^3 19 43	3 2179	2 7 467	13 503	653
654	2^2 3 5 109	31 211	2 3271	3^2 727	2^4 409	5 7 11 17	2 3 1091	6547	2^2 1637	3 37 59	654
655	$2\ 5^2$ 131	6551	$2^3\ 3^2$ 7 13	6553	2 29 113	3 5 19 23	2^2 11 149	79 83	2 3 1093	7 937	655
656	2^5 5 41	3^8	2 17 193	6563	2^2 3 547	5 13 101	$2\ 7^2$ 67	3 11 199	2^3 821	6569	656
657	$2\ 3^2$ 5 73	6571	2^2 31 53	3 7 313	2 19 173	5^2 263	2^4 3 137	6577	2 11 13 23	3^2 17 43	657
658	2^2 5 7 47	6581	2 3 1097	29 227	2^3 823	3 5 439	2 37 89	7 941	$2^2\ 3^3$ 61	11 599	658
659	2 5 659	$3\ 13^3$	2^6 103	19 347	2 3 7 157	5 1319	2^2 17 97	3^2 733	2 3299	6599	659
660	$2^3\ 3\ 5^2$ 11	7 23 41	2 3301	3 31 71	2^2 13 127	5 1321	$2\ 3^2$ 367	6607	2^4 7 59	3 2203	660
661	2 5 661	11 601	2^2 3 19 29	17 389	2 3307	$3^3\ 5\ 7^2$	2^3 827	13 509	2 3 1103	6619	661
662	2^2 5 331	3 2207	2 7 11 43	37 179	$2^5\ 3^2$ 23	5^3 53	2 3313	$3\ 47^2$	2^2 1657	7 947	662
663	2 3 5 13 17	19 349	2^3 829	3^2 11 67	2 31 107	5 1327	2^2 3 7 79	6637	2 3319	3 2213	663
664	2^4 5 83	29 229	$2\ 3^4$ 41	7 13 73	2^2 11 151	3 5 443	2 3323	17^2 23	2^3 3 277	61 109	664
665	$2\ 5^2$ 7 19	3^2 739	2^2 1663	6653	2 3 1109	$5\ 11^3$	2^9 13	3 7 317	2 3329	6659	665
666	$2^2\ 3^2$ 5 37	6661	2 3331	3 2221	$2^3\ 7^2$ 17	5 31 43	2 3 11 101	59 113	2^2 1667	3^3 13 19	666
667	2 5 23 29	7 953	2^4 3 139	6673	2 47 71	$3\ 5^2$ 89	2^2 1669	11 607	$2\ 3^2$ 7 53	6679	667
668	2^3 5 167	3 17 131	2 13 257	41 163	2^2 3 557	5 7 191	2 3343	3^2 743	2^5 11 19	6689	668
669	2 3 5 223	6691	2^2 7 239	3 23 97	2 3347	5 13 103	$2^3\ 3^3$ 31	37 181	2 17 197	3 7 11 29	669
670	$2^2\ 5^2$ 67	6701	2 3 1117	6703	2^4 419	3^2 5 149	2 7 479	19 353	2^2 3 13 43	6709	670
671	2 5 11 61	3 2237	2^3 839	7^2 137	$2\ 3^2$ 373	5 17 79	2^2 23 73	3 2239	2 3359	6719	671
672	2^6 3 5 7	11 13 47	2 3361	3^4 83	$2^2\ 41^2$	5^2 269	2 3 19 59	$7\ 31^2$	$2^3\ 29^2$	3 2243	672
673	2 5 673	53 127	$2^2\ 3^2$ 11 17	6733	2 7 13 37	3 5 449	2^4 421	6737	2 3 1123	23 293	673
674	2^2 5 337	3^3 7 107	2 3371	11 613	2^3 3 281	5 19 71	2 3373	3 13 173	2^2 7 241	17 397	674
675	$2\ 3^3\ 5^3$	43 157	2^5 211	3 2251	2 11 307	5 7 193	2^2 3 563	29 233	2 31 109	3^2 751	675
676	$2^3\ 5\ 13^2$	6761	$2\ 3\ 7^2$ 23	6763	2^2 19 89	3 5 11 41	2 17 199	67 101	$2^4\ 3^2$ 47	7 967	676
677	2 5 677	3 37 61	2^2 1693	13 521	2 3 1129	5^2 271	$2^3\ 7\ 11^2$	3^3 251	2 3389	6779	677
678	2^2 3 5 113	6781	2 3391	3 7 17 19	2^7 53	5 23 59	$2\ 3^2$ 13 29	11 617	2^2 1697	3 31 73	678
679	2 5 7 97	6791	2^3 3 283	6793	2 43 79	3^2 5 151	2^2 1699	7 971	2 3 11 103	13 523	679
680	$2^4\ 5^2$ 17	3 2267	2 19 179	6803	$2^2\ 3^5$ 7	5 1361	2 41 83	3 2269	2^3 23 37	11 619	680
681	2 3 5 227	7^2 139	2^2 13 131	3^2 757	2 3407	5 29 47	2^5 3 71	17 401	2 7 487	3 2273	681
682	2^2 5 11 31	19 359	$2\ 3^2$ 379	6823	2^3 853	$3\ 5^2$ 7 13	2 3413	6827	2^2 3 569	6829	682
683	2 5 683	3^3 11 23	2^4 7 61	6833	2 3 17 67	5 1367	2^2 1709	3 43 53	2 13 263	7 977	683
684	$2^3\ 3^2$ 5 19	6841	2 11 311	3 2281	2^2 29 59	$5\ 37^2$	2 3 7 163	41 167	2^6 107	3^2 761	684
685	$2\ 5^2$ 137	13 17 31	2^2 3 571	7 11 89	2 23 149	3 5 457	2^3 857	6857	$2\ 3^3$ 127	19^3	685
686	$2^2\ 5\ 7^3$	3 2287	2 47 73	6863	2^4 3 11 13	5 1373	2 3433	3^2 7 109	2^2 17 101	6869	686
687	2 3 5 229	6871	2^3 859	3 29 79	2 7 491	5^4 11	$2^2\ 3^2$ 191	$13\ 23^2$	2 19 181	3 2293	687
688	2^5 5 43	7 983	2 3 31 37	6883	2^2 1721	3^4 5 17	2 11 313	71 97	2^3 3 7 41	83^2	688
689	2 5 13 53	3 2297	2^2 1723	61 113	$2\ 3^2$ 383	5 7 197	2^4 431	$3\ 11^2$ 19	2 3449	6899	689
690	$2^2\ 3\ 5^2$ 23	67 103	2 7 17 29	3^2 13 59	2^3 863	5 1381	2 3 1151	6907	2^2 11 157	$3\ 7^2$ 47	690
691	2 5 691	6911	$2^8\ 3^3$	31 223	2 3457	3 5 461	2^2 7 13 19	6917	2 3 1153	11 17 37	691
692	2^3 5 173	3^2 769	2 3461	7 23 43	2^2 3 577	5^2 277	2 3463	3 2309	2^4 433	13^2 41	692
693	$2\ 3^2$ 5 7 11	29 239	2^2 1733	3 2311	2 3467	5 19 73	$2^3\ 3\ 17^2$	7 991	2 3469	3^3 257	693
694	2^2 5 347	11 631	2 3 13 89	53 131	2^5 7 31	3 5 463	2 23 151	6947	$2^2\ 3^2$ 193	6949	694
695	$2\ 5^2$ 139	3 7 331	2^3 11 79	17 409	2 3 19 61	5 13 107	2^2 37 47	3^2 773	$2\ 7^2$ 71	6959	695
696	2^4 3 5 29	6961	$2\ 59^2$	3 11 211	2^2 1741	5 7 199	$2\ 3^4$ 43	6967	2^3 13 67	3 23 101	696
697	2 5 17 41	6971	2^2 3 7 83	19 367	2 11 317	$3^2\ 5^2$ 31	2^6 109	6977	2 3 1163	7 997	697
698	2^2 5 349	3 13 179	2 3491	6983	$2^3\ 3^2$ 97	5 11 127	2 7 499	3 17 137	2^2 1747	29 241	698
699	2 3 5 233	6991	2^4 19 23	3^3 7 37	2 13 269	5 1399	2^2 3 11 53	6997	2 3499	3 2333	699

6999

Таблица 24.7. Разложения на множители

7000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
700	$2^3\cdot5^3\cdot7$	7001	$2\cdot3^2\cdot389$	$47\cdot149$	$2^2\cdot17\cdot103$	$3\cdot5\cdot467$	$2\cdot31\cdot113$	$7^2\cdot11\cdot13$	$2^5\cdot3\cdot73$	$43\cdot163$	700
701	$2\cdot5\cdot701$	$3^2\cdot19\cdot41$	$2^2\cdot1753$	7013	$2\cdot3\cdot7\cdot167$	$5\cdot23\cdot61$	$2^3\cdot877$	$3\cdot2339$	$2\cdot11^2\cdot29$	7019	701
702	$2^2\cdot3^3\cdot5\cdot13$	$7\cdot17\cdot59$	$2\cdot3511$	$3\cdot2341$	$2^4\cdot439$	$5^2\cdot281$	$2\cdot3\cdot1171$	7027	$2^2\cdot7\cdot251$	$3^2\cdot11\cdot71$	702
703	$2\cdot5\cdot19\cdot37$	$79\cdot89$	$2^3\cdot3\cdot293$	$13\cdot541$	$2\cdot3517$	$3\cdot5\cdot7\cdot67$	$2^2\cdot1759$	$31\cdot227$	$2\cdot3^2\cdot17\cdot23$	7039	703
704	$2^7\cdot5\cdot11$	$3\cdot2347$	$2\cdot7\cdot503$	7043	$2^2\cdot3\cdot587$	$5\cdot1409$	$2\cdot13\cdot271$	$3^5\cdot29$	$2^3\cdot881$	$7\cdot19\cdot53$	704
705	$2\cdot3\cdot5^2\cdot47$	$11\cdot641$	$2^2\cdot41\cdot43$	$3\cdot2351$	$2\cdot3527$	$5\cdot17\cdot83$	$2^4\cdot3^2\cdot7^2$	7057	$2\cdot3529$	$3\cdot13\cdot181$	705
706	$2^2\cdot5\cdot353$	$23\cdot307$	$2\cdot3\cdot11\cdot107$	$7\cdot1009$	$2^3\cdot883$	$3^2\cdot5\cdot157$	$2\cdot3533$	$37\cdot191$	$2^2\cdot3\cdot19\cdot31$	7069	706
707	$2\cdot5\cdot7\cdot101$	$3\cdot2357$	$2^5\cdot13\cdot17$	$11\cdot643$	$2\cdot3^3\cdot131$	$5^2\cdot283$	$2^2\cdot29\cdot61$	$3\cdot7\cdot337$	$2\cdot3539$	7079	707
708	$2^3\cdot3\cdot5\cdot59$	$73\cdot97$	$2\cdot3541$	$3^2\cdot787$	$2^2\cdot7\cdot11\cdot23$	$5\cdot13\cdot109$	$2\cdot3\cdot1181$	$19\cdot373$	$2^4\cdot443$	$3\cdot17\cdot139$	708
709	$2\cdot5\cdot709$	$7\cdot1013$	$2^2\cdot3^2\cdot197$	$41\cdot173$	$2\cdot3547$	$3\cdot5\cdot11\cdot43$	$2^3\cdot887$	$47\cdot151$	$2\cdot3\cdot7\cdot13^2$	$31\cdot229$	709
710	$2^2\cdot5^2\cdot71$	$3^3\cdot263$	$2\cdot53\cdot67$	7103	$2^6\cdot3\cdot37$	$5\cdot7^2\cdot29$	$2\cdot11\cdot17\cdot19$	$3\cdot23\cdot103$	$2^2\cdot1777$	7109	710
711	$2\cdot3^2\cdot5\cdot79$	$13\cdot547$	$2^3\cdot7\cdot127$	$3\cdot2371$	$2\cdot3557$	$5\cdot1423$	$2^2\cdot3\cdot593$	$11\cdot647$	$2\cdot3559$	$3^2\cdot7\cdot113$	711
712	$2^4\cdot5\cdot89$	7121	$2\cdot3\cdot1187$	$17\cdot419$	$2^2\cdot13\cdot137$	$3\cdot5^3\cdot19$	$2\cdot7\cdot509$	7127	$2^3\cdot3^4\cdot11$	7129	712
713	$2\cdot5\cdot23\cdot31$	$3\cdot2377$	$2^2\cdot1783$	$7\cdot1019$	$2\cdot3\cdot29\cdot41$	$5\cdot1427$	$2^5\cdot223$	$3^2\cdot13\cdot61$	$2\cdot43\cdot83$	$11^2\cdot59$	713
714	$2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot17$	$37\cdot193$	$2\cdot3571$	$3\cdot2381$	$2^3\cdot19\cdot47$	$5\cdot1429$	$2\cdot3^2\cdot397$	$7\cdot1021$	$2^2\cdot1787$	$3\cdot2383$	714
715	$2\cdot5^2\cdot11\cdot13$	7151	$2^4\cdot3\cdot149$	$23\cdot311$	$2\cdot7^2\cdot73$	$3^3\cdot5\cdot53$	$2^2\cdot1789$	$17\cdot421$	$2\cdot3\cdot1193$	7159	715
716	$2^3\cdot5\cdot179$	$3\cdot7\cdot11\cdot31$	$2\cdot3581$	$13\cdot19\cdot29$	$2^2\cdot3^2\cdot199$	$5\cdot1433$	$2\cdot3583$	$3\cdot2389$	$2^{10}\cdot7$	$67\cdot107$	716
717	$2\cdot3\cdot5\cdot239$	$71\cdot101$	$2^2\cdot11\cdot163$	$3^2\cdot797$	$2\cdot17\cdot211$	$5^2\cdot7\cdot41$	$2^3\cdot3\cdot13\cdot23$	7177	$2\cdot37\cdot97$	$3\cdot2393$	717
718	$2^2\cdot5\cdot359$	$43\cdot167$	$2\cdot3^3\cdot7\cdot19$	$11\cdot653$	$2^4\cdot449$	$3\cdot5\cdot479$	$2\cdot3593$	7187	$2^2\cdot3\cdot599$	$7\cdot13\cdot79$	718
719	$2\cdot5\cdot719$	$3^2\cdot17\cdot47$	$2^3\cdot29\cdot31$	7193	$2\cdot3\cdot11\cdot109$	$5\cdot1439$	$2^2\cdot7\cdot257$	$3\cdot2399$	$2\cdot59\cdot61$	$23\cdot313$	719
720	$2^5\cdot3^2\cdot5^2$	$19\cdot379$	$2\cdot13\cdot277$	$3\cdot7^4$	$2^2\cdot1801$	$5\cdot11\cdot131$	$2\cdot3\cdot1201$	7207	$2^3\cdot17\cdot53$	$3^4\cdot89$	720
721	$2\cdot5\cdot7\cdot103$	7211	$2^2\cdot3\cdot601$	7213	$2\cdot3607$	$3\cdot5\cdot13\cdot37$	$2^4\cdot11\cdot41$	$7\cdot1031$	$2\cdot3^2\cdot401$	7219	721
722	$2^2\cdot5\cdot19^2$	$3\cdot29\cdot83$	$2\cdot23\cdot157$	$31\cdot233$	$2^3\cdot3\cdot7\cdot43$	$5^2\cdot17^2$	$2\cdot3613$	$3^2\cdot11\cdot73$	$2^2\cdot13\cdot139$	7229	722
723	$2\cdot3\cdot5\cdot241$	$7\cdot1033$	$2^6\cdot113$	$3\cdot2411$	$2\cdot3617$	$5\cdot1447$	$2^2\cdot3^3\cdot67$	7237	$2\cdot7\cdot11\cdot47$	$3\cdot19\cdot127$	723
724	$2^3\cdot5\cdot181$	$13\cdot557$	$2\cdot3\cdot17\cdot71$	7243	$2^2\cdot1811$	$3^2\cdot5\cdot7\cdot23$	$2\cdot3623$	7247	$2^4\cdot3\cdot151$	$11\cdot659$	724
725	$2\cdot5^3\cdot29$	$3\cdot2417$	$2^2\cdot7^2\cdot37$	7253	$2\cdot3^2\cdot13\cdot31$	$5\cdot1451$	$2^3\cdot907$	$3\cdot41\cdot59$	$2\cdot19\cdot191$	$7\cdot17\cdot61$	725
726	$2^2\cdot3\cdot5\cdot11^2$	$53\cdot137$	$2\cdot3631$	$3^2\cdot269$	$2^5\cdot227$	$5\cdot1453$	$2\cdot3\cdot7\cdot173$	$13^2\cdot43$	$2^2\cdot23\cdot79$	$3\cdot2423$	726
727	$2\cdot5\cdot727$	$11\cdot661$	$2^3\cdot3^2\cdot101$	$7\cdot1039$	$2\cdot3637$	$3\cdot5^2\cdot97$	$2^2\cdot17\cdot107$	$19\cdot383$	$2\cdot3\cdot1213$	$29\cdot251$	727
728	$2^4\cdot5\cdot7\cdot13$	$3^2\cdot809$	$2\cdot11\cdot331$	7283	$2^2\cdot3\cdot607$	$5\cdot31\cdot47$	$2\cdot3643$	$3\cdot7\cdot347$	$2^3\cdot911$	$37\cdot197$	728
729	$2\cdot3^6\cdot5$	$23\cdot317$	$2^2\cdot1823$	$3\cdot11\cdot13\cdot17$	$2\cdot7\cdot521$	$5\cdot1459$	$2^7\cdot3\cdot19$	7297	$2\cdot41\cdot89$	$3^2\cdot811$	729
730	$2^2\cdot5^2\cdot73$	$7^2\cdot149$	$2\cdot3\cdot1217$	$67\cdot109$	$2^3\cdot11\cdot83$	$3\cdot5\cdot487$	$2\cdot13\cdot281$	7307	$2^2\cdot3^2\cdot7\cdot29$	7309	730
731	$2\cdot5\cdot17\cdot43$	$3\cdot2437$	$2^4\cdot457$	$71\cdot103$	$2\cdot3\cdot23\cdot53$	$5\cdot7\cdot11\cdot19$	$2^2\cdot31\cdot59$	$3^3\cdot271$	$2\cdot3659$	$13\cdot563$	731
732	$2^3\cdot3\cdot5\cdot61$	7321	$2\cdot7\cdot523$	$3\cdot2441$	$2^2\cdot1831$	$5^2\cdot293$	$2\cdot3^2\cdot11\cdot37$	$17\cdot431$	$2^5\cdot229$	$3\cdot7\cdot349$	732
733	$2\cdot5\cdot733$	7331	$2^2\cdot3\cdot13\cdot47$	7333	$2\cdot19\cdot193$	$3^2\cdot5\cdot163$	$2^3\cdot7\cdot131$	$11\cdot23\cdot29$	$2\cdot3\cdot1223$	$41\cdot179$	733
734	$2^2\cdot5\cdot367$	$3\cdot2447$	$2\cdot3671$	$7\cdot1049$	$2^4\cdot3^3\cdot17$	$5\cdot13\cdot113$	$2\cdot3673$	$3\cdot31\cdot79$	$2^2\cdot11\cdot167$	7349	734
735	$2\cdot3\cdot5^2\cdot7^2$	7351	$2^3\cdot919$	$3^2\cdot19\cdot43$	$2\cdot3677$	$5\cdot1471$	$2^2\cdot3\cdot613$	$7\cdot1051$	$2\cdot13\cdot283$	$3\cdot11\cdot223$	735
736	$2^6\cdot5\cdot23$	$17\cdot433$	$2\cdot3^2\cdot409$	$37\cdot199$	$2^2\cdot7\cdot263$	$3\cdot5\cdot491$	$2\cdot29\cdot127$	$53\cdot139$	$2^3\cdot3\cdot307$	7369	736
737	$2\cdot5\cdot11\cdot67$	$3^4\cdot7\cdot13$	$2^2\cdot19\cdot97$	$73\cdot101$	$2\cdot3\cdot1229$	$5^3\cdot59$	$2^4\cdot461$	$3\cdot2459$	$2\cdot7\cdot17\cdot31$	$47\cdot157$	737
738	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot41$	$11^2\cdot61$	$2\cdot3691$	$3\cdot23\cdot107$	$2^3\cdot13\cdot71$	$5\cdot7\cdot211$	$2\cdot3\cdot1231$	$83\cdot89$	$2^2\cdot1847$	$3^2\cdot821$	738
739	$2\cdot5\cdot739$	$19\cdot389$	$2^5\cdot3\cdot7\cdot11$	7393	$2\cdot3697$	$3\cdot5\cdot17\cdot29$	$2^2\cdot43^2$	$13\cdot569$	$2\cdot3^3\cdot137$	$7^2\cdot151$	739
740	$2^3\cdot5^2\cdot37$	$3\cdot2467$	$2\cdot3701$	$11\cdot673$	$2^2\cdot3\cdot617$	$5\cdot1481$	$2\cdot7\cdot23^2$	$3^2\cdot823$	$2^4\cdot463$	$31\cdot239$	740
741	$2\cdot3\cdot5\cdot13\cdot19$	7411	$2^2\cdot17\cdot109$	$3\cdot7\cdot353$	$2\cdot11\cdot337$	$5\cdot1483$	$2^3\cdot3^2\cdot103$	7417	$2\cdot3709$	$3\cdot2473$	741
742	$2^2\cdot5\cdot7\cdot53$	$41\cdot181$	$2\cdot3\cdot1237$	$13\cdot571$	$2^8\cdot29$	$3^3\cdot5^2\cdot11$	$2\cdot47\cdot79$	$7\cdot1061$	$2^2\cdot3\cdot619$	$17\cdot19\cdot23$	742
743	$2\cdot5\cdot743$	$3\cdot2477$	$2^3\cdot929$	7433	$2\cdot3^2\cdot7\cdot59$	$5\cdot1487$	$2^2\cdot11\cdot13^2$	$3\cdot37\cdot67$	$2\cdot3719$	$43\cdot173$	743
744	$2^4\cdot3\cdot5\cdot31$	$7\cdot1063$	$2\cdot61^2$	$3^2\cdot827$	$2^2\cdot1861$	$5\cdot1489$	$2\cdot3\cdot17\cdot73$	$11\cdot677$	$2^3\cdot7^2\cdot19$	$3\cdot13\cdot191$	744
745	$2\cdot5^2\cdot149$	7451	$2^2\cdot3^4\cdot23$	$29\cdot257$	$2\cdot3727$	$3\cdot5\cdot7\cdot71$	$2^5\cdot233$	7457	$2\cdot3\cdot11\cdot113$	7459	745
746	$2^2\cdot5\cdot373$	$3^2\cdot829$	$2\cdot7\cdot13\cdot41$	$17\cdot439$	$2^3\cdot3\cdot311$	$5\cdot1493$	$2\cdot3733$	$3\cdot19\cdot131$	$2^2\cdot1867$	$7\cdot11\cdot97$	746
747	$2\cdot3^2\cdot5\cdot83$	$31\cdot241$	$2^4\cdot467$	$3\cdot47\cdot53$	$2\cdot37\cdot101$	$5^2\cdot13\cdot23$	$2^2\cdot3\cdot7\cdot89$	7477	$2\cdot3739$	$3^3\cdot277$	747
748	$2^3\cdot5\cdot11\cdot17$	7481	$2\cdot3\cdot29\cdot43$	$7\cdot1069$	$2^2\cdot1871$	$3\cdot5\cdot499$	$2\cdot19\cdot197$	7487	$2^6\cdot3^2\cdot13$	7489	748
749	$2\cdot5\cdot7\cdot107$	$3\cdot11\cdot227$	$2^2\cdot1873$	$59\cdot127$	$2\cdot3\cdot1249$	$5\cdot1499$	$2^3\cdot937$	$3^2\cdot7^2\cdot17$	$2\cdot23\cdot163$	7499	749

7499

7500

750	$2^2\cdot3\cdot5^4$	$13\cdot577$	$2\cdot11^2\cdot31$	$3\cdot41\cdot61$	$2^4\cdot7\cdot67$	$5\cdot19\cdot79$	$2\cdot3^3\cdot139$	7507	$2^2\cdot1877$	$3\cdot2503$	750
751	$2\cdot5\cdot751$	$7\cdot29\cdot37$	$2^3\cdot3\cdot313$	$11\cdot683$	$2\cdot13\cdot17^2$	$3^2\cdot5\cdot167$	$2^2\cdot1879$	7517	$2\cdot3\cdot7\cdot179$	$73\cdot103$	751
752	$2^5\cdot5\cdot47$	$3\cdot23\cdot109$	$2\cdot3761$	7523	$2^2\cdot3^2\cdot11\cdot19$	$5^2\cdot7\cdot43$	$2\cdot53\cdot71$	$3\cdot13\cdot193$	$2^3\cdot941$	7529	752
753	$2\cdot3\cdot5\cdot251$	$17\cdot443$	$2^2\cdot7\cdot269$	$3^5\cdot31$	$2\cdot3767$	$5\cdot11\cdot137$	$2^4\cdot3\cdot157$	7537	$2\cdot3769$	$3\cdot7\cdot359$	753
754	$2^2\cdot5\cdot13\cdot29$	7541	$2\cdot3^2\cdot419$	$19\cdot397$	$2^3\cdot23\cdot41$	$3\cdot5\cdot503$	$2\cdot7^3\cdot11$	7547	$2^2\cdot3\cdot17\cdot37$	7549	754
755	$2\cdot5^2\cdot151$	$3^2\cdot839$	$2^7\cdot59$	$7\cdot13\cdot83$	$2\cdot3\cdot1259$	$5\cdot1511$	$2^2\cdot1889$	$3\cdot11\cdot229$	$2\cdot3779$	7559	755
756	$2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7$	7561	$2\cdot19\cdot199$	$3\cdot2521$	$2^2\cdot31\cdot61$	$5\cdot17\cdot89$	$2\cdot3\cdot13\cdot97$	$7\cdot23\cdot47$	$2^4\cdot11\cdot43$	$3^2\cdot29^2$	756
757	$2\cdot5\cdot757$	$67\cdot113$	$2^2\cdot3\cdot631$	7573	$2\cdot7\cdot541$	$3\cdot5^2\cdot101$	$2^3\cdot947$	7577	$2\cdot3^2\cdot421$	$11\cdot13\cdot53$	757
758	$2^2\cdot5\cdot379$	$3\cdot7\cdot19^2$	$2\cdot17\cdot223$	7583	$2^5\cdot3\cdot79$	$5\cdot37\cdot41$	$2\cdot3793$	$3^3\cdot281$	$2^2\cdot7\cdot271$	7589	758
759	$2\cdot3\cdot5\cdot11\cdot23$	7591	$2^3\cdot13\cdot73$	$3\cdot2531$	$2\cdot3797$	$5\cdot7^2\cdot31$	$2^2\cdot3^2\cdot211$	$71\cdot107$	$2\cdot29\cdot131$	$3\cdot17\cdot149$	759
760	$2^4\cdot5^2\cdot19$	$11\cdot691$	$2\cdot3\cdot7\cdot181$	7603	$2^2\cdot1901$	$3^2\cdot5\cdot13^2$	$2\cdot3803$	7607	$2^3\cdot3\cdot317$	$7\cdot1087$	760
761	$2\cdot5\cdot761$	$3\cdot43\cdot59$	$2^2\cdot11\cdot173$	$23\cdot331$	$2\cdot3^4\cdot47$	$5\cdot1523$	$2^6\cdot7\cdot17$	$3\cdot2539$	$2\cdot13\cdot293$	$19\cdot401$	761
762	$2^2\cdot3\cdot5\cdot127$	7621	$2\cdot37\cdot103$	$3^2\cdot7\cdot11^2$	$2^3\cdot953$	$5^3\cdot61$	$2\cdot3\cdot31\cdot41$	$29\cdot263$	$2^2\cdot1907$	$3\cdot2543$	762
763	$2\cdot5\cdot7\cdot109$	$13\cdot587$	$2^4\cdot3^2\cdot53$	$17\cdot449$	$2\cdot11\cdot347$	$3\cdot5\cdot509$	$2^2\cdot23\cdot83$	$7\cdot1091$	$2\cdot3\cdot19\cdot67$	7639	763
764	$2^3\cdot5\cdot191$	$3^3\cdot283$	$2\cdot3821$	7643	$2^2\cdot3\cdot7^2\cdot13$	$5\cdot11\cdot139$	$2\cdot3823$	$3\cdot2549$	$2^5\cdot239$	7649	764
765	$2\cdot3^2\cdot5^2\cdot17$	$7\cdot1093$	$2^2\cdot1913$	$3\cdot2551$	$2\cdot43\cdot89$	$5\cdot1531$	$2^3\cdot3\cdot11\cdot29$	$13\cdot19\cdot31$	$2\cdot7\cdot547$	$3^2\cdot23\cdot37$	765
766	$2^2\cdot5\cdot383$	$47\cdot163$	$2\cdot3\cdot1277$	$79\cdot97$	$2^4\cdot479$	$3\cdot5\cdot7\cdot73$	$2\cdot3833$	$11\cdot17\cdot41$	$2^2\cdot3^3\cdot71$	7669	766
767	$2\cdot5\cdot13\cdot59$	$3\cdot2557$	$2^3\cdot7\cdot137$	7673	$2\cdot3\cdot1279$	$5^2\cdot307$	$2^2\cdot19\cdot101$	$3^2\cdot853$	$2\cdot11\cdot349$	$7\cdot1097$	767
768	$2^9\cdot3\cdot5$	7681	$2\cdot23\cdot167$	$3\cdot13\cdot197$	$2^2\cdot17\cdot113$	$5\cdot29\cdot53$	$2\cdot3^2\cdot7\cdot61$	7687	$2^3\cdot31^2$	$3\cdot11\cdot233$	768
769	$2\cdot5\cdot769$	7691	$2^2\cdot3\cdot641$	$7^2\cdot157$	$2\cdot3847$	$3^4\cdot5\cdot19$	$2^4\cdot13\cdot37$	$43\cdot179$	$2\cdot3\cdot1283$	7699	769
770	$2^2\cdot5^2\cdot7\cdot11$	$3\cdot17\cdot151$	$2\cdot3851$	7703	$2^3\cdot3^2\cdot107$	$5\cdot23\cdot67$	$2\cdot3853$	$3\cdot7\cdot367$	$2^2\cdot41\cdot47$	$13\cdot593$	770
771	$2\cdot3\cdot5\cdot257$	$11\cdot701$	$2^5\cdot241$	$3^2\cdot857$	$2\cdot7\cdot19\cdot29$	$5\cdot1543$	$2^2\cdot3\cdot643$	7717	$2\cdot17\cdot227$	$3\cdot31\cdot83$	771
772	$2^3\cdot5\cdot193$	$7\cdot1103$	$2\cdot3^3\cdot11\cdot13$	7723	$2^2\cdot1931$	$3\cdot5^2\cdot103$	$2\cdot3863$	7727	$2^4\cdot3\cdot7\cdot23$	$59\cdot131$	772
773	$2\cdot5\cdot773$	$3^2\cdot859$	$2^2\cdot1933$	$11\cdot19\cdot37$	$2\cdot3\cdot1289$	$5\cdot7\cdot13\cdot17$	$2^3\cdot967$	$3\cdot2579$	$2\cdot53\cdot73$	$71\cdot109$	773
774	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot43$	7741	$2\cdot7^2\cdot79$	$3\cdot29\cdot89$	$2^6\cdot11^2$	$5\cdot1549$	$2\cdot3\cdot1291$	$61\cdot127$	$2^2\cdot13\cdot149$	$3^3\cdot7\cdot41$	774
775	$2\cdot5^3\cdot31$	$23\cdot337$	$2^3\cdot3\cdot17\cdot19$	7753	$2\cdot3877$	$3\cdot5\cdot11\cdot47$	$2^2\cdot7\cdot277$	7757	$2\cdot3^2\cdot431$	7759	775
776	$2^4\cdot5\cdot97$	$3\cdot13\cdot199$	$2\cdot3881$	$7\cdot1109$	$2^2\cdot3\cdot647$	$5\cdot1553$	$2\cdot11\cdot353$	$3^2\cdot863$	$2^3\cdot971$	$17\cdot457$	776
777	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot37$	$19\cdot409$	$2^2\cdot29\cdot67$	$3\cdot2591$	$2\cdot13^2\cdot23$	$5^2\cdot311$	$2^5\cdot3^5$	$7\cdot11\cdot101$	$2\cdot3889$	$3\cdot2593$	777
778	$2^2\cdot5\cdot389$	$31\cdot251$	$2\cdot3\cdot1297$	$43\cdot181$	$2^3\cdot7\cdot139$	$3^2\cdot5\cdot173$	$2\cdot17\cdot229$	$13\cdot599$	$2^2\cdot3\cdot11\cdot59$	7789	778
779	$2\cdot5\cdot19\cdot41$	$3\cdot7^2\cdot53$	$2^4\cdot487$	7793	$2\cdot3^2\cdot433$	$5\cdot1559$	$2^2\cdot1949$	$3\cdot23\cdot113$	$2\cdot7\cdot557$	$11\cdot709$	779
780	$2^3\cdot3\cdot5^2\cdot13$	$29\cdot269$	$2\cdot47\cdot83$	$3^3\cdot17^2$	$2^2\cdot1951$	$5\cdot7\cdot223$	$2\cdot3\cdot1301$	$37\cdot211$	$2^7\cdot61$	$3\cdot19\cdot137$	780
781	$2\cdot5\cdot11\cdot71$	$73\cdot107$	$2^2\cdot3^2\cdot7\cdot31$	$13\cdot601$	$2\cdot3907$	$3\cdot5\cdot521$	$2^3\cdot977$	7817	$2\cdot3\cdot1303$	$7\cdot1117$	781
782	$2^2\cdot5\cdot17\cdot23$	$3^2\cdot11\cdot79$	$2\cdot3911$	7823	$2^4\cdot3\cdot163$	$5^2\cdot313$	$2\cdot7\cdot13\cdot43$	$3\cdot2609$	$2^2\cdot19\cdot103$	7829	782
783	$2\cdot3^3\cdot5\cdot29$	$41\cdot191$	$2^3\cdot11\cdot89$	$3\cdot7\cdot373$	$2\cdot3917$	$5\cdot1567$	$2^2\cdot3\cdot653$	$17\cdot461$	$2\cdot3919$	$3^2\cdot13\cdot67$	783
784	$2^5\cdot5\cdot7^2$	7841	$2\cdot3\cdot1307$	$11\cdot23\cdot31$	$2^2\cdot37\cdot53$	$3\cdot5\cdot523$	$2\cdot3923$	$7\cdot19\cdot59$	$2^3\cdot3^2\cdot109$	$47\cdot167$	784
785	$2\cdot5^2\cdot157$	$3\cdot2617$	$2^2\cdot13\cdot151$	7853	$2\cdot3\cdot7\cdot11\cdot17$	$5\cdot1571$	$2^4\cdot491$	$3^4\cdot97$	$2\cdot3929$	$29\cdot271$	785
786	$2^2\cdot3\cdot5\cdot131$	$7\cdot1123$	$2\cdot3931$	$3\cdot2621$	$2^3\cdot983$	$5\cdot11^2\cdot13$	$2\cdot3^2\cdot19\cdot23$	7867	$2^2\cdot7\cdot281$	$3\cdot43\cdot61$	786
787	$2\cdot5\cdot787$	$17\cdot463$	$2^6\cdot3\cdot41$	7873	$2\cdot31\cdot127$	$3^2\cdot5^3\cdot7$	$2^2\cdot11\cdot179$	7877	$2\cdot3\cdot13\cdot101$	7879	787
788	$2^3\cdot5\cdot197$	$3\cdot37\cdot71$	$2\cdot7\cdot563$	7883	$2^2\cdot3^3\cdot73$	$5\cdot19\cdot83$	$2\cdot3943$	$3\cdot11\cdot239$	$2^4\cdot17\cdot29$	$7^3\cdot23$	788
789	$2\cdot3\cdot5\cdot263$	$13\cdot607$	$2^2\cdot1973$	$3^2\cdot877$	$2\cdot3947$	$5\cdot1579$	$2^3\cdot3\cdot7\cdot47$	$53\cdot149$	$2\cdot11\cdot359$	$3\cdot2633$	789
790	$2^2\cdot5^2\cdot79$	7901	$2\cdot3^2\cdot439$	$7\cdot1129$	$2^5\cdot13\cdot19$	$3\cdot5\cdot17\cdot31$	$2\cdot59\cdot67$	7907	$2^2\cdot3\cdot659$	$11\cdot719$	790
791	$2\cdot5\cdot7\cdot113$	$3^3\cdot293$	$2^3\cdot23\cdot43$	$41\cdot193$	$2\cdot3\cdot1319$	$5\cdot1583$	$2^2\cdot1979$	$3\cdot7\cdot13\cdot29$	$2\cdot37\cdot107$	7919	791
792	$2^4\cdot3^2\cdot5\cdot11$	89^2	$2\cdot17\cdot233$	$3\cdot19\cdot139$	$2^2\cdot7\cdot283$	$5^2\cdot317$	$2\cdot3\cdot1321$	7927	$2^3\cdot991$	$3^2\cdot881$	792
793	$2\cdot5\cdot13\cdot61$	$7\cdot11\cdot103$	$2^2\cdot3\cdot661$	7933	$2\cdot3967$	$3\cdot5\cdot23^2$	$2^8\cdot31$	7937	$2\cdot3^4\cdot7^2$	$17\cdot467$	793
794	$2^2\cdot5\cdot397$	$3\cdot2647$	$2\cdot11\cdot19^2$	$13^2\cdot47$	$2^3\cdot3\cdot331$	$5\cdot7\cdot227$	$2\cdot29\cdot137$	$3^2\cdot883$	$2^2\cdot1987$	7949	794
795	$2\cdot3\cdot5^2\cdot53$	7951	$2^4\cdot7\cdot71$	$3\cdot11\cdot241$	$2\cdot41\cdot97$	$5\cdot37\cdot43$	$2^2\cdot3^2\cdot13\cdot17$	$73\cdot109$	$2\cdot23\cdot173$	$3\cdot7\cdot379$	795
796	$2^3\cdot5\cdot199$	$19\cdot419$	$2\cdot3\cdot1327$	7963	$2^2\cdot11\cdot181$	$3^3\cdot5\cdot59$	$2\cdot7\cdot569$	$31\cdot257$	$2^5\cdot3\cdot83$	$13\cdot613$	796
797	$2\cdot5\cdot797$	$3\cdot2657$	$2^2\cdot1993$	$7\cdot17\cdot67$	$2\cdot3^2\cdot443$	$5^2\cdot11\cdot29$	$2^3\cdot997$	$3\cdot2659$	$2\cdot3989$	$79\cdot101$	797
798	$2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot19$	$23\cdot347$	$2\cdot13\cdot307$	$3^2\cdot887$	$2^4\cdot499$	$5\cdot1597$	$2\cdot3\cdot11^3$	$7^2\cdot163$	$2^2\cdot1997$	$3\cdot2663$	798
799	$2\cdot5\cdot17\cdot47$	$61\cdot131$	$2^3\cdot3^3\cdot37$	7993	$2\cdot7\cdot571$	$3\cdot5\cdot13\cdot41$	$2^2\cdot1999$	$11\cdot727$	$2\cdot3\cdot31\cdot43$	$19\cdot421$	799

7999

Таблица 24.7. Разложения на множители

8000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
800	$2^6\cdot5^3$	$3^2\cdot7\cdot127$	2·4001	**53·151**	$2^2\cdot3\cdot23\cdot29$	5·1601	2·4003	3·17·157	$2^3\cdot7\cdot11\cdot13$	**8009**	800
801	$2\cdot3^2\cdot5\cdot89$	**8011**	$2^2\cdot2003$	3·2671	2·4007	5·7·229	$2^4\cdot3\cdot167$	**8017**	2·19·211	$3^6\cdot11$	801
802	$2^2\cdot5\cdot401$	13·617	2·3·7·191	71·113	$2^3\cdot17\cdot59$	$3\cdot5^2\cdot107$	2·4013	23·349	$2^2\cdot3^2\cdot223$	7·31·37	802
803	2·5·11·73	3·2677	$2^5\cdot251$	29·277	2·3·13·103	5·1607	$2^2\cdot7^2\cdot41$	$3^2\cdot19\cdot47$	2·4019	**8039**	803
804	$2^3\cdot3\cdot5\cdot67$	11·17·43	2·4021	3·7·383	$2^2\cdot2011$	5·1609	$2\cdot3^3\cdot149$	13·619	$2^4\cdot503$	3·2683	804
805	$2\cdot5^2\cdot7\cdot23$	83·97	$2^2\cdot3\cdot11\cdot61$	**8053**	2·4027	$3^2\cdot5\cdot179$	$2^3\cdot19\cdot53$	7·1151	2·3·17·79	**8059**	805
806	$2^2\cdot5\cdot13\cdot31$	3·2687	2·29·139	11·733	$2^7\cdot3^2\cdot7$	5·1613	2·37·109	3·2689	$2^2\cdot2017$	**8069**	806
807	2·3·5·269	7·1153	$2^3\cdot1009$	$3^3\cdot13\cdot23$	2·11·367	$5^2\cdot17\cdot19$	$2^2\cdot3\cdot673$	41·197	2·7·577	3·2693	807
808	$2^4\cdot5\cdot101$	**8081**	$2\cdot3^2\cdot449$	59·137	$2^2\cdot43\cdot47$	$3\cdot5\cdot7^2\cdot11$	2·13·311	**8087**	$2^3\cdot3\cdot337$	**8089**	808
809	2·5·809	$3^2\cdot29\cdot31$	$2^2\cdot7\cdot17^2$	**8093**	2·3·19·71	5·1619	$2^5\cdot11\cdot23$	3·2699	2·4049	7·13·89	809
810	$2^2\cdot3^4\cdot5^2$	**8101**	2·4051	3·37·73	$2^3\cdot1013$	5·1621	2·3·7·193	$11^2\cdot67$	$2^2\cdot2027$	$3^2\cdot17\cdot53$	810
811	2·5·811	**8111**	$2^4\cdot3\cdot13^2$	7·19·61	2·4057	3·5·541	$2^2\cdot2029$	**8117**	$2\cdot3^2\cdot11\cdot41$	23·353	811
812	$2^3\cdot5\cdot7\cdot29$	3·2707	2·31·131	**8123**	$2^2\cdot3\cdot677$	$5^4\cdot13$	2·17·239	$3^3\cdot7\cdot43$	$2^6\cdot127$	11·739	812
813	2·3·5·271	47·173	$2^2\cdot19\cdot107$	3·2711	$2\cdot7^2\cdot83$	5·1627	$2^3\cdot3^2\cdot113$	79·103	2·13·313	3·2713	813
814	$2^2\cdot5\cdot11\cdot37$	7·1163	2·3·23·59	17·479	$2^4\cdot509$	$3^2\cdot5\cdot181$	2·4073	**8147**	$2^2\cdot3\cdot7\cdot97$	29·281	814
815	$2\cdot5^2\cdot163$	3·11·13·19	$2^3\cdot1019$	31·263	$2\cdot3^3\cdot151$	5·7·233	$2^2\cdot2039$	3·2719	2·4079	41·199	815
816	$2^5\cdot3\cdot5\cdot17$	**8161**	2·7·11·53	$3^2\cdot907$	$2^2\cdot13\cdot157$	5·23·71	2·3·1361	**8167**	$2^3\cdot1021$	3·7·389	816
817	2·5·19·43	**8171**	$2^2\cdot3^2\cdot227$	11·743	2·61·67	$3\cdot5^2\cdot109$	$2^4\cdot7\cdot73$	13·17·37	2·3·29·47	**8179**	817
818	$2^2\cdot5\cdot409$	$3^4\cdot101$	2·4091	$7^2\cdot167$	$2^3\cdot3\cdot11\cdot31$	5·1637	2·4093	3·2729	$2^2\cdot23\cdot89$	19·431	818
819	$2\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot13$	**8191**	2^{13}	3·2731	2·17·241	5·11·149	$2^2\cdot3\cdot683$	7·1171	2·4099	$3^2\cdot911$	819
820	$2^3\cdot5^2\cdot41$	59·139	2·3·1367	13·631	$2^2\cdot7\cdot293$	3·5·547	2·11·373	29·283	$2^4\cdot3^3\cdot19$	**8209**	820
821	2·5·821	3·7·17·23	$2^2\cdot2053$	43·191	$2\cdot3\cdot37^2$	5·31·53	$2^3\cdot13\cdot79$	$3^2\cdot11\cdot83$	2·7·587	**8219**	821
822	$2^2\cdot3\cdot5\cdot137$	**8221**	2·4111	3·2741	$2^5\cdot257$	$5^2\cdot7\cdot47$	$2\cdot3^2\cdot457$	19·433	$2^2\cdot11^2\cdot17$	3·13·211	822
823	2·5·823	**8231**	$2^3\cdot3\cdot7^3$	**8233**	2·23·179	$3^3\cdot5\cdot61$	$2^2\cdot29\cdot71$	**8237**	2·3·1373	7·11·107	823
824	$2^4\cdot5\cdot103$	3·41·67	2·13·317	**8243**	$2^2\cdot3^2\cdot229$	5·17·97	2·7·19·31	3·2749	$2^3\cdot1031$	73·113	824
825	$2\cdot3\cdot5^3\cdot11$	37·223	$2^2\cdot2063$	$3^2\cdot7\cdot131$	2·4127	5·13·127	$2^6\cdot3\cdot43$	23·359	2·4129	3·2753	825
826	$2^2\cdot5\cdot7\cdot59$	11·751	$2\cdot3^5\cdot17$	**8263**	$2^3\cdot1033$	3·5·19·29	2·4133	7·1181	$2^2\cdot3\cdot13\cdot53$	**8269**	826
827	2·5·827	$3^2\cdot919$	$2^4\cdot11\cdot47$	**8273**	2·3·7·197	$5^2\cdot331$	$2^2\cdot2069$	3·31·89	2·4139	17·487	827
828	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot23$	$7^2\cdot13^2$	2·41·101	3·11·251	$2^2\cdot19\cdot109$	5·1657	2·3·1381	**8287**	$2^5\cdot7\cdot37$	$3^3\cdot307$	828
829	2·5·829	**8291**	$2^2\cdot3\cdot691$	**8293**	2·11·13·29	3·5·7·79	$2^3\cdot17\cdot61$	**8297**	$2\cdot3^2\cdot461$	43·193	829
830	$2^2\cdot5^2\cdot83$	3·2767	2·7·593	$19^2\cdot23$	$2^4\cdot3\cdot173$	5·11·151	2·4153	$3^2\cdot13\cdot71$	$2^2\cdot31\cdot67$	7·1187	830
831	2·3·5·277	**8311**	$2^3\cdot1039$	3·17·163	2·4157	5·1663	$2^2\cdot3^3\cdot7\cdot11$	**8317**	2·4159	3·47·59	831
832	$2^7\cdot5\cdot13$	53·157	2·3·19·73	7·29·41	$2^2\cdot2081$	$3^2\cdot5^2\cdot37$	2·23·181	11·757	$2^3\cdot3\cdot347$	**8329**	832
833	$2\cdot5\cdot7^2\cdot17$	3·2777	$2^2\cdot2083$	13·641	$2\cdot3^2\cdot463$	5·1667	$2^4\cdot521$	3·7·397	2·11·379	31·269	833
834	$2^2\cdot3\cdot5\cdot139$	19·439	2·43·97	$3^4\cdot103$	$2^3\cdot7\cdot149$	5·1669	2·3·13·107	17·491	$2^2\cdot2087$	$3\cdot11^2\cdot23$	834
835	$2\cdot5^2\cdot167$	7·1193	$2^5\cdot3^2\cdot29$	**8353**	2·4177	3·5·557	$2^2\cdot2089$	61·137	2·3·7·199	13·643	835
836	$2^3\cdot5\cdot11\cdot19$	$3^2\cdot929$	2·37·113	**8363**	$2^2\cdot3\cdot17\cdot41$	5·7·239	2·47·89	3·2789	$2^4\cdot523$	**8369**	836
837	$2\cdot3^3\cdot5\cdot31$	11·761	$2^2\cdot7\cdot13\cdot23$	3·2791	2·53·79	$5^3\cdot67$	$2^3\cdot3\cdot349$	**8377**	2·59·71	$3^2\cdot7^2\cdot19$	837
838	$2^2\cdot5\cdot419$	$17^2\cdot29$	2·3·11·127	83·101	$2^6\cdot131$	3·5·13·43	2·7·599	**8387**	$2^2\cdot3^2\cdot233$	**8389**	838
839	2·5·839	3·2797	$2^3\cdot1049$	7·11·109	2·3·1399	5·23·73	$2^2\cdot2099$	$3^3\cdot311$	2·13·17·19	37·227	839
840	$2^4\cdot3\cdot5^2\cdot7$	31·271	2·4201	3·2801	$2^2\cdot11\cdot191$	$5\cdot41^2$	$2\cdot3^2\cdot467$	7·1201	$2^3\cdot1051$	3·2803	840
841	$2\cdot5\cdot29^2$	13·647	$2^2\cdot3\cdot701$	47·179	2·7·601	$3^2\cdot5\cdot11\cdot17$	$2^5\cdot263$	19·443	2·3·23·61	**8419**	841
842	$2^2\cdot5\cdot421$	3·7·401	2·4211	**8423**	$2^3\cdot3^4\cdot13$	$5^2\cdot337$	2·11·383	$3\cdot53^2$	$2^2\cdot7^2\cdot43$	**8429**	842
843	2·3·5·281	**8431**	$2^4\cdot17\cdot31$	$3^2\cdot937$	2·4217	5·7·241	$2^2\cdot3\cdot19\cdot37$	11·13·59	2·4219	3·29·97	843
844	$2^3\cdot5\cdot211$	23·367	$2\cdot3^2\cdot7\cdot67$	**8443**	$2^2\cdot2111$	3·5·563	2·41·103	**8447**	$2^8\cdot3\cdot11$	7·17·71	844
845	$2\cdot5^2\cdot13^2$	$3^3\cdot313$	$2^2\cdot2113$	79·107	2·3·1409	5·19·89	$2^3\cdot7\cdot151$	3·2819	2·4229	11·769	845
846	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot47$	**8461**	2·4231	3·7·13·31	$2^4\cdot23^2$	5·1693	2·3·17·83	**8467**	$2^2\cdot29\cdot73$	$3^2\cdot941$	846
847	$2\cdot5\cdot7\cdot11^2$	43·197	$2^3\cdot3\cdot353$	37·229	2·19·223	$3\cdot5^2\cdot113$	$2^2\cdot13\cdot163$	$7^2\cdot173$	$2\cdot3^3\cdot157$	61·139	847
848	$2^5\cdot5\cdot53$	3·11·257	2·4241	17·499	$2^2\cdot3\cdot7\cdot101$	5·1697	2·4243	$3^2\cdot23\cdot41$	$2^3\cdot1061$	13·653	848
849	2·3·5·283	7·1213	$2^2\cdot11\cdot193$	3·19·149	2·31·137	5·1699	$2^4\cdot3^2\cdot59$	29·293	2·7·607	3·2833	849

8499

8500

850	$2^2\cdot5^3\cdot17$	8501	2·3·13·109	11·773	$2^3\cdot1063$	$3^5\cdot5\cdot7$	2·4253	47·181	$2^2\cdot3\cdot709$	67·127	850
851	2·5·23·37	3·2837	$2^6\cdot7\cdot19$	8513	$2\cdot3^2\cdot11\cdot43$	5·13·131	$2^2\cdot2129$	3·17·167	2·4259	7·1217	851
852	$2^3\cdot3\cdot5\cdot71$	8521	2·4261	$3^2\cdot947$	$2^2\cdot2131$	$5^2\cdot11\cdot31$	$2\cdot3\cdot7^2\cdot29$	8527	$2^4\cdot13\cdot41$	3·2843	852
853	2·5·853	19·449	$2^2\cdot3^3\cdot79$	7·23·53	2·17·251	3·5·569	$2^3\cdot11\cdot97$	8537	2·3·1423	8539	853
854	$2^2\cdot5\cdot7\cdot61$	$3^2\cdot13\cdot73$	2·4271	8543	$2^5\cdot3\cdot89$	5·1709	2·4273	3·7·11·37	$2^2\cdot2137$	83·103	854
855	$2\cdot3^2\cdot5^2\cdot19$	17·503	$2^3\cdot1069$	3·2851	2·7·13·47	5·29·59	$2^2\cdot3\cdot23\cdot31$	43·199	2·11·389	$3^3\cdot317$	855
856	$2^4\cdot5\cdot107$	7·1223	2·3·1427	8563	$2^2\cdot2141$	3·5·571	2·4283	13·659	$2^3\cdot3^2\cdot7\cdot17$	11·19·41	856
857	2·5·857	3·2857	$2^2\cdot2143$	8573	2·3·1429	$5^2\cdot7^3$	$2^7\cdot67$	$3^2\cdot953$	2·4289	23·373	857
858	$2^2\cdot3\cdot5\cdot11\cdot13$	8581	2·7·613	3·2861	$2^3\cdot29\cdot37$	5·17·101	$2\cdot3^4\cdot53$	31·277	$2^2\cdot19\cdot113$	3·7·409	858
859	2·5·859	$11^2\cdot71$	$2^4\cdot3\cdot179$	13·661	2·4297	$3^2\cdot5\cdot191$	$2^2\cdot7\cdot307$	8597	2·3·1433	8599	859
860	$2^3\cdot5^2\cdot43$	3·47·61	2·11·17·23	7·1229	$2^2\cdot3^2\cdot239$	5·1721	2·13·331	3·19·151	$2^5\cdot269$	8609	860
861	2·3·5·7·41	79·109	$2^2\cdot2153$	$3^3\cdot11\cdot29$	2·59·73	5·1723	$2^3\cdot3\cdot359$	7·1231	2·31·139	$3\cdot13^2\cdot17$	861
862	$2^2\cdot5\cdot431$	37·233	$2\cdot3^2\cdot479$	8623	$2^4\cdot7^2\cdot11$	$3\cdot5^3\cdot23$	2·19·227	8627	$2^2\cdot3\cdot719$	8629	862
863	2·5·863	$3^2\cdot7\cdot137$	$2^3\cdot13\cdot83$	89·97	2·3·1439	5·11·157	$2^2\cdot17\cdot127$	3·2879	2·7·617	53·163	863
864	$2^6\cdot3^3\cdot5$	8641	2·29·149	3·43·67	$2^2\cdot2161$	5·7·13·19	2·3·11·131	8647	$2^3\cdot23\cdot47$	$3^2\cdot31^2$	864
865	$2\cdot5^2\cdot173$	41·211	$2^2\cdot3\cdot7\cdot103$	17·509	2·4327	3·5·577	$2^4\cdot541$	11·787	$2\cdot3^2\cdot13\cdot37$	7·1237	865
866	$2^2\cdot5\cdot433$	3·2887	2·61·71	8663	$2^3\cdot3\cdot19^2$	5·1733	2·7·619	$3^4\cdot107$	$2^2\cdot11\cdot197$	8669	866
867	$2\cdot3\cdot5\cdot17^2$	13·23·29	$2^5\cdot271$	$3\cdot7^2\cdot59$	2·4337	$5^2\cdot347$	$2^2\cdot3^2\cdot241$	8677	2·4339	3·11·263	867
868	$2^3\cdot5\cdot7\cdot31$	8681	2·3·1447	19·457	$2^2\cdot13\cdot167$	$3^2\cdot5\cdot193$	2·43·101	7·17·73	$2^4\cdot3\cdot181$	8689	868
869	2·5·11·79	3·2897	$2^2\cdot41\cdot53$	8693	$2\cdot3^3\cdot7\cdot23$	5·37·47	$2^3\cdot1087$	3·13·223	2·4349	8699	869
870	$2^2\cdot3\cdot5^2\cdot29$	7·11·113	2·19·229	$3^2\cdot967$	$2^9\cdot17$	5·1741	2·3·1451	8707	$2^2\cdot7\cdot311$	3·2903	870
871	2·5·13·67	31·281	$2^3\cdot3^2\cdot11^2$	8713	2·4357	3·5·7·83	$2^2\cdot2179$	23·379	2·3·1453	8719	871
872	$2^4\cdot5\cdot109$	$3^3\cdot17\cdot19$	$2\cdot7^2\cdot89$	11·13·61	$2^2\cdot3\cdot727$	$5^2\cdot349$	2·4363	3·2909	$2^3\cdot1091$	7·29·43	872
873	$2\cdot3^2\cdot5\cdot97$	8731	$2^2\cdot37\cdot59$	3·41·71	2·11·397	5·1747	$2^5\cdot3\cdot7\cdot13$	8737	2·17·257	$3^2\cdot971$	873
874	$2^2\cdot5\cdot19\cdot23$	8741	2·3·31·47	7·1249	$2^3\cdot1093$	3·5·11·53	2·4373	8747	$2^2\cdot3^7$	13·673	874
875	$2\cdot5^4\cdot7$	3·2917	$2^4\cdot547$	8753	2·3·1459	5·17·103	$2^2\cdot11\cdot199$	$3^2\cdot7\cdot139$	2·29·151	19·461	875
876	$2^3\cdot3\cdot5\cdot73$	8761	2·13·337	3·23·127	$2^2\cdot7\cdot313$	5·1753	$2\cdot3^2\cdot487$	11·797	$2^6\cdot137$	3·37·79	876
877	2·5·877	$7^2\cdot179$	$2^2\cdot3\cdot17\cdot43$	31·283	2·41·107	$3^3\cdot5^2\cdot13$	$2^3\cdot1097$	67·131	2·3·7·11·19	8779	877
878	$2^2\cdot5\cdot439$	3·2927	2·4391	8783	$2^4\cdot3^2\cdot61$	5·7·251	2·23·191	3·29·101	$2^2\cdot13^3$	11·17·47	878
879	2·3·5·293	59·149	$2^3\cdot7\cdot157$	$3^2\cdot977$	2·4397	5·1759	$2^2\cdot3\cdot733$	19·463	2·53·83	3·7·419	879
880	$2^5\cdot5^2\cdot11$	13·677	$2\cdot3^3\cdot163$	8803	$2^2\cdot31\cdot71$	3·5·587	2·7·17·37	8807	$2^3\cdot3\cdot367$	23·383	880
881	2·5·881	$3^2\cdot11\cdot89$	$2^2\cdot2203$	7·1259	2·3·13·113	5·41·43	$2^4\cdot19\cdot29$	3·2939	2·4409	8819	881
882	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7^2$	8821	2·11·401	3·17·173	$2^3\cdot1103$	$5^2\cdot353$	2·3·1471	7·13·97	$2^2\cdot2207$	$3^4\cdot109$	882
883	2·5·883	8831	$2^7\cdot3\cdot23$	$11^2\cdot73$	2·7·631	3·5·19·31	$2^2\cdot47^2$	8837	$2\cdot3^2\cdot491$	8839	883
884	$2^3\cdot5\cdot13\cdot17$	3·7·421	2·4421	37·239	$2^2\cdot3\cdot11\cdot67$	5·29·61	2·4423	$3^2\cdot983$	$2^4\cdot7\cdot79$	8849	884
885	$2\cdot3\cdot5^2\cdot59$	53·167	$2^2\cdot2213$	3·13·227	2·19·233	5·7·11·23	$2^3\cdot3^3\cdot41$	17·521	2·43·103	3·2953	885
886	$2^2\cdot5\cdot443$	8861	2·3·7·211	8863	$2^5\cdot277$	$3^2\cdot5\cdot197$	2·11·13·31	8867	$2^2\cdot3\cdot739$	$7^2\cdot181$	886
887	2·5·887	3·2957	$2^3\cdot1109$	19·467	$2\cdot3^2\cdot17\cdot29$	$5^3\cdot71$	$2^2\cdot7\cdot317$	3·11·269	2·23·193	13·683	887
888	$2^4\cdot3\cdot5\cdot37$	83·107	2·4441	$3^3\cdot7\cdot47$	$2^2\cdot2221$	5·1777	2·3·1481	8887	$2^3\cdot11\cdot101$	3·2963	888
889	2·5·7·127	17·523	$2^2\cdot3^2\cdot13\cdot19$	8893	2·4447	3·5·593	$2^6\cdot139$	7·31·41	2·3·1483	11·809	889
890	$2^2\cdot5^2\cdot89$	$3^2\cdot23\cdot43$	2·4451	29·307	$2^3\cdot3\cdot7\cdot53$	5·13·137	2·61·73	3·2969	$2^2\cdot17\cdot131$	59·151	890
891	$2\cdot3^4\cdot5\cdot11$	7·19·67	$2^4\cdot557$	3·2971	2·4457	5·1783	$2^2\cdot3\cdot743$	37·241	$2\cdot7^3\cdot13$	$3^2\cdot991$	891
892	$2^3\cdot5\cdot223$	11·811	2·3·1487	8923	$2^2\cdot23\cdot97$	$3\cdot5^2\cdot7\cdot17$	2·4463	79·113	$2^5\cdot3^2\cdot31$	8929	892
893	2·5·19·47	3·13·229	$2^2\cdot7\cdot11\cdot29$	8933	2·3·1489	5·1787	$2^3\cdot1117$	$3^3\cdot331$	2·41·109	7·1277	893
894	$2^2\cdot3\cdot5\cdot149$	8941	2·17·263	3·11·271	$2^4\cdot13\cdot43$	5·1789	$2\cdot3^2\cdot7\cdot71$	23·389	$2^2\cdot2237$	3·19·157	894
895	$2\cdot5^2\cdot179$	8951	$2^3\cdot3\cdot373$	7·1279	$2\cdot11^2\cdot37$	$3^2\cdot5\cdot199$	$2^2\cdot2239$	$13^2\cdot53$	2·3·1493	$17^2\cdot31$	895
896	$2^8\cdot5\cdot7$	3·29·103	2·4481	8963	$2^2\cdot3^3\cdot83$	5·11·163	2·4483	$3\cdot7^2\cdot61$	$2^3\cdot19\cdot59$	8969	896
897	2·3·5·13·23	8971	$2^2\cdot2243$	$3^2\cdot997$	2·7·641	$5^2\cdot359$	$2^4\cdot3\cdot11\cdot17$	47·191	$2\cdot67^2$	3·41·73	897
898	$2^2\cdot5\cdot449$	7·1283	$2\cdot3^2\cdot499$	13·691	$2^3\cdot1123$	3·5·599	2·4493	11·19·43	$2^2\cdot3\cdot7\cdot107$	89·101	898
899	2·5·29·31	$3^5\cdot37$	$2^5\cdot281$	$17\cdot23^2$	2·3·1499	5·7·257	$2^2\cdot13\cdot173$	3·2999	2·11·409	8999	899

8999

9000

Таблица 24.7. Разложения на множители

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
900	$2^3\cdot3^2\cdot5^3$	9001	$2\cdot7\cdot643$	$3\cdot3001$	$2^2\cdot2251$	$5\cdot1801$	$2\cdot3\cdot19\cdot79$	9007	$2^4\cdot563$	$3^2\cdot7\cdot11\cdot13$	900
901	$2\cdot5\cdot17\cdot53$	9011	$2^2\cdot3\cdot751$	9013	$2\cdot4507$	$3\cdot5\cdot601$	$2^3\cdot7^2\cdot23$	$71\cdot127$	$2\cdot3^3\cdot167$	$29\cdot311$	901
902	$2^2\cdot5\cdot11\cdot41$	$3\cdot31\cdot97$	$2\cdot13\cdot347$	$7\cdot1289$	$2^6\cdot3\cdot47$	$5^2\cdot19^2$	$2\cdot4513$	$3^2\cdot17\cdot59$	$2^2\cdot37\cdot61$	9029	902
903	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot43$	$11\cdot821$	$2^3\cdot1129$	$3\cdot3011$	$2\cdot4517$	$5\cdot13\cdot139$	$2^2\cdot3^2\cdot251$	$7\cdot1291$	$2\cdot4519$	$3\cdot23\cdot131$	903
904	$2^4\cdot5\cdot113$	9041	$2\cdot3\cdot11\cdot137$	9043	$2^2\cdot7\cdot17\cdot19$	$3^3\cdot5\cdot67$	$2\cdot4523$	$83\cdot109$	$2^3\cdot3\cdot13\cdot29$	9049	904
905	$2\cdot5^2\cdot181$	$3\cdot7\cdot431$	$2^2\cdot31\cdot73$	$11\cdot823$	$2\cdot3^2\cdot503$	$5\cdot1811$	$2^5\cdot283$	$3\cdot3019$	$2\cdot7\cdot647$	9059	905
906	$2^2\cdot3\cdot5\cdot151$	$13\cdot17\cdot41$	$2\cdot23\cdot197$	$3^2\cdot19\cdot53$	$2^3\cdot11\cdot103$	$5\cdot7^2\cdot37$	$2\cdot3\cdot1511$	9067	$2^2\cdot2267$	$3\cdot3023$	906
907	$2\cdot5\cdot907$	$47\cdot193$	$2^4\cdot3^4\cdot7$	$43\cdot211$	$2\cdot13\cdot349$	$3\cdot5^2\cdot11^2$	$2^2\cdot2269$	$29\cdot313$	$2\cdot3\cdot17\cdot89$	$7\cdot1297$	907
908	$2^3\cdot5\cdot227$	$3^2\cdot1009$	$2\cdot19\cdot239$	$31\cdot293$	$2^2\cdot3\cdot757$	$5\cdot23\cdot79$	$2\cdot7\cdot11\cdot59$	$3\cdot13\cdot233$	$2^7\cdot71$	$61\cdot149$	908
909	$2\cdot3^2\cdot5\cdot101$	9091	$2^2\cdot2273$	$3\cdot7\cdot433$	$2\cdot4547$	$5\cdot17\cdot107$	$2^3\cdot3\cdot379$	$11\cdot827$	$2\cdot4549$	$3^3\cdot337$	909
910	$2^2\cdot5^2\cdot7\cdot13$	$19\cdot479$	$2\cdot3\cdot37\cdot41$	9103	$2^4\cdot569$	$3\cdot5\cdot607$	$2\cdot29\cdot157$	$7\cdot1301$	$2^2\cdot3^2\cdot11\cdot23$	9109	910
911	$2\cdot5\cdot911$	$3\cdot3037$	$2^3\cdot17\cdot67$	$13\cdot701$	$2\cdot3\cdot7^2\cdot31$	$5\cdot1823$	$2^2\cdot43\cdot53$	$3^2\cdot1013$	$2\cdot47\cdot97$	$11\cdot829$	911
912	$2^5\cdot3\cdot5\cdot19$	$7\cdot1303$	$2\cdot4561$	$3\cdot3041$	$2^2\cdot2281$	$5^3\cdot73$	$2\cdot3^3\cdot13^2$	9127	$2^3\cdot7\cdot163$	$3\cdot17\cdot179$	912
913	$2\cdot5\cdot11\cdot83$	$23\cdot397$	$2^2\cdot3\cdot761$	9133	$2\cdot4567$	$3^2\cdot5\cdot7\cdot29$	$2^4\cdot571$	9137	$2\cdot3\cdot1523$	$13\cdot19\cdot37$	913
914	$2^2\cdot5\cdot457$	$3\cdot11\cdot277$	$2\cdot7\cdot653$	$41\cdot223$	$2^3\cdot3^2\cdot127$	$5\cdot31\cdot59$	$2\cdot17\cdot269$	$3\cdot3049$	$2^2\cdot2287$	$7\cdot1307$	914
915	$2\cdot3\cdot5^2\cdot61$	9151	$2^6\cdot11\cdot13$	$3^4\cdot113$	$2\cdot23\cdot199$	$5\cdot1831$	$2^2\cdot3\cdot7\cdot109$	9157	$2\cdot19\cdot241$	$3\cdot43\cdot71$	915
916	$2^3\cdot5\cdot229$	9161	$2\cdot3^2\cdot509$	$7^2\cdot11\cdot17$	$2^2\cdot29\cdot79$	$3\cdot5\cdot13\cdot47$	$2\cdot4583$	$89\cdot103$	$2^4\cdot3\cdot191$	$53\cdot173$	916
917	$2\cdot5\cdot7\cdot131$	$3^2\cdot1019$	$2^2\cdot2293$	9173	$2\cdot3\cdot11\cdot139$	$5^2\cdot367$	$2^3\cdot31\cdot37$	$3\cdot7\cdot19\cdot23$	$2\cdot13\cdot353$	$67\cdot137$	917
918	$2^2\cdot3^3\cdot5\cdot17$	9181	$2\cdot4591$	$3\cdot3061$	$2^5\cdot7\cdot41$	$5\cdot11\cdot167$	$2\cdot3\cdot1531$	9187	$2^2\cdot2297$	$3^2\cdot1021$	918
919	$2\cdot5\cdot919$	$7\cdot13\cdot101$	$2^3\cdot3\cdot383$	$29\cdot317$	$2\cdot4597$	$3\cdot5\cdot613$	$2^2\cdot11^2\cdot19$	$17\cdot541$	$2\cdot3^2\cdot7\cdot73$	9199	919
920	$2^4\cdot5^2\cdot23$	$3\cdot3067$	$2\cdot43\cdot107$	9203	$2^2\cdot3\cdot13\cdot59$	$5\cdot7\cdot263$	$2\cdot4603$	$3^3\cdot11\cdot31$	$2^3\cdot1151$	9209	920
921	$2\cdot3\cdot5\cdot307$	$61\cdot151$	$2^2\cdot7^2\cdot47$	$3\cdot37\cdot83$	$2\cdot17\cdot271$	$5\cdot19\cdot97$	$2^{10}\cdot3^2$	$13\cdot709$	$2\cdot11\cdot419$	$3\cdot7\cdot439$	921
922	$2^2\cdot5\cdot461$	9221	$2\cdot3\cdot29\cdot53$	$23\cdot401$	$2^3\cdot1153$	$3^2\cdot5^2\cdot41$	$2\cdot7\cdot659$	9227	$2^2\cdot3\cdot769$	$11\cdot839$	922
923	$2\cdot5\cdot13\cdot71$	$3\cdot17\cdot181$	$2^4\cdot577$	$7\cdot1319$	$2\cdot3^5\cdot19$	$5\cdot1847$	$2^2\cdot2309$	$3\cdot3079$	$2\cdot31\cdot149$	9239	923
924	$2^3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$	9241	$2\cdot4621$	$3^2\cdot13\cdot79$	$2^2\cdot2311$	$5\cdot43^2$	$2\cdot3\cdot23\cdot67$	$7\cdot1321$	$2^5\cdot17^2$	$3\cdot3083$	924
925	$2\cdot5^3\cdot37$	$11\cdot29^2$	$2^2\cdot3^2\cdot257$	$19\cdot487$	$2\cdot7\cdot661$	$3\cdot5\cdot617$	$2^3\cdot13\cdot89$	9257	$2\cdot3\cdot1543$	$47\cdot197$	925
926	$2^2\cdot5\cdot463$	$3^3\cdot7^3$	$2\cdot11\cdot421$	$59\cdot157$	$2^4\cdot3\cdot193$	$5\cdot17\cdot109$	$2\cdot41\cdot113$	$3\cdot3089$	$2^2\cdot7\cdot331$	$13\cdot23\cdot31$	926
927	$2\cdot3^2\cdot5\cdot103$	$73\cdot127$	$2^3\cdot19\cdot61$	$3\cdot11\cdot281$	$2\cdot4637$	$5^2\cdot7\cdot53$	$2^2\cdot3\cdot773$	9277	$2\cdot4639$	$3^2\cdot1031$	927
928	$2^6\cdot5\cdot29$	9281	$2\cdot3\cdot7\cdot13\cdot17$	9283	$2^2\cdot11\cdot211$	$3\cdot5\cdot619$	$2\cdot4643$	$37\cdot251$	$2^3\cdot3^3\cdot43$	$7\cdot1327$	928
929	$2\cdot5\cdot929$	$3\cdot19\cdot163$	$2^2\cdot23\cdot101$	9293	$2\cdot3\cdot1549$	$5\cdot11\cdot13^2$	$2^4\cdot7\cdot83$	$3^2\cdot1033$	$2\cdot4649$	$17\cdot547$	929
930	$2^2\cdot3\cdot5^2\cdot31$	$71\cdot131$	$2\cdot4651$	$3\cdot7\cdot443$	$2^3\cdot1163$	$5\cdot1861$	$2\cdot3^2\cdot11\cdot47$	$41\cdot227$	$2^2\cdot13\cdot179$	$3\cdot29\cdot107$	930
931	$2\cdot5\cdot7^2\cdot19$	9311	$2^5\cdot3\cdot97$	$67\cdot139$	$2\cdot4657$	$3^4\cdot5\cdot23$	$2^2\cdot17\cdot137$	$7\cdot11^3$	$2\cdot3\cdot1553$	9319	931
932	$2^3\cdot5\cdot233$	$3\cdot13\cdot239$	$2\cdot59\cdot79$	9323	$2^2\cdot3^2\cdot7\cdot37$	$5^2\cdot373$	$2\cdot4663$	$3\cdot3109$	$2^4\cdot11\cdot53$	$19\cdot491$	932
933	$2\cdot3\cdot5\cdot311$	$7\cdot31\cdot43$	$2^2\cdot2333$	$3^2\cdot17\cdot61$	$2\cdot13\cdot359$	$5\cdot1867$	$2^3\cdot3\cdot389$	9337	$2\cdot7\cdot23\cdot29$	$3\cdot11\cdot283$	933
934	$2^2\cdot5\cdot467$	9341	$2\cdot3^3\cdot173$	9343	$2^7\cdot73$	$3\cdot5\cdot7\cdot89$	$2\cdot4673$	$13\cdot719$	$2^2\cdot3\cdot19\cdot41$	9349	934
935	$2\cdot5^2\cdot11\cdot17$	$3^2\cdot1039$	$2^3\cdot7\cdot167$	$47\cdot199$	$2\cdot3\cdot1559$	$5\cdot1871$	$2^2\cdot2339$	$3\cdot3119$	$2\cdot4679$	$7^2\cdot191$	935
936	$2^4\cdot3^2\cdot5\cdot13$	$11\cdot23\cdot37$	$2\cdot31\cdot151$	$3\cdot3121$	$2^2\cdot2341$	$5\cdot1873$	$2\cdot3\cdot7\cdot223$	$17\cdot19\cdot29$	$2^3\cdot1171$	$3^3\cdot347$	936
937	$2\cdot5\cdot937$	9371	$2^2\cdot3\cdot11\cdot71$	$7\cdot13\cdot103$	$2\cdot43\cdot109$	$3\cdot5^5$	$2^5\cdot293$	9377	$2\cdot3^2\cdot521$	$83\cdot113$	937
938	$2^2\cdot5\cdot7\cdot67$	$3\cdot53\cdot59$	$2\cdot4691$	$11\cdot853$	$2^3\cdot3\cdot17\cdot23$	$5\cdot1877$	$2\cdot13\cdot19^2$	$3^2\cdot7\cdot149$	$2^2\cdot2347$	$41\cdot229$	938
939	$2\cdot3\cdot5\cdot313$	9391	$2^4\cdot587$	$3\cdot31\cdot101$	$2\cdot7\cdot11\cdot61$	$5\cdot1879$	$2^2\cdot3^4\cdot29$	9397	$2\cdot37\cdot127$	$3\cdot13\cdot241$	939
940	$2^3\cdot5^2\cdot47$	$7\cdot17\cdot79$	$2\cdot3\cdot1567$	9403	$2^2\cdot2351$	$3^2\cdot5\cdot11\cdot19$	$2\cdot4703$	$23\cdot409$	$2^6\cdot3\cdot7^2$	97^2	940
941	$2\cdot5\cdot941$	$3\cdot3137$	$2^2\cdot13\cdot181$	9413	$2\cdot3^2\cdot523$	$5\cdot7\cdot269$	$2^3\cdot11\cdot107$	$3\cdot43\cdot73$	$2\cdot17\cdot277$	9419	941
942	$2^2\cdot3\cdot5\cdot157$	9421	$2\cdot7\cdot673$	$3^3\cdot349$	$2^4\cdot19\cdot31$	$5^2\cdot13\cdot29$	$2\cdot3\cdot1571$	$11\cdot857$	$2^2\cdot2357$	$3\cdot7\cdot449$	942
943	$2\cdot5\cdot23\cdot41$	9431	$2^3\cdot3^2\cdot131$	9433	$2\cdot53\cdot89$	$3\cdot5\cdot17\cdot37$	$2^2\cdot7\cdot337$	9437	$2\cdot3\cdot11^2\cdot13$	9439	943
944	$2^5\cdot5\cdot59$	$3^2\cdot1049$	$2\cdot4721$	$7\cdot19\cdot71$	$2^2\cdot3\cdot787$	$5\cdot1889$	$2\cdot4723$	$3\cdot47\cdot67$	$2^3\cdot1181$	$11\cdot859$	944
945	$2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7$	$13\cdot727$	$2^2\cdot17\cdot139$	$3\cdot23\cdot137$	$2\cdot29\cdot163$	$5\cdot31\cdot61$	$2^4\cdot3\cdot197$	$7^2\cdot193$	$2\cdot4729$	$3^2\cdot1051$	945
946	$2^2\cdot5\cdot11\cdot43$	9461	$2\cdot3\cdot19\cdot83$	9463	$2^3\cdot7\cdot13^2$	$3\cdot5\cdot631$	$2\cdot4733$	9467	$2^2\cdot3^2\cdot263$	$17\cdot557$	946
947	$2\cdot5\cdot947$	$3\cdot7\cdot11\cdot41$	$2^8\cdot37$	9473	$2\cdot3\cdot1579$	$5^2\cdot379$	$2^2\cdot23\cdot103$	$3^6\cdot13$	$2\cdot7\cdot677$	9479	947
948	$2^3\cdot3\cdot5\cdot79$	$19\cdot499$	$2\cdot11\cdot431$	$3\cdot29\cdot109$	$2^2\cdot2371$	$5\cdot7\cdot271$	$2\cdot3^2\cdot17\cdot31$	$53\cdot179$	$2^4\cdot593$	$3\cdot3163$	948
949	$2\cdot5\cdot13\cdot73$	9491	$2^2\cdot3\cdot7\cdot113$	$11\cdot863$	$2\cdot47\cdot101$	$3^2\cdot5\cdot211$	$2^3\cdot1187$	9497	$2\cdot3\cdot1583$	$7\cdot23\cdot59$	949

9499

9500

950	$2^2\cdot5^3\cdot19$	$3\cdot3167$	$2\cdot4751$	$13\cdot17\cdot43$	$2^5\cdot3^3\cdot11$	$5\cdot1901$	$2\cdot7^2\cdot97$	$3\cdot3169$	$2^2\cdot2377$	$37\cdot257$	950
951	$2\cdot3\cdot5\cdot317$	9511	$2^3\cdot29\cdot41$	$3^2\cdot7\cdot151$	$2\cdot67\cdot71$	$5\cdot11\cdot173$	$2^2\cdot3\cdot13\cdot61$	$31\cdot307$	$2\cdot4759$	$3\cdot19\cdot167$	951
952	$2^4\cdot5\cdot7\cdot17$	9521	$2\cdot3^2\cdot23^2$	$89\cdot107$	$2^2\cdot2381$	$3\cdot5^2\cdot127$	$2\cdot11\cdot433$	$7\cdot1361$	$2^3\cdot3\cdot397$	$13\cdot733$	952
953	$2\cdot5\cdot953$	$3^3\cdot353$	$2^2\cdot2383$	9533	$2\cdot3\cdot7\cdot227$	$5\cdot1907$	$2^6\cdot149$	$3\cdot11\cdot17^2$	$2\cdot19\cdot251$	9539	953
954	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot53$	$7\cdot29\cdot47$	$2\cdot13\cdot367$	$3\cdot3181$	$2^3\cdot1193$	$5\cdot23\cdot83$	$2\cdot3\cdot37\cdot43$	9547	$2^2\cdot7\cdot11\cdot31$	$3^2\cdot1061$	954
955	$2\cdot5^2\cdot191$	9551	$2^4\cdot3\cdot199$	$41\cdot233$	$2\cdot17\cdot281$	$3\cdot5\cdot7^2\cdot13$	$2^2\cdot2389$	$19\cdot503$	$2\cdot3^4\cdot59$	$11^2\cdot79$	955
956	$2^3\cdot5\cdot239$	$3\cdot3187$	$2\cdot7\cdot683$	$73\cdot131$	$2^2\cdot3\cdot797$	$5\cdot1913$	$2\cdot4783$	$3^2\cdot1063$	$2^5\cdot13\cdot23$	$7\cdot1367$	956
957	$2\cdot3\cdot5\cdot11\cdot29$	$17\cdot563$	$2^2\cdot2393$	$3\cdot3191$	$2\cdot4787$	$5^2\cdot383$	$2^3\cdot3^2\cdot7\cdot19$	$61\cdot157$	$2\cdot4789$	$3\cdot31\cdot103$	957
958	$2^2\cdot5\cdot479$	$11\cdot13\cdot67$	$2\cdot3\cdot1597$	$7\cdot37^2$	$2^4\cdot599$	$3^3\cdot5\cdot71$	$2\cdot4793$	9587	$2^2\cdot3\cdot17\cdot47$	$43\cdot223$	958
959	$2\cdot5\cdot7\cdot137$	$3\cdot23\cdot139$	$2^3\cdot11\cdot109$	$53\cdot181$	$2\cdot3^2\cdot13\cdot41$	$5\cdot19\cdot101$	$2^2\cdot2399$	$3\cdot7\cdot457$	$2\cdot4799$	$29\cdot331$	959
960	$2^7\cdot3\cdot5^2$	9601	$2\cdot4801$	$3^2\cdot11\cdot97$	$2^2\cdot7^4$	$5\cdot17\cdot113$	$2\cdot3\cdot1601$	$13\cdot739$	$2^3\cdot1201$	$3\cdot3203$	960
961	$2\cdot5\cdot31^2$	$7\cdot1373$	$2^2\cdot3^3\cdot89$	9613	$2\cdot11\cdot19\cdot23$	$3\cdot5\cdot641$	$2^4\cdot601$	$59\cdot163$	$2\cdot3\cdot7\cdot229$	9619	961
962	$2^2\cdot5\cdot13\cdot37$	$3^2\cdot1069$	$2\cdot17\cdot283$	9623	$2^3\cdot3\cdot401$	$5^3\cdot7\cdot11$	$2\cdot4813$	$3\cdot3209$	$2^2\cdot29\cdot83$	9629	962
963	$2\cdot3^2\cdot5\cdot107$	9631	$2^5\cdot7\cdot43$	$3\cdot13^2\cdot19$	$2\cdot4817$	$5\cdot41\cdot47$	$2^2\cdot3\cdot11\cdot73$	$23\cdot419$	$2\cdot61\cdot79$	$3^4\cdot7\cdot17$	963
964	$2^3\cdot5\cdot241$	$31\cdot311$	$2\cdot3\cdot1607$	9643	$2^2\cdot2411$	$3\cdot5\cdot643$	$2\cdot7\cdot13\cdot53$	$11\cdot877$	$2^4\cdot3^2\cdot67$	9649	964
965	$2\cdot5^2\cdot193$	$3\cdot3217$	$2^2\cdot19\cdot127$	$7^2\cdot197$	$2\cdot3\cdot1609$	$5\cdot1931$	$2^3\cdot17\cdot71$	$3^2\cdot29\cdot37$	$2\cdot11\cdot439$	$13\cdot743$	965
966	$2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot23$	9661	$2\cdot4831$	$3\cdot3221$	$2^6\cdot151$	$5\cdot1933$	$2\cdot3^3\cdot179$	$7\cdot1381$	$2^2\cdot2417$	$3\cdot11\cdot293$	966
967	$2\cdot5\cdot967$	$19\cdot509$	$2^3\cdot3\cdot13\cdot31$	$17\cdot569$	$2\cdot7\cdot691$	$3^2\cdot5^2\cdot43$	$2^2\cdot41\cdot59$	9677	$2\cdot3\cdot1613$	9679	967
968	$2^4\cdot5\cdot11^2$	$3\cdot7\cdot461$	$2\cdot47\cdot103$	$23\cdot421$	$2^2\cdot3^2\cdot269$	$5\cdot13\cdot149$	$2\cdot29\cdot167$	$3\cdot3229$	$2^3\cdot7\cdot173$	9689	968
969	$2\cdot3\cdot5\cdot17\cdot19$	$11\cdot881$	$2^2\cdot2423$	$3^3\cdot359$	$2\cdot37\cdot131$	$5\cdot7\cdot277$	$2^5\cdot3\cdot101$	9697	$2\cdot13\cdot373$	$3\cdot53\cdot61$	969
970	$2^2\cdot5^2\cdot97$	$89\cdot109$	$2\cdot3^2\cdot7^2\cdot11$	$31\cdot313$	$2^3\cdot1213$	$3\cdot5\cdot647$	$2\cdot23\cdot211$	$17\cdot571$	$2^2\cdot3\cdot809$	$7\cdot19\cdot73$	970
971	$2\cdot5\cdot971$	$3^2\cdot13\cdot83$	$2^4\cdot607$	$11\cdot883$	$2\cdot3\cdot1619$	$5\cdot29\cdot67$	$2^2\cdot7\cdot347$	$3\cdot41\cdot79$	$2\cdot43\cdot113$	9719	971
972	$2^3\cdot3^5\cdot5$	9721	$2\cdot4861$	$3\cdot7\cdot463$	$2^2\cdot11\cdot13\cdot17$	$5^2\cdot389$	$2\cdot3\cdot1621$	$71\cdot137$	$2^9\cdot19$	$3^2\cdot23\cdot47$	972
973	$2\cdot5\cdot7\cdot139$	$37\cdot263$	$2^2\cdot3\cdot811$	9733	$2\cdot31\cdot157$	$3\cdot5\cdot11\cdot59$	$2^3\cdot1217$	$7\cdot13\cdot107$	$2\cdot3^2\cdot541$	9739	973
974	$2^2\cdot5\cdot487$	$3\cdot17\cdot191$	$2\cdot4871$	9743	$2^4\cdot3\cdot7\cdot29$	$5\cdot1949$	$2\cdot11\cdot443$	$3^3\cdot19^2$	$2^2\cdot2437$	9749	974
975	$2\cdot3\cdot5^3\cdot13$	$7^2\cdot199$	$2^3\cdot23\cdot53$	$3\cdot3251$	$2\cdot4877$	$5\cdot1951$	$2^2\cdot3^2\cdot271$	$11\cdot887$	$2\cdot7\cdot17\cdot41$	$3\cdot3253$	975
976	$2^5\cdot5\cdot61$	$43\cdot227$	$2\cdot3\cdot1627$	$13\cdot751$	$2^2\cdot2441$	$3^2\cdot5\cdot7\cdot31$	$2\cdot19\cdot257$	9767	$2^3\cdot3\cdot11\cdot37$	9769	976
977	$2\cdot5\cdot977$	$3\cdot3257$	$2^2\cdot7\cdot349$	$29\cdot337$	$2\cdot3^3\cdot181$	$5^2\cdot17\cdot23$	$2^4\cdot13\cdot47$	$3\cdot3259$	$2\cdot4889$	$7\cdot11\cdot127$	977
978	$2^2\cdot3\cdot5\cdot163$	9781	$2\cdot67\cdot73$	$3^2\cdot1087$	$2^3\cdot1223$	$5\cdot19\cdot103$	$2\cdot3\cdot7\cdot233$	9787	$2^2\cdot2447$	$3\cdot13\cdot251$	978
979	$2\cdot5\cdot11\cdot89$	9791	$2^6\cdot3^2\cdot17$	$7\cdot1399$	$2\cdot59\cdot83$	$3\cdot5\cdot653$	$2^2\cdot31\cdot79$	$97\cdot101$	$2\cdot3\cdot23\cdot71$	$41\cdot239$	979
980	$2^3\cdot5^2\cdot7^2$	$3^4\cdot11^2$	$2\cdot13^2\cdot29$	9803	$2^2\cdot3\cdot19\cdot43$	$5\cdot37\cdot53$	$2\cdot4903$	$3\cdot7\cdot467$	$2^4\cdot613$	$17\cdot577$	980
981	$2\cdot3^2\cdot5\cdot109$	9811	$2^2\cdot11\cdot223$	$3\cdot3271$	$2\cdot7\cdot701$	$5\cdot13\cdot151$	$2^3\cdot3\cdot409$	9817	$2\cdot4909$	$3^3\cdot1091$	981
982	$2^2\cdot5\cdot491$	$7\cdot23\cdot61$	$2\cdot3\cdot1637$	$11\cdot19\cdot47$	$2^5\cdot307$	$3\cdot5^2\cdot131$	$2\cdot17^3$	$31\cdot317$	$2^2\cdot3^3\cdot7\cdot13$	9829	982
983	$2\cdot5\cdot983$	$3\cdot29\cdot113$	$2^3\cdot1229$	9833	$2\cdot3\cdot11\cdot149$	$5\cdot7\cdot281$	$2^2\cdot2459$	$3^2\cdot1093$	$2\cdot4919$	9839	983
984	$2^4\cdot3\cdot5\cdot41$	$13\cdot757$	$2\cdot7\cdot19\cdot37$	$3\cdot17\cdot193$	$2^2\cdot23\cdot107$	$5\cdot11\cdot179$	$2\cdot3^2\cdot547$	$43\cdot229$	$2^3\cdot1231$	$3\cdot7^2\cdot67$	984
985	$2\cdot5^2\cdot197$	9851	$2^2\cdot3\cdot821$	$59\cdot167$	$2\cdot13\cdot379$	$3^3\cdot5\cdot73$	$2^7\cdot7\cdot11$	9857	$2\cdot3\cdot31\cdot53$	9859	985
986	$2^2\cdot5\cdot17\cdot29$	$3\cdot19\cdot173$	$2\cdot4931$	$7\cdot1409$	$2^3\cdot3^2\cdot137$	$5\cdot1973$	$2\cdot4933$	$3\cdot11\cdot13\cdot23$	$2^2\cdot2467$	$71\cdot139$	986
987	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot47$	9871	$2^4\cdot617$	$3^2\cdot1097$	$2\cdot4937$	$5^3\cdot79$	$2^2\cdot3\cdot823$	$7\cdot17\cdot83$	$2\cdot11\cdot449$	$3\cdot37\cdot89$	987
988	$2^3\cdot5\cdot13\cdot19$	$41\cdot241$	$2\cdot3^4\cdot61$	9883	$2^2\cdot7\cdot353$	$3\cdot5\cdot659$	$2\cdot4943$	9887	$2^5\cdot3\cdot103$	$11\cdot29\cdot31$	988
989	$2\cdot5\cdot23\cdot43$	$3^2\cdot7\cdot157$	$2^2\cdot2473$	$13\cdot761$	$2\cdot3\cdot17\cdot97$	$5\cdot1979$	$2^3\cdot1237$	$3\cdot3299$	$2\cdot7^2\cdot101$	$19\cdot521$	989
990	$2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot11$	9901	$2\cdot4951$	$3\cdot3301$	$2^4\cdot619$	$5\cdot7\cdot283$	$2\cdot3\cdot13\cdot127$	9907	$2^2\cdot2477$	$3^3\cdot367$	990
991	$2\cdot5\cdot991$	$11\cdot17\cdot53$	$2^3\cdot3\cdot7\cdot59$	$23\cdot431$	$2\cdot4957$	$3\cdot5\cdot661$	$2^2\cdot37\cdot67$	$47\cdot211$	$2\cdot3^2\cdot19\cdot29$	$7\cdot13\cdot109$	991
992	$2^6\cdot5\cdot31$	$3\cdot3307$	$2\cdot11^2\cdot41$	9923	$2^2\cdot3\cdot827$	$5^2\cdot397$	$2\cdot7\cdot709$	$3^2\cdot1103$	$2^3\cdot17\cdot73$	9929	992
993	$2\cdot3\cdot5\cdot331$	9931	$2^2\cdot13\cdot191$	$3\cdot7\cdot11\cdot43$	$2\cdot4967$	$5\cdot1987$	$2^4\cdot3^3\cdot23$	$19\cdot523$	$2\cdot4969$	$3\cdot3313$	993
994	$2^2\cdot5\cdot7\cdot71$	9941	$2\cdot3\cdot1657$	$61\cdot163$	$2^3\cdot11\cdot113$	$3^2\cdot5\cdot13\cdot17$	$2\cdot4973$	$7^3\cdot29$	$2^2\cdot3\cdot829$	9949	994
995	$2\cdot5^2\cdot199$	$3\cdot31\cdot107$	$2^5\cdot311$	$37\cdot269$	$2\cdot3^2\cdot7\cdot79$	$5\cdot11\cdot181$	$2^2\cdot19\cdot131$	$3\cdot3319$	$2\cdot13\cdot383$	$23\cdot433$	995
996	$2^3\cdot3\cdot5\cdot83$	$7\cdot1423$	$2\cdot17\cdot293$	$3^5\cdot41$	$2^2\cdot47\cdot53$	$5\cdot1993$	$2\cdot3\cdot11\cdot151$	9967	$2^4\cdot7\cdot89$	$3\cdot3323$	996
997	$2\cdot5\cdot997$	$13^2\cdot59$	$2^2\cdot3^2\cdot277$	9973	$2\cdot4987$	$3\cdot5^2\cdot7\cdot19$	$2^3\cdot29\cdot43$	$11\cdot907$	$2\cdot3\cdot1663$	$17\cdot587$	997
998	$2^2\cdot5\cdot499$	$3^2\cdot1109$	$2\cdot7\cdot23\cdot31$	$67\cdot149$	$2^8\cdot3\cdot13$	$5\cdot1997$	$2\cdot4993$	$3\cdot3329$	$2^2\cdot11\cdot227$	$7\cdot1427$	998
999	$2\cdot3^3\cdot5\cdot37$	$97\cdot103$	$2^3\cdot1249$	$3\cdot3331$	$2\cdot19\cdot263$	$5\cdot1999$	$2^2\cdot3\cdot7^2\cdot17$	$13\cdot769$	$2\cdot4999$	$3^2\cdot11\cdot101$	999

9999

Таблица 24.8. Первообразные корни, множители чисел $p-1$

g и G обозначают наименьший положительный и соответственно наименьший отрицательный первообразные корни p; в колонке, помеченной ε, указано, какие из чисел 10 и -10 являются первообразными корнями.

p	$p-1$	g	$-G$	ε
3	2	2	1	-10
5	2^2	2	2	-----
7	$2\cdot3$	3	2	10
11	$2\cdot5$	2	3	-----
13	$2^2\cdot3$	2	2	-----
17	2^4	3	3	±10
19	$2\cdot3^2$	2	4	10
23	$2\cdot11$	5	2	10
29	$2^2\cdot7$	2	2	±10
31	$2\cdot3\cdot5$	3	7	-10
37	$2^2\cdot3^2$	2	2	-----
41	$2^3\cdot5$	6	6	-----
43	$2\cdot3\cdot7$	3	9	-10
47	$2\cdot23$	5	2	10
53	$2^2\cdot13$	2	2	-----
59	$2\cdot29$	2	3	10
61	$2^2\cdot3\cdot5$	2	2	±10
67	$2\cdot3\cdot11$	2	4	-10
71	$2\cdot5\cdot7$	7	2	-10
73	$2^3\cdot3^2$	5	5	-----
79	$2\cdot3\cdot13$	3	2	-----
83	$2\cdot41$	2	3	-10
89	$2^3\cdot11$	3	3	-----
97	$2^5\cdot3$	5	5	±10
101	$2^2\cdot5^2$	2	2	-----
103	$2\cdot3\cdot17$	5	2	-----
107	$2\cdot53$	2	3	-10
109	$2^2\cdot3^3$	6	6	±10
113	$2^4\cdot7$	3	3	±10
127	$2\cdot3^2\cdot7$	3	9	-----
131	$2\cdot5\cdot13$	2	3	10
137	$2^3\cdot17$	3	3	-----
139	$2\cdot3\cdot23$	2	4	-----
149	$2^2\cdot37$	2	2	±10
151	$2\cdot3\cdot5^2$	6	5	-10
157	$2^2\cdot3\cdot13$	5	5	-----
163	$2\cdot3^4$	2	4	-10
167	$2\cdot83$	5	2	10
173	$2^2\cdot43$	2	2	-----
179	$2\cdot89$	2	3	10
181	$2^2\cdot3^2\cdot5$	2	2	±10
191	$2\cdot5\cdot19$	19	2	-10
193	$2^6\cdot3$	5	5	±10
197	$2^2\cdot7^2$	2	2	-----
199	$2\cdot3^2\cdot11$	3	2	-10
211	$2\cdot3\cdot5\cdot7$	2	4	-----
223	$2\cdot3\cdot37$	3	9	10
227	$2\cdot113$	2	3	-10
229	$2^2\cdot3\cdot19$	6	6	±10
233	$2^3\cdot29$	3	3	±10
239	$2\cdot7\cdot17$	7	2	-----
241	$2^4\cdot3\cdot5$	7	7	-----
251	$2\cdot5^3$	6	3	-----
257	2^8	3	3	±10
263	$2\cdot131$	5	2	10
269	$2^2\cdot67$	2	2	±10
271	$2\cdot3^3\cdot5$	6	2	-----
277	$2^2\cdot3\cdot23$	5	5	-----
281	$2^3\cdot5\cdot7$	3	3	-----
283	$2\cdot3\cdot47$	3	6	-10
293	$2^2\cdot73$	2	2	-----
307	$2\cdot3^2\cdot17$	5	7	-10
311	$2\cdot5\cdot31$	17	2	-10
313	$2^3\cdot3\cdot13$	10	10	±10
317	$2^2\cdot79$	2	2	-----
331	$2\cdot3\cdot5\cdot11$	3	5	-----
337	$2^4\cdot3\cdot7$	10	10	±10
347	$2\cdot173$	2	3	-10
349	$2^2\cdot3\cdot29$	2	2	-----
353	$2^5\cdot11$	3	3	-----

p	$p-1$	g	$-G$	ε
359	$2\cdot179$	7	2	-10
367	$2\cdot3\cdot61$	6	2	10
373	$2^2\cdot3\cdot31$	2	2	-----
379	$2\cdot3^3\cdot7$	2	4	10
383	$2\cdot191$	5	2	10
389	$2^2\cdot97$	2	2	±10
397	$2^2\cdot3^2\cdot11$	5	5	-----
401	$2^4\cdot5^2$	3	3	-----
409	$2^3\cdot3\cdot17$	21	21	-----
419	$2\cdot11\cdot19$	2	3	10
421	$2^2\cdot3\cdot5\cdot7$	2	2	-----
431	$2\cdot5\cdot43$	7	5	-10
433	$2^4\cdot3^3$	5	5	±10
439	$2\cdot3\cdot73$	15	5	-10
443	$2\cdot13\cdot17$	2	3	-10
449	$2^6\cdot7$	3	3	-----
457	$2^3\cdot3\cdot19$	13	13	-----
461	$2^2\cdot5\cdot23$	2	2	±10
463	$2\cdot3\cdot7\cdot11$	3	2	-----
467	$2\cdot233$	2	3	-10
479	$2\cdot239$	13	2	-10
487	$2\cdot3^5$	3	2	10
491	$2\cdot5\cdot7^2$	2	4	10
499	$2\cdot3\cdot83$	7	5	10
503	$2\cdot251$	5	2	10
509	$2^2\cdot127$	2	2	±10
521	$2^3\cdot5\cdot13$	3	3	-----
523	$2\cdot3^2\cdot29$	2	4	-10
541	$2^2\cdot3^3\cdot5$	2	2	±10
547	$2\cdot3\cdot7\cdot13$	2	4	-----
557	$2^2\cdot139$	2	2	-----
563	$2\cdot281$	2	3	-10
569	$2^3\cdot71$	3	3	-----
571	$2\cdot3\cdot5\cdot19$	3	5	10
577	$2^6\cdot3^2$	5	5	±10
587	$2\cdot293$	2	3	-10
593	$2^4\cdot37$	3	3	±10
599	$2\cdot13\cdot23$	7	2	-10
601	$2^3\cdot3\cdot5^2$	7	7	-----
607	$2\cdot3\cdot101$	3	2	-----
613	$2^2\cdot3^2\cdot17$	2	2	-----
617	$2^3\cdot7\cdot11$	3	3	-----
619	$2\cdot3\cdot103$	2	4	10
631	$2\cdot3^2\cdot5\cdot7$	3	9	-10
641	$2^7\cdot5$	3	3	-----
643	$2\cdot3\cdot107$	11	7	-----
647	$2\cdot17\cdot19$	5	2	10
653	$2^2\cdot163$	2	2	-----
659	$2\cdot7\cdot47$	2	3	10
661	$2^2\cdot3\cdot5\cdot11$	2	2	-----
673	$2^5\cdot3\cdot7$	5	5	-----
677	$2^2\cdot13^2$	2	2	-----
683	$2\cdot11\cdot31$	5	10	-10
691	$2\cdot3\cdot5\cdot23$	3	6	-----
701	$2^2\cdot5^2\cdot7$	2	2	±10
709	$2^2\cdot3\cdot59$	2	2	±10
719	$2\cdot359$	11	2	-10
727	$2\cdot3\cdot11^2$	5	7	10
733	$2^2\cdot3\cdot61$	6	6	-----
739	$2\cdot3^2\cdot41$	3	6	-----
743	$2\cdot7\cdot53$	5	2	10
751	$2\cdot3\cdot5^3$	3	2	-----
757	$2^2\cdot3^3\cdot7$	2	2	-----
761	$2^3\cdot5\cdot19$	6	6	-----
769	$2^8\cdot3$	11	11	-----
773	$2^2\cdot193$	2	2	-----
787	$2\cdot3\cdot131$	2	4	-10
797	$2^2\cdot199$	2	2	-----
809	$2^3\cdot101$	3	3	-----
811	$2\cdot3^4\cdot5$	3	5	10

p	$p-1$	g	$-G$	ε
821	$2^2\cdot5\cdot41$	2	2	±10
823	$2\cdot3\cdot137$	3	2	10
827	$2\cdot7\cdot59$	2	3	-10
829	$2^2\cdot3^2\cdot23$	2	2	-----
839	$2\cdot419$	11	2	-10
853	$2^2\cdot3\cdot71$	2	2	-----
857	$2^3\cdot107$	3	3	±10
859	$2\cdot3\cdot11\cdot13$	2	4	-----
863	$2\cdot431$	5	2	10
877	$2^2\cdot3\cdot73$	2	2	-----
881	$2^4\cdot5\cdot11$	3	3	-----
883	$2\cdot3^2\cdot7^2$	2	4	-10
887	$2\cdot443$	5	2	10
907	$2\cdot3\cdot151$	2	4	-----
911	$2\cdot5\cdot7\cdot13$	17	3	-10
919	$2\cdot3^3\cdot17$	7	5	-10
929	$2^5\cdot29$	3	3	-----
937	$2^3\cdot3^2\cdot13$	5	5	±10
941	$2^2\cdot5\cdot47$	2	2	±10
947	$2\cdot11\cdot43$	2	3	-10
953	$2^3\cdot7\cdot17$	3	3	±10
967	$2\cdot3\cdot7\cdot23$	5	2	-----
971	$2\cdot5\cdot97$	6	3	10
977	$2^4\cdot61$	3	3	±10
983	$2\cdot491$	5	2	10
991	$2\cdot3^2\cdot5\cdot11$	6	2	-10
997	$2^2\cdot3\cdot83$	7	7	-----
1009	$2^4\cdot3^2\cdot7$	11	11	-----
1013	$2^2\cdot11\cdot23$	3	3	-----
1019	$2\cdot509$	2	3	10
1021	$2^2\cdot3\cdot5\cdot17$	10	10	±10
1031	$2\cdot5\cdot103$	14	2	-----
1033	$2^3\cdot3\cdot43$	5	5	±10
1039	$2\cdot3\cdot173$	3	2	-10
1049	$2^3\cdot131$	3	3	-----
1051	$2\cdot3\cdot5^2\cdot7$	7	5	10
1061	$2^2\cdot5\cdot53$	2	2	-----
1063	$2\cdot3^2\cdot59$	3	2	10
1069	$2^2\cdot3\cdot89$	6	6	±10
1087	$2\cdot3\cdot181$	3	2	10
1091	$2\cdot5\cdot109$	2	4	10
1093	$2^2\cdot3\cdot7\cdot13$	5	5	-----
1097	$2^3\cdot137$	3	3	±10
1103	$2\cdot19\cdot29$	5	3	10
1109	$2^2\cdot277$	2	2	±10
1117	$2^2\cdot3^2\cdot31$	2	2	-----
1123	$2\cdot3\cdot11\cdot17$	2	4	-10
1129	$2^3\cdot3\cdot47$	11	11	-----
1151	$2\cdot5^2\cdot23$	17	2	-10
1153	$2^7\cdot3^2$	5	5	±10
1163	$2\cdot7\cdot83$	5	3	-10
1171	$2\cdot3^2\cdot5\cdot13$	2	4	10
1181	$2^2\cdot5\cdot59$	7	7	±10
1187	$2\cdot593$	2	3	-10
1193	$2^3\cdot149$	3	3	±10
1201	$2^4\cdot3\cdot5^2$	11	11	-----
1213	$2^2\cdot3\cdot101$	2	2	-----
1217	$2^6\cdot19$	3	3	±10
1223	$2\cdot13\cdot47$	5	2	10
1229	$2^2\cdot307$	2	2	±10
1231	$2\cdot3\cdot5\cdot41$	3	2	-----
1237	$2^2\cdot3\cdot103$	2	2	-----
1249	$2^5\cdot3\cdot13$	7	7	-----
1259	$2\cdot17\cdot37$	2	3	10
1277	$2^2\cdot11\cdot29$	2	2	-----
1279	$2\cdot3^2\cdot71$	3	2	-10
1283	$2\cdot641$	2	3	-10
1289	$2^3\cdot7\cdot23$	6	6	-----
1291	$2\cdot3\cdot5\cdot43$	2	4	10
1297	$2^4\cdot3^4$	10	10	±10

Таблица 24.8. Первообразные корни, множители чисел $p-1$

g и G обозначают наименьший положительный и соответственно наименьший отрицательный первообразные корни p; в колонке, помеченной ε, указано, какие из чисел 10 и -10 являются первообразными корнями.

p	$p-1$	g	$-G$	ε	p	$p-1$	g	$-G$	ε	p	$p-1$	g	$-G$	ε
1301	$2^2\cdot5^2\cdot13$	2	2	±10	1831	$2\cdot3\cdot5\cdot61$	3	9	-----	2377	$2^3\cdot3^3\cdot11$	5	5	-----
1203	$2\cdot3\cdot7\cdot31$	6	2	10	1847	$2\cdot13\cdot71$	5	2	10	2381	$2^2\cdot5\cdot7\cdot17$	3	3	-----
1307	$2\cdot653$	2	3	−10	1861	$2^2\cdot3\cdot5\cdot31$	2	2	±10	2383	$2\cdot3\cdot397$	5	13	10
1319	$2\cdot659$	13	2	−10	1867	$2\cdot3\cdot311$	2	4	−10	2389	$2^2\cdot3\cdot199$	2	2	±10
1321	$2^3\cdot3\cdot5\cdot11$	13	13	-----	1871	$2\cdot5\cdot11\cdot17$	14	2	−10	2393	$2^3\cdot13\cdot23$	3	3	-----
1327	$2\cdot3\cdot13\cdot17$	3	9	10	1873	$2^4\cdot3^2\cdot13$	10	10	±10	2399	$2\cdot11\cdot109$	11	2	−10
1361	$2^4\cdot5\cdot17$	3	3	-----	1877	$2^2\cdot7\cdot67$	2	2	-----	2411	$2\cdot5\cdot241$	6	3	10
1367	$2\cdot683$	5	2	10	1879	$2\cdot3\cdot313$	6	2	-----	2417	$2^4\cdot151$	3	3	±10
1373	$2^2\cdot7^3$	2	2	-----	1889	$2^5\cdot59$	3	3	-----	2423	$2\cdot7\cdot173$	5	2	10
1381	$2^2\cdot3\cdot5\cdot23$	2	2	±10	1901	$2^2\cdot5^2\cdot19$	2	2	-----	2437	$2^2\cdot3\cdot7\cdot29$	2	2	-----
1399	$2\cdot3\cdot233$	13	5	−10	1907	$2\cdot953$	2	3	−10	2441	$2^3\cdot5\cdot61$	6	6	-----
1409	$2^7\cdot11$	3	3	-----	1913	$2^3\cdot239$	3	3	±10	2447	$2\cdot1223$	5	2	10
1423	$2\cdot3^2\cdot79$	3	9	-----	1931	$2\cdot5\cdot193$	2	3	-----	2459	$2\cdot1229$	2	3	10
1427	$2\cdot23\cdot31$	2	3	−10	1933	$2^2\cdot3\cdot7\cdot23$	5	5	-----	2467	$2\cdot3^2\cdot137$	2	4	-----
1429	$2^2\cdot3\cdot7\cdot17$	6	6	±10	1949	$2^2\cdot487$	2	2	±10	2473	$2^3\cdot3\cdot103$	5	5	±10
1433	$2^3\cdot179$	3	3	±10	1951	$2\cdot3\cdot5^2\cdot13$	3	2	-----	2477	$2^2\cdot619$	2	2	-----
1439	$2\cdot719$	7	2	−10	1973	$2^2\cdot17\cdot29$	2	2	-----	2503	$2\cdot3^2\cdot139$	3	2	-----
1447	$2\cdot3\cdot241$	3	2	10	1979	$2\cdot23\cdot43$	2	3	10	2521	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$	17	17	-----
1451	$2\cdot5^2\cdot29$	2	3	-----	1987	$2\cdot3\cdot331$	2	4	-----	2531	$2\cdot5\cdot11\cdot23$	2	3	-----
1453	$2^2\cdot3\cdot11^2$	2	2	-----	1993	$2^3\cdot3\cdot83$	5	5	-----	2539	$2\cdot3^3\cdot47$	2	4	10
1459	$2\cdot3^6$	3	6	-----	1997	$2^2\cdot499$	2	2	-----	2543	$2\cdot31\cdot41$	5	2	10
1471	$2\cdot3\cdot5\cdot7^2$	6	5	−10	1999	$2\cdot3^3\cdot37$	3	5	−10	2549	$2^2\cdot7^2\cdot13$	2	2	±10
1481	$2^3\cdot5\cdot37$	3	3	-----	2003	$2\cdot7\cdot11\cdot13$	5	3	−10	2551	$2\cdot3\cdot5^2\cdot17$	6	2	-----
1483	$2\cdot3\cdot13\cdot19$	2	4	-----	2011	$2\cdot3\cdot5\cdot67$	3	5	-----	2557	$2^2\cdot3^2\cdot71$	2	2	-----
1487	$2\cdot743$	5	2	10	2017	$2^5\cdot3^2\cdot7$	5	5	±10	2579	$2\cdot1289$	2	3	10
1489	$2^4\cdot3\cdot31$	14	14	-----	2027	$2\cdot1013$	2	3	−10	2591	$2\cdot5\cdot7\cdot37$	7	2	-----
1493	$2^2\cdot373$	2	2	-----	2029	$2^2\cdot3\cdot13^2$	2	2	±10	2593	$2^5\cdot3^4$	7	7	±10
1499	$2\cdot7\cdot107$	2	3	-----	2039	$2\cdot1019$	7	2	−10	2609	$2^4\cdot163$	3	3	-----
1511	$2\cdot5\cdot151$	11	2	−10	2053	$2^2\cdot3^3\cdot19$	2	2	-----	2617	$2^3\cdot3\cdot109$	5	5	±10
1523	$2\cdot761$	2	3	−10	2063	$2\cdot1031$	5	2	10	2621	$2^2\cdot5\cdot131$	2	2	±10
1531	$2\cdot3^2\cdot5\cdot17$	2	4	10	2069	$2^2\cdot11\cdot47$	2	2	±10	2633	$2^3\cdot7\cdot47$	3	3	±10
1543	$2\cdot3\cdot257$	5	2	10	2081	$2^5\cdot5\cdot13$	3	3	-----	2647	$2\cdot3^3\cdot7^2$	3	2	-----
1549	$2^2\cdot3^2\cdot43$	2	2	±10	2083	$2\cdot3\cdot347$	2	4	−10	2657	$2^5\cdot83$	3	3	±10
1553	$2^4\cdot97$	3	3	±10	2087	$2\cdot7\cdot149$	5	2	-----	2659	$2\cdot3\cdot443$	2	4	-----
1559	$2\cdot19\cdot41$	19	2	−10	2089	$2^3\cdot3^2\cdot29$	7	7	-----	2663	$2\cdot11^3$	5	2	10
1567	$2\cdot3^3\cdot29$	3	2	10	2099	$2\cdot1049$	2	3	10	2671	$2\cdot3\cdot5\cdot89$	7	5	−10
1571	$2\cdot5\cdot157$	2	3	10	2111	$2\cdot5\cdot211$	7	2	−10	2677	$2^2\cdot3\cdot223$	2	2	-----
1579	$2\cdot3\cdot263$	3	5	10	2113	$2^6\cdot3\cdot11$	5	5	±10	2683	$2\cdot3^2\cdot149$	2	4	-----
1583	$2\cdot7\cdot113$	5	2	10	2129	$2^4\cdot7\cdot19$	3	3	-----	2687	$2\cdot17\cdot79$	5	3	10
1597	$2^2\cdot3\cdot7\cdot19$	11	11	-----	2131	$2\cdot3\cdot5\cdot71$	2	4	-----	2689	$2^7\cdot3\cdot7$	19	19	-----
1601	$2^6\cdot5^2$	3	3	-----	2137	$2^3\cdot3\cdot89$	10	10	±10	2693	$2^2\cdot673$	2	2	-----
1607	$2\cdot11\cdot73$	5	2	10	2141	$2^2\cdot5\cdot107$	2	2	±10	2699	$2\cdot19\cdot71$	2	3	10
1609	$2^3\cdot3\cdot67$	7	7	-----	2143	$2\cdot3^2\cdot7\cdot17$	3	9	10	2707	$2\cdot3\cdot11\cdot41$	2	4	−10
1613	$2^2\cdot13\cdot31$	3	3	-----	2153	$2^3\cdot269$	3	3	±10	2711	$2\cdot5\cdot271$	7	2	−10
1619	$2\cdot809$	2	3	10	2161	$2^4\cdot3^3\cdot5$	23	23	-----	2713	$2^3\cdot3\cdot113$	5	5	±10
1621	$2^2\cdot3^4\cdot5$	2	2	±10	2179	$2\cdot3^2\cdot11^2$	7	5	10	2719	$2\cdot3^2\cdot151$	3	2	−10
1627	$2\cdot3\cdot271$	3	6	-----	2203	$2\cdot3\cdot367$	5	7	−10	2729	$2^3\cdot11\cdot31$	3	3	-----
1637	$2^2\cdot409$	2	2	-----	2207	$2\cdot1103$	5	2	10	2731	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13$	3	5	10
1657	$2^3\cdot3^2\cdot23$	11	11	-----	2213	$2^2\cdot7\cdot79$	2	2	-----	2741	$2^2\cdot5\cdot137$	2	2	±10
1663	$2\cdot3\cdot277$	3	2	10	2221	$2^2\cdot3\cdot5\cdot37$	2	2	±10	2749	$2^2\cdot3\cdot229$	6	6	-----
1667	$2\cdot7^2\cdot17$	2	3	−10	2237	$2^2\cdot13\cdot43$	2	2	-----	2753	$2^6\cdot43$	3	3	±10
1669	$2^2\cdot3\cdot139$	2	2	-----	2239	$2\cdot3\cdot373$	3	2	−10	2767	$2\cdot3\cdot461$	3	9	10
1693	$2^2\cdot3^2\cdot47$	2	2	-----	2243	$2\cdot19\cdot59$	2	3	−10	2777	$2^3\cdot347$	3	3	±10
1697	$2^5\cdot53$	3	3	±10	2251	$2\cdot3^2\cdot5^3$	7	5	10	2789	$2^2\cdot17\cdot41$	2	2	±10
1699	$2\cdot3\cdot283$	3	6	-----	2267	$2\cdot11\cdot103$	2	3	−10	2791	$2\cdot3^2\cdot5\cdot31$	6	7	-----
1709	$2^2\cdot7\cdot61$	3	3	±10	2269	$2^2\cdot3^4\cdot7$	2	2	±10	2797	$2^2\cdot3\cdot233$	2	2	-----
1721	$2^3\cdot5\cdot43$	3	3	-----	2273	$2^5\cdot71$	3	3	±10	2801	$2^4\cdot5^2\cdot7$	3	3	-----
1723	$2\cdot3\cdot7\cdot41$	3	6	-----	2281	$2^3\cdot3\cdot5\cdot19$	7	7	-----	2803	$2\cdot3\cdot467$	2	4	−10
1733	$2^2\cdot433$	2	2	-----	2287	$2\cdot3^2\cdot127$	19	7	-----	2819	$2\cdot1409$	2	3	10
1741	$2^2\cdot3\cdot5\cdot29$	2	2	±10	2293	$2^2\cdot3\cdot191$	2	2	-----	2833	$2^4\cdot3\cdot59$	5	5	±10
1747	$2\cdot3^2\cdot97$	2	4	-----	2297	$2^3\cdot7\cdot41$	5	5	±10	2837	$2^2\cdot709$	2	2	-----
1753	$2^3\cdot3\cdot73$	7	7	-----	2309	$2^2\cdot577$	2	2	±10	2843	$2\cdot7^2\cdot29$	2	4	−10
1759	$2\cdot3\cdot293$	6	2	−10	2311	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$	3	2	-----	2851	$2\cdot3\cdot5^2\cdot19$	2	4	10
1777	$2^4\cdot3\cdot37$	5	5	±10	2333	$2^2\cdot11\cdot53$	2	2	-----	2857	$2^3\cdot3\cdot7\cdot17$	11	11	-----
1783	$2\cdot3^4\cdot11$	10	2	10	2339	$2\cdot7\cdot167$	2	3	10	2861	$2^2\cdot5\cdot11\cdot13$	2	2	±10
1787	$2\cdot19\cdot47$	2	3	−10	2341	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot13$	7	7	±10	2879	$2\cdot1439$	7	2	−10
1789	$2^2\cdot3\cdot149$	6	6	±10	2347	$2\cdot3\cdot17\cdot23$	3	6	−10	2887	$2\cdot3\cdot13\cdot37$	5	2	10
1801	$2^3\cdot3^2\cdot5^2$	11	11	-----	2351	$2\cdot5^2\cdot47$	13	3	−10	2807	$2^4\cdot181$	3	3	±10
1811	$2\cdot5\cdot181$	6	3	10	2357	$2^2\cdot19\cdot31$	2	2	-----	2903	$2\cdot1451$	5	2	10
1823	$2\cdot911$	5	2	10	2371	$2\cdot3\cdot5\cdot79$	2	4	10	2909	$2^2\cdot727$	2	2	±10

Таблица 24.8. **Первообразные корни, множители чисел $p-1$**

g и G обозначают наименьший положительный и соответственно наименьший отрицательный первообразные корни p; в колонке, помеченной ϵ, указано, какие из чисел 10 и —10 являются первообразными корнями.

p	$p-1$	g	$-G$	ϵ	p	$p-1$	g	$-G$	ϵ	p	$p-1$	g	$-G$	ϵ
2917	$2^2\cdot3^6$	5	5	-----	3527	$2\cdot41\cdot43$	5	2	10	4079	$2\cdot2039$	11	2	−10
2927	$2\cdot7\cdot11\cdot19$	5	2	10	3529	$2^3\cdot3^2\cdot7^2$	17	17	-----	4091	$2\cdot5\cdot409$	2	3	10
2939	$2\cdot13\cdot113$	2	3	10	3533	$2^2\cdot883$	2	2	-----	4093	$2^2\cdot3\cdot11\cdot31$	2	2	-----
2953	$2^3\cdot3^2\cdot41$	13	13	-----	3539	$2\cdot29\cdot61$	2	3	10	4099	$2\cdot3\cdot683$	2	4	10
2957	$2^2\cdot739$	2	2	-----	3541	$2^2\cdot3\cdot5\cdot59$	7	7	-----	4111	$2\cdot3\cdot5\cdot137$	12	2	−10
2963	$2\cdot1481$	2	3	−10	3547	$2\cdot3^2\cdot197$	2	4	−10	4127	$2\cdot2063$	5	2	10
2969	$2^3\cdot7\cdot53$	3	3	-----	3557	$2^2\cdot7\cdot127$	2	2	-----	4129	$2^5\cdot3\cdot43$	13	13	-----
2971	$2\cdot3^3\cdot5\cdot11$	10	5	10	3559	$2\cdot3\cdot593$	3	2	−10	4133	$2^2\cdot1033$	2	2	-----
2999	$2\cdot1499$	17	2	−10	3571	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot17$	2	4	10	4139	$2\cdot2069$	2	3	10
3001	$2^3\cdot3\cdot5^3$	14	14	-----	3581	$2^2\cdot5\cdot179$	2	2	±10	4153	$2^3\cdot3\cdot173$	5	5	±10
3011	$2\cdot5\cdot7\cdot43$	2	3	10	3583	$2\cdot3^2\cdot199$	3	2	-----	4157	$2^2\cdot1039$	2	2	-----
3019	$2\cdot3\cdot503$	2	4	10	3593	$2^3\cdot449$	3	3	±10	4159	$2\cdot3^3\cdot7\cdot11$	3	2	-----
3023	$2\cdot1511$	5	2	10	3607	$2\cdot3\cdot601$	5	11	10	4177	$2^4\cdot3^2\cdot29$	5	5	±10
3037	$2^2\cdot3\cdot11\cdot23$	2	2	-----	3613	$2^2\cdot3\cdot7\cdot43$	2	2	-----	4201	$2^3\cdot3\cdot5^2\cdot7$	11	11	-----
3041	$2^5\cdot5\cdot19$	3	3	-----	3617	$2^5\cdot113$	3	3	±10	4211	$2\cdot5\cdot421$	6	3	10
3049	$2^3\cdot3\cdot127$	11	11	-----	3623	$2\cdot1811$	5	2	10	4217	$2^3\cdot17\cdot31$	3	3	±10
3061	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot17$	6	6	-----	3631	$2\cdot3\cdot5\cdot11^2$	15	10	−10	4219	$2\cdot3\cdot19\cdot37$	2	4	10
3067	$2\cdot3\cdot7\cdot73$	2	4	−10	3637	$2^2\cdot3^2\cdot101$	2	2	-----	4229	$2^2\cdot7\cdot151$	2	2	±10
3079	$2\cdot3^4\cdot19$	6	2	−10	3643	$2\cdot3\cdot607$	2	4	−10	4231	$2\cdot3^2\cdot5\cdot47$	3	2	−10
3083	$2\cdot23\cdot67$	2	3	−10	3659	$2\cdot31\cdot59$	2	3	10	4241	$2^4\cdot5\cdot53$	3	3	-----
3089	$2^4\cdot193$	3	3	-----	3671	$2\cdot5\cdot367$	13	2	-----	4243	$2\cdot3\cdot7\cdot101$	2	4	−10
3109	$2^2\cdot3\cdot7\cdot37$	6	6	-----	3673	$2^3\cdot3^3\cdot17$	5	5	±10	4253	$2^2\cdot1063$	2	2	-----
3119	$2\cdot1559$	7	2	−10	3677	$2^2\cdot919$	2	2	-----	4259	$2\cdot2129$	2	3	10
3121	$2^4\cdot3\cdot5\cdot13$	7	7	-----	3691	$2\cdot3^2\cdot5\cdot41$	2	4	-----	4261	$2^2\cdot3\cdot5\cdot71$	2	2	±10
3137	$2^6\cdot7^2$	3	3	±10	3697	$2\cdot43^2$	5	5	-----	4271	$2\cdot5\cdot7\cdot61$	7	3	−10
3163	$2\cdot3\cdot17\cdot31$	3	6	−10	3701	$2^2\cdot5^2\cdot37$	2	2	±10	4273	$2^4\cdot3\cdot89$	5	5	-----
3167	$2\cdot1583$	5	2	10	3709	$2^2\cdot3^2\cdot103$	2	2	±10	4283	$2\cdot2141$	2	3	−10
3169	$2^5\cdot3^2\cdot11$	7	7	-----	3719	$2\cdot11\cdot13^2$	7	2	−10	4289	$2^6\cdot67$	3	3	-----
3181	$2^2\cdot3\cdot5\cdot53$	7	7	-----	3727	$2\cdot3^4\cdot23$	3	2	10	4297	$2^3\cdot3\cdot179$	5	5	-----
3187	$2\cdot3^3\cdot59$	2	4	-----	3733	$2^2\cdot3\cdot311$	2	2	-----	4327	$2\cdot3\cdot7\cdot103$	3	2	10
3191	$2\cdot5\cdot11\cdot29$	11	5	-----	3739	$2\cdot3\cdot7\cdot89$	7	5	-----	4337	$2^4\cdot271$	3	3	±10
3203	$2\cdot1601$	2	3	−10	3761	$2^4\cdot5\cdot47$	3	3	-----	4339	$2\cdot3^2\cdot241$	10	5	10
3209	$2^3\cdot401$	3	3	-----	3767	$2\cdot7\cdot269$	5	2	10	4349	$2^2\cdot1087$	2	2	±10
3217	$2^4\cdot3\cdot67$	5	5	-----	3769	$2^3\cdot3\cdot157$	7	7	-----	4357	$2^2\cdot3^2\cdot11^2$	2	2	-----
3221	$2^2\cdot5\cdot7\cdot23$	10	10	±10	3779	$2\cdot1889$	2	3	10	4363	$2\cdot3\cdot727$	2	4	−10
3229	$2^2\cdot3\cdot269$	6	6	-----	3793	$2^4\cdot3\cdot79$	5	5	-----	4373	$2^2\cdot1093$	2	2	-----
3251	$2\cdot5^3\cdot13$	6	3	10	3797	$2^2\cdot13\cdot73$	2	2	-----	4391	$2\cdot5\cdot439$	14	2	−10
3253	$2^2\cdot3\cdot271$	2	2	-----	3803	$2\cdot1901$	2	3	−10	4397	$2^2\cdot7\cdot157$	2	2	-----
3257	$2^3\cdot11\cdot37$	3	3	±10	3821	$2^2\cdot5\cdot191$	3	3	±10	4409	$2^3\cdot19\cdot29$	3	3	-----
3259	$2\cdot3^2\cdot181$	3	5	10	3823	$2\cdot3\cdot7^2\cdot13$	3	9	-----	4421	$2^2\cdot5\cdot13\cdot17$	3	3	±10
3271	$2\cdot3\cdot5\cdot109$	3	5	−10	3833	$2^3\cdot479$	3	3	±10	4423	$2\cdot3\cdot11\cdot67$	3	7	10
3299	$2\cdot17\cdot97$	2	3	10	3847	$2\cdot3\cdot641$	5	2	10	4441	$2^3\cdot3\cdot5\cdot37$	21	21	-----
3301	$2^2\cdot3\cdot5^2\cdot11$	6	6	±10	3851	$2\cdot5^2\cdot7\cdot11$	2	4	-----	4447	$2\cdot3^2\cdot13\cdot19$	3	2	10
3307	$2\cdot3\cdot19\cdot29$	2	4	−10	3853	$2^2\cdot3^2\cdot107$	2	2	-----	4451	$2\cdot5^2\cdot89$	2	3	10
3313	$2^4\cdot3^2\cdot23$	10	10	±10	3863	$2\cdot1931$	5	2	10	4457	$2^3\cdot557$	3	3	±10
3319	$2\cdot3\cdot7\cdot79$	6	2	-----	3877	$2^2\cdot3\cdot17\cdot19$	2	2	-----	4463	$2\cdot23\cdot97$	5	2	10
3323	$2\cdot11\cdot151$	2	3	−10	3881	$2^3\cdot5\cdot97$	13	13	-----	4481	$2^7\cdot5\cdot7$	3	3	-----
3329	$2^8\cdot13$	3	3	-----	3889	$2^4\cdot3^5$	11	11	-----	4483	$2\cdot3^3\cdot83$	2	4	-----
3331	$2\cdot3^2\cdot5\cdot37$	3	5	10	3907	$2\cdot3^2\cdot7\cdot31$	2	4	−10	4493	$2^2\cdot1123$	2	2	-----
3343	$2\cdot3\cdot557$	5	11	10	3911	$2\cdot5\cdot17\cdot23$	13	2	−10	4507	$2\cdot3\cdot751$	2	4	-----
3347	$2\cdot7\cdot239$	2	3	−10	3917	$2^2\cdot11\cdot89$	2	2	-----	4513	$2^5\cdot3\cdot47$	7	7	-----
3359	$2\cdot23\cdot73$	11	2	−10	3919	$2\cdot3\cdot653$	3	2	-----	4517	$2^2\cdot1129$	2	2	-----
3361	$2^5\cdot3\cdot5\cdot7$	22	22	-----	3923	$2\cdot37\cdot53$	2	3	−10	4519	$2\cdot3^2\cdot251$	3	9	-----
3371	$2\cdot5\cdot337$	2	3	10	3929	$2^3\cdot491$	3	3	-----	4523	$2\cdot7\cdot17\cdot19$	5	3	−10
3373	$2^2\cdot3\cdot281$	5	5	-----	3931	$2\cdot3\cdot5\cdot131$	2	4	-----	4547	$2\cdot2273$	2	3	−10
3389	$2^2\cdot7\cdot11^2$	3	3	±10	3943	$2\cdot3^3\cdot73$	3	9	10	4549	$2^2\cdot3\cdot379$	6	6	-----
3391	$2\cdot3\cdot5\cdot113$	3	5	−10	3947	$2\cdot1973$	2	3	−10	4561	$2^4\cdot3\cdot5\cdot19$	11	11	-----
3407	$2\cdot13\cdot131$	5	2	10	3967	$2\cdot3\cdot661$	6	2	10	4567	$2\cdot3\cdot761$	3	7	10
3413	$2^2\cdot853$	2	2	-----	3989	$2^2\cdot997$	2	2	±10	4583	$2\cdot29\cdot79$	5	2	10
3433	$2^3\cdot3\cdot11\cdot13$	5	5	+10	4001	$2^5\cdot5^3$	3	3	-----	4591	$2\cdot3^3\cdot5\cdot17$	11	2	−10
3449	$2^3\cdot431$	3	3	-----	4003	$2\cdot3\cdot23\cdot29$	2	4	-----	4597	$2^2\cdot3\cdot383$	5	5	-----
3457	$2^7\cdot3^3$	7	7	-----	4007	$2\cdot2003$	5	2	10	4603	$2\cdot3\cdot13\cdot59$	2	4	−10
3461	$2^2\cdot5\cdot173$	2	2	±10	4013	$2^2\cdot17\cdot59$	2	2	-----	4621	$2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$	2	2	-----
3463	$2\cdot3\cdot577$	3	9	10	4019	$2\cdot7^2\cdot41$	2	4	10	4637	$2^2\cdot19\cdot61$	2	2	-----
3467	$2\cdot1733$	2	3	−10	4021	$2^2\cdot3\cdot5\cdot67$	2	2	-----	4639	$2\cdot3\cdot773$	3	2	−10
3469	$2^2\cdot3\cdot17^2$	2	2	±10	4027	$2\cdot3\cdot11\cdot61$	3	6	−10	4643	$2\cdot11\cdot211$	5	3	−10
3491	$2\cdot5\cdot349$	2	3	-----	4049	$2^4\cdot11\cdot23$	3	3	-----	4649	$2^3\cdot7\cdot83$	3	3	-----
3499	$2\cdot3\cdot11\cdot53$	2	4	-----	4051	$2\cdot3^4\cdot5^2$	10	5	10	4651	$2\cdot3\cdot5^2\cdot31$	3	5	10
3511	$2\cdot3^3\cdot5\cdot13$	7	2	−10	4057	$2^3\cdot3\cdot13^2$	5	5	±10	4657	$2^4\cdot3\cdot97$	15	15	-----
3517	$2^2\cdot3\cdot293$	2	2	-----	4073	$2^3\cdot509$	3	3	±10	4663	$2\cdot3^2\cdot7\cdot37$	3	9	-----

Таблица 24.8. **Первообразные корни, множители чисел $p-1$**

g и G обозначают наименьший положительный и соответственно наименьший отрицательный первообразные корни p, в колонке, помеченной ε, указано, какие из чисел 10 и —10 являются первообразными корнями.

p	$p-1$	g	$-G$	ε	p	$p-1$	g	$-G$	ε	p	$p-1$	g	$-G$	ε
4673	$2^6\cdot73$	3	3	±10	5297	$2^4\cdot331$	3	3	±10	5867	$2\cdot7\cdot419$	5	3	−10
4679	$2\cdot2339$	11	2	−10	5303	$2\cdot11\cdot241$	5	2	10	5869	$2^2\cdot3^2\cdot163$	2	2	±10
4691	$2\cdot5\cdot7\cdot67$	2	3	10	5309	$2^2\cdot1327$	2	2	±10	5879	$2\cdot2939$	11	2	−10
4703	$2\cdot2351$	5	2	10	5323	$2\cdot3\cdot887$	5	10	−10	5881	$2^3\cdot3\cdot5\cdot7^2$	31	31	—
4721	$2^4\cdot5\cdot59$	6	6	—	5333	$2^2\cdot31\cdot43$	2	2	—	5897	$2^3\cdot11\cdot67$	3	3	±10
4723	$2\cdot3\cdot787$	2	4	−10	5347	$2\cdot3^5\cdot11$	3	6	−10	5903	$2\cdot3\cdot227$	5	2	10
4729	$2^3\cdot3\cdot197$	17	17	—	5351	$2\cdot5^2\cdot107$	11	2	−10	5923	$2\cdot3^2\cdot7\cdot47$	2	4	−10
4733	$2^2\cdot7\cdot13^2$	5	5	—	5381	$2^2\cdot5\cdot269$	3	3	±10	5927	$2\cdot2963$	5	2	10
4751	$2\cdot5^3\cdot19$	19	3	−10	5387	$2\cdot2693$	2	3	−10	5939	$2\cdot2969$	2	3	10
4759	$2\cdot3\cdot13\cdot61$	3	5	−10	5393	$2^4\cdot337$	3	3	±10	5953	$2^6\cdot3\cdot31$	7	7	—
4783	$2\cdot3\cdot797$	6	2	10	5399	$2\cdot2699$	7	2	−10	5981	$2^2\cdot5\cdot13\cdot23$	3	3	±10
4787	$2\cdot2393$	2	3	−10	5407	$2\cdot3\cdot17\cdot53$	3	2	—	5987	$2\cdot41\cdot73$	2	3	−10
4789	$2^2\cdot3^2\cdot7\cdot19$	2	2	—	5413	$2^2\cdot3\cdot11\cdot41$	5	5	—	6007	$2\cdot3\cdot7\cdot11\cdot13$	3	9	—
4793	$2^3\cdot599$	3	3	±10	5417	$2^3\cdot677$	3	3	±10	6011	$2\cdot5\cdot601$	2	4	10
4799	$2\cdot2399$	7	2	−10	5419	$2\cdot3^2\cdot7\cdot43$	3	5	10	6029	$2^2\cdot11\cdot137$	2	2	±10
4801	$2^6\cdot3\cdot5^2$	7	7	—	5431	$2\cdot3\cdot5\cdot181$	3	2	−10	6037	$2^2\cdot3\cdot503$	5	5	—
4813	$2^2\cdot3\cdot401$	2	2	—	5437	$2^2\cdot3^2\cdot151$	5	5	—	6043	$2\cdot3\cdot19\cdot53$	5	6	−10
4817	$2^4\cdot7\cdot43$	3	3	±10	5441	$2^6\cdot5\cdot17$	3	3	—	6047	$2\cdot3023$	5	2	10
4831	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot23$	3	2	—	5443	$2\cdot3\cdot907$	2	4	—	6053	$2^2\cdot17\cdot89$	2	2	—
4861	$2^2\cdot3^5\cdot5$	11	11	—	5449	$2^3\cdot3\cdot227$	7	7	—	6067	$2\cdot3^2\cdot337$	2	4	−10
4871	$2\cdot5\cdot487$	11	3	−10	5471	$2\cdot5\cdot547$	7	3	—	6073	$2^3\cdot3\cdot11\cdot23$	10	10	±10
4877	$2^2\cdot23\cdot53$	2	2	—	5477	$2^2\cdot37^2$	2	2	—	6079	$2\cdot3\cdot1013$	17	7	—
4889	$2^3\cdot13\cdot47$	3	3	—	5479	$2\cdot3\cdot11\cdot83$	3	2	−10	6089	$2^3\cdot761$	3	3	—
4903	$2\cdot3\cdot19\cdot43$	3	2	—	5483	$2\cdot2741$	2	3	−10	6091	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot29$	7	11	—
4909	$2^2\cdot3\cdot409$	6	6	—	5501	$2^2\cdot5^3\cdot11$	2	2	±10	6101	$2^2\cdot5^2\cdot61$	2	2	—
4919	$2\cdot2459$	13	2	−10	5503	$2\cdot3\cdot7\cdot131$	3	9	10	6113	$2^5\cdot191$	3	3	±10
4931	$2\cdot5\cdot17\cdot29$	6	3	10	5507	$2\cdot2753$	2	3	−10	6121	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot17$	7	7	—
4933	$2^2\cdot3^2\cdot137$	2	2	—	5519	$2\cdot31\cdot89$	13	2	−10	6131	$2\cdot5\cdot613$	2	3	10
4937	$2^3\cdot617$	3	3	±10	5521	$2^4\cdot3\cdot5\cdot23$	11	11	—	6133	$2^2\cdot3\cdot7\cdot73$	5	5	—
4943	$2\cdot7\cdot353$	7	2	10	5527	$2\cdot3^2\cdot307$	5	2	10	6143	$2\cdot37\cdot83$	5	2	10
4951	$2\cdot3^2\cdot5^2\cdot11$	6	2	−10	5531	$2\cdot5\cdot7\cdot79$	10	5	10	6151	$2\cdot3\cdot5^2\cdot41$	3	7	—
4957	$2^2\cdot3\cdot7\cdot59$	2	2	—	5557	$2^2\cdot3\cdot463$	2	2	—	6163	$2\cdot3\cdot13\cdot79$	3	6	—
4967	$2\cdot13\cdot191$	5	2	10	5563	$2\cdot3^3\cdot103$	2	4	−10	6173	$2^2\cdot1543$	2	2	—
4969	$2^3\cdot3^3\cdot23$	11	11	—	5569	$2^6\cdot3\cdot29$	13	13	—	6197	$2^2\cdot1549$	2	2	—
4973	$2^2\cdot11\cdot113$	2	2	—	5573	$2^2\cdot7\cdot199$	2	2	—	6199	$2\cdot3\cdot1033$	3	2	−10
4987	$2\cdot3^2\cdot277$	2	4	−10	5581	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot31$	6	6	±10	6203	$2\cdot7\cdot443$	2	3	—
4993	$2^7\cdot3\cdot13$	5	5	—	5591	$2\cdot5\cdot13\cdot43$	11	2	−10	6211	$2\cdot3^3\cdot5\cdot23$	2	4	10
4999	$2\cdot3\cdot7^2\cdot17$	3	9	—	5623	$2\cdot3\cdot937$	5	2	10	6217	$2^3\cdot3\cdot7\cdot37$	5	5	±10
5003	$2\cdot41\cdot61$	2	3	−10	5639	$2\cdot2819$	7	2	−10	6221	$2^2\cdot5\cdot311$	3	3	±10
5009	$2^4\cdot313$	3	3	—	5641	$2^3\cdot3\cdot5\cdot47$	14	14	—	6229	$2^2\cdot3^2\cdot173$	2	2	—
5011	$2\cdot3\cdot5\cdot167$	2	4	—	5647	$2\cdot3\cdot941$	3	2	—	6247	$2\cdot3^2\cdot347$	5	2	10
5021	$2^2\cdot5\cdot251$	3	3	±10	5651	$2\cdot5^2\cdot113$	2	3	10	6257	$2^4\cdot17\cdot23$	3	3	±10
5023	$2\cdot3^4\cdot31$	3	2	—	5653	$2^2\cdot3^2\cdot157$	5	5	—	6263	$2\cdot31\cdot101$	5	2	10
5039	$2\cdot11\cdot229$	11	2	−10	5657	$2^3\cdot7\cdot101$	3	3	±10	6269	$2^2\cdot1567$	2	2	±10
5051	$2\cdot5^2\cdot101$	2	3	—	5659	$2\cdot3\cdot23\cdot41$	2	4	10	6271	$2\cdot3\cdot5\cdot11\cdot19$	11	17	—
5059	$2\cdot3^2\cdot281$	2	4	10	5669	$2^2\cdot13\cdot109$	3	3	±10	6277	$2^2\cdot3\cdot523$	2	2	—
5077	$2^2\cdot3^3\cdot47$	2	2	—	5683	$2\cdot3\cdot947$	2	4	−10	6287	$2\cdot7\cdot449$	7	2	10
5081	$2^3\cdot5\cdot127$	3	3	—	5689	$2^3\cdot3^2\cdot79$	11	11	—	6299	$2\cdot47\cdot67$	2	3	—
5087	$2\cdot2543$	5	2	10	5693	$2^2\cdot1423$	2	2	—	6301	$2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7$	10	10	±10
5099	$2\cdot2549$	2	3	10	5701	$2^2\cdot3\cdot5^2\cdot19$	2	2	±10	6311	$2\cdot5\cdot631$	7	2	−10
5101	$2^2\cdot3\cdot5^2\cdot17$	6	6	—	5711	$2\cdot5\cdot571$	19	3	—	6317	$2^2\cdot1579$	2	2	—
5107	$2\cdot3\cdot23\cdot37$	2	4	−10	5717	$2^2\cdot1429$	2	2	—	6323	$2\cdot29\cdot109$	2	3	−10
5113	$2^3\cdot3^2\cdot71$	19	19	—	5737	$2^3\cdot3\cdot239$	5	5	±10	6329	$2^3\cdot7\cdot113$	3	3	—
5119	$2\cdot3\cdot853$	3	2	—	5741	$2^2\cdot5\cdot7\cdot41$	2	2	±10	6337	$2^6\cdot3^2\cdot11$	10	10	±10
5147	$2\cdot31\cdot83$	2	3	−10	5743	$2\cdot3^2\cdot11\cdot29$	10	2	10	6343	$2\cdot3\cdot7\cdot151$	3	2	10
5153	$2^5\cdot7\cdot23$	5	5	±10	5749	$2^2\cdot3\cdot479$	2	2	±10	6353	$2^4\cdot397$	3	3	±10
5167	$2\cdot3^2\cdot7\cdot41$	6	11	10	5779	$2\cdot3^3\cdot107$	2	4	10	6359	$2\cdot11\cdot17^2$	13	2	−10
5171	$2\cdot5\cdot11\cdot47$	2	4	—	5783	$2\cdot7^2\cdot59$	7	2	10	6361	$2^3\cdot3\cdot5\cdot53$	19	19	—
5179	$2\cdot3\cdot863$	2	4	10	5791	$2\cdot3\cdot5\cdot193$	6	2	—	6367	$2\cdot3\cdot1061$	3	2	10
5189	$2^2\cdot1297$	2	2	±10	5801	$2^3\cdot5^2\cdot29$	3	3	—	6373	$2^2\cdot3^3\cdot59$	2	2	—
5197	$2^2\cdot3\cdot433$	7	7	—	5807	$2\cdot2903$	5	2	10	6379	$2\cdot3\cdot1063$	2	4	—
5209	$2^3\cdot3\cdot7\cdot31$	17	17	—	5813	$2^2\cdot1453$	2	2	—	6389	$2^2\cdot1597$	2	2	±10
5227	$2\cdot3\cdot13\cdot67$	2	4	−10	5821	$2^2\cdot3\cdot5\cdot97$	6	6	±10	6397	$2^2\cdot3\cdot13\cdot41$	2	2	—
5231	$2\cdot5\cdot523$	7	2	−10	5827	$2\cdot3\cdot971$	2	4	−10	6421	$2^2\cdot3\cdot5\cdot107$	6	6	—
5233	$2^4\cdot3\cdot109$	10	10	±10	5839	$2\cdot3\cdot7\cdot139$	6	2	−10	6427	$2\cdot3^3\cdot7\cdot17$	3	6	—
5237	$2^2\cdot7\cdot11\cdot17$	3	3	—	5843	$2\cdot23\cdot127$	2	4	−10	6449	$2^4\cdot13\cdot31$	3	3	—
5261	$2^2\cdot5\cdot263$	2	2	—	5849	$2^3\cdot17\cdot43$	3	3	—	6451	$2\cdot3\cdot5^2\cdot43$	3	6	—
5273	$2^3\cdot659$	3	3	±10	5851	$2\cdot3^2\cdot5^2\cdot13$	2	4	—	6469	$2^2\cdot3\cdot7^2\cdot11$	2	2	—
5279	$2\cdot7\cdot13\cdot29$	7	3	−10	5857	$2^5\cdot3\cdot61$	7	7	±10	6473	$2^3\cdot809$	3	3	±10
5281	$2^5\cdot3\cdot5\cdot11$	7	7	—	5861	$2^2\cdot5\cdot293$	3	3	±10	6481	$2^4\cdot3^4\cdot5$	7	7	—

Таблица 24.8. **Первообразные корни, множители чисел $p-1$**

g и G обозначают наименьший положительный и соответственно наименьший отрицательный первообразные корни p, в колонке, помеченной ε, указано, какие из чисел 10 и -10 являются первообразными корнями.

p	$p-1$	g	$-G$	ε	p	$p-1$	g	$-G$	ε	p	$p-1$	g	$-G$	ε
6491	$2\cdot5\cdot11\cdot59$	2	3	-----	7121	$2^4\cdot5\cdot89$	3	3	-----	7741	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot43$	7	7	-----
6521	$2^3\cdot5\cdot163$	6	6	-----	7127	$2\cdot7\cdot509$	5	2	-----	7753	$2^3\cdot3\cdot17\cdot19$	10	10	±10
6529	$2^7\cdot3\cdot17$	7	7	-----	7129	$2^3\cdot3^4\cdot11$	7	7	-----	7757	$2^2\cdot7\cdot277$	2	2	-----
6547	$2\cdot3\cdot1091$	2	4	-----	7151	$2\cdot5^2\cdot11\cdot13$	7	3	-----	7759	$2\cdot3^2\cdot431$	3	2	−10
6551	$2\cdot5^2\cdot131$	17	2	−10	7159	$2\cdot3\cdot1193$	3	2	−10	7789	$2^2\cdot3\cdot11\cdot59$	2	2	-----
6553	$2^3\cdot3^2\cdot7\cdot13$	10	10	±10	7177	$2^3\cdot3\cdot13\cdot23$	10	10	±10	7793	$2^4\cdot487$	3	3	±10
6563	$2\cdot17\cdot193$	5	10	−10	7187	$2\cdot3593$	2	3	−10	7817	$2^3\cdot977$	3	3	±10
6569	$2^3\cdot821$	3	3	-----	7193	$2^3\cdot29\cdot31$	3	3	±10	7823	$2\cdot3911$	5	2	10
6571	$2\cdot3^2\cdot5\cdot73$	3	7	10	7207	$2\cdot3\cdot1201$	3	2	10	7829	$2^2\cdot19\cdot103$	2	2	±10
6577	$2^4\cdot3\cdot137$	5	5	-----	7211	$2\cdot5\cdot7\cdot103$	2	3	-----	7841	$2^5\cdot5\cdot7^2$	12	12	-----
6581	$2^2\cdot5\cdot7\cdot47$	14	14	-----	7213	$2^2\cdot3\cdot601$	5	5	-----	7853	$2^2\cdot13\cdot151$	2	2	-----
6599	$2\cdot3299$	13	2	−10	7219	$2\cdot3^2\cdot401$	2	4	10	7867	$2\cdot3^2\cdot19\cdot23$	3	6	−10
6607	$2\cdot3^2\cdot367$	3	2	-----	7229	$2^2\cdot13\cdot139$	2	2	±10	7873	$2^6\cdot3\cdot41$	5	5	±10
6619	$2\cdot3\cdot1103$	2	4	10	7237	$2^2\cdot3^3\cdot67$	2	2	-----	7877	$2^2\cdot11\cdot179$	2	2	-----
6637	$2^2\cdot3\cdot7\cdot79$	2	2	-----	7243	$2\cdot3\cdot17\cdot71$	2	4	−10	7879	$2\cdot3\cdot13\cdot101$	3	2	−10
6653	$2^2\cdot1663$	2	2	-----	7247	$2\cdot3623$	5	2	10	7883	$2\cdot7\cdot563$	2	3	−10
6659	$2\cdot3329$	2	3	10	7253	$2^2\cdot7^2\cdot37$	2	2	-----	7901	$2^2\cdot5^2\cdot79$	2	2	±10
6661	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot37$	6	6	±10	7283	$2\cdot11\cdot331$	2	3	−10	7907	$2\cdot59\cdot67$	2	3	−10
6673	$2^4\cdot3\cdot139$	5	5	±10	7297	$2^7\cdot3\cdot19$	5	5	-----	7919	$2\cdot37\cdot107$	7	2	−10
6679	$2\cdot3^2\cdot7\cdot53$	7	5	−10	7307	$2\cdot13\cdot281$	2	3	−10	7927	$2\cdot3\cdot1321$	3	7	10
6689	$2^5\cdot11\cdot19$	3	3	-----	7309	$2^2\cdot3^2\cdot7\cdot29$	6	6	±10	7933	$2^2\cdot3\cdot661$	2	2	-----
6691	$2\cdot3\cdot5\cdot223$	2	4	10	7321	$2^3\cdot3\cdot5\cdot61$	7	7	-----	7937	$2^8\cdot31$	3	3	±10
6701	$2^2\cdot5^2\cdot67$	2	2	±10	7331	$2\cdot5\cdot733$	2	4	-----	7949	$2^2\cdot1987$	2	2	±10
6703	$2\cdot3\cdot1117$	5	2	10	7333	$2^2\cdot3\cdot13\cdot47$	6	6	-----	7951	$2\cdot3\cdot5^2\cdot53$	6	2	−10
6709	$2^2\cdot3\cdot13\cdot43$	2	2	±10	7349	$2^2\cdot11\cdot167$	2	2	±10	7963	$2\cdot3\cdot1327$	5	10	−10
6719	$2\cdot3359$	11	2	−10	7351	$2\cdot3\cdot5^2\cdot7^2$	6	5	-----	7993	$2^3\cdot3^3\cdot37$	5	5	-----
6733	$2^2\cdot3^2\cdot11\cdot17$	2	2	-----	7369	$2^3\cdot3\cdot307$	7	7	-----	8009	$2^3\cdot7\cdot11\cdot13$	3	3	-----
6737	$2^4\cdot421$	3	3	±10	7393	$2^5\cdot3\cdot7\cdot11$	5	5	±10	8011	$2\cdot3^2\cdot5\cdot89$	14	7	-----
6761	$2^3\cdot5\cdot13^2$	3	3	-----	7411	$2\cdot3\cdot5\cdot13\cdot19$	2	4	10	8017	$2^4\cdot3\cdot167$	5	5	±10
6763	$2\cdot3\cdot7^2\cdot23$	2	4	-----	7417	$2^3\cdot3^2\cdot103$	5	5	-----	8039	$2\cdot4019$	11	2	−10
6779	$2\cdot3389$	2	3	10	7433	$2^3\cdot929$	3	3	±10	8053	$2^2\cdot3\cdot11\cdot61$	2	2	-----
6781	$2^2\cdot3\cdot5\cdot113$	2	2	-----	7451	$2\cdot5^2\cdot149$	2	4	10	8059	$2\cdot3\cdot17\cdot79$	3	5	10
6791	$2\cdot5\cdot7\cdot97$	7	3	-----	7457	$2^5\cdot233$	3	3	±10	8069	$2^2\cdot2017$	2	2	±10
6793	$2^3\cdot3\cdot283$	10	10	±10	7459	$2\cdot3\cdot11\cdot113$	2	4	10	8081	$2^4\cdot5\cdot101$	3	3	-----
6803	$2\cdot19\cdot179$	2	3	−10	7477	$2^2\cdot3\cdot7\cdot89$	2	2	-----	8087	$2\cdot13\cdot311$	5	2	10
6823	$2\cdot3^2\cdot379$	3	2	10	7481	$2^3\cdot5\cdot11\cdot17$	6	6	-----	8089	$2^3\cdot3\cdot337$	17	17	-----
6827	$2\cdot3413$	2	3	−10	7487	$2\cdot19\cdot197$	5	3	10	8093	$2^2\cdot7\cdot17^2$	2	2	-----
6829	$2^2\cdot3\cdot569$	2	2	±10	7489	$2^6\cdot3^2\cdot13$	7	7	-----	8101	$2^2\cdot3^4\cdot5^2$	6	6	-----
6833	$2^4\cdot7\cdot61$	3	3	±10	7499	$2\cdot23\cdot163$	2	3	10	8111	$2\cdot5\cdot811$	11	2	-----
6841	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot19$	22	22	-----	7507	$2\cdot3^3\cdot139$	2	4	−10	8117	$2^2\cdot2029$	2	2	-----
6857	$2^3\cdot857$	3	3	±10	7517	$2^2\cdot1879$	2	2	-----	8123	$2\cdot31\cdot131$	2	3	−10
6863	$2\cdot47\cdot73$	5	2	10	7523	$2\cdot3761$	2	3	−10	8147	$2\cdot4073$	2	3	−10
6869	$2^2\cdot17\cdot101$	2	2	±10	7529	$2^3\cdot941$	3	3	-----	8161	$2^5\cdot3\cdot5\cdot17$	7	7	-----
6871	$2\cdot3\cdot5\cdot229$	3	9	−10	7537	$2^4\cdot3\cdot157$	7	7	-----	8167	$2\cdot3\cdot1361$	3	9	-----
6883	$2\cdot3\cdot31\cdot37$	2	4	−10	7541	$2^2\cdot5\cdot13\cdot29$	2	2	±10	8171	$2\cdot5\cdot19\cdot43$	2	3	10
6899	$2\cdot3449$	2	3	10	7547	$2\cdot7^3\cdot11$	2	3	−10	8179	$2\cdot3\cdot29\cdot47$	2	4	10
6907	$2\cdot3\cdot1151$	2	4	-----	7549	$2^2\cdot3\cdot17\cdot37$	2	2	-----	8191	$2\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot13$	17	11	-----
6911	$2\cdot5\cdot691$	7	2	−10	7559	$2\cdot3779$	13	2	−10	8209	$2^4\cdot3^3\cdot19$	7	7	-----
6917	$2^2\cdot7\cdot13\cdot19$	2	2	-----	7561	$2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7$	13	13	-----	8219	$2\cdot7\cdot587$	2	3	10
6947	$2\cdot23\cdot151$	2	3	−10	7573	$2^2\cdot3\cdot631$	2	2	-----	8221	$2^2\cdot3\cdot5\cdot137$	2	2	-----
6949	$2^2\cdot3^2\cdot193$	2	2	±10	7577	$2^3\cdot947$	3	3	±10	8231	$2\cdot5\cdot823$	11	2	−10
6959	$2\cdot7^2\cdot71$	7	3	−10	7583	$2\cdot17\cdot223$	5	2	10	8233	$2^3\cdot3\cdot7^3$	10	10	±10
6961	$2^4\cdot3\cdot5\cdot29$	13	13	-----	7589	$2^2\cdot7\cdot271$	2	2	-----	8237	$2^2\cdot29\cdot71$	2	2	-----
6967	$2\cdot3^4\cdot43$	5	13	10	7591	$2\cdot3\cdot5\cdot11\cdot23$	6	2	−10	8243	$2\cdot13\cdot317$	2	3	−10
6971	$2\cdot5\cdot17\cdot41$	2	4	10	7603	$2\cdot3\cdot7\cdot181$	2	4	-----	8263	$2\cdot3^5\cdot17$	3	2	10
6977	$2^6\cdot109$	3	3	±10	7607	$2\cdot3803$	5	2	10	8269	$2^2\cdot3\cdot13\cdot53$	2	2	±10
6983	$2\cdot3491$	5	2	10	7621	$2^2\cdot3\cdot5\cdot127$	2	2	-----	8273	$2^4\cdot11\cdot47$	3	3	±10
6991	$2\cdot3\cdot5\cdot233$	6	2	−10	7639	$2\cdot3\cdot19\cdot67$	7	5	−10	8287	$2\cdot3\cdot1381$	3	7	10
6997	$2^2\cdot3\cdot11\cdot53$	5	5	-----	7643	$2\cdot3821$	2	3	−10	8291	$2\cdot5\cdot829$	2	3	10
7001	$2^3\cdot5^3\cdot7$	3	3	-----	7649	$2^5\cdot239$	3	3	-----	8293	$2^3\cdot1049$	2	2	-----
7013	$2^2\cdot1753$	2	2	-----	7669	$2^2\cdot3^3\cdot71$	2	2	-----	8297	$2^2\cdot2009$	3	3	±10
7019	$2\cdot11^2\cdot29$	2	3	10	7673	$2^3\cdot7\cdot137$	3	3	±10	8311	$2\cdot3\cdot5\cdot277$	3	2	−10
7027	$2\cdot3\cdot1171$	2	4	-----	7681	$2^9\cdot3\cdot5$	17	17	-----	8317	$2^2\cdot3^3\cdot7\cdot11$	6	6	-----
7039	$2\cdot3^2\cdot17\cdot23$	3	2	-----	7687	$2\cdot3^2\cdot7\cdot61$	6	2	10	8329	$2^3\cdot3\cdot347$	7	7	-----
7043	$2\cdot7\cdot503$	2	4	-----	7691	$2\cdot5\cdot769$	2	3	10	8353	$2^5\cdot3^2\cdot29$	5	5	±10
7057	$2^4\cdot3^2\cdot7^2$	5	5	±10	7699	$2\cdot3\cdot1283$	3	5	10	8363	$2\cdot37\cdot113$	2	3	−10
7069	$2^2\cdot3\cdot19\cdot31$	2	2	±10	7703	$2\cdot3851$	5	2	10	8369	$2^4\cdot523$	3	3	-----
7079	$2\cdot3539$	7	2	−10	7717	$2^2\cdot3\cdot643$	2	2	-----	8377	$2^3\cdot3\cdot349$	5	5	±10
7103	$2\cdot53\cdot67$	5	2	10	7723	$2\cdot3^3\cdot11\cdot13$	3	6	-----	8387	$2\cdot7\cdot599$	2	3	-----
7109	$2^2\cdot1777$	2	2	±10	7727	$2\cdot3863$	5	2	10	8389	$2^2\cdot3^2\cdot233$	6	6	±10

Таблица 24.8. Первообразные корни, множители чисел $p-1$

g и G обозначают наименьший положительный и соответственно наименьший отрицательный первообразные корни p, в колонке, помеченной ϵ, указано, какие из чисел 10 и -10 являются первообразными корнями.

p	$p-1$	g	$-G$	ϵ	p	$p-1$	g	$-G$	ϵ	p	$p-1$	g	$-G$	ϵ
8419	2·3·23·61	3	6	-----	8941	$2^2\cdot3\cdot5\cdot149$	6	6	-----	9463	2·3·19·83	3	9	-----
8423	2·4211	5	2	10	8951	$2\cdot5^2\cdot179$	13	2	−10	9467	2·4733	2	3	−10
8429	$2^2\cdot7^2\cdot43$	2	2	±10	8963	2·4481	2	3	−10	9473	$2^8\cdot37$	3	3	±10
8431	2·3·5·281	3	2	−10	8969	$2^3\cdot19\cdot59$	3	3	-----	9479	2·7·677	7	2	−10
8443	$2\cdot3^2\cdot7\cdot67$	2	4	−10	8971	2·3·5·13·23	2	4	10	9491	2·5·13·73	2	3	10
8447	2·41·103	5	2	10	8999	2·11·409	7	2	−10	9497	$2^3\cdot1187$	3	3	±10
8461	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot47$	6	6	-----	9001	$2^3\cdot3^2\cdot5^3$	7	7	-----	9511	2·3·5·317	3	9	-----
8467	2·3·17·83	2	4	−10	9007	2·3·19·79	3	2	-----	9521	$2^4\cdot5\cdot7\cdot17$	3	3	-----
8501	$2^2\cdot5^3\cdot17$	7	7	±10	9011	2·5·17·53	2	4	10	9533	$2^2\cdot2383$	2	2	-----
8513	$2^6\cdot7\cdot19$	5	5	±10	9013	$2^2\cdot3\cdot751$	5	5	-----	9539	2·19·251	2	3	10
8521	$2^3\cdot3\cdot5\cdot71$	13	13	-----	9029	$2^2\cdot37\cdot61$	2	2	±10	9547	2·3·37·43	2	4	−10
8527	$2\cdot3\cdot7^2\cdot29$	5	2	-----	9041	$2^4\cdot5\cdot113$	3	3	-----	9551	$2\cdot5^2\cdot191$	11	2	-----
8537	$2^3\cdot11\cdot97$	3	3	±10	9043	2·3·11·137	3	6	−10	9587	2·4793	2	3	−10
8539	2·3·1423	2	4	-----	9049	$2^3\cdot3\cdot13\cdot29$	7	7	-----	9601	$2^7\cdot3\cdot5^2$	13	13	-----
8543	2·4271	5	2	10	9059	2·7·647	2	4	10	9613	$2^2\cdot3^3\cdot89$	2	2	-----
8563	2·3·1427	2	4	−10	9067	2·3·1511	3	6	−10	9619	2·3·7·229	2	4	-----
8573	$2^2\cdot2143$	2	2	-----	9091	$2\cdot3^2\cdot5\cdot101$	3	5	-----	9623	2·17·283	5	3	10
8581	$2^2\cdot3\cdot5\cdot11\cdot13$	6	6	-----	9103	2·3·37·41	6	2	10	9629	$2^2\cdot29\cdot83$	2	2	±10
8597	$2^2\cdot7\cdot307$	2	2	-----	9109	$2^2\cdot3^2\cdot11\cdot23$	10	10	±10	9631	$2\cdot3^2\cdot5\cdot107$	3	9	−10
8599	2·3·1433	3	2	-----	9127	$2\cdot3^3\cdot13^2$	3	2	-----	9643	2·3·1607	2	4	−10
8609	$2^5\cdot269$	3	3	-----	9133	$2^2\cdot3\cdot761$	6	6	-----	9649	$2^4\cdot3^2\cdot67$	7	7	-----
8623	$2\cdot3^2\cdot479$	3	2	10	9137	$2^4\cdot571$	3	3	±10	9661	$2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot23$	2	2	-----
8627	2·19·227	2	3	−10	9151	$2\cdot3\cdot5^2\cdot61$	3	2	-----	9677	$2^2\cdot41\cdot59$	2	2	-----
8629	$2^2\cdot3\cdot719$	6	6	-----	9157	$2^2\cdot3\cdot7\cdot109$	6	6	-----	9679	2·3·1613	3	2	-----
8641	$2^6\cdot3^3\cdot5$	17	17	-----	9161	$2^3\cdot5\cdot229$	3	3	-----	9689	$2^3\cdot7\cdot173$	3	3	-----
8647	2·3·11·131	3	2	10	9173	$2^2\cdot2293$	2	2	-----	9697	$2^5\cdot3\cdot101$	10	10	±10
8663	2·61·71	5	2	10	9181	$2^2\cdot3^3\cdot5\cdot17$	2	2	-----	9719	2·43·113	17	3	−10
8669	$2^2\cdot11\cdot197$	2	2	±10	9187	2·3·1531	3	6	−10	9721	$2^3\cdot3^5\cdot5$	7	7	-----
8677	$2^2\cdot3^2\cdot241$	2	2	-----	9199	$2\cdot3^2\cdot7\cdot73$	3	2	−10	9733	$2^2\cdot3\cdot811$	2	2	-----
8681	$2^3\cdot5\cdot7\cdot31$	15	15	-----	9203	2·43·107	2	3	−10	9739	$2\cdot3^2\cdot541$	3	5	10
8689	$2^4\cdot3\cdot181$	13	13	-----	9209	$2^3\cdot1151$	3	3	-----	9743	2·4871	5	2	10
8693	$2^2\cdot41\cdot53$	2	2	-----	9221	$2^2\cdot5\cdot461$	2	2	±10	9749	$2^2\cdot2437$	2	2	±10
8699	2·4349	2	3	10	9227	2·7·659	2	3	−10	9767	2·19·257	5	2	10
8707	2·3·1451	5	7	−10	9239	2·31·149	19	2	−10	9769	$2^3\cdot3\cdot11\cdot37$	13	13	-----
8713	$2^3\cdot3^2\cdot11^2$	5	5	±10	9241	$2^3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$	13	13	-----	9781	$2^2\cdot3\cdot5\cdot163$	6	6	±10
8719	2·3·1453	3	5	−10	9257	$2^3\cdot13\cdot89$	3	3	±10	9787	2·3·7·233	3	6	−10
8731	$2\cdot3^2\cdot5\cdot97$	2	4	10	9277	$2^2\cdot3\cdot773$	5	5	-----	9791	2·5·11·89	11	2	−10
8737	$2^5\cdot3\cdot7\cdot13$	5	5	-----	9281	$2^6\cdot5\cdot29$	3	3	-----	9803	$2\cdot13^2\cdot29$	2	3	−10
8741	$2^2\cdot5\cdot19\cdot23$	2	2	±10	9283	2·3·7·13·17	2	4	-----	9811	$2\cdot3^2\cdot5\cdot109$	3	5	10
8747	2·4373	2	3	−10	9293	$2^2\cdot23\cdot101$	2	2	-----	9817	$2^3\cdot3\cdot409$	5	5	±10
8753	$2^4\cdot547$	3	3	±10	9311	$2\cdot5\cdot7^2\cdot19$	7	2	−10	9829	$2^2\cdot3^3\cdot7\cdot13$	10	10	±10
8761	$2^3\cdot3\cdot5\cdot73$	23	23	-----	9319	2·3·1553	3	2	−10	9833	$2^3\cdot1229$	3	3	±10
8779	2·3·7·11·19	11	22	-----	9323	2·59·79	2	3	−10	9839	2·4919	7	2	−10
8783	2·4391	5	2	10	9337	$2^3\cdot3\cdot389$	5	5	-----	9851	$2\cdot5^2\cdot197$	2	4	10
8803	$2\cdot3^3\cdot163$	2	4	-----	9341	$2^2\cdot5\cdot467$	2	2	±10	9857	$2^7\cdot7\cdot11$	5	5	±10
8807	2·7·17·37	5	2	10	9343	$2\cdot3^3\cdot173$	5	2	10	9859	2·3·31·53	2	4	-----
8819	2·4409	2	3	10	9349	$2^2\cdot3\cdot19\cdot41$	2	2	-----	9871	2·3·5·7·47	3	2	−10
8821	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7^2$	2	2	±10	9371	2·5·937	2	3	10	9883	$2\cdot3^4\cdot61$	2	4	−10
8831	2·5·883	7	5	−10	9377	$2^5\cdot293$	3	3	±10	9887	2·4943	5	2	10
8837	$2^2\cdot47^2$	2	2	-----	9391	2·3·5·313	3	2	−10	9901	$2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot11$	2	2	-----
8839	$2\cdot3^2\cdot491$	3	2	−10	9397	$2^2\cdot3^4\cdot29$	2	2	-----	9907	2·3·13·127	2	4	−10
8849	$2^4\cdot7\cdot79$	3	3	-----	9403	2·3·1567	3	6	-----	9923	$2\cdot11^2\cdot41$	2	3	−10
8861	$2^2\cdot5\cdot443$	2	2	±10	9413	$2^2\cdot13\cdot181$	3	3	-----	9929	$2^3\cdot17\cdot73$	3	3	-----
8863	2·3·7·211	3	9	10	9419	2·17·277	2	3	-----	9931	2·3·5·331	10	5	10
8867	2·11·13·31	2	3	−10	9421	$2^2\cdot3\cdot5\cdot157$	2	2	±10	9941	$2^2\cdot5\cdot7\cdot71$	2	2	-----
8887	2·3·1481	3	2	10	9431	2·5·23·41	7	3	−10	9949	$2^2\cdot3\cdot829$	2	2	±10
8893	$2^2\cdot3^2\cdot13\cdot19$	5	5	-----	9433	$2^3\cdot3^2\cdot131$	5	5	-----	9967	2·3·11·151	3	2	10
8923	2·3·1487	2	4	-----	9437	$2^2\cdot7\cdot337$	2	2	-----	9973	$2^2\cdot3^2\cdot277$	11	11	-----
8929	$2^5\cdot3^2\cdot31$	11	11	-----	9439	$2\cdot3\cdot11^2\cdot13$	22	7	-----					
8933	$2^2\cdot7\cdot11\cdot29$	2	2	-----	9461	$2^2\cdot5\cdot11\cdot43$	3	3	±10					

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

24.1. Carlitz L. Note on Nörlunds polynomial $B_n^{(z)}$. — Proc. Amer. Math. Soc., 1960, **11**, p. 452—455.
24.2. Fort T., Finite differences. — Oxford: Clarendon Press, 1948.
24.3. Gould H. W. Stirling number representation problems. — Proc. Amer. Math. Soc., 1960, **11**, p. 447—451.
24.4. Hardy G. H. Ramanujan. — N.Y.: Chelsea Publishing Co., 1959.
24.5. Hardy G. H., Wright E. M. An introduction to the theory of numbers. — Oxford: Clarendon Press, 1960.
24.6. Hua L. K. On the number of partitions of a number into unequal parts. — Trans. Amer. Math. Soc., 1942, **51**, p. 194—201.
24.7. Jordan C. Calculus of finite differences. — N.Y.: Chelsea Publishing Co., 1960.
24.8. Knopp K. Theory and application of infinite series. — L.: Blackie and Son, 1951.
24.9. Milne-Thomson L. M. The calculus of finite differences. — L.: Macmillan and Co., 1951.
24.10. Moser L., Wyman M. Stirling numbers of the second kind. — Duke Math. J., 1958, **25**, p. 29—43.
24.11. Moser L., Wyman M. Asymptotic development of the Stirling numbers of the first kind. — J. London Math. Soc., 1958, **33**, p. 133—146.
24.12. Ostmann H. H. Additive Zahlentheorie. — B.: Springer-Verlag, 1956, V. 1.
24.13. Rademacher H. On the partition function. — Proc. London Math. Soc., 1937, **43**, p. 241—254.
24.14. Rademacher H., Whiteman A. Theorems on Dedekind sums. — Amer. J. Math., 1941, **63**, p. 377—407.
24.15. Riordan J. An introduction to combinatorial analysis. N.Y.: John Wiley and Sons, 1958. Русский перевод: Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1963.
24.16. Uspensky J. V., Heaslet M. A. Elementary number theory. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1939.

Таблицы

24.17. British Association for the Advancement of Science. Mathematical tables, V. VIII. Number-divisor tables. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1940.
24.18. Gupta H. A tables of distributions. — Res. Bull. East Panjab Univ., 1950, 13—44; 1951, 750.
24.19. Gupta H., A table of partitions. — Proc. London Math. Soc., 1935, **39**, p. 142—149; 1937, **42**, p. 546—549.

$p(n)$, $n = 1(1)300$; $p(n)$, $n = 301(1)600$.

24.20. Kavan G. Factor tables. — L.: Macmillan Co., 1937.
24.21. Lehmer D. N. List of prime numbers from 1 to 10006721. — Washington: Carnegie Institution of Washington, 1914. — Publication № 165. Русский перевод: Лемер Д. Н. Таблицы простых чисел от 1 до 10006721. — М.: ВЦ АН СССР, 1967. — (БМТ; Вып. 43).
24.22. Royal Society Mathematical Tables, V. 3. Table of binomial coefficients. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1954.
24.23. Watson G. N. Two tables of partitions. — Proc. London Math. Soc., 1937, **42**, p. 550—556.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

24.24. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.
24.25. Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. — М.: Мир, 1965.
24.26. Холл М. Комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1963.

Глава 25

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Ф. ДЭВИС, И. ПОЛОНСКИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

Специалисты по численному анализу имеют тенденцию накапливать математический инструмент, предназначенный для сложных и порой весьма специальных математических операций и требующий особых знаний для его применения. Из этого большого запаса имеющихся в наличии математических формул мы и произвели представленную здесь выборку. Надеемся, что она окажется удачной, но, как и во всех кратких руководствах, в этом справочнике читатель может не обнаружить своих любимых формул и, наоборот, найти такие, которые, по его мнению, второстепенны.

Мы хотели бы дать примеры, чтобы проиллюстрировать приводимые формулы, но это, к сожалению, невозможно. Численный анализ является не только наукой, но частично также искусством, и поэтому в кратком справочном руководстве было невозможно указать, где и при каких условиях целесообразнее применять те или иные формулы, а также указать те вычислительные трудности, с которыми придется столкнуться при некритическом использовании формул. Имея это в виду, мы хотели бы предостеречь читателя против слепого и бездумного применения представленного здесь материала.

Обозначения:

абсциссы: $x_0 < x_1 < \ldots$;
функции: $f, g \ldots$;

значения функций: $f(x_i) = f_i, f'(x_i) = f'_i$, где $f', f^{(2)}, \ldots$ — 1-я, 2-я, ... производные;

если абсциссы равноудалены, т. е. $x_{i+1} - x_i = h$, то $f_p = f(x_0 + ph)$ (p — не обязательно целое);

R, R_n — остаточные члены.

25.1. РАЗНОСТИ

Односторонние разности

25.1.1. $\Delta(f_n) = \Delta_n = \Delta_n^1 = f_{n+1} - f_n,$

$$\Delta_n^2 = \Delta_{n+1}^1 - \Delta_n^1 = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n,$$

$$\Delta_n^3 = \Delta_{n+1}^2 - \Delta_n^2 = f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n,$$

....

$$\Delta_n^k = \Delta_{n+1}^{k-1} - \Delta_n^{k-1} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f_{n+k-j}.$$

Центральные разности

25.1.2. $\delta(f_{n+1/2}) = \delta_{n+1/2} = \delta_{n+1/2}^1 = f_{n+1} - f_n,$

$$\delta_n^2 = \delta_{n+1/2}^1 - \delta_{n-1/2}^1 = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1},$$

$$\delta_{n+1/2}^3 = \delta_{n+1}^2 - \delta_n^2 = f_{n+2} - 3f_{n+1} + 3f_n - f_{n-1},$$

....

$$\delta_n^{2k} = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} f_{n+k-j},$$

$$\delta_{n+1/2}^{2k+1} = \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \binom{2k+1}{j} f_{n+k+1-j},$$

$\delta_{n/2}^k = \Delta_{(n-k)/2}^k$, если n и k одинаковой четности.

Односторонние разности					*Центральные разности*				
x_0	f_0				x_{-1}	f_{-1}			
		Δ_0					$\delta_{-1/2}$		
x_1	f_1		Δ_0^2		x_0	f_0		δ_0^2	
		Δ_1		Δ_0^3			$\delta_{1/2}$		$\delta_{1/2}^3$
x_2	f_2		Δ_1^2		x_1	f_1		δ_1^2	
		Δ_2					$\delta_{3/2}$		
x_3	f_3				x_2	f_2			

Средние разности

25.1.3. $\mu(f_n) = \dfrac{1}{2}(f_{n+1/2} + f_{n-1/2}).$

Разделенные разности

25.1.4.

$$[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} = [x_1, x_0],$$

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2},$$

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{[x_0, \ldots, x_{k-1}] - [x_1, \ldots, x_k]}{x_0 - x_k}.$$

Выражение разделенных разностей через значения функции

25.1.5. $[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\pi_n'(x_k)}$,

где

25.1.6. $\pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

и $\pi_n'(x)$ — его производная.

25.1.7. $\pi_n'(x_k) =$

$$= (x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n).$$

Пусть D — односвязная область с кусочно-гладкой границей C; точки $z_0, \ldots, z_k$ — ее внутренние точки. Пусть $f(z)$ — аналитическая в D и непрерывная в $D + C$ функция. Тогда

25.1.8. $[z_0, z_1, \ldots, z_n] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{\prod_{k=0}^{n} (z - z_k)} dz,$

25.1.9. $\Delta_0^n = h^n f^{(n)}(\xi) \quad (x_0 < \xi < x_n),$

25.1.10. $[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta_0^n}{n! h^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

$$(x_0 < \xi < x_n),$$

25.1.11. $[x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, x_0, \ldots, x_n] = \frac{\delta_0^{2n}}{h^{2n}(2n)!}$.

Обратные разности

25.1.12. $\rho(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{f_0 - f_1}$,

$$\rho_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{x_0 - x_2}{\rho(x_0, x_1) - \rho(x_1, x_2)} + f_1,$$

$\rho_3(x_0, x_1, x_2, x_3) =$

$$= \frac{x_0 - x_3}{\rho_2(x_0, x_1, x_2) - \rho_2(x_1, x_2, x_3)} + \rho(x_1, x_2),$$

. . . .

$\rho_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) =$

$$= \frac{x_0 - x_n}{\rho_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) - \rho_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)} + \rho_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

25.2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Интерполяционные формулы Лагранжа

25.2.1. $f(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f_i + R_n(x).$

25.2.2. $l_i(x) = \frac{\pi_n(x)}{(x - x_i)\, \pi_n'(x_i)} =$

$$= \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}.$$

Остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа

25.2.3. $R_n(x) = \pi_n(x) \cdot [x_0, x_1, \ldots, x_n, x] =$

$$= \pi_n(x) \cdot \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \quad (x_0 < \xi < x_n).$$

25.2.4. $|R_n(x)| \leqslant \frac{(x_n - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_n} |f^{(n+1)}(x)|.$

25.2.5. $R_n(z) = \frac{\pi_n(z)}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t - z)(t - z_0) \ldots (t - z_n)} dt.$

Здесь предполагаются выполненными условия 25.1.8.

Интерполяционная формула Лагранжа для n равноотстоящих точек

25.2.6. $f(x_0 + ph) = \sum_k A_k^n(p) f_k + R_{n-1},$

$$-\frac{1}{2}(n - 2) \leqslant k \leqslant \frac{1}{2} n \quad (n \text{ — четное}),$$

$$-\frac{1}{2}(n - 1) \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}(n - 1) \quad (n \text{ — нечетное}).$$

25.2.7. $A_k^n(p) =$

$$= \frac{(-1)^{n/2+k}}{\left(\frac{n-2}{2} + k\right)! \left(\frac{1}{2} n - k\right)! (p - k)} \prod_{t=1}^{n} \left(p + \frac{1}{2} n - t\right)$$

$$(n \text{ — четное}),$$

$A_k^n(p) =$

$$= \frac{(-1)^{(n-1)/2+k}}{\left(\frac{n-1}{2} + k\right)! \left(\frac{n-1}{2} - k\right)! (p - k)} \prod_{t=0}^{n-1} \left(p + \frac{n-1}{2} - t\right)$$

$$(n \text{ — нечетное}).$$

25.2.8. $R_{n-1} = \frac{1}{n!} \prod_k (p - k)\, h^n f^{(n)}(\xi) \approx$

$$\approx \frac{1}{n!} \prod_k (p - k)\, \Delta_0^n \quad (x_0 < \xi < x_n),$$

k изменяется в тех же пределах, что и в 25.2.6.

Интерполяционная формула Лагранжа по двум точкам (линейная интерполяция)

25.2.9. $f(x_0 + ph) = (1 - p) f_0 + p f_1 + R_1.$

25.2.10. $R_1(p) \approx 0.125 h^2 f^{(2)}(\xi) \approx 0.125 \Delta^2.$

Интерполяционная формула Лагранжа по трем точкам (квадратичная интерполяция)

25.2.11. $f(x_0 + ph) = A_{-1} f_{-1} + A_0 f_0 + A_1 f_1 + R_2 \approx$

$$\approx \frac{p(p-1)}{2} f_{-1} + (1 - p^2) f_0 + \frac{p(p+1)}{2} f_1.$$

25.2.12. $R_2(p) \approx 0.065 h^3 f^{(3)}(\xi) \approx 0.065 \Delta^3$

$$(|p| \leqslant 1).$$

Интерполяционная формула Лагранжа по четырем точкам

25.2.13. $f(x_0+ph)=A_{-1}f_{-1}+A_0f_0+A_1f_1+A_2f_2+R_3\approx$

$$\approx\frac{-p(p-1)(p-2)}{6}f_{-1}+\frac{(p^2-1)(p-2)}{2}f_0-$$

$$-\frac{p(p+1)(p-2)}{2}f_1+\frac{p(p^2-1)}{6}f_2.$$

25.2.14.

$$R_3(p)\approx\begin{cases}0.024h^4f^{(4)}(\xi)\approx0.024\Delta^4 & (0<p<1),\\ 0.042h^4f^{(4)}(\xi)\approx0.042\Delta^4 & (-1<p<0,\ 1<p<2)\end{cases}$$

$$(x_{-1}<\xi<x_2).$$

Интерполяционная формула Лагранжа по пяти точкам

25.2.15. $f(x_0+ph)=\sum\limits_{i=-2}^{2}A_if_i+R_4\approx$

$$\approx\frac{(p^2-1)\,p(p-2)}{24}f_{-2}-\frac{(p-1)p(p^2-4)}{6}f_{-1}+$$

$$+\frac{(p^2-1)(p^2-4)}{4}f_0-\frac{(p+1)p(p^2-4)}{6}f_1+$$

$$+\frac{(p^2-1)p(p+2)}{24}f_2.$$

25.2.16. $R_4(p)\approx\begin{cases}0.012h^5f^{(5)}(\xi)\approx0.012\Delta^5 & (|p|<1),\\ 0.031h^5f^{(5)}(\xi)\approx0.031\Delta^5 & (1<|p|<2)\end{cases}$

$$(x_{-2}<\xi<x_2).$$

Интерполяционная формула Лагранжа по шести точкам

25.2.17. $f(x_0+ph)=\sum\limits_{i=-2}^{3}A_if_i+R_5\approx$

$$\approx\frac{-p(p^2-1)(p-2)(p-3)}{120}f_{-2}+$$

$$+\frac{p(p-1)(p^2-4)(p-3)}{24}f_{-1}-$$

$$-\frac{(p^2-1)(p^2-4)(p-3)}{12}f_0+$$

$$+\frac{p(p+1)(p^2-4)(p-3)}{12}f_1-$$

$$-\frac{p(p^2-1)(p+2)(p-3)}{24}f_2+\frac{p(p^2-1)(p^2-4)}{120}f_3.$$

25.2.18. $R_5(p)\approx$

$$\approx\begin{cases}0.0049h^6f^{(6)}(\xi)\approx0.0049\Delta^6 & (0<p<1),\\ 0.0071h^6f^{(6)}(\xi)\approx0.0071\,\Delta^6 & (-1<p<0,\ 1<p<2),\\ 0.024h^6f^{(6)}(\xi)\approx0.024\Delta^6 & (-2<p<-1,\ 2<p<3)\end{cases}$$

$$(x_{-2}<\xi<x_3).$$

Интерполяционная формула Лагранжа по семи точкам

25.2.19. $f(x_0+ph)=\sum\limits_{i=-3}^{3}A_if_i+R_6.$

25.2.20. $R_6(p)\approx$

$$\approx\begin{cases}0.0025h^7f^{(7)}(\xi)\approx0.0025\,\Delta^7 & (|p|<1),\\ 0.0046h^7f^{(7)}(\xi)\approx0.0046\,\Delta^7 & (1<|p|<2),\\ 0.019h^7f^{(7)}(\xi)\approx0.019\Delta^7 & (2<|p|<3)\end{cases}$$

$$(x_{-3}<\xi<x_3).$$

Интерполяционная формула Лагранжа по восьми точкам

25.2.21. $f(x_0+ph)=\sum\limits_{i=-3}^{4}A_if_i+R_7.$

25.2.22. $R_7(p)\approx$

$$\approx\begin{cases}0.0011h^8f^{(8)}(\xi)\approx0.0011\Delta^8 & (0<p<1),\\ 0.0014h^8f^{(8)}(\xi)\approx0.0014\Delta^8 & (-1<p<0,\ 1<p<2),\\ 0.0033h^8f^{(8)}(\xi)\approx0.0033\Delta^8 & (-2<p<-1,\ 2<p<3),\\ 0.016h^8f^{(8)}(\xi)\approx0.0016\Delta^8 & (-3<p<-2,\ 3<p<4)\end{cases}$$

$$(x_{-3}<\xi<x_4).$$

Итерационный метод Эйткена

Обозначим через $f(x|x_0,x_1,\ldots,x_k)$ тот единственный многочлен k-й степени, значения которого совпадают со значениями $f(x)$ в точках $x_0,\ldots,x_k$.

25.2.23. $f(x\mid x_0,\ x_1)=\dfrac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix}f_0 & x_0-x\\ f_1 & x_1-x\end{vmatrix},$

$$f(x\mid x_0,\ x_2)=\frac{1}{x_2-x_0}\begin{vmatrix}f_0 & x_0-x\\ f_2 & x_2-x\end{vmatrix},$$

$$f(x\mid x_0,\ x_1,\ x_2)=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix}f(x\mid x_0,\ x_1) & x_1-x\\ f(x\mid x_0,\ x_2) & x_2-x\end{vmatrix},$$

$$f(x\mid x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)=\frac{1}{x_3-x_2}\begin{vmatrix}f(x\mid x_0,\ x_1,\ x_2) & x_2-x\\ f(x\mid x_0,\ x_1,\ x_3) & x_3-x\end{vmatrix}.$$

Разложение в ряд Тейлора

25.2.24. $f(x)=$

$$=f_0+(x-x_0)f_0'+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f_0^{(2)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f_0^{(n)}+R_n.$$

25.2.25. $R_n=\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt=$

$$=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi)\quad(x_0<\xi<x).$$

Интерполяционная формула Ньютона с разделенными разностями

25.2.26. $f(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{n} \pi_{k-1}(x)\,[x_0, x_1, \dots, x_k] + R_n.$

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & [x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f_1 & & [x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & [x_1, x_2] & & [x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
x_2 & f_2 & & [x_1, x_2, x_3] & & \\
 & & [x_2, f_3] & & & \\
x_3 & f_3 & & & &
\end{array}
$$

25.2.27. $R_n(x) = \pi_n(x)\,[x_0, \dots, x_n, x] = \pi_n(x)\,\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

$(x_0 < \xi < x_n)$

(Определение π_n см. в 25.1.6.)

Формула Ньютона для интерполирования «вперед»

25.2.28. $f(x_0 + ph) =$

$$= f_0 + p\Delta_0 + \binom{p}{2}\Delta_0^2 + \dots + \binom{p}{n}\Delta_0^n + R_n.$$

$$
\begin{array}{lllll}
x_0 & f_0 & & & \\
 & & \Delta_0 & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta_0^2 & \\
 & & \Delta_1 & & \Delta_0^3 \\
x_2 & f_2 & & \Delta_1^2 & \\
 & & \Delta_2 & & \\
x_3 & f_3 & & &
\end{array}
$$

25.2.29. $R_n = h^{n+1}\binom{p}{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \approx \binom{p}{n+1}\Delta_0^{n+1}$

$(x_0 < \xi < x_n).$

Соотношения между коэффициентами формул Ньютона и Лагранжа

25.2.30. $\binom{p}{2} = A_{-1}^3(p),$

$$\binom{p}{3} = -A_{-1}^4(p), \quad \binom{p}{4} = A_2^5(1-p).$$

$$\binom{p}{5} = A_3^6(2-p).$$

Формула Эверетта

25.2.31. $f(x_0 + ph) =$

$$= (1-p) f_0 + p f_1 - \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\delta_0^2 + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}\delta_1^2 + \dots - \binom{p+n-1}{2n+1}\delta_0^{2n} + \binom{p+n}{2n+1}\delta_1^{2n} + R_{2n} = (1-p) f_0 + p f_1 + E_2\delta_0^2 +$$

$$+ F_2\delta_1^2 + E_4\delta_0^4 + F_4\delta_1^4 + \dots + R_{2n}.$$

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f_0 & & \delta_0^2 & & \delta_0^4 \\
 & & \delta_{1/2} & & \delta_{1/2}^3 & \\
x_1 & f_1 & & \delta_1^2 & & \delta_1^4
\end{array}
$$

25.2.32. $R_{2n} = h^{2n+2}\binom{p+n}{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi) \approx$

$$\approx \binom{p+n}{2n+2}\left[\frac{\Delta_{-n-1}^{2n+2} + \Delta_{-n}^{2n+2}}{2}\right] \quad (x_{-n} < \xi < x_{n+1}).$$

Соотношения между коэффициентами формул Эверетта и Лагранжа

25.2.33. $E_2 = A_{-1}^4, \quad E_4 = A_{-2}^6, \quad E_6 = A_{-3}^8,$

$F_2 = A_2^4, \quad F_4 = A_3^6, \quad F_6 = A_4^8.$

Формула Эверетта с модифицированными центральными разностями

25.2.34. $f(x_0 + ph) =$

$$= (1-p) f_0 + p f_1 + E_2\delta_{m,0}^2 + F_2\delta_{m,1}^2 + R.$$

25.2.35. $\delta_m^2 = \delta^2 - 0.184\delta^4.$

25.2.36. $R \approx 0.00045\,|\mu\delta_{1/2}^4| + 0.00061\,|\delta_{1/2}^5|.$

25.2.37. $f(x_0 + ph) =$

$$= (1-p) f_0 + p f_1 + E_2\delta_0^2 + F_2\delta_1^2 + E_4\delta_{m,0}^4 + F_4\delta_{m,1}^4 + R.$$

25.2.38. $\delta_m^4 = \delta^4 - 0.207\delta^6 + \dots$

25.2.39. $R \approx 0.000032\,|\mu\delta_{1/2}^6| + 0.000052\,|\delta_{1/2}^7|.$

25.2.40. $f(x_0 + ph) =$

$$= (1-p) f_0 + p f_1 + E_2\delta_0^2 + F_2\delta_1^2 + E_4\delta_0^4 + F_4\delta_1^4 + E_6\delta_{m,0}^6 + F_6\delta_{m,1}^6 + R.$$

25.2.41. $\delta_m^6 = \delta^6 - 0.218\delta^8 + 0.049\delta^{10} + \dots$

25.2.42. $R \approx 0.0000037\,|\mu\delta_{1/2}^8| + \dots$

25.2.43. $f(x_0 + ph) =$

$$= (1-p) f_0 + p f_1 + E_2\delta_{m,0}^2 + F_2\delta_{m,1}^2 + E_4\delta_{m,0}^4 + F_4\delta_{m,1}^4 + R.$$

25.2.44. $\delta_m^2 = \delta^2 - 0.01312\delta^6 + 0.0043\delta^8 - 0.001\delta^{10}.$

25.2.45. $\delta_m^4 = \delta^4 - 0.27827\delta^6 + 0.0685\delta^8 - 0.016\delta^{10}.$

25.2.46. $R \approx 0.00000083\,|\mu\delta_{1/2}^6| + 0.0000094\delta^7.$

Формула Бесселя с модифицированными центральными разностями

25.2.47. $f(x_0+ph)=$

$$=(1-p)f_0+pf_1+B_2(\delta^2_{m,0}+\delta^2_{m,1})+B_3\delta^3_{1/2}+R,$$

$$B_2=\frac{p(p-1)}{4},\quad B_3=\frac{p(p-1)(p-1/2)}{6}.$$

25.2.48. $\delta^2_m=\delta^2-0.184\delta^4.$

25.2.49. $R\approx 0.00045\,|\mu\delta^4_{1/2}|+0.00087\,|\delta^5_{1/2}|.$

Интерполяционная формула Тила

25.2.50. $f(x)=f(x_1)+$

$$+\cfrac{x-x_1}{\rho(x_1,x_2)+\cfrac{x-x_2}{\rho_2(x_1,x_2,x_3)-f(x_1)+\cfrac{x-x_3}{\left(\begin{array}{l}\rho_3(x_1,x_2,x_3,x_4)\\ -\rho(x_1,x_2)+\dots\end{array}\right)}}}$$

Тригонометрическая интерполяция

Формула Гаусса

25.2.51. $f(x)\approx\sum_{k=0}^{2n}f_k\zeta_k(x)=t_n(x).$

25.2.52. $\zeta_k(x)=$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(x-x_0)\dots\sin\frac{1}{2}(x-x_{k-1})}{\sin\frac{1}{2}(x_k-x_0)\dots\sin\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})}\times$$

$$\times\frac{\sin\frac{1}{2}(x_k-x_{k+1})\dots\sin\frac{1}{2}(x-x_{2n})}{\sin\frac{1}{2}(x_k-x_{k+1})\dots\sin\frac{1}{2}(x_k-x_{2n})},$$

$t_n(x)$ — тригонометрический многочлен степени n такой, что

$$t_n(x_k)=f_k\quad(k=0,\ 1,\ \dots,\ 2n).$$

Гармонический анализ

Пусть $x_0=0,\ x_1,\ \dots,\ x_{m-1},\ x_m=2\pi$ — равноотстоящие абсциссы. Тогда

25.2.53. $f(x)\approx\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$

25.2.54. $m=2n+1,$

$$a_k=\frac{2}{2n+1}\sum_{r=0}^{2n}f_r\cos kx_r,$$

$$b_k=\frac{2}{2n+1}\sum_{r=0}^{2n}f_r\sin kx_r\quad(k=0,\ 1,\ \dots,\ n).$$

25.2.55. $m=2n,$

$$a_k=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{2n-1}f_r\cos kx_r\quad(k=0,\ 1,\ \dots,\ n),$$

$$b_k=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{2n-1}f_r\sin kx_r\quad(k=0,\ 1,\ \dots,\ n-1),$$

b_n — произвольное.

Субтабулирование

Предположим, функция $f(x)$ была протабулирована первоначально для значений x, отстоящих друг от друга на интервал длины h. Требуется протабулировать $f(x)$ с интервалом h/m. Эта операция называется субтабулированием. Пусть через Δ и $\bar\Delta$ обозначены разности, соответствующие первоначальному и последующему интервалам. Таким образом, $\bar\Delta_0=f\left(x_0+\frac{h}{m}\right)-f(x_0)$. Предположим, что первоначальные разности 5-го порядка равны нулю; тогда

25.2.56. $\bar\Delta_0=$

$$=\frac{1}{m}\Delta_0+\frac{1-m}{2m^2}\Delta_0^2+\frac{(1-m)(1-2m)}{6m^3}\Delta_0^3+$$

$$+\frac{(1-m)(1-2m)(1-3m)}{24m^4}\Delta_0^4,$$

$$\bar\Delta_0^2=\frac{1}{m^2}\Delta_0^2+\frac{1-m}{m^3}\Delta_0^3+\frac{(1-m)(7-11m)}{12m^4}\Delta_0^4,$$

$$\bar\Delta_0^3=\frac{1}{m^3}\Delta_0^3+\frac{3(1-m)}{2m^4}\Delta_0^4,$$

$$\bar\Delta_0^4=\frac{1}{m^4}\Delta_0^4.$$

Последовательно суммируя полученные разности, можно построить требуемую таблицу. Для $m=10$

25.2.57.

$$\bar\Delta_0=0.1\Delta_0-0.045\Delta_0^2+0.0285\Delta_0^3-0.02066\Delta_0^4,$$

$$\bar\Delta_0^2=0.01\Delta_0^2-0.009\Delta_0^3+0.007725\Delta_0^4,$$

$$\bar\Delta_0^3=0.001\Delta_0^3-0.00135\Delta_0^4,$$

$$\bar\Delta_0^4=0.0001\Delta_0^4.$$

Обратная интерполяция

Найти p при данном $f_p=f(x_0+ph)$.

Линейная обратная интерполяция

25.2.58. $p\approx\frac{f_p-f_0}{f_1-f_0}.$

Квадратичная обратная интерполяция

25.2.59. $(f_1-2f_0+f_{-1})p^2-(f_1-f_{-1})p+2(f_0-f_p)\approx 0.$

Обратная интерполяция путем обращения ряда

Пусть

25.2.60. $f(x_0 + ph) = f_p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k.$

Тогда

25.2.61. $p = \lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \dots,\ \lambda = (f_p - a_0)/a_1.$

25.2.62.

$$c_2 = -\frac{a_2}{a_1},$$

$$c_3 = \frac{-a_3}{a_1} + 2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2,$$

$$c_4 = \frac{-a_4}{a_1} + \frac{5a_2a_3}{a_1^2} - \frac{5a_2^3}{a_1^3},$$

$$c_5 = \frac{-a_5}{a_1} + \frac{6a_2a_4}{a_1^2} + \frac{3a_3^2}{a_1^2} - \frac{21a_2^2a_3}{a_1^3} + \frac{14a_2^4}{a_1^4}.$$

Если обращается формула Ньютона для интерполирования «вперед», то

25.2.63.

$$a_0 = f_0,$$

$$a_1 = \Delta_0 - \frac{\Delta_0^2}{2} + \frac{\Delta_0^3}{3} - \frac{\Delta_0^4}{4} + \dots,$$

$$a_2 = \frac{\Delta_0^2}{2} - \frac{\Delta_0^3}{2} + \frac{11\Delta_0^4}{24} + \dots,$$

$$a_3 = \frac{\Delta_0^3}{6} - \frac{\Delta_0^4}{4} + \dots,$$

$$a_4 = \frac{\Delta_0^4}{24} + \dots,$$

Если обращается формула Эверетта, то

25.2.64.

$$a_0 = f_0,$$

$$a_1 = \delta_{1/2} - \frac{\delta_0^2}{3} - \frac{\delta_1^2}{6} + \frac{\delta_0^4}{20} + \frac{\delta_1^4}{30} + \dots,$$

$$a_2 = \frac{\delta_0^2}{2} - \frac{\delta_0^4}{24} + \dots,$$

$$a_3 = \frac{-\delta_0^2 + \delta_1^2}{6} - \frac{\delta_0^4 + \delta_1^4}{24} + \dots,$$

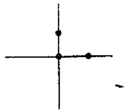
$$a_4 = \frac{\delta_0^4}{24} + \dots,$$

$$a_5 = \frac{-\delta_0^4 + \delta_1^4}{120} + \dots$$

ДВУМЕРНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Интерполяция по трем точкам (линейная)

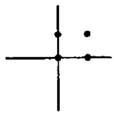
25.2.65.



$$f(x_0 + ph, y_0 + qk) = (1 - p - q) f_{0,0} + p f_{1,0} + q f_{0,1} + O(h^2).$$

Интерполяция по четырем точкам

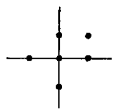
25.2.66.



$$f(x_0 + ph,\ y_0 + qk) = (1-p)(1-q) f_{0,0} + p(1-q) f_{1,0} + q(1-p) f_{0,1} + pq f_{1,1} + O(h^2).$$

Интерполяция по шести точкам

25.2.67.



$$f(x_0 + ph,\ y_0 + qk) = \frac{q(q-1)}{2} f_{0,-1} + \frac{p(p-1)}{2} f_{-1,0} + (1 + pq - p^2 - q^2) f_{0,0} + \frac{p(p - 2q + 1)}{2} f_{1,0} + \frac{q(q - 2p + 1)}{2} f_{0,1} + pq f_{1,1} + O(h^3).$$

25.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Формула Лагранжа

25.3.1. $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k'(x) f_k + R_n'(x)$

(см. 25.2.1).

25.3.2. $l_k'(x) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\pi_n(x)}{(x - x_k)(x - x_j)\pi_n'(x_k)}.$

25.3.3. $R_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_n'(x) + \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!}\frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi),$

$\xi = \xi(x) \quad (x_0 < \xi < x_n).$

Равноотстоящие абсциссы

Три точки

25.3.4. $f'_p = f'(x_0 + ph) =$

$$= \frac{1}{h}\left\{\left(p - \frac{1}{2}\right)f_{-1} - 2pf_0 + \left(p + \frac{1}{2}\right)f_1\right\} + R'_2.$$

Четыре точки

25.3.5. $f'_p = f'(x_0 + ph) =$

$$= \frac{1}{h}\left\{-\frac{3p^2 - 6p + 2}{6}f_{-1} + \frac{3p^2 - 4p - 1}{2}f_0 - \frac{3p^2 - 2p - 2}{2}f_1 + \frac{3p^2 - 1}{6}f_2\right\} + R'_3.$$

Пять точек

25.3.6. $f'_p = f'(x_0 + ph) =$

$$= \frac{1}{h}\left\{\frac{2p^3 - 3p^2 - p + 1}{12}f_{-2} - \frac{4p^3 - 3p^2 - 8p + 4}{6}f_{-1} + \frac{2p^3 - 5p}{2}f_0 - \frac{4p^3 + 3p^2 - 8p - 4}{6}f_1 + \frac{2p^3 + 3p^2 - p - 1}{12}f_2\right\} + R'_4.$$

Числовые значения коэффициентов формул дифференцирования см. в табл. 25.2.

Формулы Маркова

(Формула Ньютона для дифференцирования вперед.)

25.3.7. $$f'(a_0 + ph) = \frac{1}{h}\left[\Delta_0 + \frac{2p - 1}{2}\Delta_0^2 + \frac{3p^2 - 6p + 2}{6}\Delta_0^3 + \dots + \frac{d}{dp}\binom{p}{n}\Delta_0^n\right] + R'_n.$$

25.3.8. $$R'_n = h^n f^{(n+1)}(\xi)\frac{d}{dp}\binom{p}{n+1} + h^{n+1}\binom{p}{n+1}\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (a_0 < \xi < a_n).$$

25.3.9. $$hf'_0 = \Delta_0 - \frac{1}{2}\Delta_0^2 + \frac{1}{3}\Delta_0^3 - \frac{1}{4}\Delta_0^4 + \dots$$

25.3.10. $$h^2 f_0^{(2)} = \Delta_0^2 - \Delta_0^3 + \frac{11}{12}\Delta_0^4 - \frac{5}{6}\Delta_0^5 + \dots$$

25.3.11. $$h^3 f_0^{(3)} = \Delta_0^3 - \frac{3}{2}\Delta_0^4 + \frac{7}{4}\Delta_0^5 - \frac{15}{8}\Delta_0^6 + \dots$$

25.3.12. $$h^4 f_0^{(4)} = \Delta_0^4 - 2\Delta_0^5 + \frac{17}{6}\Delta_0^6 - \frac{7}{2}\Delta_0^7 + \dots$$

25.3.13. $$h^5 f_0^{(5)} = \Delta_0^5 - \frac{5}{2}\Delta_0^6 + \frac{25}{6}\Delta_0^7 - \frac{35}{6}\Delta_0^8 + \dots$$

Формула Эверетта

25.3.14. $hf'(x_0 + ph) \approx$

$$\approx -f_0 + f_1 - \frac{3p^2 - 6p + 2}{6}\delta_0^2 + \frac{3p^2 - 1}{6}\delta_1^2 - \frac{5p^4 - 20p^3 + 15p^2 + 10p - 6}{120}\delta_0^4 + \frac{5p^4 - 15p^2 + 4}{120}\delta_1^4 + \dots - \left[\binom{p + n - 1}{2n + 1}\right]'\delta_0^{2n} + \left[\binom{p + n}{2n + 1}\right]'\delta_1^{2n}.$$

25.3.15. $$hf'_0 \approx -f_0 + f_1 - \frac{1}{3}\delta_0^2 - \frac{1}{6}\delta_1^2 + \frac{1}{20}\delta_0^4 + \frac{1}{30}\delta_1^4.$$

Выражение разностей через производные

25.3.16. $$\Delta_0 \approx hf'_0 + \frac{h^2}{2!}f_0^{(2)} + \frac{h^3}{3!}f_0^{(3)} + \frac{h^4}{4!}f_0^{(4)} + \frac{h^5}{5!}f_0^{(5)}.$$

25.3.17. $$\Delta_0^2 \approx h^2 f_0^{(2)} + h^3 f_0^{(3)} + \frac{7}{12}h^4 f_0^{(4)} + \frac{1}{4}h^5 f_0^{(5)}.$$

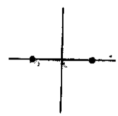
25.3.18. $$\Delta_0^3 \approx h^3 f_0^{(3)} + \frac{3}{2}h^4 f_0^{(4)} + \frac{5}{4}f_0^{(5)}.$$

25.3.19. $$\Delta_0^4 \approx h^4 f_0^{(4)} + 2h^5 f_0^{(5)}.$$

25.3.20. $$\Delta_0^5 \approx h^5 f_0^{(5)}.$$

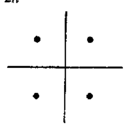
Частные производные

25.3.21.



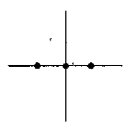
$$\frac{\partial f_{0,0}}{\partial x} = \frac{1}{2h}(f_{1,0} - f_{-1,0}) + O(h^2).$$

25.3.22.



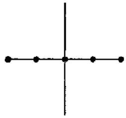
$$\frac{\partial f_{0,0}}{\partial x} = \frac{1}{4h}(f_{1,1} - f_{-1,1} + f_{1,-1} - f_{-1,-1}) + O(h^2).$$

25.3.23.



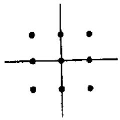
$$\frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}(f_{1,0} - 2f_{0,0} + f_{-1,0}) + O(h^2).$$

25.3.24.



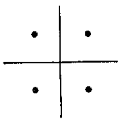
$$\frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial x^2} = \frac{1}{12h^2}(-f_{2,0} + 16f_{1,0} - 30f_{0,0} + 16f_{-1,0} - f_{-2,0}) + O(h).$$

25.3.25.



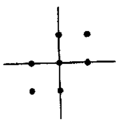
$$\frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial x^2} = \frac{1}{3h^2}(f_{1,1} - 2f_{0,1} + f_{-1,1} + f_{1,0} - 2f_{0,0} + f_{-1,0} + f_{1,-1} - 2f_{0,-1} + f_{-1,-1}) + O(h^2).$$

25.3.26.



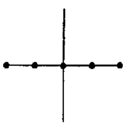
$$\frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4h^2}(f_{1,1} - f_{1,-1} - f_{-1,1} + f_{-1,-1}) + O(h^2).$$

25.3.27.



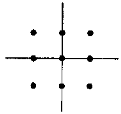
$$\frac{\partial^2 f_{0,0}}{\partial x\,\partial y} = \frac{-1}{2h^2}(f_{1,0} + f_{-1,0} + f_{0,1} + f_{0,-1} - 2f_{0,0} - f_{1,1} - f_{-1,-1}) + O(h^2).$$

25.3.28.



$$\frac{\partial^4 f_{0,0}}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4}(f_{2,0} - 4f_{1,0} + 6f_{0,0} - 4f_{-1,0} + f_{-2,0}) + O(h^2).$$

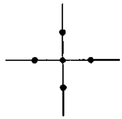
25.3.29.



$$\frac{\partial^4 f_{0,0}}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{h^4}(f_{1,1} + f_{-1,1} + f_{1,-1} + f_{-1,-1} - 2f_{1,0} - 2f_{-1,0} - 2f_{0,1} - 2f_{0,-1} + 4f_{0,0}) + O(h^2).$$

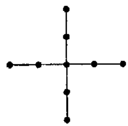
Оператор Лапласа

25.3.30.



$$\nabla^2 u_{0,0} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{0,0} = \frac{1}{h^2}(u_{1,0} + u_{0,1} + u_{-1,0} + u_{0,-1} - 4u_{0,0}) + O(h^2).$$

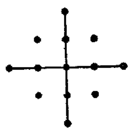
23.3.31.



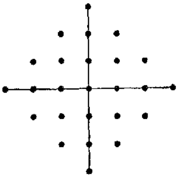
$$\nabla^2 u_{0,0} = \frac{1}{12h^2}[-60u_{0,0} + 16(u_{1,0} + u_{0,1} + u_{-1,0} + u_{0,-1}) - (u_{2,0} + u_{0,2} + u_{-2,0} + u_{0,-2})] + O(h^4).$$

Бигармонический оператор

23.3.32.



$$\nabla^4 u_{0,0} = \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{0,0} = \frac{1}{h^4}[20u_{0,0} - 8(u_{1,0} + u_{0,1} + u_{-1,0} + u_{0,-1}) + 2(u_{1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,1} + u_{-1,-1}) + (u_{0,2} + u_{2,0} + u_{-2,0} + u_{0,-2})] + O(h^2).$$



25.3.33. $$\nabla^4 u_{0,0} = \frac{1}{6h^4}[-(u_{0,3}+u_{0,-3}+u_{3,0}+u_{-3,0}) + 14(u_{0,2}+u_{0,-2}+u_{2,0}+u_{-2,0}) - 77(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}) + 184u_{0,0} + 20(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{-1,1}+u_{-1,-1}) - (u_{1,2}+u_{2,1}+u_{1,-2}+u_{2,-1}+u_{-1,2}+u_{-2,1}+u_{-1,-2}+u_{-2,-1})] + O(h^4).$$

25.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Формула трапеций

25.4.1. $$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_0+f_1) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(t-x_0)(x_1-t)f''(t)\,dt = \frac{h}{2}(f_0+f_1) - \frac{h^3}{12}f''(\xi) \quad (x_0<\xi<x_1).$$

25.4.2. $$\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx = h\left[\frac{f_0}{2}+f_1+\ldots+f_{m-1}+\frac{f_m}{2}\right] - \frac{mh^3}{12}f''(\xi).$$

Остаточный член формулы трапеций для периодических функций

Если $f(x)$ — периодическая функция и имеет k непрерывных производных и если интеграл берется на интервале, равном периоду, то остаточный член R формулы трапеций удовлетворяет неравенству

25.4.3. $|R| \leqslant \frac{C}{m^k}$, где $C = \text{const}$.

Модифицированная формула трапеций

25.4.4. $$\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx = h\left[\frac{f_0}{2}+f_1+\ldots+f_{m-1}+\frac{f_m}{2}\right] + \frac{h}{24}[-f_{-1}+f_1+f_{m-1}-f_{m+1}] + \frac{11m}{720}h^5 f^{(4)}(\xi).$$

Формула Симпсона

25.4.5. $$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f_0+4f_1+f_2] + \frac{1}{6}\int_{x_0}^{x_1}(x_0-t)^2(x_1-t)f^{(3)}(t)\,dt + \frac{1}{6}\int_{x_1}^{x_2}(x_2-t)^2(x_1-t)f^{(3)}(t)\,dt = \frac{h}{3}[f_0+4f_1+f_2] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi).$$

25.4.6. $$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4(f_1+f_3+\ldots+f_{2n-1}) + 2(f_2+f_4+\ldots+f_{2n-2}) + f_{2n}] - \frac{nh^5}{90}f^{(4)}(\xi).$$

Формула Эйлера — Маклорена

25.4.7. $$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = h\left[\frac{f_0}{2}+f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+\frac{f_n}{2}\right] - \frac{B_2}{2!}h^2(f'_n-f'_0) - \ldots - \frac{B_{2k}h^{2k}}{(2k)!}[f_n^{(2k-1)} - f_0^{(2k-1)}] + R_{2k},$$

$$R_{2k} = \frac{\theta_n B_{2k+2}h^{2k+3}}{(2k+2)!}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_n}|f^{(2k+2)}(x)| \quad (-1\leqslant\theta\leqslant 1).$$

(Числа Бернулли B_{2k} см. в гл. 23.)

Если $f^{(2k+2)}(x)$ и $f^{(2k+4)}(x)$ не меняют знак на интервале $x_0<x<x_n$, то $|R_{2k}|$ меньше, чем первый отброшенный член. Если $f^{(2k+2)}(x)$ не меняет знак на интервале $x_0<x<x_n$, то $|R_{2k}|$ меньше, чем удвоенный первый отброшенный член.

Формула Лагранжа

25.4.8. $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n}(L_i^{(n)}(b) - L_i^{(n)}(a))f'_i + R_n$$

(см. 25.2.1).

25.4.9. $L_i^{(n)}(x) = \dfrac{1}{\pi_n'(x_i)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \dfrac{\pi_n(t)}{t - x_i}\, dt = \int_{x_0}^{x} l_i(t)\, dt.$

25.4.10. $R_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\int_a^b \pi_n(x) f^{(n+1)}(\xi(x))\, dx.$

Равноотстоящие абсциссы

25.4.11. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_k} f(x)\, dx =$

$$= \frac{1}{h^n} \sum_{i=0}^{n} f_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_{x_0}^{x_k} \frac{\pi_n(x)}{x - x_i}\, dx + R_n.$$

25.4.12. $\displaystyle\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)\, dx = h \sum_{i=-\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A_i(m) f_i + R_n.$

(Значения $A_i(m)$ см. в табл. 25.3.)

Формулы Ньютона — Котеса (замкнутый тип)

(Формулы трапеций и Симпсона см. в 25.4.1—25.4.6.)

25.4.13. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_3} f(x)\, dx =$

$$= \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3f^{(4)}(\xi)\, h^5}{80}.$$

25.4.14. (Формула Боде)

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\, dx = \frac{2h}{45} (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 +$$

$$+ 32f_3 + 7f_4) - \frac{8f^{(6)}(\xi)\, h^7}{945}.$$

25.4.15. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_5} f(x)\, dx =$

$$= \frac{5h}{288} (19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 +$$

$$+ 75f_4 + 19f_5) - \frac{275f^{(6)}(\xi)\, h^7}{12096}.$$

25.4.16. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_6} f(x)\, dx =$

$$= \frac{h}{140} (41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 +$$

$$+ 27f_4 + 216f_5 + 41f_6) - \frac{9f^{(8)}(\xi)\, h^9}{1400}.$$

25.4.17. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_7} f(x)\, dx =$

$$= \frac{7h}{17280} (751f_0 + 3577f_1 + 1323f_2 + 2989f_3 + 2989f_4 +$$

$$+ 1323f_5 + 3577f_6 + 751f_7) - \frac{8183f^{(8)}(\xi)\, h^9}{518400}.$$

25.4.18. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_8} f(x)\, dx =$

$$= \frac{4h}{14175} (989f_0 + 5888f_1 - 928f_2 +$$

$$+ 10496f_3 - 4540f_4 + 10496f_5 - 928f_6 +$$

$$+ 5888f_7 + 989f_8) - \frac{2368}{467775} f^{(10)}(\xi)\, h^{11}.$$

25.4.19. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_9} f(x)\, dx = \frac{9h}{89600} \{2857(f_0 + f_9) +$

$$+ 15741(f_1 + f_8) + 1080(f_2 + f_7) + 19344(f_3 + f_6) +$$

$$+ 5778(f_4 + f_5)\} - \frac{173}{14620} f^{(10)}(\xi)\, h^{11}.$$

25.4.20. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_{10}} f(x)\, dx = \frac{5h}{299376} \{16067(f_0 + f_{10}) +$

$$+ 106300(f_1 + f_9) - 48525(f_2 + f_8) +$$

$$+ 272400(f_3 + f_7) - 260550(f_4 + f_6) + 427368f_5\} -$$

$$- \frac{1346350}{326918592} f^{(12)}(\xi) h^{13}.$$

Формулы Ньютона — Котеса (открытый тип)

25.4.21. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_3} f(x)\, dx = \frac{3h}{2} (f_1 + f_2) + \frac{f^{(2)}(\xi) h^3}{4}.$

25.4.22. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_4} f(x)\, dx =$

$$= \frac{4h}{3} (2f_1 - f_2 + 2f_3) + \frac{28f^{(4)}(\xi) h^5}{90}.$$

25.4.23. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_5} f(x)\, dx =$

$$= \frac{5h}{24} (11f_1 + f_2 + f_3 + 11f_4) + \frac{95f^{(4)}(\xi) h^5}{144}.$$

25.4.24. $$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{6h}{20}(11f_1 - 14f_2 + 26f_3 - 14f_4 + 11f_5) + \frac{41 f^{(6)}(\xi)h^7}{140}.$$

25.4.25. $$\int_{x_0}^{x_7} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{7h}{1440}(611f_1 - 453f_2 + 562f_3 + 562f_4 -$$

$$- 453f_5 + 611f_6) + \frac{5257}{8640} f^{(6)}(\xi)h^7.$$

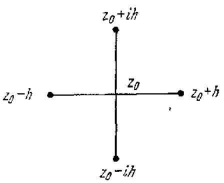
25.4.26. $$\int_{x_0}^{x_8} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{8h}{945}(460f_1 - 954f_2 + 2196f_3 - 2459f_4 +$$

$$+ 2196f_5 - 954f_6 + 460f_7) + \frac{3956}{14175} f^{(8)}(\xi)h^9.$$

Формула интегрирования аналитических функций по пяти точкам

25.4.27.



$$\int_{z_0-h}^{z_0+h} f(z)\,dz =$$

$$= \frac{h}{15}\{24f(z_0) + 4[f(z_0+h) + f(z_0-h)] -$$

$$- [f(z_0+ih) + f(z_0-ih)]\} + R.$$

$$|R| \leqslant \frac{|h|^7}{1890} \operatorname*{Max}_{z\in S} |f^{(6)}(z)|,$$

S — квадрат с вершинами $z_0 + i^k h\ (k = 0, 1, 2, 3)$; h может быть комплексным.

Квадратурная формула Чебышева с равными весами

25.4.28. $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + R_n.$$

Абсцисса x_i является i-м нулем полиномиальной части выражения

$$x^n \exp\left[\frac{-n}{2\cdot 3x^2} - \frac{n}{4\cdot 5x^4} - \frac{n}{6\cdot 7x^6} - \ldots\right]$$

(значения x_i см. в табл. 25.5).

Для $n = 8$ и $n \geqslant 10$ некоторые из этих нулей являются комплексными.

Остаточный член:

$$R_n = \int_{-1}^{1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,dx -$$

$$- \frac{2}{n(n+1)!}\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} f^{(n+1)}(\xi_i),$$

где $\xi = \xi(x)$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \xi \leqslant x$ и $0 \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Квадратурные формулы типа Гаусса (Ортогональные многочлены см. в гл. 22.)

Формула Гаусса

25.4.29. $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + R_n.$$

Соответствующие этой формуле ортогональные многочлены — многочлены Лежандра $P_n(x)$, $P_n(1) = 1$.

Абсциссы: x_i — i-й нуль многочлена $P_n(x)$.

Весовые коэффициенты: $w_i = \dfrac{2}{(1 - x_i^2)(P_n'(x_i))^2}$.

(Значения x_i и w_i см. в табл. 25.4.)

$$R_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \quad (-1 < \xi < 1).$$

Формула Гаусса для произвольного интервала

25.4.30. $$\int_{a}^{b} f(y)\,dy = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(y_i) + R_n,$$

$$y = \left(\frac{b-a}{2}\right)x_i + \left(\frac{b+a}{2}\right).$$

Соответствующие ортогональные многочлены: $P_n(x)$, $P_n(1) = 1$. Абсциссы: x_i — i-й нуль многочлена $P_n(x)$.

Весовые коэффициенты:

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)(P_n'(x_i))^2}.$$

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3 2^{2n+1}} f^{(2n)}(\xi).$$

Квадратурная формула Радо

25.4.31. $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n^2} f_{-1} + \sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i) + R_n.$$

Соответствующие многочлены: $\dfrac{P_{n-1}(x) + P_n(x)}{x+1}$.

Абсциссы: x_i — i-й нуль многочлена

$$\frac{P_{n-1}(x)+P_n(x)}{x+1}.$$

Весовые коэффициенты:

$$w_i=\frac{1}{n^2}\frac{1-x_i}{[P_{n-1}(x_i)]^2}=\frac{1}{1-x_i}\frac{1}{[P'_{n-1}(x_i)]^2}.$$

Остаточный член:

$$R_n=\frac{2^{2n-1}n}{[(2n-1)!]^3}[(n-1)!]^4 f^{(2n-1)}(\xi)$$
$$(-1<\xi<1).$$

Квадратурная формула Лобатто

25.4.32. $$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}[f(1)+f(-1)]+\sum_{i=2}^{n-1}w_if(x_i)+R_n.$$

Соответствующие многочлены: $P'_{n-1}(x)$.
Абсциссы: x_i — $(i-1)$-й нуль многочлена $P'_{n-1}(x)$.
Весовые коэффициенты:

$$w_i=\frac{2}{n(n-1)[P_{n-1}(x_i)]^2}\quad(x_i\neq\pm1).$$

(Значения x_i и w_i см. в табл. 25.6.)
Остаточный член:

$$R_n=\frac{-n(n-1)^3 2^{2n-1}[(n-2)!]^4}{(2n-1)[(2n-2)!]^3}f^{(2n-2)}(\xi)$$
$$(-1<\xi<1).$$

25.4.33. $$\int_0^1 x^kf(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}w_if(x_i)+R_n.$$

Соответствующие ортогональные многочлены:

$$q_n(x)=\sqrt{k+2n+1}\,P_n^{(k,0)}(1-2x).$$

(Многочлены Якоби $P_n^{(k,0)}$ см. в гл. 22.)

Абсциссы:

$$x_i\text{ — }i\text{-й нуль } q_n(x).$$

Весовые коэффициенты:

$$w_i=\left\{\sum_{j=0}^{n-1}[q_j(x_i)]^2\right\}^{-1}.$$

(Значения x_i и w_i см. в табл. 25.8.)
Остаточный член:

$$R_n=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(k+2n+1)(2n)!}\left[\frac{n!(k+n)!}{(k+2n)!}\right]^2\quad(0<\xi<1).$$

25.4.34. $$\int_0^1 f(x)\sqrt{1-x}\,dx=\sum_{i=1}^{n}w_if(x_i)+R_n.$$

Соответствующие ортогональные многочлены:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}P_{2n+1}(\sqrt{1-x}),\ P_{2n+1}(1)=1.$$

Абсциссы: $x_i=1-\xi_i^2$, где ξ_i — i-й положительный нуль многочлена $P_{2n+1}(x)$.
Весовые коэффициенты: $w_i=2\xi_i^2w_i^{(2n+1)}$, где $w_i^{(2n+1)}$ являются весовыми коэффициентами формулы Гаусса порядка $2n+1$.
Остаточный член:

$$R_n=\frac{2^{4n+3}[(2n+1)!]^4}{(2n)!(4n+3)[(4n+2)!]^2}f^{(2n)}(\xi)\ (0<\xi<1).$$

25.4.35. $$\int_a^b f(y)\sqrt{b-y}\,dy=(b-a)^{3/2}\sum_{i=1}^{n}w_if(y_i),$$
$$y_i=a+(b-a)x_i.$$

Соответствующие ортогональные многочлены:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}P_{2n+1}(\sqrt{1-x}),\ P_{2n+1}(1)=1.$$

Абсциссы: $x_i=1-\xi_i^2$, где ξ_i — i-й положительный нуль многочлена $P_{2n+1}(x)$.

Весовые коэффициенты: $w_i=2\xi_i^2w_i^{(2n+1)}$, где $w_i^{(2n+1)}$ являются весовыми коэффициентами формулы Гаусса порядка $2n+1$.

25.4.36. $$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}\,dx=\sum_{i=1}^{n}w_if(x_i)+R_n.$$

Соответствующие ортогональные многочлены:

$$P_{2n}(\sqrt{1-x}),\ P_{2n}(1)=1.$$

Абсциссы: $x_i=1-\xi_i^2$, где ξ_i — i-й положительный нуль многочлена $P_{2n}(x)$.

Весовые коэффициенты: $w_i=2w_i^{(2n)}$, $w_i^{(2n)}$ — весовые коэффициенты формулы Гаусса порядка $2n$.
Остаточный член:

$$R_n=\frac{2^{4n+1}}{4n+1}\frac{[(2n)!]^3}{[(4n)!]^2}f^{(2n)}(\xi)\quad(0<\xi<1).$$

25.4.37. $$\int_a^b\frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}\,dy=\sqrt{b-a}\sum_{i=1}^{n}w_if(y_i)+R_n,$$
$$y_i=a+(b-a)x_i.$$

Соответствующие ортогональные многочлены:

$$P_{2n}(\sqrt{1-x}),\ P_{2n}(1)=1.$$

Абсциссы: $x_i=1-\xi_i^2$, где ξ_i — i-й положительный нуль многочлена $P_{2n}(x)$.

Весовые коэффициенты: $w_i=2w_i^{(2n)}$, $w_i^{(2n)}$ — весовые коэффициенты формулы Гаусса порядка $2n$.

25.4.38. $$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sum_{i=1}^{n}w_if(x_i)+R_n.$$

Соответствующие ортогональные многочлены: многочлены Чебышева первого рода $T_n(x)$, $T_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Абсциссы:

$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}.$$

Весовые коэффициенты:

$$w_i = \frac{\pi}{n}.$$

Остаточный член:

$$R_n = \frac{\pi}{(2n)!\,2^{2n-1}} f^{(2n)}(\xi) \quad (-1<\xi<1).$$

25.4.39. $$\int_a^b \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{(y-a)(b-y)}} = \sum_{i=1}^n w_i f(y_i) + R_n,$$

$$y_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,x_i.$$

Соответствующие ортогональные многочлены:

$$T_n(x),\ T_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Абсциссы:

$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}.$$

Весовые коэффициенты:

$$w_i = \frac{\pi}{n}.$$

25.4.40. $$\int_{-1}^1 f(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + R_n.$$

Соответствующие ортогональные многочлены: многочлены Чебышева второго рода

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}.$$

Абсциссы:

$$x_i = \cos\frac{i}{n+1}\pi.$$

Весовые коэффициенты:

$$w_i = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\frac{i}{n+1}\pi.$$

Остаточный член:

$$R_n = \frac{\pi}{(2n)!\,2^{2n+1}} f^{(2n)}(\xi) \quad (-1<\xi<1).$$

25.4.41. $$\int_a^b \sqrt{(y-a)(b-y)}\,f(y)\,dy = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^n w_i f(y_i) + R_n,$$

$$y_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,x_i.$$

Соответствующие ортогональные многочлены:

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}.$$

Абсциссы:

$$x_i = \cos\frac{i}{n+1}\pi$$

Весовые коэффициенты:

$$w_i = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\frac{i}{n+1}\pi.$$

25.4.42. $$\int_0^1 f(x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + R_n.$$

Соответствующие ортогональные многочлены:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\,T_{2n+1}(\sqrt{x}).$$

Абсциссы:

$$x_i = \cos^2\frac{2i-1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Весовые коэффициенты:

$$w_i = \frac{2\pi}{2n+1}\,x_i.$$

Остаточный член:

$$R_n = \frac{\pi}{(2n)!\,2^{4n+1}} f^{(2n)}(\xi) \quad (0<\xi<1).$$

25.4.43. $$\int_a^b f(x)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx = (b-a)\sum_{i=1}^n w_i f(y_i) + R_n,$$

$$y_i = a + (b-a)\,x_i.$$

Соответствующие ортогональные многочлены:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\,T_{2n+1}(\sqrt{x}).$$

Абсциссы:

$$x_i = \cos^2\frac{2i-1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Весовые коэффициенты:

$$w_i = \frac{2\pi}{2n+1}\,x_i.$$

25.4.44. $\int\limits_0^1 \ln x f(x)\,dx = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + R_n.$

Соответствующие ортогональные многочлены: многочлены, ортогональные с весом ($-\ln x$).
Абсциссы: см. табл. 25.7.
Весовые коэффициенты: см. табл. 25.7.

25.4.45. $\int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + R_n.$

Соответствующие ортогональные многочлены: многочлены Лагерра $L_n(x)$.
Абсциссы: x_i — i-й нуль многочлена $L_n(x)$.
Весовые коэффициенты:

$$w_i = \frac{x_i}{(n+1)^2 [L_{n+1}(x_i)]^2}.$$

(Значения x_i и w_i см. в табл. 25.9.)
Остаточный член:

$$R_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \quad (0 < \xi < \infty).$$

25.4.46. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + R_n.$

Соответствующие ортогональные многочлены: многочлены Эрмита $H_n(x)$.
Абсциссы: x_i — i-й нуль многочлена $H_n(x)$.
Весовые коэффициенты:

$$w_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 [H_{n-1}(x_i)]^2}.$$

(Значения x_i и w_i см. в табл. 25.10.)
Остаточный член:

$$R_n = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi) \quad (-\infty < \xi < \infty).$$

Квадратурная формула Филона [*]

25.4.47. $\int\limits_{x_0}^{x_{2n}} f(x) \cos(tx)\,dx =$

$$= h\Big[\alpha(th)\left(f_{2n} \sin(tx_{2n}) - f_0 \sin(tx_0)\right) + \beta(th)\, C_{2n} + \gamma(th)\, C_{2n-1} + \frac{2}{45}\, th^4 S'_{2n-1}\Big] - R_n.$$

25.4.48. $C_{2n} = \sum\limits_{i=0}^{n} f_{2i} \cos(tx_{2i}) - \frac{1}{2}\left[f_{2n} \cos(tx_{2n}) + f_0 \cos(tx_0)\right].$

25.4.49. $C_{2n-1} = \sum\limits_{i=0}^{n} f_{2i-1} \cos(tx_{2i-1}).$

25.4.50. $S'_{2n-1} = \sum\limits_{i=0}^{n} f^{(3)}_{2i-1} \sin(tx_{2i-1}).$

25.4.51. $R_n = \frac{1}{90}\, nh^5 f^{(4)}(\xi) + O(th^7).$

25.4.52. $\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} + \frac{\sin 2\theta}{2\theta^2} - \frac{2\sin^2\theta}{\theta^3},$

$$\beta(\theta) = 2\left(\frac{1+\cos^2\theta}{\theta^2} - \frac{\sin 2\theta}{\theta^3}\right),$$

$$\gamma(\theta) = 4\left(\frac{\sin\theta}{\theta^3} - \frac{\cos\theta}{\theta^2}\right).$$

Для малых θ имеем

25.4.53. $\alpha = \frac{2\theta^3}{45} - \frac{2\theta^5}{315} + \frac{2\theta^7}{4725} - \ldots,$

$$\beta = \frac{2}{3} + \frac{2\theta^2}{15} - \frac{4\theta^4}{105} + \frac{2\theta^6}{567} - \ldots,$$

$$\gamma = \frac{4}{3} - \frac{2\theta^2}{15} + \frac{\theta^4}{210} - \frac{\theta^6}{11340} + \ldots$$

25.4.54. $\int\limits_{x_0}^{x_{2n}} f(x) \sin(tx)\,dx =$

$$= h\Big[\alpha(th)\left(f_0 \cos(tx_0) - f_{2n} \cos(tx_{2n})\right) + \beta S_{2n} + \gamma S_{2n-1} + \frac{2}{45}\, th^4 C'_{2n-1}\Big] - R_n.$$

25.4.55. $S_{2n} = \sum\limits_{i=0}^{n} f_{2i} \sin(tx_{2i}) - \frac{1}{2}\left[f_{2n} \sin(tx_{2n}) + f_0 \sin(tx_0)\right].$

25.4.56. $S_{2n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{2i-1} \sin(tx_{2i-1}).$

25.4.57. $C'_{2n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} f^{(3)}_{2i-1} \cos(tx_{2i-1}).$

Значения α, β, γ см. в табл. 25.11.

Повторные интегралы

25.4.58. $\int\limits_0^x dt_n \int\limits_0^{t_n} dt_{n-1} \ldots \int\limits_0^{t_3} dt_2 \int\limits_0^{t_2} f(t_1)\,dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$

---

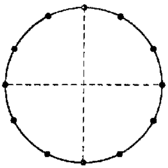
[*] По поводу некоторых трудностей, связанных с применением этой формулы, см. работу: Tukey J. W. On Numerical, Approximation/Ed. R. E. Langer. — Madison, 1959, p. 400.

25.4.59.
$$\int_a^x dt_n \int_a^{t_n} dt_{n-1} \ldots \int_a^{t_3} dt_2 \int_a^{t_2} f(t_1)\,dt_1 = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 t^{n-1} f(x-(x-a)\,t)\,dt.$$

МНОГОМЕРНЫЕ КВАДРАТУРЫ

Окружность круга Г: $x^2+y^2=h^2$

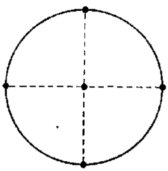
25.4.60.



$$\frac{1}{2\pi h}\int_\Gamma f(x, y)\,ds = \frac{1}{2m}\sum_{n=1}^{2m} f\left(h\cos\frac{\pi n}{m},\ h\sin\frac{\pi n}{m}\right) + O(h^{2m-2}).$$

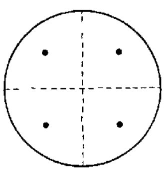
Круг C: $x^2+y^2 \leqslant h^2$

25.4.61.

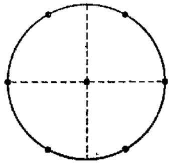


$$\frac{1}{\pi h^2}\iint_C f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i, y_i) + R.$$

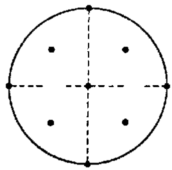
(x_i, y_i)	w_i	
$(0, 0)$	$1/2$	$R = O(h^4)$
$(\pm h, 0)$, $(0, \pm h)$	$1/8$	



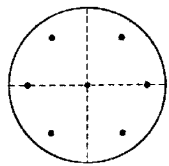
(x_i, y_i)	w_i	
$(\pm h/2, \pm h/2)$	$1/4$	$R = O(h^4)$



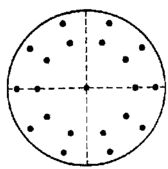
(x_i, y_i)	w_i	
$(0, 0)$	$1/2$	
$(\pm h, 0)$	$1/12$	$R = O(h^4)$
$(\pm h/2, \pm(h/2)\cdot\sqrt{3})$	$1/12$	



x_i, y_i	w_i	
$(0, 0)$	$1/6$	
$(\pm h, 0)$	$1/24$	$R = O(h^6)$
$(0, \pm h)$	$1/24$	
$(\pm h/2, \pm h/2)$	$1/6$	



(x_i, y_i)	w_i	
$(0, 0)$	$1/4$	
$(\pm\sqrt{2/3}h, 0)$	$1/8$	$R = O(h^6)$
$(\pm\sqrt{1/6}\,h, \pm(h/2)\cdot\sqrt{2})$	$1/8$	

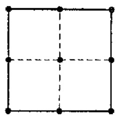


(x_i, y_i)	w_i
$(0, 0)$	$1/9$
$\left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{6}}{10}}\,h\cos\frac{2\pi k}{10},\ \sqrt{\frac{6-\sqrt{6}}{10}}\,h\sin\frac{2\pi k}{10}\right)$	$\frac{16+\sqrt{6}}{360}$
$(k = 1, \ldots, 10)$	
$\left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{6}}{10}}\,h\cos\frac{2\pi k}{10},\ \sqrt{\frac{6+\sqrt{6}}{10}}\,h\sin\frac{2\pi k}{10}\right)$	$\frac{16-\sqrt{6}}{360}$

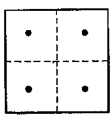
$R = O(h^{10})$.

Квадрат *) S: $|x| \leqslant h$, $|y| \leqslant h$

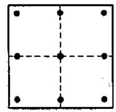
25.4.62. $$\frac{1}{4h^2}\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i, y_i) + R.$$



(x_i, y_i)	w_i	
$(0, 0)$	$4/9$	
$(\pm h, \pm h)$	$1/36$	$R = O(h^4)$
$(\pm h, 0)$	$1/9$	
$(0, \pm h)$	$1/9$	



(x_i, y_i)	w_i	
$(\pm h\sqrt{1/3}, \pm h\sqrt{1/3})$	$1/4$	$R = O(h^4)$

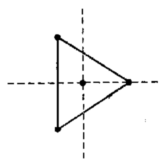


(x_i, y_i)	w_i	
$(0, 0)$	$16/81$	
$(\pm\sqrt{(3/5)}\,h, \pm\sqrt{(3/5)}\,h)$	$25/324$	
$(0, \pm\sqrt{(3/5)}\,h)$	$10/81$	$R = O(h^6)$
$(\pm\sqrt{(3/5)}\,h, 0)$	$10/81$	

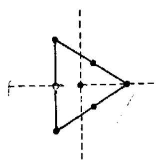
Равносторонний треугольник T

Радиус описанного круга равен h.

25.4.63. $$\frac{1}{\frac{3}{4}\sqrt{3}h^2}\iint\limits_T f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i, y_i) + R.$$



(x_i, y_i)	w_i	
$(0, 0)$	$3/4$	$R = O(h^3)$
$(h, 0)$	$1/12$	
$-(h/2, \pm h\sqrt{3}/2)$	$1/12$	



*) Для таких областей, как квадрат, куб, цилиндр и т.д., являющихся декартовым произведением областей более низкой размерности, можно всегда построить кубатурные формулы путем «перемножения» формул меньшей размерности. Так, если

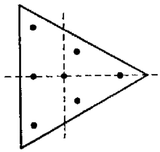
$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

— одномерная формула, то выражение

$$\int_0^1\int_0^1 f(x, y)\,dx\,dy \approx \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j f(x_i, x_j)$$

является двумерной формулой.

(x_i, y_i)	w_i	
$(0, 0)$	27/60	
$(h, 0)$	3/60	$R = O(h^4)$
$(-h/2, \pm h\sqrt{3}/2)$	3/60	
$(-h/2, 0)$	8/60	
$(h/4, \pm h\sqrt{3}/4)$	8/60	

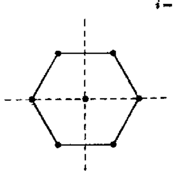


(x_1, y_1)	w_1	
$(0, 0)$	270/1200	
$\left(\left(\frac{\sqrt{15}+1}{7}\right) h, 0\right)$; $\left(\left(\frac{-\sqrt{15}+1}{14}\right) h, \pm\left(\frac{\sqrt{15}+1}{14}\right)\sqrt{3}h\right)$	$\frac{155-\sqrt{15}}{1200}$	$R = O(h^6)$
$\left(\left(-\frac{\sqrt{15}-1}{7}\right) h, 0\right)$; $\left(\left(\frac{\sqrt{15}-1}{14}\right) h, \pm\left(\frac{\sqrt{15}-1}{14}\right)\sqrt{3}h\right)$	$\frac{155+\sqrt{15}}{1200}$	

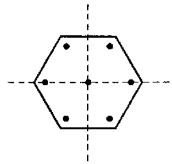
Правильный шестиугольник H

Радиус описанного круга равен h.

25.4.64. $$\frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{3}h^2}\iint_H f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i, y_i) + R$$



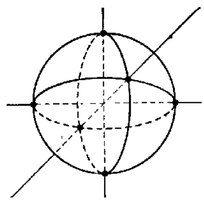
(x_i, y_i)	w_i	
$(0, 0)$	21/36	$R = O(h^4)$
$(\pm h/2, \pm h\sqrt{3}/2)$	5/72	
$(\pm h, 0)$	5/72	



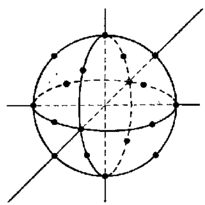
(x_i, y_i)	w_i	
$(0, 0)$	258/1008	$R = O(h^6)$
$(\pm h\sqrt{14}/10, \pm h\sqrt{42}/10)$	125/1008	
$(\pm h\sqrt{14}/5, 0)$	125/1008	

Поверхность сферы Σ: $x^2 + y^2 + z^2 = h^2$

25.4.65. $$\frac{1}{4\pi h^2}\iint_\Sigma f(x, y, z)\,d\sigma = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i, y_i, z_i) + R.$$



(x_i, y_i, z_i)	w_i	
$(\pm h, 0, 0)$	1/6	$R = O(h^4)$
$(0, \pm h, 0)$	1/6	
$(0, 0, \pm h)$	1/6	

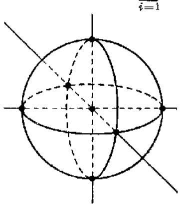


(x_i, y_i, z_i)	w_i	
$(\pm\sqrt{1/2}h, \pm\sqrt{1/2}h, 0)$		
$(\pm\sqrt{1/2}h, 0, \pm\sqrt{1/2}\,h)$	1/15	
$(0, \pm\sqrt{1/2}h, \pm\sqrt{1/2}h)$		$R = O(h^6)$
$(\pm h, 0, 0)$		
$(0, \pm h, 0)$	1/30	
$(0, 0, \pm h)$		

(x_i, y_i, z_i)	w_i	
$(\pm\sqrt{1/3}h, \pm\sqrt{1/3}h, \pm\sqrt{1/3}\,h)$	27/840	
$(\pm\sqrt{1/2}h, \pm\sqrt{1/2}h, 0)$		
$(\pm\sqrt{1/2}h, 0, \pm\sqrt{1/2}h)$	32/840	$R = O(h^8)$
$(0, \pm\sqrt{1/2}h, \pm\sqrt{1/2}h)$		
$(\pm h, 0, 0)$		
$(0, \pm h, 0)$	40/840	
$(0, 0, \pm h)$		

Сфера $S: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant h^2$

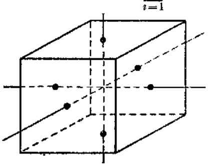
25.4.66. $$\frac{1}{4\pi h^3/3}\iiint\limits_S f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i, y_i, z_i) + R.$$



(x_i, y_i, z_i)	w_i	
$(0, 0, 0)$	2/5	
$(\pm h, 0, 0)$	1/10	$R = O(h^4)$
$(0, \pm h, 0)$	1/10	
$(0, 0, \pm h)$	1/10	

Куб*) C: $|x| \leqslant h$, $|y| \leqslant h$, $|z| \leqslant h$

25.4.67. $$\frac{1}{8h^3}\iiint\limits_C f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i, y_i, z_i) + R$$



(x_i, y_i, z_i)	w_i	
$(\pm h, 0, 0)$	1/6	
$(0, \pm h, 0)$	1/6	$R = O(h^4)$
$(0, 0, \pm h)$	1/6	

25.4.68. $$\frac{1}{8h^3}\iiint\limits_C f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{360}\left[-496 f_m + 128\sum f_r + 8\sum f_f + 5\sum f_v\right] + O(h^6)$$

25.4.69. $$\frac{1}{8h^3}\iiint\limits_C f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{450}\left[91\sum f_f - 40\sum f_e + 16\sum f_d\right] + O(h^6),$$

где $f_m = f(0, 0, 0)$,

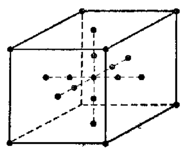
$\sum f_r$ — сумма значений f в 6 точках, лежащих на середине расстояний между центром C и 6 его гранями,

$\sum f_f$ — сумма значений f в 6 центрах граней C,

$\sum f_v$ — сумма значений f в 8 вершинах C,

$\sum f_e$ — сумма значений f в 12 серединах ребер C,

$\sum f_d$ — сумма значений f в 4 точках на диагоналях каждой грани, лежащих на расстоянии $\frac{1}{2}\sqrt{5}h$ от центра этой грани.



Тэтраэдр: $\mathcal{T}$

25.4.70. $$\frac{1}{V}\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{40}\sum f_v + \frac{9}{40}\sum f_f + \text{члены 4-го порядка},$$

$$\frac{1}{V}\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \frac{32}{60} f_m + \frac{1}{60}\sum f_v + \frac{4}{60}\sum f_e + \text{члены 4-го порядка},$$

где V — объем $\mathcal{T}$,

$\sum f_v$ — сумма значений функции в вершинах $\mathcal{T}$,

$\sum f_e$ — сумма значений функции в серединах ребер $\mathcal{T}$,

$\sum f_f$ — сумма значений функции в центре тяжести граней $\mathcal{T}$,

f_m — значение функции в центре тяжести $\mathcal{T}$.

*) См. сноску к формуле 25.4.62.

25.5. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *)

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА $y' = f(x, y)$

Формулы Эйлера

25.5.1. $y_{n+1} = y_n + hy'_n + O(h^2)$.

25.5.2. $y_{n+1} = y_{n-1} + 2hy'_n + O(h^3)$.

Формула трапеций

25.5.3. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y'_{n+1} + y'_n) + O(h^3)$.

Экстраполяционная формула Адамса

25.5.4. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}) + O(h^5)$.

Интерполяционная формула Адамса

25.5.5. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}) + O(h^5)$

ФОРМУЛЫ РУНГЕ—КУТТА

Второй порядок

25.5.6. $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + O(h^3)$,

$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$.

25.5.7. $y_{n+1} = y_n + k_2 + O(h^3)$,

$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$.

Третий порядок

25.5.8. $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3 + O(h^4)$,

$k_1 = hf(x_n, y_n), \ k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$,

$k_3 = hf(x_n + h, \quad y_n - k_1 + 2k_2)$.

25.5.9. $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3 + O(h^4)$,

$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1\right)$,

$k_3 = hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_2\right)$.

Четвертый порядок

25.5.10. $y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)$,

$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$,

$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$.

25.5.11. $y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{8} + \frac{3k_2}{8} + \frac{3k_3}{8} + \frac{k_4}{8} + O(h^5)$,

$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{k_1}{3}\right)$,

$k_3 = hf\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n - \frac{k_1}{3} + k_2\right)$,

$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_1 - k_2 + k_3)$.

Формула Гилла

25.5.12. $$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_2 + 2\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_3 + k_4\right) + O(h^5),$$

$k_1 = hf(x_n, y_n)$,

$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$,

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_1 + \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(x_n + h, y_n - \sqrt{\frac{1}{2}}k_2 + \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_3\right).$$

ФОРМУЛЫ ТИПА ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР (П-К)

Формулы Милна

25.5.13. П: $y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}) + O(h^5)$,

К: $y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(y'_{n-1} + 4y'_n + y'_{n+1}) + O(h^5)$.

25.5.14. П: $y_{n+1} = y_{n-5} + \frac{3h}{10}(11y'_n - 14y'_{n-1} + 26y'_{n-2} - 14y'_{n-3} + 11y'_{n-4}) + O(h^7)$,

*) Предупреждаем читателя о возможной неустойчивости, особенно при применении формул 25.5.2 и 25.5.13 (см. [25.11], [25.12]).

$$\text{К}:\ y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{2h}{45}(7y'_{n+1} + 32y'_n + 12y'_{n-1} + 32y'_{n-2} + 7y'_{n-3}) + O(h^7)$$

Формулы с производными высших порядков

25.5.15. $\text{П}:\ y_{n+1} = y_{n-2} + 3(y_n - y_{n-1}) + h^2(y''_n - y''_{n-1}) + O(h^5),$

$$\text{К}:\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y'_{n+1} + y'_n) - \frac{h^2}{12}(y''_{n+1} - y''_n) + O(h^5).$$

25.5.16. $\text{П}:\ y_{n+1} = y_{n-2} + 3(y_n - y_{n-1}) + \frac{h^3}{2}(y'''_n + y'''_{n-1}) + O(h^7),$

$$\text{К}:\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y'_{n+1} + y'_n) - \frac{h^2}{10}(y''_{n+1} - y''_n) + \frac{h^3}{120}(y'''_{n+1} + y'''_n) + O(h^7).$$

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА $y'=f(x, y, z)$, $z'=g(x, y, z)$

Формула Рунге—Кутта второго порядка

25.5.17. $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) + O(h^3),$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2}(l_1 + l_2) + O(h^3),$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n, z_n),$$
$$l_1 = hg(x_n, y_n, z_n),$$
$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1, z_n + l_1),$$
$$l_2 = hg(x_n + h, y_n + k_1, z_n + l_1).$$

Формула Рунге—Кутта четвертого порядка

25.5.18. $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5),$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) + O(h^5),$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n, z_n),\ l_1 = hg(x_n, y_n, z_n),$$
$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}k_1,\ z_n + \frac{1}{2}l_1\right),$$
$$l_3 = hg\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{k_1}{2},\ z_n + \frac{l_1}{2}\right),$$
$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{k_2}{2},\ z_n + \frac{l_2}{2}\right),$$
$$l_3 = hg\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{k_2}{2},\ z_n + \frac{l_2}{2}\right),$$
$$k_4 = hf(x_n + h,\ y_n + k_3,\ z_n + l_3),$$
$$l_4 = hg(x_n + h,\ y_n + k_3,\ z_n + l_3).$$

УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА $y''=f(x, y, y')$

Формула Милна

25.5.19. $\text{П}:\ y'_{n+1} = y'_{n-3} + \frac{4h}{3}(2y''_{n-2} - y''_{n-1} + 2y''_n) + O(h^5),$

$$\text{К}:\ y'_{n+1} = y'_{n-1} + \frac{h}{3}(y''_{n-1} + 4y''_n + y''_{n+1}) + O(h^5).$$

Формула Рунге—Кутта

25.5.20. $y_{n+1} = y_n + h\left[y'_n + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3)\right] + O(h^5),$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n, y'_n),$$
$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{h}{2}y'_n + \frac{h}{8}k_1,\ y'_n + \frac{k_1}{2}\right),$$
$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}y'_n + \frac{h}{8}k_1,\ y'_n + \frac{k_2}{2}\right),$$
$$k_4 = hf\left(x_n + h,\ y_n + hy'_n + \frac{h}{2}k_3,\ y'_n + k_3\right).$$

УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА $y''=f(x, y)$

Формула Милна

25.5.21. $\text{П}:\ y_{n+1} = y_n + y_{n-2} - y_{n-3} + \frac{h^2}{4}(5y''_n + 2y''_{n-1} + 5y''_{n-2}) + O(h^6),$

$$\text{К}:\ y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + \frac{h^2}{12}(y''_n + 10y''_{n-1} + y''_{n-2}) + O(h^6).$$

Формула Рунге—Кутта

25.5.22. $y_{n+1} = y_n + h\left(y'_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2)\right) + O(h^4),$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{k_1}{6} + \frac{2k_2}{3} + \frac{k_3}{6},$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$
$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}y'_n + \frac{h}{8}k_1\right),$$
$$k_3 = hf\left(x_n + h,\ y_n + hy'_n + \frac{h}{2}k_2\right).$$

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по трем точкам

$$A_k^3(p)=(-1)^{k+1}\frac{p(p^2-1)}{(1+k)!(1-k)!(p-k)}$$

p	A_{-1}	A_0	A_1	p	A_{-1}	A_0	A_1
0.00	-0.00000	1.00000	0.00000	0.50	-0.12500	0.75000	0.37500
0.01	-0.00495	0.99990	0.00505	0.51	-0.12495	0.73990	0.38505
0.02	-0.00980	0.99960	0.01020	0.52	-0.12480	0.72960	0.39520
0.03	-0.01455	0.99910	0.01545	0.53	-0.12455	0.71910	0.40545
0.04	-0.01920	0.99840	0.02080	0.54	-0.12420	0.70840	0.41580
0.05	-0.02375	0.99750	0.02625	0.55	-0.12375	0.69750	0.42625
0.06	-0.02820	0.99640	0.03180	0.56	-0.12320	0.68640	0.43680
0.07	-0.03255	0.99510	0.03745	0.57	-0.12255	0.67510	0.44745
0.08	-0.03680	0.99360	0.04320	0.58	-0.12180	0.66360	0.45820
0.09	-0.04095	0.99190	0.04905	0.59	-0.12095	0.65190	0.46905
0.10	-0.04500	0.99000	0.05500	0.60	-0.12000	0.64000	0.48000
0.11	-0.04895	0.98790	0.06105	0.61	-0.11895	0.62790	0.49105
0.12	-0.05280	0.98560	0.06720	0.62	-0.11780	0.61560	0.50220
0.13	-0.05655	0.98310	0.07345	0.63	-0.11655	0.60310	0.51345
0.14	-0.06020	0.98040	0.07980	0.64	-0.11520	0.59040	0.52480
0.15	-0.06375	0.97750	0.08625	0.65	-0.11375	0.57750	0.53625
0.16	-0.06720	0.97440	0.09280	0.66	-0.11220	0.56440	0.54780
0.17	-0.07055	0.97110	0.09945	0.67	-0.11055	0.55110	0.55945
0.18	-0.07380	0.96760	0.10620	0.68	-0.10880	0.53760	0.57120
0.19	-0.07695	0.96390	0.11305	0.69	-0.10695	0.52390	0.58305
0.20	-0.08000	0.96000	0.12000	0.70	-0.10500	0.51000	0.59500
0.21	-0.08295	0.95590	0.12705	0.71	-0.10295	0.49590	0.60705
0.22	-0.08580	0.95160	0.13420	0.72	-0.10080	0.48160	0.61920
0.23	-0.08855	0.94710	0.14145	0.73	-0.09855	0.46710	0.63145
0.24	-0.09120	0.94240	0.14880	0.74	-0.09620	0.45240	0.64380
0.25	-0.09375	0.93750	0.15625	0.75	-0.09375	0.43750	0.65625
0.26	-0.09620	0.93240	0.16380	0.76	-0.09120	0.42240	0.66880
0.27	-0.09855	0.92710	0.17145	0.77	-0.08855	0.40710	0.68145
0.28	-0.10080	0.92160	0.17920	0.78	-0.08580	0.39160	0.69420
0.29	-0.10295	0.91590	0.18705	0.79	-0.08295	0.37590	0.70705
0.30	-0.10500	0.91000	0.19500	0.80	-0.08000	0.36000	0.72000
0.31	-0.10695	0.90390	0.20305	0.81	-0.07695	0.34390	0.73305
0.32	-0.10880	0.89760	0.21120	0.82	-0.07380	0.32760	0.74620
0.33	-0.11055	0.89110	0.21945	0.83	-0.07055	0.31110	0.75945
0.34	-0.11220	0.88440	0.22780	0.84	-0.06720	0.29440	0.77280
0.35	-0.11375	0.87750	0.23625	0.85	-0.06375	0.27750	0.78625
0.36	-0.11520	0.87040	0.24480	0.86	-0.06020	0.26040	0.79980
0.37	-0.11655	0.86310	0.25345	0.87	-0.05655	0.24310	0.81345
0.38	-0.11780	0.85560	0.26220	0.88	-0.05280	0.22560	0.82720
0.39	-0.11895	0.84790	0.27105	0.89	-0.04895	0.20790	0.84105
0.40	-0.12000	0.84000	0.28000	0.90	-0.04500	0.19000	0.85500
0.41	-0.12095	0.83190	0.28905	0.91	-0.04095	0.17190	0.86905
0.42	-0.12180	0.82360	0.29820	0.92	-0.03680	0.15360	0.88320
0.43	-0.12255	0.81510	0.30745	0.93	-0.03255	0.13510	0.89745
0.44	-0.12320	0.80640	0.31680	0.94	-0.02820	0.11640	0.91180
0.45	-0.12375	0.79750	0.32625	0.95	-0.02375	0.09750	0.92625
0.46	-0.12420	0.78840	0.33580	0.96	-0.01920	0.07840	0.94080
0.47	-0.12455	0.77910	0.34545	0.97	-0.01455	0.05910	0.95545
0.48	-0.12480	0.76960	0.35520	0.98	-0.00980	0.03960	0.97020
0.49	-0.12495	0.75990	0.36505	0.99	-0.00495	0.01990	0.98505
0.50	-0.12500	0.75000	0.37500	1.00	-0.00000	0.00000	1.00000
$-p$	A_1	A_0	A_{-1}	$-p$	A_1	A_0	A_{-1}

См. 25.2.6.
Взято из [25.40].

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по четырем точкам

$$A_k^4(p) = (-1)^{k+2} \frac{p(p^2-1)(p-2)}{(1+k)!(2-k)!(p-k)}$$

p	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	
0.00	0.00000 00	1.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	1.00
0.01	-0.00328 35	0.99490 95	0.01004 95	-0.00166 65	0.99
0.02	-0.00646 80	0.98960 40	0.02019 60	-0.00333 20	0.98
0.03	-0.00955 45	0.98411 35	0.03043 65	-0.00499 55	0.97
0.04	-0.01254 40	0.97843 20	0.04076 80	-0.00665 60	0.96
0.05	-0.01543 75	0.97256 25	0.05118 75	-0.00831 25	0.95
0.06	-0.01823 60	0.96650 80	0.06169 20	-0.00996 40	0.94
0.07	-0.02094 05	0.96027 15	0.07227 85	-0.01160 95	0.93
0.08	-0.02355 20	0.95385 60	0.08294 40	-0.01324 80	0.92
0.09	-0.02607 15	0.94726 45	0.09368 55	-0.01487 85	0.91
0.10	-0.02850 00	0.94050 00	0.10450 00	-0.01650 00	0.90
0.11	-0.03083 85	0.93356 55	0.11538 45	-0.01811 15	0.89
0.12	-0.03308 80	0.92646 40	0.12633 60	-0.01971 20	0.88
0.13	-0.03524 95	0.91919 85	0.13735 15	-0.02130 05	0.87
0.14	-0.03732 40	0.91177 20	0.14842 80	-0.02287 60	0.86
0.15	-0.03931 25	0.90418 75	0.15956 25	-0.02443 75	0.85
0.16	-0.04121 60	0.89644 80	0.17075 20	-0.02598 40	0.84
0.17	-0.04303 55	0.88855 65	0.18199 35	-0.02751 45	0.83
0.18	-0.04477 20	0.88051 60	0.19328 40	-0.02902 80	0.82
0.19	-0.04642 65	0.87232 95	0.20462 05	-0.03052 35	0.81
0.20	-0.04800 00	0.86400 00	0.21600 00	-0.03200 00	0.80
0.21	-0.04949 35	0.85553 05	0.22741 95	-0.03345 65	0.79
0.22	-0.05090 80	0.84692 40	0.23887 60	-0.03489 20	0.78
0.23	-0.05224 45	0.83818 35	0.25036 65	-0.03630 55	0.77
0.24	-0.05350 40	0.82931 20	0.26188 80	-0.03769 60	0.76
0.25	-0.05468 75	0.82031 25	0.27343 75	-0.03906 25	0.75
0.26	-0.05579 60	0.81118 80	0.28501 20	-0.04040 40	0.74
0.27	-0.05683 05	0.80194 15	0.29660 85	-0.04171 95	0.73
0.28	-0.05779 20	0.79257 60	0.30822 40	-0.04300 80	0.72
0.29	-0.05868 15	0.78309 45	0.31985 55	-0.04426 85	0.71
0.30	-0.05950 00	0.77350 00	0.33150 00	-0.04550 00	0.70
0.31	-0.06024 85	0.76379 55	0.34315 45	-0.04670 15	0.69
0.32	-0.06092 80	0.75398 40	0.35481 60	-0.04787 20	0.68
0.33	-0.06153 95	0.74406 85	0.36648 15	-0.04901 05	0.67
0.34	-0.06208 40	0.73405 20	0.37814 80	-0.05011 60	0.66
0.35	-0.06256 25	0.72393 75	0.38981 25	-0.05118 75	0.65
0.36	-0.06297 60	0.71372 80	0.40147 20	-0.05222 40	0.64
0.37	-0.06332 55	0.70342 65	0.41312 35	-0.05322 45	0.63
0.38	-0.06361 20	0.69303 60	0.42476 40	-0.05418 80	0.62
0.39	-0.06383 65	0.68255 95	0.43639 05	-0.05511 35	0.61
0.40	-0.06400 00	0.67200 00	0.44800 00	-0.05600 00	0.60
0.41	-0.06410 35	0.66136 05	0.45958 95	-0.05684 65	0.59
0.42	-0.06414 80	0.65064 40	0.47115 60	-0.05765 20	0.58
0.43	-0.06413 45	0.63985 35	0.48269 65	-0.05841 55	0.57
0.44	-0.06406 40	0.62899 20	0.49420 80	-0.05913 60	0.56
0.45	-0.06393 75	0.61806 25	0.50568 75	-0.05981 25	0.55
0.46	-0.06375 60	0.60706 80	0.51713 20	-0.06044 40	0.54
0.47	-0.06352 05	0.59601 15	0.52853 85	-0.06102 95	0.53
0.48	-0.06323 20	0.58489 60	0.53990 40	-0.06156 80	0.52
0.49	-0.06289 15	0.57372 45	0.55122 55	-0.06205 85	0.51
0.50	-0.06250 00	0.56250 00	0.56250 00	-0.06250 00	0.50
	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	p

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по четырем точкам

$$A_k^4(p) = (-1)^{k+2} \frac{p(p^2-1)(p-2)}{(1+k)!(2-k)!(p-k)}$$

p	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	
1.00	0.00000 00	0.00000 00	1.00000 00	0.00000 00	0.00
1.01	0.00166 65	−0.00994 95	1.00489 95	0.00338 35	0.01
1.02	0.00333 20	−0.01979 60	1.00959 60	0.00686 80	0.02
1.03	0.00499 55	−0.02953 65	1.01408 65	0.01045 45	0.03
1.04	0.00665 60	−0.03916 80	1.01836 80	0.01414 40	0.04
1.05	0.00831 25	−0.04868 75	1.02243 75	0.01793 75	0.05
1.06	0.00996 40	−0.05809 20	1.02629 20	0.02183 60	0.06
1.07	0.01160 95	−0.06737 85	1.02992 85	0.02584 05	0.07
1.08	0.01324 80	−0.07654 40	1.03334 40	0.02995 20	0.08
1.09	0.01487 85	−0.08558 55	1.03653 55	0.03417 15	0.09
1.10	0.01650 00	−0.09450 00	1.03950 00	0.03850 00	0.10
1.11	0.01811 15	−0.10328 45	1.04223 45	0.04293 85	0.11
1.12	0.01971 20	−0.11193 60	1.04473 60	0.04748 80	0.12
1.13	0.02130 05	−0.12045 15	1.04700 15	0.05214 95	0.13
1.14	0.02287 60	−0.12882 80	1.04902 80	0.05692 40	0.14
1.15	0.02443 75	−0.13706 25	1.05081 25	0.06181 25	0.15
1.16	0.02598 40	−0.14515 20	1.05235 20	0.06681 60	0.16
1.17	0.02751 45	−0.15309 35	1.05364 35	0.07193 55	0.17
1.18	0.02902 80	−0.16088 40	1.05468 40	0.07717 20	0.18
1.19	0.03052 35	−0.16852 05	1.05547 05	0.08252 65	0.19
1.20	0.03200 00	−0.17600 00	1.05600 00	0.08800 00	0.20
1.21	0.03345 65	−0.18331 95	1.05626 95	0.09359 35	0.21
1.22	0.03489 20	−0.19047 60	1.05627 60	0.09930 80	0.22
1.23	0.03630 55	−0.19746 65	1.05601 65	0.10514 45	0.23
1.24	0.03769 60	−0.20428 80	1.05548 80	0.11110 40	0.24
1.25	0.03906 25	−0.21093 75	1.05468 75	0.11718 75	0.25
1.26	0.04040 40	−0.21741 20	1.05361 20	0.12339 60	0.26
1.27	0.04171 95	−0.22370 85	1.05225 85	0.12973 05	0.27
1.28	0.04300 80	−0.22982 40	1.05062 40	0.13619 20	0.28
1.29	0.04426 85	−0.23575 55	1.04870 55	0.14278 15	0.29
1.30	0.04550 00	−0.24150 00	1.04650 00	0.14950 00	0.30
1.31	0.04670 15	−0.24705 45	1.04400 45	0.15634 85	0.31
1.32	0.04787 20	−0.25241 60	1.04121 60	0.16332 80	0.32
1.33	0.04901 05	−0.25758 15	1.03813 15	0.17043 95	0.33
1.34	0.05011 60	−0.26254 80	1.03474 80	0.17768 40	0.34
1.35	0.05118 75	−0.26731 25	1.03106 25	0.18506 25	0.35
1.36	0.05222 40	−0.27187 20	1.02707 20	0.19257 60	0.36
1.37	0.05322 45	−0.27622 35	1.02277 35	0.20022 55	0.37
1.38	0.05418 80	−0.28036 40	1.01816 40	0.20801 20	0.38
1.39	0.05511 35	−0.28429 05	1.01324 05	0.21593 65	0.39
1.40	0.05600 00	−0.28800 00	1.00800 00	0.22400 00	0.40
1.41	0.05684 65	−0.29148 95	1.00243 95	0.23220 35	0.41
1.42	0.05765 20	−0.29475 60	0.99655 60	0.24054 80	0.42
1.43	0.05841 55	−0.29779 65	0.99034 65	0.24903 45	0.43
1.44	0.05913 60	−0.30060 80	0.98380 80	0.25766 40	0.44
1.45	0.05981 25	−0.30318 75	0.97693 75	0.26643 75	0.45
1.46	0.06044 40	−0.30553 20	0.96973 20	0.27535 60	0.46
1.47	0.06102 95	−0.30763 85	0.96218 85	0.28442 05	0.47
1.48	0.06156 80	−0.30950 40	0.95430 40	0.29363 20	0.48
1.49	0.06205 85	−0.31112 55	0.94607 55	0.30299 15	0.49
1.50	0.06250 00	−0.31250 00	0.93750 00	0.31250 00	0.50
	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	$-p$

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по четырем точкам

$$A_k^4(p)=(-1)^{k+2}\frac{p(p^2-1)(p-2)}{(1+k)!(2-k)!(p-k)}$$

p	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	
1.50	0.06250 00	−0.31250 00	0.93750 00	0.31250 00	0.50
1.51	0.06289 15	−0.31362 45	0.92857 45	0.32215 85	0.51
1.52	0.06323 20	−0.31449 60	0.91929 60	0.33196 80	0.52
1.53	0.06352 05	−0.31511 15	0.90966 15	0.34192 95	0.53
1.54	0.06375 60	−0.31546 80	0.89966 80	0.35204 40	0.54
1.55	0.06393 75	−0.31556 25	0.88931 25	0.36231 25	0.55
1.56	0.06406 40	−0.31539 20	0.87859 20	0.37273 60	0.56
1.57	0.06413 45	−0.31495 35	0.86750 35	0.38331 55	0.57
1.58	0.06414 80	−0.31424 40	0.85604 40	0.39405 20	0.58
1.59	0.06410 35	−0.31326 05	0.84421 05	0.40494 65	0.59
1.60	0.06400 00	−0.31200 00	0.83200 00	0.41600 00	0.60
1.61	0.06383 65	−0.31045 95	0.81940 95	0.42721 35	0.61
1.62	0.06361 20	−0.30863 60	0.80643 60	0.43858 80	0.62
1.63	0.06332 55	−0.30652 65	0.79307 65	0.45012 45	0.63
1.64	0.06297 60	−0.30412 80	0.77932 80	0.46182 40	0.64
1.65	0.06256 25	−0.30143 75	0.76518 75	0.47368 75	0.65
1.66	0.06208 40	−0.29845 20	0.75065 20	0.48571 60	0.66
1.67	0.06153 95	−0.29516 85	0.73571 85	0.49791 05	0.67
1.68	0.06092 80	−0.29158 40	0.72038 40	0.51027 20	0.68
1.69	0.06024 85	−0.28769 55	0.70464 55	0.52280 15	0.69
1.70	0.05950 00	−0.28350 00	0.68850 00	0.53550 00	0.70
1.71	0.05868 15	−0.27899 45	0.67194 45	0.54836 85	0.71
1.72	0.05779 20	−0.27417 60	0.65497 60	0.56140 80	0.72
1.73	0.05683 05	−0.26904 15	0.63759 15	0.57461 95	0.73
1.74	0.05579 60	−0.26358 80	0.61978 80	0.58800 40	0.74
1.75	0.05468 75	−0.25781 25	0.60156 25	0.60156 25	0.75
1.76	0.05350 40	−0.25171 20	0.58291 20	0.61529 60	0.76
1.77	0.05224 45	−0.24528 35	0.56383 35	0.62920 55	0.77
1.78	0.05090 80	−0.23852 40	0.54432 40	0.64329 20	0.78
1.79	0.04949 35	−0.23143 05	0.52438 05	0.65755 65	0.79
1.80	0.04800 00	−0.22400 00	0.50400 00	0.67200 00	0.80
1.81	0.04642 65	−0.21622 95	0.48317 95	0.68662 35	0.81
1.82	0.04477 20	−0.20811 60	0.46191 60	0.70142 80	0.82
1.83	0.04303 55	−0.19965 65	0.44020 65	0.71641 45	0.83
1.84	0.04121 60	−0.19084 80	0.41804 80	0.73158 40	0.84
1.85	0.03931 25	−0.18168 75	0.39543 75	0.74693 75	0.85
1.86	0.03732 40	−0.17217 20	0.37237 20	0.76247 60	0.86
1.87	0.03524 95	−0.16229 85	0.34884 85	0.77820 05	0.87
1.88	0.03308 80	−0.15206 40	0.32486 40	0.79411 20	0.88
1.89	0.03083 85	−0.14146 55	0.30041 55	0.81021 15	0.89
1.90	0.02850 00	−0.13050 00	0.27550 00	0.82650 00	0.90
1.91	0.02607 15	−0.11916 45	0.25011 45	0.84297 85	0.91
1.92	0.02355 20	−0.10745 60	0.22425 60	0.85964 80	0.92
1.93	0.02094 05	−0.09537 15	0.19792 15	0.87650 95	0.93
1.94	0.01823 60	−0.08290 80	0.17110 80	0.89356 40	0.94
1.95	0.01543 75	−0.07006 25	0.14381 25	0.91081 25	0.95
1.96	0.01254 40	−0.05683 20	0.11603 20	0.92825 60	0.96
1.97	0.00955 45	−0.04321 35	0.08776 35	0.94589 55	0.97
1.98	0.00646 80	−0.02920 40	0.05900 40	0.96373 20	0.98
1.99	0.00328 35	−0.01480 05	0.02975 05	0.98176 65	0.99
2.00	0.00000 00	0.00000 00	0.00000 00	1.00000 00	1.00
	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	$-p$

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по пяти точкам

$$A_k^5(p)=(-1)^{k+2}\frac{p(p^2-1)(p^2-4)}{(2+k)!(2-k)!(p-k)}$$

p	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	
0.00	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00
0.01	0.00082 90838	−0.00659 98350	0.99987 50025	0.00673 31650	−0.00083 74163	0.01
0.02	0.00164 93400	−0.01306 53600	0.99950 00400	0.01359 86400	−0.00168 26600	0.02
0.03	0.00246 02838	−0.01939 56350	0.99887 52025	0.02059 53650	−0.00253 52163	0.03
0.04	0.00326 14400	−0.02558 97600	0.99800 06400	0.02772 22400	−0.00339 45600	0.04
0.05	0.00405 23438	−0.03164 68750	0.99687 65625	0.03497 81250	−0.00426 01563	0.05
0.06	0.00483 25400	−0.03756 61600	0.99550 32400	0.04236 18400	−0.00513 14600	0.06
0.07	0.00560 15838	−0.04334 68350	0.99388 10025	0.04987 21650	−0.00600 79163	0.07
0.08	0.00635 90400	−0.04898 81600	0.99201 02400	0.05750 78400	−0.00688 89600	0.08
0.09	0.00710 44838	−0.05448 94350	0.98989 14025	0.06526 75650	−0.00777 40163	0.09
0.10	0.00783 75000	−0.05985 00000	0.98752 50000	0.07315 00000	−0.00866 25000	0.10
0.11	0.00855 76838	−0.06506 92350	0.98491 16025	0.08115 37650	−0.00955 38163	0.11
0.12	0.00926 46400	−0.07014 65600	0.98205 18400	0.08927 74400	−0.01044 73600	0.12
0.13	0.00995 79838	−0.07508 14350	0.97894 64025	0.09751 95650	−0.01134 25163	0.13
0.14	0.01063 73400	−0.07987 33600	0.97559 60400	0.10587 86400	−0.01223 86600	0.14
0.15	0.01130 23438	−0.08452 18750	0.97200 15625	0.11435 31250	−0.01313 51563	0.15
0.16	0.01195 26400	−0.08902 65600	0.96816 38400	0.12294 14400	−0.01403 13600	0.16
0.17	0.01258 78838	−0.09338 70350	0.96408 38025	0.13164 19650	−0.01492 66163	0.17
0.18	0.01320 77400	−0.09760 29600	0.95976 24400	0.14045 30400	−0.01582 02600	0.18
0.19	0.01381 18838	−0.10167 40350	0.95520 08025	0.14937 29650	−0.01671 16163	0.19
0.20	0.01440 00000	−0.10560 00000	0.95040 00000	0.15840 00000	−0.01760 00000	0.20
0.21	0.01497 17838	−0.10938 06350	0.94536 12025	0.16753 23650	−0.01848 47163	0.21
0.22	0.01552 69400	−0.11301 57600	0.94008 56400	0.17676 82400	−0.01936 50600	0.22
0.23	0.01606 51838	−0.11650 52350	0.93457 46025	0.18610 57650	−0.02024 03163	0.23
0.24	0.01658 62400	−0.11984 89600	0.92882 94400	0.19554 30400	−0.02110 97600	0.24
0.25	0.01708 98438	−0.12304 68750	0.92285 15625	0.20507 81250	−0.02197 26563	0.25
0.26	0.01757 57400	−0.12609 89600	0.91664 24400	0.21470 90400	−0.02282 82600	0.26
0.27	0.01804 36838	−0.12900 52350	0.91020 36025	0.22443 37650	−0.02367 58163	0.27
0.28	0.01849 34400	−0.13176 57600	0.90353 66400	0.23425 02400	−0.02451 45600	0.28
0.29	0.01892 47838	−0.13438 06350	0.89664 32025	0.24415 63650	−0.02534 37163	0.29
0.30	0.01933 75000	−0.13685 00000	0.88952 50000	0.25415 00000	−0.02616 25000	0.30
0.31	0.01973 13838	−0.13917 40350	0.88218 38025	0.26422 89650	−0.02697 01163	0.31
0.32	0.02010 62400	−0.14135 29600	0.87462 14400	0.27439 10400	−0.02776 57600	0.32
0.33	0.02046 18838	−0.14338 70350	0.86683 98025	0.28463 39650	−0.02854 86163	0.33
0.34	0.02079 81400	−0.14527 65600	0.85884 08400	0.29495 54400	−0.02931 78600	0.34
0.35	0.02111 48438	−0.14702 18750	0.85062 65625	0.30535 31250	−0.03007 26563	0.35
0.36	0.02141 18400	−0.14862 33600	0.84219 90400	0.31582 46400	−0.03081 21600	0.36
0.37	0.02168 89838	−0.15008 14350	0.83356 04025	0.32636 75650	−0.03153 55163	0.37
0.38	0.02194 61400	−0.15139 65600	0.82471 28400	0.33697 94400	−0.03224 18600	0.38
0.39	0.02218 31838	−0.15256 92350	0.81565 86025	0.34765 77650	−0.03293 03163	0.39
0.40	0.02240 00000	−0.15360 00000	0.80640 00000	0.35840 00000	−0.03360 00000	0.40
0.41	0.02259 64838	−0.15448 94350	0.79693 94025	0.36920 35650	−0.03425 00163	0.41
0.42	0.02277 25400	−0.15523 81600	0.78727 92400	0.38006 58400	−0.03487 94600	0.42
0.43	0.02292 80838	−0.15584 68350	0.77742 20025	0.39098 41650	−0.03548 74163	0.43
0.44	0.02306 30400	−0.15631 61600	0.76737 02400	0.40195 58400	−0.03607 29600	0.44
0.45	0.02317 73438	−0.15664 68750	0.75712 65625	0.41297 81250	−0.03663 51563	0.45
0.46	0.02327 09400	−0.15683 97600	0.74669 36400	0.42404 82400	−0.03717 30600	0.46
0.47	0.02334 37838	−0.15689 56350	0.73607 42025	0.43516 33650	−0.03768 57163	0.47
0.48	0.02339 58400	−0.15681 53600	0.72527 10400	0.44632 06400	−0.03817 21600	0.48
0.49	0.02342 70838	−0.15659 98350	0.71428 70025	0.45751 71650	−0.03863 14163	0.49
0.50	0.02343 75000	−0.15625 00000	0.70312 50000	0.46875 00000	−0.03906 25000	0.50
	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	A_{-2}	$-p$

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по пяти точкам

$$A_k^5(p) = (-1)^{k+2}\frac{p(p^2-1)(p^2-4)}{(2+k)!(2-k)!(p-k)}$$

p	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	
0.50	0.02343 75000	−0.15625 00000	0.70312 50000	0.46875 00000	−0.03906 25000	0.50
0.51	0.02342 70838	−0.15576 68350	0.69178 80025	0.48001 61650	−0.03946 44163	0.51
0.52	0.02339 58400	−0.15515 13600	0.68027 90400	0.49131 26400	−0.03983 61600	0.52
0.53	0.02334 37838	−0.15440 46350	0.66860 12025	0.50263 63650	−0.04017 67163	0.53
0.54	0.02327 09400	−0.15352 77600	0.65675 76400	0.51398 42400	−0.04048 50600	0.54
0.55	0.02317 73438	−0.15252 18750	0.64475 15625	0.52535 31250	−0.04076 01563	0.55
0.56	0.02306 30400	−0.15138 81600	0.63258 62400	0.53673 98400	−0.04100 09600	0.56
0.57	0.02292 80838	−0.15012 78350	0.62026 50025	0.54814 11650	−0.04120 64163	0.57
0.58	0.02277 25400	−0.14874 21600	0.60779 12400	0.55955 38400	−0.04137 54600	0.58
0.59	0.02259 64838	−0.14723 24350	0.59516 84025	0.57097 45650	−0.04150 70163	0.59
0.60	0.02240 00000	−0.14560 00000	0.58240 00000	0.58240 00000	−0.04160 00000	0.60
0.61	0.02218 31838	−0.14384 62350	0.56948 96025	0.59382 67650	−0.04165 33163	0.61
0.62	0.02194 61400	−0.14197 25600	0.55644 08400	0.60525 14400	−0.04166 58600	0.62
0.63	0.02168 89838	−0.13998 04350	0.54325 74025	0.61667 05650	−0.04163 65163	0.63
0.64	0.02141 18400	−0.13787 13600	0.52994 30400	0.62808 06400	−0.04156 41600	0.64
0.65	0.02111 48438	−0.13564 68750	0.51650 15625	0.63947 81250	−0.04144 76563	0.65
0.66	0.02079 81400	−0.13330 85600	0.50293 68400	0.65085 94400	−0.04128 58600	0.66
0.67	0.02046 18838	−0.13085 80350	0.48925 28025	0.66222 09650	−0.04107 76163	0.67
0.68	0.02010 62400	−0.12829 69600	0.47545 34400	0.67355 90400	−0.04082 17600	0.68
0.69	0.01973 13838	−0.12562 70350	0.46154 28025	0.68486 99650	−0.04051 71163	0.69
0.70	0.01933 75000	−0.12285 00000	0.44752 50000	0.69615 00000	−0.04016 25000	0.70
0.71	0.01892 47838	−0.11996 76350	0.43340 42025	0.70739 53650	−0.03975 67163	0.71
0.72	0.01849 34400	−0.11698 17600	0.41918 46400	0.71860 22400	−0.03929 85600	0.72
0.73	0.01804 36838	−0.11389 42350	0.40487 06025	0.72976 67650	−0.03878 68163	0.73
0.74	0.01757 57400	−0.11070 69600	0.39046 64400	0.74088 50400	−0.03822 02600	0.74
0.75	0.01708 98438	−0.10742 18750	0.37597 65625	0.75195 31250	−0.03759 76563	0.75
0.76	0.01658 62400	−0.10404 09600	0.36140 54400	0.76296 70400	−0.03691 77600	0.76
0.77	0.01606 51838	−0.10056 62350	0.34675 76025	0.77392 27650	−0.03617 93163	0.77
0.78	0.01552 69400	−0.09699 97600	0.33203 76400	0.78481 62400	−0.03538 10600	0.78
0.79	0.01497 17838	−0.09334 36350	0.31725 02025	0.79564 33650	−0.03452 17163	0.79
0.80	0.01440 00000	−0.08960 00000	0.30240 00000	0.80640 00000	−0.03360 00000	0.80
0.81	0.01381 18838	−0.08577 10350	0.28749 18025	0.81708 19650	−0.03261 46163	0.81
0.82	0.01320 77400	−0.08185 89600	0.27253 04400	0.82768 50400	−0.03156 42600	0.82
0.83	0.01258 78838	−0.07786 60350	0.25752 08025	0.83820 49650	−0.03044 76163	0.83
0.84	0.01195 26400	−0.07379 45600	0.24246 78400	0.84863 74400	−0.02926 33600	0.84
0.85	0.01130 23438	−0.06964 68750	0.22737 65625	0.85897 81250	−0.02801 01563	0.85
0.86	0.01063 73400	−0.06542 53600	0.21225 20400	0.86922 26400	−0.02668 66600	0.86
0.87	0.00995 79838	−0.06113 24350	0.19709 94025	0.87936 65650	−0.02529 15163	0.87
0.88	0.00926 46400	−0.05677 05600	0.18192 38400	0.88940 54400	−0.02382 33600	0.88
0.89	0.00855 76838	−0.05234 22350	0.16673 06025	0.89933 47650	−0.02228 08163	0.89
0.90	0.00783 75000	−0.04785 00000	0.15152 50000	0.90915 00000	−0.02066 25000	0.90
0.91	0.00710 44838	−0.04329 64350	0.13631 24025	0.91884 65650	−0.01896 70163	0.91
0.92	0.00635 90400	−0.03868 41600	0.12109 82400	0.92841 98400	−0.01719 29600	0.92
0.93	0.00560 15838	−0.03401 58350	0.10588 80025	0.93786 51650	−0.01533 89163	0.93
0.94	0.00483 25400	−0.02929 41600	0.09068 72400	0.94717 78400	−0.01340 34600	0.94
0.95	0.00405 23438	−0.02452 18750	0.07550 15625	0.95635 31250	−0.01138 51563	0.95
0.96	0.00326 14400	−0.01970 17600	0.06033 66400	0.96538 62400	−0.00928 25600	0.96
0.97	0.00246 02838	−0.01483 66350	0.04519 82025	0.97427 23650	−0.00709 42163	0.97
0.98	0.00164 93400	−0.00992 93600	0.03009 20400	0.98300 66400	−0.00481 86600	0.98
0.99	0.00082 90838	−0.00498 28350	0.01502 40025	0.99158 41650	−0.00245 44163	0.99
1.00	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	1.00
	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	A_{-2}	$-p$

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по пяти точкам

$$A_k^5(p)=(-1)^{k+2}\frac{p(p^2-1)(p^2-4)}{(2+k)!(2-k)!(p-k)}$$

p	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	
1.00	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	1.00
1.01	−0.00083 74163	0.00501 61650	−0.01497 39975	1.00824 91650	0.00254 60838	1.01
1.02	−0.00168 26600	0.01006 26400	−0.02989 19600	1.01632 66400	0.00518 53400	1.02
1.03	−0.00253 52163	0.01513 63650	−0.04474 77975	1.02422 73650	0.00791 92838	1.03
1.04	−0.00339 45600	0.02023 42400	−0.05953 53600	1.03194 62400	0.01074 94400	1.04
1.05	−0.00426 01563	0.02535 31250	−0.07424 84375	1.03947 81250	0.01367 73438	1.05
1.06	−0.00513 14600	0.03048 98400	−0.08888 07600	1.04681 78400	0.01670 45400	1.06
1.07	−0.00600 79163	0.03564 11650	−0.10342 59975	1.05396 01650	0.01983 25838	1.07
1.08	−0.00688 89600	0.04080 38400	−0.11787 77600	1.06089 98400	0.02306 30400	1.08
1.09	−0.00777 40163	0.04597 45650	−0.13222 95975	1.06763 15650	0.02639 74838	1.09
1.10	−0.00866 25000	0.05115 00000	−0.14647 50000	1.07415 00000	0.02983 75000	1.10
1.11	−0.00955 38163	0.05632 67650	−0.16060 73975	1.08044 97650	0.03338 46838	1.11
1.12	−0.01044 73600	0.06150 14400	−0.17462 01600	1.08652 54400	0.03704 06400	1.12
1.13	−0.01134 25163	0.06667 05650	−0.18850 65975	1.09237 15650	0.04080 69838	1.13
1.14	−0.01223 86600	0.07183 06400	−0.20225 99600	1.09798 26400	0.04468 53400	1.14
1.15	−0.01313 51563	0.07697 81250	−0.21587 34375	1.10335 31250	0.04867 73438	1.15
1.16	−0.01403 13600	0.08210 94400	−0.22934 01600	1.10847 74400	0.05278 46400	1.16
1.17	−0.01492 66163	0.08722 09650	−0.24265 31975	1.11334 99650	0.05700 88838	1.17
1.18	−0.01582 02600	0.09230 90400	−0.25580 55600	1.11796 50400	0.06135 17400	1.18
1.19	−0.01671 16163	0.09736 99650	−0.26879 01975	1.12231 69650	0.06581 48838	1.19
1.20	−0.01760 00000	0.10240 00000	−0.28160 00000	1.12640 00000	0.07040 00000	1.20
1.21	−0.01848 47163	0.10739 53650	−0.29422 77975	1.13020 83650	0.07510 87838	1.21
1.22	−0.01936 50600	0.11235 22400	−0.30666 63600	1.13373 62400	0.07994 29400	1.22
1.23	−0.02024 03163	0.11726 67650	−0.31890 83975	1.13697 77650	0.08490 41838	1.23
1.24	−0.02110 97600	0.12213 50400	−0.33094 65600	1.13992 70400	0.08999 42400	1.24
1.25	−0.02197 26563	0.12695 31250	−0.34277 34375	1.14257 81250	0.09521 48438	1.25
1.26	−0.02282 82600	0.13171 70400	−0.35438 15600	1.14492 50400	0.10056 77400	1.26
1.27	−0.02367 58163	0.13642 27650	−0.36576 33975	1.14696 17650	0.10605 46838	1.27
1.28	−0.02451 45600	0.14106 62400	−0.37691 13600	1.14868 22400	0.11167 74400	1.28
1.29	−0.02534 37163	0.14564 33650	−0.38781 77975	1.15008 03650	0.11743 77838	1.29
1.30	−0.02616 25000	0.15015 00000	−0.39847 50000	1.15115 00000	0.12333 75000	1.30
1.31	−0.02697 01163	0.15458 19650	−0.40887 51975	1.15188 49650	0.12937 83838	1.31
1.32	−0.02776 57600	0.15893 50400	−0.41901 05600	1.15227 90400	0.13556 22400	1.32
1.33	−0.02854 86163	0.16320 49650	−0.42887 31975	1.15232 59650	0.14189 08838	1.33
1.34	−0.02931 78600	0.16738 74400	−0.43845 51600	1.15201 94400	0.14836 61400	1.34
1.35	−0.03007 26563	0.17147 81250	−0.44774 84375	1.15135 31250	0.15498 98438	1.35
1.36	−0.03081 21600	0.17547 26400	−0.45674 49600	1.15032 06400	0.16176 38400	1.36
1.37	−0.03153 55163	0.17936 65650	−0.46543 65975	1.14891 55650	0.16868 99838	1.37
1.38	−0.03224 18600	0.18315 54400	−0.47381 51600	1.14713 14400	0.17577 01400	1.38
1.39	−0.03293 03163	0.18683 47650	−0.48187 23975	1.14496 17650	0.18300 61838	1.39
1.40	−0.03360 00000	0.19040 00000	−0.48960 00000	1.14240 00000	0.19040 00000	1.40
1.41	−0.03425 00163	0.19384 65650	−0.49698 95975	1.13943 95650	0.19795 34838	1.41
1.42	−0.03487 94600	0.19716 98400	−0.50403 27600	1.13607 38400	0.20566 85400	1.42
1.43	−0.03548 74163	0.20036 51650	−0.51072 09975	1.13229 61650	0.21354 70838	1.43
1.44	−0.03607 29600	0.20342 78400	−0.51704 57600	1.12809 98400	0.22159 10400	1.44
1.45	−0.03663 51563	0.20635 31250	−0.52299 84375	1.12347 81250	0.22980 23438	1.45
1.46	−0.03717 30600	0.20913 62400	−0.52857 03600	1.11842 42400	0.23818 29400	1.46
1.47	−0.03768 57163	0.21177 23650	−0.53375 27975	1.11293 13650	0.24673 47838	1.47
1.48	−0.03817 21600	0.21425 66400	−0.53853 69600	1.10699 26400	0.25545 98400	1.48
1.49	−0.03863 14163	0.21658 41650	−0.54291 39975	1.10060 11650	0.26436 00838	1.49
1.50	−0.03906 25000	0.21875 00000	−0.54687 50000	1.09375 00000	0.27343 75000	1.50
	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	A_{-2}	$-D$

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по пяти точкам

$$A_k^5(p)=(-1)^{k+2}\frac{p(p^2-1)(p^2-4)}{(2+k)!(2-k)!(p-k)}$$

p	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	
1.50	-0.03906 25000	0.21875 00000	-0.54687 50000	1.09375 00000	0.27343 75000	1.50
1.51	-0.03946 44163	0.22074 91650	-0.55041 09975	1.08643 21650	0.28269 40838	1.51
1.52	-0.03983 61600	0.22257 66400	-0.55351 29600	1.07864 06400	0.29213 18400	1.52
1.53	-0.04017 67163	0.22422 73650	-0.55617 17975	1.07036 83650	0.30175 27838	1.53
1.54	-0.04048 50600	0.22569 62400	-0.55837 83600	1.06160 82400	0.31155 89400	1.54
1.55	-0.04076 01563	0.22697 81250	-0.56012 34375	1.05235 31250	0.32155 23438	1.55
1.56	-0.04100 09600	0.22806 78400	-0.56139 77600	1.04259 58400	0.33173 50400	1.56
1.57	-0.04120 64163	0.22896 01650	-0.56219 19975	1.03232 91650	0.34210 90838	1.57
1.58	-0.04137 54600	0.22964 98400	-0.56249 67600	1.02154 58400	0.35267 65400	1.58
1.59	-0.04150 70163	0.23013 15650	-0.56230 25975	1.01023 85650	0.36343 94838	1.59
1.60	-0.04160 00000	0.23040 00000	-0.56160 00000	0.99840 00000	0.37440 00000	1.60
1.61	-0.04165 33163	0.23044 97650	-0.56037 93975	0.98602 27650	0.38556 01838	1.61
1.62	-0.04166 58600	0.23027 54400	-0.55863 11600	0.97309 94400	0.39692 21400	1.62
1.63	-0.04163 65163	0.22987 15650	-0.55634 55975	0.95962 25650	0.40848 79838	1.63
1.64	-0.04156 41600	0.22923 26400	-0.55351 29600	0.94558 46400	0.42025 98400	1.64
1.65	-0.04144 76563	0.22835 31250	-0.55012 34375	0.93097 81250	0.43223 98438	1.65
1.66	-0.04128 58600	0.22722 74400	-0.54616 71600	0.91579 54400	0.44443 01400	1.66
1.67	-0.04107 76163	0.22584 99650	-0.54163 41975	0.90002 89650	0.45683 28838	1.67
1.68	-0.04082 17600	0.22421 50400	-0.53651 45600	0.88367 10400	0.46945 02400	1.68
1.69	-0.04051 71163	0.22231 69650	-0.53079 81975	0.86671 39650	0.48228 43838	1.69
1.70	-0.04016 25000	0.22015 00000	-0.52447 50000	0.84915 00000	0.49533 75000	1.70
1.71	-0.03975 67163	0.21770 83650	-0.51753 47975	0.83097 13650	0.50861 17838	1.71
1.72	-0.03929 85600	0.21498 62400	-0.50996 73600	0.81217 02400	0.52210 94400	1.72
1.73	-0.03878 68163	0.21197 77650	-0.50176 23975	0.79273 87650	0.53583 26838	1.73
1.74	-0.03822 02600	0.20867 70400	-0.49290 95600	0.77266 90400	0.54978 37400	1.74
1.75	-0.03759 76563	0.20507 81250	-0.48339 84375	0.75195 31250	0.56396 48438	1.75
1.76	-0.03691 77600	0.20117 50400	-0.47321 85600	0.73058 30400	0.57837 82400	1.76
1.77	-0.03617 93163	0.19696 17650	-0.46235 93975	0.70855 07650	0.59302 61838	1.77
1.78	-0.03538 10600	0.19243 22400	-0.45081 03600	0.68584 82400	0.60791 09400	1.78
1.79	-0.03452 17163	0.18758 03650	-0.43856 07975	0.66246 73650	0.62303 47838	1.79
1.80	-0.03360 00000	0.18240 00000	-0.42560 00000	0.63840 00000	0.63840 00000	1.80
1.81	-0.03261 46163	0.17688 49650	-0.41191 71975	0.61363 79650	0.65400 88838	1.81
1.82	-0.03156 42600	0.17102 90400	-0.39750 15600	0.58817 30400	0.66986 37400	1.82
1.83	-0.03044 76163	0.16482 59650	-0.38234 21975	0.56199 69650	0.68596 68838	1.83
1.84	-0.02926 33600	0.15826 94400	-0.36642 81600	0.53510 14400	0.70232 06400	1.84
1.85	-0.02801 01563	0.15135 31250	-0.34974 84375	0.50747 81250	0.71892 73438	1.85
1.86	-0.02668 66600	0.14407 06400	-0.33229 19600	0.47911 86400	0.73578 93400	1.86
1.87	-0.02529 15163	0.13641 55650	-0.31404 75975	0.45001 45650	0.75290 89838	1.87
1.88	-0.02382 33600	0.12838 14400	-0.29500 41600	0.42015 74400	0.77028 86400	1.88
1.89	-0.02228 08163	0.11996 17650	-0.27515 03975	0.38953 87650	0.78793 06838	1.89
1.90	-0.02066 25000	0.11115 00000	-0.25447 50000	0.35815 00000	0.80583 75000	1.90
1.91	-0.01896 70163	0.10193 95650	-0.23296 65975	0.32598 25650	0.82401 14838	1.91
1.92	-0.01719 29600	0.09232 38400	-0.21061 37600	0.29302 78400	0.84245 50400	1.92
1.93	-0.01533 89163	0.08229 61650	-0.18740 49975	0.25927 71650	0.86117 05838	1.93
1.94	-0.01340 34600	0.07184 98400	-0.16332 87600	0.22472 18400	0.88016 05400	1.94
1.95	-0.01138 51563	0.06097 81250	-0.13837 34375	0.18935 31250	0.89942 73438	1.95
1.96	-0.00928 25600	0.04967 42400	-0.11252 73600	0.15316 22400	0.91897 34400	1.96
1.97	-0.00709 42163	0.03793 13650	-0.08577 87975	0.11614 03650	0.93880 12838	1.97
1.98	-0.00481 86600	0.02574 26400	-0.05811 59600	0.07827 86400	0.95891 33400	1.98
1.99	-0.00245 44163	0.01310 11650	-0.02952 69975	0.03956 81650	0.97931 20838	1.99
2.00	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	2.00
	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	A_{-2}	$-p$

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по шести точкам

$$A_k^6(p) = (-1)^{k+3}\frac{p(p^2-1)(p^2-4)(p-3)}{(2+k)!\,(3-k)!\,(p-k)}$$

p	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	
0.00	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00
0.01	0.00049 57921	−0.00493 33767	0.99654 20858	0.01006 60817	−0.00250 38746	0.00033 32917	0.99
0.02	0.00098 30066	−0.00973 36932	0.99283 67064	0.02026 19736	−0.00501 43268	0.00066 63334	0.98
0.03	0.00146 14085	−0.01440 12590	0.98888 64505	0.03058 41170	−0.00752 95922	0.00099 88752	0.97
0.04	0.00193 07725	−0.01893 64224	0.98469 39648	0.04102 89152	−0.01004 78976	0.00133 06675	0.96
0.05	0.00239 08828	−0.02333 95703	0.98026 19531	0.05159 27344	−0.01256 74609	0.00166 14609	0.95
0.06	0.00284 15335	−0.02761 11276	0.97559 31752	0.06227 19048	−0.01508 64924	0.00199 10065	0.94
0.07	0.00328 25281	−0.03175 15567	0.97069 04458	0.07306 27217	−0.01760 31946	0.00231 90557	0.93
0.08	0.00371 36794	−0.03576 13568	0.96555 66336	0.08396 14464	−0.02011 57632	0.00264 53606	0.92
0.09	0.00413 48096	−0.03964 10640	0.96019 46604	0.09496 43071	−0.02262 23873	0.00296 96742	0.91
0.10	0.00454 57500	−0.04339 12500	0.95460 75000	0.10606 75000	−0.02512 12500	0.00329 17500	0.90
0.11	0.00494 63412	−0.04701 25223	0.94879 81771	0.11726 71904	−0.02761 05290	0.00361 13426	0.89
0.12	0.00533 64326	−0.05050 55232	0.94276 97664	0.12855 95136	−0.03008 83968	0.00392 82074	0.88
0.13	0.00571 58827	−0.05387 09296	0.93652 53917	0.13994 05758	−0.03255 30217	0.00424 21011	0.87
0.14	0.00608 45585	−0.05710 94524	0.93006 82248	0.15140 64552	−0.03500 25676	0.00455 27815	0.86
0.15	0.00644 23359	−0.06022 18359	0.92340 14844	0.16295 32031	−0.03743 51953	0.00486 00078	0.85
0.16	0.00678 90995	−0.06320 88576	0.91652 84352	0.17457 68448	−0.03984 90624	0.00516 35405	0.84
0.17	0.00712 47422	−0.06607 13273	0.90945 23870	0.18627 33805	−0.04224 23240	0.00546 31416	0.83
0.18	0.00744 91654	−0.06881 00868	0.90217 66936	0.19803 87864	−0.04461 31332	0.00575 85746	0.82
0.19	0.00776 22787	−0.07142 60096	0.89470 47517	0.20986 90158	−0.04695 96417	0.00604 96051	0.81
0.20	0.00806 40000	−0.07392 00000	0.88704 00000	0.22176 00000	−0.04928 00000	0.00633 60000	0.80
0.21	0.00835 42553	−0.07629 29929	0.87918 59183	0.23370 76492	−0.05157 23583	0.00661 75264	0.79
0.22	0.00863 29786	−0.07854 59532	0.87114 60264	0.24570 78536	−0.05383 48668	0.00689 39614	0.78
0.23	0.00890 01118	−0.08067 98752	0.86292 38830	0.25775 64845	−0.05606 56760	0.00716 50719	0.77
0.24	0.00915 56045	−0.08269 57824	0.85452 30848	0.26984 93952	−0.05826 29376	0.00743 06355	0.76
0.25	0.00939 94141	−0.08459 47266	0.84594 72656	0.28198 24219	−0.06042 48047	0.00769 04297	0.75
0.26	0.00963 15055	−0.08637 77876	0.83720 00952	0.29415 13848	−0.06254 94324	0.00794 42345	0.74
0.27	0.00985 18513	−0.08804 60729	0.82828 52783	0.30635 20892	−0.06463 49783	0.00819 18324	0.73
0.28	0.01006 04314	−0.08960 07168	0.81920 65536	0.31858 03264	−0.06667 96032	0.00843 30086	0.72
0.29	0.01025 72328	−0.09104 28802	0.80996 76929	0.33083 18746	−0.06868 14711	0.00866 75510	0.71
0.30	0.01044 22500	−0.09237 37500	0.80057 25000	0.34310 25000	−0.07063 87500	0.00889 52500	0.70
0.31	0.01061 54844	−0.09359 45385	0.79102 48096	0.35538 79579	−0.07254 96127	0.00911 58993	0.69
0.32	0.01077 69446	−0.09470 64832	0.78132 84864	0.36768 39936	−0.07441 22368	0.00932 92954	0.68
0.33	0.01092 66459	−0.09571 08458	0.77148 74242	0.37998 63433	−0.07622 48054	0.00953 52378	0.67
0.34	0.01106 46105	−0.09660 89124	0.76150 55448	0.39229 07352	−0.07798 55076	0.00973 35295	0.66
0.35	0.01119 08672	−0.09740 19922	0.75138 67969	0.40459 28906	−0.07969 25391	0.00992 39766	0.65
0.36	0.01130 54515	−0.09809 14176	0.74113 51552	0.41688 85248	−0.08134 41024	0.01010 63885	0.64
0.37	0.01140 84054	−0.09867 85435	0.73075 46195	0.42917 33480	−0.08293 84077	0.01028 05783	0.63
0.38	0.01149 97774	−0.09916 47468	0.72024 92136	0.44144 30664	−0.08447 36732	0.01044 63626	0.62
0.39	0.01157 96219	−0.09955 14258	0.70962 29842	0.45369 33833	−0.08594 81254	0.01060 35618	0.61
0.40	0.01164 80000	−0.09984 00000	0.69888 00000	0.46592 00000	−0.08736 00000	0.01075 20000	0.60
0.41	0.01170 49786	−0.10003 19092	0.68802 43508	0.47811 86167	−0.08870 75421	0.01089 15052	0.59
0.42	0.01175 06306	−0.10012 86132	0.67706 01464	0.49028 49336	−0.08998 90068	0.01102 19094	0.58
0.43	0.01178 50351	−0.10013 15915	0.66599 15155	0.50241 46520	−0.09120 26598	0.01114 30487	0.57
0.44	0.01180 82765	−0.10004 23424	0.65482 26048	0.51450 34752	−0.09234 67776	0.01125 47635	0.56
0.45	0.01182 04453	−0.09986 23828	0.64355 75781	0.52654 71094	−0.09341 96484	0.01135 68984	0.55
0.46	0.01182 16375	−0.09959 32476	0.63220 06152	0.53854 12648	−0.09441 95724	0.01144 93025	0.54
0.47	0.01181 19546	−0.09923 64892	0.62075 59108	0.55048 16567	−0.09534 48621	0.01153 18292	0.53
0.48	0.01179 15034	−0.09879 36768	0.60922 76736	0.56236 40064	−0.09619 38432	0.01160 43366	0.52
0.49	0.01176 03961	−0.09826 63965	0.59762 01254	0.57418 40421	−0.09696 48548	0.01166 66877	0.51
0.50	0.01171 87500	−0.09765 62500	0.58593 75000	0.58593 75000	−0.09765 62500	0.01171 87500	0.50
	A_3	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	A_{-2}	p

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по шести точкам

$$A_k^6(p)=(-1)^{k+3}\frac{p(p^2-1)(p^2-4)(p-3)}{(2+k)!(3-k)!(p-k)}$$

p	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	
1.00	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00
1.01	-0.00033 32917	0.00249 55421	-0.00993 27517	1.00320 79192	0.00506 67067	-0.00050 41246	0.01
1.02	-0.00066 63334	0.00498 10068	-0.01972 86936	1.00616 33736	0.01026 69732	-0.00101 63266	0.02
1.03	-0.00099 88752	0.00745 46597	-0.02938 43870	1.00886 39545	0.01560 09890	-0.00153 63410	0.03
1.04	-0.00133 06675	0.00991 47776	-0.03889 64352	1.01130 73152	0.02106 89024	-0.00206 38925	0.04
1.05	-0.00166 14609	0.01235 96484	-0.04826 14844	1.01349 11719	0.02667 08203	-0.00259 86953	0.05
1.06	-0.00199 10065	0.01478 75724	-0.05747 62248	1.01541 33048	0.03240 68076	-0.00314 04535	0.06
1.07	-0.00231 90556	0.01719 68621	-0.06653 73917	1.01707 15592	0.03827 68866	-0.00368 88606	0.07
1.08	-0.00264 53606	0.01958 58432	-0.07544 17664	1.01846 38464	0.04428 10368	-0.00424 35994	0.08
1.09	-0.00296 96742	0.02195 28547	-0.08418 61771	1.01958 81446	0.05041 91940	-0.00480 43420	0.09
1.10	-0.00329 17500	0.02429 62500	-0.09276 75000	1.02044 25000	0.05669 12500	-0.00537 07500	0.10
1.11	-0.00361 13426	0.02661 43965	-0.10118 26604	1.02102 50279	0.06309 70523	-0.00594 24737	0.11
1.12	-0.00392 82074	0.02890 56768	-0.10942 86336	1.02133 39136	0.06963 64032	-0.00651 91526	0.12
1.13	-0.00424 21011	0.03116 84892	-0.11750 24458	1.02136 74133	0.07630 90596	-0.00710 04152	0.13
1.14	-0.00455 27815	0.03340 12476	-0.12540 11752	1.02112 38552	0.08311 47324	-0.00768 58785	0.14
1.15	-0.00486 00078	0.03560 23828	-0.13312 19531	1.02060 16406	0.09005 30859	-0.00827 51484	0.15
1.16	-0.00516 35405	0.03777 03424	-0.14066 19648	1.01979 92448	0.09712 37376	-0.00886 78195	0.16
1.17	-0.00546 31415	0.03990 35915	-0.14801 84505	1.01871 52180	0.10432 62572	-0.00946 34747	0.17
1.18	-0.00575 85746	0.04200 06132	-0.15518 87064	1.01734 81864	0.11166 01668	-0.01006 16854	0.18
1.19	-0.00604 96051	0.04405 99092	-0.16217 00858	1.01569 68533	0.11912 49396	-0.01066 20112	0.19
1.20	-0.00633 60000	0.04608 00000	-0.16896 00000	1.01376 00000	0.12672 00000	-0.01126 40000	0.20
1.21	-0.00661 75284	0.04805 94258	-0.17555 59192	1.01153 64867	0.13444 47229	-0.01186 71878	0.21
1.22	-0.00689 39614	0.04999 67468	-0.18195 53736	1.00902 52536	0.14229 84332	-0.01247 10986	0.22
1.23	-0.00716 50719	0.05189 05435	-0.18815 59545	1.00622 53220	0.15028 04052	-0.01307 52443	0.23
1.24	-0.00743 06355	0.05373 94176	-0.19415 53152	1.00313 57952	0.15838 98624	-0.01367 91245	0.24
1.25	-0.00769 04297	0.05554 19922	-0.19995 11719	0.99975 58594	0.16662 59766	-0.01428 22266	0.25
1.26	-0.00794 42345	0.05729 69124	-0.20554 13048	0.99608 47848	0.17498 78676	-0.01488 40255	0.26
1.27	-0.00819 18324	0.05900 28458	-0.21092 35592	0.99212 19267	0.18347 46029	-0.01548 39838	0.27
1.28	-0.00843 30086	0.06065 84832	-0.21609 58464	0.98786 67264	0.19208 51968	-0.01608 15514	0.28
1.29	-0.00866 75509	0.06226 25385	-0.22105 61446	0.98331 87121	0.20081 86102	-0.01667 61653	0.29
1.30	-0.00889 52500	0.06381 37500	-0.22580 25000	0.97847 75000	0.20967 37500	-0.01726 72500	0.30
1.31	-0.00911 58993	0.06531 08802	-0.23033 30279	0.97334 27954	0.21864 94685	-0.01785 42169	0.31
1.32	-0.00932 92954	0.06675 27168	-0.23464 59136	0.96791 43936	0.22774 45632	-0.01843 64646	0.32
1.33	-0.00953 52378	0.06813 80729	-0.23873 94133	0.96219 21808	0.23695 77758	-0.01901 33784	0.33
1.34	-0.00973 35295	0.06946 57876	-0.24261 18552	0.95617 61352	0.24628 77924	-0.01958 43305	0.34
1.35	-0.00992 39766	0.07073 47266	-0.24626 16406	0.94986 63281	0.25573 32422	-0.02014 86797	0.35
1.36	-0.01010 63885	0.07194 37824	-0.24968 72448	0.94326 29248	0.26529 26976	-0.02070 57715	0.36
1.37	-0.01028 05783	0.07309 18752	-0.25288 72180	0.93636 61855	0.27496 46735	-0.02125 49379	0.37
1.38	-0.01044 63626	0.07417 79532	-0.25586 01864	0.92917 64664	0.28474 76268	-0.02179 54974	0.38
1.39	-0.01060 35618	0.07520 09929	-0.25860 48533	0.92169 42208	0.29463 99558	-0.02232 67544	0.39
1.40	-0.01075 20000	0.07616 00000	-0.26112 00000	0.91392 00000	0.30464 00000	-0.02284 80000	0.40
1.41	-0.01089 15052	0.07705 40096	-0.26340 44867	0.90585 44542	0.31474 60392	-0.02335 85111	0.41
1.42	-0.01102 19094	0.07788 20868	-0.26545 72536	0.89749 83336	0.32495 62932	-0.02385 75506	0.42
1.43	-0.01114 30487	0.07864 33273	-0.26727 73220	0.88885 24895	0.33526 89215	-0.02434 43676	0.43
1.44	-0.01125 47635	0.07933 68576	-0.26886 37952	0.87991 78752	0.34568 20224	-0.02481 81965	0.44
1.45	-0.01135 68984	0.07996 18359	-0.27021 58594	0.87069 55469	0.35619 36328	-0.02527 82578	0.45
1.46	-0.01144 93025	0.08051 74524	-0.27133 27848	0.86118 66648	0.36680 17276	-0.02572 37575	0.46
1.47	-0.01153 18292	0.08100 29296	-0.27221 39267	0.85139 24942	0.37750 42192	-0.02615 38871	0.47
1.48	-0.01160 43366	0.08141 75232	-0.27285 87264	0.84131 44064	0.38829 89568	-0.02656 78234	0.48
1.49	-0.01166 66877	0.08176 05223	-0.27326 67121	0.83095 38796	0.39918 37265	-0.02696 47286	0.49
1.50	-0.01171 87500	0.08203 12500	-0.27343 75000	0.82031 25000	0.41015 62500	-0.02734 37500	0.50
	A_3	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	A_{-2}	$-p$

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по шести точкам

$$A_k^6(p)=(-1)^{k+3}\frac{p(p^2-1)(p^2-4)(p-3)}{(2+k)!(3-k)!(p-k)}$$

p	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	
1.50	−0.01171 87500	0.08203 12500	−0.27343 75000	0.82031 25000	0.41015 62500	−0.02734 37500	0.50
1.51	−0.01176 03961	0.08222 90640	−0.27337 07954	0.80939 19629	0.42121 41848	−0.02770 40202	0.51
1.52	−0.01179 15034	0.08235 33568	−0.27306 63936	0.79819 40736	0.43235 51232	−0.02804 46566	0.52
1.53	−0.01181 19546	0.08240 35567	−0.27252 41808	0.78672 07483	0.44357 65921	−0.02836 47617	0.53
1.54	−0.01182 16375	0.08237 91276	−0.27174 41352	0.77497 40152	0.45487 60524	−0.02866 34225	0.54
1.55	−0.01182 04453	0.08227 95703	−0.27072 63281	0.76295 60156	0.46625 08984	−0.02893 97109	0.55
1.56	−0.01180 82765	0.08210 44224	−0.26947 09248	0.75066 90048	0.47769 84576	−0.02919 26835	0.56
1.57	−0.01178 50350	0.08185 32590	−0.26797 81855	0.73811 53530	0.48921 59897	−0.02942 13812	0.57
1.58	−0.01175 06306	0.08152 56932	−0.26624 84664	0.72529 75464	0.50080 06868	−0.02962 48294	0.58
1.59	−0.01170 49786	0.08112 13767	−0.26428 22208	0.71221 81883	0.51244 96721	−0.02980 20377	0.59
1.60	−0.01164 80000	0.08064 00000	−0.26208 00000	0.69888 00000	0.52416 00000	−0.02995 20000	0.60
1.61	−0.01157 96219	0.08008 12933	−0.25964 24542	0.68528 58217	0.53592 86554	−0.03007 36943	0.61
1.62	−0.01149 97774	0.07944 50268	−0.25697 03336	0.67143 86136	0.54775 25532	−0.03016 60826	0.62
1.63	−0.01140 84054	0.07873 10110	−0.25406 44895	0.65734 14570	0.55962 85377	−0.03022 81108	0.63
1.64	−0.01130 54515	0.07793 90976	−0.25092 58752	0.64299 75552	0.57155 33824	−0.03025 87085	0.64
1.65	−0.01119 08672	0.07706 91797	−0.24755 55469	0.62841 02344	0.58352 37891	−0.03025 67891	0.65
1.66	−0.01106 46105	0.07612 11924	−0.24395 46648	0.61358 29448	0.59553 63876	−0.03022 12495	0.66
1.67	−0.01092 66459	0.07509 51133	−0.24012 44942	0.59851 92617	0.60758 77354	−0.03015 09703	0.67
1.68	−0.01077 69446	0.07399 09632	−0.23606 64064	0.58322 28864	0.61967 43163	−0.03004 48154	0.68
1.69	−0.01061 54845	0.07280 88061	−0.23178 18796	0.56769 76471	0.63179 25427	−0.02990 16318	0.69
1.70	−0.01044 22500	0.07154 87500	−0.22727 25000	0.55194 75000	0.64393 87500	−0.02972 02500	0.70
1.71	−0.01025 72328	0.07021 09477	−0.22253 99629	0.53597 65304	0.65610 92010	−0.02949 94834	0.71
1.72	−0.01006 04314	0.06879 55968	−0.21758 60736	0.51978 89536	0.66830 00832	−0.02923 81286	0.72
1.73	−0.00985 18513	0.06730 29404	−0.21241 27483	0.50338 91158	0.68050 75083	−0.02893 49649	0.73
1.74	−0.00963 15055	0.06573 32676	−0.20702 20152	0.48678 14952	0.69272 75124	−0.02858 87545	0.74
1.75	−0.00939 94141	0.06408 69141	−0.20141 60156	0.46997 07031	0.70495 60547	−0.02819 82422	0.75
1.76	−0.00915 56045	0.06236 42624	−0.19559 70048	0.45296 14848	0.71718 90176	−0.02776 21555	0.76
1.77	−0.00890 01118	0.06056 57427	−0.18956 73530	0.43575 87205	0.72942 22061	−0.02727 92045	0.77
1.78	−0.00863 29786	0.05869 18332	−0.18332 95464	0.41836 74264	0.74165 13468	−0.02674 80814	0.78
1.79	−0.00835 42553	0.05674 30604	−0.17688 61883	0.40079 27558	0.75387 20883	−0.02616 74609	0.79
1.80	−0.00806 40000	0.05472 00000	−0.17024 00000	0.38304 00000	0.76608 00000	−0.02553 60000	0.80
1.81	−0.00776 22787	0.05262 32771	−0.16339 38217	0.36511 45892	0.77827 05717	−0.02485 23376	0.81
1.82	−0.00744 91654	0.05045 35668	−0.15635 06136	0.34702 20936	0.79043 92132	−0.02411 50946	0.82
1.83	−0.00712 47422	0.04821 15948	−0.14911 34570	0.32876 82245	0.80258 12540	−0.02332 28741	0.83
1.84	−0.00678 90995	0.04589 81376	−0.14168 55552	0.31035 88352	0.81469 19424	−0.02247 42605	0.84
1.85	−0.00644 23359	0.04351 40234	−0.13407 02344	0.29179 99219	0.82676 64453	−0.02156 78203	0.85
1.86	−0.00608 45585	0.04106 01324	−0.12627 09448	0.27309 76248	0.83879 98476	−0.02060 21015	0.86
1.87	−0.00571 58826	0.03853 73971	−0.11829 12617	0.25425 82292	0.85078 71516	−0.01957 56336	0.87
1.88	−0.00533 64326	0.03594 68032	−0.11013 48864	0.23528 81664	0.86272 32768	−0.01848 69274	0.88
1.89	−0.00494 63412	0.03328 93898	−0.10180 56471	0.21619 40145	0.87460 30590	−0.01733 44750	0.89
1.90	−0.00454 57500	0.03056 62500	−0.09330 75000	0.19698 25000	0.88642 12500	−0.01611 67500	0.90
1.91	−0.00413 48096	0.02777 85315	−0.08464 45304	0.17766 04979	0.89817 25173	−0.01483 22067	0.91
1.92	−0.00371 36794	0.02492 74368	−0.07582 09536	0.15823 50336	0.90985 14432	−0.01347 92806	0.92
1.93	−0.00328 25281	0.02201 42242	−0.06684 11158	0.13871 32833	0.92145 25246	−0.01205 63882	0.93
1.94	−0.00284 15335	0.01904 02076	−0.05770 94952	0.11910 25752	0.93297 01724	−0.01056 19265	0.94
1.95	−0.00239 08828	0.01600 67578	−0.04843 07031	0.09941 03906	0.94439 87109	−0.00899 42734	0.95
1.96	−0.00193 07725	0.01291 53024	−0.03900 94848	0.07964 43648	0.95573 23776	−0.00735 17875	0.96
1.97	−0.00146 14086	0.00976 73265	−0.02945 07205	0.05981 22880	0.96696 53223	−0.00563 28077	0.97
1.98	−0.00098 30066	0.00656 43732	−0.01975 94264	0.03992 21064	0.97809 16068	−0.00383 56534	0.98
1.99	−0.00049 57921	0.00330 80442	−0.00994 07558	0.01998 19233	0.98910 52046	−0.00195 86242	0.99
2.00	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	1.00
	A_3	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	A_{-2}	$-p$

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по шести точкам

$$A_k^6(p)=(-1)^{k+3}\,\frac{p(p^2-1)(p^2-4)(p-3)}{(2+k)!\,(3-k)!\,(p-k)}$$

p	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	
2.00	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	1.00
2.01	0.00050 41246	−0.00335 80392	0.01005 74108	−0.02001 52433	1.01076 97879	0.00204 19592	1.01
2.02	0.00101 63266	−0.00676 42932	0.02022 59064	−0.04005 52264	1.02140 82732	0.00416 90134	1.02
2.03	0.00153 63410	−0.01021 69214	0.03049 97755	−0.06011 12080	1.03190 90702	0.00638 29427	1.03
2.04	0.00206 38925	−0.01371 40224	0.04087 31648	−0.08017 42848	1.04226 57024	0.00868 55475	1.04
2.05	0.00259 86953	−0.01725 36328	0.05134 00781	−0.10023 53906	1.05247 16016	0.01107 86484	1.05
2.06	0.00314 04535	−0.02083 37276	0.06189 43752	−0.12028 52952	1.06252 01076	0.01356 40865	1.06
2.07	0.00368 88605	−0.02445 22191	0.07252 97708	−0.14031 46033	1.07240 44679	0.01614 37232	1.07
2.08	0.00424 35994	−0.02810 69568	0.08323 98336	−0.16031 37536	1.08211 78368	0.01881 94406	1.08
2.09	0.00480 43420	−0.03179 57264	0.09401 79854	−0.18027 30179	1.09165 32752	0.02159 31417	1.09
2.10	0.00537 07500	−0.03551 62500	0.10485 75000	−0.20018 25000	1.10100 37500	0.02446 67500	1.10
2.11	0.00594 24737	−0.03926 61847	0.11575 15021	−0.22003 21346	1.11016 21335	0.02744 22100	1.11
2.12	0.00651 91526	−0.04304 31232	0.12669 29664	−0.23981 16864	1.11912 12032	0.03052 14874	1.12
2.13	0.00710 04151	−0.04684 45921	0.13767 47167	−0.25951 07492	1.12787 36409	0.03370 65686	1.13
2.14	0.00768 58785	−0.05066 80524	0.14868 94248	−0.27911 87448	1.13641 20324	0.03699 94615	1.14
2.15	0.00827 51484	−0.05451 08984	0.15972 96094	−0.29862 49219	1.14472 68672	0.04040 21953	1.15
2.16	0.00886 78195	−0.05837 04576	0.17078 76352	−0.31801 83552	1.15281 65376	0.04391 68205	1.16
2.17	0.00946 34747	−0.06224 39898	0.18185 57120	−0.33728 79445	1.16066 73385	0.04754 54091	1.17
2.18	0.01006 16854	−0.06612 86868	0.19292 58936	−0.35642 24136	1.16827 34668	0.05129 00546	1.18
2.19	0.01066 20112	−0.07002 16721	0.20399 00767	−0.37541 03092	1.17562 70208	0.05515 28726	1.19
2.20	0.01126 40000	−0.07392 00000	0.21504 00000	−0.39424 00000	1.18272 00000	0.05913 60000	1.20
2.21	0.01186 71878	−0.07782 06554	0.22606 72433	−0.41289 96758	1.18954 43042	0.06324 15959	1.21
2.22	0.01247 10986	−0.08172 05532	0.23706 32264	−0.43137 73464	1.19609 17332	0.06747 18414	1.22
2.23	0.01307 52443	−0.08561 65377	0.24801 92080	−0.44966 08405	1.20235 39865	0.07182 89394	1.23
2.24	0.01367 91245	−0.08950 53824	0.25892 62848	−0.46773 78048	1.20832 26624	0.07631 51155	1.24
2.25	0.01428 22266	−0.09338 37891	0.26977 53906	−0.48559 57031	1.21398 92578	0.08093 26172	1.25
2.26	0.01488 40255	−0.09724 83876	0.28055 72952	−0.50322 18152	1.21934 51676	0.08568 37145	1.26
2.27	0.01548 39838	−0.10109 57353	0.29126 26033	−0.52060 32358	1.22438 16841	0.09057 06999	1.27
2.28	0.01608 15514	−0.10492 23168	0.30188 17536	−0.53772 68736	1.22908 99968	0.09559 58886	1.28
2.29	0.01667 61653	−0.10872 45427	0.31240 50179	−0.55457 94504	1.23346 11915	0.10076 16184	1.29
2.30	0.01726 72500	−0.11249 87500	0.32282 25000	−0.57114 75000	1.23748 62500	0.10607 02500	1.30
2.31	0.01785 42169	−0.11624 12010	0.33312 41346	−0.58741 73671	1.24115 60498	0.11152 41668	1.31
2.32	0.01843 64646	−0.11994 80832	0.34329 96864	−0.60337 52064	1.24446 13632	0.11712 57754	1.32
2.33	0.01901 33784	−0.12361 55083	0.35333 87492	−0.61900 69817	1.24739 28571	0.12287 75053	1.33
2.34	0.01958 43305	−0.12723 95124	0.36323 07448	−0.63429 84648	1.24994 10924	0.12878 18095	1.34
2.35	0.02014 86797	−0.13081 60547	0.37296 49219	−0.64923 52344	1.25209 65234	0.13484 11641	1.35
2.36	0.02070 57715	−0.13434 10176	0.38253 03552	−0.66380 26752	1.25384 94976	0.14105 80685	1.36
2.37	0.02125 49379	−0.13781 02060	0.39191 59445	−0.67798 59770	1.25519 02548	0.14743 50458	1.37
2.38	0.02179 54974	−0.14121 93468	0.40111 04136	−0.69177 01336	1.25610 89268	0.15397 46426	1.38
2.39	0.02232 67544	−0.14456 40883	0.41010 23092	−0.70513 99417	1.25659 55371	0.16067 94293	1.39
2.40	0.02284 80000	−0.14784 00000	0.41888 00000	−0.71808 00000	1.25664 00000	0.16755 20000	1.40
2.41	0.02335 85111	−0.15104 25717	0.42743 16758	−0.73057 47083	1.25623 21204	0.17459 49727	1.41
2.42	0.02385 75506	−0.15416 72132	0.43574 53464	−0.74260 82664	1.25536 15932	0.18181 09894	1.42
2.43	0.02434 43676	−0.15720 92540	0.44380 88405	−0.75416 46730	1.25401 80027	0.18920 27162	1.43
2.44	0.02481 81965	−0.16016 39424	0.45160 98048	−0.76522 77248	1.25219 08224	0.19677 28435	1.44
2.45	0.02527 82578	−0.16302 64453	0.45913 57031	−0.77578 10156	1.24966 94141	0.20452 40859	1.45
2.46	0.02572 37575	−0.16579 18476	0.46637 38152	−0.78580 79352	1.24704 30276	0.21245 91825	1.46
2.47	0.02615 38870	−0.16845 51516	0.47331 12358	−0.79529 16683	1.24370 08004	0.22058 08967	1.47
2.48	0.02656 78234	−0.17101 12768	0.47993 48736	−0.80421 51936	1.23983 17568	0.22889 20166	1.48
2.49	0.02696 47286	−0.17345 50590	0.48623 14504	−0.81256 12829	1.23542 48077	0.23739 53552	1.49
2.50	0.02734 37500	−0.17578 12500	0.49218 75000	−0.82031 25000	1.23046 87500	0.24609 37500	1.50
	A_3	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	A_{-2}	$-p$

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по шести точкам

$$A_k^6(p)=(-1)^{k+3}\frac{p(p^2-1)(p^2-4)(p-3)}{(2+k)!(3-k)!(p-k)}$$

p	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	
2.50	0.02734 37500	-0.17578 12500	0.49218 75000	-0.82031 25000	1.23046 87500	0.24609 37500	1.50
2.51	0.02770 40203	-0.17798 45173	0.49778 93671	-0.82745 11996	1.22495 22660	0.25499 00635	1.51
2.52	0.02804 46566	-0.18005 94432	0.50302 32064	-0.83395 95264	1.21886 39232	0.26408 71834	1.52
2.53	0.02836 47616	-0.18200 05246	0.50787 49817	-0.83981 94142	1.21219 21734	0.27338 80221	1.53
2.54	0.02866 34225	-0.18380 21724	0.51233 04648	-0.84501 25848	1.20492 53524	0.28289 55175	1.54
2.55	0.02893 97109	-0.18545 87109	0.51637 52344	-0.84952 05469	1.19705 16797	0.29261 26328	1.55
2.56	0.02919 26835	-0.18696 43776	0.51999 46752	-0.85332 45952	1.18855 92576	0.30254 23565	1.56
2.57	0.02942 13812	-0.18831 33223	0.52317 39770	-0.85640 58095	1.17943 60710	0.31268 77026	1.57
2.58	0.02962 48294	-0.18949 96068	0.52589 81336	-0.85874 50536	1.16966 99868	0.32305 17106	1.58
2.59	0.02980 20377	-0.19051 72046	0.52815 19417	-0.86032 29742	1.15924 87533	0.33363 74461	1.59
2.60	0.02995 20000	-0.19136 00000	0.52992 00000	-0.86112 00000	1.14816 00000	0.34444 80000	1.60
2.61	0.03007 36943	-0.19202 17879	0.53118 67083	-0.86111 63408	1.13639 12367	0.35548 64894	1.61
2.62	0.03016 60826	-0.19249 62732	0.53193 62664	-0.86029 19864	1.12392 98532	0.36675 60574	1.62
2.63	0.03022 81107	-0.19277 70702	0.53215 26730	-0.85862 67055	1.11076 31190	0.37825 98730	1.63
2.64	0.03025 87085	-0.19285 77024	0.53181 97248	-0.85610 00448	1.09687 81824	0.39000 11315	1.64
2.65	0.03025 67891	-0.19273 16016	0.53092 10156	-0.85269 13281	1.08226 20703	0.40198 30547	1.65
2.66	0.03022 12495	-0.19239 21076	0.52943 99352	-0.84837 96552	1.06690 16876	0.41420 88905	1.66
2.67	0.03015 09704	-0.19183 24679	0.52735 96683	-0.84314 39008	1.05078 38166	0.42668 19134	1.67
2.68	0.03004 48154	-0.19104 58368	0.52466 31936	-0.83696 27136	1.03389 51168	0.43940 54246	1.68
2.69	0.02990 16317	-0.19002 52752	0.52133 32829	-0.82981 45154	1.01622 21240	0.45238 27520	1.69
2.70	0.02972 02500	-0.18876 37500	0.51735 25000	-0.82167 75000	0.99775 12500	0.46561 72500	1.70
2.71	0.02949 94834	-0.18725 41335	0.51270 31996	-0.81252 96321	0.97846 87823	0.47911 23003	1.71
2.72	0.02923 81286	-0.18548 92032	0.50736 75264	-0.80234 86464	0.95836 08832	0.49287 13114	1.72
2.73	0.02893 49650	-0.18346 16409	0.50132 74142	-0.79111 20467	0.93741 35896	0.50689 77188	1.73
2.74	0.02858 87545	-0.18116 40324	0.49456 45848	-0.77879 71048	0.91561 28124	0.52119 49855	1.74
2.75	0.02819 82422	-0.17858 88672	0.48706 05469	-0.76538 08594	0.89294 43359	0.53576 66016	1.75
2.76	0.02776 21555	-0.17572 85376	0.47879 65952	-0.75084 01152	0.86939 38176	0.55061 60845	1.76
2.77	0.02727 92044	-0.17257 53385	0.46975 38095	-0.73515 14420	0.84494 67873	0.56574 69793	1.77
2.78	0.02674 80814	-0.16912 14668	0.45991 30536	-0.71829 11736	0.81958 86468	0.58116 28586	1.78
2.79	0.02616 74609	-0.16535 90208	0.44925 49742	-0.70023 54067	0.79330 46696	0.59686 73228	1.79
2.80	0.02553 60000	-0.16128 00000	0.43776 00000	-0.68096 00000	0.76608 00000	0.61286 40000	1.80
2.81	0.02485 23376	-0.15687 63042	0.42540 83408	-0.66044 05733	0.73789 96529	0.62915 65462	1.81
2.82	0.02411 50946	-0.15213 97332	0.41217 99864	-0.63865 25064	0.70874 85132	0.64574 86454	1.82
2.83	0.02332 28741	-0.14706 19865	0.39805 47055	-0.61557 09380	0.67861 13352	0.66264 40097	1.83
2.84	0.02247 42605	-0.14163 46624	0.38301 20448	-0.59117 07648	0.64747 27424	0.67984 63795	1.84
2.85	0.02156 78203	-0.13584 92578	0.36703 13281	-0.56542 66406	0.61531 72266	0.69735 95234	1.85
2.86	0.02060 21015	-0.12969 71676	0.35009 16552	-0.53831 29752	0.58212 91476	0.71518 72385	1.86
2.87	0.01957 56335	-0.12316 96841	0.33217 19008	-0.50980 39333	0.54789 27329	0.73333 33502	1.87
2.88	0.01848 69274	-0.11625 79968	0.31325 07136	-0.47987 34336	0.51259 20768	0.75180 17126	1.88
2.89	0.01733 44751	-0.10895 31915	0.29330 65154	-0.44849 51479	0.47621 11402	0.77059 62087	1.89
2.90	0.01611 67500	-0.10124 62500	0.27231 75000	-0.41564 25000	0.43873 37500	0.78972 07500	1.90
2.91	0.01483 22068	-0.09312 80498	0.25026 16321	-0.38128 86646	0.40014 35985	0.80917 92770	1.91
2.92	0.01347 92806	-0.08458 93632	0.22711 66464	-0.34540 65664	0.36042 42432	0.82897 57594	1.92
2.93	0.01205 63881	-0.07562 08571	0.20286 00467	-0.30796 88792	0.31955 91059	0.84911 41956	1.93
2.94	0.01056 19265	-0.06621 30924	0.17746 91048	-0.26894 80248	0.27753 14724	0.86959 86135	1.94
2.95	0.00899 42734	-0.05635 65234	0.15092 08594	-0.22831 61719	0.23432 44922	0.89043 30703	1.95
2.96	0.00735 17875	-0.04604 14976	0.12319 21152	-0.18604 52352	0.18992 11776	0.91162 16525	1.96
2.97	0.00563 28077	-0.03525 82547	0.09425 94420	-0.14210 68745	0.14430 44035	0.93316 84760	1.97
2.98	0.00383 56534	-0.02399 69268	0.06409 91736	-0.09647 24936	0.09745 69068	0.95507 76866	1.98
2.99	0.00195 86242	-0.01224 75371	0.03268 74067	-0.04911 32392	0.04936 12858	0.97735 34596	1.99
3.00	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	2.00
	A_3	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	A_{-2}	$-p$

Таблица 25.1. Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по семи точкам

$$A_k^7(p)=(-1)^{k+3}\frac{p(p^2-1)(p^2-4)(p^2-9)}{(3+k)!(3-k)!(p-k)}$$

p	A_{-3}	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	
0.0	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.0
0.1	−0.00159 10125	0.01409 18250	−0.06725 64375	0.98642 77500	0.08226 23125	−0.01557 51750	0.00170 07375	0.1
0.2	−0.00295 68000	0.02580 48000	−0.11827 20000	0.94617 60000	0.17740 80000	−0.03153 92000	0.00337 92000	0.2
0.3	−0.00400 28625	0.03445 94250	−0.15241 66875	0.88062 97500	0.28305 95625	−0.04662 15750	0.00489 23875	0.3
0.4	−0.00465 92000	0.03960 32000	−0.16972 80000	0.79206 40000	0.39603 20000	−0.05740 48000	0.00609 28000	0.4
0.5	−0.00488 28125	0.04101 56250	−0.17089 84375	0.68359 37500	0.51269 53125	−0.06835 93750	0.00683 59375	0.5
0.6	−0.00465 92000	0.03870 72000	−0.15724 80000	0.55910 40000	0.62899 20000	−0.07188 48000	0.00698 88000	0.6
0.7	−0.00430 28625	0.03291 24250	−0.13068 16875	0.42315 97500	0.74052 95625	−0.06835 65750	0.00643 93875	0.7
0.8	−0.00295 68000	0.02407 68000	−0.09363 20000	0.28089 60000	0.84268 80000	−0.05617 92000	0.00510 72000	0.8
0.9	−0.00159 10125	0.01283 78250	−0.04898 64375	0.13788 77500	0.93074 23125	−0.03384 51750	0.00295 47375	0.9
1.0	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.0
1.1	0.00170 07375	−0.01349 61750	0.04980 73125	−0.12678 22500	1.04595 35625	0.04648 68250	−0.00367 00125	1.1
1.2	0.00337 92000	−0.02661 12000	0.09676 80000	−0.23654 40000	1.06444 80000	0.10644 48000	−0.00788 48000	1.2
1.3	0.00489 23875	−0.03824 95750	0.13719 95625	−0.32365 02500	1.05186 33125	0.18031 94250	−0.01237 48625	1.3
1.4	0.00609 28000	−0.04730 88000	0.16755 20000	−0.38297 60000	1.00531 20000	0.26808 32000	−0.01675 52000	1.4
1.5	0.00683 59375	−0.05273 43750	0.18457 03125	−0.41015 62500	0.92285 15625	0.36914 06250	−0.02050 78125	1.5
1.6	0.00698 88000	−0.05358 08000	0.18547 20000	−0.40185 60000	0.80371 20000	0.48222 72000	−0.02296 32000	1.6
1.7	0.00643 93875	−0.04907 85750	0.16813 95625	−0.35606 02500	0.64853 83125	0.60530 24250	−0.02328 08625	1.7
1.8	0.00510 72000	−0.03870 72000	0.13132 80000	−0.27238 40000	0.45964 80000	0.73543 68000	−0.02042 88000	1.8
1.9	0.00295 47375	−0.02227 41750	0.07488 73125	−0.15240 22500	0.24130 35625	0.86869 28250	−0.01316 20125	1.9
2.0	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	2.0
2.1	−0.00367 00125	0.02739 08250	−0.09056 64375	0.17825 77500	−0.25523 26875	1.12302 38250	0.02079 67375	2.1
2.2	−0.00788 48000	0.05857 28000	−0.19219 20000	0.37273 60000	−0.51251 20000	1.23002 88000	0.05125 12000	2.2
2.3	−0.01237 48625	0.09151 64250	−0.29812 16875	0.57031 97500	−0.75677 04375	1.31173 54250	0.09369 53875	2.3
2.4	−0.01675 52000	0.12337 92000	−0.39916 80000	0.75398 40000	−0.96940 80000	1.35717 12000	0.15079 68000	2.4
2.5	−0.02050 78125	0.15039 06250	−0.48339 84375	0.90234 37500	−1.12792 96875	1.35351 56250	0.22558 59375	2.5
2.6	−0.02296 32000	0.16773 12000	−0.53580 80000	0.98918 40000	−1.20556 80000	1.28593 92000	0.32148 48000	2.6
2.7	−0.02328 08625	0.16940 54250	−0.53797 66875	0.98296 97500	−1.17089 04375	1.13743 64250	0.44233 63875	2.7
2.8	−0.02042 88000	0.14810 88000	−0.46771 20000	0.84633 60000	−0.98739 20000	0.88865 28000	0.59243 52000	2.8
2.9	−0.01316 20125	0.09508 88250	−0.29867 64375	0.53555 77500	−0.61307 26875	0.51770 58250	0.77655 87375	2.9
3.0	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	3.0
	A_3	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	A_{-2}	A_{-3}	$-p$

Коэффициенты интерполяционной формулы Лагранжа по восьми точкам

$$A_k^8(p)=(-1)^{k+4}\frac{p(p^2-1)(p^2-4)(p^2-9)(p-4)}{(3+k)!(4-k)!(p-k)}$$

p	A_{-3}	A_{-2}	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	
0.0	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.0
0.1	−0.00088 64213	0.00915 96863	−0.05246 00213	0.96176 70563	0.10686 30063	−0.03037 15913	0.00663 28763	−0.00070 45913	0.9
0.2	−0.00160 51200	0.01634 30400	−0.08988 67200	0.89886 72000	0.22471 68000	−0.05992 44800	0.01284 09600	−0.00135 16800	0.8
0.3	−0.00211 57988	0.02124 99787	−0.11278 83487	0.81458 25188	0.34910 67938	−0.08624 99137	0.01810 18337	−0.00188 70638	0.7
0.4	−0.00239 61600	0.02376 19200	−0.12220 41600	0.71285 76000	0.47523 84000	−0.10692 86400	0.02193 40800	−0.00226 30400	0.6
0.5	−0.00244 14063	0.02392 57812	−0.11962 89062	0.59814 45312	0.59814 45313	−0.11962 89062	0.02392 57812	−0.00244 14062	0.5
1.0	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.0
1.1	0.00070 45912	−0.00652 31512	0.02888 82412	−0.09191 71312	1.01108 84438	0.06740 58962	−0.01064 30362	0.00099 61462	−0.1
1.2	0.00135 16800	−0.01241 85600	0.05419 00800	−0.16558 08000	0.99348 48000	0.14902 27200	−0.02207 74400	0.00202 75200	−0.2
1.3	0.00188 70638	−0.01721 23088	0.07408 77638	−0.21846 39188	0.94667 69812	0.24343 12238	−0.03341 21288	0.00300 53238	−0.3
1.4	0.00226 30400	−0.02050 04800	0.08712 70400	−0.24893 44000	0.87127 04000	0.34850 81600	−0.04356 35200	0.00382 97600	−0.4
1.5	0.00244 14062	−0.02197 26562	0.09228 51562	−0.25634 76562	0.76904 29688	0.46142 57812	−0.05126 95312	0.00439 45312	−0.5
1.6	0.00239 61600	−0.02143 23200	0.08902 65600	−0.24111 36000	0.64296 96000	0.57867 26400	−0.05511 16800	0.00459 26400	−0.6
1.7	0.00211 57988	−0.01881 34538	0.07734 41988	−0.20473 46438	0.49721 27062	0.69609 77888	−0.05354 59838	0.00432 35888	−0.7
1.8	0.00160 51200	−0.01419 26400	0.05778 43200	−0.14981 12000	0.33707 52000	0.80898 04800	−0.04494 33600	0.00350 20800	−0.8
1.9	0.00088 64213	−0.00779 59613	0.03145 26712	−0.08001 11812	0.16891 24938	0.91212 74662	−0.02764 02263	0.00206 83163	−0.9
2.0	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	−1.0
2.1	−0.00099 61462	0.00967 37612	−0.03441 52462	0.08467 24312	−0.16164 73688	1.06687 26338	0.03951 38012	−0.00267 38662	−1.1
2.2	−0.00202 75200	0.01757 18400	−0.06918 91200	0.16773 12000	−0.30750 72000	1.10702 59200	0.09225 21600	−0.00585 72800	−1.2
2.3	−0.00300 53238	0.02592 96538	−0.10136 13738	0.24238 58938	−0.42883 65812	1.11497 51112	0.15928 21588	−0.00936 95388	−1.3
2.4	−0.00382 97600	0.03290 11200	−0.12773 37600	0.30159 36000	−0.51701 76000	1.08573 69600	0.24127 48800	−0.01292 54400	−1.4
2.5	−0.00439 45312	0.03759 76562	−0.14501 95312	0.33837 89062	−0.56396 48438	1.01513 67188	0.33837 89062	−0.01611 32812	−1.5
2.6	−0.00459 26400	0.03913 72800	−0.15002 62400	0.34621 44000	−0.56259 84000	0.90015 74400	0.45007 87200	−0.01837 05600	−1.6
2.7	−0.00432 35888	0.03670 45088	−0.13987 39388	0.31946 51688	−0.50738 58562	0.73933 36762	0.57503 73038	−0.01895 72738	−1.7
2.8	−0.00350 20800	0.0[illegible]62 17600	−0.11225 08800	0.25390 08000	−0.39495 68000	0.53319 16800	0.71092 22400	−0.01692 67200	−1.8
2.9	−0.00206 83162	0.01743 29512	−0.06570 88162	0.14727 83812	−0.22479 33188	0.28473 82038	0.85421 46112	−0.01109 36962	−1.9
3.0	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	0.00000 00000	−2.0
3.1	0.00267 38662	−0.02238 70762	0.08354 20162	−0.18415 17562	0.27184 30688	0.31138 38788	1.14174 08888	0.01812 28712	−2.1
3.2	0.00585 72800	−0.04888 57600	0.18157 56800	−0.39719 68000	0.57774 08000	0.63551 48800	1.27102 97600	0.04539 39200	−2.2
3.3	0.00936 95388	−0.07796 16338	0.28827 67388	−0.62605 55438	0.89825 36062	0.95353 07512	1.37732 21962	0.08432 58488	−2.3
3.4	0.01292 54400	−0.10723 32800	0.39481 34400	−0.85155 84000	1.20637 44000	1.24084 22400	1.44764 92800	0.13787 13600	−2.4
3.5	0.01611 32812	−0.13330 07812	0.48876 95312	−1.04736 32812	1.46630 85938	−1.46630 85938	1.46630 85938	0.20947 26562	−2.5
3.6	0.01837 05600	−0.15155 71200	0.55351 29600	−1.17877 76000	1.63215 36000	−1.59134 97600	1.41453 31200	0.30311 42400	−2.6
3.7	0.01895 72738	−0.15598 17788	0.56750 81738	−1.20148 12688	1.64647 43312	−1.56899 31862	1.27013 73412	0.42337 91138	−2.7
3.8	0.01692 67200	−0.13891 58400	0.50356 99200	−1.06014 72000	1.43877 12000	−1.34285 31200	1.00713 98400	0.57550 84800	−2.8
3.9	0.01109 36962	−0.09081 78862	0.32805 64462	−0.68695 58062	0.92383 71188	−0.84604 03088	0.59536 16988	0.76546 50412	−2.9
4.0	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	1.00000 00000	−3.0
	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0	A_{-1}	A_{-2}	A_{-3}	p

Таблица 25.2. Коэффициенты формулы численного дифференцирования k-го порядка по n точкам

Формулы дифференцирования:

$$\left.\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right|_{x=x_j} \approx \frac{k!}{m!\,h^k} \sum_{i=0}^{m} A_i f(x_i)$$

Первая производная ($k=1$)

j	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\frac{h^k}{k!}$ Ошибка
	Три точки ($m=2$)						
0	−3	4	−1				1/3
1	−1	0	1				−1/6 $h^3 f^{(3)}$
2	1	−4	3				1/3
	Четыре точки ($m=3$)						
0	−11	18	−9	2			−1/4
1	−2	−3	6	−1			1/12 $h^4 f^{(4)}$
2	1	−6	3	2			−1/12
3	−2	9	−18	11			1/4
	Пять точек ($m=4$)						
0	−50	96	−72	32	−6		1/5
1	−6	−20	36	−12	2		−1/20
2	2	−16	0	16	−2		1/30 $h^5 f^{(5)}$
3	−2	12	−36	20	6		−1/20
4	6	−32	72	−96	50		1/5
	Шесть точек ($m=5$)						
0	−274	600	−600	400	−150	·24	−1/6
1	−24	−130	240	−120	40	−6	1/30
2	6	−60	−40	120	−30	4	−1/60 $h^6 f^{(6)}$
3	−4	30	−120	40	60	−6	1/60
4	6	−40	120	−240	130	24	−1/30
5	−24	150	−400	600	−600	274	1/6

Вторая производная ($k=2$)

j	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\frac{h^k}{k!}$ Ошибка
	Три точки ($m=2$)						
0	1	−2	1				−1/2 $h^3 f^{(3)}$
1	1	−2	1				−1/24 $h^4 f^{(4)}$
2	1	−2	1				1/2 $h^3 f^{(3)}$
	Четыре точки ($m=3$)						
0	6	−15	12	−3			11/24
1	3	−6	3	0			−1/24 $h^4 f^{(4)}$
2	0	3	−6	3			−1/24
3	−3	12	−15	6			11/24
	Пять точек ($m=4$)						
0	35	−104	114	−56	11		−5/12 $h^5 f^{(5)}$
1	11	−20	6	4	−1		1/24
2	−1	16	−30	16	−1		1/180 $h^6 f^{(6)}$
3	−1	4	6	−20	11		−1/24 $h^5 f^{(5)}$
4	11	−56	114	−104	35		5/12
	Шесть точек ($m=5$)						
0	225	−770	1070	−780	305	−50	137/360
1	50	−75	−20	70	−30	5	−13/360
2	−5	80	−150	80	−5	0	1/180 $h^6 f^{(6)}$
3	0	−5	80	−150	80	−5	1/180
4	5	−30	70	−20	−75	50	−13/360
5	−50	305	−780	1070	−770	225	137/360

Взято из [25.4].

Третья производная ($k=3$)

j	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\frac{h^k}{k!}$ Ошибка
	Четыре точки ($m=3$)						
0	−1	3	−3	1			−1/4
1	−1	3	−3	1			−1/12 $h^4 f^{(4)}$
2	−1	3	−3	1			1/12
3	−1	3	−3	1			1/4
	Пять точек ($m=4$)						
0	−10	36	−48	28	−6		7/24
1	−6	20	−24	12	−2		1/24
2	−2	4	0	−4	2		−1/24 $h^5 f^{(5)}$
3	2	−12	24	−20	6		1/24
4	6	−28	48	−36	10		7/24
	Шесть точек ($m=5$)						
0	−85	355	−590	490	−205	35	−5/16
1	−35	125	−170	110	−35	5	−1/48
2	−5	−5	50	−70	35	−5	1/48 $h^6 f^{(6)}$
3	5	−35	70	−50	5	5	−1/46
4	−5	35	−110	170	−125	35	1/48
5	−35	205	−490	590	−355	85	5/16

Четвертая производная ($k=4$)

j	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\frac{h^k}{k!}$ Ошибка
	Пять точек ($m=4$)						
0	1	−4	6	−4	1		−1/12 $h^5 f^{(5)}$
1	1	−4	6	−4	1		−1/24
2	1	−4	6	−4	1		−1/144 $h^6 f^{(6)}$
3	1	−4	6	−4	1		1/24 $h^5 f^{(5)}$
4	1	−4	6	−4	1		1/12
	Шесть точек ($m=5$)						
0	15	−70	130	−120	55	−10	17/144
1	10	−45	80	−70	30	−5	5/144
2	5	−20	30	−20	5	0	−1/144 $h^6 f^{(6)}$
3	0	5	−20	30	−20	5	−1/144
4	−5	30	−70	80	−45	10	5/144
5	−10	55	−120	130	−70	15	17/144

Пятая производная ($k=5$)

j	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\frac{h^k}{k!}$ Ошибка
	Шесть точек ($m=5$)						
0	−1	5	−10	10	−5	1	−1/48
1	−1	5	−10	10	−5	1	−1/80
2	−1	5	−10	10	−5	1	−1/240 $h^6 f^{(6)}$
3	−1	5	−10	10	−5	1	1/240
4	−1	5	−10	10	−5	1	1/80
5	−1	5	−10	10	−5	1	1/48

Таблица 25.3. Коэффициенты формулы Лагранжа для численного интегрирования по n точкам

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)\,dx \approx h \sum_k A_k(m) f(x_k)$$

$$DA_k^n(m)$$

n — нечетное

n	$m\backslash k$	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4		D
3	−1				5	8	−1				0	12
5	−2			251	646	−264	106	−19			1	720
	−1			−19	346	456	−74	11			0	
7	−3		19087	65112	−46461	37504	−20211	6312	−863		2	60480
	−2		−863	25128	46989	−16256	7299	−2088	271		1	
	−1		271	−2760	30819	37504	−6771	1608	−191		0	
9	−4	1070017	4467094	−4604594	5595358	−5033120	3146338	−1291214	312874	−33953	3	3628800
	−3	−33953	1375594	3244786	−1752542	1317280	−755042	294286	−68906	7297	2	
	−2	7297	−99626	1638286	2631838	−833120	397858	−142094	31594	−3233	1	
	−1	−3233	36394	−216014	1909858	2224480	−425762	126286	−25706	2497	0	
		4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	$k\backslash m$	

n — четное

n	$m\backslash k$	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5		D
4	−1				9	19	−5	1				1	24
	0				−1	13	13	−1				0	
6	−2			475	1427	−798	482	−173	27			2	1440
	−1			−27	637	1022	−258	77	−11			1	
	0			11	−93	802	802	−93	11			0	
8	−3		36799	139849	−121797	123133	−88547	41499	−11351	1375		3	120960
	−2		−1375	47799	101349	−44797	26883	−11547	2999	−351		2	
	−1		351	−4183	57627	81693	−20227	7227	−1719	191		1	
	0		−191	1879	−9531	68323	68323	−9531	1879	−191		0	
10	−4	2082753	9449717	−11271304	16002320	−17283646	13510082	−7394032	2687864	−583435	57281	4	7257600
	−3	−57281	2655563	6872072	−4397584	3973310	−2848834	1481072	−520312	110219	−10625	3	
	−2	10625	−163531	3133688	5597072	−2166334	1295810	−617584	206072	−42187	3969	2	
	−1	−3969	50315	−342136	3609968	4763582	−1166146	462320	−141304	27467	−2497	1	
	0	2497	−28939	162680	−641776	4134338	4134338	−641776	162680	−28939	2497	0	
		5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	$k\backslash m$	

Взято из [25.40].

Таблица 25.4. Узлы и весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Узлы $\pm x_i$ (нули многочленов Лежандра) Весовые коэффициенты w_i

n	$\pm x_i$	w_i
$n=2$	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
$n=3$	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
	0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
$n=4$	0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
	0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
$n=5$	0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889
	0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
	0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189
$n=6$	0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691
	0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
	0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170
$n=7$	0.00000 00000 00000	0.41795 91836 73469
	0.40584 51513 77397	0.38183 00505 05119
	0.74153 11855 99394	0.27970 53914 89277
	0.94910 79123 42759	0.12948 49661 68870
$n=8$	0.18343 46424 95650	0.36268 37833 78362
	0.52553 24099 16329	0.31370 66458 77887
	0.79666 64774 13627	0.22238 10344 53374
	0.96028 98564 97536	0.10122 85362 90376
$n=9$	0.00000 00000 00000	0.33023 93550 01260
	0.32425 34234 03809	0.31234 70770 40003
	0.61337 14327 00590	0.26061 06964 02935
	0.83603 11073 26636	0.18064 81606 94857
	0.96816 02395 07626	0.08127 43883 61574
$n=10$	0.14887 43389 81631	0.29552 42247 14753
	0.43339 53941 29247	0.26926 67193 09996
	0.67940 95682 99024	0.21908 63625 15982
	0.86506 33666 88985	0.14945 13491 50581
	0.97390 65285 17172	0.06667 13443 08688
$n=12$	0.12523 34085 11469	0.24914 70458 13403
	0.36783 14989 98180	0.23349 25365 38355
	0.58731 79542 86617	0.20316 74267 23066
	0.76990 26741 94305	0.16007 83285 43346
	0.90411 72563 70475	0.10693 93259 95318
	0.98156 06342 46719	0.04717 53363 86512

n	$\pm x_i$	w_i
$n=16$	0.09501 25098 37637 440185	0.18945 06104 55068 496285
	0.28160 35507 79258 913230	0.18260 34150 44923 588867
	0.45801 67776 57227 386342	0.16915 65193 95002 538189
	0.61787 62444 02643 748447	0.14959 59888 16576 732081
	0.75540 44083 55003 033895	0.12462 89712 55533 872052
	0.86563 12023 87831 743880	0.09515 85116 82492 784810
	0.94457 50230 73232 576078	0.06225 35239 38647 892863
	0.98940 09349 91649 932596	0.02715 24594 11754 094852
$n=20$	0.07652 65211 33497 333755	0.15275 33871 30725 850698
	0.22778 58511 41645 078080	0.14917 29864 72603 746788
	0.37370 60887 15419 560673	0.14209 61093 18382 051329
	0.51086 70019 50827 098004	0.13168 86384 49176 626898
	0.63605 36807 26515 025453	0.11819 45319 61518 417312
	0.74633 19064 60150 792614	0.10193 01198 17240 435037
	0.83911 69718 22218 823395	0.08327 67415 76704 748725
	0.91223 44282 51325 905868	0.06267 20483 34109 063570
	0.96397 19272 77913 791268	0.04060 14298 00386 941331
	0.99312 85991 85094 924786	0.01761 40071 39152 118312
$n=24$	0.06405 68928 62605 626085	0.12793 81953 46752 156974
	0.19111 88674 73616 309159	0.12583 74563 46828 296121
	0.31504 26796 96163 374387	0.12167 04729 27803 391204
	0.43379 35076 26045 138487	0.11550 56680 53725 601353
	0.54542 14713 88839 535658	0.10744 42701 15965 634783
	0.64809 36519 36975 569252	0.09761 86521 04113 888270
	0.74012 41915 78554 364244	0.08619 01615 31953 275917
	0.82000 19859 73902 921954	0.07334 64814 11080 305734
	0.88641 55270 04401 034213	0.05929 85849 15436 780746
	0.93827 45520 02732 758524	0.04427 74388 17419 806169
	0.97472 85559 71309 498198	0.02853 13886 28933 663181
	0.99518 72199 97021 360180	0.01234 12297 99987 199547

Взято из [25.32], [25.33] и [25.39].

Таблица 25.4. Узлы и весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Узлы $\pm x_i$ (нули многочленов Лежандра) $\pm x_i$	Весовые коэффициенты w_i w_i
$n=32$	
0.04830 76656 87738 316235	0.09654 00885 14727 800567
0.14447 19615 82796 493485	0.09563 87200 79274 859419
0.23928 73622 52137 074545	0.09384 43990 80804 565639
0.33186 86022 82127 649780	0.09117 38786 95763 884713
0.42135 12761 30635 345364	0.08765 20930 04403 811143
0.50689 99089 32229 390024	0.08331 19242 26946 755222
0.58771 57572 40762 329041	0.07819 38957 87070 306472
0.66304 42669 30215 200975	0.07234 57941 08848 506225
0.73218 21187 40289 680387	0.06582 22227 76361 846838
0.79448 37959 67942 406963	0.05868 40934 78535 547145
0.84936 76137 32569 970134	0.05099 80592 62376 176196
0.89632 11557 66052 123965	0.04283 58980 22226 680657
0.93490 60759 37739 689171	0.03427 38629 13021 433103
0.96476 22555 87506 430774	0.02539 20653 09262 059456
0.98561 15115 45268 335400	0.01627 43947 30905 670605
0.99726 38618 49481 563545	0.00701 86100 09470 096600
$n=40$	
0.03877 24175 06050 821933	0.07750 59479 78424 811264
0.11608 40706 75255 208483	0.07703 98181 64247 965588
0.19269 75807 01371 099716	0.07611 03619 00626 242372
0.26815 21850 07253 681141	0.07472 31690 57968 264200
0.34199 40908 25758 473007	0.07288 65823 95804 059061
0.41377 92043 71605 001525	0.07061 16473 91286 779695
0.48307 58016 86178 712909	0.06791 20458 15233 903826
0.54946 71250 95128 202076	0.06480 40134 56601 038075
0.61255 38896 67980 237953	0.06130 62424 92928 939167
0.67195 66846 14179 548379	0.05743 97690 99391 551367
0.72731 82551 89927 103281	0.05322 78469 83936 824355
0.77830 56514 26519 387695	0.04869 58076 35072 232061
0.82461 22308 33311 663196	0.04387 09081 85673 271992
0.86595 95032 12259 503821	0.03878 21679 74472 017640
0.90209 88069 68874 296728	0.03346 01952 82547 847393
0.93281 28082 78676 533361	0.02793 70069 80023 401098
0.95791 68192 13791 655805	0.02224 58491 94166 957262
0.97725 99499 83774 262663	0.01642 10583 81907 888713
0.99072 62386 99457 006453	0.01049 82845 31152 813615
0.99823 77097 10559 200350	0.00452 12770 98533 191258
$n=48$	
0.03238 01709 62869 362033	0.06473 76968 12683 922503
0.09700 46992 09462 698930	0.06446 61644 35950 082207
0.16122 23560 68891 718056	0.06392 42385 84648 186624
0.22476 37903 94689 061225	0.06311 41922 86254 025657
0.28736 24873 55455 576736	0.06203 94231 59892 663904
0.34875 58862 92160 738160	0.06070 44391 65893 880053
0.40868 64819 90716 729916	0.05911 48396 98395 635746
0.46690 29047 50958 404545	0.05727 72921 00403 215705
0.52316 09747 22233 033678	0.05519 95036 99984 162868
0.57722 47260 83972 703818	0.05289 01894 85193 667096
0.62886 73967 76513 623995	0.05035 90355 53854 474958
0.67787 23796 32663 905212	0.04761 66584 92490 474826
0.72403 41309 23814 654674	0.04467 45608 56694 280419
0.76715 90325 15740 339254	0.04154 50829 43464 749214
0.80706 62040 29442 627083	0.03824 13510 65830 706317
0.84358 82616 24393 530711	0.03477 72225 64770 438893
0.87657 20202 74247 885906	0.03116 72278 32798 088902
0.90587 91367 15569 672322	0.02742 65097 08356 948200
0.93138 66907 06554 333114	0.02357 07608 39324 379141
0.95298 77031 60430 860723	0.01961 61604 57355 527814
0.97059 15925 46247 250461	0.01557 93157 22943 848728
0.98412 45837 22826 857745	0.01147 72345 79234 539490
0.99353 01722 66350 757548	0.00732 75539 01276 262102
0.99877 10072 52426 118601	0.00315 33460 52305 838633

Таблица 25.4. Узлы и весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Узлы $\pm x_i$ (нули многочленов Лежандра) Весовые коэффициенты w_i

$n = 64$

$\pm x_i$	w_i
0,02435 02926 63424 432509	0,04869 09570 09139 720383
0,07299 31217 87799 039450	0,04857 54674 41503 426935
0,12146 28192 96120 554470	0,04834 47622 34802 957170
0,16964 44204 23992 818037	0,04799 93885 96458 307728
0,21742 36437 40007 084150	0,04754 01657 14830 308662
0,26468 71622 08767 416374	0,04696 81828 16210 017325
0,31132 28719 90210 956158	0,04628 47965 81314 417296
0,35722 01583 37668 115950	0,04549 16279 27418 144480
0,40227 01579 63991 603696	0,04459 05581 63756 563060
0,44636 60172 53464 087985	0,04358 37245 29323 453377
0,48940 31457 07052 957479	0,04247 35151 23653 589007
0,53127 94640 19894 545658	0,04126 25632 42623 528610
0,57189 56462 02634 034284	0,03995 37411 32720 341387
0,61115 53551 72393 250249	0,03855 01531 78615 629129
0,64896 54712 54657 339858	0,03705 51285 40240 046040
0,68523 63130 54233 242564	0,03547 22132 56882 383811
0,71988 18501 71610 826849	0,03380 51618 37141 609392
0,75281 99072 60531 896612	0,03205 79283 54851 553585
0,78397 23589 43341 407610	0,03023 46570 72402 478868
0,81326 53151 22797 559742	0,02833 96726 14259 483228
0,84062 92962 52580 362752	0,02637 74697 15054 658672
0,86599 93981 54092 819761	0,02435 27025 68710 873338
0,88931 54459 95114 105853	0,02227 01738 08383 254159
0,91052 21370 78502 805756	0,02013 48231 53530 209372
0,92956 91721 31939 575821	0,01795 17157 75697 343085
0,94641 13748 58402 816062	0,01572 60304 76024 719322
0,96100 87996 52053 718919	0,01346 30478 96718 642598
0,97332 68277 89910 963742	0,01116 81394 60131 128819
0,98333 62538 84625 956931	0,00884 67598 26363 947723
0,99101 33714 76744 320739	0,00650 44579 68978 362856
0,99634 01167 71955 279347	0,00414 70332 60562 467635
0,99930 50417 35772 139457	0,00178 32807 21696 432947

$n = 80$

$\pm x_i$	w_i
0,01951 13832 56793 997654	0,03901 78136 56306 654811
0,05850 44371 52420 668629	0,03895 83959 62769 531199
0,09740 83984 41584 599063	0,03883 96510 59051 968932
0,13616 40228 09143 886559	0,03866 17597 74076 463327
0,17471 22918 32646 812559	0,03842 49930 06959 423185
0,21299 45028 57666 132572	0,03812 97113 14477 638344
0,25095 23583 92272 120493	0,03777 63643 62001 397490
0,28852 80548 84511 853109	0,03736 54902 38730 490027
0,32566 43707 47701 914619	0,03689 77146 38276 008839
0,36230 47534 99487 315619	0,03637 37499 05835 978044
0,39839 34058 81969 227024	0,03579 43939 53416 054603
0,43387 53708 31756 093062	0,03516 05290 44747 593496
0,46869 66151 70544 477036	0,03447 31204 51753 928794
0,50280 41118 88784 987594	0,03373 32149 84611 522817
0,53614 59208 97131 932020	0,03294 19393 97645 401383
0,56867 12681 22709 784725	0,03210 04986 73487 773148
0,60033 06228 29751 743155	0,03121 01741 88114 701642
0,63107 57730 46871 966248	0,03027 23217 59557 980661
0,66085 98989 86119 801736	0,02928 83695 83267 847693
0,68963 76443 42027 600771	0,02825 98160 57276 862397
0,71736 51853 62099 880254	0,02718 82275 00486 380674
0,74400 02975 83597 272317	0,02607 52357 67565 117903
0,76950 24201 35041 373866	0,02492 25357 64115 491105
0,79383 27175 04605 449949	0,02373 18828 65930 101293
0,81695 41386 81463 470371	0,02250 50902 46332 461926
0,83883 14735 80255 275617	0,02124 40261 15782 006389
0,85943 14066 63111 096977	0,01995 06108 78141 998929
0,87872 25676 78213 828704	0,01862 68142 08299 031429
0,89667 55794 38770 683194	0,01727 46520 56269 306359
0,91326 31025 71757 654165	0,01589 61835 83725 688045
0,92845 98771 72445 795953	0,01449 35080 40509 076117
0,94224 27613 09872 674752	0,01306 87615 92401 339294
0,95459 07663 43634 905493	0,01162 41141 20797 826916
0,96548 50890 43799 251452	0,01016 17660 41103 064521
0,97490 91405 85727 793386	0,00868 39452 69260 858426
0,98284 85727 38629 070418	0,00719 29047 68117 312753
0,98929 13024 99755 531027	0,00569 09224 51403 198649
0,99422 75409 65688 277892	0,00418 03131 24694 895237
0,99764 98643 98237 688900	0,00266 35335 89512 681669
0,99955 38226 51630 629880	0,00114 49500 03186 941534

Таблица 25.4. Узлы и весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Узлы $\pm x_i$ (нули многочленов Лежандра) Весовые коэффициенты w_i

$n = 96$

$\pm x_i$	w_i
0.01627 67448 49602 969579	0.03255 06144 92363 166242
0.04881 29851 36049 731112	0.03251 61187 13868 835987
0.08129 74954 64425 558994	0.03244 71637 14064 269364
0.11369 58501 10665 920911	0.03234 38225 68575 928429
0.14597 37146 54896 941989	0.03220 62047 94030 250669
0.17809 68823 67618 602759	0.03203 44562 31992 663218
0.21003 13104 60567 203603	0.03182 87588 94411 006535
0.24174 31561 63840 012328	0.03158 93307 70727 168558
0.27319 88125 91049 141487	0.03131 64255 96861 355813
0.30436 49443 54496 353024	0.03101 03325 86313 837423
0.33520 85228 92625 422616	0.03067 13761 23669 149014
0.36569 68614 72313 635031	0.03029 99154 20827 593794
0.39579 76498 28908 603285	0.02989 63441 36328 385984
0.42547 89884 07300 545365	0.02946 10899 58167 905970
0.45470 94221 67743 008636	0.02899 46141 50555 236543
0.48345 79739 20596 359768	0.02849 74110 65085 385646
0.51169 41771 54667 673586	0.02797 00076 16848 334440
0.53938 81083 24357 436227	0.02741 29627 26029 242823
0.56651 04185 61397 168404	0.02682 68667 25591 762198
0.59303 23647 77572 080684	0.02621 23407 35672 413913
0.61892 58401 25468 570386	0.02557 00360 05349 361499
0.64416 34037 84967 106798	0.02490 06332 22483 610288
0.66871 83100 43916 153953	0.02420 48417 92364 691282
0.69256 45366 42171 561344	0.02348 33990 85926 219842
0.71567 68123 48967 626225	0.02273 70696 58329 374001
0.73803 06437 44400 132851	0.02196 66444 38744 349195
0.75960 23411 76647 498703	0.02117 29398 92191 298988
0.78036 90438 67433 217604	0.02035 67971 54333 324595
0.80039 87441 39140 817229	0.01951 90811 40145 022410
0.81[illegible]40 03107 37931 675539	0.01866 06796 27411 467385
0.83762 35112 28187 121494	0.01778 25023 16045 260838
0.85495 90334 34601 455463	0.01688 54798 64245 172450
0.87138 85059 09296 502874	0.01597 05629 02562 291381
0.88689 45174 02420 416057	0.01503 87210 26994 938006
0.90146 06353 15852 341319	0.01409 09417 72314 860916
0.91507 14231 20898 074206	0.01312 82295 66961 572637
0.92771 24567 22308 690965	0.01215 16046 71088 319635
0.93937 03397 52755 216932	0.01116 21020 99838 498591
0.95003 27177 84437 635756	0.01016 07705 35008 415758
0.95968 82914 48742 539300	0.00914 86712 30783 386633
0.96832 68284 63264 212174	0.00812 68769 25698 759217
0.97593 91745 85136 466453	0.00709 64707 91153 865269
0.98251 72635 63014 677447	0.00605 85455 04235 961683
0.98805 41263 29623 799481	0.00501 42027 42927 517693
0.99254 39003 23762 624572	0.00396 45543 38444 686674
0.99598 18429 87209 290650	0.00291 07318 17934 946408
0.99836 43758 63181 677724	0.00185 39607 88946 921732
0.99968 95038 83230 766828	0.00079 67920 65552 012429

Таблица 25.5. Узлы квадратурной формулы Чебышева с равными весами

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Узлы $\pm x_i$

n	$\pm x_i$
2	0.57735 02692
3	0.70710 67812
	0.00000 00000
4	0.79465 44723
	0.18759 24741
5	0.83249 74870
	0.37454 14096
	0.00000 00000
6	0.86624 68181
	0.42251 86538
	0.26663 54015
7	0.88386 17008
	0.52965 67753
	0.32391 18105
	0.00000 00000
9	0.91158 93077
	0.60101 86554
	0.52876 17831
	0.16790 61842
	0.00000 00000

Взято из [25.44].

Таблица 25.6. Узлы и весовые коэффициенты квадратурной формулы Лобатто

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx w_1 f(-1) + \sum_{i=2}^{n-1} w_i f(x_i) + w_n f(1)$$

Узлы $\pm x_i$ Весовые коэффициенты w_i

n	$\pm x_i$	w_i
3	1.00000 000	0.33333 333
	0.00000 000	1.33333 333
4	1.00000 000	0.16666 667
	0.44721 360	0.83333 333
5	1.00000 000	0.10000 000
	0.65465 367	0.54444 444
	0.00000 000	0.71111 111
6	1.00000 000	0.06666 667
	0.76505 532	0.37847 496
	0.28523 152	0.55485 838
7	1.00000 000	0.04761 904
	0.83022 390	0.27682 604
	0.46884 879	0.43174 538
	0.00000 000	0.48761 904
8	1.00000 000	0.03571 428
	0.87174 015	0.21070 422
	0.59170 018	0.34112 270
	0.20929 922	0.41245 880
9	1.00000 00000	0.02777 77778
	0.89975 79954	0.16549 53616
	0.67718 62795	0.27453 87126
	0.36311 74638	0.34642 85110
	0.00000 00000	0.37151 92744
10	1.00000 00000	0.02222 22222
	0.91953 39082	0.13330 59908
	0.73877 38651	0.22488 93420
	0.47792 49498	0.29204 26836
	0.16527 89577	0.32753 97612

Взято из [25.13].

Таблица 25.7. Узлы и весовые коэффициенты формулы интегрирования функций с логарифмической особенностью

$$\int_{0}^{1} f(x)\ln x\,dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} K_n$$

Узлы x_i Весовые коэффициенты w_i

n	x_i	w_i	K_n	n	x_i	w_i	K_n	n	x_i	w_i	K_n
2	0.112009	0.718539	0.00285	3	0.063891	0.513405	0.00017	4	0.041448	0.383464	0.00001
	0.602277	0.281461			0.368997	0.391980			0.245275	0.386875	
					0.766880	0.094615			0.556165	0.190435	
									0.848982	0.039225	

Взято из [25.2].

Таблица 25.8. Узлы и весовые коэффициенты формулы интегрирования функций, содержащих множитель x^k

$$\int_0^1 x^k f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Узлы x_i Весовые коэффициенты w_i

n	$k=0$ x_i	$k=0$ w_i	$k=1$ x_i	$k=1$ w_i	$k=2$ x_i	$k=2$ w_i
1	0.50000 00000	1.00000 00000	0.66666 66667	0.50000 00000	0.75000 00000	0.33333 33333
2	0.21132 48654	0.50000 00000	0.35505 10257	0.18195 86183	0.45584 81560	0.10078 58821
	0.78867 51346	0.50000 00000	0.84494 89743	0.31804 13817	0.87748 51773	0.23254 74513
3	0.11270 16654	0.27777 77778	0.21234 05382	0.06982 69799	0.29499 77901	0.02995 07030
	0.50000 00000	0.44444 44444	0.59053 31356	0.22924 11064	0.65299 62340	0.14624 62693
	0.88729 83346	0.27777 77778	0.91141 20405	0.20093 19137	0.92700 59759	0.15713 63611
4	0.06943 18442	0.17392 74226	0.13975 98643	0.03118 09710	0.20414 85821	0.01035 22408
	0.33000 94782	0.32607 25774	0.41640 95676	0.12984 75476	0.48295 27049	0.06863 38872
	0.66999 05218	0.32607 25774	0.72315 69864	0.20346 45680	0.76139 92624	0.14345 87898
	0.93056 81558	0.17392 74226	0.94289 58039	0.13550 69134	0.95149 94506	0.11088 84156
5	0.04691 00770	0.11846 34425	0.09853 50858	0.01574 79145	0.14894 57871	0.00411 38252
	0.23076 53449	0.23931 43352	0.30453 57266	0.07390 88701	0.36566 65274	0.03205 56007
	0.50000 00000	0.28444 44444	0.56202 51898	0.14638 69871	0.61011 36129	0.08920 01612
	0.76923 46551	0.23931 43352	0.80198 65821	0.16717 46381	0.82651 96792	0.12619 89619
	0.95308 99230	0.11846 34425	0.96019 01429	0.09678 15902	0.96542 10601	0.08176 47843
6	0.03376 52429	0.08566 22462	0.07305 43287	0.00873 83018	0.11319 43838	0.00183 10758
	0.16939 53068	0.18038 07865	0.23076 61380	0.04395 51656	0.28431 88727	0.01572 02972
	0.38069 04070	0.23395 69673	0.44132 84812	0.09866 11509	0.49096 35868	0.05128 95711
	0.61930 95930	0.23395 69673	0.66301 53097	0.14079 25538	0.69756 30820	0.09457 71867
	0.83060 46932	0.18038 07865	0.85192 14003	0.13554 24972	0.86843 60583	0.10737 64997
	0.96623 47571	0.08566 22462	0.97068 35728	0.07231 03307	0.97409 54449	0.06253 87027
7	0.02544 60438	0.06474 24831	0.05626 25605	0.00521 43622	0.08881 68334	0.00089 26880
	0.12923 44072	0.13985 26957	0.18024 06917	0.02740 83567	0.22648 27534	0.00816 29256
	0.29707 74243	0.19091 50253	0.35262 47171	0.06638 46965	0.39997 84867	0.02942 22113
	0.50000 00000	0.20897 95918	0.54715 36263	0.10712 50657	0.58599 78554	0.06314 63787
	0.70292 25757	0.19091 50253	0.73421 01772	0.12739 08973	0.75944 58740	0.09173 38033
	0.87076 55928	0.13985 26957	0.88532 09468	0.11050 92582	0.89691 09709	0.09069 88246
	0.97455 39562	0.06474 24831	0.97752 06136	0.05596 73634	0.97986 72262	0.04927 65018
8	0.01985 50718	0.05061 42681	0.04463 39553	0.00329 51914	0.07149 10350	0.00046 85178
	0.10166 67613	0.11119 05172	0.14436 62570	0.01784 29027	0.18422 82964	0.00447 45217
	0.23723 37950	0.15685 33229	0.28682 47571	0.04543 93195	0.33044 77282	0.01724 68638
	0.40828 26788	0.18134 18917	0.45481 33152	0.07919 95995	0.49440 29218	0.04081 44264
	0.59171 73212	0.18134 18917	0.62806 78354	0.10604 73594	0.65834 80085	0.06844 71834
	0.76276 62050	0.15685 33229	0.78569 15206	0.11250 57995	0.80452 48315	0.08528 47692
	0.89833 32387	0.11119 05172	0.90867 63921	0.09111 90236	0.91709 93825	0.07681 80933
	0.98014 49282	0.05061 42681	0.98222 00849	0.04455 08044	0.98390 22404	0.03977 89578

Взято из [25.35].

Таблица 25.8. Узлы и весовые коэффициенты формулы интегрирования функций, содержащих множитель x^k

$$\int_0^1 x^k f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Узлы x_i — Весовые коэффициенты w_i

	$k=3$		$k=4$		$k=5$	
n	x_i	w_i	x_i	w_i	x_i	w_i
1	0.80000 00000	0.25000 00000	0.83333 33333	0.20000 00000	0.85714 28571	0.16666 66667
2	0.52935 79359	0.06690 52498	0.58633 65823	0.04908 24923	0.63079 15938	0.03833 75627
	0.89871 34927	0.18309 47502	0.91366 34177	0.15091 75077	0.92476 39617	0.12832 91039
3	0.36326 46302	0.01647 90593	0.42011 30593	0.01046 90422	0.46798 32355	0.00729 70036
	0.69881 12692	0.10459 98976	0.73388 93552	0.08027 66735	0.76162 39697	0.06459 66123
	0.93792 41006	0.12892 10432	0.94599 75855	0.10925 42844	0.95221 09767	0.09477 30507
4	0.26147 77888	0.00465 83671	0.31213 54928	0.00251 63516	0.35689 37290	0.00153 44797
	0.53584 64461	0.04254 17241	0.57891 56596	0.02916 93822	0.61466 93899	0.02142 84046
	0.79028 32300	0.10900 43689	0.81289 15166	0.08706 77121	0.83107 90039	0.07205 63642
	0.95784 70806	0.09379 55399	0.96272 39976	0.08124 65541	0.96658 86465	0.07164 74181
5	0.19621 20074	0.00152 06894	0.23979 20448	0.00069 69771	0.27969 31248	0.00036 97155
	0.41710 02118	0.01695 73249	0.46093 36745	0.01021 05417	0.49870 98270	0.00672 96904
	0.64857 00042	0.06044 49532	0.68005 92327	0.04402 44695	0.70633 38189	0.03376 77450
	0.84560 51500	0.10031 65045	0.86088 63437	0.08271 27131	0.87340 27279	0.07007 13397
	0.96943 57035	0.07076 05281	0.97261 44185	0.06235 52986	0.97519 38347	0.05572 81761
6	0.15227 31618	0.00056 17109	0.18946 95839	0.00021 94140	0.22446 89954	0.00010 13258
	0.33130 04570	0.00708 53159	0.37275 11560	0.00372 67844	0.40953 33505	0.00218 79257
	0.53241 15667	0.03052 61922	0.56757 23729	0.01995 62647	0.59778 90484	0.01396 96531
	0.72560 27783	0.06844 32818	0.74883 64975	0.05223 99543	0.76841 36046	0.04148 63470
	0.88161 66844	0.08830 09912	0.89238 51584	0.07464 91503	0.90135 07338	0.06445 88592
	0.97679 53517	0.05508 25080	0.97898 52313	0.04920 84323	0.98079 72084	0.04446 25560
7	0.12142 71288	0.00022 99041	0.15324 14389	0.00007 70737	0.18382 87683	0.00003 11046
	0.26836 34403	0.00314 75964	0.30632 65225	0.00144 70088	0.34080 75951	0.00075 53838
	0.44086 64606	0.01531 21671	0.47654 00930	0.00892 69676	0.50794 05240	0.00566 04137
	0.61860 40284	0.04099 51686	0.64638 93025	0.02854 78428	0.67036 34101	0.02095 92982
	0.78025 35520	0.06975 00981	0.79771 66898	0.05522 48742	0.81258 84660	0.04510 49816
	0.90636 25341	0.07655 65614	0.91421 99006	0.06602 18459	0.92085 64173	0.05790 76135
	0.98176 99145	0.04400 85043	0.98334 38305	0.03975 43870	0.98466 74508	0.03624 78712
8	0.09900 17577	0.00010 24601	0.12637 29744	0.00002 97092	0.15315 06616	0.00001 05316
	0.22124 35074	0.00148 56841	0.25552 90521	0.00059 89500	0.28726 44039	0.00027 8[illegible]586
	0.36912 39000	0.00785 50738	0.40364 12989	0.00407 79241	0.43462 74067	0.00233 53415
	0.52854 54312	0.02363 15807	0.55831 66758	0.01490 99334	0.58451 85666	0.01004 46144
	0.68399 32484	0.04745 43798	0.70600 95429	0.03471 99507	0.72512 64097	0.02648 53011
	0.82028 39497	0.06736 18394	0.83367 15420	0.05491 00973	0.84518 94879	0.04588 56532
	0.92409 37129	0.06618 20353	0.92999 57161	0.05800 05653	0.93504 35075	0.05153 42238
	0.98529 34401	0.03592 69468	0.98646 31979	0.03275 28699	0.98746 05085	0.03009 26424

Таблица 25.9. Узлы и весовые коэффициенты квадратурной формулы Лагерра

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \qquad\qquad \int_0^\infty g(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i e^{x_i} g(x_i)$$

Узлы x_i (нули многочленов Лагерра) — Весовые коэффициенты w_i

x_i	w_i	$w_i e^{x_i}$
	$n=2$	
0.58578 64376 27	(−1)8.53553 390593	1.53332 603312
3.41421 35623 73	(−1)1.46446 609407	4.45095 733505
	$n=3$	
0.41577 45567 83	(−1)7.11093 009929	1.07769 285927
2.29428 03602 79	(−1)2.78517 733569	2.76214 296190
6.28994 50829 37	(−2)1.03892 565016	5.60109 462543
	$n=4$	
0.32254 76896 19	(−1)6.03154 104342	0.83273 91238 38
1.74576 11011 58	(−1)3.57418 692438	2.04810 243845
4.53662 02969 21	(−2)3.88879 085150	3.63114 630582
9.39507 09123 01	(−4)5.39294 705561	6.48714 508441
	$n=5$	
0.26356 03197 18	(−1)5.21755 610583	0.67909 40422 08
1.41340 30591 07	(−1)3.98666 811083	1.63848 787360
3.59642 57710 41	(−2)7.59424 496817	2.76944 324237
7.08581 00058 59	(−3)3.61175 867992	4.31565 690092
12.64080 08442 76	(−5)2.33699 723858	7.21918 635435
	$n=6$	
0.22284 66041 79	(−1)4.58964 673950	0.57353 55074 23
1.18893 21016 73	(−1)4.17000 830772	1.36925 259071
2.99273 63260 59	(−1)1.13373 382074	2.26068 459338
5.77514 35691 05	(−2)1.03991 974531	3.34052 458236
9.83746 74183 83	(−4)2.61017 202815	4.88682 680021
15.98287 39806 02	(−7)8.98547 906430	7.84901 594560
	$n=7$	
0.19304 36765 60	(−1)4.09318 951701	0.49647 75975 40
1.02666 48953 39	(−1)4.21831 277862	1.17764 306086
2.56787 67449 51	(−1)1.47126 348658	1.91824 978166
4.90035 30845 26	(−2)2.06335 144687	2.77184 863673
8.18215 34445 63	(−3)1.07401 014328	3.84124 912249
12.73418 02917 98	(−5)1.58654 643486	5.38067 820792
19.39572 78622 63	(−8)3.17031 547900	8.40543 248683
	$n=8$	
0.17027 96323 05	(−1)3.69188 589342	0.43772 34104 93
0.90370 17767 99	(−1)4.18786 780814	1.03386 934767
2.25108 66298 66	(−1)1.75794 986637	1.66970 976566
4.26670 01702 88	(−2)3.33434 922612	2.37692 470176
7.04590 54023 93	(−3)2.79453 623523	3.20854 091335
10.75851 60101 81	(−5)9.07650 877336	4.26857 551083
15.74067 86412 78	(−7)8.48574 671627	5.81808 336867
22.86313 17368 89	(−9)1.04800 117487	8.90622 621529
	$n=9$	
0.15232 22277 32	(−1)3.36126 421798	0.39143 11243 16
0.80722 00227 42	(−1)4.11213 980424	0.92180 50285 29
2.00513 51556 19	(−1)1.99287 525371	1.48012 790994
3.78347 39733 31	(−2)4.74605 627657	2.08677 080755
6.20495 67778 77	(−3)5.59962 661079	2.77292 138971
9.37298 52516 88	(−4)3.05249 767093	3.59162 606809
13.46623 69110 92	(−6)6.59212 302608	4.64876 600214
18.83359 77889 92	(−8)4.11076 933035	6.21227 541975
26.37407 18909 27	(−11)3.29087 403035	9.36321 823771
	$n=10$	
0.13779 34705 40	(−1)3.08441 115765	0.35400 97386 07
0.72945 45495 03	(−1)4.01119 929155	0.83190 23010 44
1.80834 29017 40	(−1)2.18068 287612	1.33028 856175
3.40143 36978 55	(−2)6.20874 560987	1.86306 390311
5.55249 61400 64	(−3)9.50151 697518	2.45025 555808
8.33015 27467 64	(−4)7.53008 388588	3.12276 415514
11.84378 58379 00	(−5)2.82592 334960	3.93415 269556
16.27925 78313 78	(−7)4.24931 398496	4.99241 487219
21.99658 58119 81	(−9)1.83956 482398	6.57220 248513
29.92069 70122 74	(−13)9.91182 721961	9.78469 584037
	$n=12$	
0.11572 21173 58	(−1)2.64731 371055	0.29720 96360 44
0.61175 74845 15	(−1)3.77759 275873	0.69646 29804 31
1.51261 02697 76	(−1)2.44082 011320	1.10778 139462
2.83375 13377 44	(−2)9.04492 222117	1.53846 423904
4.59922 76394 18	(−2)2.01023 811546	1.99832 760627
6.84452 54531 15	(−3)2.66397 354187	2.50074 576910
9.62131 68424 57	(−4)2.03231 592663	3.06532 151828
13.00605 49933 06	(−6)8.36505 585682	3.72328 911078
17.11685 51874 62	(−7)1.66849 387654	4.52981 402998
22.15109 03793 97	(−9)1.34239 103052	5.59725 846184
28.48796 72509 84	(−12)3.06160 163504	7.21299 546093
37.09912 10444 67	(−16)8.14807 746743	10.54383 74619
	$n=15$	
0.09330 78120 17	(−1)2.18234 885940	0.23957 81703 11
0.49269 17403 02	(−1)3.42210 177923	0.56010 08427 93
1.21559 54120 71	(−1)2.63027 577942	0.88700 82629 19
2.26994 95262 04	(−1)1.26425 818106	1.22366 440215
3.66762 27217 51	(−2)4.02068 649210	1.57444 872163
5.42533 66274 14	(−3)8.56387 780361	1.94475 197653
7.56591 62266 13	(−3)1.21243 614721	2.34150 205664
10.12022 85680 19	(−4)1.11674 392344	2.77404 192683
13.13028 24821 76	(−6)6.45992 676202	3.25564 334640
16.65440 77083 30	(−7)2.22631 690710	3.80631 171423
20.77647 88994 49	(−9)4.22743 038498	4.45847 775384
25.62389 42267 29	(−11)3.92189 726704	5.27001 778443
31.40751 91697 54	(−13)1.45651 526407	6.35956 346973
38.53068 33064 86	(−16)1.48302 705111	8.03178 763212
48.02608 55726 86	(20)1.60059 490621	11.52777 21009

Взято из [25.45].

Таблица 25.10. Узлы и весовые коэффициенты квадратурной формулы Эрмита

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i e^{x_i^2} g(x_i)$$

Узлы $\pm x_i$ (нули многочленов Эрмита)

Весовые коэффициенты w_i

$\pm x_i$	w_i	$w_i e^{x_i^2}$
	$n=2$	
0.70710 67811 86548	(−1)8.86226 92545 28	1.46114 11826 611
	$n=3$	
0.00000 00000 00000	(0)1.18163 59006 04	1.18163 59006 037
1.22474 48713 91589	(−1)2.95408 97515 09	1.32393 11752 136
	$n=4$	
0.52464 76232 75290	(−1)8.04914 09000 55	1.05996 44828 950
1.65068 01238 85785	(−2)8.13128 35447 25	1.24022 58176 958
	$n=5$	
0.00000 00000 00000	(−1)9.45308 72048 29	0.94530 87204 829
0.95857 24646 13819	(−1)3.93619 32315 22	0.98658 09967 514
2.02018 28704 56086	(−2)1.99532 42059 05	1.18148 86255 360
	$n=6$	
0.43607 74119 27617	(−1)7.24629 59522 44	0.87640 13344 362
1.33584 90740 13697	(−1)1.57067 32032 29	0.93558 05576 312
2.35060 49736 74492	(−3)4.53000 99055 09	1.13690 83326 745
	$n=7$	
0.00000 00000 00000	(−1)8.10264 61755 68	0.81026 46175 568
0.81628 78828 58965	(−1)4.25607 25261 01	0.82868 73032 836
1.67355 16287 67471	(−2)5.45155 82819 13	0.89718 46002 252
2.65196 13568 35233	(−4)9.71781 24509 95	1.10133 07296 103
	$n=8$	
0.38118 69902 07322	(−1)6.61147 01255 82	0.76454 41286 517
1.15719 37124 46780	(−1)2.07802 32581 49	0.79289 00483 864
1.98165 67566 95843	(−2)1.70779 83007 41	0.86675 26065 634
2.93063 74202 57244	(−4)1.99604 07221 14	1.07193 01442 480
	$n=9$	
0.00000 00000 00000	(−1)7.20235 21560 61	0.72023 52156 061
0.72355 10187 52838	(−1)4.32651 55900 26	0.73030 24527 451
1.46855 32892 16668	(−2)8.84745 27394 38	0.76460 81250 946
2.26658 05845 31843	(−3)4.94362 42755 37	0.84175 27014 787
3.19099 32017 81528	(−5)3.96069 77263 26	1.04700 35809 767

$\pm x_i$	w_i	$w_i e^{x_i^2}$
	$n=10$	
0.34290 13272 23705	(− 1)6.10862 63373 53	0.68708 18539 513
1.03661 08297 89514	(− 1)2.40138 61108 23	0.70329 63231 049
1.75668 36492 99882	(− 2)3.38743 94455 48	0.74144 19319 436
2.53273 16742 32790	(− 3)1.34364 57467 81	0.82066 61264 048
3.43615 91188 37738	(− 6)7.64043 28552 33	1.02545 16913 657
	$n=12$	
0.31424 03762 54359	(− 1)5.70135 23626 25	0.62930 78743 695
0.94778 83912 40164	(− 1)2.60492 31026 42	0.63962 12320 203
1.59768 26351 52605	(− 2)5.16079 85615 88	0.66266 27732 669
2.27950 70805 01060	(− 3)3.90539 05846 29	0.70522 03661 122
3.02063 70251 20890	(− 5)8.57368 70435 88	0.78664 39394 633
3.88972 48978 69782	(− 7)2.65855 16843 56	0.98969 90470 923
	$n=16$	
0.27348 10461 3815	(− 1)5.07929 47901 66	0.54737 52050 378
0.82295 14491 4466	(− 1)2.80647 45852 85	0.55244 19573 675
1.38025 85391 9888	(− 2)8.38100 41398 99	0.56321 78290 882
1.95178 79909 1625	(− 2)1.28803 11535 51	0.58124 72754 009
2.54620 21578 4748	(− 4)9.32284 00862 42	0.60973 69582 560
3.17699 91619 7996	(− 5)2.71186 00925 38	0.65575 56728 761
3.86944 79048 6012	(− 7)2.32098 08448 65	0.73824 56222 777
4.68873 89393 0582	(−10)2.65480 74740 11	0.93687 44928 841
	$n=20$	
0.24534 07083 009	(− 1)4.62243 66960 06	0.49092 15006 667
0.73747 37285 454	(− 1)2.86675 50536 28	0.49384 33852 721
1.23407 62153 953	(− 1)1.09017 20602 00	0.49992 08713 363
1.73853 77121 166	(− 2)2.48105 20887 46	0.50967 90271 175
2.25497 40020 893	(− 3)3.24377 33422 38	0.52408 03509 486
2.78880 60584 281	(− 4)2.28338 63601 63	0.54485 17423 644
3.34785 45673 832	(− 6)7.80255 64785 32	0.57526 24428 525
3.94476 40401 156	(− 7)1.08606 93707 69	0.62227 86961 914
4.60368 24495 507	(−10)4.39934 09922 73	0.70433 29611 769
5.38748 08900 112	(−13)2.22939 36455 34	0.89859 19614 532

Взято из [25.46].

Таблица 25.11. Коэффициенты квадратурной формулы Филона

θ	α	β	γ
0.00	0.00000 000	0.66666 667	1.33333 333
0.01	0.00000 004	0.66668 000	1.33332 000
0.02	0.00000 036	0.66671 999	1.33328 000
0.03	0.00000 120	0.66678 664	1.33321 334
0.04	0.00000 284	0.66687 990	1.33312 001
0.05	0.00000 555	0.66699 976	1.33300 003
0.06	0.00000 961	0.66714 617	1.33285 340
0.07	0.00001 524	0.66731 909	1.33268 012
0.08	0.00002 274	0.66751 844	1.33248 020
0.09	0.00003 237	0.66774 417	1.33225 365
0.1	0.00004 438	0.66799 619	1.33200 048
0.2	0.00035 354	0.67193 927	1.32800 761
0.3	0.00118 467	0.67836 065	1.32137 184
0.4	0.00278 012	0.68703 909	1.31212 154
0.5	0.00536 042	0.69767 347	1.30029 624
0.6	0.00911 797	0.70989 111	1.28594 638
0.7	0.01421 151	0.72325 813	1.26913 302
0.8	0.02076 156	0.73729 136	1.24992 752
0.9	0.02884 683	0.75147 168	1.22841 118
1.0	0.03850 188	0.76525 831	1.20467 472

См. 25.4.47.

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи *)

25.1. Balbrecht J., Collatz L. Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale. — Z. Angew. Math. Mech., 1958, **38**, p. 1—15.

25.2. Berthod-Zaborowski. Le calcul des intégrales de la forme: $\int_0^1 f(x) \log x \, dx$;

Mineur H. Techniques de calcul numérique. — P.: Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1952, p. 555—556.

25.3. Bickley W. G. Formulae for numerical integration. — Math. Gaz., 1939, **23**, p. 352.

25.4. Bickley W. G. Formulae for numerical differentiation. — Math. Gaz., 1941, **25**, p. 19—27.

25.5. Bickley W. G. Finite difference formulae for the square lattice. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, **1**, p. 35—42.

25.6. Birkhoff G., Young D. Numerical quadrature of analytic and harmonic functions. — J. Math. Phys., 1950, **29**, p. 217—221.

25.7. Fox L. The use and construction of mathematical tables / National Physical Laboratory. — L.: Her Majesty's Stationery Office, 1956. — (Mathematical tables; V. 1).

25.8. Gill S. Process for the step-by-step integration of differential equations in an automatic digital computing machine. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, **47**, p. 96—108.

25.9. Hammer P. C., Stroud A. H. Numerical evaluation of multiple integrals II. — Math. Tables Aids Comp., 1958, **12**, p. 272—280.

25.10. Hammer P. C., Wymore A. W. Numerical evaluation of multiple integrals I. — Math. Tables Aids Comp., 1957, **11**, p. 59—67.

25.11. Henrici P. Discrete variable methods in ordinary differential equations. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1961.

25.12. Hildebrand F. B. Introduction to numerical analysis. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1956.

25.13. Kopal Z. Numerical analysis. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1955.

25.14. Марков А. А. Исчисление конечных разностей. — Одесса: 1910.

25.15. Микеладзе Ш. Е. Квадратурные формулы для регулярных функций. — Сообщ. АН Груз. ССР, 1956, **17**, с. 289—296.

25.16. Milne W. E. A note on the numerical integration of differential equations. — J. Research NBS, 1949, **43**, p. 537—542. Report № 2046.

25.17. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению уравнений в частных производных. — М.: Гостехиздат, 1951.

25.18. Radau R. Études sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur d'une intégrale définie. — J. Math. Pures Appl., 1880, **6**, № 3, p. 283—336.

25.19. Richtmeyer R. D. Difference methods for initial-value problems. — N.Y.: Interscience Publishers, 1957. Русский перевод: Рихтмайер Р. Д., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.

25.20. Sadowsky M. A formula for approximate computation of a triple integral. — Amer. Math. Monthly, 1940, **47**, p. 539—543.

25.21. Salzer H. E. A new formula for inverse interpolation. — Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, p. 513—516.

25.22. Salzer H. E. Formulas for complex Cartesian interpolation of higher degrees. — J. Math. Phys., 1949, **28**, p. 200—203.

25.23. Salzer H. E. Formulas for numerical integration of first and second order differential equations in the complex plane. — J. Math. Phys., 1950, **29**, p. 207—216.

25.24. Salzer H. E. Formulas for numerical differentiation in the complex plane. — J. Math. Phys., 1952, **31**, p. 155—169.

25.25. Sard A. Integral representations of remainders. — Duke Math. J., 1948, **15**, p. 333—345.

25.26. Sard A. Remainders: functions of several variables. — Acta Math., 1951, **84**, p. 319—346.

25.27. Schulz G. Formelsammlung zur praktischen Mathematik. — B.: DeGruyter and Co., 1945.

25.28. Strond A. H. A bibliography on approximate integration. — Math. Comp., 1961, **15**, p. 52—80.

25.29. Tranter G. J. Integral transforms in mathematical physics. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1951. Русский перевод: Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. — М.: Гостехиздат, 1956.

25.30. Tyler G. W. Numerical integration with several variables. — Canad. J. Math., 1953, **5**, p. 393—412.

Таблицы

25.31. Comrie L. J. Chambers' six-figure mathematical tables. — L.: Chambers, 1949, V. 2. Русский перевод: Комри Л. Дж. Шестизначные математические таблицы Чемберса. — М.: Наука, 1964.

25.32. Davis P., Rabinowitz P. Abscissas and weights for Gaussian quadratures of high order. — J. Research NBS, 1956, **56**, p. 35—37. Report № 2645.

25.33. Davis P., Rabinowitz P. Additional abscissas and weights for Gaussian quadratures of high order: value for $n = 64$, 80 and 96. — J. Research NBS, 1958, **60**, p. 613—614. Report № 2875.

25.34. Dijkstra E. W., van Wijngaarden A. Table of Everett's interpolation coefficients. — Hague: Elcelsior's Photo-offset, 1955.

25.35. Fishman H. Numerical integration constants. — Math. Tables Aids Comp., 1957, **11**, p. 1—9.

*) Учебники по численному анализу см. в литературе к гл. 3.

25.36. Gawlik H. J. Zeros of Legendre polynomials of orders 2—64 and weight coefficients of Gauss quadrature formulae. — A.R.D.E. Memo (B) 77/58. — Fort Halstead, 1958.

25.37. Gt. Britain H. M. Nautical Almanac Office. Interpolation and allied tables. — L.: Her Majestry's Stationery Office, 1956.

25.38. Longman I. M. Tables for the rapid and accurate numerical evaluation of certain infinite integrals involving Bessel functions. — Math. Tables Aids Comp., 1957, **11**, p. 166—180.

25.39. Lowan A. N., Davids N., Levenson A. Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1—16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula. — Bull. Amer. Math. Soc., 1942, **48**, p. 739—743.

25.40. National Bureau of Standards. Tables of Lagrangian interpolation coefficients. — N.Y.: Columbia Univ. Press, 1944.

25.41. National Bureau of Standards. Collected short tables of the Computation Laboratory. Tables of functions and of zeros of functions. — Washington: Government Printing Office, 1954. — (Applied Math. Series; **37**).

25.42. Rabinowitz P. Abscissas and weights for Lobatto quadrature of high order. — Math. Tables Aids Comp., 1960, **69**, p. 47—52.

25.43. Rabinowitz P., Weiss G. Tables of abscissas and weights for numerical evaluation of integrals of the form $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^n f(x)\,dx$. — Math. Tables Aids Comp., 1959, **68**, p. 285—294.

25.44. Salzer H. E. Tables for facilitating the use of Chebyshev's quadrature formula. — J. Math. Phys., 1947, **26**, p. 191—194.

25.45. Salzer H. E., Zucker R. Table of the zeros and weight factors of the first fifteen Laguerre polynomials. — Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, p. 1004—1012.

25.46. Salzer H. E., Zucker R., Capuano R. Table of the zeros and weight factors of the first twenty Hermite polynomials. — J. Research NBS, 1952, **48**, p. 111—116. Report № 2294.

25.47. Salzer H. E. Table of coefficients for obtaining the first derivative without differences. — Washington: Government Printing Office, 1948. — (NBS Applied Math. Series; **2**).

25.48. Salzer H. E. Coefficients for facilitating trigonometric interpolation. — J. Math. Phys., 1949, **27**, p. 274—278.

25.49. Salzer H. E., Roberson P. T. Table of coefficients for obtaining the second derivative without differences. — San Diego: Convair-Astronautics, 1957.

25.50. Salzer H. E. Tables of osculatory interpolation coefficients. — Washington: Government Printing Office, 1958. — (NBS Applied Math. Series; **56**).

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

25.51. Взорова А. И. Таблицы для решения уравнения Лапласа в эллиптических областях. — М.: Изд-во АН СССР, 1957.

25.52. Глонти Э. Н. Таблицы корней и квадратурных коэффициентов полиномов Якоби. — М.: ВЦ АН СССР, 1971.

25.53. Доканосидзе Е. Н. Таблицы корней и весовых множителей обобщенных полиномов Лагерра. — М.: ВЦ АН СССР, 1966.

25.54. Кармазина Л. Н., Курочкина Л. В. Таблицы интерполяционных коэффициентов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.

25.55. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.

25.56. Крылов В. И. и др. Таблицы для численного интегрирования функций со степенными особенностями $\int\limits_0^1 (x)^\beta(1-x)^\alpha f(x)\,dx$. — Минск: Изд-во АН БССР, 1963.

25.57. Крылов В. И., Пальцев А. А. Таблицы для численного интегрирования функций с логарифмической и степенной особенностями
$$\int\limits_0^1 \ln\frac{e}{x} f(x)dx,\quad \int\limits_0^1 x^\beta \ln\frac{e}{x}\ln\frac{e}{1-x} f(x)dx,$$
$$\int\limits_0^1 \ln\frac{1}{x} f(x)dx,\quad \int\limits_0^\infty x^\beta e^{-x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx.$$ — Минск: Наука и техника, 1967.

25.58. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию — М.: Наука, 1966.

Глава 26

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

М. ЦЕЛЕН, Н. СЕВЕРО

СОДЕРЖАНИЕ

26.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ; ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

Одномерные функции распределения *)

Действительная функция $F(x)$ называется (одномерной) *кумулятивной функцией распределения* (к.ф.р.) или просто *функцией распределения*, если она обладает следующими свойствами:

1) $F(x)$ не убывает, т.е. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$, если $x_1 \leqslant x_2$.

2) $F(x)$ непрерывна справа, т.е. $F(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} F(x+\varepsilon)$.

3) $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

Функция $F(x)$ определяет вероятность события $\{X \leqslant x\}$, где X — случайная величина, т.е. $\Pr\{X \leqslant x\} = F(x)$, и, таким образом, описывает к.ф.р. случайной величины X. Существуют два основных типа распределения: дискретное и непрерывное.

Дискретное распределение. Дискретное распределение характеризуется случайной величиной X, принимающей счетное число значений $..., x_{-1}, x_0, x_1, ...$ с вероятностями

$$p_n = \Pr\{X = x_n\} \geqslant 0,$$

которые подчиняются условию

$$\sum_n p_n = 1.$$

Соответствующая функция распределения имеет вид

$$\text{26.1.1.} \quad F(x) = \Pr\{X \leqslant x\} = \sum_{x_n \leqslant x} p_n,$$

где суммирование распространяется на все значения x_n, для которых $x_n \leqslant x$. Множество $\{x_n\}$, для которого $p_n > 0$, называется *областью значений случайной величины* X. Дискретное распределение называется *решетчатым распределением*, если существуют числа a и $b \neq 0$ такие, что каждое возможное значение X можно представить в виде $a + bn$, где n принимает только целые значения. Перечень некоторых свойств избранных дискретных распределений представлен в 26.1.19—26.1.24.

Непрерывное распределение. Непрерывное распределение характеризуется абсолютно непрерывной к.ф.р. $F(x)$. Следовательно, $F(x)$ имеет производную $F'(x) = f(x)$, и к.ф.р. можно записать

$$\text{26.1.2.} \quad F(x) = \Pr\{X \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Производная $f(x)$ называется *плотностью вероятности*, и множество значений x, для которых $f(x) > 0$, образует область значений случайной величины X. Перечень некоторых свойств избранных непрерывных распределений помещен в разделах 26.1.25—26.2.34.

Многомерные функции распределения

Действительная функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *n-мерной кумулятивной функцией распределения*, если

1) $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ не убывает по каждому переменному x_i;

2) $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывна справа по каждому переменному x_i, т. е. $F(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} F(x_1, ..., x_i + \varepsilon, ..., x_n)$;

3) $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, если какое-нибудь $x_i = -\infty$, $F(\infty, \infty, ..., \infty) = 1$.

Функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ равна вероятности события $\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, ..., X_n \leqslant x_n\}$, где $X_1, X_2, ..., X_n$ — множество n случайных величин. Таким образом, $\Pr\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, ..., X_n \leqslant x_n\} = F(x_1, x_2, ..., x_n)$. Два основных типа n-мерных распределений, дискретное и непрерывное, определяются аналогично тому, как это было сделано для случая одномерных распределений.

---

*) Замечания по поводу обозначений.

a. Здесь мы придерживаемся общепринятых правил, обозначая случайную величину заглавной буквой X и используя соответствующую маленькую букву x для обозначения ее отдельного значения.

b. Для статистических приложений часто удобно табулировать «площадь под верхним хвостом» распределения, $1 - F(x)$, или к.ф.р. для $|X|$, т.е. $F(x) - F(-x)$ вместо к.ф.р. $F(x)$. Мы используем букву P для обозначения к.ф.р. случайной величины X, $Q = 1 - P$ для обозначения «площади под верхним хвостом» и $A = P - Q$ для обозначения к.ф.р. случайной величины $|X|$. В частности, мы используем $P(x)$, $Q(x)$ и $A(x)$ в обозначении соответствующих функций для нормального, или гауссовского, распределения (см. 26.2—27.2.4). Когда эти функции зависят от параметров, например от θ_1 и θ_2, мы применяем обозначения $P(x|\theta_1, \theta_2)$, $Q(x|\theta_1, \theta_2)$ или $A(x|\theta_1, \theta_2)$. Например, распределение χ^2 в 26.4 зависит от параметра ν, и табулируемая функция обозначается $Q(\chi^2|\nu)$.

Характеристики функций распределения: моменты, характеристические функции, семиинварианты

		Непрерывные распределения	Дискретные распределения
26.1.3.	n-й момент относительно начала	$\mu'_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx$	$\mu'_n = \sum_s x_s^n p_s$
26.1.4.	Среднее значение	$m = \mu'_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$	$m = \mu'_1 = \sum_s x_s p_s$
26.1.5.	**Дисперсия**	$\sigma^2 = \mu'_2 - m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx$	$\sigma^2 = \mu'_2 - m^2 = \sum_s (x_s - m)^2 p_s$
26.1.6.	n-й центральный **момент**	$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^n f(x)\,dx$	$\mu_n = \sum_s (x_s - m)^n p_s$
26.1.7.	Среднее значение случайной величины $g(X)$	$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$	$E[g(X)] = \sum_s g(x_s) p_s$
26.1.8.	**Характеристическая функция** X	$\Phi(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$	$\Phi(t) = E(e^{itX}) = \sum_s e^{itx_s} p_s$
26.1.9.	Характеристическая функция $g(X)$	$\Phi_g(t) = E(e^{itg(X)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itg(x)} f(x)\,dx$	$\Phi_g(t) = E(e^{itg(X)}) = \sum_s e^{itg(x_s)} p_s$
26.1.10.	**Формула обращения**	$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Phi(t)\,dt$	$p_n = \frac{b}{2\pi}\int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{-itx_n}\Phi(t)\,dt$ (только для решетчатых распределений)

Соотношение между характеристической функцией и моментами относительно начала

26.1.11. $\Phi^{(n)}(0) = \left[\frac{d^n}{dt^n}\Phi(t)\right]_{t=0} = i^n \mu'_n.$

Функция семиинвариантов

26.1.12. $\ln \Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa_n \frac{(it)^n}{n!}.$

$\varkappa_n$ означает n-й семиинвариант.

26.1.13. $\varkappa_1 = m,\ \varkappa_2 = \sigma^2,\ \varkappa_3 = \mu_3,\ \varkappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2.$

Соотношение между центральными моментами и моментами относительно начала

26.1.14. $\mu_n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^{n-j} \mu'_j m^{n-j}.$

Коэффициенты асимметрии и эксцесса

26.1.15. $\gamma_1 = \varkappa_3/\varkappa_2^{3/2} = \mu_3/\sigma^3$ (асимметрия).

26.1.16. $\gamma_2 = \varkappa_4/\varkappa_2^2 = \mu_4/\sigma^4 - 3$ (эксцесс).

Иногда коэффициенты асимметрии и эксцесса определяются следующим образом:

26.1.17. $\beta = \gamma_1^2 = (\mu_3/\sigma^3)^2$ (асимметрия),

26.1.18. $\beta_2 = \gamma_2 + 3 = \mu_4/\sigma^4$ (эксцесс).

Некоторые одномерные дискретные функции распределения

Распределение	Область значений	$\Pr\{X=S\}$	Ограничения на параметры	Среднее	Дисперсия	Асимметрия γ_1	Эксцесс γ_2	Характеристическая функция	Семиинварианты
26.1.19. Вырожденное	$x = c$ (c — постоянная)	$p = 1$	$-\infty < c < \infty$	c	0			e^{ict}	$\varkappa_1 = c$, $\varkappa_r = 0$ для $r > 1$
26.1.20. Биномиальное	$x_s = s$ $(s=0, 1, \ldots, n)$	$\binom{n}{s} p^s(1-p)^{n-s}$	$0 < p < 1$ $(q = 1 - p)$	np	npq	$\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$	$\frac{1-6pq}{npq}$	$(q + pe^{it})^n$	$\varkappa_1 = np$; $\varkappa_{r+1} = pq\frac{d\varkappa_r}{dp}$ $(r \geqslant 1)$
26.1.21. Гипергеометрическое	$x_s = s$ $(s = 0, 1, \ldots, \min(nN_1))$	$\frac{\binom{N_1}{s}\binom{N_2}{n-s}}{\binom{N_1+N_2}{n}}$	N_1 и N_2 — целые и $n \leqslant N_1 + N_2$ $(N = N_1 + N_2,$ $p = N_1/N, q = N_2/N)$	np	$npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	$\frac{q-p}{\sqrt{npq}}\sqrt{\frac{N-1}{N-n}}\left(\frac{N-2n}{N-2}\right)$	сложное выражение	$\frac{\binom{N_2}{n}}{\binom{N}{n}} F(-n, -N_1; N_2 - n + 1; e^{it})$	сложное выражение
26.1.22. Пуассона	$x_s = s$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$	$\frac{e^{-m}m^s}{s!}$	$0 < m < \infty$	m	m	$m^{-1/2}$	m^{-1}	$e^{m(e^{it}-1)}$	$\varkappa_r = m$ $(r = 1, 2, \ldots)$
26.1.23. Отрицательное биномиальное	$x_s = s$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$	$\binom{n+s-1}{s} p^n(1-p)^s$	$n \geqslant 0$, $0 < p < 1$ $(p = 1/Q,$ $1 - p = P/Q)$	nP	nPQ	$\frac{Q+P}{\sqrt{nPQ}}$	$\frac{1+6PQ}{nPQ}$	$(Q - Pe^{it})^{-n}$	$\varkappa_1 = nP$; $\varkappa_{r+1} = PQ\frac{d\varkappa_r}{dQ}$ $(r \geqslant 1)$
26.1.24. Геометрическое	$x_s = s$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$	$p(1-p)^s$	$0 < p < 1$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$	$6 + \frac{p^2}{1-p}$	$p[1-(1-p)e^{it}]^{-1}$	$\varkappa_1 = \frac{1-p}{p}$; $\varkappa_{r+1} = -(1-p)\frac{d\varkappa_r}{dp}$ $(r \geqslant 1)$

Некоторые одномерные непрерывные функции распределения

Распределение	Область значений	Плотность вероятности	Ограничения на параметры	Среднее	Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	Характеристическая функция	Семиинварианты
26.1.25. Функция ошибок	$-\infty < x < \infty$	$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$	$0 < h < \infty$	0	$\frac{1}{2h^2}$	0	0	$e^{-t^2/(4h^2)}$	$\varkappa_1 = 0,\ \varkappa_2 = \frac{1}{2h^2}$, $\varkappa_n = 0\ (n > 2)$
26.1.26. Нормальное	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\delta}\right)^2}$	$-\infty < m < \infty$ $0 < \sigma < \infty$	m	σ^2	0	0	$e^{imt-\sigma^2t^2/2}$	$\varkappa_1 = m,\ \varkappa_2 = \sigma^2$, $\varkappa_n = 0\ (n > 2)$
26.1.27. Коши	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$	$-\infty < \alpha < \infty$ $0 < \beta < \infty$	не определено	не определено	не определено	не определено	$e^{i\alpha t-\beta\lvert t\rvert}$	не определено
26.1.28. Показательное	$\alpha \leqslant x < \infty$	$\frac{1}{\beta} e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}$	$-\infty < \alpha < \infty$ $0 < \beta < \infty$	$\alpha+\beta$	β^2	2	6	$e^{i\alpha t}(1 - i\beta t)^{-1}$	$\varkappa_1 = \alpha + \beta$, $\varkappa_n = \beta^n\Gamma(n)\ (n>1)$
26.1.29. Лапласа, или двойное показательное	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{2\beta} e^{-\left\lvert\frac{x-\alpha}{\beta}\right\rvert}$	$-\infty < \alpha < \infty$ $0 < \beta < \infty$	α	$2\beta^2$	0	3	$e^{i\alpha t}(1 + \beta^2t^2)^{-1}$	$\varkappa_1 = \alpha,\ \varkappa_2 = 2\beta^2$, $\varkappa_{2n+1} = 0,\ \varkappa_{2n} = \frac{(2n)!}{n}\beta^{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$
26.1.30. Крайних значений *) (Фишера — Типпета I типа, или двойное показательное)	$-\infty < x < \infty$	$\frac{1}{\beta}\exp(-y - e^{-y})$ $\left(y = \frac{x-\alpha}{\beta}\right)$	$-\infty < \alpha < \infty$ $0 < \beta < \infty$	$\alpha+\gamma\beta$	$\frac{(\pi\beta)^2}{6}$	1.3	2.4	$\Gamma(1 - i\beta t)\, e^{i\alpha t}$	$\varkappa_1=\gamma,\ \varkappa_2 = \frac{(\pi\beta)^2}{6}$, $\varkappa_n=\beta^n\Gamma(n)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}$ $(n > 2)$

*) γ (постоянная Эйлера) = 0.57721 56040 ...

(продолжение)

Распределение	Область значений	Плотность вероятности	Ограничения на параметры	Среднее	Дисперсия	Асимметрия	Эксцесс	Характеристическая функция	Семиинварианты
26.1.31. Пирсона III типа	$\alpha \leqslant x < \infty$	$\frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} y^{p-1} e^{-y}$ $\left(y = \frac{x-\alpha}{\beta}\right)$	$-\infty < \alpha < \infty$ $0 < \beta < \infty$ $0 < p < \infty$	$\alpha + p\beta$	$p\beta^2$	$\frac{2}{\sqrt{p}}$	$\frac{6}{p}$	$e^{i\alpha t}(1 - i\beta t)^{-p}$	$\varkappa_1 = \alpha + \beta p$, $\varkappa_n = \beta^n p\Gamma(n)$ $(n > 1)$
26.1.32. Гамма-распределение	$0 \leqslant x < \infty$	$\frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x}$	$0 < p < \infty$	p	p	$\frac{2}{\sqrt{p}}$	$\frac{6}{p}$	$(1 - it)^{-p}$	$\varkappa_1 = p$, $\varkappa_n = p\Gamma(n)$ $(n>1)$
26.1.33. Бета-распределение	$0 \leqslant x \leqslant 1$	$\frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$1 \leqslant \alpha < \infty$ $1 \leqslant \beta < \infty$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\frac{2(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2)}$	см. сноску *)	$M(\alpha, \alpha+\beta, it)$	
26.1.34. Прямоугольное, или равномерное	$m - \frac{h}{2} \leqslant$ $\leqslant x \leqslant m + \frac{h}{2}$	$\frac{1}{h}$	$-\infty < m < \infty$ $0 < h < \infty$	m	$\frac{h^2}{12}$	0	$-1{,}2$	$\frac{2}{ht} \operatorname{si}\left(\frac{ht}{2}\right) e^{imt}$	$\varkappa_1 = m$, $\varkappa_{2n+1} = 0$, $\varkappa_{2n} = \frac{h^{2n} B_{2n}}{2n}$, B_{2n} — числа Бернулли, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}, \ldots$

* $\gamma_2 = \sqrt{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}} \left\{ \frac{3(\alpha+\beta+1)[2(\alpha+\beta)^2 + \alpha\beta(\alpha+\beta-6)]}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)} - 3 \right\}$.

Неравенства для функций распределения

($F(x)$ означает к.ф.р. случайной величины X, t — положительную постоянную; предполагается, что m конечно и все математические ожидания существуют.)

Неравенство	Условия
26.1.35. $\Pr\{g(X) \geqslant t\} \leqslant E[g(X)]/t$	I. $g(X) \geqslant 0$
26.1.36. $\Pr\{X \geqslant t\} \leqslant m/t$ $F(t) \geqslant 1 - \frac{m}{t}$	I. $\Pr\{X < 0\} = 0$ II. $E(X) = m$
26.1.37. $\Pr\{\lvert X - m\rvert \geqslant t\sigma\} \leqslant 1/t^2$ $F(m + t\sigma) - F(m - t\sigma) \geqslant 1 - 1/t^2$	I. $E(X) = m$ II. $E(X - m)^2 = \sigma^2$
26.1.38. $\Pr\{\lvert \bar{X} - \bar{m}\rvert \geqslant t\bar{\sigma}\} \leqslant 1/nt^2$	I. $E(X_i) = m_i$ II. $E(X_i - m_i)^2 = \sigma_i^2$ III. $E(X_i - m_i)(X_j - m_j) = 0 (i \neq j)$ IV. $\bar{X} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)/n$ $\bar{m} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)/n$ $\bar{\sigma} = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)/n\right]^{1/2}$
26.1.39. $\Pr\{\lvert X - m\rvert \geqslant t\sigma\} \leqslant \frac{4}{9}\left\{\frac{1 + \left(\frac{m - x_0}{\sigma}\right)^2}{\left(t - \left\lvert\frac{m - x_0}{\sigma}\right\rvert\right)^2}\right\}$ $F(m + t\sigma) - F(m - t\sigma) \geqslant 1 - \frac{4}{9}\left\{\frac{1 + \left(\frac{m - x_0}{\sigma}\right)^2}{\left(t - \left\lvert\frac{m - x_0}{\sigma}\right\rvert\right)^2}\right\}$	I. $E(X - m)^2 = \sigma^2$ II. $F(x)$ — непрерывная к.ф.р. III. $F(x)$ такова, что $F'(x_0) > F'(x)$ для $x \neq x_0$
26.1.40. $\Pr\{\lvert X - m\rvert \geqslant t\sigma\} \leqslant 4/(9t^2)$ $F(m + t\sigma) - F(m - t\sigma) \geqslant 1 - 4/(9t^2)$	I. $E(X - m)^2 = \sigma^2$ II. $F(x)$ — непрерывная к.ф.р. III. $F(x)$ такова, что $F'(x_0) > F'(x)$ для $x \neq x_0$ IV. $m = x_0$
26.1.41. $\Pr\{\lvert X - m\rvert \geqslant t\sigma\} \leqslant \frac{\mu_4 - \sigma^4}{\mu_4 + t^4\sigma^4 - 2t^2\sigma^4}$ $F(m + t\sigma) - F(m - t\sigma) \geqslant 1 - \frac{\mu_4 - \sigma^4}{\mu_4 + t^4\sigma^4 - 2t^2\sigma^4}$	I. $E(X - m)^2 = \sigma^2$ II. $E(X - m)^4 = \mu_4$

26.2. НОРМАЛЬНОЕ, ИЛИ ГАУССОВСКОЕ, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

26.2.1. $Z(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

26.2.2. $P(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{x} Z(t)\, dt.$

26.2.3. $Q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \int\limits_{x}^{\infty} Z(t)\, dt.$

26.2.4. $A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-x}^{x} e^{-t^2/2}\, dt = \int\limits_{-x}^{x} Z(t)\, dt.$

26.2.5. $P(x) + Q(x) = 1.$

26.2.6. $P(-x) = Q(x).$

26.2.7. $A(x) = 2P(x) - 1.$

Интеграл вероятностей со средним значением m и дисперсией σ^2

Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним значением m и дисперсией σ^2, если вероятность события $\{X \leqslant x\}$ определяется формулой

26.2.8. $$\Pr\{X \leqslant x\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(t-m)^2/2\sigma^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} e^{-t^2/2}\, dt = P\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Соответствующая плотность вероятности имеет вид

26.2.9. $$\frac{\partial}{\partial x} P\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} Z\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

Эта функция симметрична относительно m, т.е.

$$Z\left(\frac{m+x}{\sigma}\right) = Z\left(\frac{m-x}{\sigma}\right).$$

Точки перегиба плотности вероятности имеют абсциссы $m \pm \sigma$.

Разложения в степенной ряд ($x \geqslant 0$)

26.2.10. $$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\, 2^n (2n+1)}.$$

26.2.11. $$P(x) = \frac{1}{2} + Z(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}.$$

Асимптотические представления ($x > 0$)

26.2.12. $$Q(x) = \frac{Z(x)}{x}\left\{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{x^4} + \ldots - \frac{(-1)^n\, 1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{x^{2n}}\right\} + R_n,$$

где

$$R_n = (-1)^{n+1}\, 1\cdot 3 \ldots (2n+1) \int\limits_{x}^{\infty} \frac{Z(t)}{t^{2n+2}}\, dt.$$

Остаток R_n по абсолютной величине меньше первого отброшенного члена.

26.2.13. $$Q(x) \sim \frac{Z(x)}{x}\left\{1 - \frac{a_1}{x^2+2} + \frac{a_2}{(x^2+2)(x^2+4)} - \frac{a_3}{(x^2+2)(x^2+4)(x^2+6)} + \ldots\right\},$$

где $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 5$, $a_4 = 9$, $a_5 = 129$ и общий член имеет вид

$$a_n = c_0 1\cdot 3 \ldots (2n-1) + 2c_1\, 1\cdot 3 \ldots (2n-3) + 2^2 c_2 1\cdot 3 \ldots (2n-5) + \ldots + 2^{n-1} c_{n-1},$$

c_s есть коэффициент при t^{n-s} в разложении функции $t(t-1)\ldots(t-n+1)$.

Разложения в непрерывные дроби

26.2.14. $$Q(x) = Z(x)\left\{\frac{1}{x+}\,\frac{1}{x+}\,\frac{2}{x+}\,\frac{3}{x+}\,\frac{4}{x+}\ldots\right\} \quad (x > 0).$$

26.2.15. $$Q(x) = \frac{1}{2} - Z(x)\left\{\frac{x}{1-}\,\frac{x^2}{3+}\,\frac{2x^2}{5-}\,\frac{3x^2}{7+}\,\frac{4x^2}{9-}\ldots\right\} \quad (x \geqslant 0).$$

Полиномиальная и рациональная аппроксимация для $P(x)$ и $Z(x)$

26.2.16. $$P(x) = 1 - Z(x)(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) + \varepsilon(x), \quad t = 1/(1+px),$$

$$|\varepsilon(x)| < 1\cdot 10^{-5},$$

$p = 0.33267$, $a_1 = 0.43618\,36$,

$a_2 = -0.12016\,76$

$a_3 = 0.93729\,80.$

26.2.17. $$P(x) = 1 - Z(x)(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \varepsilon(x), \quad t = 1/(1+px),$$

$$|\varepsilon(x)| < 7.5\cdot 10^{-8},$$

$p = 0.23164\,19$,

$b_1 = 0.31938\,1530$, $b_4 = -1.82125\,5978$,

$b_2 = -0.35656\,3782$, $b_5 = 1.33027\,4429$.

$b_3 = 1.78147\,7937$,

26.2.18. $$P(x) = 1 - \frac{1}{2}(1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4)^{-4} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| < 2.5 \cdot 10^{-4},$$

$$c_1 = 0.196854, \quad c_3 = 0.000344,$$

$$c_2 = 0.115194, \quad c_4 = 0.019527.$$

26.2.19. $$P(x) = 1 - \frac{1}{2}(1 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 + d_5x^5 + d_6x^6)^{-16} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| < 1.5 \cdot 10^{-7},$$

$$d_1 = 0.04986\,73470, \quad d_4 = 0.00003\,80036,$$

$$d_2 = 0.02114\,10061, \quad d_5 = 0.00004\,88906,$$

$$d_3 = 0.00327\,76263, \quad d_6 = 0.00000\,53830.$$

26.2.20. $$Z(x) = (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6)^{-1} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| < 2{,}7 \cdot 10^{-3},$$

$$a_0 = 2.490895, \quad a_4 = -0.024393,$$

$$a_2 = 1.466003, \quad a_6 = 0.178257.$$

26.2.21. $$Z(x) = (b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 + b_6x^6 + b_8x^8 + b_{10}x^{10})^{-1} + \varepsilon(x),$$

$$|\varepsilon(x)| < 2.3 \cdot 10^{-4},$$

$$b_0 = 2.50523\,67, \quad b_6 = 0.13064\,69,$$

$$b_2 = 1.28312\,04, \quad b_8 = -0.02024\,90,$$

$$b_4 = 0.22647\,18, \quad b_{10} = 0.00391\,32.$$

Рациональная аппроксимация для x_p, где $Q(x_p) = p$ $(0 < p \leqslant 0.5)$

26.2.22. $$x_p = t - \frac{a_0 + a_1t}{1 + b_1t + b_2t^2} + \varepsilon(p), \quad t = \sqrt{\ln\frac{1}{p^2}},$$

$$|\varepsilon(p)| < 3 \cdot 10^{-3},$$

$$a_0 = 2.30753, \quad b_1 = 0.99229,$$

$$a_1 = 0.27061, \quad b_2 = 0.04481.$$

26.2.23. $$x_p = t - \frac{c_0 + c_1t + c_2t^2}{1 + d_1t + d_2t^2 + d_3t^3} + \varepsilon(p), \quad t = \sqrt{\ln\frac{1}{p^2}},$$

$$|\varepsilon(p)| < 4.5 \cdot 10^{-4},$$

$$c_0 = 2.515517, \quad d_1 = 1.432788,$$

$$c_1 = 0.802853, \quad d_2 = 0.189269,$$

$$c_2 = 0.010328, \quad d_3 = 0.001308.$$

Границы для функции нормального распределения

26.2.24.

$$P(x) \leqslant \begin{cases} P_1(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(1 - e^{-2x^2/\pi})^{1/2} \\ \qquad (x > 0), \\ P_2(x) = 1 - \dfrac{(4 + x^2)^{1/2} - x}{2}(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2} \\ \qquad (x > 1.4) \end{cases}$$

(см. рис. 26.1 для кривых ошибок).

26.2.25. $P(x) \geqslant$

$$\geqslant \begin{cases} P_3(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{-2x^2/\pi} - \dfrac{2(\pi - 3)}{3\pi^2}x^4e^{-x^2/2}\right)^{1/2} \\ \qquad\qquad (x > 0), \\ P_4x = 1 - \dfrac{1}{x}(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2} \quad (x > 2.2). \end{cases}$$

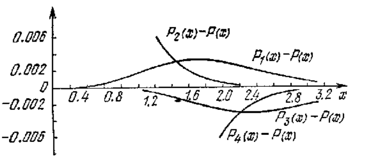


Рис. 26.1. Кривые ошибок для границ нормального распределения.

Производные плотности вероятности нормального распределения

26.2.26. $$Z^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}Z(x).$$

Дифференциальное уравнение

26.2.27. $$Z^{(m+2)}(x) + xZ^{(m+1)}(x) + (m + 1)Z^{(m)}(x) = 0.$$

Значение в точке $x = 0$

26.2.28.

$$Z^{(m)}(0) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m/2}m!}{\sqrt{2\pi}\,2^{m/2}(m/2)!} & \text{для } m = 2r,\ r = 0, 1, \ldots, \\ 0 & \text{для нечетных } m > 0. \end{cases}$$

Выражение некоторых специальных функций через $P(x)$ и $Z^{(n)}(x)$

	Функция	Соотношение
26.2.29.	Функция ошибок	$\operatorname{erf} x = 2P(x\sqrt{2}) - 1 \quad (x \geqslant 0)$
26.2.30.	Неполная гамма-функция (частный случай)	$\dfrac{\gamma(1/2, x)}{\Gamma(1/2)} = [2P(\sqrt{2x}) - 1)] \quad (x \geqslant 0)$
26.2.31.	Полином Эрмита	$He_n(x) = (-1)^n \dfrac{Z^{(n)}(x)}{Z(x)}$
26.2.32.	Полином Эрмита	$H_n(x) = (-1)^n\, 2^{n/2} \dfrac{Z^{(n)}(x\sqrt{2})}{Z(x\sqrt{2})}$
26.2.33.	Функция H_h	$Hh_{-n}(x) = (-1)^{n-1}\sqrt{2\pi}\, Z^{(n-1)}(z) \quad (n > 0)$
26.2.34.	Функция H_h	$Hh_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!} Hh_{-1}(x) \dfrac{d^n}{dx_n}\left(\dfrac{Q(x)}{Z(x)}\right) \quad (n > 0)$
26.2.35.	Тетрахорическая функция	$\tau_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n!}} Z^{(n-1)}(x)$
26.2.36.	Вырожденная гипергеометрическая функция (частный случай)	$M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{x}\left\{P(x) - \dfrac{1}{2}\right\} \quad (x > 0)$
26.2.37.	Вырожденная гипергеометрическая функция (частный случай)	$M\left(1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{1}{xZ(x)}\left\{P(x) - \dfrac{1}{2}\right\} \quad (x > 0)$
26.2.38.	Вырожденная гипергеометрическая функция (частный случай)	$M\left(\dfrac{2m+1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{Z^{(2m)}(x)}{Z^{(2m)}(0)} \quad (x \geqslant 0)$
26.2.39.	Вырожденная гипергеометрическая функция (частный случай)	$M\left(\dfrac{2m+2}{2}, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{Z^{(2m-1)}(x)}{xZ^{(2m)}(0)} \quad (x \geqslant 0)$
26.2.40.	Функция параболического цилиндра	$U\left(-n - \dfrac{1}{2}, x\right) = e^{-x^2/2}(-1)^n \dfrac{Z^{(n)}(x)}{Z(x)} \quad (n > 0)$

Повторные интегралы от интеграла вероятностей нормального распределения

26.2.41. $I_n(z) = \int\limits_x^\infty I_{n-1}(t)\,dt \quad (n \geqslant 0),$

где $I_{-1}(x) = Z(x)$.

26.2.42. $I_{-n}(x) = \left(-\dfrac{d}{dx}\right)^{n-1} Z(x) = (-1)^{n-1} Z^{(n-1)}(x) \quad (n \geqslant -1).$

26.2.43. $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + x\dfrac{dx}{dn} - n\right) I_n(x) = 0.$

26.2.44. $(n+1)\, I_{n+1}(x) + xI_n(x) - I_{n-1}(x) = 0 \quad (n > -1)$

26.2.45. $I_n(x) = \int\limits_x^\infty \dfrac{(t-x)^n}{n!} Z(t)\,dt = e^{-x^2/2}\int\limits_0^\infty \dfrac{t^n}{n!} Z(t)\,dt \quad (n > -1).$

26.2.46. $I_n(0) = I_{-n}(0) = \dfrac{1}{(n/2)!\; 2^{(n+2/2)}}$ (n — четное)

Асимптотические разложения произвольной плотности вероятности и функции распределения

Пусть Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ **означает** n независимых случайных величин со средними значениями m_i, дисперсиями σ_i^2 и семиинвариантами $\varkappa_{r,\,i}$. Тогда асимптотические разложения относительно n для плотности и функции распределения нормированной суммы

$$X = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - m_i)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{1/2}}$$

имеют вид

26.2.47. $f(x) \sim Z(x) -$

$$-\left[\frac{\gamma_1}{6} Z^{(3)}(x)\right] + \left[\frac{\gamma_2}{24} Z^{(4)}(x) + \frac{\gamma_1^2}{72} Z^{(6)}(x)\right] -$$

$$-\left[\frac{\gamma_3}{120} Z^{(5)}(x) + \frac{\gamma_1\gamma_2}{144} Z^{(7)}(x) + \frac{\gamma_1^3}{1296} Z^{(9)}(x)\right] +$$

$$+\left[\frac{\gamma_4}{720} Z^{(6)}(x) + \frac{\gamma_2^2}{1152} Z^{(8)}(x) + \frac{\gamma_1\gamma_3}{720} Z^{(8)}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_1^2\gamma_2}{1728} Z^{(10)}(x) + \frac{\gamma_1^4}{31104} Z^{(12)}(x)\right] + \ldots$$

26.2.48. $F(x) \sim P(x) -$

$$-\left[\frac{\gamma_1}{6} Z^{(2)}(x)\right] + \left[\frac{\gamma_2}{24} Z^{(3)}(x) + \frac{\gamma_1^2}{72} Z^{(5)}(x)\right] -$$

$$-\left[\frac{\gamma_3}{120} Z^{(4)}(x) + \frac{\gamma_1\gamma_2}{144} Z^{(6)}(x) + \frac{\gamma_1^3}{1296} Z^{(8)}(x)\right] +$$

$$+\left[\frac{\gamma_4}{720} Z^{(5)}(x) + \frac{\gamma_2^2}{1152} Z^{(7)}(x) + \frac{\gamma_1\gamma_3}{720} Z^{(7)}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_1^2\gamma_2}{1728} Z^{(9)}(x) + \frac{\gamma_1^4}{31104} Z^{(11)}(x)\right] + \ldots,$$

где

$$\gamma_{r-2} = \frac{1}{n^{r/2-1}} \, \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varkappa_{r,i}\right)}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{r/2}}.$$

Члены в квадратных скобках имеют один и тот же порядок относительно n. Если все Y_i имеют одинаковое распределение, то $m_i = m$, $\sigma_i^2 = \sigma^2$, $\varkappa_{r,i} = \varkappa_r$ и

$$\gamma_{r-2} = \frac{1}{n^{r/2-1}} \left(\frac{\varkappa_r}{\sigma^r}\right).$$

Асимптотическое представление для функции, обратной к функции распределения

Обозначим $F(y)$ функцию распределения суммы $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Тогда асимптотическое разложение Корниша — Фишера относительно n для значения y_p, определяемого из уравнения $F(y_p) = 1 - p$, имеет вид

26.2.49. $y_p \sim m + \sigma w$,

где

$$w = x + [\gamma_1 h_1(x)] + [\gamma_2 h_2(x) + \gamma_1^2 h_{11}(x)] +$$

$$+ [\gamma_3 h_3(x) + \gamma_1\gamma_2 h_{12}(x) + \gamma_1^3 h_{111}(x)] +$$

$$+ [\gamma_4 h_4(x) + \gamma_2^2 h_{22}(x) + \gamma_1\gamma_3 h_{13}(x) +$$

$$+ \gamma_1^2\gamma_2 h_{112}(x) + \gamma_1^4 h_{1111}(x)] + \ldots,$$

$$Q(x) = p, \quad \gamma_{r-2} = \frac{\varkappa_r}{\varkappa_2^{r/2}}, \quad r = 3, 4, \ldots$$

26.2.50. $h_1(x) = \frac{1}{6} He_2(x)$,

$$h_2(x) = \frac{1}{24} He_3(x),$$

$$h_{11}(x) = -\frac{1}{36} [2He_3(x) + He_1(x)],$$

$$h_3(x) = \frac{1}{120} [He_4(x)],$$

$$h_{12}(x) = -\frac{1}{24} [He_4(x) + He_2(x)],$$

$$h_{111}(x) = \frac{1}{324} [12He_4(x) + 19He_2(x)],$$

$$h_4(x) = \frac{1}{720} He_5(x),$$

$$h_{22}(x) = -\frac{1}{384} [3He_5(x) + 6He_3(x) + 2He_1(x)],$$

$$h_{13}(x) = -\frac{1}{180} [2He_5(x) + 3He_3(x)],$$

$$h_{112}(x) = \frac{1}{288} [14He_5(x) + 37He_3(x) + 8He_1(x)],$$

$$h_{1111}(x) = -\frac{1}{7776} [252He_5(x) + 832He_3(x) + 227He_1(x)].$$

Члены в квадратных скобках 26.2.49 имеют один и тот же порядок относительно n. $He_n(x)$ означает полином Эрмита (см. гл. 22).

26.2.51. $He_n(x) = (-1)^n \dfrac{Z^{(n)}(x)}{Z(x)} =$

$$= n! \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m}{2^m m! (n-2m)!} x^{n-2m}.$$

Следующая вспомогательная таблица дает значения полиномов $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_{1111}(x)$ для $p = 0.25$, 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005, 0.0025, 0.001, 0.0005.

Вспомогательная таблица для асимптотического разложения Корниша—Фишера (взята из работы: Fisher R. A. Contributions to mathematical statistics. Paper 30 (with E. A. Cornish). — Extrait de la Revue de L'Institute International de Statistique, 1937, **4**, p. 1—14).

	p								
	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
x	0.67449	1.28155	1.64485	1.95996	2.32635	2.57583	2.80703	3.09022	3.29053
$h_1(x)$	0.09084	0.10706	0.28426	0.47358	0.73532	0.93915	1.14657	1.42491	1.63793
$h_2(x)$	−0.07153	0.07249	0.02018	0.06872	0.23379	0.39012	0.57070	0.84331	1.07320
$h_{11}(x)$	0.07663	0.06106	0.01878	0.14607	0.37634	0.59171	0.83890	−1.21025	−1.52234
$h_3(x)$	0.00398	−0.03464	−0.04928	−0.04410	−0.00152	0.06010	0.14841	0.30746	0.46059
$h_{12}(x)$	0.00282	0.14644	0.17532	0.10210	−0.17621	−0.53531	−0.02868	−1.89355	−2.71243
$h_{111}(x)$	−0.01428	−0.11629	−0.11900	−0.02937	0.25195	0.59757	1.06301	1.86787	2.62337
$h_4(x)$	0.00998	0.00227	−0.01082	−0.02357	−0.03176	−0.02621	−0.00666	0.04591	0.10950
$h_{22}(x)$	−0.03285	0.00776	0.05985	0.09659	0.07888	−0.01226	−0.19116	−0.59060	−1.03555
$h_{13}(x)$	−0.05126	0.01086	0.09462	0.16106	0.16058	0.05366	−0.17498	−0.70464	−1.30531
$h_{112}(x)$	0.14764	−0.10858	−0.39517	−0.55856	−0.32621	0.35696	1.60445	4.29304	7.23307
$h_{1111}(x)$	0.06898	0.09585	0.25623	0.31624	0.07286	0.46534	−1.39199	−3.32708	−5.40702

26.3. ДВУМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

26.3.1. $g(x, y, \rho) = [2\pi\sqrt{1-\rho^2}]^{-1}\exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{1-\rho^2}\right).$

26.3.2. $g(x, y, \rho) = (1-\rho^2)^{-1/2}Z(x)Z\left(\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$

26.3.3. $L(h, k, \rho) = \int\limits_h^\infty dx\int\limits_k^\infty g(x, y, \rho)\,dy,$

$$L(h, k, \rho) = \int\limits_h^\infty Z(x)\,dx\int\limits_w^\infty Z(w)\,dw,$$

$$w = \left(\frac{k-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

26.3.4. $L(-h, -k, \rho) = \int\limits_{-\infty}^h dx\int\limits_{-\infty}^k g(x, y, \rho)\,dy.$

26.3.5. $L(-h, k, -\rho) = \int\limits_{-\infty}^h dx\int\limits_k^\infty g(x, y, \rho)\,dy.$

26.3.6. $L(h, -k, -\rho) = \int\limits_h^\infty dx\int\limits_{-\infty}^k g(x, y, \rho)\,dy.$

26.3.7. $L(h, k, \rho) = L(k, h, \rho).$

26.3.8. $L(-h, k, \rho) + L(h, k, -\rho) = Q(k).$

26.3.9. $L(-k, -k, \rho) - L(h, k, \rho) = P(k) - Q(k).$

26.3.10. $2[L(h, k, \rho) + L(h, k, -\rho) + P(h) - Q(k)] - 1 = \int\limits_{-h}^h dx\int\limits_{-h}^k g(x, y, \rho)\,dy.$

Двумерное нормальное распределение со средними m_x, m_y, дисперсиями σ_x^2, σ_y^2 и коэффициентом корреляции ρ

Случайные величины X, Y имеют двумерное нормальное распределение со средними (m_x, m_y), дисперсиями (σ_x^2, σ_y^2) и коэффициентом корреляции ρ, если вероятность события $\{X \leqslant h, Y \leqslant k\}$ дается соотношением

26.3.11. $\Pr\{X \leqslant h, Y \leqslant k\} =$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sigma_y}\int\limits_{-\infty}^{\frac{h-m_x}{\sigma_x}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{k-m_y}{\sigma_y}} g(s, t, \rho)\,ds\,dt = L\left(-\left(\frac{h-m_x}{\sigma_x}\right), -\left(\frac{k-m_y}{\sigma_y}\right), \sigma\right).$$

Соответствующая плотность вероятности имеет вид

26.3.12. $\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\frac{-Q}{2(1-\rho^2)} = \frac{1}{\sigma_x\sigma_y}g\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}, \frac{y-m_y}{\sigma_y}, \rho\right),$

где

$$Q = \frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}.$$

Плотность кругового нормального распределения

26.3.13. $\frac{1}{\sigma^2}g\left(\frac{x-m_x}{\sigma}, \frac{y-m_y}{\sigma}, 0\right) = \frac{1}{2\pi e^2}\exp -\frac{(x-m_x)^2+(y-m_y)^2}{2\sigma^2}.$

Частные значения $L(h, k, \rho)$

26.3.14. $L(h, k, 0) = Q(h)Q(k).$

26.3.15. $L(h, k, -1) = 0 \quad (h + k \geqslant 0).$

26.3.16. $L(h, k, -1) = P(h) - Q(k) \quad (h + k \leqslant 0).$

26.3.17. $L(h, k, 1) = Q(h) \quad (k \leqslant h).$

26.3.18. $L(h, k, 1) = Q(k) \quad (k \geqslant h).$

26.3.19. $L(0, 0, \rho) = \frac{1}{4} + \frac{\arcsin\rho}{2\pi}.$

$L(h, k, \rho)$ как функция от $L(h, 0, \rho)$

26.3.20. $L(h, k, \rho) = L\left(h, 0, \frac{(\rho h-k)(\operatorname{sgn} h)}{\sqrt{h^2-2\rho hk+k^2}}\right) + L\left(k, 0, \frac{(\rho h-k)(\operatorname{sgn} k)}{\sqrt{h^2-2\rho hk+k^2}}\right) - \begin{cases} 0, & \text{если } hk > 0 \text{ или } hk = 0 \text{ и } h + k \geqslant 0 \\ 1/2 & \text{в противном случае.}\end{cases}$

Здесь $\operatorname{sgn} h = 1$, если $h \geqslant 0$, и $\operatorname{sgn} h = -1$, если $h < 0$.

Интеграл по эллипсу с центром в точке (m_x, m_y)

26.3.21. $\iint\limits_A (\sigma_x\sigma_y)^{-1}g\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}, \frac{y-m_y}{\sigma_y}, \rho\right)dx\,dy = 1 - e^{-a^2/2},$

где A означает площадь, ограниченную эллипсом

$$\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 - \frac{2\rho(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2 = a^2(1-\rho^2).$$

Интеграл по произвольной области

26.3.22. $\iint\limits_{A(x,y)} (\sigma_x\sigma_y)^{-1}g\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}, \frac{y-m_y}{\sigma_y}, \rho\right)dx\,dy = \iint\limits_{A^*(s,t)} g(s, t, 0)\,ds\,dt,$

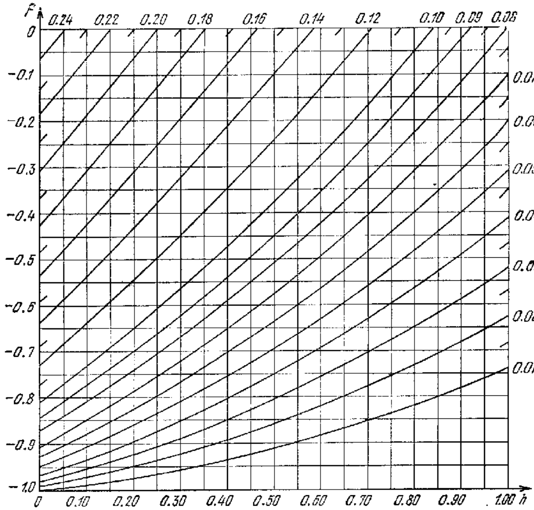


Рис. 26.2. $L(h, 0, \rho)$ для $0 \leqslant h \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \rho \leqslant 0$. Значения для $h < 0$ можно получить, используя соотношение $L(h, 0, -\rho) = 1/2 - L(-h, 0, \rho)$.

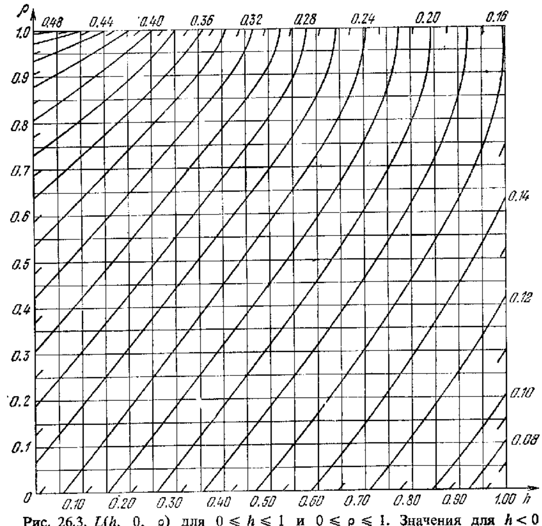


Рис. 26.3. $L(h, 0, \rho)$ для $0 \leqslant h \leqslant 1$ и $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Значения для $h < 0$ можно получить, используя соотношение $L(h, 0, -\rho) = 1/2 - L(-h, 0, \rho)$.

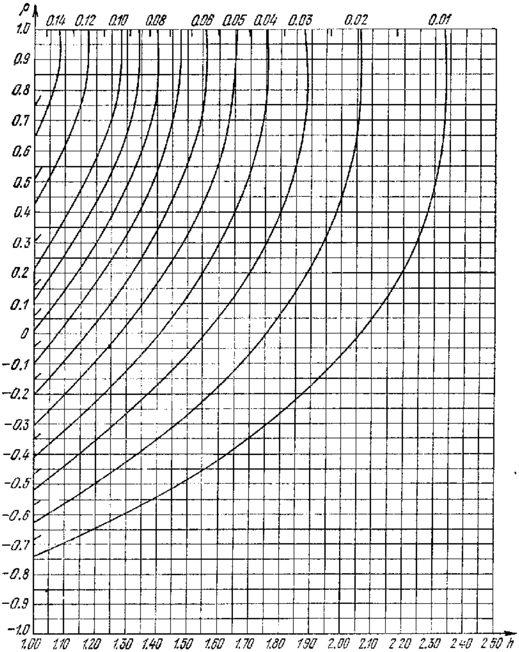


Рис. 26.4. $L(h,\ 0,\ \rho)$ для $h \geqslant 1$ и $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$. Значения для $h < 0$ можно получить, используя соотношение $L(h,\ 0,\ -\rho) = 1/2 - L(-h,\ 0,\ \rho.)$

где $A^*(s, t)$ означает область, в которую переходит $A(x, y)$ после преобразования

$$s = \frac{1}{\sqrt{2+2\rho}}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} + \frac{y-m_y}{\sigma_y}\right),$$

$$t = \frac{-1}{\sqrt{2-2\rho}}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} - \frac{y-m_y}{\sigma_y}\right).$$

Интеграл от плотности кругового нормального распределения с параметрами $m_x = m_y = 0$, $\sigma = 1$, взятый по треугольнику, ограниченному прямыми $y = 0$, $y = ax$, $x = h$

26.3.23. $$V(h,\ ah) = \frac{1}{2\pi}\int_0^h\int_0^{ax} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dx,$$

$$V(h,\ ah) = \frac{1}{4} + L(h,\ 0,\ \rho) - L(0,\ 0,\ \rho) - \frac{Q(h)}{2},$$

где $\rho = -\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Интеграл от плотности кругового нормального распределения, взятый по кругу с радиусом $R\sigma$ и центром на расстоянии $r\sigma$ от точки $(m_x,\ m_y)$

26.3.24. $$\iint_A \sigma^{-2} g\left(\frac{x-m_x}{\sigma},\ \frac{y-m_y}{\sigma},\ 0\right)dx\,dy = P\left(\frac{R^2}{2},\ r^2\right),$$

где $P(R^2/2,\ r^2)$ — к.ф.р. нецентрального χ^2-распределения (см. 26.4.25) с $\nu = 2$ степенями свободы и параметром нецентральности r^2.

Аппроксимация для $P(R^2/2,\ r^2)$

Аппроксимация	*Условие*
26.3.25. $\dfrac{2R^2}{4+R^2}\exp\left(-\dfrac{2r^2}{4+R^2}\right)$	$R < 1$

Аппроксимация	*Условие*
26.3.26. $P(x_1)$	$R > 1$
26.3.27. $P(x_2)$	$R > 5$

$$x_1 = \frac{\left[\frac{R^2}{2+r^2}\right]^{1/3} - \left[1 - \frac{2}{9}\,\frac{2+2r^2}{(2+r^2)^2}\right]}{\left[\frac{2}{9}\,\frac{2+2r^2}{(2+r^2)^2}\right]^{1/3}},$$

$x_2 = R - \sqrt{r^2-1}$, R и r — большие.

Неравенство

26.3.28. $$Q(h) - \frac{1-\rho^2}{\rho h - k} Z(k)\left[Q\left(\frac{h-\rho h}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right] < L(h, k, \rho) < Q(h),$$

где $\rho h - k > 0$, $0 < \rho < 1$.

Разложение в ряд

26.3.29. $$L(h, k, \rho) = Q(h)\,Q(k) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{(n)}(h)\,Z^{(n)}(k)}{(n+1)!}\,\rho^{n+1}.$$

26.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХИ-КВАДРАТ

26.4.1. $$P(\chi^2 \mid \nu) = [2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)]^{-1}\int_0^{\chi^2} t^{\nu/2-1} e^{-t/2}\,dt \quad (0 \leqslant \chi^2 < \infty).$$

26.4.2. $$Q(\chi^2 \mid \nu) = 1 - P(\chi^2 \mid \nu) = [2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)]^{-1}\int_{\chi^2}^{\infty} t^{\nu/2-1} e^{-t/2}\,dt \quad (0 \leqslant \chi^2 < \infty).$$

Связь с нормальным распределением

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, каждая из которых имеет нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда величина $X^2 = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$ имеет распределение хи-квадрат с ν степенями свободы и вероятность выполнения неравенства $X^2 \leqslant \chi^2$ дается выражением $P(\chi^2 \mid \nu)$.

Семиинварианты

26.4.3. $\varkappa_{n+1} = 2^n\, n!\,\nu \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Разложения в ряд

26.4.4. $$Q(\chi^2 \mid \nu) = 2Q(\chi) + 2Z(\chi)\sum_{r=1}^{(\nu-1)/2} \frac{\chi^{2r-1}}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2r-1)}$$

(ν — нечетное и $\chi = \sqrt{\chi^2}$).

26.4.5. $$Q(\chi^2 \mid \nu) = \sqrt{2\pi}\, Z(\chi)\left\{1 + \sum_{r=1}^{(\nu-2)/2} \frac{\chi^{2r}}{2\cdot 4 \ldots (2r)}\right\}$$

(ν — четное).

26.4.6. $$P(\chi^2 \mid \nu) = \left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{\nu/2} \frac{e^{-\chi^2/2}}{\Gamma[(\nu+2)/2]} \times \left\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi^{2r}}{(\nu+2)(\nu+4)\ldots(\nu+2r)}\right\}.$$

26.4.7. $$P(\chi^2 \mid \nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\chi^2/2)^{\nu/2+n}}{n!(\nu/2+n)}.$$

Рекуррентные и дифференциальные соотношения

26.4.8. $$Q(\chi^2 \mid \nu + 2) = Q(\chi^2 \mid \nu) + \frac{(\chi^2/2)^{\nu/2} e^{-\chi^2/2}}{\Gamma(\nu/2+1)}.$$

26.4.9. $$\frac{\partial^m Q(\chi^2 \mid \nu)}{\partial(\chi^2)^m} = \frac{1}{2^m}\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m+j}\, Q(\chi^2 \mid \nu - 2j).$$

Разложения в непрерывную дробь

26.4.10. $$Q(\chi^2 \mid \nu) = \frac{(\chi^2)^{\nu/2} e^{-\chi^2/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \times \left\{\frac{1}{\chi^2/2+}\,\frac{1-\nu/2}{1+}\,\frac{1}{\chi^2/2+}\,\frac{2-\nu/2}{1+}\,\frac{2}{\chi^2/2+\ldots}\right\}.$$

Асимптотическое распределение для больших ν

26.4.11. $P(\chi^2 \mid \nu) \sim P(x)$, где $x = \dfrac{\chi^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}}$.

Асимптотические разложения для больших χ^2

26.4.12. $$Q(\chi^2 \mid \nu) \sim \frac{(\chi^2)^{\nu/2-1} e^{-\chi^2/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(1-\nu/2+j)}{\Gamma(1-\nu/2)}\,\frac{2^{j+1}}{(\chi^2)^j}.$$

Аппроксимации распределения хи-квадрат для больших ν

Аппроксимация	*Условие*
26.4.13. $Q(\chi^2 \mid \nu) \approx Q(x_1)$, $x_1 = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$	$\nu > 100$
26.4.14. $Q(\chi^2 \mid \nu) \approx Q(x_2)$, $x_2 = \dfrac{(\chi^2/\nu)^{1/3} - [1 - 2/(9\nu)]}{\sqrt{2/9\nu}}$	$\nu > 30$
26.4.15. $Q(\chi^2 \mid \nu) = Q(x_2 + h_\nu)$, $h_\nu = \dfrac{60}{\nu} h_{60}$	$\nu > 30$

Значения h_{60}

x	h_{60}	x	h_{60}	x	h_{60}
−3.5	−0.0118	−1.0	+0.0006	+1.5	−0.0005
−3.0	−0.0067	−0.5	0.0006	2.0	+0.0002
−2.5	−0.0033	0.0	+0.0002	2.5	0.0017
−2.0	−0.0010	+0.5	−0.0003	3.0	0.0043
−1.5	+0.0001	1.0	−0.0006	3.5	0.0082

Аппроксимация обратной функции для больших ν

Если $Q(\chi_p^2 \mid \nu) = p$ и $Q(x_p) = 1 - P(x_p) = p$, тогда

Аппроксимация	*Условие*
26.4.16. $\chi_p^2 \approx \frac{1}{2}\{x_p + \sqrt{2\nu - 1}\}^2$	$\nu > 100$
26.4.17. $\chi_p^2 \approx \nu\left\{1 - \frac{2}{9\nu} + x_p\sqrt{2/(9\nu)}\right\}^3$	$\nu > 30$
26.4.18. $\chi_p^2 \approx \nu\left\{1 - \frac{2}{9\nu} + (x_p + h_\nu)\sqrt{2/(9\nu)}\right\}^3$	$\nu > 30$,

где h_ν задается соотношением 26.4.15.

Связь с другими функциями

26.4.19. Неполная гамма-функция:

$$\frac{\gamma(a, x)}{\Gamma(a)} = P(\chi^2 \mid \nu),\ \nu = 2a, \chi^2 = 2x,$$

$$\frac{\Gamma(a, x)}{\Gamma(a)} = Q(\chi^2 \mid \nu).$$

26.4.20. Неполная гамма-функция Пирсона:

$$I(u, p) = \frac{1}{\Gamma(p-1)} \int_0^{u\sqrt{p+1}} t^p e^{-t}\, dt = P(\chi^2 \mid \nu),$$

$$\nu = 2(p+1),\ \chi^2 = 2u\sqrt{p+1}.$$

26.4.21. Распределение Пуассона:

$$Q(\chi^2 \mid \nu) = \sum_{j=0}^{c-1} e^{-m} \frac{m^j}{j!},\quad c = \frac{\nu}{2},\quad m = \frac{\chi^2}{2}\quad (\nu \text{ — четное}),$$

$$Q(\chi^2 \mid \nu) - Q(\chi^2 \mid \nu - 2) = e^{-m} \frac{m^{c-1}}{(c-1)!}.$$

26.4.22. Распределение Пирсона III типа:

$$\left[\frac{ab}{e}\right]^{ab} \int_{-a}^{x} \left(1 + \frac{t}{a}\right)^{ab} e^{-bt}\, dt = P(\chi^2 \mid \nu),$$

$$\nu = 2ab + 2,\ \chi^2 = 2b(x + a).$$

26.4.23. Неполные моменты нормального распределения:

$$\int_0^x t^n Z(t)\, dt = \begin{cases} (n-1)!!\,\dfrac{P(\chi^2 \mid \nu)}{2} & (n \text{ — четное}), \\ \dfrac{(n-1)!!}{\sqrt{2\pi}}\, P(\chi^2 \mid \nu) & (n \text{ — нечетное}) \end{cases}$$

$$(\chi^2 = x^2,\ \nu = n + 1).$$

26.4.24. Обобщенные полиномы Лагерра:

$$n! L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+j} \binom{n+1}{j} Q(\chi^2 \mid \nu + 2 - 2j)}{2^n [Q(\chi^2 \mid \nu + 2) - Q(\chi^2 \mid \nu)]}$$

$$(x = \chi^2/2,\ \alpha = \nu/2).$$

Нецентральное χ^2-распределение

26.4.25. $P(\chi'^2 \mid \nu, \lambda) =$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} P(\chi'^2 \mid \nu + 2j),$$

где $\lambda \geqslant 0$ называется параметром нецентральности.

Связь нецентрального χ^2-распределения с $\nu = 2$ с интегралом вероятностей кругового нормального распределения ($\sigma^2 = 1$), взятым по кругу с радиусом R и центром на расстоянии $r = \sqrt{\lambda}$ от начала координат (см. 26.3.24—26.3.27)

26.4.26. $$\iint_A g(x, y, \theta)\, dx\, dy = P(\chi^2 = R^2 \mid \nu = 2, \lambda) =$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda/2} \lambda^j}{2^j j!} Q(R^2 \mid 2 + 2j).$$

Аппроксимация нецентрального χ^2-распределения
($a = \nu + \lambda$, $b = \lambda/(\nu + \lambda)$)

Аппроксимирующая функция	*Аппроксимация*
26.4.27. χ^2-распределение	$P(\chi'^2 \mid \nu, \lambda) \approx P\left(\frac{\chi^2}{1+b} \middle| \nu^*\right)$, $\nu^* = \frac{a}{1+b}$
26.4.28. Нормальное распределение	$P(\chi'^2 \mid \nu, \lambda) \approx P(x)$, $x = \dfrac{(\chi'^2/a)^{1/3} - \left[1 - \frac{2}{9}\left(\frac{1+b}{a}\right)\right]}{\sqrt{\frac{2}{9}\left(\frac{1+b}{a}\right)}}$
26.4.29. Нормальное распределение	$P(\chi'^2 \mid \nu) \approx P(x)$, $x = \left[\frac{2\chi'^2}{1+b}\right]^{1/2} - \left[\frac{2a}{1+b} - 1\right]^{1/2}$

Аппроксимация обратной функции нецентрального χ^2-распределения

$(Q(\chi_p'^2 \mid \nu, \lambda) = p,\ Q(\chi_p^2 \mid \nu^*) = p$ и $Q(x_p) = p)$

Аппроксимирующая переменная	*Аппроксимация обратной функции*
26.4.30. χ^2	$\chi_p'^2 \approx (1 + b)\chi^2$
26.4.31. Нормальная	$\chi_p'^2 \approx \frac{1+b}{2}\left[x_p + \sqrt{\frac{2a}{1+b} - 1}\right]^2$
26.4.32. Нормальная	$\chi_p'^2 \approx a\left[x_p\sqrt{\frac{2}{9}\left(\frac{1+b}{a}\right)} + 1 - \frac{2}{9}\left(\frac{1+b}{a}\right)\right]^3$

Свойства распределений хи-квадрат, нецентрального хи-квадрат и связанных с ними величин

$$a = \nu + \lambda, \quad b = \frac{\lambda}{\nu + \lambda} \quad \psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z), \quad \psi^{s}(z) = \frac{d^s}{dz^s} \psi(z)$$

	Среднее	Дисперсия	Асимметрия γ_1	Эксцесс γ_2
26.4.33. χ^2	ν	2ν	$\frac{2^{3/2}}{\sqrt{\nu}}$	$12\nu^{-1}$
26.4.34. $\sqrt{2\chi^2}$	$(2\nu-1)^{1/2}[1+[16\nu(\nu-1)]^{-1}]+ O(\nu^{-7/2})$	$1-\frac{1}{4\nu}-\frac{1}{8\nu^2}+\frac{5}{64\nu^3}-O(\nu^{-4})$	$\frac{1}{\sqrt{2\nu}}\left[1+\frac{5}{8\nu}-\frac{1}{128\nu^2}\right]+ O(\nu^{-7/2})$	$\frac{3}{2^2}\frac{1}{\nu^2}\left[1+\frac{3}{2\nu}\right]+O(\nu^{-4})$
26.4.35. $(\chi^2 \mid \nu)^{1/3}$	$1-\frac{2}{3^2\nu}+\frac{80}{3^7\nu^3}+O(\nu^{-4})$	$\frac{2}{3^2\nu}-\frac{104}{3^7\nu^3}+O(\nu^{-4})$	$\frac{2^{7/2}}{3^3\nu^{3/2}}\left[1+\frac{8}{3^2\nu}\right]+O(\nu^{-7/2})$	$-\frac{4}{9\nu}\left[1+\frac{16}{9\nu}\right]+O(\nu^{-3})$
26.4.36. $\ln(\chi^2 \mid \nu)$	$\psi\left(\frac{\nu}{2}\right)-\ln\left(\frac{\nu}{2}\right)=-\frac{1}{\nu}-\frac{1}{3\nu^2}+O(\nu^{-4})$	$\psi'\left(\frac{\nu}{2}\right)=\frac{2}{\nu-1}\left[1-\frac{1}{3(\nu-1)^2}\right]+O((\nu-1)^{-5})$	$\frac{\psi''\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\psi'\left(\frac{\nu}{2}\right)^{3/2}}=-\sqrt{\frac{2}{\nu-1}}\left[1-\frac{1}{2(\nu-1)^2}\right]+O((\nu-1)^{-9/2})$	$\frac{\psi^{(3)}\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\psi'\left(\frac{\nu}{2}\right)^2}=\frac{4}{\nu-1}\left[1+\frac{4}{3(\nu-1)^2}\right]+O((\nu-1)^{-5})$
26.4.37. χ'^2	a	$2a(1+b)$	$\left(\frac{2}{1+b}\right)^{3/2}(1+2b)\,a^{-1/2}$	$\frac{12}{a}\frac{1+3b}{(1+b)^2}$
26.4.38. $\sqrt{2\chi'^2}$	$[2a-(1+b)]^{1/2}+O(a^{-3/2})$	$(1+b)-\frac{a^{-1}}{4}[8b+(1+b)(1-7b)]+O(a^{-2})$	$\frac{a^{-1/2}(1-b)(1+3b)}{2^{1/2}(1+b)^{3/2}}+O(a^{-1})$	$\frac{3b(b+2)}{(1+b)^2}+O(a^{-2})$
26.4.39. $(\chi'^2 \mid a)^{1/3}$	$1-\frac{2}{3^2}\frac{1+b}{a}-\frac{40}{3^4}\frac{b^2}{a^2}+O(a^{-3})$	$\frac{2}{9}a^{-1}(1+b)+\frac{16}{27}a^{-2}b^2+O(a^{-3})$	$\left(\frac{2}{1+b}\right)^{3/2}b^3a^{-1/2}+O(a^{-3/2})$	$-\frac{4}{3^2}\frac{(1+3b+12b^2-44b^3)}{a(1+b)^2}-O(a^{-2})$

26.5. НЕПОЛНАЯ БЕТА-ФУНКЦИЯ

26.5.1. $I_x(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$

26.5.2. $I_x(a, b) = 1 - I_{1-x}(b, a).$

Связь с распределением хи-квадрат

Если X_1^2 и X_2^2 являются независимыми случайными величинами, каждая из которых имеет распределение хи-квадрат с ν_1 и ν_2 степенями свободы соответственно, то величина $X_1^2/(X_1^2+X_2^2)$ имеет бета-распределение с ν_1 и ν_2 степенями свободы. Ее функция распределения имеет вид

26.5.3. $$P\left\{\frac{X_1^2}{X_1^2+X_2^2} \leqslant x\right\} = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = I_x(a, b),\ a = \nu_1/2,\ b = \nu_2/2.$$

Разложения в ряд
$(0 < x < 1)$

26.5.4. $$I_x(a, b) = \frac{x^a(1-x)^b}{aB(a,b)}\left\{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(a+1, n+1)}{B(a+b, n+1)} x^{n+1}\right\}$$

26.5.5. $$I_x(a, b) = \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{aB(a, b)} \times \left\{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(a+1, n+1)}{B(b-n-1, n+1)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{n+1}\right\},$$

$$I_x(a, b) = \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{aB(a, b)} \times \left\{1 + \sum_{n=0}^{s-2} \frac{B(a+1, n+1)}{B(b-n-1, n+1)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{n+1}\right\} + I_x(a+s, b-s).$$

26.5.6. $$1 - I_x(a, b) = I_{1-x}(b, a) = \frac{(1-x)^b}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{a-1} (-1)^i \binom{a-1}{i} \frac{(1-x)^i}{b+i} \quad (a \text{ — целое}).$$

26.5.7. $$1 - I_x(a, b) = I_{1-x}(b, a) = (1-x)^{a+b-1} \sum_{i=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{i}\left(\frac{x}{1-x}\right)^i \quad (a \text{ — целое}).$$

Разложения в непрерывную дробь

26.5.8. $$I_x(a, b) = \frac{x^a(1-x)^b}{aB(a, b)}\left\{\frac{1}{1+}\,\frac{d_1}{1+}\,\frac{d_2}{1+}\,\dots\right\},$$

$$d_{2m+1} = -\frac{(a+m)(a+b+m)}{(a+2m)(a+2m+1)}\,x,$$

$$d_{2m} = \frac{m(b-m)}{(a+2m-1)(a+2m)}\,x.$$

Наилучший результат можно получить, когда $x < \frac{a-1}{a+b-2}$. Подходящие дроби, оканчивающиеся членами d_{4m} и d_{4m+1}, всегда меньше $I_x(a, b)$, в то время как подходящие дроби, оканчивающиеся членами d_{4m+2} и d_{4m+3}, всегда больше $I_x(a, b)$.

26.5.9. $$I_x(a, b) = \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{aB(a, b)}\left[\frac{e_1}{1+}\,\frac{e_2}{1+}\,\frac{e_3}{1+}\,\dots\right],$$

$$x < 1,\ e_1 = 1,$$

$$e_{2m} = -\frac{(a+m-1)(b-m)}{(a+2m-2)(a+2m-1)}\,\frac{x}{1-x},$$

$$e_{2m+1} = \frac{m(a+b-1+m)}{(a+2m-1)(a+2m)}\,\frac{x}{1-x}.$$

Рекуррентные соотношения

26.5.10. $I_x(a, b) = xI_x(a-1, b) + (1-x)\,I_x(a, b-1).$

26.5.11. $$I_x(a, b) = \frac{1}{x}\{I_x(a+1, b) - (1-x)\,I_x(a+1), b-1)\}.$$

26.5.12. $$I_x(a, b) = \frac{1}{a(1-x)+b}\{bI_x(a, b+1) + a(1-x)\,I_x(a+1, b-1)\}.$$

26.5.13. $$I_x(a, b) = \frac{1}{a+b}\{aI_x(a+1, b) + bI_x(a, b+1)\}.$$

26.5.14. $$I_x(a, a) = \frac{1}{2}\,I_{1-x'}\left(a, \frac{1}{2}\right), \quad x' = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2,\ x \leqslant \frac{1}{2}.$$

26.5.15. $$I_x(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b)}\,x^a(1-x)^{b-1} + I_x(a+1, b-1).$$

26.5.16. $$I_x(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b)}\,x^a(1-x)^b + I_x(a+1, b).$$

Асимптотические разложения

26.5.17. $$1 - I_x(a, b) \sim \frac{\Gamma(b, y)}{\Gamma(b)} - \frac{1}{24N^2}\left\{\frac{y^b e^{-y}}{(b-2)!}(b+1+y)\right\} + \frac{1}{5760N^4}\left\{\frac{y^b e^{-y}}{(b-2)!}[(b-3)(b-2) \times (5b+7)(b+1+y) - (5b-7)(b+3+y)y^2]\right\},$$

$$y = -N \ln x,\ N = a + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}.$$

26.5.18. $$1 - I_x(a,b) \sim \frac{\Gamma(a,w)}{\Gamma(a)} + \frac{e^{-w}w^a}{\Gamma(a)}\left\{\frac{(a-1-w)}{2b} + \frac{1}{(2b)^2}\left\{\frac{a^3}{2} - \frac{5}{3}a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{1}{3} - w\left[\frac{3}{2}a^2 - \frac{11}{6}a + \frac{1}{3}\right] + w^2\left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2}w^3\right\}\right\},$$

$$w = b\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

26.5.19. $$I_x(a,b) \sim P(y) - Z(y)\left[a_1 + \frac{a_2(y-a_1)}{1+a_2} + \frac{a_3(1+y^2/2)}{1+a_2} + \ldots\right],$$

$$a_1 = \frac{2}{3}(b-a)[(a+b-2)(a-1)(b-1)]^{-1/2},$$

$$a_2 = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} - \frac{13}{a+b-1}\right],$$

$$a_3 = -\frac{8}{15}\left[a_1\left(a_2 + \frac{3}{a+b-2}\right)\right],$$

$$y^2 = 2\left[(a+b-1)\ln\frac{a+b-1}{a+b-2} + (a-1)\ln\frac{a-1}{(a+b-1)x} + (b-1)\ln\frac{b-1}{(a+b-1)(1-x)}\right]$$

и y берется отрицательным, когда $x < \dfrac{a-1}{a+b-2}$.

Аппроксимация

26.5.20. Если $(a+b-1)(1-x) \leqslant 0.8$, то

$$I_x(a,b) = Q(\chi^2 \mid \nu) + \varepsilon,$$

$$|\varepsilon| < 5\cdot 10^{-3}, \text{ если } a+b > 6,$$

$$\chi^2 = (a+b-1)(1-x)(3-x) - (1-x)(b-1),$$

$$\nu = 2b.$$

26.5.21. Если $(a+b-1)(1-x) \geqslant 0.8$, то

$$I_x(a,b) = P(y) + \varepsilon,$$

$$|\varepsilon| < 5\cdot 10^{-3}, \text{ если } a+b > 6,$$

$$y = \frac{3\left[w_1\left(1-\frac{1}{9b}\right) - w_2\left(1-\frac{1}{9a}\right)\right]}{\left[\frac{w_1^2}{b} + \frac{w_2^2}{a}\right]^{1/2}},$$

$$w_1 = (bx)^{1/3},\quad w_2 = [a(1-x)]^{1/3}.$$

Аппроксимация обратной функции

26.5.22. Если $Ix_p(a,b) = p$ и $Q(y_p) = p$, то

$$x_p \approx \frac{a}{a+be^{2w}},$$

$$w = \frac{y_p(h+\lambda)^{1/2}}{h} - \left(\frac{1}{2b-1} - \frac{1}{2a-1}\right)\left(\lambda + \frac{5}{6} - \frac{2}{3h}\right),$$

$$h = 2\left(\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1}\right)^{-1},\quad \lambda = \frac{y_p^2 - 3}{6}.$$

Связь с другими функциями и распределениями

Функция	*Соотношение*
26.5.23. Гипергеометрическая функция	$\frac{1}{B(a,b)}\frac{x^a}{a}F(a, 1-b; a+1; x) = I_x(a,b)$
26.5.24. Биномиальное распределение	$\sum_{s=a}^{n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s} = I_p(a, n-a+1)$
26.5.25. Биномиальное распределение	$\binom{n}{a}p^a(1-p)^{n-a} = I_p(a, n-a+1) - I_p(a+1, n-a)$
26.5.26. Отрицательное биномиальное распределение	$\sum_{s=a}^{n}\binom{n+s-1}{s}p^n q^s = I_q(a,n)$
26.5.27. Распределение Стьюдента	$1 - A(t\mid\nu) = I_x\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right),\ x = \frac{\nu}{\nu+t^2}$
26.5.28. F-распределение	$Q(F\mid\nu_1,\nu_2) = I_x\left(\frac{\nu_2}{2}, \frac{\nu_1}{2}\right),\ x = \frac{\nu_2}{\nu_2+\nu_1 F}$

26.6. F-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

26.6.1. $P(F|\nu_1, \nu_2) =$

$$= \frac{\nu_1^{\nu_1/2}\,\nu_2^{\nu_2/2}}{B\left(\frac{1}{2}\nu_1, \frac{1}{2}\nu_2\right)} \int\limits_0^F t^{(\nu_1-2)/2}(\nu_2+\nu_1 t)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}\,dt \qquad (F \geqslant 0).$$

26.6.2. $Q(F|\nu_1, \nu_2) = 1 - P(F|\nu_1, \nu_2) = I_x(\nu_2/2, \nu_1/2)$,

где $x = \dfrac{\nu_2}{\nu_2+\nu_1 F}$.

Связь с распределением хи-квадрат

Если X_1^2 и X_2^2 являются независимыми случайными величинами, каждая из которых имеет распределение хи-квадрат с ν_1 и ν_2 степенями свободы соответственно, то распределение отношения $F = (X_1^2/\nu_1)/(X_2^2/\nu_2)$ называется *F-распределением с ν_1 и ν_2 степенями свободы*. Соответствующая функция распределения определяется выражением $P(F|\nu_1, \nu_2)$.

Статистические свойства

26.6.3. Среднее:

$$m = \frac{\nu_2}{\nu_2-2} \qquad (\nu_2 > 2),$$

дисперсия:

$$\sigma^2 = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} \qquad (\nu_2 > 4),$$

третий центральный момент:

$$\mu_3 = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^3 \frac{8\nu_1(\nu_1+\nu_2-2)(2\nu_1+\nu_2-2)}{(\nu_2-2)^3(\nu_2-4)(\nu_2-6)} \qquad (\nu_2 > 6),$$

моменты относительно начала координат:

$$\mu_n' = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+2n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_2-2n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \qquad (\nu_2 > 2n),$$

характеристическая функция:

$$\Phi(t) = E(e^{iFt}) = M\left(\frac{\nu_1}{2}, -\frac{\nu_2}{2}, -\frac{\nu_2}{\nu_1}it\right).$$

Разложения в ряд

$(x = \nu_2/(\nu_2+\nu_1 F))$

26.6.4. $Q(F|\nu_1, \nu_2) =$

$$= x^{\nu_2/2}\left[1 + \frac{\nu_2}{2}(1-x) + \frac{\nu_2(\nu_2+2)}{2\cdot 4}(1-x)^2 + \ldots + \frac{\nu_2(\nu_2+2)\ldots(\nu_2+\nu_1-4)}{2\cdot 4\ldots(\nu_1-2)}(1-x)^{(\nu_1-2)/2}\right] \quad (\nu_1 \text{ — четное}).$$

26.6.5. $Q(F|\nu_1, \nu_2) =$

$$= 1 - (1-x)^{\nu_1/2}\left[1 + \frac{\nu_1}{2}x + \frac{\nu_1(\nu_1+2)}{2\cdot 4}x^2 + \ldots + \frac{\nu_1(\nu_1+2)\ldots(\nu_2+\nu_1-4)}{2\cdot 4\ldots(\nu_2-2)}x^{(\nu_2-2)/2}\right] \quad (\nu_2 \text{ — четное}).$$

26.6.6. $Q(F|\nu_1, \nu_2) =$

$$= x^{(\nu_1+\nu_2-2)/2}\left[1 + \frac{\nu_1+\nu_2-2}{2}\left(\frac{1-x}{x}\right) + \frac{(\nu_1+\nu_2-2)(\nu_1+\nu_2-4)}{2\cdot 4}\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(\nu_1+\nu_2-2)\ldots(\nu_2+2)}{2\cdot 4\ldots(\nu_1-2)}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{(\nu_1-2)/2}\right] (\nu_1 \text{ — четное}).$$

26.6.7. $Q(F|\nu_1, \nu_2) =$

$$= 1 - (1-x)^{(\nu_1+\nu_2-2)/2}\left[1 + \frac{\nu_1+\nu_2-2}{2}\left(\frac{x}{1-x}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(\nu_1+\nu_2-2)\ldots(\nu_1+2)}{2\cdot 4\ldots(\nu_2-2)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{(\nu_2-2)/2}\right] (\nu_2 \text{ — четное}).$$

26.6.8. $Q(F|\nu_1\ \nu_2) = 1 - A(t|\nu_2) + \beta(\nu_1, \nu_2)$

$(\nu_1, \nu_2 \text{ — нечетные})$

$$A(t|\nu_2) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left\{\theta + \sin\theta\left[\cos\theta + \dfrac{2}{3}\cos^3\theta + \ldots + \dfrac{2\cdot 4\ldots(\nu_2-3)}{3\cdot 5\ldots(\nu_2-2)}\cos^{\nu_2-2}\theta\right]\right\} & \text{для } \nu_2 > 1, \\ \dfrac{2\theta}{\pi} \quad \text{для } \nu_2 = 1; \end{cases}$$

$$\beta(\nu_1, \nu_2) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\left(\frac{\nu_2-1}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu_2-2}{2}\right)!} \sin\theta\cos^{\nu_2}\theta \times \\ \times\left\{1 + \dfrac{\nu_2+1}{3}\sin^2\theta + \ldots + \dfrac{(\nu_2+1)(\nu_2+3)\ldots(\nu_1+\nu_2-4)\sin^{\nu_1-3}\theta}{3\cdot 5\ldots(\nu_1-2)}\right\} & \text{для } \nu_1 > 1, \\ 0 \quad \text{для } \nu_1 = 1, \end{cases}$$

где $\theta = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{\nu_1}{\nu_2}F}$.

Рефлексивное соотношение

Пусть $F_p(\nu_1, \nu_2)$ и $F_{1-p}(\nu_2, \nu_1)$ удовлетворяют соотношениям

$$Q(F_p(\nu_1, \nu_2) \mid \nu_1, \nu_2) = p,$$

$$Q(F_{1-p}(\nu_2, \nu_1) \mid \nu_2, \nu_1) = 1 - p;$$

тогда

26.6.9. $$F_p(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_{1-p}(\nu_2, \nu_1)}.$$

Связь с t-распределением Стьюдента (см. 26.7)

26.6.10. $Q(F \mid \nu_1 = 1, \nu_2) = 1 - A(t \mid \nu_2), \quad t = \sqrt{F}.$

Пределы

26.6.11. $$\lim_{\nu_2 \to \infty} Q(F \mid \nu_1, \nu_2) = Q(\chi^2 \mid \nu_1), \qquad \chi^2 = \nu_1 F$$

26.6.12. $$\lim_{\nu_1 \to \infty} Q(F \mid \nu_1, \nu_2) = P(\chi^2 \mid \nu_2), \qquad \chi^2 = \nu_2 / F$$

Аппроксимация

26.6.13. $Q(F \mid \nu_1, \nu_2) \approx Q(x)$,

$$x = \frac{F - \dfrac{\nu_2}{\nu_2 - 2}}{\dfrac{\nu_2}{\nu_2 - 2}\sqrt{\dfrac{2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 4)}}}$$

(ν_1 и ν_2 — большие).

26.6.14. $Q(F \mid \nu_1, \nu_2) \approx Q(x)$,

$$x = \frac{\sqrt{(2\nu_2 - 1)\dfrac{\nu_1}{\nu_2} F} - \sqrt{2\nu_1 - 1}}{\sqrt{1 + \dfrac{\nu_1}{\nu_2} F}}.$$

26.6.15. $Q(F \mid \nu_1, \nu_2) \approx Q(x)$,

$$x = \frac{F^{1/3}\left(1 - \dfrac{2}{9\nu_2}\right) - \left(1 - \dfrac{2}{9\nu_1}\right)}{\sqrt{\dfrac{2}{9\nu_1} + F^{2/3}\dfrac{2}{9\nu_2}}}.$$

Аппроксимация обратной функции

26.6.16. Если $Q(F_p \mid \nu_1, \nu_2) = p$, то $F_p \approx e^{2w}$, где w дается соотношением 26.5.22 и $\nu_1 = 2b$, $\nu_2 = 2a$.

Функция нецентрального F-распределения

26.6.17. $P(F' \mid \nu_1, \nu_2, \lambda) =$

$$= \int_0^{F'} p(t \mid \nu_1, \nu_2, \lambda)\, dt = 1 - Q(F' \mid \nu_1, \nu_2, \lambda),$$

где $p(t \mid \nu_1, \nu_2, \lambda) =$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} \frac{(\nu_1 + 2j)^{(\nu_1+2j)/2} \nu_2^{\nu_2/2}}{B\left(\dfrac{\nu_1 + 2j}{2}, \dfrac{\nu_2}{2}\right)} \times$$

$$\times\, t^{(\nu_1+2j-2)/2} [\nu_2 + (\nu_1 + 2j) t]^{-(\nu_1+2j+\nu_2)/2}$$

и $\lambda \geqslant 0$ означает параметр нецентральности.

Соотношения между функцией нецентрального F-распределения и другими функциями

Функция	*Соотношение*
26.6.18. F-распределение	$P(F' \mid \nu_1, \nu_2, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} P(F' \mid \nu_1 + 2j, \nu_2)$
	$P(F' \mid \nu_1, \nu_2, \lambda = 0) = P(F' \mid \nu_1, \nu_2)$
26.6.19. Нецентральное t-распределение	$P(F' \mid \nu_1 = 1, \nu_2, \lambda) = P(t' \mid \nu, \delta), \quad t' = \sqrt{F'}, \ \nu = \nu_2, \ \delta = \sqrt{\lambda}$
26.6.20. Неполная бета-функция	$P(F' \mid \nu_1, \nu_2) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} I_x\left(\frac{\nu_1}{2} + j, \frac{\nu_2}{2}\right)$ $\left(x = \frac{\nu_1 F'}{\nu_1 F' + \nu_2}\right)$
26.6.21. Вырожденная гипергеометрическая функция	$P(F' \mid \nu_1, \nu_2, \lambda) = \sum_{i=0}^{\nu_2/2-1} \frac{2e^{-\lambda/2}}{(\nu_1 + \nu_2) B(\nu_1/2 + i + 1, \nu_2/2 - i)} \times x^{\nu_1/2-1}(1-x)^{\nu_2/2-i-1} M\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \frac{\nu_1}{2} + i + 1, \frac{\lambda x}{2}\right)$ $\left(\nu_2 \text{ — четное и } x = \frac{\nu_2}{\nu_1 F' + \nu_2}\right)$

Разложение в ряд

26.6.22. $P(F'\mid \nu_1, \nu_2, \lambda) = e^{-\lambda(1-x)/2} x^{(\nu_1+\nu_2-2)/2} \sum_{i=0}^{\nu_2/2-1} T_i$ (ν_2 — четное),

где

$$T_0 = 1,$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2 - 2 + \lambda\nu)\frac{1-x}{x},$$

$$T_i = \frac{1-x}{2i}[(\nu_1 + \nu_2 - 2i + \lambda x)T_{i-1} + \lambda(1-x)T_{i-2}],$$

$$x = \frac{\nu_2}{\nu_1 F' + \nu_2}.$$

Пределы

26.6.23. $\lim_{\nu_2\to\infty} P(F'\mid \nu_1, \nu_2, \lambda) = P(\chi'^2 \mid \nu, \lambda)$,

$$\chi'^2 = \nu_1 F', \quad \nu = \nu_1.$$

26.6.24. $\lim_{\nu_1\to\infty} P(F'\mid \nu_1, \nu_2, \lambda) = Q(\chi^2\mid\nu), \chi^2 = \dfrac{\nu_2(1+c^2)}{F'}$,

где $\lambda/\nu_1 \to c^2$ при $\nu_1 \to \infty$.

Аппроксимация нецентрального F-распределения

26.6.25. $P(F'\mid \nu_1, \nu_2, \lambda) \approx P(x_1)$ (ν_1 и ν_2 — большие),

где

$$x_1 = \frac{F' - \dfrac{\nu_2(\nu_1+\lambda)}{\nu_1(\nu_2-2)}}{\dfrac{\nu_2}{\nu_1}\left[\dfrac{2}{(\nu_2-2)(\nu_2-4)}\left\{\dfrac{(\nu_1+\lambda)^2}{\nu_2-2} + \nu_1 + 2\lambda\right\}\right]^{1/2}},$$

26.6.26. $P(F'\mid \nu_1, \nu_2, \lambda) \approx P(F\mid \nu_1^*, \nu_2)$,

$$F = \frac{\nu_1}{\nu_1+\lambda}F', \quad \nu_1^* = \frac{(\nu_1+\lambda)^2}{\nu_1+2\lambda}.$$

26.6.27. $P(F'\mid \nu_1, \nu_2, \lambda) \approx P(x_2)$,

$$x_2 = \frac{\left[\dfrac{\nu_1 F'}{(\nu_1+\lambda)}\right]^{1/3}\left[1 - \dfrac{2}{9\nu_2}\right] - \left[1 - \dfrac{2(\nu_1+2\lambda)}{9(\nu_1+\lambda)^2}\right]}{\left[\dfrac{2}{9}\dfrac{\nu_1+2\lambda}{(\nu_1+\lambda)^2} + \dfrac{2}{9\nu_2}\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_1+\lambda}F'\right)^{2/3}\right]^{1/2}}.$$

26.7. t-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Если X является случайной величиной, подчиняющейся нормальному распределению с нулевым средним и единичной дисперсией, а χ^2 является случайной величиной с распределением хи-квадрат с ν степенями свободы, и если X и χ^2 независимы, то распределение отношения $X/\sqrt{\chi^2/\nu}$ называется t-распределением Стьюдента с ν степенями свободы. Вероятность события $\{|X/\sqrt{\chi^2/\nu}\mid \leqslant t\}$ дается соотношением

26.7.1. $A(t\mid\nu) = P\left\{\left|\dfrac{X}{\sqrt{\chi^2/\nu}}\right| \leqslant t\right\} =$

$$= \left[\sqrt{\nu}B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{-1}^{1}\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}dx =$$

$$= 1 - I_x\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (0 \leqslant t < \infty),$$

где $x = \dfrac{\nu}{\nu + t^2}$.

Статистические свойства

26.7.2. Среднее: $m = 0$,

дисперсия: $\sigma^2 = \dfrac{\nu}{\nu-2}$ $(\nu > 2)$,

асимметрия: $\gamma_1 = 0$,

эксцесс: $\gamma_2 = \dfrac{6}{\nu-4}$ $(\nu > 4)$,

моменты: $\mu_{2n} = \dfrac{1\cdot 3\ldots(2n-1)\nu^n}{(\nu-2)(\nu-4)\ldots(\nu-2n)}$ $(\nu > 2n)$,

$\mu_{2n+1} = 0$,

характеристическая функция:

$$\Phi(t) = E\left[\exp\left(it\frac{X}{\sqrt{\chi^2/\nu}}\right)\right] = \frac{\left(\dfrac{|t|}{2\sqrt{\nu}}\right)^{\nu/2}}{\pi\Gamma(\nu/2)} Y_{\nu/2}\left(\frac{|t|}{\sqrt{\nu}}\right).$$

Разложения в ряд

$$\left(\theta = \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\nu}}\right)$$

26.7.3.
$$A(t\mid\nu) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left\{\theta + \sin\theta\left[\cos\theta + \dfrac{2}{3}\cos^3\theta + \ldots\right.\right. \\ \left.\left.\quad\cdots + \dfrac{2\cdot 4\ldots(\nu-3)}{1\cdot 3\ldots(\nu-2)}\cos^{\nu-2}\theta\right]\right\} \\ \qquad\qquad (\nu > 1 \text{ и нечетное}), \\ \dfrac{2}{\pi}\theta \quad (\nu = 1). \end{cases}$$

26.7.4. $A(t\mid\nu) = \sin\theta\left\{1 + \dfrac{1}{2}\cos^2\theta + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos^4\theta + \ldots\right.$

$$\left.\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(\nu-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(\nu-2)}\cos^{\nu-2}\theta\right\} \quad (\nu \text{ — четное}).$$

Асимптотическое разложение для обратной функции

Если $A(t_p\mid\nu) = 1 - 2p$ и $Q(x_p) = p$, то

26.7.5. $t_p \sim x_p + \dfrac{g_1(x_p)}{\nu} + \dfrac{g_2(x_p)}{\nu^2} + \dfrac{g_3(x_p)}{\nu^3} + \ldots,$

$$g_1(x) = \frac{1}{4}(x^3 + x),$$

$$g_2(x) = \frac{1}{96}(5x^5 + 16x^3 + 3x),$$

$$g_3(x) = \frac{1}{384}(3x^7 + 19x^5 + 17x^3 - 15x),$$

$$g_4(x) = \frac{1}{92160}(79x^9 + 776x^7 + 1482x^5 - 1920x^3 - 945x).$$

Предельное распределение

26.7.6. $\lim\limits_{\nu\to\infty} A(t\mid\nu) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-t}^{t} e^{-x^2/2}\,dx = A(t).$

Аппроксимация для больших значений t и $\nu \leqslant 5$

26.7.7. $A(t\mid\nu) \approx 1 - 2\left\{\dfrac{a_\nu}{t^\nu} + \dfrac{b_\nu}{t^{\nu+1}}\right\}.$

ν	1	2	3	4	5
a_ν	0.3183	0.4991	1.1094	3.0941	9.948
b_ν	0	0.0518	−0.0460	−2.756	−14.05

Аппроксимация для больших ν

26.7.8. $A(t\mid\nu) \approx 2P(x) - 1,\quad x = \dfrac{t\left(1 - \dfrac{1}{4\nu}\right)}{\sqrt{1 + \dfrac{t^2}{2\nu}}}.$

Нецентральное t-распределение

26.7.9. $P(t'\mid\nu,\ \delta) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\nu}\,B\left(\frac{1}{2},\ \frac{\nu}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{t'}\left(\frac{\nu}{\nu + x^2}\right)^{(\nu+1)/2} e^{-\nu\delta^2/[2(\nu+x^2)]}\times$$

$$\times Hh_\nu\left(-\frac{\delta x}{\sqrt{\nu + x^2}}\right)dx = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\delta^2/2}\,\frac{(\delta^2/2)^j}{2j!}\times$$

$$\times I_x\left(\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2} + j\right),\quad x = \frac{\nu}{\nu + t'^2},$$

где δ означает параметр нецентральности.

Аппроксимация нецентрального t-распределения

26.7.10. $P(t'\mid\nu,\ \delta) \approx P(x),$ где $x = \dfrac{t'\left(1 - \dfrac{1}{4\nu}\right) - \delta}{\left(1 + \left(\dfrac{t'^2}{2\nu}\right)\right)^{1/2}}.$

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

26.8. МЕТОДЫ ОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Случайными цифрами называются цифры, полученные в результате повторного независимого выбора из совокупности 0, 1, 2, ..., 9 с вероятностью выбора любой цифры, равной одной десятой. Это эквивалентно помещению десяти шаров, занумерованных цифрами от 0 до 9, в урну и извлечению из нее каждый раз одного из шаров с последующим возвращением его в урну после каждого извлечения. Полученное множество чисел образует группу случайных цифр. Всякая группа n последовательных случайных цифр называется случайным числом. Табл. 26.11 содержит случайные цифры, полученные указанным способом и сгруппированные по пяти цифрам.

Имеется несколько таблиц случайных цифр (см. ссылки). Однако использование случайных чисел в электронных вычислительных машинах потребовало образования случайных чисел детерминированным путем. Числа, образованные таким образом, называются псевдослучайными числами. Качество псевдослучайных чисел определяется проверкой их с помощью нескольких статистических критериев (см. [26.55], [26.56]). Целью проверки является обнаружение свойств псевдослучайных чисел, отличных от свойств случайных чисел.

Практика показала, что для образования псевдослучайных чисел в электронной машине наиболее удобен конгруэнтный метод.

Пусть $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, ...,$ — последовательность псевдослучайных чисел. Конгруэнтный метод образования псевдослучайных чисел определяется соотношением

$$X_{n+1} = aX_n + b \pmod{T},$$

где b и T — взаимно простые числа. Выбор T определяется возможностями машины и принятой системой счисления; a и b выбираются с учетом следующих условий: 1) полученная последовательность $\{X_n\}$ должна обладать желаемыми статистическими свойствами случайных чисел, 2) период последовательности должен быть возможно более длинным, 3) скорость образования должна быть большой. Величины a и b нужно выбирать таким образом, чтобы корреляция между числами была близка к нулю. Корреляция между числами X_n и X_{n+s} в последовательности $X_{n+s} = a_sX_n + b_s \pmod{T}$ выражается следующим образом:

$$\rho_s = \frac{1 - 6\dfrac{b_s}{T}\left(1 - \dfrac{b_s}{T}\right)}{a_s} + \varepsilon,$$

где

$$a_s = a^s \pmod{T},$$
$$b_s = (1 + a + a^2 + \ldots + a^{s-1})\,b \pmod{T},$$
$$|\varepsilon| < a_s/T.$$

Когда $a \approx \sqrt{T}$, корреляция $\rho_1 \approx 1/\sqrt{T}$.

Последовательность, образованная мультипликативным конгруэнтным методом, будет иметь полный период T чисел, если

1) b и T взаимно просты;

2) $a = 1 \pmod{p}$, если p является простым множителем T;

3) $a = 1 \pmod{4}$, если 4 является множителем T.

Следовательно, если $T = 2^q$, то b должно быть нечетным и $a = 1 \pmod{4}$. Когда $T = 10^q$, то b не должно делиться ни на 2, ни на 5 и $a = 1 \pmod{20}$. Наиболее удобно выбрать $a = 2^s + 1$ (для машин с двоичной системой счисления) и $a = 10^s + 1$ (для машин с десятичной системой счисления). С точки зрения скорости образования случайных чисел эта схема требует лишь операции сдвига и две операции сложения. Для образования последовательности случайных чисел в качестве начальной точки можно взять любое число. Хороший обзор образования последовательности случайных чисел можно найти в [26.51].

Ниже помещены различные конгруэнтные схемы и перечислены их свойства.

Конгруэнтные методы образования случайных чисел
($X_{n+1} = aX_n + b \pmod T$), T и b взаимно просты)

	a	b	T	Период	X_0	Случаи, в которых полученные числа были проверены с помощью статистических критериев
26.8.1.	$1 + t^q$	нечетное	$T = t^q$	t^q	$0 \leqslant X_0 < T$	$T = 2^{35}$, X_0 неизвестно, $a = 2^7 + 1$, $b = 1$; $T = 2^{47}$, $a = 2^9 + 1$, $b = 29741\ 09625\ 8473$, $X_0 = 76293\ 94531\ 25$
26.8.2.	$r2^s \pm 1$ (r — нечетное, $s \geqslant 2$)	0	$T = t^q$	t^{q-s}	взаимно простое с T	$T = 2^{40}, 2^{43}$, $X_0 = 1$, $a = 5^{17}$ ($s = 2$); $T = 2^{35}$, $X_0 = 1$; $T = 2^{39}$, $X_0 = 1 - 2^{-39}$, 0.5478126193, $a = 5^{13}$ ($s = 2$); $T = 2^{35}$, $X_0 = 1$, $a = 5^{15}$ ($s = 2$)
26.8.3.	$r2^s \pm$ (r— нечетное, $s \geqslant 2$)	0	$T = t^q \pm 1$	различные	$\leqslant$	$T = 2^{35} + 1$, $X_0 = 10{,}987{,}654{,}321$, $a = 23$, период $\approx 10^8$; $T = 10^8 + 1$, $X_0 = 47{,}594{,}118$, $a = 23$, период $\approx 5.8 \cdot 10^6$
26.8.4.	7^{4s+1}	0	$T = 10^q$	$5 \cdot 10^{q-s}$	$\leqslant$	$T = 10^{10}$, $X_0 = 1$, $a = 7$; $T = 10^{11}$, $X_0 = 1$, $a = 7^{13}$
26.8.5.	3^{4s+1} ($s = 0, 2, 3, 4$)	0	$T = 10^q$	$5 \cdot 10^{q-s}$	$\leqslant$	

X_0 были взяты в качестве начальных точек последовательности при проверке с помощью статистических критериев.

В числах, полученных с помощью конгруэнтной схемы, последняя значащая цифра имеет короткий период, поэтому всю длину машинного слова использовать нельзя. Если необходимо использовать случайные числа с возможно бо́льшим числом цифр, конгруэнтную схему следует модифицировать. Одним из таких способов модификации является образование чисел mod $T \pm 1$. К сожалению, этот способ уменьшает период.

Образование случайных чисел с заданным законом распределения

Пусть $\{X\}$ означает последовательность независимых равномерно распределенных случайных чисел на интервале $(0, T)$. В качестве такой последовательности можно взять любую последовательность псевдослучайных чисел, образованную одним из вышеперечисленных способов. Тогда $\{U\} = \{T^{-1}X\}$ образует последовательность равномерно распределенных случайных чисел на интервале (0, 1). Образование такой последовательности обычно является предварительным шагом при получении последовательности случайных чисел с заранее заданной функцией распределения $F(y)$ или плотностью вероятности $f(y)$. Ниже перечислены некоторые общие схемы образования таких случайных чисел (далее всюду $\{U\}$ означает последовательность равномерно распределенных случайных чисел на интервале **(0, 1)**.

1. Метод инверсии.

Решения $\{Y\}$ уравнений $\{u = F(y)\}$ образуют последовательность независимых случайных чисел с функцией распределения $F(y)$. (Если $F(y)$ имеет разрыв в точке $y = y_0$, т.е. если u таково, что $F(y_0 - 0) < u < F(y_0)$, то в качестве соответствующего числа выбираем y_0.) Обычно метод инверсии мало используется на практике, за исключением тех случаев, когда обратная функция $y = F^{-1}(u)$ известна или имеется ее простое приближение.

2. Образование случайных чисел с дискретным законом распределения.

Пусть Y означает дискретную случайную величину с вероятностями $p_i = \Pr\{Y = y_i\}$ для $i = 1, 2, \ldots$ Прямой способ образования последовательности $\{Y\}$ из $\{U\}$ заключается в том, что полагают $Y = y_i$, если $p_1 + p_2 + \ldots + p_{i-1} < U < p_1 + p_2 + \ldots + p_i$. Однако этот метод требует усложненных машинных программ, что делает его достаточно медленным.

Другой способ, предложенный Марсалья [26.53], прост, быстр и хорошо использует возможности электронной машины. Пусть p_i для $i = 1, 2, \ldots, n$ выражается k десятичными цифрами, т. е. $p_i = 0.\delta_{1i}\,\delta_{2i}\ldots\delta_{ki}$, где каждое δ означает десятичную цифру. (Если область изменения случайной величины бесконечна, то следует обрезать распределение вероятностей на p_n.)

Обозначим

$$P_0 = 0, \quad P_r = 10^{-r}\sum_{i=1}^{n}\delta_{ri} \quad \text{для } r = 1, 2, \ldots, k,$$

$$\Pi_s = \sum_{r=0}^{s} 10^r P_r \qquad \text{для } s = 1, 2, \ldots, k.$$

Занумеруем группу ячеек запоминающего устройства электронной машины числами $0, 1, 2, \ldots, \Pi_k - 1$. Эту группу ячеек делим на k взаимно исключающих множеств таких, что s-е множество содержит ячейки с номерами $\Pi_{s-1}, \Pi_{s-1} + 1, \ldots, \Pi_s - 1$. Информация, которая хранится в ячейках s-го множества, состоит из y_1 в δ_{s1} ячейках, y_2 в δ_{s2} ячейках, ..., y_n в δ_{sn} ячейках.

Обозначим десятичное разложение значения равномерно распределенной случайной величины, образованной электронной машиной, $u = 0.\ d_1d_2d_3\ldots$, и пусть $\sigma\{m\}$ означает содержимое ячейки с номером m. Тогда, если

$$\sum_{i=0}^{s-1} P_i \leqslant U < \sum_{i=0}^{s} P_i,$$

то положим

$$y = \sigma\left\{d_1d_2\ldots,d_s + \Pi_{s-1} - 10^s\sum_{i=1}^{s-1}P_i\right\}.$$

Этот метод, возможно, является наилучшим всеобъемлющим методом для образования случайных чисел с дискретным распределением. Чтобы проиллюстрировать этот метод, рассмотрим задачу образования случайных чисел с биномиальным законом распределения с вероятностями

$$p_i = \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}$$

для $n = 5$ и $p = 0.2$.

Вероятности p_i с 4D даются в таблице:

Значения случайной величины	*Вероятности*
0	$p_0 = 0.3227$
1	$p_1 = 0.4096$
2	$p_2 = 0.2048$
3	$p_3 = 0.0512$
4	$p_4 = 0.0064$
5	$p_5 = 0.0003$

Таким образом, $P_0 = 0, P_1 = 0.9, P_2 = 0.07, P_3 = 0.027, P_4 = 0.0030$, $\Pi_0 = 0$, $\Pi_1 = 9$, $\Pi_2 = 16$, $\Pi_3 = 43$, $\Pi_4 = 73$.

73 ячейки запоминающего устройства разделяются на следующие четыре взаимно исключающих множества:

Множество	*Ячейки*
1	0, 1, ..., 8
2	9, 10, ..., 15
3	16, ..., 42
4	43, ..., 72

Среди девяти ячеек множества 1 нуль содержится $\delta_{10} = 3$ раза, 1 содержится $\delta_{11} = 4$ раза, 2 содержится $\delta_{12} = 2$ раза; семь ячеек множества 2 содержат нуль $\delta_{20} = 2$ раза и $3\delta_{23} = 5$ раз и т.д. Содержание ячеек запоминающего устройства дается ниже:

	Значение случайной величины					
	0	1	2	3	4	5
Частота (множество 1)	3	4	2	0	0	0
Частота (множество 2)	2	0	0	5	0	0
Частота (множество 3)	7	9	4	1	6	0
Частота (множество 4)	7	6	8	2	4	3

Затем образуем значения случайной величины по правилу:

если $0 \leqslant u < 0.9$, то $y = \sigma\{d_1\}$;

если $0.9 \leqslant u < 0.97$, то $y = \sigma\{d_1d_2 - 81\}$;

если $0.97 \leqslant u < 0.997$, то $y = \sigma\{d_1d_2d_3 - 954\}$;

если $0.997 \leqslant u < 1.000$, то $y = \sigma\{d_1d_2d_3d_4 - 9927\}$.

3. Образование случайных чисел с непрерывным законом распределения.

Метод образования случайных чисел с дискретным распределением можно использовать при получении случайных чисел с непрерывным распределением. Пусть $F(y)$ означает функцию распределения, изменяющуюся в конечном интервале (a, b) (если область изменения бесконечна, следует обрезать ее, например, в точках a и b). Разделим интервал (a, b) на n интервалов длины $\Delta(n\Delta = b - a)$ таким образом, чтобы y_{i-1} и y_i были границами i-го интервала, где $y_i = a + i\Delta$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Определим дискретное распределение, сосредоточенное в точках

$$\left\{z_i = \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\right\}$$

с вероятностями $p_i = F(y_i) - F(y_{i-1})$. Наконец, пусть W означает равномерно распределенную случайную величину на отрезке $(-\Delta/2, \Delta/2)$. Это можно сделать, положив $W = \Delta(U - 1/2)$. Тогда случайную величину с функцией распределения $F(y)$ можно (приближенно) получить, положив $y = z + w = z + \Delta(u - 1/2)$. Этот метод основан на приближенном разложении непрерывной случайной величины на сумму дискретной и непрерывной случайных величин. Дискретную величину можно быстро получить методом, описанным выше. Чем меньше величина Δ, тем ближе будет приближение. Каждое число можно получить, используя первые цифры величины U для образования дискретной случайной величины, а оставшиеся цифры — для образования равномерно распределенной на отрезке $(0, 1)$ случайной величины.

4. Метод приема-отклонения.

В дальнейшем предполагается, что случайная величина изменяется в конечной области (a, b). Если область бесконечна, то в вычислительных целях следует обрезать ее, например, в точках a и b. Тогда полученная случайная величина будет изменяться в этой конечной области.

а) Пусть f означает максимум $f(y)$. Тогда процедура образования случайных чисел состоит в следующем: 1) образуем пару (u_1, u_2) равномерно распределенных случайных чисел; 2) вычисляем точку $y = a + (b - a)u_2$ на интервале (a, b); 3) если $u_1 < f(y)/f$, то принимаем y в качестве новой случайной величины, в противном случае пару (u_1, u_2) отбрасываем и все начинаем сначала. Доля принятых величин равна $[(b-a)f]^{-1}$. Следовательно, отношение принятых величин к их общему числу уменьшается с увеличением области. Один из способов увеличения этого отношения состоит в разделении интервала (a, b) на взаимно исключающие интервалы. Для этой цели разделим интервал (a, b) на k интервалов таких, что j-й интервал имеет границы (ξ_{j-1}, ξ_j) с $\xi_0 = a$, $\xi_k = b$ и $\int\limits_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} f(y)\,dy = p_j$; далее, пусть f_j означает максимум $f(y)$ на j-м интервале. Для образования случайных чисел с плотностью вероятности $f(y)$ образуем n пар переменных (u_{1s}, u_{2s}), $s = 1, 2, \ldots, n$. Припишем $[np_j]$ таких пар к j-му интервалу и вычислим $y_j = \xi_{j-1} + (\xi_j - \xi_{j-1})u_{2s}$. Если $u_{1s} < f(y_j)/f_j$, то принимаем y_j в качестве новой случайной величины. Доля принятых величин в этом случае равна

$$\sum_{j=1}^{k} p_j[(\xi_j - \xi_{j-1})\,f_j]^{-1}.$$

b) Пусть $F(y)$ такова, что $f(y) = f_1(y)\,f_2(y)$, переменная Y изменяется в интервале (a, b). Пусть далее f_1 и f_2 означают максимумы $f_1(y)$ и $f_2(y)$ соответственно. Тогда метод образования случайных чисел с плотностью вероятности $f(y)$ состоит в следующем: 1) получаем U_1, U_2, U_3; 2) определяем $z = a + (b - a)\,u_3$; 3) если выполнимы оба неравенства $u_1 < f_1(z)/f_1$ и $u_2 < f_2(z)/f_2$, то берем z в качестве искомой случайной величины; в противном случае берем другую выборку u_1, u_2, u_3. Доля принятых величин равна $[(b - a)\,f_1\ f_2]^{-1}$; ее можно увеличить, разделяя интервал (a, b) на несколько частей, как в предыдущем случае.

c) Пусть плотность вероятности Y имеет вид

$$f(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(y, t)\,dt \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta, \ a \leqslant y \leqslant b).$$

Пусть, далее, g означает максимум $g(y, t)$. Тогда метод образования случайных чисел с плотностью вероятности $f(y)$ состоит в следующем: 1) получаем U_1, U_2, U_3; 2) определяем $s = \alpha + (\beta - \alpha)\,u_2$, $z = a + (b - a)\,u_3$; 3) если $u_1 < g(z, s)/g$, то берем z в качестве искомой случайной величины; в противном случае берем другую выборку. Доля принятых величин равна $[(b - a)\,g]^{-1}$; это отношение можно увеличить, разделяя интервалы (α, β) и (a, b) на несколько частей.

5. Составной метод.

Пусть $g_z(y)$ — плотность вероятности, зависящая от параметра z, $H(z)$ — функция распределения величины z. Чтобы получить значения случайной величины Y, имеющей плотность вероятности

$$f(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_z(y)\,dH(z),$$

сначала получаем значения случайной величины, имеющей функцию распределения $H(z)$; затем получаем вторую выборку с плотностью вероятности $g_z(y)$.

6. Образование случайных чисел, имеющих известные законы распределения.

A. *Нормальное распределение*

(1) Метод инверсии. Этот метод используется в том случае, когда имеется удобное приближение к обратной функции $x = P^{-1}(u)$, где

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Для этой цели можно использовать два пути: a) применение формулы 26.2.23 с $t = \left(\ln \dfrac{1}{u^2}\right)^{1/2}$ или b) приближение $x = P^{-1}(u)$ с помощью полиномов Чебышева (см. [26, 54]).

(2) Сумма равномерно распределенных случайных величин. Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — последовательность n независимых равномерно распределенных на интервале (0,1) случайных величин. Тогда

$$X_n = \left(\sum_{i=1}^{n} U_i - \frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{12}\right)^{-1/2}$$

имеет асимптотически нормальное распределение. Когда $n = 12$, максимальная ошибка в значении нормальной случайной величины равна $9 \cdot 10^{-3}$ для $|X| \leqslant 2$ и $9 \cdot 10^{-2}$ для $2 < |X| < 3$. Более точное приближение можно получить, если в качестве нормальной величины взять полином от X_n, например,

$$X_n^* = X_n \sum_{s=0}^{k} a_{2s} X_n^{2s},$$

где a_{2s} — соответствующим образом подобранные коэффициенты. Эти коэффициенты можно вычислить, используя, например, полиномы Чебышева или согласуя переменную X_n^* с нормальной переменной в некоторых определенных точках. Когда $n = 12$, максимальная ошибка в значении нормальной величины равна $8 \cdot 10^{-4}$, если коэффициентами выбраны следующие величины:

$$a_0 = 9.8746,$$
$$a_2 = (-3)3.9439,$$
$$a_4 = (-5)7.474,$$
$$a_6 = (-7)-5.102,$$
$$a_8 = (-7)1.141.$$

(3) Прямой метод. Образуем пару равномерно распределенных случайных величин (U_1, U_2). Тогда $X_1 = (-2\ln u_1)^{1/2}\cos 2\pi U_2$, $X_2 = (-2\ln U_1)^{1/2}\sin 2\pi U_2$ образуют пару независимых нормальных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Этот метод можно видоизменить, вычисляя $\cos 2\pi U$ и $\sin 2\pi U$ и применяя метод приема-отклонения; иными словами, вся процедура состоит в следующем: 1) образуем пару (U_1, U_2); 2) если $(2U_1-1)^2 + (2U_2 - 1)^2 \leqslant 1$, то берем третью равномерно распределенную случайную величину U_3, в противном случае отвергаем пару U_1, U_2 и начинаем все сначала; 3) вычисляем

$$y_1 = (-\ln u_3)^{1/2}\,\frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1^2 + u_2^2},$$

$$y_2 = \pm 2(-\ln u_3)^{1/2}\,\frac{u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2}$$

($\pm$ берется случайным образом). Оба значения y_1 и y_2 являются требуемыми случайными величинами.

(4) Метод приема-отклонения. 1) Образуем пару равномерно распределенных случайных величин (U_1, U_2); 2) вычисляем $x = -\ln u_1$; 3) если $e^{-(x-1)^2/2} \geqslant u_2$ (или, что эквивалентно, $(x-1)^2 \leqslant -2\ln u_2$), то x принимаем, в противном случае пара (U_1, U_2) отвергается и все начинаем сначала. Величина x имеет нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией.

B. Двумерное нормальное распределение.

Пусть $\{X_1, X_2\}$ — пара независимых нормальных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда $\{X_1, \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}X_2\}$ — пара случайных величин, имеющая двумерное нормальное распределение с нулевыми средними, единичными дисперсиями и коэффициентом корреляции ρ.

C. Показательное распределение.

(1) Метод инверсии. Поскольку $F(x) = 1 - e^{-x/\theta}$ то $X = -\theta \ln U$ имеет показательное распределение с параметром θ.

(2) **Метод приема-отклонения.** 1) Образуем пару (U_0, U_1); 2) если $U_1 < U_0$, то берем третью величину U_2; 3) если $U_1 + U_2 < U_0$, то берем четвертую величину U_3, и т.д.; 4) продолжаем получать равномерно распределенные случайные величины до n включительно такие, что $U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1} < U_0 < U_1 + U_2 + \ldots + U_n$; 5) если n четно, последовательность отвергается и начинаем новое испытание с новой величиной U_0; в противном случае при нечетном n берем $X = \theta U_0$ в качестве требуемой случайной величины. Случайная величина, полученная в результате такого процесса, имеет показательное распределение с параметром θ. Можно ожидать, что требуется около шести равномерно распределенных случайных величин для получения одной случайной величины с показательным законом распределения.

(3) **Метод, основанный на дискретном распределении.** Пусть Y и n — дискретные случайные величины с вероятностями

$$\Pr\{Y = r\} = (e-1)\,e^{-(r+1)}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\Pr\{n = s\} = [s!(e-1)]^{-1}, \quad s = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда $X = Y + \min(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ подчиняется показательному распределению. Так как среднее значение n равно 1,58, то в среднем необходимо 1,58 значений величины U, из которых затем выбирается минимум.

26.9. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ И РАСШИРЕНИЕ ТАБЛИЦ

Использование неравенств

Пример 1. Пусть X — случайная величина с конечным средним значением m и конечной дисперсией σ^2. Используя неравенства 26.1.37, 26.1.40, 26.1.41, вычислим нижнюю грань функции

$$A(t) = F(t) - F(-t) = P\left\{\frac{|X-m|}{\sigma} \leqslant t\right\}$$

для $t = 1(1)4$.

Нижняя грань функции $A(t) = F(t) - F(-t)$

$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	Замечания
0	0.7500	0.8889	0.9375	$F(x)$ — любая функция распределения; 26.1.37
0.5556	0.8889	0.9506	0.9722	$F(x)$ — унимодальная и непрерывная функция распределения; 26.1.40
0	0.8182	0.9697	0.9912	$F(x)$ такова, что $\mu_4 = 3$; 26.1.41

Следует заметить, что стандартное нормальное распределение унимодально, имеет нулевое среднее значение и единичную дисперсию, $\mu_4 = 3$, непрерывно и такое, что

$$A(t) = P(t) - P(-t) = 0.6827,\ 0.9545,\ 0.9973 \text{ и } 0.9999$$

для $t = 1, 2, 3$ и 4 соответственно.

Интерполяция функции $P(x)$ в табл. 26.1

Пример 2. Вычислить $P(x)$ в точке $x = 2.576$ с 15D, используя ряд Тейлора.

Обозначив $x = x_0 + \theta$, получим

$$P(x) = P(x_0) + Z(x_0)\,\theta + Z^{(1)}(x_0)\frac{\theta^2}{2!} + Z^{(2)}(x_0)\frac{\theta^3}{3!} + Z^{(4)}(x_0)\frac{\theta^4}{4!} + \ldots$$

Беря $x_0 = 2.58$ и $\theta = -4 \cdot 10^{-3}$, вычислим с 16D:

+	0.99505	99842	42230		
−	5	72204	35976	6
−		2952	57449	6
−		8	63097	8
−			1439	4
−				9
	0.99500	24676	84265	7

Правильный результат с 17D:

$$P(2.576) = 0.99500\ 24676\ 84264\ 98.$$

Вычисление с произвольными средним и дисперсией

Пример 3. Найти с 5D значение функции

$$P\{X \leqslant 0.5\} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0.5} e^{-(t-1)^2/8}\,dt,$$

используя 26.2.8 и табл. 26.1.

Это значение равно вероятности того, что нормально распределенная случайная величина со средним $m = 1$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$ меньше или равна половине. Используя 26.2.8, получим

$$P\{X \leqslant 0.5\} = P\left(\frac{0.5-1}{2}\right) = P(-0.25).$$

Поскольку $P(-x) = 1 - P(x)$, имеем

$$P(-0.25) = 1 - P(0.25) = 1 - 0.59871 = 0.40129,$$

где для интерполяции использованы два первых члена ряда Тейлора. Заметим, что, интерполируя значение $P(x)$ для x, лежащего посередине интервала изменения переменной, мы определяем $x = x_0 + 0.01$ и, используя первые два члена ряда Тейлора, получаем

$$P(x) = P(x_0) + Z(x_0)\,10^{-2}.$$

Вычисление $P(x)$ для приближенного значения x

Пример 4. Используя табл. 26.1, найти $P(x)$ для $x = 1.96$, если в значении x возможна ошибка в пределах $\pm 5 \cdot 10^{-3}$.

Этот пример иллюстрирует тот случай, когда аргумент x известен приближенно. Возникает вопрос, сколько десятичных знаков следует оставить в значении $P(x)$? Если Δx и $\Delta P(x)$ обозначают ошибку в x и окончательную ошибку в $P(x)$ соответственно, то $\Delta P(x) \approx Z(x)\,\Delta x$. Следовательно, $\Delta P(1.960) = 3\cdot 10^{-4}$, т.е. $P(1.960)$ необходимо вычислять с 4D. Поэтому $P(1.960) = 0.9750$.

Обратная интерполяция для $P(x)$

Пример 5. Найти значение x, для которого $P(x) = 0.97500\,0000\,0000$, используя табл. 26.1 и определяя столько знаков, сколько совместимо со значениями протабулированной функции.

Так как табличные значения $P(x)$ имеют ошибку $0.5\cdot 10^{-15}$, то

$$\Delta x \approx \frac{\Delta P(x)}{Z(x)} = \frac{0.5\cdot 10^{-15}}{Z(x)}.$$

Пусть $P(x_0)$ соответствует ближайшему протабулированному значению $P(x)$. Тогда удобная формула для обратной интерполяции имеет вид

$$x = x_0 + t + \frac{x_0 t^2}{2} + \frac{2x_0^2+1}{6}\,t^3,$$

где

$$t = \frac{P(x) - P(x_0)}{Z(x_0)}.$$

Если взять только два члена (т.е. $x = x_0 + t$), то ошибка в x будет ограничена величиной $\dfrac{x}{8}\cdot 10^{-4}$; поэтому истинное значение будет всегда больше, чем приближенное.

В нашем примере $\Delta x \approx 10^{-14}$, поэтому найденное значение x может иметь ошибку в единицу четырнадцатого десятичного знака. Значение, ближайшее к $P(x) = 0.97500\,00000\,00000$, равно $P(x_0) = 0.9750\,21048\,51780$ с $x_0 = 1.96$. Следовательно, используя обратную интерполяционную формулу с

$$t = -0.00003\ 60167\ 31129$$

и беря пятнадцать десятичных знаков, получим

$+1.96000$	00000	00000
-0.00003	60167	31129
$+$	12	71261
$-$		68
		0
$+1.95996$	39845	40064

Асимптотическое разложение Эджворта

Пример 6. Найти асимптотическое разложение Эджворта 26.2.49 для функции распределения хи-квадрат.

Метод 1. Разложение для χ^2. Пусть

$$Q(\chi^2\,|\,\nu) = 1 - F(t),$$

где

$$t = \frac{\chi^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}}.$$

Так как значения γ_1 и γ_2, вычисленные по формулам 26.4.33 равны

$$\gamma_1 = 2\sqrt{2}/\sqrt{\nu},$$

$$\gamma_2 = 12/\nu,$$

то, используя первые два члена разложения 26.2.49, заключенные в квадратные скобки, получим

$$F(t) \sim P(t) - \frac{1}{\sqrt{\nu}}\left[\frac{\sqrt{2}}{3}Z^{(2)}(t)\right] + \frac{1}{\nu}\left[\frac{1}{2}Z^{(3)}(t) + \frac{1}{9}Z^{(5)}(t)\right].$$

Разложение Эджворта является асимптотическим разложением с коэффициентами, зависящими от производных от нормальной функции распределения. Часто возможно так преобразовать случайную величину, что ее распределение будет ближе к нормальному, чем распределение первоначальной случайной величины. Следовательно, можно получить бо́льшую точность с тем же числом членов, если использовать разложение для преобразованной величины. Поскольку распределение $\sqrt{2\chi^2}$ ближе к нормальному распределению, чем распределение χ^2 (об этом можно судить, сравнивая значения γ_1 и γ_2), то следует ожидать, что асимптотическое разложение Эджворта для $\sqrt{2\chi^2}$ будет предпочтительнее, чем разложение для χ^2.

Метод 2. Разложение для $\sqrt{2\chi^2}$. Пусть

$$Q(\chi^2\,|\,\nu) = 1 - F(t) = 1 - F\left(\frac{\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}}{\sqrt{1 - 1/(4\nu)}}\right),$$

где $\sqrt{2\nu-1}$ и $1 - 1/(4\nu)$ означают среднее и дисперсию величины $\sqrt{2\chi^2}$ до членов порядка ν^{-2} (см. 26.4.34). Значения γ_1 и γ_2 для $\sqrt{2\chi^2}$ имеют вид

$$\gamma_1 \approx \frac{1}{\sqrt{2\nu}}\left[1 + \frac{5}{8\nu}\right], \qquad \gamma_2 \approx \frac{3}{4\nu^2}.$$

Таким образом, получим

$$F(t) \approx P(t) - \frac{1}{\sqrt{\nu}}\left[\frac{\sqrt{2}}{12}\left(1 + \frac{5}{8\nu}\right)Z^{(2)}(t)\right] + \frac{1}{\nu}\left[\frac{1}{32\nu}Z^{(3)}(t) + \frac{1}{144}\left(1 + \frac{5}{8\nu}\right)^2 Z^{(5)}(t)\right].$$

Пример 12 иллюстрирует применение этого выражения в вычислительных целях.

Вычисление $L(h,\,k,\,\rho)$

Пример 7. Найти $L(0.5, 0.4, 0.8)$. Используя 26.3.20, имеем

$$\sqrt{h^2 - 2\rho hk + k^2} = \sqrt{0.09} = 0.3,$$

$$L(0.5,\,0.4,\,0.8) = L(0.5,\,0,\,0) + L(0.4,\,0,\,-0.6).$$

Из рис. 26.2 получаем, что

$$L(0.5,\,0,\,0) + L(0.4,\,0,\,-0.6) = 0.16 + 0.08 = 0.24.$$

Ответ с 3D имеет вид

$$L(0.5,\,0.4,\,0.8) = 0.250.$$

Вычисление функции двумерного нормального распределения

Пример 8. Пусть X и Y имеют двумерное нормальное распределение с параметрами $m_x = 3$, $m_y = 2$, $\sigma_x = 4$, $\sigma_y = 2$, $\rho = -0.125$. Найти значение $\Pr\{X \geqslant 2, Y \geqslant 4\}$, используя 26.3.20 и рис. 26.2, 26.3.

Поскольку

$$\Pr\{X \geqslant h,\ Y \geqslant k\} = L\left(\frac{h - m_x}{\sigma_x},\ \frac{k - m_y}{\sigma_y},\ \rho\right),$$

имеем

$$\Pr\{X \geqslant 2,\ Y \geqslant 4\} = L(-0.25,\ 1,\ -0.125).$$

Используя 26.3.20, получим

$$L(-0.25,\ 1,\ -0.125) =$$
$$= L(-0.25,\ 0,\ 0.969) + L(1,\ 0,\ 0.125) - 1/2.$$

Рис. 26.2 дает значения только для $h > 0$, однако, используя соотношение 26.3.8 с $k = 0$, $L(-h,\ 0,\ \rho) = 1/2 - L(h,\ 0,\ -\rho)$, находим, что $L(-0.25, 0, 0.969) = 1/2 - L(0.25,\ 0,\ -0.969)$. Поэтому

$$L(-0.25,\ 1,\ -0.125) =$$
$$= -L(0.25,\ 0,\ -0.969) + L(1,\ 0,\ 0.125) = 0.080\cdot$$

Значение $L(-0.25, 1, -0.125)$ с 3D равно 0.080.

Интеграл от плотности двумерного нормального распределения, взятый по многоугольнику

Пример 9. Пусть случайные величины X и Y имеют двумерное нормальное распределение с параметрами $m_x = 5$, $\sigma_x = 2$, $m_y = 9$, $\sigma_y = 4$, $\rho = 0{,}5$. Найти вероятность того, что точка (X, Y) попадает внутрь треугольника с вершинами $A = (7, 8)$, $B = (9, 13)$, $C = (2, 9)$.

Для получения интеграла от плотности двумерного нормального распределения, взятого по многоугольнику, сначала следует использовать 26.3.22 и преобразовать переменные X, Y в новые переменные, имеющие круговое нормальное распределение. Многоугольник в области изменения новых переменных разделяется на несколько областей таких, что интеграл по каждой из этих областей можно легко вычислить. Ниже перечислены некоторые из наиболее часто встречающихся областей.

Для следующих двух областей определим

$$h = \frac{|t_2 s_1 - t_1 s_2|}{[(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2]^{1/2}},$$

$$k_1 = \frac{|s_1(s_2 - s_1) + t_1(t_2 - t_1)|}{[(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2]^{1/2}},$$

$$k_2 = \frac{|s_2(s_2 - s_1) + t_2(t_2 - t_1)|}{[(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2]^{1/2}}.$$

Формулы преобразования переменных 26.3.22 для нашего примера имеют вид

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{X - 5}{2} + \frac{Y - 9}{4}\right),$$

$$t = -\left(\frac{X - 5}{2} - \frac{Y - 9}{4}\right).$$

Треугольник в плоскости $(s,\ t)$ имеет вершины

$$A(\sqrt{3}/4,\ -5/4),\quad B(\sqrt{3},\ -1),\quad C(-\sqrt{3}/2,\ 3/2).$$

Эти точки обозначены на рис. 26.10. Из этого рисунка видно, что искомая вероятность равна сумме вероятностей того, что точка с координатами (s, t) попадет внутрь треугольников AOB, AOC и BOC.

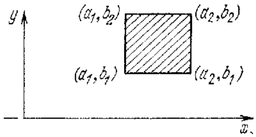


Рис. 26.5.

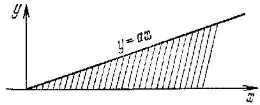


Рис. 26.6.

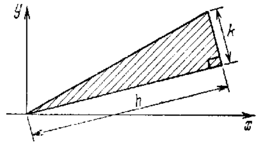


Рис. 26.7.

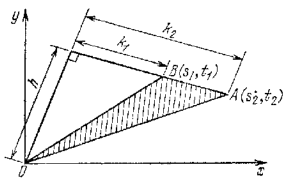


Рис. 26.8.

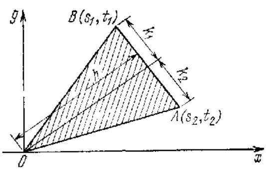


Рис. 26.9.

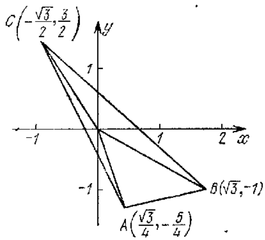


Рис. 26.10.

Для этих треугольников имеем

	h	k_1	k_2
ΔAOB	$\frac{2}{7}\sqrt{21}$	$\sqrt{7}/14$	$\frac{4}{7}\sqrt{7}$
ΔAOC	$\frac{1}{74}\sqrt{111}$	$\frac{8}{37}\sqrt{37}$	$\frac{21}{74}\sqrt{37}$
ΔBOC	$\frac{1}{13}\sqrt{39}$	$\frac{7}{13}\sqrt{13}$	$\frac{6}{13}\sqrt{13}$

Из рис. 26.10 видно, что вероятность попадания в треугольник AOB можно найти тем же способом, что и вероятность попадания в треугольник на рис. 26.8. Аналогичным образом вероятность попадания в треугольники AOC и BOC можно найти, используя рис. 26.9.

Следовательно,

$$\iint_{\Delta} g(x, y, 0.5)\, dx\, dy = \iint_{\Delta ABC} g(s, t, 0)\, ds\, dt =$$

$$= \iint_{\Delta AOB} g(s, t, 0)\, ds\, dt + \iint_{\Delta AOC} g(s, t, 0)\, ds\, dt + \iint_{\Delta BOC} g(s, t, 0)\, ds\, dt.$$

Наконец, используя 26.3.23 и рис. 26.2, получим

$$\iint_{\Delta AOB} g(s, t, 0)\, ds\, dt =$$

$$= V\left(\frac{2}{7}\sqrt{21}, \frac{4\sqrt{7}}{7}\right) - V\left(\frac{2}{7}\sqrt{21}, \frac{\sqrt{7}}{14}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{4} + L(1.31, 0, -0.76) - L(0, 0, -0.76) - \frac{1}{2}Q(1.31)\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{4} + L(1.31, 0, -0.14) - L(0, 0, -0.14) - \frac{1}{2}Q(1.31)\right] =$$

$$= L(1.31, 0, -0.76) - L(0, 0, -0.76) - L(1.31, 0, -0.14) + L(0, 0, -0.14) = 0 - 0.11 - 0.04 + 0.23 = 0.08,$$

$$\iint_{\Delta AOC} g(s, t, 0)\, ds\, dt =$$

$$= V\left(\frac{\sqrt{111}}{74}, \frac{8\sqrt{37}}{37}\right) + V\left(\frac{\sqrt{111}}{74}, \frac{21\sqrt{37}}{74}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{4} + L(0.14, 0, -0.99) - L(0, 0, -0.99) - \frac{1}{2}Q(0.14)\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{4} + L(0.14, 0, -1) - L(0, 0, -1) - \frac{1}{2}Q(0.14)\right] =$$

$$= 0.01 + 0.02 = 0.03$$

$$\iint_{\Delta BOC} g(s, t, 0)\, ds\, dt =$$

$$= V\left(\frac{\sqrt{39}}{13}, \frac{7\sqrt{13}}{13}\right) + V\left(\frac{\sqrt{39}}{13}, \frac{6\sqrt{13}}{13}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{4} + L(0.48, 0, -0.97) - L(0, 0, -0.97) - \frac{1}{2}Q(0.48)\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{4} + L(0.48, 0, -0.96) - L(0, 0, -0.96) - \frac{1}{2}Q(0.48)\right] =$$

$$= 0.05 + 0.04 = 0.09.$$

Собирая все слагаемые, найдем, что вероятность попадания точки (X, Y) в треугольник ABC равна $0.08 + 0.03 + 0.09 = 0.2$. Ответ с 3D равен 0.211.

Вычисление кругового нормального распределения внутри смещенного круга

Пример 10. Пусть X и Y имеют круговое нормальное распределение с $\sigma = 1000$. Найдем вероятность того, что точка (X, Y) попадает внутрь круга с радиусом 540 и с центром, отстоящим на 1210 от среднего значения кругового нормального распределения.

В единицах σ радиус и расстояние от центра равны $R = \frac{540}{1000} = 0.54$, $r = \frac{1210}{1000} = 1.21$ соответственно. Таким образом, задача сводится к нахождению вероятности того, что точка (X, Y) попадет в круг радиуса $R = 0.54$, отстоящего на $r = 1.21$ от центра распределения с $\sigma = 1$.

Поскольку $R < 1$, то используется аппроксимация 26.3.25. В результате получим

$$P(R^2 \mid 2, r^2) = \frac{2(0.54)^2}{4 + (0.54)^2} \exp\left[\frac{-2(1.21)^2}{4 + (0.54)^2}\right] =$$

$$= 0.1359\, e^{-0.6823} = 0.06869.$$

Значение с 5D равно 0.06870.

Интерполяция для $Q(\chi^2 \mid \nu)$

Пример 11. Найти $Q\ (25.298 \mid 20)$, используя интерполяционную формулу, которая дана вместе с таблицей 26.7.

Беря $\chi^2 = 25$, $\theta = 0.298$ и применяя интерполяционную формулу, получим

$$Q(25.298 \mid 20) = \frac{1}{8}\{Q(25 \mid 16)\,\theta^2 +$$

$$+ Q(25 \mid 18)\,(4\theta - 2\theta^2) + Q(25 \mid 20)\,(8 - 4\theta + \theta^2)\} =$$

$$= \frac{1}{8}\{0.06982 \cdot 0.088804 + 0.12492 \cdot 1.014392 +$$

$$+ 0.20143 \cdot 6.896804\} = 0.19027.$$

Менее точное значение можно получить, полагая $\theta^2=0$ в вышенаписанном выражении. Тогда результат будет равен 0.19003. Точное значение с 6D равно $Q(25.298|20) = 0.190259$.

С другой стороны, если предполагается, что возможная ошибка в значении $\chi^2 = 25.298$ равна $\pm 5\cdot 10^{-4}$, то какова будет ошибка в $Q(\chi^2|\nu)$? Обозначая $\Delta\chi^2$ ошибку в χ^2 и $\Delta Q(\chi^2|\nu)$ ошибку в $Q(\chi^2|\nu)$, имеем приближенное соотношение

$$\Delta Q(\chi^2|\nu) \approx \frac{\partial Q(\chi^2|\nu)}{\partial\chi^2}\,\Delta\chi^2.$$

Используя 26.4.8, получим

$$\frac{\partial Q(\chi^2|\nu)}{\partial\chi^2} = \frac{1}{2}\,[Q(\chi^2|\nu-2) - Q(\chi^2|\nu)],$$

$$\Delta Q(\chi^2|\nu) \approx \frac{1}{2}\,[Q(\chi^2|\nu-2) - Q(\chi^2|\nu)]\,\Delta\chi^2.$$

Для практических целей достаточно вычислить производную с одной или двумя значащими цифрами. Следовательно, можно записать

$$\frac{\partial Q(\chi^2|\nu)}{\partial\chi^2} \approx \frac{\partial Q(\chi_0^2|\nu)}{\partial\chi^2},$$

где χ_0^2 означает ближайшее к χ^2 значение, для которого Q протабулировано. Следовательно,

$$\Delta Q(\chi^2|\nu) \approx \frac{1}{2}\,[Q(\chi_0^2|\nu-2) - Q(\chi_0^2|\nu)]\,\Delta\chi^2.$$

В нашем примере $\Delta\chi^2 = \pm 5\cdot 10^{-4}$, $\chi_0^2 = 25$. Таким образом, возможная ошибка в $Q(\chi^2|\nu)$ равна

$$\Delta Q(\chi^2|\nu) = \frac{1}{2}\,(-0.076)\,(\pm 5)\,10^{-4} = \pm 2\cdot 10^{-5}.$$

Вычисление $Q(\chi^2|\nu)$ за пределами табл. 26.7

Пример 12. Найти $Q(84|72)$.

Поскольку это значение лежит за пределами табл. 26.7, его можно приближенно вычислить несколькими способами, используя 1) разложение Эджворта для $Q(\chi^2|\nu)$, данное в примере 6; 2) аппроксимацию кубичного корня 26.4.14; 3) улучшенную аппроксимацию кубичного корня 26.4.15 или 4) аппроксимацию квадратного корня 26.4.13. Результаты использования этих четырех методов даются ниже.

1. Разложение Эджворта.

Ниже выписаны последовательные члены разложение Эджворта для распределения хи-квадрат:

$$1 - Q(84|72) = \begin{array}{r} 0.841345 \\ 0.000000 \\ 0.001120 \\ \hline 0.842465 \end{array}$$

Следовательно, $Q(84|72) = 0.15754$.

Последовательные члены разложения Эджворта для распределения $\sqrt{2\chi^2}$ равны

$$1 - Q(84|72) = \begin{array}{r} 0.842544 \\ -0.000034 \\ -0.000138 \\ \hline 0.842372. \end{array}$$

Следовательно, $Q(84|72) = 0.15764$.

2. Аппроксимация кубичного корня 26.4.14.

Используя аппроксимацию кубичного корня, имеем

$$Q(84|72) = Q(x),$$

где

$$x = \frac{\left(\frac{84}{72}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{2}{9(72)}\right]}{\left[\frac{2}{9(72)}\right]^{1/2}} = 1.0046.$$

Результат равен

$$Q(84|72) = Q(1.0046) = 1 - P(1.0046) = 0.15754.$$

3. Улучшенная аппроксимация кубичного корня 26.4.15.

Улучшенная аппроксимация кубичного корня включает вычисление поправочного члена h_ν для x. Интерполируя линейно в таблице h_{60} (см. выше 26.4.15) для $x = 1.0046$, получим $h_{60} = -0.0006$, следовательно,

$$h_{72} = \frac{60}{72}\,(-0.0006) = -0.00049.$$

Таким образом,

$$Q(84|72) = Q(1.0046 - 0.0005) = Q(1.0041) =$$
$$= 1 - P(1.0041) = 0.15766.$$

4. Аппроксимация квадратного корня 26.4.13.

Используя аппроксимацию квадратного корня, имеем $Q(84|72) = Q(x)$, где

$$x = \sqrt{2(84)} - \sqrt{2(72)-1} = 1.0032.$$

Результат равен $Q(84|72) = Q(1.0032) = 1 - P(1.0032) = 0.15788$.

Точное значение $Q(84|72)$ с 6D равно 0.157653.

По-видимому, для вычислений за пределами табл. 26.7 следует использовать улучшенную аппроксимацию кубичного корня, которая дает максимальную ошибку в несколько единиц пятого десятичного знака.

Вычисление χ^2 для $Q(\chi^2|\nu)$ за пределами табл. 26.8

Пример 13. Найти значение χ^2, для которого $Q(\chi^2|144) = 0.01$.

Поскольку $\nu = 144$ лежит за пределами табл. 26.8, то для вычисления можно использовать 1) асимптотическое разложение Корниша — Фишера 26.2.50 для χ^2, 2) кубичную аппроксимацию 26.4.17, 3) улучшенную кубичную аппроксимацию 26.4.18 или 4) квадратичную аппроксимацию 26.4.16. Ниже рассмотрены все четыре метода.

1. Асимптотическое разложение Корниша — Фишера 26.2.50.

Асимптотическое разложение Корниша — Фишера для χ^2 с $\nu = 144$ имеет вид

$$\chi^2 \approx 144 + 12\sqrt{2}\,x + 4h_1(x) + \frac{4\sqrt{2}}{12}\,[3h_2(x) + 2h_{11}(x)] +$$
$$+ \frac{8}{12^2}\,[6h_3(x) + 3h_{12}(x) + 2h_{111}(x)] + \frac{16\sqrt{2}}{12^3}\,\times$$
$$\times\,[30h_4(x) + 9h_{22}(x) + 12h_{13}(x) + 6h_{112}(x) + 4h_{1111}(x)].$$

Используя далее вспомогательную таблицу, следующую за формулой 26.2.51, с $p = 0.01$, найдем

$$\begin{array}{r} 144.0000 \\ 39.4794 \\ 2.9413 \\ -0.0242 \\ -0.0019 \\ +0.0002 \\ \hline \chi^2 = 186.395 \end{array}$$

2. Кубичная аппроксимация 26.4.17.

Беря $\chi_{0.01} = 2.32635$, получим

$$\chi^2 = 144\left\{\left[1 - \frac{2}{9(144)}\right] + (2.32635)\sqrt{\frac{2}{9(144)}}\right\}^3 = 186.405.$$

3. Улучшенная кубичная аппроксимация 26.4.18.

Применяя линейную интерполяцию, из таблицы значений h_{60} для $x = 2.33$ приближенно получим

$$h_{60} = 0.0012 \text{ и } h_{144} = \frac{60}{144}(0.0012) = 0.00049,$$

следовательно,

$$\chi^2 = 144\left[1 - \frac{2}{9(144)} + (2.32635 - 0.00049)\sqrt{\frac{2}{9(144)}}\right]^3 = 186.394.$$

4. Квадратичная аппроксимация 26.4.16.

$$\chi^2 = \frac{1}{2}[2.32635 + \sqrt{2(144) - 1}]^2 = 185.616.$$

Ответ с 3D равен $\chi^2 = 186.394$. В общем, улучшенная кубичная аппроксимация в области $\nu > 30$ дает результат с ошибкой во втором или третьем десятичном знаке.

Вычисление неполной гамма-функции

Пример 14. Найти значение

$$\gamma(2.5,\ 0.9) = \int_0^{0.9} e^{-t}t^{1.5}\,dt,$$

используя 26.4.19 и табл. 26.7.

Используя 26.4.19, получим

$$\gamma(2.5,\ 0.9) = \Gamma(2.5)\,P(1.8\,|\,5) = \Gamma(2.5)\,[1 - Q(1.8\,|\,5)]$$

$$\gamma(2.5,\ 0.9) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,[1 - 0.87607] = 0.16475.$$

Распределение Пуассона

Пример 15. Найти значение m, для которого

$$\sum_{i=0}^{3} e^{-m}\frac{m^i}{i!} = 0.99,$$

используя 26.4.21 и табл. 26.8.

Из табл. 26.8 с $\nu = 2c = 8$ и $Q = 0.99$, найдем $\chi^2 = 1.646482$. Следовательно, $m = \chi^2/2 = 0.823241$.

Функция, обратная к неполной бета-функции

Пример 16. Найти значение x, для которого $I_x(10, 6) = 0.1$, используя табл. 26.9 и 26.5.28.

Используя 26.5.28, найдем

$$I_x(10,\ 6) = Q(F\,|\,12,\ 20) = 0.1, \text{ где } x = \frac{20}{20 + 12F}.$$

Из табл. 26.9 находим, что верхняя 10%-ная точка F распределения с 12 и 20 степенями свободы равна $F = 1.89$. Следовательно,

$$x = \frac{20}{20 + 12(1.89)} = 0.469.$$

Значение x с 4D равно 0.4683.

Вычисление $I_x(a, b)$, когда a или b — малые целые числа

Пример 17. Вычислить $I_{0.1}(3, 20)$.

Значения $I_x(a, b)$ для малых целых значений a или b удобно вычислять, используя 26.5.6 или 26.5.7. Используя 26.5.6, найдем

$$1 - I_{0.9}(20,\ 3) = \frac{(0.9)^{20}}{B(3,\ 20)}\left\{\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{2}{i}\frac{(0.9)^i}{20 + i}\right\} =$$

$$= \frac{0.121576}{0.216450\cdot 10^{-3}}\,(0.110390\cdot 10^{-2}) = 0.620040.$$

Биномиальное распределение

Пример 18. Найти значение p, для которого

$$\sum_{s=0}^{20}\binom{50}{s}p^s q^{50-s} = 0.95,\ q = 1 - p,$$

используя табл. 26.9 и формулу 26.5.24.

Применяя 26.5.24 и 26.5.28, имеем

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}p^s q^{n-s} = Q(F\,|\,\nu_1,\ \nu_2),$$

где

$$\nu_1 = 2(n - a + 1),\quad \nu_2 = 2a,$$

$$p = \frac{a}{a + (n - a + 1)\,F}.$$

Следовательно,

$$\sum_{s=0}^{20}\binom{50}{s}p^s q^{50-s} = 1 - \sum_{s=21}^{50}\binom{50}{s}p^s q^{50-s} =$$

$$= 1 - Q(F\,|\,60,\ 42) = 0.95.$$

Гармоническая интерполяция по ν_2 в таблице для $Q(F|\nu_1, \nu_2) = 0.05$ дает $F = 1.624$ для $\nu_1 = 60$, $\nu_2 = 42$, следовательно,

$$p = \frac{42}{42 + 60(1.624)} = 0.301.$$

Значение с 4D есть $p = 0.3003$.

Аппроксимация неполной бета-функции

Пример 19. Найти $I_{0.80}(16, 10.5)$, используя 26.5.21. Значения $I_x(a, b)$ удобно вычислять, используя аппроксимацию 26.5.20 или 26.5.21. В данном примере имеем $(a+b-1)(1-x) = 10.2 > 8$, следовательно, нужно применять 26.5.21. Имеем

$$w_1 = [(10.5)(0.60)]^{1/3} = 1.8469,$$

$$w_2 = [16(0.4)]^{1/3} = 1.8566,$$

$$y = \frac{3\,[(1.8469)(0.98942) - (1.8566)(0.99306)]}{\left[\frac{(1.8469)^2}{10.5} + \frac{(1.8566)^2}{16}\right]^{1/2}} = -0.0668.$$

Интерполируя в табл. 21.1, получим

$$P(-0.0668) = 1 - P(0.0668) = 0.47336.$$

Ответ с 5D равен 0.47332.

Интерполяция F в табл. 26.9

Пример 20. Найти значение F, для которого $Q(F|7,20) = 0.05$, используя табл. 26.9.

Табл. 26.9 допускает приближенно линейную интерполяцию по обратным величинам степеней свободы ν_1 и ν_2, т.е. по величинам $1/\nu_1$ и $1/\nu_2$. В данном примере необходимо интерполировать только по $1/\nu_1$. Линейная интерполяция по $1/\nu_1$ дает результат $F = 2.51$. В данном случае линейная интерполяция является точной.

Вычисление F для $Q(F|\nu_1, \nu_2) > 0.5$

Пример 21. Найти значение F, для которого $Q(F|4, 8) = 0.9$, используя 26.6.9 и табл. 26.9.

В табл. 26.9 помещены только те значения F, для которых $Q(F|\nu_1, \nu_2) = p$ при $p = 0.500, 0.250, 0.100, 0.040, 0.025, 0.010, 0.005, 0.001$. Однако, используя табл. 26.9, можно найти значения F, для которых $p = 0.75, 0.9, 0{,}95, 0.975, 0.99, 0.995, 0.999$.

В данном примере имеем

$$F_{0.90}(4, 8) = \frac{1}{F_{0.10}(8, 4)}$$

и, найдя по таблице значение $Q(F|\nu_1, \nu_2) = 0{,}10$, соответствующее значению $F_{0.10}(8, 4) = 3.95$, окончательно получим

$$F_{0.90}(4, 8) = \frac{1}{3.95} = 0.253.$$

Вычисление $Q(F|\nu_1, \nu_2)$ для малых целых значений ν_1 или ν_2

Пример 22. Вычислить $Q(2.5|4, 15)$, используя 26.6.4.

Значение $Q(F|\nu_1, \nu_2)$ для малых целых ν_1 или ν_2 можно легко получить, используя разложения 26.6.4—26.6.8. Используя 26.6.4, получим

$$x = \frac{15}{15 + 4(2.50)} = 0.60,$$

$$Q(2.50|4, 15) = (0.6)^{7.5}\left[1 + \frac{15}{2}(0.4)\right] = 0.086735.$$

Аппроксимация $Q(F|\nu_1, \nu_2)$

Пример 23. Вычислить $Q(1.714|10, 40)$, используя 26.6.15.

Аппроксимация 26.6.15 дает максимальную ошибку в пять единиц четвертого десятичного знака. В данном примере имеем

$$x = \frac{(1.714)^{1/3}\left(1 - \frac{2}{9(40)}\right) - \left(1 - \frac{2}{9(10)}\right)}{\left[\frac{2}{9(10)} + (1.714)^{2/3}\,\frac{2}{9(40)}\right]^{1/2}} = 1.2222.$$

Интерполируя в табл. 26.1, получим

$$Q(1.714|10, 40) \approx Q(1.2222) = 1 - P(1.2222) = 0.1108.$$

Точный ответ с 5D равен $Q(1.714|10, 40) = 0.11108$.

С другой стороны, обычно менее точная аппроксимация 26.6.14 дает

$$x = \frac{\sqrt{[2(40)-1]\left(\frac{10}{40}\right)(1.714)} - \sqrt{2(10)-1}}{\sqrt{1 + \frac{10}{40}(1.714)}} = 1.2210,$$

а интерполяция в табл. 26.1 дает

$$Q(1.714|10, 40) \approx Q(1.2210) = 1 - P(1.2210) = 0.1112.$$

Вычисление F за пределами табл. 26.9

Пример 24. Найти значение F, для которого $Q(F|10, 20) \approx 0.0001$, используя 26.6.16 и 26.5.22.

В данной задаче имеем $a = \nu_2/2 = 10$, $b = \nu_1/2 = 5$, $p = 0.0001$. Значение нормальной величины, отсекающее 0,0001 от «хвоста» распределения, равно $y = 3.7190$ (т.е. $Q(3.7190) = 0.0001$). Подставляя в 26.5.22, получим

$$h = 2\left[\frac{1}{19} + \frac{1}{9}\right]^{-1} = 12.2143,$$

$$\lambda = \frac{3.7190^2 - 3}{6} = 1.8052,$$

$$w = 3.7190\,\frac{(12.2143 + 1.8052)^{1/2}}{12.2143} - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{19}\right)\left[1.8052 + 0.8333 - \frac{2}{3(12.2143)}\right] = 0.9889.$$

Таким образом, $F \approx e^{2w} = 7.23$. Точный ответ равен $F = 7.180$.

Аппроксимация нецентрального F-распределения

Пример 25. Вычислить $P(3.71|3, 10, 4)$, используя аппроксимацию нецентрального F-распределения 26.6.27.

Используя 26.6.27 с $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 10$, $\lambda = 4$, $F' = 3.71$, имеем

$$x = \frac{\left[\left(\frac{3}{3+4}\right)(3.71)\right]^{1/3}\left[1 - \frac{2}{9(10)}\right] - \left[1 - \frac{2(3+8)}{9(3+4)^2}\right]}{\left\{\frac{2(3+8)}{9(3+4)^2} + \frac{2}{9(10)}\left[\left(\frac{3}{3+4}\right)(3.71)\right]^{2/3}\right\}^{1/2}}.$$

Интерполируя в табл. 26.1, получим

$$P(3.71|3, 10, 4) \approx P(0.675) = 0.750.$$

Точный ответ равен $P(3.71|3, 10, 4) = 0.745$.

Таблица 26.1. Функция нормального распределения и ее производные

x	$P(x)$	$Z(x)$	$Z^{(1)}(x)$
0.00	0.50000 00000 00000	0.39894 22804 01433	0.00000 00000 00000
0.02	0.50797 83137 16902	0.39886 24999 23666	-0.00797 72499 98473
0.04	0.51595 34368 52831	0.39862 32542 04605	-0.01594 49301 68184
0.06	0.52392 21826 54107	0.39822 48301 95607	-0.02389 34898 11736
0.08	0.53188 13720 13988	0.39766 77055 11609	-0.03181 34164 40929
0.10	0.53982 78372 77029	0.39695 25474 77012	-0.03969 52547 47701
0.12	0.54775 84260 20584	0.39608 02117 93656	-0.04752 96254 15239
0.14	0.55567 00048 05907	0.39505 17408 34611	-0.05530 72437 16846
0.16	0.56355 94628 91433	0.39386 83615 68541	-0.06301 89378 50967
0.18	0.57142 37159 00901	0.39253 14831 20429	-0.07065 56669 61677
0.20	0.57925 97094 39103	0.39104 26939 75456	-0.07820 85387 95091
0.22	0.58706 44226 48215	0.38940 37588 33790	-0.08566 88269 43434
0.24	0.59483 48716 97796	0.38761 66151 25014	-0.09302 79876 30003
0.26	0.60256 81132 01761	0.38568 33691 91816	-0.10027 76759 89872
0.28	0.61026 12475 55797	0.38360 62921 53479	-0.10740 97618 02974
0.30	0.61791 14221 88953	0.38138 78154 60524	-0.11441 63446 38157
0.32	0.62551 58347 23320	0.37903 05261 52702	-0.12128 97683 68865
0.34	0.63307 17360 36028	0.37653 71618 33254	-0.12802 26350 23306
0.36	0.64057 64332 17991	0.37391 06053 73128	-0.13460 78179 34326
0.38	0.64802 72924 24163	0.37115 38793 59466	-0.14103 84741 56597
0.40	0.65542 17416 10324	0.36827 01403 03323	-0.14730 80561 21329
0.42	0.66275 72731 51751	0.36526 26726 22154	-0.15341 03225 01305
0.44	0.67003 14463 39407	0.36213 48824 13092	-0.15933 93482 61761
0.46	0.67724 18897 49653	0.35889 02910 33545	-0.16508 95338 75431
0.48	0.68438 63034 83778	0.35553 25285 05997	-0.17065 56136 82879
0.50	0.69146 24612 74013	0.35206 53267 64299	-0.17603 26633 82150
0.52	0.69846 82124 53034	0.34849 25127 58974	-0.18121 61066 34667
0.54	0.70540 14837 84302	0.34481 80014 39333	-0.18620 17207 77240
0.56	0.71226 02811 50973	0.34104 57886 30353	-0.19098 56416 32997
0.58	0.71904 26911 01436	0.33717 99438 22381	-0.19556 43674 16981
0.60	0.72574 68822 49927	0.33322 46028 91800	-0.19993 47617 35080
0.62	0.73237 11065 31017	0.32918 39607 70765	-0.20409 40556 77874
0.64	0.73891 37003 07139	0.32506 22640 84082	-0.20803 98490 13813
0.66	0.74537 30853 28664	0.32086 38037 71172	-0.21177 01104 88974
0.68	0.75174 77695 46430	0.31659 29077 10893	-0.21528 31772 43407
0.70	0.75803 63477 76927	0.31225 39333 66761	-0.21857 77533 56733
0.72	0.76423 75022 20749	0.30785 12604 69853	-0.22165 29075 38294
0.74	0.77035 00028 35210	0.30338 92837 56300	-0.22450 80699 79662
0.76	0.77637 27075 62401	0.29887 24057 75953	-0.22714 30283 89724
0.78	0.78230 45624 14267	0.29430 50297 88325	-0.22955 79232 34894
0.80	0.78814 46014 16604	0.28969 15527 61483	-0.23175 32422 09186
0.82	0.79389 19464 14187	0.28503 63584 89007	-0.23372 98139 60986
0.84	0.79954 58067 39551	0.28034 38108 39621	-0.23548 88011 05281
0.86	0.80510 54787 48192	0.27561 82471 53457	-0.23703 16925 51973
0.88	0.81057 03452 23288	0.27086 39717 98338	-0.23836 02951 82537
0.90	0.81593 98746 53241	0.26608 52498 98755	-0.23947 67249 08879
0.92	0.82121 36203 85629	0.26128 63012 49553	-0.24038 33971 49589
0.94	0.82639 12196 61376	0.25647 12944 25620	-0.24108 30167 60083
0.96	0.83147 23925 33162	0.25164 43410 98117	-0.24157 85674 54192
0.98	0.83645 69406 72308	0.24680 94905 67043	-0.24187 33007 55702
1.00	0.84134 47460 68543	0.24197 07245 19143	-0.24197 07245 19143
	$\begin{bmatrix}(-5)1\\10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)2\\10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)3\\10\end{bmatrix}$

$$Z(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\qquad P(x)=\int_{-\infty}^{x}Z(t)\,dt\qquad Z^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}Z(x)\qquad He_n(x)=(-1)^nZ^{(n)}(x)/Z(x)$$

Таблица 26.1. Функция нормального распределения и ее производные

x	$Z^{(2)}(x)$	$Z^{(3)}(x)$	$Z^{(4)}(x)$	$Z^{(5)}(x)$	$Z^{(6)}(x)$
0.00	-0.39894 22804	0.00000 000	1.19682 684	0.00000 000	-5.98413 421
0.02	-0.39870 29549	0.02392 856	1.19563 029	-0.11962 684	-5.97575 893
0.04	-0.39798 54570	0.04780 928	1.19204 400	-0.23891 887	-5.95066 325
0.06	-0.39679 12208	0.07159 445	1.18607 800	-0.35754 249	-5.90893 742
0.08	-0.39512 26322	0.09523 664	1.17774 897	-0.47516 649	-5.85073 151
0.10	-0.39298 30220	0.11868 881	1.16708 019	-0.59146 327	-5.77625 460
0.12	-0.39037 66567	0.14190 445	1.15410 144	-0.70610 997	-5.68577 399
0.14	-0.38730 87267	0.16483 771	1.13884 890	-0.81878 968	-5.57961 395
0.16	-0.38378 53315	0.18744 353	1.12136 503	-0.92919 252	-5.45815 435
0.18	-0.37981 34631	0.20967 776	1.10169 839	-1.03701 674	-5.32182 895
0.20	-0.37540 09862	0.23149 727	1.07990 350	-1.14196 980	-5.17112 356
0.22	-0.37055 66169	0.25286 011	1.05604 063	-1.24376 938	-5.00657 387
0.24	-0.36528 98981	0.27372 555	1.03017 556	-1.34214 434	-4.82876 317
0.26	-0.35961 11734	0.29405 426	1.00237 941	-1.43683 568	-4.63831 979
0.28	-0.35353 15588	0.31380 836	0.97272 834	-1.52759 737	-4.43591 441
0.30	-0.34706 29121	0.33295 156	0.94130 327	-1.61419 723	-4.22225 716
0.32	-0.34021 78003	0.35144 923	0.90818 965	-1.69641 762	-3.99809 459
0.34	-0.33300 94659	0.36926 849	0.87347 711	-1.77405 617	-3.76420 646
0.36	-0.32545 17909	0.38637 828	0.83725 919	-1.84692 643	-3.52140 244
0.38	-0.31755 92592	0.40274 947	0.79963 298	-1.91485 840	-3.27051 871
0.40	-0.30934 69179	0.41835 488	0.76069 880	-1.97769 904	-3.01241 439
0.42	-0.30083 03372	0.43316 939	0.72055 987	-2.03531 269	-2.74796 802
0.44	-0.29202 55692	0.44716 995	0.67932 193	-2.08758 144	-2.47807 382
0.46	-0.28294 91055	0.46033 566	0.63709 291	-2.13440 537	-2.20363 810
0.48	-0.27361 78339	0.47264 779	0.59398 256	-2.17570 278	-1.92557 548
0.50	-0.26404 89951	0.48408 982	0.55010 207	-2.21141 033	-1.64480 520
0.52	-0.25426 01373	0.49464 748	0.50556 372	-2.24148 307	-1.36224 740
0.54	-0.24426 90722	0.50430 874	0.46048 050	-2.26589 443	-1.07881 949
0.56	-0.23409 38293	0.51306 383	0.41496 574	-2.28463 613	-0.79543 249
0.58	-0.22375 26107	0.52090 525	0.36913 279	-2.29771 801	-0.51298 749
0.60	-0.21326 37459	0.52782 777	0.32309 457	-2.30516 783	-0.23237 218
0.62	-0.20264 56463	0.53382 841	0.27696 332	-2.30703 091	+0.04554 255
0.64	-0.19191 67607	0.53890 643	0.23085 017	-2.30336 981	0.31990 583
0.66	-0.18109 55308	0.54306 327	0.18486 483	-2.29426 388	0.58988 999
0.68	-0.17020 03472	0.54630 259	0.13911 528	-2.27980 875	0.85469 355
0.70	-0.15924 95060	0.54863 016	0.09370 741	-2.26011 583	1.11354 405
0.72	-0.14826 11670	0.55005 386	0.04874 473	-2.23531 162	1.36570 074
0.74	-0.13725 33120	0.55058 359	+0.00432 808	-2.20553 714	1.61045 709
0.76	-0.12624 37042	0.55023 127	-0.03944 465	-2.17094 715	1.84714 311
0.78	-0.11524 98497	0.54901 073	-0.08247 882	-2.13170 944	2.07512 746
0.80	-0.10428 89590	0.54693 765	-0.12468 324	-2.08800 401	2.29381 943
0.82	-0.09337 79110	0.54402 952	-0.16597 047	-2.04002 228	2.50267 061
0.84	-0.08253 32179	0.54030 551	-0.20625 697	-1.98796 617	2.70117 643
0.86	-0.07177 09916	0.53578 644	-0.24546 336	-1.93204 726	2.88887 745
0.88	-0.06110 69120	0.53049 467	-0.28351 458	-1.87248 587	3.06536 044
0.90	-0.05055 61975	0.52445 403	-0.32034 003	-1.80951 008	3.23025 923
0.92	-0.04013 35759	0.51768 968	-0.35587 378	-1.74335 486	3.38325 538
0.94	-0.02985 32587	0.51022 810	-0.39005 463	-1.67426 103	3.52407 854
0.96	-0.01972 89163	0.50209 689	-0.42282 627	-1.60247 436	3.65250 673
0.98	-0.00977 36558	0.49332 478	-0.45413 732	-1.52824 456	3.76836 628
1.00	0.00000 00000	0.48394 145	-0.48394 145	-1.45182 435	3.87153 159
	$\begin{bmatrix}(-5)6\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)1\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)3\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)7\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)2\\7\end{bmatrix}$

$P(-x)=1-P(x)$ $\qquad$ $Z(-x)=Z(x)$ $\qquad$ $Z^{(n)}(-x)=(-1)^n Z^{(n)}(x)$

Таблица 26.1. Функция нормального распределения и ее производные

x	$P(x)$	$Z(x)$	$Z^{(1)}(x)$
1.00	0.84134 47460 68543	0.24197 07245 19143	-0.24197 07245 19143
1.02	0.84613 57696 27265	0.23713 19520 19380	-0.24187 45910 59767
1.04	0.85083 00496 69019	0.23229 70047 43366	-0.24158 88849 33101
1.06	0.85542 77003 36091	0.22746 96324 57386	0.24111 78104 04829
1.08	0.85992 89099 11231	0.22265 34987 51761	-0.24046 57786 51902
1.10	0.86433 39390 53618	0.21785 21770 32551	-0.23963 73947 35806
1.12	0.86864 31189 57270	0.21306 91467 75718	-0.23863 74443 88804
1.14	0.87285 68494 37202	0.20830 77900 47108	-0.23747 08806 53704
1.16	0.87697 55969 48657	0.20357 13882 90759	-0.23614 28104 17281
1.18	0.88099 98925 44800	0.19886 31193 87276	-0.23465 84808 76986
1.20	0.88493 03297 78292	0.19418 60549 83213	-0.23302 32659 79856
1.22	0.88876 75625 52166	0.18954 31580 91640	-0.23124 26528 71801
1.24	0.89251 23029 25413	0.18493 72809 63305	-0.22932 22283 94499
1.26	0.89616 53188 78700	0.18037 11632 27080	-0.22726 76656 66121
1.28	0.89972 74320 45558	0.17584 74302 97662	-0.22508 47107 81008
1.30	0.90319 95154 14390	0.17136 85920 47807	-0.22277 91696 62150
1.32	0.90658 24910 06528	0.16693 70417 41714	-0.22035 68950 99062
1.34	0.90987 73275 35548	0.16255 50552 25534	-0.21782 37740 02216
1.36	0.91308 50380 52915	0.15822 47903 70383	-0.21518 57149 03721
1.38	0.91620 66775 84986	0.15394 82867 62634	-0.21244 86357 32434
1.40	0.91924 33407 66229	0.14972 74656 35745	-0.20961 84518 90043
1.42	0.92219 61594 73454	0.14556 41300 37348	-0.20670 10646 53034
1.44	0.92506 63004 65673	0.14145 99652 24839	-0.20370 23499 23768
1.46	0.92785 49630 34106	0.13741 65392 82282	-0.20062 81473 52131
1.48	0.93056 33766 66669	0.13343 53039 51002	-0.19748 42498 47483
1.50	0.93319 27987 31142	0.12951 75956 65892	-0.19427 63934 98838
1.52	0.93574 45121 81064	0.12566 46367 89088	-0.19101 02479 19414
1.54	0.93821 98232 88188	0.12187 75370 32402	-0.18769 14070 29899
1.56	0.94062 00594 05207	0.11815 72950 59582	-0.18432 53802 92948
1.58	0.94294 65667 62246	0.11450 48002 59292	-0.18091 75844 09682
1.60	0.94520 07083 00442	0.11092 08346 79456	-0.17747 33354 87129
1.62	0.94738 38615 45748	0.10740 60751 13484	-0.17399 78416 83844
1.64	0.94949 74165 25897	0.10396 10953 28764	-0.17049 61963 39173
1.66	0.95154 27737 33277	0.10058 63684 27691	-0.16697 33715 89966
1.68	0.95352 13421 36280	0.09728 22693 31467	-0.16343 42124 76865
1.70	0.95543 45372 41457	0.09404 90773 76887	-0.15988 34515 40708
1.72	0.95728 37792 08671	0.09088 69790 16283	-0.15632 56039 08007
1.74	0.95907 04910 21193	0.08779 60706 10906	-0.15276 51628 62976
1.76	0.96079 60967 12518	0.08477 63613 08022	-0.14920 63959 02119
1.78	0.96246 20196 51483	0.08182 77759 92143	-0.14565 34412 66014
1.80	0.96406 96808 87074	0.07895 01583 00894	-0.14211 02849 41609
1.82	0.96562 04975 54110	0.07614 32736 96207	-0.13858 07581 27097
1.84	0.96711 58813 40836	0.07340 68125 81657	-0.13506 85351 50249
1.86	0.96855 72370 19248	0.07074 03934 56983	-0.13157 71318 29989
1.88	0.96994 59610 38800	0.06814 35661 01045	-0.12810 99042 69964
1.90	0.97128 34401 83998	0.06561 58147 74677	-0.12467 00480 71886
1.92	0.97257 10502 96163	0.06315 65614 35199	-0.12126 05979 55581
1.94	0.97381 01550 59548	0.06076 51689 54565	-0.11788 44277 71856
1.96	0.97500 21048 51780	0.05844 09443 33451	-0.11454 42508 93565
1.98	0.97614 82356 58492	0.05618 31419 03868	-0.11124 26209 69659
2.00	0.97724 98680 51821	0.05399 09665 13188	-0.10798 19330 26376
	$\left[\begin{matrix}(-6)1\\10\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-6)9\\10\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-5)2\\10\end{matrix}\right]$

$Z(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $\quad P(x)=\int_{-\infty}^{x} Z(t)dt$ $\quad Z^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}Z(x)$ $\quad He_n(x)=(-1)^n Z^{(n)}(x)/Z(x)$

Таблица 26.1. Функция нормального распределения и ее производные

x	$Z^{(2)}(x)$	$Z^{(3)}(x)$	$Z^{(4)}(x)$	$Z^{(5)}(x)$	$Z^{(6)}(x)$
1.00	0.00000 00000	0.48394 145	−0.48394 145	−1.45182 435	3.87153 159
1.02	0.00958 01309	0.47397 745	−0.51219 739	−1.37346 846	3.96192 478
1.04	0.01895 54356	0.46346 412	−0.53886 899	−1.29343 272	4.03951 497
1.06	0.02811 52466	0.45243 346	−0.56392 521	−1.21197 312	4.10431 754
1.08	0.03704 95422	0.44091 805	−0.58734 012	−1.12934 487	4.15639 308
1.10	0.04574 89572	0.42895 094	−0.60909 290	−1.04580 155	4.19584 622
1.12	0.05420 47909	0.41656 552	−0.62916 776	−0.96159 420	4.22282 430
1.14	0.06240 90139	0.40379 549	−0.64755 390	−0.87697 050	4.23751 585
1.16	0.07035 42718	0.39067 467	−0.66424 543	−0.79217 397	4.24014 894
1.18	0.07803 38880	0.37723 697	−0.67924 129	−0.70744 317	4.23098 941
1.20	0.08544 18642	0.36351 629	−0.69254 515	−0.62301 100	4.21033 894
1.22	0.09257 28784	0.34954 639	−0.70416 524	−0.53910 399	4.17853 305
1.24	0.09942 22822	0.33536 083	−0.71411 427	−0.45594 161	4.13593 896
1.26	0.10598 60955	0.32099 285	−0.72240 928	−0.37373 571	4.08295 339
1.28	0.11226 09995	0.30647 534	−0.72907 143	−0.29268 993	4.02000 029
1.30	0.11824 43285	0.29184 071	−0.73412 591	−0.21299 916	3.94752 847
1.32	0.12393 40598	0.27712 083	−0.73760 168	−0.13484 911	3.86600 921
1.34	0.12932 88019	0.26234 695	−0.73953 132	−0.05841 584	3.77593 384
1.36	0.13442 77819	0.24754 965	−0.73995 087	+0.01613 459	3.67781 128
1.38	0.13923 08305	0.23275 873	−0.73889 953	0.08864 645	3.57216 556
1.40	0.14373 83670	0.21800 319	−0.73641 957	0.15897 463	3.45953 335
1.42	0.14795 13818	0.20331 117	−0.73255 600	0.22698 486	3.34046 152
1.44	0.15187 14187	0.18870 986	−0.72735 645	0.29255 386	3.21550 469
1.46	0.15550 05559	0.17422 548	−0.72087 087	0.35556 954	3.08522 283
1.48	0.15884 13858	0.15988 325	−0.71315 137	0.41593 103	2.95017 891
1.50	0.16189 69946	0.14570 730	−0.70425 193	0.47354 871	2.81093 657
1.52	0.16467 09400	0.13172 067	−0.69422 823	0.52834 425	2.66805 791
1.54	0.16716 72298	0.11794 528	−0.68313 742	0.58025 051	2.52210 132
1.56	0.16939 02982	0.10440 190	−0.67103 785	0.62921 147	2.37361 937
1.58	0.17134 49831	0.09111 010	−0.65798 890	0.67518 208	2.22315 681
1.60	0.17303 65021	0.07808 827	−0.64405 073	0.71812 810	2.07124 871
1.62	0.17447 04284	0.06535 359	−0.62928 410	0.75802 588	1.91841 857
1.64	0.17565 26667	0.05292 202	−0.61375 011	0.79486 211	1.76517 671
1.66	0.17658 94284	0.04080 829	−0.59751 005	0.82863 352	1.61201 862
1.68	0.17728 72076	0.02902 592	−0.58062 516	0.85934 661	1.45942 351
1.70	0.17775 27562	0.01758 718	−0.56315 647	0.88701 729	1.30785 296
1.72	0.17799 30597	+0.00650 315	−0.54516 459	0.91167 051	1.15774 966
1.74	0.17801 53128	−0.00421 632	−0.52670 954	0.93333 988	1.00953 633
1.76	0.17782 68955	−0.01456 254	−0.50785 061	0.95206 725	0.86361 469
1.78	0.17743 53495	−0.02452 804	−0.48864 614	0.96790 228	0.72036 463
1.80	0.17684 83546	−0.03410 647	−0.46915 342	0.98090 203	0.58014 345
1.82	0.17607 37061	−0.04329 263	−0.44942 853	0.99113 045	0.44328 526
1.84	0.17511 92921	−0.05208 243	−0.42952 621	0.99865 794	0.31010 045
1.86	0.17399 30717	−0.06047 285	−0.40949 971	1.00356 087	0.18087 536
1.88	0.17270 30539	−0.06846 193	−0.38940 073	1.00592 110	+0.05587 197
1.90	0.17125 72766	−0.07604 873	−0.36927 924	1.00582 548	−0.06467 219
1.92	0.16966 37866	−0.08323 327	−0.34918 347	1.00336 537	−0.18054 414
1.94	0.16793 06209	−0.09001 655	−0.32915 976	0.99863 613	−0.29155 530
1.96	0.16606 57874	−0.09640 044	−0.30925 250	0.99173 666	−0.39754 137
1.98	0.16407 72476	−0.10238 771	−0.28950 408	0.98276 891	−0.49836 204
2.00	0.16197 28995	−0.10798 193	−0.26995 483	0.97183 740	−0.59390 063
	$\left[\begin{matrix}(-5)4\\6\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-5)7\\6\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-1)2\\6\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-1)4\\6\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}(-3)1\\7\end{matrix}\right]$

$P(-x)=1-P(x)$ $\qquad Z(-x)=Z(x)$ $\qquad Z^{(n)}(-x)=(-1)^n Z^{(n)}(x)$

Таблица 26.1. Функция нормального распределения и ее производные

x	$P(x)$	$Z(x)$	$Z^{(1)}(x)$
2.00	0.97724 98680 51821	0.05399 09665 13188	−0.10798 19330 26376
2.02	0.97830 83062 32353	0.05186 35766 82821	−0.10476 44248 99298
2.04	0.97932 48371 33930	0.04980 00877 35071	−0.10159 71789 79544
2.06	0.98030 07295 90623	0.04779 95748 82077	−0.09846 71242 57079
2.08	0.98123 72335 65062	0.04586 10762 71055	−0.09539 10386 43794
2.10	0.98213 55794 37184	0.04398 35959 80427	−0.09236 55515 58897
2.12	0.98299 69773 52367	0.04216 61069 61770	−0.08939 21467 58953
2.14	0.98382 26166 27834	0.04040 75539 22860	−0.08647 21653 94921
2.16	0.98461 36652 16075	0.03870 68561 47456	−0.08360 68092 78504
2.18	0.98537 12692 24011	0.03706 29102 47806	−0.08079 71443 40218
2.20	0.98609 65524 86502	0.03547 45928 46231	−0.07804 41042 61709
2.22	0.98679 06161 92744	0.03394 07631 82449	−0.07534 84942 65037
2.24	0.98745 45385 64054	0.03246 02656 43697	−0.07271 09950 41882
2.26	0.98808 93745 81453	0.03103 19322 15008	−0.07013 21668 05919
2.28	0.98869 61557 61447	0.02965 45848 47341	−0.06761 24534 51938
2.30	0.98927 58899 78324	0.02832 70377 41601	−0.06515 21868 05683
2.32	0.98982 95613 31281	0.02704 80995 46882	−0.06275 15909 48766
2.34	0.99035 81300 54642	0.02581 65754 71588	−0.06041 07866 03515
2.36	0.99086 25324 69428	0.02463 12693 06382	−0.05812 97955 63063
2.38	0.99134 36809 74484	0.02349 09853 58201	−0.05590 85451 52519
2.40	0.99180 24640 75404	0.02239 45302 94843	−0.05374 68727 07623
2.42	0.99223 97464 49447	0.02134 07148 99923	−0.05164 45300 57813
2.44	0.99265 63690 44652	0.02032 83557 38226	−0.04960 11880 01271
2.46	0.99305 31492 11376	0.01935 62767 31737	−0.04761 64407 60073
2.48	0.99343 08808 64453	0.01842 33106 46862	−0.04568 98104 04218
2.50	0.99379 03346 74224	0.01752 83004 93569	−0.04382 07512 33921
2.52	0.99413 22582 84668	0.01667 01008 37381	−0.04200 86541 10200
2.54	0.99445 73765 56918	0.01584 75790 25361	−0.04025 28507 24416
2.56	0.99476 63918 36444	0.01505 96163 27377	−0.03855 26177 98086
2.58	0.99505 99842 42230	0.01430 51089 94150	−0.03690 71812 04906
2.60	0.99533 88119 76281	0.01358 29692 33686	−0.03531 57200 07583
2.62	0.99560 35116 51879	0.01289 21261 07895	−0.03377 73704 02686
2.64	0.99585 46986 38964	0.01223 15263 51278	−0.03229 12295 67374
2.66	0.99609 29674 25147	0.01160 01351 13703	−0.03085 63594 02449
2.68	0.99631 88919 90825	0.01099 69366 29406	−0.02947 17901 66807
2.70	0.99653 30261 96960	0.01042 09348 14423	−0.02813 65239 98941
2.72	0.99673 59041 84109	0.00987 11537 94751	−0.02684 95383 21723
2.74	0.99692 80407 81350	0.00934 66383 67612	−0.02560 97891 27258
2.76	0.99710 99319 23774	0.00884 64543 98237	−0.02441 62141 39135
2.78	0.99728 20550 77299	0.00836 96891 54653	−0.02326 77358 49935
2.80	0.99744 48696 69572	0.00791 54515 82980	−0.02216 32644 32344
2.82	0.99759 88175 25811	0.00748 28725 25781	−0.02110 17005 22701
2.84	0.99774 43233 08458	0.00707 11048 86019	−0.02008 19378 76295
2.86	0.99788 17949 59596	0.00667 93237 39203	−0.01910 28658 94119
2.88	0.99801 16241 45106	0.00630 67263 96266	−0.01816 33720 21246
2.90	0.99813 41866 99616	0.00595 25324 19776	−0.01726 23440 17350
2.92	0.99824 98430 71324	0.00561 59835 95991	−0.01639 86721 00294
2.94	0.99835 89387 65843	0.00529 63438 65311	−0.01557 12509 64014
2.96	0.99846 18047 88262	0.00499 28992 13612	−0.01477 89816 72293
2.98	0.99855 87580 82660	0.00470 49575 26934	−0.01402 07734 30263
3.00	0.99865 01019 68370	0.00443 18484 11938	−0.01329 55452 35814
	$\begin{bmatrix}(-6)5\\10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)8\\10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-6)7\\10\end{bmatrix}$

$Z(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $\quad P(x)=\int_{-\infty}^{x} Z(t)dt$ $\quad Z^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}Z(x)$ $\quad He_n(x)=(-1)^n Z^{(n)}(x)/Z(x)$

Таблица 26.1. Функция нормального распределения и ее производные

x	$Z^{(2)}(x)$	$Z^{(3)}(x)$	$Z^{(4)}(x)$	$Z^{(5)}(x)$	$Z^{(6)}(x)$
2.00	0.16197 28995	-0.10798 193	-0.26995 483	0.97183 740	-0.59390 063
2.02	0.15976 05616	-0.11318 748	-0.25064 297	0.95904 873	-0.68406 360
2.04	0.15744 79574	-0.11800 948	-0.23160 454	0.94451 117	-0.76878 007
2.06	0.15504 27011	-0.12245 372	-0.21287 345	0.92833 417	-0.84800 114
2.08	0.15255 22841	-0.12652 667	-0.19448 137	0.91062 795	-0.92169 927
2.10	0.14998 40623	-0.13023 543	-0.17645 779	0.89150 307	-0.98986 750
2.12	0.14734 52442	-0.13358 762	-0.15882 997	0.87107 003	-1.05251 862
2.14	0.14464 28800	-0.13659 143	-0.14162 297	0.84943 890	-1.10968 436
2.16	0.14188 38519	-0.13925 550	-0.12485 967	0.82671 890	-1.16141 446
2.18	0.13907 48644	-0.14158 892	-0.10856 076	0.80301 811	-1.20777 570
2.20	0.13622 24365	-0.14360 115	-0.09274 478	0.77844 311	-1.24885 097
2.22	0.13333 28941	-0.14530 204	-0.07742 816	0.75309 866	-1.28473 823
2.24	0.13041 23633	-0.14670 170	-0.06262 527	0.72708 743	-1.31554 947
2.26	0.12746 67648	-0.14781 055	-0.04834 844	0.70050 969	-1.34140 971
2.28	0.12450 18090	-0.14863 922	-0.03460 801	0.67346 314	-1.36245 589
2.30	0.12152 29919	-0.14919 851	-0.02141 241	0.64604 257	-1.37883 587
2.32	0.11853 55915	-0.14949 939	-0.00876 819	0.61833 976	-1.39070 730
2.34	0.11554 46652	-0.14955 294	+0.00331 989	0.59044 323	-1.39823 661
2.36	0.11255 50482	-0.14937 032	0.01484 882	0.56243 808	-1.40159 796
2.38	0.10957 13521	-0.14896 273	0.02581 724	0.53440 589	-1.40097 220
2.40	0.10659 79642	-0.14834 137	0.03622 539	0.50642 453	-1.39654 584
2.42	0.10363 90478	-0.14751 744	0.04607 505	0.47856 812	-1.38851 010
2.44	0.10069 85430	-0.14650 207	0.05536 942	0.45090 689	-1.37705 991
2.46	0.09778 01675	-0.14530 633	0.06411 307	0.42350 717	-1.36239 299
2.48	0.09488 74192	-0.14394 118	0.07231 187	0.39643 129	-1.34470 892
2.50	0.09202 35776	-0.14241 744	0.07997 287	0.36973 759	-1.32420 833
2.52	0.08919 17075	-0.14074 579	0.08710 428	0.34348 039	-1.30109 199
2.54	0.08639 46618	-0.13893 674	0.09371 533	0.31771 001	-1.27556 010
2.56	0.08363 50852	-0.13700 058	0.09981 624	0.29247 277	-1.24781 146
2.58	0.08091 54185	-0.13494 742	0.10541 808	0.26781 102	-1.21804 284
2.60	0.07823 79028	-0.13278 711	0.11053 277	+0.24376 323	-1.18644 824
2.62	0.07560 45843	-0.13052 927	0.11517 293	0.22036 399	-1.15321 833
2.64	0.07301 73197	-0.12818 326	0.11935 186	0.19764 415	-1.11853 985
2.66	0.07047 77809	-0.12575 818	0.12308 341	0.17563 084	-1.08259 509
2.68	0.06798 74610	-0.12326 282	0.12638 196	0.15434 760	-1.04556 139
2.70	0.06554 76800	-0.12070 569	0.12926 232	0.13381 449	-1.00761 072
2.72	0.06315 95904	-0.11809 501	0.13173 965	0.11404 817	-0.96890 932
2.74	0.06082 41838	-0.11543 869	0.13382 945	0.09506 206	-0.92961 727
2.76	0.05854 22966	-0.11274 431	0.13554 741	0.07686 640	-0.88988 829
2.78	0.05631 46165	-0.11001 916	0.13690 942	0.05946 846	-0.84986 942
2.80	0.05414 16888	-0.10727 020	0.13793 149	0.04287 262	-0.80970 080
2.82	0.05202 39229	-0.10450 406	0.13862 969	0.02708 053	-0.76951 553
2.84	0.04996 15987	-0.10172 706	0.13902 007	+0.01209 127	-0.72943 954
2.86	0.04795 48727	-0.09894 520	0.13911 867	-0.00209 857	-0.68959 143
2.88	0.04600 37850	-0.09616 416	0.13894 142	-0.01549 465	-0.65008 248
2.90	0.04410 82652	-0.09338 928	0.13850 412	-0.02810 482	-0.61101 661
2.92	0.04226 81389	-0.09062 562	0.13782 240	-0.03993 892	-0.57249 036
2.94	0.04048 31340	-0.08787 791	0.13691 166	-0.05100 863	-0.53459 292
2.96	0.03875 28865	-0.08515 058	0.13578 706	-0.06132 737	-0.49740 627
2.98	0.03707 69473	-0.08244 776	0.13446 347	-0.07091 012	-0.46100 520
3.00	0.03545 47873	-0.07977 327	0.13295 545	-0.07977 327	-0.42545 745
	$\begin{bmatrix}(-5)1\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-5)7\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)2\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)7\\6\end{bmatrix}$

$P(-x)=1-P(x)$ $\quad Z(-x)=Z(x)$ $\quad Z^{(n)}(-x)=(-1)^n Z^{(n)}(x)$

Таблица 26.1. Функция нормального распределения и ее производные

x	$P(x)$	$Z(x)$	$Z^{(1)}(x)$
3.00	0.99865 01020	(−3) 4.43184 8412	(−2) −1.32955 45
3.05	0.99885 57932	(−3) 3.80976 2098	(−2) −1.16197 74
3.10	0.99903 23968	(−3) 3.26681 9056	(−2) −1.01271 39
3.15	0.99918 36477	(−3) 2.79425 8415	(−3) −8.80191 40
3.20	0.99931 28621	(−3) 2.38408 8201	(−3) −7.62908 22
3.25	0.99942 29750	(−3) 2.02904 8057	(−3) −6.59440 62
3.30	0.99951 65759	(−3) 1.72256 8939	(−3) −5.68447 75
3.35	0.99959 59422	(−3) 1.45873 0805	(−3) −4.88674 82
3.40	0.99966 30707	(−3) 1.23221 9168	(−3) −4.18954 52
3.45	0.99971 97067	(−3) 1.03828 1296	(−3) −3.58207 05
3.50	0.99976 73709	(−4) 8.72682 6950	(−3) −3.05438 94
3.55	0.99980 73844	(−4) 7.31664 4628	(−3) −2.59740 88
3.60	0.99984 08914	(−4) 6.11901 9301	(−3) −2.20284 69
3.65	0.99986 88798	(−4) 5.10464 9743	(−3) −1.86319 72
3.70	0.99989 22003	(−4) 4.24780 2706	(−3) −1.57168 70
3.75	0.99991 15827	(−4) 3.52595 6824	(−3) −1.32223 38
3.80	0.99992 76520	(−4) 2.91946 9258	(−3) −1.10939 83
3.85	0.99994 09411	(−4) 2.41126 5802	(−4) −9.28337 33
3.90	0.99995 19037	(−4) 1.98655 4714	(−4) −7.74756 34
3.95	0.99996 09244	(−4) 1.63256 4088	(−4) −6.44862 81
4.00	0.99996 83288	(−4) 1.33830 2258	(−4) −5.35320 90
4.05	0.99997 43912	(−4) 1.09434 0434	(−4) −4.43207 88
4.10	0.99997 93425	(−5) 8.92616 5718	(−4) −3.65972 79
4.15	0.99998 33762	(−5) 7.26259 3030	(−4) −3.01397 61
4.20	0.99998 66543	(−5) 5.89430 6776	(−4) −2.47560 88
4.25	0.99998 93115	(−5) 4.77186 3654	(−4) −2.02804 21
4.30	0.99999 14601	(−5) 3.85351 9674	(−4) −1.65701 35
4.35	0.99999 31931	(−5) 3.10414 0706	(−4) −1.35030 12
4.40	0.99999 45875	(−5) 2.49424 7129	(−4) −1.09746 87
4.45	0.99999 57065	(−5) 1.99917 9671	(−5) −8.89634 95
4.50	0.99999 66023	(−5) 1.59837 4111	(−5) −7.19268 35
4.55	0.99999 73177	(−5) 1.27473 3238	(−5) −5.80003 62
4.60	0.99999 78875	(−5) 1.01408 5207	(−5) −4.66479 20
4.65	0.99999 83403	(−6) 8.04718 2456	(−5) −3.74193 98
4.70	0.99999 86992	(−6) 6.36982 5179	(−5) −2.99381 78
4.75	0.99999 89829	(−6) 5.02950 7289	(−5) −2.38901 60
4.80	0.99999 92067	(−6) 3.96129 9091	(−5) −1.90142 36
4.85	0.99999 93827	(−6) 3.11217 5579	(−5) −1.50940 52
4.90	0.99999 95208	(−6) 2.43896 0746	(−5) −1.19509 08
4.95	0.99999 96289	(−6) 1.90660 0903	(−6) −9.43767 45
5.00	0.99999 97133	(−6) 1.48671 9515	(−6) −7.43359 76
	$\left[\begin{matrix}(-6)3\\7\end{matrix}\right]$		

Таблица 26.2. Функция $-\lg Q(x)$ для больших значений аргумента

x	$-\log Q(x)$	x	$-\log Q(x)$	x	$-\log Q(x)$
5	6.54265	15	50.43522	25	137.51475
6	9.00586	16	57.19458	26	148.60624
7	11.89285	17	64.38658	27	160.13139
8	15.20614	18	72.01140	28	172.09024
9	18.94746	19	80.06919	29	184.48283
10	23.11805	20	88.56010	30	197.30921
11	27.71982	21	97.48422	31	210.56940
12	32.75044	22	106.84167	32	224.26344
13	38.21345	23	116.63253	33	238.39135
14	44.10827	24	126.85686	34	252.95315
	$\left[\begin{matrix}(-2)5\\5\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-2)5\\4\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-2)5\\3\end{matrix}\right]$

Взято из [26.11]. Обнаруженные ошибки исправлены.

Таблица 26.1. Функция нормального распределения и ее производные

x	$Z^{(2)}(x)$	$Z^{(3)}(x)$	$Z^{(4)}(x)$	$Z^{(5)}(x)$	$Z^{(6)}(x)$
3.00	(-2) 3.54547 87	(-2) -7.97732 71	(-1) 1.32955 45	(-2) -7.97732 71	(-1) -4.25457 45
3.05	(-2) 3.16305 50	(-2) -7.32336 28	(-1) 1.28470 92	(-2) -9.89017 82	(-1) -3.40704 15
3.10	(-2) 2.81273 12	(-2) -6.69403 89	(-1) 1.23133 27	(-1) -1.13951 58	(-1) -2.62416 45
3.15	(-2) 2.49317 71	(-2) -6.09312 50	(-1) 1.17138 12	(-1) -1.25260 09	(-1) -1.91121 33
3.20	(-2) 2.20289 75	(-2) -5.52345 55	(-1) 1.10663 65	(-1) -1.33185 47	(-1) -1.27124 77
3.25	(-2) 1.94027 72	(-2) -4.98701 97	(-1) 1.03869 82	(-1) -1.38096 14	(-2) -7.05366 66
3.30	(-2) 1.70362 07	(-2) -4.48505 27	(-2) 9.68981 20	(-1) -1.40361 69	(-2) -2.12970 34
3.35	(-2) 1.49118 76	(-2) -4.01812 87	(-2) 8.98716 85	(-1) -1.40345 00	(-2) +2.07973 11
3.40	(-2) 1.30122 34	(-2) -3.58625 07	(-2) 8.28958 19	(-1) -1.38395 76	(-2) 5.60664 85
3.45	(-2) 1.13198 62	(-2) -3.18893 82	(-2) 7.60587 84	(-1) -1.34845 27	(-2) 8.49222 78
3.50	(-3) 9.81768 03	(-2) -2.82531 02	(-2) 6.94328 17	(-1) -1.30002 45	(-1) 1.07844 49
3.55	(-3) 8.48913 69	(-2) -2.49416 18	(-2) 6.30753 35	(-1) -1.24150 96	(-1) 1.25359 25
3.60	(-3) 7.31834 71	(-2) -2.19403 56	(-2) 5.70302 39	(-1) -1.17547 44	(-1) 1.38019 58
3.65	(-3) 6.29020 46	(-2) -1.92328 53	(-2) 5.13292 98	(-1) -1.10420 53	(-1) 1.46388 44
3.70	(-3) 5.39046 16	(-2) -1.68013 34	(-2) 4.59935 51	(-1) -1.02970 80	(-1) 1.51024 21
3.75	(-3) 4.60578 11	(-2) -1.46272 12	(-2) 4.10347 00	(-2) -9.53712 78	(-1) 1.52468 79
3.80	(-3) 3.92376 67	(-2) -1.26915 17	(-2) 3.64564 64	(-2) -8.77684 95	(-1) 1.51237 96
3.85	(-3) 3.33297 22	(-2) -1.09752 68	(-2) 3.22558 66	(-2) -8.02840 11	(-1) 1.47814 11
3.90	(-3) 2.82289 42	(-3) -9.45977 49	(-2) 2.84244 39	(-2) -7.30162 14	(-1) 1.42641 04
3.95	(-3) 2.38395 17	(-3) -8.12688 36	(-2) 2.49493 35	(-2) -6.60423 39	(-1) 1.36120 56
4.00	(-3) 2.00745 34	(-3) -6.95917 17	(-2) 2.18143 27	(-2) -5.94206 20	(-1) 1.28610 85
4.05	(-3) 1.68555 79	(-3) -5.94009 36	(-2) 1.90007 05	(-2) -5.31924 82	(-1) 1.20426 03
4.10	(-3) 1.41122 68	(-3) -5.05408 43	(-2) 1.64880 65	(-2) -4.73847 30	(-1) 1.11837 07
4.15	(-3) 1.17817 42	(-3) -4.28662 75	(-2) 1.42549 82	(-2) -4.20116 64	(-1) 1.03073 50
4.20	(-4) 9.80812 65	(-3) -3.62429 14	(-2) 1.22795 86	(-2) -3.70770 95	(-2) 9.43258 69
4.25	(-4) 8.14199 24	(-3) -3.05473 83	(-2) 1.05400 40	(-2) -3.25762 18	(-2) 8.57487 24
4.30	(-4) 6.73980 59	(-3) -2.56671 38	(-3) 9.01492 78	(-2) -2.84973 34	(-2) 7.74638 98
4.35	(-4) 5.56339 62	(-3) -2.15001 71	(-3) 7.68355 55	(-2) -2.48233 98	(-2) 6.95640 04
4.40	(-4) 4.57943 77	(-3) -1.79545 89	(-3) 6.52618 76	(-2) -2.15333 90	(-2) 6.21159 79
4.45	(-4) 3.75895 76	(-3) -1.49480 91	(-3) 5.52421 34	(-2) -1.86035 13	(-2) 5.51645 66
4.50	(-4) 3.07687 02	(-3) -1.24073 79	(-3) 4.66025 95	(-2) -1.60082 16	(-2) 4.87356 75
4.55	(-4) 2.51154 32	(-3) -1.02675 14	(-3) 3.91825 60	(-2) -1.37210 59	(-2) 4.28395 39
4.60	(-4) 2.04439 58	(-4) -8.47126 22	(-3) 3.28346 19	(-2) -1.17154 20	(-2) 3.74736 21
4.65	(-4) 1.65953 02	(-4) -6.96842 75	(-3) 2.74245 97	(-3) -9.96506 67	(-2) 3.26252 61
4.70	(-4) 1.34339 61	(-4) -5.71519 82	(-3) 2.28312 43	(-3) -8.44460 51	(-2) 2.82740 22
4.75	(-4) 1.08448 75	(-4) -4.67351 25	(-3) 1.89457 22	(-3) -7.12981 28	(-2) 2.43937 50
4.80	(-5) 8.73070 32	(-4) -3.81045 28	(-3) 1.56709 63	(-3) -5.99788 09	(-2) 2.09543 47
4.85	(-5) 7.00939 74	(-4) -3.09767 67	(-3) 1.29209 13	(-3) -5.02757 21	(-2) 1.79232 68
4.90	(-5) 5.61204 87	(-4) -2.51088 57	(-3) 1.06197 25	(-3) -4.19931 11	(-2) 1.52667 62
4.95	(-5) 4.48098 88	(-4) -2.02933 60	(-4) 8.70091 63	(-3) -3.49521 92	(-2) 1.29508 77
5.00	(-5) 3.56812 68	(-4) -1.63539 15	(-4) 7.10651 93	(-3) -2.89910 31	(-2) 1.09422 56

Таблица 26.2. Функция $-\lg Q(x)$ для больших значений аргумента

x	$-\log Q(x)$	x	$-\log Q(x)$	x	$-\log Q(x)$
35	267.94888	45	441.77568	100	2173.87154
36	283.37855	46	461.51561	150	4888.30812
37	299.24218	47	481.74954	200	8688.58977
38	315.53979	48	502.38776	250	13574.49960
39	332.27139	49	523.45999	300	19546.12790
40	349.43701	50	544.96634	350	26603.48018
41	367.03664	60	783.90743	400	34746.55970
42	385.07032	70	1066.26576	450	43975.36860
43	403.53804	80	1392.04459	500	54289.90830
44	422.43983	90	1761.24604		
	$\begin{bmatrix}(-2)5\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(0)5\\5\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(+2)1\\9\end{bmatrix}$

$$Q(x)=1-P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt \quad Z(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad P(x)=\int_{-\infty}^{x} Z(t)\,dt \quad Z^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}Z(x)$$

$$He_n(x)=(-1)^n Z^{(n)}(x)/Z(x) \qquad P(-x)=1-P(x) \qquad Z(-x)=Z(x) \qquad Z^{(n)}(-x)=(-1)^n Z^{(n)}(x)$$

Таблица 26.3. Производные высокого порядка от функции нормального распределения

x	$Z^{(7)}(x)$	$Z^{(8)}(x)$	$Z^{(9)}(x)$	$Z^{(10)}(x)$	$Z^{(11)}(x)$	$Z^{(12)}(x)$
0.0	0.00000 00	(1) 4.18889 39	0.00000 00	(2)-3.77000 46	0.00000 00	(3) 4.14700 50
0.1	(0) 4.12640 51	(1) 4.00211 42	(1)-3.70133 55	(2)-3.56488 94	(2) 4.05782 44	(3) 3.88080 01
0.2	(0) 7.88604 35	(1) 3.46206 56	(1)-7.00124 79	(2)-2.97583 41	(2) 7.59641 48	(3) 3.12148 92
0.3	(1) 1.09518 61	(1) 2.62702 42	(1)-9.54959 57	(2)-2.07783 39	(3) 1.01729 46	(3) 1.98042 89
0.4	(1) 1.30711 60	(1) 1.58584 37	(2)-1.10912 65	(1)-9.83608 69	(3) 1.14847 09	(2)+6.22581 20
0.5	(1) 1.40908 65	(0)+4.46820 41	(2)-1.14961 02	(1)+1.72666 73	(3) 1.14097 69	(2)-7.60421 83
0.6	(1) 1.39704 30	(0)-6.75565 29	(2)-1.07710 05	(2) 1.25426 91	(3) 1.00184 44	(3)-1.98080 26
0.7	(1) 1.27812 14	(1)-1.67416 58	(1)-9.05305 52	(2) 2.14046 31	(2) 7.55473 11	(3)-2.88334 06
0.8	(1) 1.06929 69	(1)-2.46111 11	(1)-6.58548 60	(2) 2.74183 89	(2) 4.39201 49	(3)-3.36738 39
0.9	(0) 7.94982 72	(1)-2.97666 59	(1)-3.68086 24	(2) 3.01027 69	(1)+9.71613 18	(3)-3.39874 98
1.0	(0) 4.83941 45	(1)-3.19401 36	(0)-6.77518 03	(2) 2.94236 40	(2)-2.26484 60	(3)-3.01011 58
1.1	(0)+1.65937 85	(1)-3.11962 40	(1)+2.10408 36	(2) 2.57621 24	(2)-4.93791 72	(3)-2.29066 27
1.2	(0)-1.31434 07	(1)-2.78951 64	(1) 4.39889 22	(2) 1.98269 77	(2)-6.77812 94	(3)-1.36759 19
1.3	(0)-3.85379 20	(1)-2.26227 70	(1) 6.02399 37	(2) 1.25293 01	(2)-7.65280 28	(2)-3.83358 74
1.4	(0)-5.79719 45	(1)-1.61006 61	(1) 6.89184 82	(1)+4.84200 76	(2)-7.56972 92	(2)+5.27141 25
1.5	(0)-7.05769 71	(0)-9.09001 03	(1) 7.00965 92	(1)-2.33347 96	(2)-6.65963 73	(3) 1.25562 83
1.6	(0)-7.62276 66	(0)-2.30231 44	(1) 6.46658 36	(1)-8.27445 07	(2)-5.14267 14	(3) 1.73301 70
1.7	(0)-7.54545 38	(0)+3.67230 07	(1) 5.41207 19	(2)-1.25055 93	(2)-3.28612 11	(3) 1.93425 58
1.8	(0)-6.92967 04	(0) 8.41240 26	(1) 4.02950 39	(2)-1.48242 69	(2)-1.36113 54	(3) 1.87567 40
1.9	(0)-5.91207 57	(1) 1.16856 49	(1) 2.50938 72	(2)-1.52849 20	(1)+3.94747 58	(3) 1.60633 92
2.0	(0)-4.64322 31	(1) 1.34437 51	(1)+1.02582 84	(2)-1.41510 32	(2) 1.80437 81	(3) 1.19573 79
2.1	(0)-3.27029 67	(1) 1.37966 95	(0)-2.81068 72	(2)-1.18267 82	(2) 2.76469 29	(2) 7.20360 48
2.2	(0)-1.92318 65	(1) 1.29729 67	(1)-1.31550 35	(1)-8.78156 27	(2) 3.24744 73	(2)+2.51533 48
2.3	(-1)-7.04932 91	(1) 1.12731 97	(1)-2.02888 89	(1)-5.47943 26	(2) 3.28915 84	(2)-1.53768 85
2.4	(-1)+3.13162 82	(0) 9.02423 01	(1)-2.41634 55	(1)-2.32257 79	(2) 2.97376 42	(2)-4.58219 83
2.5	(0) 1.09209 53	(0) 6.53922 01	(1)-2.50848 12	(0)+3.85905 05	(2) 2.41200 50	(2)-6.45450 80
2.6	(0) 1.62218 61	(0) 4.08745 39	(1)-2.36048 69	(1) 2.45855 73	(2) 1.72126 20	(2)-7.17969 42
2.7	(0) 1.91766 20	(0) 1.87558 77	(1)-2.04053 83	(1) 3.82142 44	(2) 1.00875 37	(2)-6.92720 18
2.8	(0) 2.00992 65	(-2)+4.01113 24	(1)-1.61917 24	(1) 4.49758 25	(1)+3.59849 29	(2)-5.95491 88
2.9	(0) 1.94057 71	(0)-1.35055 73	(1)-1.16080 01	(1) 4.58182 18	(1)-1.67928 25	(2)-4.55301 20
3.0	(0) 1.75501 20	(0)-2.28683 38	(0)-7.17959 44	(1) 4.21202 87	(1)-5.45649 18	(2)-2.99628 41
3.1	(0) 1.49720 05	(0)-2.80440 64	(0)-3.28394 42	(1) 3.54198 84	(1)-7.69621 99	(2)-1.51035 91
3.2	(0) 1.20591 21	(0)-2.96904 52	(-1)-1.46351 84	(1) 2.71897 33	(1)-8.55436 26	(1)-2.53474 56
3.3	(-1) 9.12450 33	(0)-2.86200 69	(0)+2.14502 00	(1) 1.86794 96	(1)-8.30925 36	(1)+6.87309 15
3.4	(-1) 6.39748 51	(0)-2.56761 03	(0) 3.61188 70	(1) 1.08280 77	(1)-7.29343 32	(2) 1.28867 88
3.5	(-1) 4.02558 98	(0)-2.16386 79	(0) 4.35306 57	(0)+4.23908 09	(1)-5.83674 40	(2) 1.57656 15
3.6	(-1) 2.08414 13	(0)-1.71642 80	(0) 4.51182 76	(-1)-7.94727 62	(1)-4.22572 56	(2) 1.60868 13
3.7	(-2)+5.90352 21	(0)-1.27559 98	(0) 4.24743 76	(0)-4.23512 06	(1)-2.68044 29	(2) 1.45762 72
3.8	(-2)-4.80932 87	(-1)-8.75911 24	(0) 3.71320 90	(0)-6.22699 31	(1)-1.34695 16	(2) 1.19681 09
3.9	(-1)-1.18202 76	(-1)-5.37496 49	(0) 3.04185 84	(0)-7.02577 94	(0)-3.01804 44	(1) 8.90539 46
4.0	(-1)-1.57919 67	(-1)-2.68597 26	(0) 2.33774 64	(0)-6.93361 02	(0)+4.35697 68	(1) 5.88418 05
4.1	(-1)-1.74223 60	(-2)-6.85427 28	(0) 1.67481 40	(0)-6.24985 27	(0) 8.87625 64	(1) 3.23557 28
4.2	(-1)-1.73706 08	(-2)+6.92844 60	(0) 1.09865 39	(0)-5.23790 66	(1) 1.10126 69	(1)+1.13637 65
4.3	(-1)-1.62110 76	(-1) 1.54828 96	(-1) 6.31121 50	(0)-4.10728 31	(1) 1.13501 02	(0)-3.62532 62
4.4	(-1)-1.44109 96	(-1) 1.99272 00	(-1) 2.76082 94	(0)-3.00821 29	(1) 1.04753 07	(1)-1.30010 10
4.5	(-1)-1.23261 24	(-1) 2.13525 86	(-2)+2.52235 61	(0)-2.03523 88	(0) 8.90633 89	(1)-1.76908 98
4.6	(-1)-1.02086 14	(-1) 2.07280 89	(-1)-1.36802 99	(0)-1.23623 43	(0) 7.05470 76	(1)-1.88530 78
4.7	(-2)-8.22202 74	(-1) 1.88517 13	(-1)-2.28268 33	(-1)-6.23793 04	(0) 5.21451 06	(1)-1.76464 76
4.8	(-2)-6.45935 81	(-1) 1.63368 76	(-1)-2.67421 39	(-1)-1.86696 14	(0) 3.57035 54	(1)-1.50840 48
4.9	(-2)-4.96112 66	(-1) 1.36227 87	(-1)-2.70626 44	(-1)+1.00018 72	(0) 2.21617 27	(1)-1.19594 52
5.0	(-2)-3.73166 60	(-1) 1.09987 51	(-1)-2.51404 27	(-1) 2.67133 76	(0) 1.17837 39	(0)-8.83034 08

$$Z(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad Z^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}Z(x) \qquad He_n(x)=(-1)^nZ^{(n)}(x)/Z(x) \qquad Z^{(n)}(-x)=(-1)^nZ^{(n)}(x)$$

Таблица 26.4. Значения $Z(x)$ как функции $P(x)$ и $Q(x)$

$Q(x)$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	
0.00	0.00000	0.00337	0.00634	0.00915	0.01185	0.01446	0.01700	0.01949	0.02192	0.02431	0.02665	0.99
0.01	0.02665	0.02896	0.03123	0.03348	0.03569	0.03787	0.04003	0.04216	0.04427	0.04635	0.04842	0.98
0.02	0.04842	0.05046	0.05249	0.05449	0.05648	0.05845	0.06040	0.06233	0.06425	0.06615	0.06804	0.97
0.03	0.06804	0.06992	0.07177	0.07362	0.07545	0.07727	0.07908	0.08087	0.08265	0.08442	0.08617	0.96
0.04	0.08617	0.08792	0.08965	0.09137	0.09309	0.09479	0.09648	0.09816	0.09983	0.10149	0.10314	0.95
0.05	0.10314	0.10478	0.10641	0.10803	0.10964	0.11124	0.11284	0.11442	0.11600	0.11756	0.11912	0.94
0.06	0.11912	0.12067	0.12222	0.12375	0.12528	0.12679	0.12830	0.12981	0.13130	0.13279	0.13427	0.93
0.07	0.13427	0.13574	0.13720	0.13866	0.14011	0.14156	0.14299	0.14442	0.14584	0.14726	0.14867	0.92
0.08	0.14867	0.15007	0.15146	0.15285	0.15423	0.15561	0.15698	0.15834	0.15970	0.16105	0.16239	0.91
0.09	0.16239	0.16373	0.16506	0.16639	0.16770	0.16902	0.17033	0.17163	0.17292	0.17421	0.17550	0.90
0.10	0.17550	0.17678	0.17805	0.17932	0.18057	0.18184	0.18309	0.18433	0.18557	0.18681	0.18804	0.89
0.11	0.18804	0.18926	0.19048	0.19169	0.19290	0.19410	0.19530	0.19649	0.19768	0.19886	0.20004	0.88
0.12	0.20004	0.20121	0.20238	0.20354	0.20470	0.20585	0.20700	0.20814	0.20928	0.21042	0.21155	0.87
0.13	0.21155	0.21267	0.21379	0.21490	0.21601	0.21712	0.21822	0.21932	0.22041	0.22149	0.22258	0.86
0.14	0.22258	0.22365	0.22473	0.22580	0.22686	0.22792	0.22898	0.23003	0.23108	0.23212	0.23316	0.85
0.15	0.23316	0.23419	0.23522	0.23625	0.23727	0.23829	0.23930	0.24031	0.24131	0.24232	0.24331	0.84
0.16	0.24331	0.24430	0.24529	0.24628	0.24726	0.24823	0.24921	0.25017	0.25114	0.25210	0.25305	0.83
0.17	0.25305	0.25401	0.25495	0.25590	0.25684	0.25778	0.25871	0.25964	0.26056	0.26148	0.26240	0.82
0.18	0.26240	0.26331	0.26422	0.26513	0.26603	0.26693	0.26782	0.26871	0.26960	0.27049	0.27137	0.81
0.19	0.27137	0.27224	0.27311	0.27398	0.27485	0.27571	0.27657	0.27742	0.27827	0.27912	0.27996	0.80
0.20	0.27996	0.28080	0.28164	0.28247	0.28330	0.28413	0.28495	0.28577	0.28658	0.28739	0.28820	0.79
0.21	0.28820	0.28901	0.28981	0.29060	0.29140	0.29219	0.29298	0.29376	0.29454	0.29532	0.29609	0.78
0.22	0.29609	0.29686	0.29763	0.29840	0.29916	0.29991	0.30067	0.30142	0.30216	0.30291	0.30365	0.77
0.23	0.30365	0.30439	0.30512	0.30585	0.30658	0.30730	0.30802	0.30874	0.30945	0.31016	0.31087	0.76
0.24	0.31087	0.31158	0.31228	0.31298	0.31367	0.31436	0.31505	0.31574	0.31642	0.31710	0.31778	0.75
0.25	0.31778	0.31845	0.31912	0.31979	0.32045	0.32111	0.32177	0.32242	0.32307	0.32372	0.32437	0.74
0.26	0.32437	0.32501	0.32565	0.32628	0.32691	0.32754	0.32817	0.32879	0.32941	0.33003	0.33065	0.73
0.27	0.33065	0.33126	0.33187	0.33247	0.33307	0.33367	0.33427	0.33486	0.33545	0.33604	0.33662	0.72
0.28	0.33662	0.33720	0.33778	0.33836	0.33893	0.33950	0.34007	0.34063	0.34119	0.34175	0.34230	0.71
0.29	0.34230	0.34286	0.34341	0.34395	0.34449	0.34503	0.34557	0.34611	0.34664	0.34717	0.34769	0.70
0.30	0.34769	0.34822	0.34874	0.34925	0.34977	0.35028	0.35079	0.35129	0.35180	0.35230	0.35279	0.69
0.31	0.35279	0.35329	0.35378	0.35427	0.35475	0.35524	0.35572	0.35620	0.35667	0.35714	0.35761	0.68
0.32	0.35761	0.35808	0.35854	0.35900	0.35946	0.35991	0.36037	0.36082	0.36126	0.36171	0.36215	0.67
0.33	0.36215	0.36259	0.36302	0.36346	0.36389	0.36431	0.36474	0.36516	0.36558	0.36600	0.36641	0.66
0.34	0.36641	0.36682	0.36723	0.36764	0.36804	0.36844	0.36884	0.36923	0.36962	0.37001	0.37040	0.65
0.35	0.37040	0.37078	0.37116	0.37154	0.37192	0.37229	0.37266	0.37303	0.37340	0.37376	0.37412	0.64
0.36	0.37412	0.37447	0.37483	0.37518	0.37553	0.37588	0.37622	0.37656	0.37690	0.37724	0.37757	0.63
0.37	0.37757	0.37790	0.37823	0.37855	0.37888	0.37920	0.37951	0.37983	0.38014	0.38045	0.38076	0.62
0.38	0.38076	0.38106	0.38136	0.38166	0.38196	0.38225	0.38254	0.38283	0.38312	0.38340	0.38368	0.61
0.39	0.38368	0.38396	0.38423	0.38451	0.38478	0.38504	0.38531	0.38557	0.38583	0.38609	0.38634	0.60
0.40	0.38634	0.38659	0.38684	0.38709	0.38734	0.38758	0.38782	0.38805	0.38829	0.38852	0.38875	0.59
0.41	0.38875	0.38897	0.38920	0.38942	0.38964	0.38985	0.39007	0.39028	0.39049	0.39069	0.39089	0.58
0.42	0.39089	0.39109	0.39129	0.39149	0.39168	0.39187	0.39206	0.39224	0.39243	0.39261	0.39279	0.57
0.43	0.39279	0.39296	0.39313	0.39330	0.39347	0.39364	0.39380	0.39396	0.39411	0.39427	0.39442	0.56
0.44	0.39442	0.39457	0.39472	0.39486	0.39501	0.39514	0.39528	0.39542	0.39555	0.39568	0.39580	0.55
0.45	0.39580	0.39593	0.39605	0.39617	0.39629	0.39640	0.39651	0.39662	0.39673	0.39683	0.39694	0.54
0.46	0.39694	0.39703	0.39713	0.39723	0.39732	0.39741	0.39749	0.39758	0.39766	0.39774	0.39781	0.53
0.47	0.39781	0.39789	0.39796	0.39803	0.39809	0.39816	0.39822	0.39828	0.39834	0.39839	0.39844	0.52
0.48	0.39844	0.39849	0.39854	0.39858	0.39862	0.39866	0.39870	0.39873	0.39876	0.39879	0.39882	0.51
0.49	0.39882	0.39884	0.39886	0.39888	0.39890	0.39891	0.39892	0.39893	0.39894	0.39894	0.39894	0.50
	0.010	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	$P(x)$

Ошибка линейной интерполяции не превосходит 5 единиц пятого десятичного знака.

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad P(x) = 1 - Q(x) = \int_{-\infty}^{x} Z(t)\, dt$$

Взято из [26.15].

Таблица 26.5. Значения x как функции $P(x)$ и $Q(x)$

$Q(x)$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	
0.00	∞	3.09023	2.87816	2.74778	2.65207	2.57583	2.51214	2.45726	2.40892	2.36562	2.32635	0.99
0.01	2.32635	2.29037	2.25713	2.22621	2.19729	2.17009	2.14441	2.12007	2.09693	2.07485	2.05375	0.98
0.02	2.05375	2.03352	2.01409	1.99539	1.97737	1.95996	1.94313	1.92684	1.91104	1.89570	1.88079	0.97
0.03	1.88079	1.86630	1.85218	1.83842	1.82501	1.81191	1.79912	1.78661	1.77438	1.76241	1.75069	0.96
0.04	1.75069	1.73920	1.72793	1.71689	1.70604	1.69540	1.68494	1.67466	1.66456	1.65463	1.64485	0.95
0.05	1.64485	1.63523	1.62576	1.61644	1.60725	1.59819	1.58927	1.58047	1.57179	1.56322	1.55477	0.94
0.06	1.55477	1.54643	1.53820	1.53007	1.52204	1.51410	1.50626	1.49851	1.49085	1.48328	1.47579	0.93
0.07	1.47579	1.46838	1.46106	1.45381	1.44663	1.43953	1.43250	1.42554	1.41865	1.41183	1.40507	0.92
0.08	1.40507	1.39838	1.39174	1.38517	1.37866	1.37220	1.36581	1.35946	1.35317	1.34694	1.34076	0.91
0.09	1.34076	1.33462	1.32854	1.32251	1.31652	1.31058	1.30469	1.29884	1.29303	1.28727	1.28155	0.90
0.10	1.28155	1.27587	1.27024	1.26464	1.25908	1.25357	1.24808	1.24264	1.23723	1.23186	1.22653	0.89
0.11	1.22653	1.22123	1.21596	1.21072	1.20553	1.20036	1.19522	1.19012	1.18504	1.18000	1.17499	0.88
0.12	1.17499	1.17000	1.16505	1.16012	1.15522	1.15035	1.14551	1.14069	1.13590	1.13113	1.12639	0.87
0.13	1.12639	1.12168	1.11699	1.11232	1.10768	1.10306	1.09847	1.09390	1.08935	1.08482	1.08032	0.86
0.14	1.08032	1.07584	1.07138	1.06694	1.06252	1.05812	1.05374	1.04939	1.04505	1.04073	1.03643	0.85
0.15	1.03643	1.03215	1.02789	1.02365	1.01943	1.01522	1.01103	1.00686	1.00271	0.99858	0.99446	0.84
0.16	0.99446	0.99036	0.98627	0.98220	0.97815	0.97411	0.97009	0.96609	0.96210	0.95812	0.95416	0.83
0.17	0.95416	0.95022	0.94629	0.94238	0.93848	0.93458	0.93072	0.92686	0.92301	0.91918	0.91537	0.82
0.18	0.91537	0.91156	0.90777	0.90399	0.90023	0.89647	0.89273	0.88901	0.88529	0.88159	0.87790	0.81
0.19	0.87790	0.87422	0.87055	0.86689	0.86325	0.85962	0.85600	0.85239	0.84879	0.84520	0.84162	0.80
0.20	0.84162	0.83805	0.83450	0.83095	0.82742	0.82390	0.82038	0.81687	0.81338	0.80990	0.80642	0.79
0.21	0.80642	0.80296	0.79950	0.79606	0.79262	0.78919	0.78577	0.78237	0.77897	0.77557	0.77219	0.78
0.22	0.77219	0.76882	0.76546	0.76210	0.75875	0.75542	0.75208	0.74876	0.74545	0.74214	0.73885	0.77
0.23	0.73885	0.73556	0.73228	0.72900	0.72574	0.72248	0.71923	0.71599	0.71275	0.70952	0.70630	0.76
0.24	0.70630	0.70309	0.69988	0.69668	0.69349	0.69031	0.68713	0.68396	0.68080	0.67764	0.67449	0.75
0.25	0.67449	0.67135	0.66821	0.66508	0.66196	0.65884	0.65573	0.65262	0.64952	0.64643	0.64335	0.74
0.26	0.64335	0.64027	0.63719	0.63412	0.63106	0.62801	0.62496	0.62191	0.61887	0.61584	0.61281	0.73
0.27	0.61281	0.60979	0.60678	0.60376	0.60076	0.59776	0.59477	0.59178	0.58879	0.58581	0.58284	0.72
0.28	0.58284	0.57987	0.57691	0.57395	0.57100	0.56805	0.56511	0.56217	0.55924	0.55631	0.55338	0.71
0.29	0.55338	0.55047	0.54755	0.54464	0.54174	0.53884	0.53594	0.53305	0.53016	0.52728	0.52440	0.70
0.30	0.52440	0.52153	0.51866	0.51579	0.51293	0.51007	0.50722	0.50437	0.50153	0.49869	0.49585	0.69
0.31	0.49585	0.49302	0.49019	0.48736	0.48454	0.48173	0.47891	0.47610	0.47330	0.47050	0.46770	0.68
0.32	0.46770	0.46490	0.46211	0.45933	0.45654	0.45376	0.45099	0.44821	0.44544	0.44268	0.43991	0.67
0.33	0.43991	0.43715	0.43440	0.43164	0.42889	0.42615	0.42340	0.42066	0.41793	0.41519	0.41246	0.66
0.34	0.41246	0.40974	0.40701	0.40429	0.40157	0.39886	0.39614	0.39343	0.39073	0.38802	0.38532	0.65
0.35	0.38532	0.38262	0.37993	0.37723	0.37454	0.37186	0.36917	0.36649	0.36381	0.36113	0.35846	0.64
0.36	0.35846	0.35579	0.35312	0.35045	0.34779	0.34513	0.34247	0.33981	0.33716	0.33450	0.33185	0.63
0.37	0.33185	0.32921	0.32656	0.32392	0.32128	0.31864	0.31600	0.31337	0.31074	0.30811	0.30548	0.62
0.38	0.30548	0.30286	0.30023	0.29761	0.29499	0.29237	0.28976	0.28715	0.28454	0.28193	0.27932	0.61
0.39	0.27932	0.27671	0.27411	0.27151	0.26891	0.26631	0.26371	0.26112	0.25853	0.25594	0.25335	0.60
0.40	0.25335	0.25076	0.24817	0.24559	0.24301	0.24043	0.23785	0.23527	0.23269	0.23012	0.22754	0.59
0.41	0.22754	0.22497	0.22240	0.21983	0.21727	0.21470	0.21214	0.20957	0.20701	0.20445	0.20189	0.58
0.42	0.20189	0.19934	0.19678	0.19422	0.19167	0.18912	0.18657	0.18402	0.18147	0.17892	0.17637	0.57
0.43	0.17637	0.17383	0.17128	0.16874	0.16620	0.16366	0.16112	0.15858	0.15604	0.15351	0.15097	0.56
0.44	0.15097	0.14843	0.14590	0.14337	0.14084	0.13830	0.13577	0.13324	0.13072	0.12819	0.12566	0.55
0.45	0.12566	0.12314	0.12061	0.11809	0.11556	0.11304	0.11052	0.10799	0.10547	0.10295	0.10043	0.54
0.46	0.10043	0.09791	0.09540	0.09288	0.09036	0.08784	0.08533	0.08281	0.08030	0.07778	0.07527	0.53
0.47	0.07527	0.07276	0.07024	0.06773	0.06522	0.06271	0.06020	0.05768	0.05517	0.05266	0.05015	0.52
0.48	0.05015	0.04764	0.04513	0.04263	0.04012	0.03761	0.03510	0.03259	0.03008	0.02758	0.02507	0.51
0.49	0.02507	0.02256	0.02005	0.01755	0.01504	0.01253	0.01003	0.00752	0.00501	0.00251	0.00000	0.50
	0.010	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	$P(x)$

Для $Q(x) > 0.007$ линейная интерполяция дает ошибку в единицу третьего десятичного знака; для получения точного значения необходима интерполяция по пяти точкам.

$$P(x) = 1 - Q(x) = \int_{-\infty}^{x} Z(t)\,dt$$

Взято из [26.15].

Таблица 26.6. Значения x для крайних значений $P(x)$ и $Q(x)$

$Q(x)$	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	
0.000	∞	3.71902	3.54008	3.43161	3.35279	3.29053	3.23888	3.19465	3.15591	3.12139	3.09023	0.999
0.001	3.09023	3.06181	3.03567	3.01145	2.98888	2.96774	2.94784	2.92905	2.91124	2.89430	2.87816	0.998
0.002	2.87816	2.86274	2.84796	2.83379	2.82016	2.80703	2.79438	2.78215	2.77033	2.75888	2.74778	0.997
0.003	2.74778	2.73701	2.72655	2.71638	2.70648	2.69684	2.68745	2.67829	2.66934	2.66061	2.65207	0.996
0.004	2.65207	2.64372	2.63555	2.62756	2.61973	2.61205	2.60455	2.59715	2.58991	2.58281	2.57583	0.995
0.005	2.57583	2.56897	2.56224	2.55562	2.54910	2.54270	2.53640	2.53019	2.52408	2.51807	2.51214	0.994
0.006	2.51214	2.50631	2.50055	2.49488	2.48929	2.48377	2.47833	2.47296	2.46765	2.46243	2.45726	0.993
0.007	2.45726	2.45216	2.44713	2.44215	2.43724	2.43238	2.42758	2.42283	2.41814	2.41350	2.40891	0.992
0.008	2.40891	2.40437	2.39989	2.39545	2.39106	2.38671	2.38240	2.37814	2.37392	2.36975	2.36562	0.991
0.009	2.36562	2.36152	2.35747	2.35345	2.34947	2.34553	2.34162	2.33775	2.33392	2.33012	2.32635	0.990
0.010	2.32635	2.32261	2.31891	2.31524	2.31160	2.30798	2.30440	2.30085	2.29733	2.29383	2.29037	0.989
0.011	2.29037	2.28693	2.28352	2.28013	2.27677	2.27343	2.27013	2.26684	2.26358	2.26034	2.25713	0.988
0.012	2.25713	2.25394	2.25077	2.24763	2.24450	2.24140	2.23832	2.23526	2.23223	2.22921	2.22621	0.987
0.013	2.22621	2.22323	2.22028	2.21734	2.21442	2.21152	2.20864	2.20577	2.20293	2.20010	2.19729	0.986
0.014	2.19729	2.19449	2.19172	2.18896	2.18621	2.18349	2.18078	2.17808	2.17540	2.17274	2.17009	0.985
0.015	2.17009	2.16746	2.16484	2.16224	2.15965	2.15707	2.15451	2.15197	2.14943	2.14692	2.14441	0.984
0.016	2.14441	2.14192	2.13944	2.13698	2.13452	2.13208	2.12966	2.12724	2.12484	2.12245	2.12007	0.983
0.017	2.12007	2.11771	2.11535	2.11301	2.11068	2.10836	2.10605	2.10375	2.10147	2.09919	2.09693	0.982
0.018	2.09693	2.09467	2.09243	2.09020	2.08798	2.08576	2.08356	2.08137	2.07919	2.07702	2.07485	0.981
0.019	2.07485	2.07270	2.07056	2.06843	2.06630	2.06419	2.06208	2.05998	2.05790	2.05582	2.05375	0.980
0.020	2.05375	2.05169	2.04964	2.04759	2.04556	2.04353	2.04151	2.03950	2.03750	2.03551	2.03352	0.979
0.021	2.03352	2.03154	2.02957	2.02761	2.02566	2.02371	2.02177	2.01984	2.01792	2.01600	2.01409	0.978
0.022	2.01409	2.01219	2.01029	2.00841	2.00653	2.00465	2.00279	2.00093	1.99908	1.99723	1.99539	0.977
0.023	1.99539	1.99356	1.99174	1.98992	1.98811	1.98630	1.98450	1.98271	1.98092	1.97914	1.97737	0.976
0.024	1.97737	1.97560	1.97384	1.97208	1.97033	1.96859	1.96685	1.96512	1.96340	1.96168	1.95996	0.975
	0.0010	0.0009	0.0008	0.0007	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000	$P(x)$

Для $Q(x) > 0.0007$ линейная интерполяция дает ошибку в единицу третьего десятичного знака; для получения точного значения необходима интерполяция по пяти точкам.

$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x
(−4)1.0	3.71902	(−9)1.0	5.99781	(−14)1.0	7.65063	(−19)1.0	9.01327
(−5)1.0	4.26489	(−10)1.0	6.36134	(−15)1.0	7.94135	(−20)1.0	9.26234
(−6)1.0	4.75342	(−11)1.0	6.70602	(−16)1.0	8.22208	(−21)1.0	9.50502
(−7)1.0	5.19934	(−12)1.0	7.03448	(−17)1.0	8.49379	(−22)1.0	9.74179
(−8)1.0	5.61200	(−13)1.0	7.34880	(−18)1.0	8.75729	(−23)1.0	9.97305

$$P(x)=1-Q(x)=\int_{-\infty}^{x} Z(t)\,dt$$

Взято из [26.15].

Таблица 26.7. Интеграл вероятностей χ^2, неполная гамма-функция, функция распределения Пуассона

ν	$\chi^2=0.001$	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
	$m=0.0005$	0.0010	0.0015	0.0020	0.0025	0.0030	0.0035	0.0040	0.0045	0.0050
1	0.97477	0.96433	0.95632	0.94957	0.94363	0.93826	0.93332	0.92873	0.92442	0.92034
2	0.99950	0.99900	0.99850	0.99800	0.99750	0.99700	0.99651	0.99601	0.99551	0.99501
3	0.99999	0.99998	0.99996	0.99993	0.99991	0.99988	0.99984	0.99981	0.99977	0.99973
4							0.99999	0.99999	0.99999	0.99999

ν	$\chi^2=0.01$	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
	$m=0.005$	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050
1	0.92034	0.88754	0.86249	0.84148	0.82306	0.80650	0.79134	0.77730	0.76418	0.75183
2	0.99501	0.99005	0.98511	0.98020	0.97531	0.97045	0.96561	0.96079	0.95600	0.95123
3	0.99973	0.99925	0.99863	0.99790	0.99707	0.99616	0.99518	0.99412	0.99301	0.99184
4	0.99999	0.99995	0.99989	0.99980	0.99969	0.99956	0.99940	0.99922	0.99902	0.99879
5			0.99999	0.99998	0.99997	0.99995	0.99993	0.99991	0.99987	0.99984
6							0.99999	0.99999	0.99999	0.99998

ν	$\chi^2=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	$m=0.05$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
1	0.75183	0.65472	0.58388	0.52709	0.47950	0.43858	0.40278	0.37109	0.34278	0.31731
2	0.95123	0.90484	0.86071	0.81873	0.77880	0.74082	0.70469	0.67032	0.63763	0.60653
3	0.99184	0.97759	0.96003	0.94024	0.91889	0.89643	0.87320	0.84947	0.82543	0.80125
4	0.99879	0.99532	0.98981	0.98248	0.97350	0.96306	0.95133	0.93845	0.92456	0.90980
5	0.99984	0.99911	0.99764	0.99533	0.99212	0.98800	0.98297	0.97703	0.97022	0.96257
6	0.99998	0.99985	0.99950	0.99885	0.99784	0.99640	0.99449	0.99207	0.98912	0.98561
7		0.99997	0.99990	0.99974	0.99945	0.99899	0.99834	0.99744	0.99628	0.99483
8			0.99998	0.99994	0.99987	0.99973	0.99953	0.99922	0.99880	0.99825
9				0.99999	0.99997	0.99993	0.99987	0.99978	0.99964	0.99944
10					0.99999	0.99998	0.99997	0.99994	0.99989	0.99983
11							0.99999	0.99998	0.99997	0.99995
12									0.99999	0.99999

ν	$\chi^2=1.1$	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
	$m=0.55$	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
1	0.29427	0.27332	0.25421	0.23672	0.22067	0.20590	0.19229	0.17971	0.16808	0.15730
2	0.57695	0.54881	0.52205	0.49659	0.47237	0.44933	0.42741	0.40657	0.38674	0.36788
3	0.77707	0.75300	0.72913	0.70553	0.68227	0.65939	0.63693	0.61493	0.59342	0.57241
4	0.89427	0.87810	0.86138	0.84420	0.82664	0.80879	0.79072	0.77248	0.75414	0.73576
5	0.95410	0.94488	0.93493	0.92431	0.91307	0.90125	0.88890	0.87607	0.86280	0.84915
6	0.98154	0.97689	0.97166	0.96586	0.95949	0.95258	0.94512	0.93714	0.92866	0.91970
7	0.99305	0.99093	0.98844	0.98557	0.98231	0.97864	0.97457	0.97008	0.96517	0.95984
8	0.99753	0.99664	0.99555	0.99425	0.99271	0.99092	0.98887	0.98654	0.98393	0.98101
9	0.99917	0.99882	0.99838	0.99782	0.99715	0.99633	0.99537	0.99425	0.99295	0.99147
10	0.99973	0.99961	0.99944	0.99921	0.99894	0.99859	0.99817	0.99766	0.99705	0.99634
11	0.99992	0.99987	0.99981	0.99973	0.99962	0.99948	0.99930	0.99908	0.99682	0.99850
12	0.99998	0.99996	0.99994	0.99991	0.99987	0.99982	0.99975	0.99966	0.99954	0.99941
13	0.99999	0.99999	0.99998	0.99997	0.99996	0.99994	0.99991	0.99988	0.99983	0.99977
14			0.99999	0.99999	0.99999	0.99998	0.99997	0.99996	0.99994	0.99992
15						0.99999	0.99999	0.99999	0.99998	0.99997
16									0.99999	0.99999

$$Q(\chi^2|\nu)=1-P(\chi^2|\nu)=\left[2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\chi^2}^{\infty}e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\nu}{2}-1}dt=\left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\frac{1}{2}\chi^2}^{\infty}e^{-t}t^{\frac{\nu}{2}-1}dt=\sum_{j=0}^{c-1}e^{-m}m^j/j!\ (\nu\ \text{четно},\ c=\tfrac{1}{2}\nu,\ m=\tfrac{1}{2}\chi^2)$$

Взято из [26.11].

Таблица 26.7. Интеграл вероятностей χ^2, неполная гамма-функция, функция распределения Пуассона

	$\chi^2=2.2$	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
	$m=1.1$	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
1	0.13801	0.12134	0.10686	0.09426	0.08327	0.07364	0.06520	0.05778	0.05125	0.04550
2	0.33287	0.30119	0.27253	0.24660	0.22313	0.20190	0.18268	0.16530	0.14957	0.13534
3	0.53195	0.49363	0.45749	0.42350	0.39163	0.36181	0.33397	0.30802	0.28389	0.26146
4	0.69903	0.66263	0.62682	0.59183	0.55783	0.52493	0.49325	0.46284	0.43375	0.40601
5	0.82084	0.79147	0.76137	0.73079	0.69999	0.66918	0.63857	0.60831	0.57856	0.54942
6	0.90042	0.87949	0.85711	0.83350	0.80885	0.78336	0.75722	0.73062	0.70372	0.67668
7	0.94795	0.93444	0.91938	0.90287	0.88500	0.86590	0.84570	0.82452	0.80250	0.77978
8	0.97426	0.96623	0.95691	0.94628	0.93436	0.92119	0.90681	0.89129	0.87470	0.85712
9	0.98790	0.98345	0.97807	0.97170	0.96430	0.95583	0.94631	0.93572	0.92408	0.91141
10	0.99457	0.99225	0.98934	0.98575	0.98142	0.97632	0.97039	0.96359	0.95592	0.94735
11	0.99766	0.99652	0.99503	0.99311	0.99073	0.98781	0.98431	0.98019	0.97541	0.96992
12	0.99903	0.99850	0.99777	0.99680	0.99554	0.99396	0.99200	0.98962	0.98678	0.98344
13	0.99961	0.99938	0.99903	0.99856	0.99793	0.99711	0.99606	0.99475	0.99514	0.99119
14	0.99985	0.99975	0.99960	0.99938	0.99907	0.99866	0.99813	0.99743	0.99655	0.99547
15	0.99994	0.99990	0.99984	0.99974	0.99960	0.99940	0.99913	0.99878	0.99832	0.99774
16	0.99998	0.99996	0.99994	0.99989	0.99983	0.99974	0.99961	0.99944	0.99921	0.99890
17	0.99999	0.99999	0.99998	0.99996	0.99993	0.99989	0.99983	0.99975	0.99964	0.99948
18			0.99999	0.99998	0.99997	0.99995	0.99993	0.99989	0.99984	0.99976
19				0.99999	0.99999	0.99998	0.99997	0.99995	0.99993	0.99989
20						0.99999	0.99999	0.99998	0.99997	0.99995
21								0.99999	0.99999	0.99998
22										0.99999

	$\chi^2=4.2$	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
ν	$m=2.1$	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
1	0.04042	0.03594	0.03197	0.02846	0.02535	0.02259	0.02014	0.01796	0.01603	0.01431
2	0.12246	0.11080	0.10026	0.09072	0.08209	0.07427	0.06721	0.06081	0.05502	0.04979
3	0.24066	0.22139	0.20354	0.18704	0.17180	0.15772	0.14474	0.13278	0.12176	0.11161
4	0.37962	0.35457	0.33085	0.30844	0.28730	0.26739	0.24866	0.23108	0.21459	0.19915
5	0.52099	0.49337	0.46662	0.44077	0.41588	0.39196	0.36904	0.34711	0.32617	0.30622
6	0.64963	0.62271	0.59604	0.56971	0.54381	0.51843	0.49363	0.46945	0.44596	0.42319
7	0.75647	0.73272	0.70864	0.68435	0.65996	0.63557	0.61127	0.58715	0.56329	0.53975
8	0.83864	0.81935	0.79935	0.77872	0.75758	0.73600	0.71409	0.69194	0.66962	0.64723
9	0.89776	0.88317	0.86769	0.85138	0.83431	0.81654	0.79814	0.77919	0.75976	0.73992
10	0.93787	0.92750	0.91625	0.90413	0.89118	0.87742	0.86291	0.84768	0.83178	0.81526
11	0.96370	0.95672	0.94898	0.94046	0.93117	0.92109	0.91026	0.89868	0.88637	0.87337
12	0.97955	0.97509	0.97002	0.96433	0.95798	0.95096	0.94327	0.93489	0.92583	0.91608
13	0.98887	0.98614	0.98298	0.97934	0.97519	0.97052	0.96530	0.95951	0.95313	0.94615
14	0.99414	0.99254	0.99064	0.98841	0.98581	0.98283	0.97943	0.97559	0.97128	0.96649
15	0.99701	0.99610	0.99501	0.99369	0.99213	0.99029	0.98816	0.98571	0.98291	0.97975
16	0.99851	0.99802	0.99741	0.99666	0.99575	0.99467	0.99338	0.99187	0.99012	0.98810
17	0.99928	0.99902	0.99869	0.99828	0.99777	0.99715	0.99639	0.99550	0.99443	0.99319
18	0.99966	0.99953	0.99936	0.99914	0.99886	0.99851	0.99809	0.99757	0.99694	0.99620
19	0.99985	0.99978	0.99969	0.99958	0.99943	0.99924	0.99901	0.99872	0.99836	0.99793
20	0.99993	0.99990	0.99986	0.99980	0.99972	0.99962	0.99950	0.99934	0.99914	0.99890
21	0.99997	0.99995	0.99993	0.99991	0.99987	0.99982	0.99975	0.99967	0.99956	0.99943
22	0.99999	0.99998	0.99997	0.99996	0.99994	0.99991	0.99988	0.99984	0.99978	0.99971
23	0.99999	0.99999	0.99999	0.99998	0.99997	0.99996	0.99994	0.99992	0.99989	0.99986
24			0.99999	0.99999	0.99999	0.99998	0.99997	0.99996	0.99995	0.99993
25					0.99999	0.99999	0.99999	0.99998	0.99998	0.99997
26					$\Phi=\frac{1}{2}(x^2-x_0^2)$	$w=\nu-\nu_0>0$		0.99999	0.99999	0.99998
27									0.99999	0.99999

Интерполяция по χ^2:

$$Q(\chi^2\,|\,\nu)=Q(\chi_0^2\,|\,\nu_0-4)\left[\frac{1}{2}\,\Phi^2\right]+Q(\chi^2\,|\,\nu_0-2)\,[\Phi-\Phi^2]+Q(\chi_0^2\,|\,\nu_0)\left[1-\Phi+\frac{1}{2}\,\Phi^2\right].$$

Интерполяция по двум аргументам:

$$Q(\chi^2\,|\,\nu)=Q(\chi_0^2\,|\,\nu_0-4)\left[\frac{1}{2}\,\Phi^2\right]+Q(\chi_0^2\,|\,\nu_0-2)\,[\Phi-\Phi^2-w\Phi]+Q(\chi_0^2\,|\,\nu_0-1)\left[\frac{1}{2}\,w^2-\frac{1}{2}\,w+w\Phi\right]+$$

$$+\,Q\,|\chi_0^2\,|\,\nu_0)\left[1-w^2-\Phi+\frac{1}{2}\,\Phi^2+w\Phi\right]+Q(\chi_0^2\,|\,\nu_0+1)\left[\frac{1}{2}\,w^2+\frac{1}{2}\,w-w\Phi\right].$$

Таблица 26.7. Интеграл вероятностей χ^2, неполная гамма-функция, функция распределения Пуассона

ν	$\chi^2=6.2$, $m=3.1$	6.4, 3.2	6.6, 3.3	6.8, 3.4	7.0, 3.5	7.2, 3.6	7.4, 3.7	7.6, 3.8	7.8, 3.9	8.0, 4.0
1	0.01278	0.01141	0.01020	0.00912	0.00815	0.00729	0.00652	0.00584	0.00522	0.00468
2	0.04505	0.04076	0.03688	0.03337	0.03020	0.02732	0.02472	0.02237	0.02024	0.01832
3	0.10228	0.09369	0.08580	0.07855	0.07190	0.06579	0.06018	0.05504	0.05033	0.04601
4	0.18470	0.17120	0.15860	0.14684	0.13589	0.12569	0.11620	0.10738	0.09919	0.09158
5	0.28724	0.26922	0.25213	0.23595	0.22064	0.20619	0.19255	0.17970	0.16761	0.15624
6	0.40116	0.37990	0.35943	0.33974	0.32085	0.30275	0.28543	0.26890	0.25313	0.23810
7	0.51660	0.49390	0.47168	0.45000	0.42888	0.40836	0.38845	0.36918	0.35056	0.33259
8	0.62484	0.60252	0.58034	0.55836	0.53663	0.51522	0.49415	0.47349	0.45325	0.43347
9	0.71975	0.69931	0.67869	0.65793	0.63712	0.61631	0.59555	0.57490	0.55442	0.53415
10	0.79819	0.78061	0.76259	0.74418	0.72544	0.70644	0.68722	0.66784	0.64837	0.62884
11	0.85969	0.84539	0.83049	0.81504	0.79908	0.78266	0.76583	0.74862	0.73110	0.71330
12	0.90567	0.89459	0.88288	0.87054	0.85761	0.84412	0.83009	0.81556	0.80056	0.78513
13	0.93857	0.93038	0.92157	0.91216	0.90215	0.89155	0.88038	0.86865	0.85638	0.84360
14	0.96120	0.95538	0.94903	0.94215	0.93471	0.92673	0.91819	0.90911	0.89948	0.88933
15	0.97619	0.97222	0.96782	0.96296	0.95765	0.95186	0.94559	0.93882	0.93155	0.92378
16	0.98579	0.98317	0.98022	0.97693	0.97326	0.96921	0.96476	0.95989	0.95460	0.94887
17	0.99174	0.99007	0.98816	0.98599	0.98355	0.98081	0.97775	0.97437	0.97064	0.96655
18	0.99532	0.99429	0.99309	0.99171	0.99013	0.98833	0.98630	0.98402	0.98147	0.97864
19	0.99741	0.99679	0.99606	0.99521	0.99421	0.99307	0.99176	0.99026	0.98857	0.98667
20	0.99860	0.99824	0.99781	0.99729	0.99669	0.99598	0.99515	0.99420	0.99311	0.99187
21	0.99926	0.99905	0.99880	0.99850	0.99814	0.99771	0.99721	0.99662	0.99594	0.99514
22	0.99962	0.99950	0.99936	0.99919	0.99898	0.99873	0.99843	0.99807	0.99765	0.99716
23	0.99981	0.99974	0.99967	0.99957	0.99945	0.99931	0.99913	0.99892	0.99867	0.99837
24	0.99990	0.99987	0.99983	0.99978	0.99971	0.99963	0.99953	0.99941	0.99926	0.99908
25	0.99995	0.99994	0.99991	0.99989	0.99985	0.99981	0.99975	0.99968	0.99960	0.99949
26	0.99998	0.99997	0.99996	0.99994	0.99992	0.99990	0.99987	0.99983	0.99978	0.99973
27	0.99999	0.99999	0.99998	0.99997	0.99996	0.99995	0.99993	0.99991	0.99989	0.99985
28		0.99999	0.99999	0.99999	0.99998	0.99998	0.99997	0.99996	0.99994	0.99992
29				0.99999	0.99999	0.99999	0.99998	0.99998	0.99997	0.99996
30						0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99998

ν	$\chi^2=8.2$, $m=4.1$	8.4, 4.2	8.6, 4.3	8.8, 4.4	9.0, 4.5	9.2, 4.6	9.4, 4.7	9.6, 4.8	9.8, 4.9	10.0, 5.0
1	0.00419	0.00375	0.00336	0.00301	0.00270	0.00242	0.00217	0.00195	0.00175	0.00157
2	0.01657	0.01500	0.01357	0.01228	0.01111	0.01005	0.00910	0.00823	0.00745	0.00674
3	0.04205	0.03843	0.03511	0.03207	0.02929	0.02675	0.02442	0.02229	0.02034	0.01857
4	0.08452	0.07798	0.07191	0.06630	0.06110	0.05629	0.05184	0.04773	0.04394	0.04043
5	0.14555	0.13553	0.12612	0.11731	0.10906	0.10135	0.09413	0.08740	0.08110	0.07524
6	0.22381	0.21024	0.19736	0.18514	0.17358	0.16264	0.15230	0.14254	0.13333	0.12465
7	0.31529	0.29865	0.28266	0.26734	0.25266	0.23861	0.22520	0.21240	0.20019	0.18857
8	0.41418	0.39540	0.37715	0.35945	0.34230	0.32571	0.30968	0.29423	0.27935	0.26503
9	0.51412	0.49439	0.47499	0.45594	0.43727	0.41902	0.40120	0.38383	0.36692	0.35049
10	0.60931	0.58983	0.57044	0.55118	0.53210	0.51323	0.49461	0.47626	0.45821	0.44049
11	0.69528	0.67709	0.65876	0.64035	0.62189	0.60344	0.58502	0.56669	0.54846	0.53039
12	0.76931	0.75314	0.73666	0.71991	0.70293	0.68576	0.66844	0.65101	0.63350	0.61596
13	0.83033	0.81660	0.80244	0.78788	0.77294	0.75768	0.74211	0.72627	0.71020	0.69393
14	0.87865	0.86746	0.85579	0.84365	0.83105	0.81803	0.80461	0.79081	0.77666	0.76218
15	0.91551	0.90675	0.89749	0.88774	0.87752	0.86683	0.85569	0.84412	0.83213	0.81974
16	0.94269	0.93606	0.92897	0.92142	0.91341	0.90495	0.89603	0.88667	0.87686	0.86663
17	0.96208	0.95723	0.95198	0.94633	0.94026	0.93378	0.92687	0.91954	0.91179	0.90361
18	0.97551	0.97207	0.96830	0.96420	0.95974	0.95493	0.94974	0.94418	0.93824	0.93191
19	0.98454	0.98217	0.97955	0.97666	0.97348	0.97001	0.96623	0.96213	0.95771	0.95295
20	0.99046	0.98887	0.98709	0.98511	0.98291	0.98047	0.97779	0.97486	0.97166	0.96817
21	0.99424	0.99320	0.99203	0.99070	0.98921	0.98755	0.98570	0.98365	0.98139	0.97891
22	0.99659	0.99593	0.99518	0.99431	0.99333	0.99222	0.99098	0.98958	0.98803	0.98630
23	0.99802	0.99761	0.99714	0.99659	0.99596	0.99524	0.99442	0.99349	0.99245	0.99128
24	0.99888	0.99863	0.99833	0.99799	0.99760	0.99714	0.99661	0.99601	0.99532	0.99455
25	0.99937	0.99922	0.99905	0.99884	0.99860	0.99831	0.99798	0.99760	0.99716	0.99665
26	0.99966	0.99957	0.99947	0.99934	0.99919	0.99902	0.99882	0.99858	0.99830	0.99798
27	0.99981	0.99977	0.99971	0.99963	0.99955	0.99944	0.99932	0.99917	0.99900	0.99880
28	0.99990	0.99987	0.99984	0.99980	0.99975	0.99969	0.99962	0.99953	0.99942	0.99930
29	0.99995	0.99993	0.99991	0.99989	0.99986	0.99983	0.99979	0.99973	0.99967	0.99960
30	0.99997	0.99997	0.99996	0.99994	0.99993	0.99991	0.99988	0.99985	0.99982	0.99977

$$Q(\chi^2|\nu)=1-P(\chi^2|\nu)=\left[2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\chi^2}^{\infty}e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\nu}{2}-1}dt=\left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{m}^{\infty}e^{-t}t^{\frac{\nu}{2}-1}dt=\sum_{i=0}^{c-1}e^{-m}m^i/i!\ (\nu\ \text{четное}\ c=\tfrac{1}{2}\nu,\ m=\tfrac{1}{2}\chi^2)$$

Таблица 26.7. Интеграл вероятностей χ^2, неполная гамма-функция, функция распределения Пуассона

ν	$\chi^2=10.5$	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0
	$m=5.25$	5.5	5.75	6.0	6.25	6.5	6.75	7.0	7.25	7.5
1	0.00119	0.00091	0.00070	0.00053	0.00041	0.00031	0.00024	0.00018	0.00014	0.00011
2	0.00525	0.00409	0.00318	0.00248	0.00193	0.00150	0.00117	0.00091	0.00071	0.00055
3	0.01476	0.01173	0.00931	0.00738	0.00585	0.00464	0.00367	0.00291	0.00230	0.00182
4	0.03280	0.02656	0.02148	0.01735	0.01400	0.01128	0.00907	0.00730	0.00586	0.00470
5	0.06225	0.05138	0.04232	0.03479	0.02854	0.02338	0.01912	0.01561	0.01273	0.01036
6	0.10511	0.08838	0.07410	0.06197	0.05170	0.04304	0.03575	0.02964	0.02452	0.02026
7	0.16196	0.13862	0.11825	0.10056	0.08527	0.07211	0.06082	0.05118	0.04297	0.03600
8	0.23167	0.20170	0.17495	0.15120	0.13025	0.11185	0.09577	0.08177	0.06963	0.05915
9	0.31154	0.27571	0.24299	0.21331	0.18657	0.16261	0.14126	0.12233	0.10562	0.09094
10	0.39777	0.35752	0.31991	0.28506	0.25299	0.22367	0.19704	0.17299	0.15138	0.13206
11	0.48605	0.44326	0.40237	0.36364	0.32726	0.29333	0.26190	0.23299	0.20655	0.18250
12	0.57218	0.52892	0.48662	0.44568	0.40640	0.36904	0.33377	0.30071	0.26992	0.24144
13	0.65263	0.61082	0.56901	0.52764	0.48713	0.44781	0.40997	0.37384	0.33960	0.30735
14	0.72479	0.68604	0.64639	0.60630	0.56622	0.52652	0.48759	0.44971	0.41316	0.37815
15	0.78717	0.75259	0.71641	0.67903	0.64086	0.60230	0.56374	0.52553	0.48800	0.45142
16	0.83925	0.80949	0.77762	0.74398	0.70890	0.67276	0.63591	0.59871	0.56152	0.52464
17	0.88135	0.85656	0.82942	0.80014	0.76896	0.73619	0.70212	0.66710	0.63145	0.59548
18	0.91436	0.89436	0.87195	0.84724	0.82038	0.79157	0.76106	0.72909	0.69596	0.66197
19	0.93952	0.92384	0.90587	0.88562	0.86316	0.83857	0.81202	0.78369	0.75380	0.72260
20	0.95817	0.94622	0.93221	0.91608	0.89779	0.87738	0.85492	0.83050	0.80427	0.77641
21	0.97166	0.96279	0.95214	0.93962	0.92513	0.90862	0.89010	0.86960	0.84718	0.82295
22	0.98118	0.97475	0.96686	0.95738	0.94618	0.93316	0.91827	0.90148	0.88279	0.86224
23	0.98773	0.98319	0.97748	0.97047	0.96201	0.95199	0.94030	0.92687	0.91165	0.89463
24	0.99216	0.98901	0.98498	0.97991	0.97367	0.96612	0.95715	0.94665	0.93454	0.92076
25	0.99507	0.99295	0.99015	0.98657	0.98206	0.97650	0.96976	0.96173	0.95230	0.94138
26	0.99696	0.99555	0.99366	0.99117	0.98798	0.98397	0.97902	0.97300	0.96581	0.95733
27	0.99815	0.99724	0.99598	0.99429	0.99208	0.98925	0.98567	0.98125	0.97588	0.96943
28	0.99890	0.99831	0.99749	0.99637	0.99487	0.99290	0.99037	0.98719	0.98324	0.97844
29	0.99935	0.99899	0.99846	0.99773	0.99672	0.99538	0.99363	0.99138	0.98854	0.98502
30	0.99963	0.99940	0.99907	0.99860	0.99794	0.99704	0.99585	0.99428	0.99227	0.98974

ν	$\chi^2=15.5$	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.0
	$m=7.75$	8.0	8.25	8.5	8.75	9.0	9.25	9.5	9.75	10.0
1	0.00008	0.00006	0.00005	0.00004	0.00003	0.00002	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001
2	0.00043	0.00034	0.00026	0.00020	0.00016	0.00012	0.00010	0.00008	0.00006	0.00005
3	0.00144	0.00113	0.00090	0.00071	0.00056	0.00044	0.00035	0.00027	0.00022	0.00017
4	0.00377	0.00302	0.00242	0.00193	0.00154	0.00123	0.00099	0.00079	0.00063	0.00050
5	0.00843	0.00684	0.00555	0.00450	0.00364	0.00295	0.00238	0.00192	0.00155	0.00125
6	0.01670	0.01375	0.01131	0.00928	0.00761	0.00623	0.00510	0.00416	0.00340	0.00277
7	0.03010	0.02512	0.02092	0.01740	0.01444	0.01197	0.00991	0.00819	0.00676	0.00557
8	0.05012	0.04238	0.03576	0.03011	0.02530	0.02123	0.01777	0.01486	0.01240	0.01034
9	0.07809	0.06688	0.05715	0.04872	0.04144	0.03517	0.02980	0.02519	0.02126	0.01791
10	0.11487	0.09963	0.08619	0.07436	0.06401	0.05496	0.04709	0.04026	0.03435	0.02925
11	0.16073	0.14113	0.12356	0.10788	0.09393	0.08158	0.07068	0.06109	0.05269	0.04534
12	0.21522	0.19124	0.16939	0.14960	0.13174	0.11569	0.10133	0.08853	0.07716	0.06709
13	0.27719	0.24913	0.22318	0.19930	0.17744	0.15752	0.13944	0.12310	0.10840	0.09521
14	0.34485	0.31337	0.28380	0.25618	0.23051	0.20678	0.18495	0.16495	0.14671	0.13014
15	0.41604	0.38205	0.34962	0.31886	0.28986	0.26267	0.23729	0.21373	0.19196	0.17193
16	0.48837	0.45296	0.41864	0.38560	0.35398	0.32390	0.29544	0.26866	0.24359	0.22022
17	0.55951	0.52383	0.48871	0.45437	0.42102	0.38884	0.35797	0.32853	0.30060	0.27423
18	0.62740	0.59255	0.55770	0.52311	0.48902	0.45565	0.42320	0.39182	0.36166	0.33282
19	0.69033	0.65728	0.62370	0.58987	0.55603	0.52244	0.48931	0.45684	0.42521	0.39458
20	0.74712	0.71662	0.68516	0.65297	0.62031	0.58741	0.55451	0.52183	0.48957	0.45793
21	0.79705	0.76965	0.74093	0.71111	0.68039	0.64900	0.61718	0.58514	0.55310	0.52126
22	0.83990	0.81589	0.79032	0.76336	0.73519	0.70599	0.67597	0.64533	0.61428	0.58304
23	0.87582	0.85527	0.83304	0.80925	0.78402	0.75749	0.72983	0.70122	0.67185	0.64191
24	0.90527	0.88808	0.86919	0.84866	0.82657	0.80301	0.77810	0.75199	0.72483	0.69678
25	0.92891	0.91483	0.89912	0.88179	0.86287	0.84239	0.82044	0.79712	0.77254	0.74683
26	0.94749	0.93620	0.92341	0.90908	0.89320	0.87577	0.85683	0.83643	0.81464	0.79156
27	0.96182	0.95295	0.94274	0.93112	0.91806	0.90352	0.88750	0.87000	0.85107	0.83076
28	0.97266	0.96582	0.95782	0.94859	0.93805	0.92615	0.91285	0.89814	0.88200	0.86446
29	0.98071	0.97554	0.96939	0.96218	0.95383	0.94427	0.93344	0.92129	0.90779	0.89293
30	0.98659	0.98274	0.97810	0.97258	0.96608	0.95853	0.94986	0.94001	0.92891	0.91654

$\Phi = \frac{1}{2}(\chi^2 - \chi_0^2) \qquad w = \nu - \nu_0 > 0$

Интерполяция по χ^2:

$$Q(\chi^2|\nu) = Q(\chi_0^2|\nu_0-4)\left[\frac{1}{2}\Phi^2\right] + Q(\chi_0^2|\nu_0-2)\,[\Phi-\Phi^2] + Q(\chi_0^2|\nu_0)\left[1-\Phi+\frac{1}{2}\Phi^2\right].$$

Интерполяция по двум аргументам:

$$Q(\chi^2|\nu) = Q(\chi_0^2|\nu_0-4)\left[\frac{1}{2}\Phi^2\right] + Q(\chi_0^2|\nu_0-2)\,[\Phi-\Phi^2-w\Phi] + Q(\chi_0^2|\nu_0-1)\left[\frac{1}{2}w^2-\frac{1}{2}w+w\Phi\right] +$$

$$+ Q(\chi_0^2|\nu_0)\left[1-w^2-\Phi+\frac{1}{2}\Phi^2+w\Phi\right] + Q(\chi_0^2|\nu_0+1)\left[\frac{1}{2}w^2+\frac{1}{2}w-w\Phi\right].$$

Таблица 26.7. Интеграл вероятностей χ^2, неполная гамма-функция, функция распределения Пуассона

	χ^2 21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ν	m 10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0
1	0.00001									
2	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001						
3	0.00011	0.00007	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001			
4	0.00032	0.00020	0.00013	0.00008	0.00005	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001
5	0.00081	0.00052	0.00034	0.00022	0.00014	0.00009	0.00006	0.00004	0.00002	0.00002
6	0.00184	0.00121	0.00080	0.00052	0.00034	0.00022	0.00015	0.00009	0.00006	0.00004
7	0.00377	0.00254	0.00171	0.00114	0.00076	0.00050	0.00033	0.00022	0.00015	0.00010
8	0.00715	0.00492	0.00336	0.00229	0.00155	0.00105	0.00071	0.00047	0.00032	0.00021
9	0.01265	0.00888	0.00620	0.00430	0.00297	0.00204	0.00140	0.00095	0.00065	0.00044
10	0.02109	0.01511	0.01075	0.00760	0.00535	0.00374	0.00260	0.00181	0.00125	0.00086
11	0.03337	0.02437	0.01768	0.01273	0.00912	0.00649	0.00460	0.00324	0.00227	0.00159
12	0.05038	0.03752	0.02773	0.02034	0.01482	0.01073	0.00773	0.00553	0.00394	0.00279
13	0.07293	0.05536	0.04168	0.03113	0.02308	0.01700	0.01244	0.00905	0.00655	0.00471
14	0.10163	0.07861	0.06027	0.04582	0.03457	0.02589	0.01925	0.01423	0.01045	0.00763
15	0.13683	0.10780	0.08414	0.06509	0.04994	0.03802	0.02874	0.02157	0.01609	0.01192
16	0.17851	0.14319	0.11374	0.08950	0.06982	0.05403	0.04148	0.03162	0.02394	0.01800
17	0.22629	0.18472	0.14925	0.11944	0.09471	0.07446	0.05807	0.04494	0.03453	0.02635
18	0.27941	0.23199	0.19059	0.15503	0.12492	0.09976	0.07900	0.06206	0.04838	0.03745
19	0.33680	0.28426	0.23734	0.19615	0.16054	0.13019	0.10465	0.08343	0.06599	0.05180
20	0.39713	0.34051	0.28880	0.24239	0.20143	0.16581	0.13526	0.10940	0.08776	0.06985
21	0.45894	0.39951	0.34398	0.29306	0.24716	0.20645	0.17085	0.14015	0.11400	0.09199
22	0.52074	0.45989	0.40173	0.34723	0.29707	0.25168	0.21123	0.17568	0.14486	0.11846
23	0.58109	0.52025	0.46077	0.40381	0.35029	0.30087	0.25597	0.21578	0.18031	0.14940
24	0.63873	0.57927	0.51980	0.46160	0.40576	0.35317	0.30445	0.26004	0.22013	0.18475
25	0.69261	0.63574	0.57756	0.51937	0.46237	0.40760	0.35588	0.30785	0.26392	0.22429
26	0.74196	0.68870	0.63295	0.57597	0.51898	0.46311	0.40933	0.35846	0.31108	0.26761
27	0.78629	0.73738	0.68501	0.63032	0.57446	0.51860	0.46379	0.41097	0.36090	0.31415
28	0.82535	0.78129	0.73304	0.68154	0.62784	0.57305	0.51825	0.46445	0.41253	0.36322
29	0.85915	0.82019	0.77654	0.72893	0.67825	0.62549	0.57171	0.51791	0.46507	0.41400
30	0.88789	0.85404	0.81526	0.77203	0.72503	0.67513	0.62327	0.57044	0.51760	0.46565

	$\chi^2=31$	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ν	$m=15.5$	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.0
5	0.00001	0.00001								
6	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001						
7	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001				
8	0.00014	0.00009	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001		
9	0.00030	0.00020	0.00013	0.00009	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001
10	0.00059	0.00040	0.00027	0.00019	0.00012	0.00008	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002
11	0.00110	0.00076	0.00053	0.00036	0.00025	0.00017	0.00012	0.00008	0.00005	0.00004
12	0.00197	0.00138	0.00097	0.00068	0.00047	0.00032	0.00022	0.00015	0.00011	0.00007
13	0.00337	0.00240	0.00170	0.00120	0.00085	0.00059	0.00041	0.00029	0.00020	0.00014
14	0.00554	0.00401	0.00288	0.00206	0.00147	0.00104	0.00074	0.00052	0.00036	0.00026
15	0.00878	0.00644	0.00469	0.00341	0.00246	0.00177	0.00127	0.00090	0.00064	0.00045
16	0.01346	0.01000	0.00739	0.00543	0.00397	0.00289	0.00210	0.00151	0.00109	0.00078
17	0.01997	0.01505	0.01127	0.00840	0.00622	0.00459	0.00337	0.00246	0.00179	0.00129
18	0.02879	0.02199	0.01669	0.01260	0.00945	0.00706	0.00524	0.00387	0.00285	0.00209
19	0.04037	0.03125	0.02404	0.01838	0.01397	0.01056	0.00793	0.00593	0.00442	0.00327
20	0.05519	0.04330	0.03374	0.02613	0.02010	0.01538	0.01170	0.00886	0.00667	0.00500
21	0.07366	0.05855	0.04622	0.03624	0.02824	0.02187	0.01683	0.01289	0.00981	0.00744
22	0.09612	0.07740	0.06187	0.04912	0.03875	0.03037	0.02366	0.01832	0.01411	0.01081
23	0.12279	0.10014	0.08107	0.06516	0.05202	0.04125	0.03251	0.02547	0.01984	0.01537
24	0.15378	0.12699	0.10407	0.08467	0.06840	0.05489	0.04376	0.03467	0.02731	0.02139
25	0.18902	0.15801	0.13107	0.10791	0.08820	0.07160	0.05774	0.04626	0.03684	0.02916
26	0.22827	0.19312	0.16210	0.13502	0.11165	0.09167	0.07475	0.06056	0.04875	0.03901
27	0.27114	0.23208	0.19707	0.16605	0.13887	0.11530	0.09507	0.07736	0.06336	0.05124
28	0.31708	0.27451	0.23574	0.20087	0.16987	0.14260	0.11886	0.09840	0.08092	0.06613
29	0.36542	0.31987	0.27774	0.23926	0.20454	0.17356	0.14622	0.12234	0.10166	0.08394
30	0.41541	0.36753	0.32254	0.28083	0.24264	0.20808	0.17714	0.14975	0.12573	0.10486

Таблица 26.7. Интеграл вероятностей χ^2, неполная гамма-функция, функция распределения Пуассона

ν	$\chi^2=42$, $m=21$	44, 22	46, 23	48, 24	50, 25	52, 26	54, 27	56, 28	58, 29	60, 30
10	0.00001									
11	0.00002	0.00001								
12	0.00003	0.00002	0.00001							
13	0.00006	0.00003	0.00001	0.00001						
14	0.00012	0.00006	0.00003	0.00001	0.00001					
15	0.00023	0.00011	0.00005	0.00003	0.00001	0.00001				
16	0.00040	0.00020	0.00010	0.00005	0.00002	0.00001	0.00001			
17	0.00067	0.00034	0.00017	0.00009	0.00004	0.00002	0.00001	0.00001		
18	0.00111	0.00058	0.00030	0.00015	0.00008	0.00004	0.00002	0.00001		
19	0.00177	0.00094	0.00050	0.00026	0.00013	0.00007	0.00003	0.00002	0.00001	
20	0.00277	0.00151	0.00081	0.00043	0.00022	0.00011	0.00006	0.00003	0.00001	0.00001
21	0.00421	0.00234	0.00128	0.00069	0.00036	0.00019	0.00010	0.00005	0.00003	0.00001
22	0.00625	0.00355	0.00198	0.00109	0.00059	0.00031	0.00016	0.00009	0.00004	0.00002
23	0.00908	0.00526	0.00299	0.00167	0.00092	0.00050	0.00027	0.00014	0.00007	0.00004
24	0.01291	0.00763	0.00443	0.00252	0.00142	0.00078	0.00043	0.00023	0.00012	0.00006
25	0.01797	0.01085	0.00642	0.00373	0.00213	0.00120	0.00066	0.00036	0.00020	0.00011
26	0.02455	0.01512	0.00912	0.00540	0.00314	0.00180	0.00102	0.00056	0.00031	0.00017
27	0.03292	0.02068	0.01272	0.00768	0.00455	0.00265	0.00152	0.00086	0.00048	0.00026
28	0.04336	0.02779	0.01743	0.01072	0.00647	0.00384	0.00224	0.00129	0.00073	0.00041
29	0.05616	0.03670	0.02346	0.01470	0.00903	0.00545	0.00324	0.00189	0.00109	0.00062
30	0.07157	0.04769	0.03107	0.01983	0.01240	0.00762	0.00460	0.00273	0.00160	0.00092

ν	$\chi^2=62$, $m=31$	64, 32	66, 33	68, 34	70, 35	72, 36	74, 37	76, 38
21	0.00001							
22	0.00001	0.00001						
23	0.00002	0.00001	0.00001					
24	0.00003	0.00002	0.00001					
25	0.00006	0.00003	0.00002	0.00001				
26	0.00009	0.00005	0.00003	0.00001	0.00001			
27	0.00014	0.00008	0.00004	0.00002	0.00001	0.00001		
28	0.00023	0.00012	0.00007	0.00004	0.00002	0.00001	0.00001	
29	0.00035	0.00019	0.00011	0.00006	0.00003	0.00002	0.00001	
30	0.00052	0.00029	0.00016	0.00009	0.00005	0.00003	0.00001	0.00001

$$Q(\chi^2|\nu)=1-P(\chi^2|\nu)=\left[2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\chi^2}^{\infty}e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\nu}{2}-1}dt=\left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\frac{1}{2}\chi^2}^{\infty}e^{-t}t^{\frac{\nu}{2}-1}dt=\sum_{j=0}^{c-1}e^{-m}m^j/j!\ (\nu\ \text{четно},\ c=\tfrac{1}{2}\nu,\ m=\tfrac{1}{2}\chi^2)$$

$$\frac{1}{2}\left(\chi^2-\chi_0^2\right) \qquad w=\nu-\nu_0>0$$

Интерполяция по χ^2:

$$Q(\chi^2|\nu)=Q(\chi_0^2|\nu_0-4)\left[\frac{1}{2}\Phi^2\right]+Q(\chi_0^2|\nu_0-2)\left[\Phi-\Phi^2\right]+Q(\chi_0^2|\nu_0)\left[1-\Phi+\frac{1}{2}\Phi^2\right].$$

Интерполяция по двум аргументам:

$$Q(\chi^2|\nu)=Q(\chi_0^2|\nu_0-4)\left[\frac{1}{2}\Phi^2\right]+Q(\chi_0^2|\nu_0-2)\left[\Phi-\Phi^2-w\Phi\right]+$$

$$+Q(\chi_0^2|\nu_0-1)\left[\frac{1}{2}w^2-\frac{1}{2}w+w\Phi\right]+Q(\chi_0^2|\nu_0)\left[1-w^2-\Phi+\frac{1}{2}\Phi^2+w\Phi\right]+Q(\chi_0^2|\nu_0+1)\left[\frac{1}{2}w^2+\frac{1}{2}w-w\Phi\right].$$

Таблица 26.8. **Процентные точки χ^2-распределения; значения χ^2 как функции Q и ν**

$\nu \backslash Q$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25
1	(−5)3.92704	(−4)1.57088	(−4)9.82069	(−3)3.93214	0.0157908	0.101531	0.454937	1.32330
2	(−2)1.00251	(−2)2.01007	(−2)5.06356	0.102587	0.210720	0.575364	1.38629	2.77259
3	(−2)7.17212	0.114832	0.215795	0.351846	0.584375	1.212534	2.36597	4.10835
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.063623	1.92255	3.35670	5.38527
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031	2.67460	4.35146	6.62568
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413	3.45460	5.34812	7.84080
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581	9.03715
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412	10.2188
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283	11.3887
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518	6.73720	9.34182	12.5489
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779	7.58412	10.3410	13.7007
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380	8.43842	11.3403	14.8454
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150	9.29906	12.3398	15.9839
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953	10.1653	13.3393	17.1170
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675	11.0365	14.3389	18.2451
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223	11.9122	15.3385	19.3688
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852	12.7919	16.3381	20.4887
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649	13.6753	17.3379	21.6049
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509	14.5620	18.3376	22.7178
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374	23.8277
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372	24.9348
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370	26.0393
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479	18.1373	22.3369	27.1413
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587	19.0372	23.3367	28.2412
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366	29.3389
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919	20.8434	25.3364	30.4345
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138	21.7494	26.3363	31.5284
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3363	32.6205
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677	23.5666	28.3362	33.7109
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992	24.4776	29.3360	34.7998
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505	33.6603	39.3354	45.6160
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	42.9421	49.3349	56.3336
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589	52.2938	59.3347	66.9814
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290	61.6983	69.3344	77.5766
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	71.1445	79.3343	88.1303
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912	80.6247	89.3342	98.6499
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581	90.1332	99.3341	109.141
X	−2.5758	−2.3263	−1.9600	−1.6449	−1.2816	−0.6745	0.0000	0.6745

$$Q(\chi^2|\nu)=\left[2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\chi^2}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{\nu}{2}-1}\, dt$$

Взято из [26.11].

Таблица 26.8. **Процентные точки χ^2-распределения; значения χ^2 как функции Q и ν**

$\nu \backslash Q$	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005	0.0001
1	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	10.828	12.116	15.137
2	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966	13.816	15.202	18.421
3	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381	16.266	17.730	21.108
4	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602	18.467	19.997	23.513
5	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.515	22.105	25.745
6	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	22.458	24.103	27.856
7	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	24.322	26.018	29.877
8	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550	26.125	27.868	31.828
9	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	27.877	29.666	33.720
10	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882	29.588	31.420	35.564
11	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569	31.264	33.137	37.367
12	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	32.909	34.821	39.134
13	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194	34.528	36.478	40.871
14	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193	36.123	38.109	42.579
15	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	37.697	39.719	44.263
16	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	39.252	41.308	45.925
17	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	40.790	42.879	47.566
18	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	42.312	44.434	49.189
19	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822	43.820	45.973	50.796
20	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	45.315	47.498	52.386
21	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010	46.797	49.011	53.962
22	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956	48.268	50.511	55.525
23	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813	49.728	52.000	57.075
24	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585	51.179	53.479	58.613
25	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278	52.620	54.947	60.140
26	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899	54.052	56.407	61.657
27	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449	55.476	57.858	63.164
28	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933	56.892	59.300	64.662
29	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356	58.302	60.735	66.152
30	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720	59.703	62.162	67.633
40	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659	73.402	76.095	82.062
50	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	86.661	89.560	95.969
60	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517	99.607	102.695	109.503
70	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215	112.317	115.578	122.755
80	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321	124.839	128.261	135.783
90	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299	137.208	140.782	148.627
100	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	149.449	153.167	161.319
X	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905	3.7190

$$Q(\chi^2|\nu) = \left[2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\chi^2}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{\nu}{2}-1}\, dt$$

Таблица 26.9. Процентные точки F-распределения; значения F как функции Q, ν_1, ν_2

$$Q(F|\nu_1,\nu_2)=0.5$$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	∞
1	1.00	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	2.00	2.07	2.09	2.12	2.15	2.17	2.20
2	0.667	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.32	1.36	1.38	1.39	1.41	1.43	1.44
3	0.585	0.881	1.00	1.06	1.10	1.13	1.16	1.20	1.21	1.23	1.24	1.25	1.27
4	0.549	0.828	0.941	1.00	1.04	1.06	1.09	1.13	1.14	1.15	1.16	1.18	1.19
5	0.528	0.799	0.907	0.965	1.00	1.02	1.05	1.09	1.10	1.11	1.12	1.14	1.15
6	0.515	0.780	0.886	0.942	0.977	1.00	1.03	1.06	1.07	1.08	1.10	1.11	1.12
7	0.506	0.767	0.871	0.926	0.960	0.983	1.01	1.04	1.05	1.07	1.08	1.09	1.10
8	0.499	0.757	0.860	0.915	0.948	0.971	1.00	1.03	1.04	1.05	1.07	1.08	1.09
9	0.494	0.749	0.852	0.906	0.939	0.962	0.990	1.02	1.03	1.04	1.05	1.07	1.08
10	0.490	0.743	0.845	0.899	0.932	0.954	0.983	1.01	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07
11	0.486	0.739	0.840	0.893	0.926	0.948	0.977	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
12	0.484	0.735	0.835	0.888	0.921	0.943	0.972	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05	1.06
13	0.481	0.731	0.832	0.885	0.917	0.939	0.967	0.996	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
14	0.479	0.729	0.828	0.881	0.914	0.936	0.964	0.992	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05
15	0.478	0.726	0.826	0.878	0.911	0.933	0.960	0.989	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05
16	0.476	0.724	0.823	0.876	0.908	0.930	0.958	0.986	0.997	1.01	1.02	1.03	1.04
17	0.475	0.722	0.821	0.874	0.906	0.928	0.955	0.983	0.995	1.01	1.02	1.03	1.04
18	0.474	0.721	0.819	0.872	0.904	0.926	0.953	0.981	0.992	1.00	1.02	1.03	1.04
19	0.473	0.719	0.818	0.870	0.902	0.924	0.951	0.979	0.990	1.00	1.01	1.02	1.04
20	0.472	0.718	0.816	0.868	0.900	0.922	0.950	0.977	0.989	1.00	1.01	1.02	1.03
21	0.471	0.716	0.815	0.867	0.899	0.921	0.948	0.976	0.987	0.998	1.01	1.02	1.03
22	0.470	0.715	0.814	0.866	0.898	0.919	0.947	0.974	0.986	0.997	1.01	1.02	1.03
23	0.470	0.714	0.813	0.864	0.896	0.918	0.945	0.973	0.984	0.996	1.01	1.02	1.03
24	0.469	0.714	0.812	0.863	0.895	0.917	0.944	0.972	0.983	0.994	1.01	1.02	1.03
25	0.468	0.713	0.811	0.862	0.894	0.916	0.943	0.971	0.982	0.993	1.00	1.02	1.03
26	0.468	0.712	0.810	0.861	0.893	0.915	0.942	0.970	0.981	0.992	1.00	1.01	1.03
27	0.467	0.711	0.809	0.861	0.892	0.914	0.941	0.969	0.980	0.991	1.00	1.01	1.03
28	0.467	0.711	0.808	0.860	0.892	0.913	0.940	0.968	0.979	0.990	1.00	1.01	1.02
29	0.466	0.710	0.808	0.859	0.891	0.912	0.940	0.967	0.978	0.990	1.00	1.01	1.02
30	0.466	0.709	0.807	0.858	0.890	0.912	0.939	0.966	0.978	0.989	1.00	1.01	1.02
40	0.463	0.705	0.802	0.854	0.885	0.907	0.934	0.961	0.972	0.983	0.994	1.01	1.02
60	0.461	0.701	0.798	0.849	0.880	0.901	0.928	0.956	0.967	0.978	0.989	1.00	1.01
120	0.458	0.697	0.793	0.844	0.875	0.896	0.923	0.950	0.961	0.972	0.983	0.994	1.01
∞	0.455	0.693	0.789	0.839	0.870	0.891	0.918	0.945	0.956	0.967	0.978	0.989	1.00

$$Q(F|\nu_1,\nu_2)=0.25$$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	∞
1	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.19	9.41	9.49	9.58	9.67	9.76	9.85
2	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.35	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.48
3	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.44	2.45	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47
4	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
5	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.87	1.87
6	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.77	1.76	1.76	1.75	1.74	1.74
7	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.68	1.68	1.67	1.66	1.65	1.65
8	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.62	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58
9	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53
10	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.56	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.48
11	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.53	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.45
12	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.51	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42
13	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.49	1.47	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40
14	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.48	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38
15	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38	1.36
16	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.36	1.34
17	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.44	1.41	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33
18	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.43	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32
19	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.42	1.40	1.38	1.37	1.35	1.33	1.30
20	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.39	1.37	1.36	1.34	1.32	1.29
21	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.31	1.28
22	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.40	1.37	1.36	1.34	1.32	1.30	1.28
23	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.40	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.27
24	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.39	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	1.26
25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.39	1.36	1.34	1.33	1.31	1.28	1.25
26	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.38	1.35	1.34	1.32	1.30	1.28	1.25
27	1.38	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.38	1.35	1.33	1.32	1.30	1.27	1.24
28	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.34	1.33	1.31	1.29	1.27	1.24
29	1.38	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.37	1.34	1.32	1.31	1.29	1.26	1.23
30	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.37	1.34	1.32	1.30	1.28	1.26	1.23
40	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.35	1.31	1.30	1.28	1.25	1.22	1.19
60	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.32	1.29	1.27	1.25	1.22	1.19	1.15
120	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.30	1.26	1.24	1.22	1.19	1.16	1.10
∞	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.28	1.24	1.22	1.19	1.16	1.12	1.00

Взято из [26.11].

Таблица 26.9. **Процентные точки F-распределения; значения F как функции Q, ν_1, ν_2**

$Q(F|\nu_1,\nu_2)=0.1$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	59.44	60.71	61.22	61.74	62.26	62.79	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.37	9.41	9.42	9.44	9.46	9.47	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.25	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.95	3.90	3.87	3.84	3.82	3.79	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.34	3.27	3.24	3.21	3.17	3.14	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	2.98	2.90	2.87	2.84	2.80	2.76	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.75	2.67	2.63	2.59	2.56	2.51	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.59	2.50	2.46	2.42	2.38	2.34	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.47	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.38	2.28	2.24	2.20	2.16	2.11	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.30	2.21	2.17	2.12	2.08	2.03	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.24	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.20	2.10	2.05	2.01	1.96	1.90	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.15	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.12	2.02	1.97	1.92	1.87	1.82	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.09	1.99	1.94	1.89	1.84	1.78	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.06	1.96	1.91	1.86	1.81	1.75	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.04	1.93	1.89	1.84	1.78	1.72	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.02	1.91	1.86	1.81	1.76	1.70	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.00	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	1.98	1.87	1.83	1.78	1.72	1.66	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	1.97	1.86	1.81	1.76	1.70	1.64	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.95	1.84	1.80	1.74	1.69	1.62	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.94	1.83	1.78	1.73	1.67	1.61	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.93	1.82	1.77	1.72	1.66	1.59	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.92	1.81	1.76	1.71	1.65	1.58	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.91	1.80	1.75	1.70	1.64	1.57	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.90	1.79	1.74	1.69	1.63	1.56	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.89	1.78	1.73	1.68	1.62	1.55	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.88	1.77	1.72	1.67	1.61	1.54	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.83	1.71	1.66	1.61	1.54	1.47	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.77	1.66	1.60	1.54	1.48	1.40	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.72	1.60	1.55	1.48	1.41	1.32	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.67	1.55	1.49	1.42	1.34	1.24	1.00

$Q(F|\nu_1,\nu_2)=0.05$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	245.9	248.0	250.1	252.2	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.43	19.45	19.46	19.48	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.85	8.74	8.70	8.66	8.62	8.57	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.86	5.80	5.75	5.69	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.62	4.56	4.50	4.43	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.94	3.87	3.81	3.74	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.51	3.44	3.38	3.30	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.22	3.15	3.08	3.01	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	3.01	2.94	2.86	2.79	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.85	2.77	2.70	2.62	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.72	2.65	2.57	2.49	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.62	2.54	2.47	2.38	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.77	2.60	2.53	2.46	2.38	2.30	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.46	2.39	2.31	2.22	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.40	2.33	2.25	2.16	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.35	2.28	2.19	2.11	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.31	2.23	2.15	2.06	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.27	2.19	2.11	2.02	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.23	2.16	2.07	1.98	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.20	2.12	2.04	1.95	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.25	2.18	2.10	2.01	1.92	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.23	2.15	2.07	1.98	1.89	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.37	2.20	2.13	2.05	1.96	1.86	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.18	2.11	2.03	1.94	1.84	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.16	2.09	2.01	1.92	1.82	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	2.07	1.99	1.90	1.80	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.31	2.13	2.06	1.97	1.88	1.79	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.29	2.12	2.04	1.96	1.87	1.77	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.28	2.10	2.03	1.94	1.85	1.75	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	2.01	1.93	1.84	1.74	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.92	1.84	1.74	1.64	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.10	1.92	1.84	1.75	1.65	1.53	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.75	1.66	1.55	1.43	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	1.94	1.75	1.67	1.57	1.46	1.32	1.00

Таблица 26.9. Процентные точки F-распределения; значения F как функции Q, ν_1, ν_2

$Q(F|\nu_1,\nu_2)=0.025$

$\nu_2\backslash\nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	956.7	976.7	984.9	993.1	1001	1010	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.37	39.41	39.43	39.45	39.46	39.48	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.54	14.34	14.25	14.17	14.08	13.99	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	8.98	8.75	8.66	8.56	8.46	8.36	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.76	6.52	6.43	6.33	6.23	6.12	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.60	5.37	5.27	5.17	5.07	4.96	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.90	4.67	4.57	4.47	4.36	4.25	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.43	4.20	4.10	4.00	3.89	3.78	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.10	3.87	3.77	3.67	3.56	3.45	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.85	3.62	3.52	3.42	3.31	3.20	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.66	3.43	3.33	3.23	3.12	3.00	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.51	3.28	3.18	3.07	2.96	2.85	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.39	3.15	3.05	2.95	2.84	2.72	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.29	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.20	2.96	2.86	2.76	2.64	2.52	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.12	2.89	2.79	2.68	2.57	2.45	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.06	2.82	2.72	2.62	2.50	2.38	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.01	2.77	2.67	2.56	2.44	2.32	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	2.96	2.72	2.62	2.51	2.39	2.27	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	2.91	2.68	2.57	2.46	2.35	2.22	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.87	2.64	2.53	2.42	2.31	2.18	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.84	2.60	2.50	2.39	2.27	2.14	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.81	2.57	2.47	2.36	2.24	2.11	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.78	2.54	2.44	2.33	2.21	2.08	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.75	2.51	2.41	2.30	2.18	2.05	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.73	2.49	2.39	2.28	2.16	2.03	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.71	2.47	2.36	2.25	2.13	2.00	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.69	2.45	2.34	2.23	2.11	1.98	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.67	2.43	2.32	2.21	2.09	1.96	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.65	2.41	2.31	2.20	2.07	1.94	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.53	2.29	2.18	2.07	1.94	1.80	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.41	2.17	2.06	1.94	1.82	1.67	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.30	2.05	1.94	1.82	1.69	1.53	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.19	1.94	1.83	1.71	1.57	1.39	1.00

$Q(F|\nu_1,\nu_2)=0.01$

$\nu_2\backslash\nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5982	6106	6157	6209	6261	6313	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.37	99.42	99.43	99.45	99.47	99.48	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.49	27.05	26.87	26.69	26.50	26.32	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.80	14.37	14.20	14.02	13.84	13.65	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.29	9.89	9.72	9.55	9.38	9.20	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.10	7.72	7.56	7.40	7.23	7.06	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.84	6.47	6.31	6.16	5.99	5.82	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.03	5.67	5.52	5.36	5.20	5.03	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.47	5.11	4.96	4.81	4.65	4.48	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.06	4.71	4.56	4.41	4.25	4.08	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.74	4.40	4.25	4.10	3.94	3.78	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.50	4.16	4.01	3.86	3.70	3.54	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.30	3.96	3.82	3.66	3.51	3.34	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.14	3.80	3.66	3.51	3.35	3.18	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.00	3.67	3.52	3.37	3.21	3.05	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	3.89	3.55	3.41	3.26	3.10	2.93	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.79	3.46	3.31	3.16	3.00	2.83	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.71	3.37	3.23	3.08	2.92	2.75	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.63	3.30	3.15	3.00	2.84	2.67	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.56	3.23	3.09	2.94	2.78	2.61	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.51	3.17	3.03	2.88	2.72	2.55	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.45	3.12	2.98	2.83	2.67	2.50	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.41	3.07	2.93	2.78	2.62	2.45	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.36	3.03	2.89	2.74	2.58	2.40	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.32	2.99	2.85	2.70	2.54	2.36	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.29	2.96	2.81	2.66	2.50	2.33	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.26	2.93	2.78	2.63	2.47	2.29	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.23	2.90	2.75	2.60	2.44	2.26	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.20	2.87	2.73	2.57	2.41	2.23	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.17	2.84	2.70	2.55	2.39	2.21	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	2.99	2.66	2.52	2.37	2.20	2.02	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.82	2.50	2.35	2.20	2.03	1.84	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.66	2.34	2.19	2.03	1.86	1.66	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.51	2.18	2.04	1.88	1.70	1.47	1.00

Таблица 26.9. Процентные точки F-распределения; значения F как функции Q, ν_1, ν_2

$Q(F|\nu_1,\nu_2)=0.005$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	∞
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23925	24426	24630	24836	25044	25253	25465
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5
3	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.13	43.39	43.08	42.78	42.47	42.15	41.83
4	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.35	20.70	20.44	20.17	19.89	19.61	19.32
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	13.96	13.38	13.15	12.90	12.66	12.40	12.14
6	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.57	10.03	9.81	9.59	9.36	9.12	8.88
7	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.68	8.18	7.97	7.75	7.53	7.31	7.08
8	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.50	7.01	6.81	6.61	6.40	6.18	5.95
9	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.69	6.23	6.03	5.83	5.62	5.41	5.19
10	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.12	5.66	5.47	5.27	5.07	4.86	4.64
11	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.68	5.24	5.05	4.86	4.65	4.44	4.23
12	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.35	4.91	4.72	4.53	4.33	4.12	3.90
13	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.08	4.64	4.46	4.27	4.07	3.87	3.65
14	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	4.86	4.43	4.25	4.06	3.86	3.66	3.44
15	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.67	4.25	4.07	3.88	3.69	3.48	3.26
16	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.52	4.10	3.92	3.73	3.54	3.33	3.11
17	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.39	3.97	3.79	3.61	3.41	3.21	2.98
18	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.28	3.86	3.68	3.50	3.30	3.10	2.87
19	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.18	3.76	3.59	3.40	3.21	3.00	2.78
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.09	3.68	3.50	3.32	3.12	2.92	2.69
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.01	3.60	3.43	3.24	3.05	2.84	2.61
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	3.94	3.54	3.36	3.18	2.98	2.77	2.55
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	3.88	3.47	3.30	3.12	2.92	2.71	2.48
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.83	3.42	3.25	3.06	2.87	2.66	2.43
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.78	3.37	3.20	3.01	2.82	2.61	2.38
26	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.73	3.33	3.15	2.97	2.77	2.56	2.33
27	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.69	3.28	3.11	2.93	2.73	2.52	2.29
28	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.65	3.25	3.07	2.89	2.69	2.48	2.25
29	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.61	3.21	3.04	2.86	2.66	2.45	2.21
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.58	3.18	3.01	2.82	2.63	2.42	2.18
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.35	2.95	2.78	2.60	2.40	2.18	1.93
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.13	2.74	2.57	2.39	2.19	1.96	1.69
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	2.93	2.54	2.37	2.19	1.98	1.75	1.43
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.74	2.36	2.19	2.00	1.79	1.53	1.00

$Q(F|\nu_1,\nu_2)=0.001$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	∞
1	(5)4.053	(5)5.000	(5)5.404	(5)5.625	(5)5.764	(5)5.859	(5)5.981	(5)6.107	(5)6.158	(5)6.209	(5)6.261	(5)6.313	(5)6.366
2	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5
3	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	130.6	128.3	127.4	126.4	125.4	124.5	123.5
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.00	47.41	46.76	46.10	45.43	44.75	44.05
5	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.84	27.64	26.42	25.91	25.39	24.87	24.33	23.79
6	35.51	27.00	23.70	21.92	20.81	20.03	19.03	17.99	17.56	17.12	16.67	16.21	15.75
7	29.25	21.69	18.77	17.19	16.21	15.52	14.63	13.71	13.32	12.93	12.53	12.12	11.70
8	25.42	18.49	15.83	14.39	13.49	12.86	12.04	11.19	10.84	10.48	10.11	9.73	9.33
9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.37	9.57	9.24	8.90	8.55	8.19	7.81
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.92	9.20	8.45	8.13	7.80	7.47	7.12	6.76
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.35	7.63	7.32	7.01	6.68	6.35	6.00
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	7.71	7.00	6.71	6.40	6.09	5.76	5.42
13	17.81	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.21	6.52	6.23	5.93	5.63	5.30	4.97
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.43	6.80	6.13	5.85	5.56	5.25	4.94	4.60
15	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.47	5.81	5.54	5.25	4.95	4.64	4.31
16	16.12	10.97	9.00	7.94	7.27	6.81	6.19	5.55	5.27	4.99	4.70	4.39	4.06
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	5.96	5.32	5.05	4.78	4.48	4.18	3.85
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	5.76	5.13	4.87	4.59	4.30	4.00	3.67
19	15.08	10.16	8.28	7.26	6.62	6.18	5.59	4.97	4.70	4.43	4.14	3.84	3.51
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.44	4.82	4.56	4.29	4.00	3.70	3.38
21	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.31	4.70	4.44	4.17	3.88	3.58	3.26
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.19	4.58	4.33	4.06	3.78	3.48	3.15
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6.08	5.65	5.09	4.48	4.23	3.96	3.68	3.38	3.05
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	4.99	4.39	4.14	3.87	3.59	3.29	2.97
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.88	5.46	4.91	4.31	4.06	3.79	3.52	3.22	2.89
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	4.83	4.24	3.99	3.72	3.44	3.15	2.82
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	4.76	4.17	3.92	3.66	3.38	3.08	2.75
28	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.69	4.11	3.86	3.60	3.32	3.02	2.69
29	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.64	4.05	3.80	3.54	3.27	2.97	2.64
30	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.58	4.00	3.75	3.49	3.22	2.92	2.59
40	12.61	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.21	3.64	3.40	3.15	2.87	2.57	2.23
60	11.97	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	3.87	3.31	3.08	2.83	2.55	2.25	1.89
120	11.38	7.32	5.79	4.95	4.42	4.04	3.55	3.02	2.78	2.53	2.26	1.95	1.54
∞	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.27	2.74	2.51	2.27	1.99	1.66	1.00

Таблица 26.10. Процентные точки t-распределения; значения t как функции A и ν

$\nu \backslash A$	0.2	0.5	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995	0.998	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619	6366.198	63661.977	636619.772
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.598	99.992	316.225	999.999
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924	28.000	60.397	130.155
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610	15.544	27.771	49.459
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869	11.178	17.897	28.477
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959	9.082	13.555	20.047
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408	7.885	11.215	15.764
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041	7.120	9.782	13.257
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781	6.594	8.827	11.637
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587	6.211	8.150	10.516
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437	5.921	7.648	9.702
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318	5.694	7.261	9.085
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221	5.513	6.955	8.604
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140	5.363	6.706	8.218
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073	5.239	6.502	7.903
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015	5.134	6.330	7.642
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.223	3.646	3.965	5.044	6.184	7.421
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922	4.966	6.059	7.232
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883	4.897	5.949	7.069
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850	4.837	5.854	6.927
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819	4.784	5.769	6.802
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792	4.736	5.694	6.692
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768	4.693	5.627	6.593
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.090	3.467	3.745	4.654	5.566	6.504
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725	4.619	5.511	6.424
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707	4.587	5.461	6.352
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690	4.558	5.415	6.286
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674	4.530	5.373	6.225
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659	4.506	5.335	6.170
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646	4.482	5.299	6.119
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551	4.321	5.053	5.768
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460	4.169	4.825	5.449
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373	4.025	4.613	5.158
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892

$$A = A(t|\nu) = \left[\sqrt{\nu}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1} \int_{-t}^{t} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} dx$$

Взято из [26.11] и [26.44].

Таблица 26.11. 2500 пятизначных случайных чисел

53479	81115	98036	12217	59526	40238	40577	39351	43211	69255
97344	70328	58116	91964	26240	44643	83287	97391	92823	77578
66023	38277	74523	71118	84892	13956	98899	92315	65783	59640
99776	75723	03172	43112	83086	81982	14538	26162	24899	20551
30176	48979	92153	38416	42436	26636	83903	44722	69210	69117
81874	83339	14988	99937	13213	30177	47967	93793	86693	98854
19839	90630	71863	95053	55532	60908	84108	55342	48479	63799
09337	33435	53869	52769	18801	25820	96198	66518	78314	97013
31151	58295	40823	41330	21093	93882	49192	44876	47185	81425
67619	52515	03037	81699	17106	64982	60834	85319	47814	08075
61946	48790	11602	83043	22257	11832	04344	95541	20366	55937
04811	64892	96346	79065	26999	43967	63485	93572	80753	96582
05763	39601	56140	25513	86151	78657	02184	29715	04334	15678
73260	56877	40794	13948	96289	90185	47111	66807	61849	44686
54909	09976	76580	02645	35795	44537	64428	35441	28318	99001
42583	36335	60068	04044	29678	16342	48592	25547	63177	75225
27266	27403	97520	23334	36453	33699	23672	45884	41515	04756
49843	11442	66682	36055	32002	78600	36924	59962	68191	62580
29316	40460	27076	69232	51423	58515	49920	03901	26597	33068
30463	27856	67798	16837	74273	05793	02900	63498	00782	35097
28708	84088	65535	44258	33869	82530	98399	26387	02836	36838
13183	50652	94872	28257	78547	55286	33591	61965	51723	14211
60796	76639	30157	40295	99476	28334	15368	42481	60312	42770
13486	46918	64683	07411	77842	01908	47796	65796	44230	77230
34914	94502	39374	34185	57500	22514	04060	94511	44612	10485
28105	04814	85170	86490	35695	03483	57315	63174	71902	71182
59231	45028	01173	08848	81925	71494	95401	34049	04851	65914
87437	82758	71093	36833	53582	25986	46005	42840	81683	21459
29046	01301	55343	65732	78714	43644	46248	53205	94868	48711
62035	71886	94506	15263	61435	10369	42054	68257	14385	79436
38856	80048	59973	73368	52876	47673	41020	82295	26430	87377
40666	43328	87379	86418	95841	25590	54137	94182	42308	07361
40588	90087	37729	08667	37256	20317	53316	50982	32900	32097
78237	86556	50276	20431	00243	02303	71029	49932	23245	00862
98247	67474	71455	69540	01169	03320	67017	92543	97977	52728
69977	78558	65430	32627	28312	61815	14598	79728	55699	91348
39843	23074	40814	03713	21891	96353	96806	24595	26203	26009
62880	87277	99895	99965	34374	42556	11679	99605	98011	48867
56138	64927	29454	52967	86624	62422	30163	76181	95317	39264
90804	56026	48994	64569	67465	60180	12972	03848	62582	93855
09665	44672	74762	33357	67301	80546	97659	11348	78771	45011
34756	50403	76634	12767	32220	34545	18100	53513	14521	72120
12157	73327	74196	26668	78087	53636	52304	00007	05708	63538
69384	07734	94451	76428	16121	09300	67417	68587	87932	38840
93358	64565	43766	45041	44930	69970	16964	08277	67752	60292
38879	35544	99563	85404	04913	62547	78406	01017	86187	22072
58314	60298	72394	69668	12474	93059	02053	29807	63645	12792
83568	10227	99471	74729	22075	10233	21575	20325	21317	57124
28067	91152	40568	33705	64510	07067	64374	26336	79652	31140
05730	75557	93161	80921	55873	54103	34801	83157	04534	81368

Взято из [26.55].

Таблица 26.11. 2500 пятизначных случайных чисел

26687	74223	43546	45699	94469	82125	37370	23966	68926	37664
60675	75169	24510	15100	02011	14375	65187	10630	64421	66745
45418	98635	83123	98558	09953	60255	42071	40930	97992	93085
69872	48026	89755	28470	44130	59979	91063	28766	85962	77173
03765	86366	99539	44183	23886	89977	11964	51581	18033	56239
84686	57636	32326	19867	71345	42002	96997	84379	27991	21459
91512	49670	32556	85189	28023	88151	62896	95498	29423	38138
10737	49307	18307	22246	22461	10003	93157	66984	44919	30467
54870	19676	58367	20905	38324	00026	98440	37427	22896	37637
48967	49579	65369	74305	62085	39297	10309	23173	74212	32272
91430	79112	03685	05411	23027	54735	91550	06250	18705	18909
92564	29567	47476	62804	73428	04535	86395	12162	59647	97726
41734	12199	77441	92415	63542	42115	84972	12454	33133	48467
25251	78110	54178	78241	09226	87529	35376	90690	54178	08561
91657	11563	66036	28523	83705	09956	76610	88116	78351	50877
00149	84745	63222	50533	50159	60433	04822	49577	89049	16162
53250	73200	84066	59620	61009	38542	05758	06178	80193	26466
25587	17481	56716	49749	70733	32733	60365	14108	52573	39391
01176	12182	06882	27562	75456	54261	38564	89054	96911	88906
83531	15544	40834	20296	88576	47815	96540	79462	78666	25353
19902	98866	32805	61091	91587	30340	84909	64047	67750	87638
96516	78705	25556	35181	29064	49005	29843	68949	50506	45862
99417	56171	19848	24352	51844	03791	72127	57958	08366	43190
77699	57853	93213	27342	28906	31052	65815	21637	49385	75406
32245	83794	99528	05150	27246	48263	62156	62469	97048	16511
12874	72753	66469	13782	64330	00056	73324	03920	13193	19466
63899	41910	45484	55461	66518	82486	74694	07865	09724	76490
16255	43271	26540	41298	35095	32170	70625	66407	01050	44225
75553	30207	41814	74985	40223	91223	64238	73012	83100	92041
41772	18441	34685	13892	38843	69007	10362	84125	08814	66785
09270	01245	81765	06809	10561	10080	17482	05471	82273	06902
85058	17815	71551	36356	97519	54144	51132	83169	27373	68609
80222	87572	62758	14858	36350	23304	70453	21065	63812	29860
83901	88028	56743	25598	79349	47880	77912	52020	84305	02897
36303	57833	77622	02238	53285	77316	40106	38456	92214	54278
91543	63886	60539	96334	20804	72692	08944	02870	74892	22598
14415	33816	78231	87674	96473	44451	25098	29296	50679	07798
82465	07781	09938	66874	72128	99685	84329	14530	08410	45953
27306	39843	05634	96368	72022	01278	92830	40094	31776	41822
91960	82766	02331	08797	33858	21847	17391	53755	58079	48498
59284	96108	91610	07483	37943	96832	15444	12091	36690	58317
10428	96003	71223	21352	78685	55964	35510	94805	23422	04492
65527	41039	79574	05105	59588	02115	33446	56780	18402	36279
59688	43078	93275	31978	08768	84805	50661	18523	83235	50602
44452	10188	43565	46531	93023	07618	12910	60934	53403	18401
87275	82013	59804	78595	60553	14038	12096	95472	42736	08573
94155	93110	49964	27753	85090	77677	69303	66323	77811	22791
26488	76394	91282	03419	68758	89575	66469	97835	66681	03171
37073	34547	88296	68638	12976	50896	10023	27220	05785	77538
83835	89575	55956	93957	30361	47679	83001	35056	07103	63072

Таблица 26.11. 2500 пятизначных случайных чисел

55034	81217	90564	81943	11241	84512	12288	89862	00760	76159
25521	99536	43233	48786	49221	06960	31564	21458	88199	06312
85421	72744	97242	66383	00132	05661	96442	37388	57671	27916
61219	48390	47344	30413	39392	91365	56203	79204	05330	31196
20230	03147	58854	11650	28415	12821	58931	30508	65989	26675
95776	83206	56144	55959	89787	64426	08448	45707	80364	60262
07603	17344	01148	83300	96955	65027	31713	89013	79557	49755
00645	17459	78742	39005	36027	98807	72666	54484	68262	38827
62950	83162	61504	31557	80590	47893	72360	72720	08396	33674
79350	10276	81933	26347	08068	67816	06659	87917	74166	85519
48339	69834	59047	82175	92010	58446	69591	56205	95700	86211
05842	08439	79836	50957	32059	32910	15842	13918	41365	80115
25855	02209	07307	59942	71389	76159	11263	38787	61541	22606
25272	16152	82323	70718	98081	38631	91956	49909	76253	33970
73003	29058	17605	49298	47675	90445	68919	05676	23823	84892
81310	94430	22663	06584	38142	00146	17496	51115	61458	65790
10024	44713	59832	80721	63711	67882	25100	45345	55743	67618
84671	52806	89124	37691	20897	82339	22627	06142	05773	03547
29296	58162	21858	33732	94056	88806	54603	00384	66340	69232
51771	94074	70630	41286	90583	87680	13961	55627	23670	35109
42166	56251	60770	51672	36031	77273	85218	14812	90758	23677
78355	67041	22492	51522	31164	30450	27600	44428	96380	26772
09552	51347	33864	89018	73418	81538	77399	30448	97740	18158
15771	63127	34847	05660	06156	48970	55699	61818	91763	20821
13231	99058	93754	36730	44286	44326	15729	37500	47269	13333
50583	03570	38472	73236	67613	72780	78174	18718	99092	64114
99485	57330	10634	74905	90671	19643	69903	60950	17968	37217
54676	39524	73785	48864	69835	62798	65205	69187	05572	74741
99343	71549	10248	76036	31702	76868	88909	69574	27642	00336
35492	40231	34868	55356	12847	68093	52643	32732	67016	46784
98170	25384	03841	23920	47954	10359	70114	11177	63298	99903
02670	86155	56860	02592	01646	42200	79950	37764	82341	71952
36934	42879	81637	79952	07066	41625	96804	92388	88860	68580
56851	12778	24309	73660	84264	24668	16686	02239	66022	64133
05464	28892	14271	23778	88599	17081	33884	88783	39015	57118
15025	20237	63386	71122	06620	07415	94982	32324	79427	70387
95610	08030	81469	91066	88857	56583	01224	28097	19726	71465
09026	40378	05731	55128	74298	49196	31669	42605	30368	96424
81431	99955	52462	67667	97322	69808	21240	65921	12629	92896
21431	59335	58627	94822	65484	09641	41018	85100	16110	32077
95832	76145	11636	80284	17787	97934	12822	73890	66009	27521
99813	44631	43746	99790	86823	12114	31706	05024	28156	04202
77210	31148	50543	11603	50934	02498	09184	95875	85840	71954
13268	02609	79833	66058	80277	08533	28676	37532	70535	82356
44285	71735	26620	54691	14909	52132	81110	74548	78853	31996
70526	45953	79637	57374	05053	31965	33376	13232	85666	86615
88386	11222	25080	71462	09818	46001	19065	68981	18310	74178
83161	73994	17209	79441	64091	49790	11936	44864	86978	34538
50214	71721	33851	45144	05696	29935	12823	01594	08453	52825
97689	29341	67747	80643	13620	23943	49396	83686	37302	95350

Таблица 26.11. 2500 пятизначных случайных чисел

12367	23891	31506	90721	18710	89140	58595	99425	22840	08267
38890	30239	34237	22578	74420	22734	26930	40604	10782	80128
80788	55410	39770	93317	18270	21141	52085	78093	85638	81140
02395	77585	08854	23562	33544	45796	10976	44721	24781	09690
73720	70184	69112	71887	80140	72876	38984	23409	63957	44751
61383	17222	55234	18963	39006	93504	18273	49815	52802	69675
39161	44282	14975	97498	25973	33605	60141	30030	77677	49294
80907	74484	39884	19885	37311	04209	49675	39596	01052	43999
09052	65670	63660	34035	06578	87837	28125	48883	50482	55735
33425	24226	32043	60082	20418	85047	53570	32554	64099	52326
72651	69474	73648	71530	55454	19576	15552	20577	12124	50038
04142	32092	83586	61825	35482	32736	63403	91499	37196	02762
85226	14193	52213	60746	24414	57858	31884	51266	82293	73553
54888	03579	91674	59502	08619	33790	29011	85193	62262	28684
33258	51516	82032	45233	39351	33229	59464	65545	76809	16982
75973	15957	32405	82081	02214	57143	33526	47194	94526	73253
90638	75314	35381	34451	49246	11465	25102	71489	89883	99708
65061	15498	93348	33566	19427	66826	03044	97361	08159	47485
64420	07427	82233	97812	39572	07766	65844	29980	15533	90114
27175	17389	76963	75117	45580	99904	47160	55364	25666	25405
32215	30094	87276	56896	15625	32594	80663	08082	19422	80717
54209	58043	72350	89828	02706	16815	89985	37380	44032	59366
59286	66964	84843	71549	67553	33867	83011	66213	69372	23903
83872	58167	01221	95558	22196	65905	38785	01355	47489	28170
83310	57080	03366	80017	39601	40698	56434	64055	02495	50880
64545	29500	13351	78647	92628	19354	60479	57338	52133	07114
39269	00076	55489	01524	76568	22571	20328	84623	30188	43904
29763	05675	28193	65514	11954	78599	63902	21346	19219	90286
06310	02998	01463	27738	90288	17697	64511	39552	34694	03211
97541	47607	57655	59102	21851	44446	07976	54295	84671	78755
82968	85717	11619	97721	53513	53781	98941	38401	70939	11319
76878	34727	12524	90642	16921	13669	17420	84483	68309	85241
87394	78884	87237	92086	95633	66841	22906	64989	86952	54700
74040	12731	59616	33697	12592	44891	67982	72972	89795	10587
47896	41413	66431	70046	50793	45920	96564	67958	56369	44725
87778	71697	64148	54363	92114	34037	59061	62051	62049	33526
96977	63143	72219	80040	11990	47698	95621	72990	29047	85893
43820	13285	77811	81697	29937	70750	02029	32377	00556	86687
57203	83960	40096	39234	65953	59911	91411	55573	88427	45573
49065	72171	80939	06017	90323	63687	07932	99587	49014	26452
94250	84270	95798	13477	80139	26335	55169	73417	40766	45170
68148	81382	82383	18674	40453	92828	30042	37412	43423	45138
12208	97809	33619	28868	41646	16734	88860	32636	41985	84615
88317	89705	26119	12416	19438	65665	60989	59766	11418	18250
56728	80359	29613	63052	15251	44684	64681	42354	51029	77680
07138	12320	01073	19304	87042	58920	28454	81069	93978	66659
21188	64554	55618	36088	24331	84390	16022	12200	77559	75661
02154	12250	88738	43917	03655	21099	60805	63246	26842	35816
90953	85238	32771	07305	36181	47420	19681	33184	41386	03249
80103	91308	12858	41293	00325	15013	19579	91132	12720	92603

Таблица 26.11. **2500 пятизначных случайных чисел**

92630	78240	19267	95457	53497	23894	37708	79862	76471	66418
79445	78735	71549	44843	26104	67318	00701	34986	66751	99723
59654	71966	27386	50004	05358	94031	29281	18544	52429	06080
31524	49587	76612	39789	13537	48086	59483	60680	84675	53014
06348	76938	90379	51392	55887	71015	09209	79157	24440	30244
28703	51709	94456	48396	73780	06436	86641	69239	57662	80181
68108	89266	94730	95761	75023	48464	65544	96583	18911	16391
99938	90704	93621	66330	33393	95261	95349	51769	91616	33238
91543	73196	34449	53513	83834	99411	58826	40456	69268	48562
42103	02781	73920	56297	72678	12249	25270	36678	21313	75767
17138	27584	25296	28387	51350	61664	37893	05363	44143	42677
28297	14280	54524	21616	95320	38174	60579	08089	94999	78460
09331	56712	51333	06289	75345	08811	82711	57392	25252	30333
31295	04204	93712	51287	05754	79396	87399	51773	33075	97061
36146	15560	27592	42089	99281	59640	15221	96079	09961	05371
29553	18432	13630	05529	02791	81017	49027	79031	50912	09399
23501	22642	63081	08191	89420	67800	55137	54707	32945	64522
57888	85846	67967	07835	11314	01545	48535	17142	08552	67457
55336	71264	88472	04334	63919	36394	11196	92470	70543	29776
10087	10072	55980	64688	68239	20461	89381	93809	00796	95945
34101	81277	66090	88872	37818	72142	67140	50785	21380	16703
53362	44940	60430	22834	14130	96593	23298	56203	92671	15925
82975	66158	84731	19436	55790	69229	28661	13675	99318	76873
54827	84673	22898	08094	14326	87038	42892	21127	30712	48489
25464	59098	27436	89421	80754	89924	19097	67737	80368	08795
67609	60214	41475	84950	40133	02546	09570	45682	50165	15609
44921	70924	61295	51137	47596	86735	35561	76649	18217	63446
33170	30972	98130	95828	49786	13301	36081	80761	33985	68621
84687	85445	06208	17654	51333	02878	35010	67578	61574	20749
71886	56450	36567	09395	96951	35507	17555	35212	69106	01679
00475	02274	74722	14721	40215	21351	08596	45625	83981	63748
25993	38881	68361	59560	41274	69742	40703	37993	03435	18873
92882	53178	99195	93803	56985	53089	15305	50522	55900	43026
25138	26810	07093	15677	60688	04410	24505	37890	67186	62829
84631	71882	12991	83028	82484	90339	91950	74579	03539	90122
34003	92326	12793	61453	48121	74271	28363	66561	75220	35908
53775	45749	05734	86169	42762	70175	97310	73894	88606	19994
59316	97885	72807	54966	60859	11932	35265	71601	55577	67715
20479	66557	50705	26999	09854	52591	14063	30214	19890	19292
86180	84931	25455	26044	02227	52015	21820	50599	51671	65411
21451	68001	72710	40261	61281	13172	63819	48970	51732	54113
98062	68375	80089	24135	72355	95428	11808	29740	81644	86610
01788	64429	14430	94575	75153	94576	61393	96192	03227	32258
62465	04841	43272	68702	01274	05437	22953	18946	99053	41690
94324	31089	84159	92933	99989	89500	91586	02802	69471	68274
05797	43984	21575	09908	70221	19791	51578	36432	33494	79888
10395	14289	52185	09721	25789	38562	54794	04897	59012	89251
36177	56986	25549	59730	64718	52630	31100	62384	49483	11409
25633	89619	75882	98256	02126	72099	57183	55887	09320	73463
16464	48280	94254	45777	45150	68865	11382	11782	22695	41988

ЛИТЕРАТУРА

Книги

26.1. Cramer H. Mathematical methods of statistics. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1951. Русский перевод: Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: ИЛ, 1948.

26.2. Erdélyi A. et al. Higher transcendental functions. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1955, V. I, II, III. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука 1973, Т.I; 1974, Т.II; 1967, Т.III.

26.3. Feller W. Probability theory and its applications. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1957. Русский перевод: Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967, Т.I.

26.4. Fisher R. A. Contributions to mathematical statistics, Paper 30 (with Cormish E. A.). Moments and cumulants in the specification of distributions. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1950.

26.5. Histings C., Jr. Approximations for digital computers. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1955.

26.6. Kendall M. G., Stuart A. The advanced theory of statistics, V. 1. Distribution theory. — L.: Charles Griffin Co., 1958. Русский перевод: Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Теория распределения. — М.: Наука, 1966.

Таблицы. Общие вопросы

26.7. Fisher R. A., Yatss F. Statistical tables for biological, agricultural and medical research. — L.: Oliver and Boyd, 1949.

26.8. Greenwood J. A.; Hartley H. O. Guide to tables in mathematical statistics. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1962.

26.9. Hald A. Statistical tables and formulas. N.Y.: John Wiley and Sons, 1952.

26.10. Owen D. B. Handbook of statistical tables. — Reading: Addison-Wesley Publishing Co., 1962. Русский перевод: Оуэн Д. Б. Сборник статистических таблиц. — М.: ВЦ АН СССР, 1966.

26.11. Pearson E. S., Hartley H. O. Biometrika tables for statisticians. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1954, V.I.

26.12. Tables for statisticians and biometricians/Ed. K. Pearson. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1914, Part I; 1931, part II.

Нормальное распределение

26.13. Airey J. R. Table of Hh functions. — In: British Association for the Advancement of Science. Mathematical Tables. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931, T.I.

26.14. Harvard University. Tables of the error function and of its first twenty derivatives. — Cambridge: Harvard Univ. Press, 1952.

$P(x) - 1/2,\ Z(x),\ Z^{(n)}(x),\ n = 1(1)4,\ x = 0(0.004)$ $6.468,\ 6D;\ Z^{(n)}x,\ n = 5(1)10,\ x = 0(0.004)8.236,\ 6D;$ $Z^{(n)}(x),\ n = 11(1)15,\ x = 0(0.002)9.61,\ 7S;$ $Z^{(n)}(x), n = 16(1)20,\ x = 0(0.002)10.902,\ 7S$ или $6D$.

26.15. Kelley T. L. The Kelley Statistical Tables. — Cambridge, Harvard Univ. Press, 1948. x for $P(x) = 0.5(0.0001)0,9999$ and corresponding values of $Z(x)$, 8D. Русский перевод: Келли Т. Л. Статистические таблицы. — М.: ВЦ АН СССР, 1966.

26.16. National Bureau of Standards. A guide to tables of the normal probability integral. — Washington: Government Printing Office, 1951. — (Applied Math. Series; 21).

26.17. National Bureau of Standards. Tables of normal probability functions. — Washington: Government Printing Office, 1953. — (Applied Math. Series; 23).

$Z(x),\ A(x),\ x = 0(0.0001)\,1(0.001)\,7.8,\ 15D;$

$Z(x),\ 2[1 - P(x)],\ x = 6(0.01)\,10,\ 7S.$

26.18. Sheppard W. F. The probability integral. — In: British Association for the Advancement of Science. Mathematical Tables. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1939, V. VII.

$A(x)/Z(x),\ x = 0(0.01)10,\ 12D;$

$x = 0(0.1)10,\ 24D.$

Двумерное нормальное распределение

26.19. Bell Aircraft Corporation. Table of circular normal probabilities. — Report № 02—949—106—1956. Табулирован интеграл от плотности кругового нормального распределения, взятый по кругу с центром на расстоянии r от начала координат и радиусом R;

$R = 0(0.01)4.59,\ r = 0(0.01)3,\ 5D.$

26.20. National Bureau of Standards. Tables of the bivariate normal distribution function and related functions. — Washington: Government Printing Office, 1959. — (Applied Math. Series; 50).

$L(h, k, \rho),\ h, k = 0(0.1)4,\ \rho = 0(0.05)0.95(0.01)1,\ 6D;$ $L(h, k, -\rho),\ h, k = 0(0.01)A,\ \rho = 0(0.05)0.95(0.01)1,$ $L < 0{,}5 \times 10^{-7},\ 7D;\ V(h, ah),\ h = 0(0.01)\,4(0.02)$ $4.6(0.1)5.6,\ \infty,\ 7D;\ V(ah, h),\ a = 0.1(0.1)1,$ $h = 0(0.01)\,4(0.02)\,4.6(0.1)\,5.6,\ \infty,\ 7D.$

26.21. Nicholson C. The probability integral for two variables. — Biometrika, 1943, 33, p. 59—72.

$V(h, ah),\ h = 0.1(0.1)3,\ ah = 0.1(0.1)3,\ \infty,\ 6D.$

26.22. Owen D. B. Tables for computing bivariate normal probabilities. — Ann. Math. Statist., 1956, 27, p. 1075—1090.

$$T(h, a) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg} a - V(h, ah),$$

$a = 0.25(0.25)\,1,\ h = 0(0.01)\,2(0.02)\,3;$

$a = 0(0.01)\,1,\ \infty,\ h = 0(0.25)\,3;$

$a = 0.1,\ 02(0.05)0.5(0.1)\,0.8,\ 1,\ \infty,$

$h = 3(0.05)\,3.5(0.1)\,4.7,\ 6D.$

26.24. T a b l e s VIII and IX. Part II of [26.12]

$L(h,\ k,\ \rho),\ h,\ k = 0.(0.1)2.6,\ \rho = -1(0.05)1,\ 6D$ $(\rho > 0).\ 7D\ (\rho < 0).$

Распределение χ^2, нецентральное распределение χ^2, неполная гамма-функция, распределение Пуассона

26.25. C a m p b e l l G. A. Probability curves showing Poisson's exponential summation. — Bell System Technical Journal, 1923, p. 95—113.

$m = \chi^2/2,\ Q(\chi^2 \mid \nu) = 0.000001,\ 2D;\ 0.0001,\ 0.01,$ $3D;\ 0.1,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 0.9,\ 4D;\ 0.99,\ 0.9999,$ $3D;\ 0.999999,\ 2D;\ c = \nu/2 = 1(1)101.$

26.26. Table IV of [26.7]

$\chi^2, Q(\chi^2 \mid \nu) = 0.001,\ 0.01,\ 0.02,\ 0.05,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,$ $0.5,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9,\ 0.95,\ 0.98,\ 0.99,\ \nu = 1(1)30,\ 3D,$ $3S.$

26.27. F i x F. Tables of noncentral χ^2. — Univ. of California Publications in Statistics, 1949, **1**, p. 15—19.

$\lambda,\ P(\chi'^2 \mid \nu,\ \lambda) = 0.1(0.1)0.9,\ Q(\chi'^2 \mid \nu) = 0.01,\ 0.05;$ $\nu = 1(1)\ 20(2)\ 40(5)60(10)\ 100,\ 3D,\ 3S.$

26.28. H a r t l e y H. O., P e a r s o n E. S. Tables of the χ^2 integral and of the cumulative Poisson distribution. — Biometrika, 1950, **37**, p. 313—325.

$P(\chi^2 \mid \nu),\ \nu = 1(1)20(2)70,\ \chi^2 = 0(0.001)$ $0.01(0.01)\ 0.1(0.1)\ 2(0.2)\ 10(0.5)\ 20(1)\ 40(2)\ 134,\ 5D.$

26.29. K i t a g a w a T. Tables of Poisson distribution. — Tokyo: Baifukan, 1951.

$e^{-m}m^s/s!,\ m = 0.001(0.001)\ 1(0.01)\ 5,\ 8D;$ $s = 5(0.01)10,\ 7D.$

26.30. M o l i n a E. C. Poisson's exponential binomial limit. — N.Y.: Van Nostrand Co., 1940.

$$e^{-m}m^s/s!,\ P(\chi^2 \mid \nu) = \sum_{j=c}^{\infty} e^{-m}m^j/j!,$$

$m = \chi^2/2 = 0(0.1)16(1)100,\ 6D;$ $m = 0(0.001)0.01(0.01)3,\ 7D.$

26.31. Tables of the incomplete Г-function / Biometrika Office, University College, Ed. K. Pearson. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1934.

$I(u,\ p),\ p = -1(0.05)\ 0(0.1)\ 5(0.2)\ 50,$ $u = 0(0.1)\ I(u,\ p) = 1,\ 7D;\ p = -1(0.01) - 0.75,$ $u = 0(0.1)6,\ 5D;\ \ln [I(u,\ p)/u^{p+1}],$ $p = -1(0.05)0(0.1)10,\ u = 0(0.1)\ 1.5,\ 8D;$ $[x^{p+1}\Gamma(p+1)]^{-1}\gamma(p,\ x),$ $p = -1(0.01) - 0.9,\ x = 0(0.01)3,\ 7D.$

26.32. С л у ц к и й Е. Е. Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятностей χ^2. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950.

$\Gamma(\chi^2,\ \nu) = (\chi^2/2)^{-\nu/2}P(\chi^2 \mid \nu),\ \ P(t,\ \nu) = Q(\chi^2 \mid \nu),$ $\Pi(t, x) = Q(\chi^2 \mid \nu),\ t = (2\chi^2)^{1/2} - (2\nu)^{1/2},\ x = (\nu/2)^{-1/2},$ $\Gamma(\chi^2,\ \nu),\ \chi^2 = 0(0.05)2(0.1)10,\ \nu = 0(0.05)2(0.1)6;$ $Q(\chi^2/\nu),\ \chi^2 = 0(0.1)3.2,\ \nu = 0(0.05)2(0.1)6;$ $\chi^2 = 3.2(0.2)7(0.5)10(1)35,\ \nu = 0(0.1)0.4(0.2)6;$ $P(t,\ \nu),\ t = -4(0.1)4.8,\ \nu = 6(0.5)11(1)32;$ $\Pi(t,\ x),\ t = -4.5(0.1)4.8,\ x = 0(0.02)0.22$ $(0.01)0.25,\ 5D.$

Неполная бета-функция, биномиальное распределение

26.33. Harvard University. Tables of the cumulative binomial probability distribution. — Cambridge: Harvard Univ. Press, 1955.

$$\sum_{s=0}^{n} (s^n)p^s(1-p)^{n-s},\ p = 0.01(0.01)0.5,\ 1/16,\ 1/12,\ 1/8,$$

$1/6,\ 3/16,\ 5/16,\ 1/3,\ 3/8,\ 5/12,\ 7/16,\ n = 1(1)50(2)100$ $(10)200(20)500(50)1000,\ 5D.$

26.34. National Bureau of Standards. Tables of the binomial probability distribution. — Washington: Government Printing Office, 1950. — (Applied Math. Series; **6**).

$$(s^n)p^s(1-p)^{n-s},\ \sum_{s=0}^{n} (s^n)p^s(1-p)^{n-s},$$

$p = 0.01(0.01)\ 0.5,\ n = 2(1)\ 49,\ 7D.$

26.35. Tables of the incomplete beta function/ Biometrika Office, University College; Ed. Pearson K. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1948.

$I_x(a,\ b),\ x = 0.01(0.01)\ 1;\ a,\ b = 0.5(0.5)\ 11(1)\ 50,$ $a \geqslant b,\ 7D.$

Р у с с к и й п е р е в о д: П и р с о н К. Таблицы неполной бета-функции. — М.: ВЦ АН СССР, 1974.

26.36. R o b e r t s o n W. H. Tables of the binomial distribution function for small values of p/Office of Technical Services. — U.S. Department of Commerce; 1960.

$$\sum_{s=0}^{c} (s^n)p^s(1-p)^{n-s},\ p = 0.001(0.001)\ 0.02,$$

$n = 2(1)\ 100(2)\ 200(10)\ 500(20)\ 1000;$ $p = 0.021(0.001)\ 0.05,\ n = 2(1)\ 50(2)\ 100(5)$ $200(10)\ 300(20)\ 600(50)\ 1000,\ 5D.$

26.37. R o m i g H. G. 50 — 100 Binomial tables. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1953.

$$(s^n)p^s(1-p)^{n-s},\ \sum_{s=0}^{c} (s^n)\ p^s(1-p)^{n-s},$$

$p = 0.01(0.01)\ 0.5,\ n = 50(5)\ 100,\ 6D.$

26.38. T h o m p s o n C. M. Tables of percentage points of the incomplete beta function. — Biometrika, 1941, **32**, p. 151—181. Протабулированы значения x, для которых $I_x(a,\ b) = 0.005,\ 0.01,\ 0.025,\ 0.05,\ 0.1,\ 0.25,\ 0.5;\ 2a = 1(1)30,\ 40,\ 60,\ 120,\ \infty;$ $2b = 1(1)10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 24,\ 30,\ 40,\ 60,\ 120,\ \infty,\ 5D.$

26.39. U. S. Ordanance Corps. Tables of the cumulative binomial probabilities. — ORDP 20-1. — Washington: Office of Technical Services, 1952.

$$\sum_{s=0}^{n} (s^n) p^s (1-p)^{n-s}, \quad p = 0.01(0.01)\,0.5,$$

$n = 1(1)150$, 7D.

F-распределение и нецентральное F-распределение

26.40. Table V of [26.7]. — Табулируются значения F и $Z = \ln F/2$, $Q(F \mid \nu_1, \nu_2) = 0.2, 0.1, 0.05, 0.01, 0.001$; $\nu_1 = 1(1)6, 8, 12, 24, \infty$; $\nu_2 = 1(1)30, 40, 60, 120, \infty$, 2D для F, 4D для Z.

26.41. Lehmer E. Inverse tables of probabilities of errors of the second kind. — Ann. Math. Statist., 1944, 15, p. 388—398.

$\Phi = \sqrt{\lambda(\nu_1+1)}$, $\nu_1 = 1(1)10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120, \infty$; $\nu_2 = 2(2)20, 24, 30, 40, 60, 80, 120, 240, \infty$;

$P(F' \mid \nu_1, \nu_2, \Phi) = 0.2, 0.3$,

$Q(F' \mid \nu_1, \nu_2) = 0.01, 0.05$, 3D, 3S.

26.42. Merrington M., Thompson C. M. Tables of percentage points of the inverted beta (F) distribution. — Biometrika, 1943, 33, p. 73—88.

F, $Q(F \mid \nu_1, \nu_2) = 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005$;

$\nu_1 = 1(1)10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120, \infty$;

$\nu_2 = 1(1)30, 40, 60, 120, \infty$.

26.43. Tang P. C. The power function of the analysis of variance tests with tables and illustrations of their use. — Statistical Research Memoirs, 1938, 11, p. 126—149 and tables.

$P(F' \mid \nu_1, \nu_2, \Phi)$, $\nu_1 = 1(1)8$, $\nu_2 = 2(2)6(1)30, 60, \infty$;

$\Phi = \sqrt{\lambda(\nu_1+1)} = 1(0.5)3(1)8$, $Q(F' \mid \nu_1, \nu_2) = 0.01, 0.05$, 3D.

t-распределение Стьюдента и нецентральное t-распределение Стьюдента

26.44. Federighi E. T. Extended tables of the percentage points of Student's t-distribution. — J. Amer. Statist. Assoc., 1959, 54, p. 683—688.

t, $Q(t \mid \nu) = [1 - A(t \mid \nu)]/2 = 0.25 \times 10^{-n}$, 1×10^{-n}, $n = 0(1)5$, $\nu = 1(1)30(5)60(10)100, 200, 500, 1000, 2000, 10000, \infty$; 3D.

26.45. Table III of [26.7]

t, $A(t \mid \nu) = 0.1(0.1)0.9, 0.95, 0.98, 0.99, 0.999$,

$\nu = 1(1)30, 40, 60, 120, \infty$; 3D.

26.46. Johnson N. L., Welch B. L. Applications of the non-central t-distribution. Biometrika, 1939, 31, p. 362—389.
Табулирована вспомогательная функция для вычисления δ при данных t' и p или t' при данных δ и p, где

$P(t' \mid \nu, \delta) = p = 0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1(0.1)0.9, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995$.

26.47. Neyman J., Tikarska B. Errors of the second kind in testing Student's hypthesis. — J. Amer. Statist. Assoc., 1936, 31, p. 318—326.

δ, $P(t' \mid \nu, \delta) = 0.01, 0.05, 0.1(0.1)\,0.9$;

$\nu = 1(1)\,30, \infty$; $Q(t' \mid \nu) = 0.01, 0.05$.

26.48. Table 9 of [26.11].

$P(t \mid \nu) = [1 + A(t \mid \nu)]/2$, $t = 0(0.1)\,4(0.2)\,8$;

$\nu = 1(1)\,20$; 5D; $t = 0(0.05)\,2(0.1)\,4, 5$;

$\nu = 20(1)\,24, 30, 40, 60, 120, \infty$; 5D;

26.49. Resnikoff G. S., Lieberman G. J. Tables of the noncentral t-distribution. — Stanford: Stanford Univ. Press, 1957.

$\partial P(t' \mid \nu, \delta)/\partial t'$, $P(t' \mid \nu, \delta)$, $\nu = 2(1)\,24(5)\,49$,

$\delta = \sqrt{\nu+1}\, x_p$, $Q(x_p) = p = 0.25, 0.15, 0.1, 0.065, 0.04, 0.025, 0.01, 0.004, 0.0025, 0.001$; 4D.

Случайные числа и числа с нормальным законом распределения

26.50. Fieller E. C., Lewis T., Pearson E. S. Correlated random normal deviates. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1955. — (Tracts for Computers; 26).

26.51. Hull T. E., Dobell A. R. Random number generators. — Soc. Ind. Appl. Math.; 1962, 4, p. 230—254.

26.52. Kendall M.G., Babington Smith B. Ramdon sampling numbers. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1939.

26.53. Marsaglia G. Random variables and computers. — In: Proc. Third Prague Conference in Probability Theory, 1962.

26.54. Muller M. E. An inverse method for the generation of random normal deviates on large scale computers. — Math. Tables Aids Comp., 1958, 63, p. 167—174.

26.55. Rand Corporation. Ammillion random digits with 100000 normal deviates. — Glencoe: Free Press, 1955.

26.56. Wold H. Random normal deviates. — Cambridge: Cambridge Univ. Press; 1948. — (Tracts for Computers; 25).

ТАБЛИЦЫ, ДОБАВЛЕННЫЕ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

26.57. Барк Л. С., Большев Л. Н., Кузнецов П. И., Черенков А. П. Таблицы распределения Релея — Райса. — М.: Изд-во АН СССР, 1964.

26.58. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1965.

26.59. Пагурова В. И. Таблицы неполной гамма-функции. — М.: ВЦ АН СССР, 1963.

26.60. Пирсон К. Таблицы неполной бета-функции. — М.: ВЦ АН СССР, 1974.

26.61. Смирнов Н. В., Большев Л. Н. Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.

26.62. Таблицы нормального интеграла, нормальной плотности и ее нормированных производных / Под ред. Н. В. Смирнова. — М.: Изд-во АН СССР, 1960.

26.63. Таблицы функций распределения и плотностей распределения Стьюдента / Под ред. Н. В. Смирнова. — М.: Изд-во АН СССР, 1960.

Глава 27
РАЗНЫЕ ФУНКЦИИ

А. СТИГАН

СОДЕРЖАНИЕ

27.1. ФУНКЦИИ ДЕБАЯ

Представления в виде ряда

27.1.1. $\int\limits_0^x \frac{t^n\,dt}{e^t-1} =$

$$= x^n\left[\frac{1}{n} - \frac{x}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}x^{2k}}{(2k+n)(2k)!}\right]$$

$$(|x| < 2\pi,\ n \geqslant 1).$$

Числа Бернулли B_{2k} см. в гл. 23.

27.1.2. $\int\limits_x^{\infty} \frac{t^n\,dt}{e^t-1} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}\left[\frac{x^n}{k} + \frac{nx^{n-1}}{k^2} + \frac{n(n-1)}{k^3}x^{n-2} + \ldots + \frac{n!}{k^{n+1}}\right]$$

$$(x > 0,\ n \geqslant 1).$$

Связь с дзета-функцией Римана (см. гл. 23)

27.1.3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{t^n\,dt}{e^t-1} = n!\,\zeta(n+1).$

27.1. Beattie J. A. Six-place tables of the Debye energy and specific heat functions. — J. Math. Phys., 1926, **6**, p. 1—32.

$$\frac{3}{x^3}\int\limits_0^x \frac{y^3\,dy}{e^y-1},\quad \frac{12}{x^3}\left[\int\limits_0^x \frac{y^3\,dy}{e^y-1} - \frac{3x}{e^x-1}\right].$$

$x = 0(0.01)\,24$, 6S.

27.2. Grüneisen E. Die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes reiner Metalle von der Temperatur.— Ann. Physik., 1933, **16**, №5, p. 530—540.

$$\frac{20}{x^4}\int\limits_0^x \frac{t^4\,dt}{e^t-1} - \frac{4x}{e^x-1},$$

$x = 0(0.1)\,13(0.2)\,18(1)\,20(2)\,52(4)\,80$, 4S.

Таблица 27.1. Функции Дебая

x	$\frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{t\,dt}{e^t-1}$	$\frac{2}{x^2}\int\limits_0^x \frac{t^2\,dt}{e^t-1}$	$\frac{3}{x^3}\int\limits_0^x \frac{t^3\,dt}{e^t-1}$	$\frac{4}{x^4}\int\limits_0^x \frac{t^4\,dt}{e^t-1}$
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.975278	0.967083	0.963000	0.960555
0.2	0.951111	0.934999	0.926999	0.922221
0.3	0.927498	0.903746	0.891995	0.884994
0.4	0.904437	0.873322	0.857985	0.848871
0.5	0.881927	0.843721	0.824963	0.813846
0.6	0.859964	0.814940	0.792924	0.779911
0.7	0.838545	0.786973	0.761859	0.747057
0.8	0.817665	0.759813	0.731759	0.715275
0.9	0.797320	0.733451	0.702615	0.684551
1.0	0.777505	0.707878	0.674416	0.654874
1.1	0.758213	0.683086	0.647148	0.626228
1.2	0.739438	0.659064	0.620798	0.598598
1.3	0.721173	0.635800	0.595351	0.571967
1.4	0.703412	0.613281	0.570793	0.546317
1.6	0.669366	0.570431	0.524275	0.497882
1.8	0.637235	0.530404	0.481103	0.453131
2.0	0.606947	0.493083	0.441129	0.411893
2.4	0.578427	0.458343	0.404194	0.373984
2.4	0.551596	0.426057	0.370137	0.339218
2.6	0.526375	0.396095	0.338793	0.307405
2.8	0.502682	0.368324	0.309995	0.278355
3.0	0.480435	0.342614	0.283580	0.251879
3.2	0.459555	0.318834	0.259385	0.227792
3.4	0.439962	0.296859	0.237252	0.205915
3.6	0.421580	0.276565	0.217030	0.186075
3.8	0.202332	0.257835	0.198571	0.168107
4.0	0.388148	0.240554	0.181737	0.151855
4.2	0.372958	0.224615	0.166396	0.137169
4 4	0.358696	0.209916	0.152424	0.123913
4.6	0.345301	0.196361	0.139704	0.111957
4.8	0.332713	0.183860	0.128129	0.101180
5.0	0.320876	0.172329	0.117597	0.091471
5.5	0.294240	0.147243	0.095241	0.071228
6.0	0.271260	0.126669	0.077581	0.055977
6.5	0.251331	0.109727	0.063604	0.043730
7.0	0.233948	0.095707	0.052506	0.034541
7.5	0.218698	0.084039	0.043655	0.027453
8.0	0.205239	0.074269	0.036560	0.021968
8.5	0.193294	0.066036	0.030840	0.017702
9.0	0.182633	0.059053	0.026200	0.014368
9.5	0.173068	0.053092	0.022411	0.011747
10.0	0.164443	0.047971	0.019296	0.009674
	$\begin{bmatrix}(-4)\,5\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)\,6\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)\,6\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)\,6\\5\end{bmatrix}$

Таблица 27.2. Функция излучения Планка $f(x) = x^{-5}(e^{1/x} - 1)^{-1}$

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.050	0.007	0.10	4.540	0.20	21.199	0.40	8.733	0.9	0.831
0.055	0.025	0.11	6.998	0.22	20.819	0.45	6.586	1.0	0.582
0.060	0.074	0.12	9.662	0.24	19.777	0.50	5.009	1.1	0.419
0.065	0.179	0.13	12.296	0.26	18.372	0.55	3.850	1.2	0.309
0.070	0.372	0.14	14.710	0.28	16.809	0.60	2.995	1.3	0.233
0.075	0.682	0.15	16.780	0.30	15.224	0.65	2.356	1.4	0.178
0.080	1.137	0.16	18.446	0.32	13.696	0.70	1.875	1.5	0.139
0.085	1.752	0.17	19.692	0.34	12.270	0.75	1.508	2.0	0.048
0.090	2.531	0.18	20.539	0.36	10.965	0.80	1.225	2.5	0.021
0.095	3.466	0.19	21.025	0.38	9.787	0.85	1.005	3.0	0.010
0.100	4.540	0.20	21.199	0.40	8.733	0.90	0.831	3.5	0.006
	$\left[{(-2)2 \atop 4}\right]$		$\left[{(-2)5 \atop 5}\right]$		$\left[{(-2)8 \atop 5}\right]$		$\left[{(-2)7 \atop 5}\right]$		$\left[{(-2)1 \atop 4}\right]$

27.3. Miscellaneous Physical Tables, Planck's radiation functions and electronic functions, MT 17, Washington: Government Printing Office, 1941.

$$R_\lambda = c_1\lambda^{-5}(e^{c_2/\lambda T} - 1)^{-1}, \quad R_{0-\lambda} = \int_0^\lambda R_\lambda\, d\lambda,$$

$$N_\lambda = 2\pi c\lambda^{-4}(e^{c_2/\lambda T} - 1)^{-1}, \quad N_{0-\lambda} = \int_0^\lambda N_\lambda\, d\lambda.$$

Таблица I: $\dfrac{R_\lambda}{R_{\lambda\,\max}}$, $\dfrac{R_{0-\lambda}}{R_{0-\infty}}$, $\dfrac{N_\lambda}{N_{\lambda\,\max}}$, $\dfrac{N_{0-\lambda}}{N_{0-\infty}}$ для $\lambda T = [0.05(0.001)\,0.1(0.005)\,0.4(0.01)\,0.6(0.02)\,1(0.05)\,2]$ см К°.

Таблица II: R_λ, $R_{0-\lambda}$, N_λ, $N_{0-\lambda}$ ($T = 1000$°K) для $\lambda = [0.5(0.01)\,1(0.05)\,4(0.1)\,6(0.2)\,10(0.5)\,20]$ мкм.

Таблица III: N_λ для $\lambda = [0.25(0.05)\,1.6(0.2)\,3(1)\,10]$ мкм $T = [1000°(500°)\,3500$°K и 6000°K$]$.

Таблица 27.3. Функции Эйнштейна

x	$\dfrac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}$	$\dfrac{x}{e^x-1}$	$\ln(1-e^{-x})$	$\dfrac{x}{e^x-1} - \ln(1-e^{-x})$
0.00	1.00000	1.00000	$-\infty$	∞
0.05	0.99979	0.97521	−3.02063	3.99584
0.10	0.99917	0.95083	−2.35217	3.30300
0.15	0.99813	0.92687	−1.97118	2.89806
0.20	0.99667	0.90333	−1.70777	2.61110
0.25	0.99481	0.88020	−1.50869	2.38889
0.30	0.99253	0.85749	−1.35023	2.20771
0.35	0.98985	0.83519	−1.21972	2.05491
0.40	0.98677	0.81330	−1.10963	1.92293
0.45	0.98329	0.79182	−1.01508	1.80690
0.50	0.97942	0.77075	−0.93275	1.70350
0.55	0.97517	0.75008	−0.86026	1.61035
0.60	0.97053	0.72982	−0.79587	1.52569
0.65	0.96552	0.70996	−0.73824	1.44820
0.70	0.96015	0.69050	−0.68634	1.37684
0.75	0.95441	0.67144	−0.63935	1.31079
0.80	0.94833	0.65277	−0.59662	1.24938
0.85	0.94191	0.63450	−0.55759	1.19209
0.90	0.93515	0.61661	−0.52184	1.13844
0.95	0.92807	0.59910	−0.48897	1.08807
1.00	0.92067	0.58198	−0.45868	1.04065
1.05	0.91298	0.56523	−0.43069	0.99592
1.10	0.90499	0.54886	−0.40477	0.95363
1.15	0.89671	0.53285	−0.38073	0.91358
1.20	0.88817	0.51722	−0.35838	0.87560
1.25	0.87937	0.50194	−0.33758	0.83952
1.30	0.87031	0.48702	−0.31818	0.80520
1.35	0.86102	0.47245	−0.30008	0.77253
1.40	0.85151	0.45824	−0.28315	0.74139
1.45	0.84178	0.44436	−0.26732	0.71168
1.50	0.83185	0.43083	−0.25248	0.68331
	$\left[{(-5)5 \atop 3}\right]$	$\left[{(-5)5 \atop 3}\right]$		

продолжение табл. 27.3

x	$\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}$	$\frac{x}{e^x-1}$	$\ln(1-e^{-x})$	$\frac{x}{e^x-1}-\ln(1-e^{-x})$
1.6	0.81143	0.40475	−0.22552	0.63027
1.7	0.79035	0.37998	−0.20173	0.58171
1.8	0.76869	0.35646	−0.18068	0.53714
1.9	0.74657	0.33416	−0.16201	0.49617
2.0	0.72406	0.31304	−0.14541	0.45845
2.1	0.70127	0.29304	−0.13063	0.42367
2.2	0.67827	0.27414	−0.11744	0.39158
2.3	0.65515	0.25629	−0.10565	0.36194
2.4	0.63200	0.23945	−0.09510	0.33455
2.5	0.60889	0.22356	−0.08565	0.30921
2.6	0.58589	0.20861	−0.07718	0.28578
2.7	0.56307	0.19453	−0.06957	0.26410
2.8	0.54049	0.18129	−0.06274	0.24403
2.9	0.51820	0.16886	−0.05659	0.22545
3.0	0.49627	0.15719	−0.05107	0.20826
3.2	0.45363	0.13598	−0.04162	0.17760
3.4	0.41289	0.11739	−0.03394	0.15133
3.6	0.37429	0.10113	−0.02770	0.12883
3.8	0.33799	0.08695	−0.02262	0.10958
4.0	0.30409	0.07463	−0.01849	0.09311

x	$\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}$	$\frac{x}{e^x-1}$	$\ln(1-e^{-x})$	$\frac{x}{e^x-1}-\ln(1-e^{-x})$
4.2	0.27264	0.06394	−0.01511	0.07905
4.4	0.24363	0.05469	−0.01235	0.06705
4.6	0.21704	0.04671	−0.01010	0.05681
4.8	0.19277	0.03983	−0.00826	0.04809
5.0	0.17074	0.03392	−0.00676	0.04068
5.2	0.15083	0.02885	−0.00553	0.03438
5.4	0.13290	0.02450	−0.00453	0.02903
5.6	0.11683	0.02078	−0.00370	0.02449
5.8	0.10247	0.01761	−0.00303	0.02065
6.0	0.08968	0.01491	−0.00248	0.01739
	$\begin{bmatrix}(-4)3\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)3\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)4\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)6\\4\end{bmatrix}$

27.4. Johnston H. L., Savedoff L., Belzer J. Contributions to the thermodynamic functions by a Planck—Einstein oscillator in one degree of freedom, — In: NAVEXOS, Office of Naval Research, Department of the Navy, Washington, 1949, p. 646. Значения $x^2e^x(e^x-1)^{-2}$, $x(e^x-1)^{-1}$, $-\ln(1-e^{-x})$ и $x(e^x-1)^{-1}-\ln(1-e^{-x})$ для $x = 0(0.001)3(0.01)14.99$, 5D.

27.4. ИНТЕГРАЛ ЗИВЕРТА $\int_0^\theta e^{-x\sec\varphi}\,d\varphi$

Связь с интегралом вероятностей

27.4.1. $$\int_0^\theta e^{-x\sec\varphi}\,d\varphi \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\,\theta\right)\quad (x\to\infty).$$

(Свойства функции erf см. в гл. 7.)

Представление через экспоненциальные интегралы

27.4.2. $$\int_0^\theta e^{-x\sec\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} e^{-x\sec\varphi}\,d\varphi - \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(\cos\theta)^{2k+1}E_{2k+2}\left(\frac{x}{\cos\theta}\right)$$

$$(x\geqslant 0,\ 0<\theta<\pi/2),\ \alpha_0=1,\ \alpha_k=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2k)}.$$

(Функции $E_{2k+2}(x)$ см. в гл. 5.)

Связь с интегралом от функции Бесселя $K_0(x)$

27.4.3. $$\int_0^{\pi/2} e^{-x\sec\varphi}\,d\varphi = \mathrm{Ki}_1(x) = \int_x^\infty K_0(t)\,dt,$$

где

$$x^{1/2}e^x\,\mathrm{Ki}_1(x) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\left\{1-\frac{5}{8x}+\frac{129}{128x^2}-\frac{2655}{1024x^3}+\frac{301035}{32768x^4}-\ldots\right\}.$$

(Относительно $\mathrm{Ki}_1(x)$ см. гл. 11.)

27.5. National Bureau of Standards, Table of the Sievert integral, Washington: Government Printing Office (Applied Math. Series).

$x = 0(0.01)2(0.02)5(0.05)10$, $\theta = 0°(1°)90°$, 9D.

27.6. Sievert R. M. Die γ-Strahlungsintensität an der Oberfläche und in der nächsten Umgebung von Radiumnadeln. — Acta Radiologica, 1930, **11**, p. 239—301.

$\int_0^\varphi e^{-A\sec\varphi}\,d\varphi$, $\varphi = 30°(1°)90°$, $A = 0(0.01)05$, 3D.

Таблица 27.4. Интеграл Зиверта $\int\limits_0^\theta e^{-x\sec\varphi}\,d\varphi$

x \ θ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	75°	90°
0.0	0.174533	0.349066	0.523599	0.698132	0.872665	1.047198	1.308997	1.570796
0.1	0.157843	0.315187	0.471456	0.625886	0.777323	0.923778	1.123611	1.228632
0.2	0.142749	0.284598	0.424515	0.561159	0.692565	0.815477	0.968414	0.023680
0.3	0.129099	0.256978	0.382255	0.503165	0.617194	0.720366	0.837712	0.868832
0.4	0.116754	0.232040	0.344209	0.451198	0.550154	0.636769	0.727031	0.745203
0.5	0.105589	0.209522	0.309957	0.404629	0.490508	0.563236	0.632830	0.643694
0.6	0.095492	0.189191	0.279118	0.362893	0.437428	0.498504	0.552287	0.558890
0.7	0.086361	0.170833	0.251353	0.325486	0.390178	0.441478	0.483134	0.487198
0.8	0.078103	0.154256	0.226354	0.291957	0.348109	0.391204	0.423535	0.426062
0.9	0.070634	0.139289	0.203845	0.261901	0.310642	0.346851	0.371996	0.373579
1.0	0.063880	0.125775	0.183579	0.234956	0.277267	0.307694	0.327288	0.328286
1.2	0.052247	0.102553	0.148899	0.189138	0.221027	0.242523	0.254485	0.254889
1.4	0.042733	0.083620	0.120780	0.152298	0.176336	0.191533	0.198885	0.199051
1.6	0.034951	0.068183	0.097979	0.122667	0.140792	0.151541	0.156087	0.156156
1.8	0.028587	0.055597	0.079488	0.098829	0.112497	0.120105	0.122932	0.122961
2.0	0.023381	0.045335	0.064492	0.079644	0.089954	0.095342	0.097108	0.097121
2.2	0.019123	0.036967	0.052329	0.064201	0.071979	0.075797	0.076905	0.076911
2.4	0.015641	0.030145	0.042463	0.051766	0.057635	0.060342	0.061040	0.061043
2.6	0.012793	0.024582	0.034460	0.041750	0.046179	0.048100	0.048541	0.048542
2.8	0.010463	0.020045	0.027968	0.033680	0.037024	0.038387	0.038667	0.038668
3.0	0.008558	0.016347	0.022700	0.027177	0.029702	0.030670	0.030848	0.030848
3.5	0.005178	0.009817	0.013477	0.015912	0.017164	0.017576	0.017634	0.017634
4.0	0.003132	0.005896	0.008005	0.009330	0.009951	0.010128	0.010147	0.010147
4.5	0.001895	0.003542	0.004756	0.005478	0.005787	0.005862	0.005869	0.005869
5.0	0.001147	0.002127	0.002828	0.003221	0.003374	0.003407	0.003409	0.003409
5.5	0.000694	0.001278	0.001682	0.001896	0.001972	0.001987	0.001987	0.001987
6.0	0.000420	0.000768	0.001001	0.001117	0.001155	0.001162	0.001162	0.001162
6.5	0.000254	0.000461	0.000596	0.000659	0.000678	0.000681	0.000681	0.000681
7.0	0.000154	0.000277	0.000355	0.000389	0.000399	0.000400	0.000400	0.000400
7.5	0.000093	0.000167	0.000211	0.000230	0.000235	0.000235	0.000235	0.000235
8.0	0.000056	0.000100	0.000126	0.000136	0.000139	0.000139	0.000139	0.000139
8.5	0.000034	0.000060	0.000075	0.000081	0.000082	0.000082	0.000082	0.000082
9.0	0.000021	0.000036	0.000045	0.000048	0.000048	0.000048	0.000048	0.000048
9.5	0.000012	0.000022	0.000027	0.000028	0.000029	0.000029	0.000029	0.000029
10.0	0.000008	0.000013	0.000016	0.000017	0.000017	0.000017	0.000017	0.000017
	$\begin{bmatrix}(-3)\,2\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)\,5\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-4)\,8\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)\,1\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)\,1\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)\,2\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-3)\,4\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}(-2)\,2\\11\end{bmatrix}$

27.5. $f_m(x)=\int\limits_0^\infty t^m e^{-t^2-x/t}\,dt$ И РОДСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

$(m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$

Дифференциальные уравнения

27.5.1. $xf_m''' - (m-1)f_m'' + 2f_m = 0.$

27.5.2. $f_m' = -f_{m-1}\quad (m = 1,\ 2,\ \dots).$

Рекуррентное соотношение

27.5.3. $2f_m = (m-1)f_{m-2} + xf_{m-3}\quad (m \geqslant 3).$

Представление в виде степенного ряда

27.5.4. $2f_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k \ln x + b_k)\,x^k,$

$$a_k = \frac{-2a_{k-2}}{k(k-1)(k-2)},\qquad b_k = \frac{-2b_{k-2} - (3k^2-6k+2)\,a_k}{k(k-1)(k-2)},$$

$a_0 = a_1 = 0, \qquad a_2 = -b_0,$

$b_0 = 1, \qquad b_1 = -\sqrt{\pi}, \quad b_2 = \frac{3}{2}(1-\gamma).$

(Относительно γ см. гл. 6.)

27.5.5. $$2f_1(x) = 1 - \sqrt{\pi}\,x + 0.6342x^2 + 0.5908x^3 - 0.1431x^4 - 0.01968x^5 + 0.00324x^6 + 0.000188x^7 - \ldots - x^2\ln x(1 - 0.08333x^2 + 0.001389x^4 - 0.0000083x^6 + \ldots).$$

27.5.6. $$2f_2(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - x + \frac{\sqrt{\pi}}{2}x^2 - 0.3225x^3 - 0.1477x^4 + 0.03195x^5 + 0.00328x^6 - 0.000491x^7 - 0.0000235x^8 + \ldots + x^3\ln x\left(\frac{1}{3} - 0.01667x^2 + 0.000198x^4 - \ldots\right).$$

27.5.7. $$2f_3(x) = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}x + \frac{x^2}{2} - 0.2954x^3 + 0.1014x^4 + 0.02954x^5 - 0.00578x^6 - 0.00047x^7 + 0.000064x^8 - \ldots - x^4\ln x(0.0833 - 0.00278x^2 + 0.000025x^4 - \ldots).$$

Асимптотическое представление

27.5.8. $$f_m(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{3}}\,3^{-m/2}v^{m/2}e^{-v}\left(a_0 + \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \ldots + \frac{a_k}{v^k} + \ldots\right) \quad (x \to \infty),$$

$$v = 3\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3},$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{12}(3m^2 + 3m - 1),$$

$$12(k+2)a_{k+2} = -(12k^2 + 36k - 3m^2 - 3m + 25)a_{k+1} + \frac{1}{2}(m - 2k)(2k + 3 - m)(2k + 3 + 2m)a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

27.5.9. $$g_1(x) + ig_2(x) = \int_0^\infty t^2 e^{-t^2 + ix/t}\,dt.$$

27.5.10. $g_1(x) = \operatorname{Re} f_2(ix)$, $g_2(x) = -\operatorname{Im} f_2(ix)$.

Асимптотическое представление

27.5.11. $$g_1(x) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2}\frac{x}{2}\exp\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}\right](A\sin\theta + B\cos\theta).$$

27.5.12. $$g_2(x) = -\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2}\frac{x}{2}\exp\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}\right](A\cos\theta - B\sin\theta),$$

$$\theta = \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3},$$

$$A \sim a_0 - a_3\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[a_1\left(\frac{2}{x}\right)^{2/3} - a_2\left(\frac{2}{x}\right)^{4/3} - a_4\left(\frac{2}{x}\right)^{8/3} + a_5\left(\frac{2}{x}\right)^{10/3} - \ldots\right] \quad (x \to \infty),$$

$$B \sim \frac{\sqrt{3}}{2}\left[a_1\left(\frac{2}{x}\right)^{2/3} + a_2\left(\frac{2}{x}\right)^{4/3} - a_4\left(\frac{2}{x}\right)^{8/3} - a_5\left(\frac{2}{x}\right)^{10/3} + \ldots\right] \quad (x \to \infty),$$

$a_0 = 1$, $a_1 = 0.972222$, $a_2 = 0.148534$,

$a_3 = -0.017879$, $a_4 = 0.004594$, $a_5 = -0.000762$.

27.7. Abramowitz M. Evaluation of the integral $\int_0^\infty e^{-u^2 - x/u}\,du$. — J. Math. Phys., 1953, **32**, p. 188—192.

27.8. Faxén H. Expansion in series of the integral $\int_0^\infty \exp[-x(t \pm t^{-n})]\,t^2\,dt$. — Ark. Mat., Astr., Fys., 1921, **15**, № 13, p. 1—57.

27.9. Kilpatrick J. E., Kilpatrick M. F. Discrete energy levels associated with the Lennard — Jones potential. — J. Chem. Phys., 1951, **19**, № 7, p. 930—933.

27.10. Kruse U. E., Ramsey N. F. The integral $\int_0^\infty y^2 \exp\left(-y^2 + i\frac{x}{y}\right)dy$. — J. Math. Phys., 1951, **30**, p. 40.

27.11. Laporte O., Absorption coefficients for thermal neutrons. — Phys. Rev., 1937, **52**, p. 72—74.

27.12. Torrey H. C. Notes on intensities of radio frequency spectra. — Phys. Rev., 1941, **59**, p. 293.

27.13. Zahn C.T. Absorption coefficients for thermal neutrons. — Phys. Rev., 1937, **52**, p. 67—71.

$$\int_0^\infty y^n e^{-y - x/\sqrt{y}}\,dy \text{ для } n = 0,\ 1/2,\ 1;$$

$x = 0(0.01)0.1(0.1)1.$

Таблица 27.5 $f_m(x)=\int\limits_0^\infty t^m e^{-t^2-x/t}\,dt$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0.00	0.5000	0.4431	0.5000	0.1	0.4263	0.3970	0.4580	0.6	0.2255	0.2415	0.3025
0.01	0.4914	0.4382	0.4956	0.2	0.3697	0.3573	0.4204	0.7	0.2015	0.2202	0.2793
0.02	0.4832	0.4333	0.4912	0.3	0.3238	0.3227	0.3864	0.8	0.1807	0 2011	0.2584
0.03	0.4753	0.4285	0.4869	0.4	0.2855	0.2923	0.3557	0.9	0.1626	0.1839	0.2392
0.04	0.4676	0.4238	0.4826	0.5	0.2531	0.2654	0.3278	1.0	0.1466	0.1685	0.2215
0.05	0.4602	0.4191	0.4784								
	$\left[{(-5)5 \atop 2}\right]$	$\left[{(-5)5 \atop 2}\right]$	$\left[{(-5)5 \atop 2}\right]$		$\left[{(-3)1 \atop 4}\right]$	$\left[{(-4)7 \atop 3}\right]$	$\left[{(-4)5 \atop 3}\right]$		$\left[{(-4)6 \atop 3}\right]$	$\left[{(-4)4 \atop 3}\right]$	$\left[{(-4)4 \atop 3}\right]$

x	$\mathrm{Re}\,f_3(ix)$	$-\mathrm{Im}\,f_3(ix)$	x	$\mathrm{Re}\,f_3(ix)$	$-\mathrm{Im}\,f_3(ix)$	x	$\mathrm{Re}\,f_3(ix)$	$-\mathrm{Im}\,f_3(ix)$
0.0	0.50000	0.00000	4.0	−0.2626	0.0430	8.0	0.06078	−0.09808
0.2	0.49019	0.08754	4.2	−0.2552	+0.0094	8.5	0.07562	−0.07131
0.4	0.46229	0.16933	4.4	−0.2441	−0.0214	9.0	0.08221	−0.04496
0.6	0.41950	0.24139	4.6	−0.2299	−0.0490	9.5	0.08191	−0.02082
0.8	0.36543	0.30136	4.8	−0.2132	−0.0734	10.0	0.07626	−0.00010
1.0	0.30366	0.34805	5.0	−0.1945	−0.0944	10.5	0.06684	+0.01654
1.2	0.23746	0.38122	5.2	−0.1745	−0.1120	11.0	0.05507	0.02889
1.4	0.16972	0.40127	5.4	−0.1536	−0.1263	11.5	0.04224	0.03707
1.6	0.10288	0.40910	5.6	−0.1322	−0.1374	12.0	0.02937	0.04146
1.8	+0.03892	0.40592	5.8	−0.1108	−0.1455	12.5	0.01727	0.04259
2.0	−0.02062	0.39314	6.0	−0.0896	−0.1507	13.0	+0.00650	0.04109
2.2	−0.0746	0.3722	6.2	−0.0691	−0.1533	13.5	−0.00259	0.03758
2.4	−0.1221	0.3448	6.4	−0.0493	−0.1535	14.0	−0 00982	0.03268
2.6	−0.1629	0.3122	6.6	−0.0307	−0.1515	14.5	−0.01517	0.02696
2.8	−0.1966	0.2759	6.8	−0.0132	−0.1476	15.0	−0.01872	0.02089
3.0	−0.2233	0.2371	7.0	+0.00286	−0.14211	16.0	−0.02118	+0.00921
3.2	−0.2432	0.1971	7.2	0.01749	−0.13518	17.0	−0.01906	−0.00022
3.4	−0.2565	0.1569	7.4	0.03061	−0.12709	18.0	−0.01435	−0.00650
3.6	−0.2639	0.1173	7.6	0.04220	−0.11805	19.0	−0.00879	−0.00965
3.8	−0.2657	0.0792	7.8	0.05224	−0.10830	20.0	−0.00360	−0.01021
	$\left[{(-3)2 \atop 6}\right]$	$\left[{(-3)2 \atop 5}\right]$		$\left[{(-4)5 \atop }\right]$	$\left[{(-4)4 \atop 4}\right]$		$\left[{(-3)1 \atop 5}\right]$	$\left[{(-4)7 \atop 5}\right]$

27.6. $f(x)=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t+x}\,dt$

Представление в виде степенного ряда

27.6.1. $f(x) = -e^{-x^2}\ln x + e^{-x^2}\left[\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!\,2k} - \frac{\gamma}{2}\right].$

27.6.2. $f(x) = -e^{-x^2}\ln x + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\psi(k+1)\,x^{2k}}{k!} + \sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k\,x^{2k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)}.$

(Относительно γ и дигамма-функции $\psi(x)$ см. гл. 6.)

Связь с интегральной показательной функцией

27.6.3. $f(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\,\mathrm{Ei}\,(x^2) + \sqrt{\pi}\,e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt.$

(Относительно $\mathrm{Ei}\,(x)$ см. гл. 5, относительно $e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt$ — гл. 7.)

Асимптотическое представление

27.6.4. $f(x) \sim$

$$\sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^3}+\frac{1\cdot 3}{4x^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8x^7}+\ldots\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{2!}{x^6}+\frac{3!}{x^8}+\ldots\right] \quad (x\to\infty).$$

27.14. Erdélyi A. Note on the paper «On a definite integral» by R. H. Ritchie. — Math. Tables Aids Comp., 1950, 4, № 31, p. 179.

27.15. Goodwin E. T., Staton J. Table of $\int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u+x}\,du$. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, 1, p. 319. $x = 0(0.02)2(0.05)3(0.1)10$. Auxiliaty function for $x = 0(0.01)1$.

27.16. Ritchie R. H. On a definite integral. — Math. Tables Aids Comp., 1950, 4, № 30, p. 75.

Таблица 27.6. $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t+x}\,dt$

x	$f(x)+\ln x$	x	$f(x)+\ln x$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.00	−0.2886	0.50	0.2704	1.0	0.6051	2.0	0.3543	3.0	0.2519
0.05	−0.2081	0.55	0.3100	1.1	0.5644	2.1	0.3404	3.5	0.2203
0.10	−0.1375	0.60	0.3479	1.2	0.5291	2.2	0.3276	4.0	0.1958
0.15	−0.0735	0.65	0.3842	1.3	0.4980	2.3	0.3157	4.5	0.1762
0.20	−0.0146	0.70	0.4192	1.4	0.4705	2.4	0.3046	5.0	0.1602
0.25	+0.0402	0.75	0.4529	1.5	0.4460	2.5	0.2944	5.5	0.1468
0.30	0.0915	0.80	0.4854	1.6	0.4239	2.6	0.2848	6.0	0.1356
0.35	0.1398	0.85	0.5168	1.7	0.4040	2.7	0.2758	6.5	0.1259
0.40	0.1856	0.90	0.5472	1.8	0.3860	2.8	0.2673	7.0	0.1175
0.45	0.2290	0.95	0.5766	1.9	0.3695	2.9	0.2594	7.5	0.1102
0.50	0.2704	1.00	0.6051	2.0	0.3543	3.0	0.2519	8.0	0.1037
	$\left[\begin{matrix}(-3)1\\4\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-4)2\\3\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-4)7\\4\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-4)1\\3\end{matrix}\right]$		$\left[\begin{matrix}(-4)9\\4\end{matrix}\right]$

27.7. ДИЛОГАРИФМ
(интеграл Спенса при $n = 2$)

27.7.1. $f(x) = -\int_1^x \frac{\ln t}{t-1}\,dt.$

Разложение в ряд

27.7.2. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(x-1)^k}{k^2} \quad (0\leqslant x\leqslant 2).$

Функциональные соотношения

27.7.3. $f(x)+f(1-x) =$
$$= -\ln x \ln(1-x) + \frac{\pi^2}{6} \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

27.7.4. $f(1-x)+f(1+x) = \frac{1}{2} f(1-x^2)$ $\quad (0\leqslant x\leqslant 1).$

27.7.5. $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$

27.7.6. $f(x+1)-f(x) =$
$$= -\ln x\ln(x+1) - \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}f(x^2) \quad (0\leqslant x\leqslant 2).$$

Связь с функциями Дебая

27.7.7. $f(e^{-t}) = -f(e^t) - \frac{t^2}{2} = \int_0^t \frac{t\,dt}{e^t-1}.$

27.17. Lewin L. Dilogarithms and associated functions. — London: Macdonald, 1958.

27.18. Mitchell K. Tables of the function $\int_0^z \frac{-\log|1-y|}{y}\,dy$, with an account of some properties of this and related functions. — Phil. Mag., 1949, 40, p. 351—368. $x = -1(0.01)1$; $x = 0(0.001)0.5$, 9D.

27.19. Powell E. O. An integral related to the radiation integrals. — Phil. Mag., 1943, 7, № 34, p. 600—607.

$$\int_1^x \frac{\log y}{y-1}\,dy,\quad x = 0(0.01)2(0.02)6,\ 7D.$$

27.20. A. van Wijngaarden, Polylogarithms/ by the Staff of the Computation Department. — Report R24, Mathematisch Centrum. — Amsterdam, 1954.

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n} z^k \text{ for } z = x = -1(0.01)1;$$

$z = ix$, for $x = 0(0.01)\,1$; $z = e^{i\pi\alpha/2}$ for $\alpha = 0(0.01)2$, 10D.

Таблица 27.7. Дилогарифм $f(x) = -\int_1^x \frac{\ln t}{t-1}\,dt$

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.00	1.64493 4067	0.10	1.29971 4723	0.20	1.07479 4600	0.30	0.88937 7624	0.40	0.72758 6308
0.01	1.58862 5448	0.11	1.27452 9160	0.21	1.05485 9830	0.31	0.87229 1733	0.41	0.71239 5042
0.02	1.54579 9712	0.12	1.25008 7584	0.22	1.03527 7934	0.32	0.85542 7404	0.42	0.69736 1058
0.03	1.50789 9041	0.13	1.22632 0101	0.23	1.01603 0062	0.33	0.83877 6261	0.43	0.68247 9725
0.04	1.47312 5860	0.14	1.20316 7961	0.24	0.99709 9088	0.34	0.82233 0471	0.44	0.66774 6644
0.05	1.44063 3797	0.15	1.18058 1124	0.25	0.97846 9393	0.35	0.80608 2689	0.45	0.65315 7631
0.06	1.40992 8300	0.16	1.15851 6487	0.26	0.96012 6675	0.36	0.79002 6024	0.46	0.63870 8705
0.07	1.38068 5041	0.17	1.13693 6560	0.27	0.94205 7798	0.37	0.77415 3992	0.47	0.62439 6071
0.08	1.35267 5161	0.18	1.11580 8451	0.28	0.92425 0654	0.38	0.75846 0483	0.48	0.61021 6108
0.09	1.32572 8728	0.19	1.09510 3088	0.29	0.90669 4053	0.39	0.74293 9737	0.49	0.59616 5361
0.10	1.29971 4723	0.20	1.07479 4600	0.30	0.88937 7624	0.40	0.72758 6308	0.50	0.58224 0526
	$[(-3)2]$		$[(-4)1]$		$\begin{bmatrix}(-5)5\\7\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-5)3\\6\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-5)2\\5\end{bmatrix}$

27.8. ИНТЕГРАЛ КЛАУЗЕНА И СВЯЗАННЫЕ С НИМ СУММИРОВАНИЯ

27.8.1. $$f(\theta) = -\int_0^\theta \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{k^2}$$

$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$.

Представление в виде ряда

27.8.2. $$f(\theta) = -\theta\ln|\theta| + \theta + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}B_{2k}\frac{\theta^{2k+1}}{2k(2k+1)}$$

$(0 \leqslant \theta < \pi/2)$.

27.8.3. $$f(\pi-\theta) = \theta\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}B_{2k}(2^{2k}-1)\frac{\theta^{2k+1}}{2k(2k+1)}$$

$(\pi/2 < \theta < \pi)$.

Функциональное соотношение

27.8.4. $$f(\pi-\theta) = f(\theta) - \frac{1}{2}f(2\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2).$$

Связь с интегралом Спенса

27.8.5. $$if(\theta) = g(e^{i\theta}) + \frac{\theta^2}{4}, \quad \text{где } g(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}\ln|1+t|.$$

Суммируемые ряды

27.8.6. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\theta}{2} + \frac{\theta^2}{4} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2\theta^2}{12} + \frac{\pi\theta^3}{12} - \frac{\theta^4}{48} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n} = \frac{1}{2}(\pi-\theta) \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n^3} = \frac{\pi^2\theta}{6} - \frac{\pi\theta^2}{4} + \frac{\theta^3}{12} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n^5} = \frac{\pi^4\theta}{90} - \frac{\pi^2\theta^3}{36} + \frac{\pi\theta^4}{48} - \frac{\theta^5}{240}$$

$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$.

27.21. Ashour A. Sabri A. Tabulation of the function $\psi(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n^2}$. — Math. Tables Aids Comp., 1956, **10**, № 54, p. 57—65.

27.22. Clausen T. Über die Zerlegung reeller gebrochener Funktionen. — J. Reine Angew. Math., 1832, **8**, p. 298—300. $x = 0°(1°)180°$, 16D.

27.23. Jolley L. B. W. Summation of series. — London: Chapman Publishing Co., England, 1925.

27.24. Wheelon A. D. A short table of summable series. — Report № SM-14642. — Santa Monica: Douglas: Aircraft Co., 1953.

Таблица 27.8. **Интеграл Клаузена** $f(\theta) = -\int_0^\theta \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)dt$

$\theta°$	$f(\theta)+\theta\ln\theta$	$\theta°$	$f(\theta)$	$\theta°$	$f(\theta)$	$\theta°$	$f(\theta)$	$\theta°$	$f(\theta)$
0	0.000000	15	0.612906	30	0.864379	60	1.014942	90	0.915966
1	0.017453	16	0.635781	32	0.886253	62	1.014421	95	0.883872
2	0.034908	17	0.657571	34	0.906001	64	1.012886	100	0.848287
3	0.052362	18	0.678341	36	0.923755	66	1.010376	105	0.809505
4	0.069818	19	0.698149	38	0.939633	68	1.006928	110	0.767800
5	0.087276	20	0.717047	40	0.953741	70	1.002576	115	0.723427
6	0.104735	21	0.735080	42	0.966174	72	0.997355	120	0.676628
7	0.122199	22	0.752292	44	0.977020	74	0.991294	125	0.627629
8	0.139664	23	0.768719	46	0.986357	76	0.984425	130	0.576647
9	0.157133	24	0.784398	48	0.994258	78	0.976776	135	0.523889
10	0.174607	25	0.799360	50	1.000791	80	0.968375	140	0.469554
11	0.192084	26	0.813635	52	1.006016	82	0.959247	145	0.413831
12	0.209567	27	0.827249	54	1.009992	84	0.949419	150	0.356908
13	0.227055	28	0.840230	56	1.012773	86	0.938914	160	0.240176
14	0.244549	29	0.852599	58	1.014407	88	0.927755	170	0.120755
15	0.262049	30	0.864379	60	1.014942	90	0.915966	180	0.000000
	$\begin{bmatrix}(-7)8\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-4)1\\4\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-4)3\\4\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-4)1\\4\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}(-4)4\\6\end{bmatrix}$

27.9. КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЕКТОРНОГО СЛОЖЕНИЯ

(коэффициенты Вигнера или Клебша — Гордана)

Определение

27.9.1. $$(j_1\,j_2\,m_1\,m_2|\,j_1j_2jm) = \delta(m,\ m_1+m_2)\sqrt{\frac{(j_1+j_2-j)!\,(j+j_1-j_2)!\,(j+j_2-j_1)!\,(2j+1)}{(j+j_1+j_2+1)!}}\times$$
$$\times\sum_k \frac{(-1)^k\sqrt{(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!\,(j+m)\,(j-m)!}}{k!\,(j_1+j_2-j-k)!\,(j_1-m_1-k)!\,(j_2+m_2-k)!\,(j-j_2+m_1+k)!\,(j-j_1-m_2+k)!},\qquad \delta(i,k)=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k.\end{cases}$$

Условия

27.9.2. $j_1,\ j_2,\ j = +n$ или $+n/2$ (n — целое).

27.9.3. $j_1+j_2+j=n$.

27.9.4. j_1+j_2-j

27.9.5. j_1-j_2+j

27.9.6. $-j_1+j_2+j$

$$\left.\begin{matrix}j_1+j_2-j\\ j_1-j_2+j\\ -j_1+j_2+j\end{matrix}\right\}\geqslant 0.$$

27.9.7. $m_1,\ m_2,\ m = \pm n$ или $\pm n/2$.

27.9.8. $|m_1|\leqslant j_1,\ |m_2|\leqslant j_2,\ |m|\leqslant j$.

27.9.9. $(j_1\,j_2\,m_1\,m_2|\,j_1\,j_2\,jm) = 0$ при $m_1+m_2\neq m$.

Частные значения

27.9.10. $(j_1\,0\,m_1\,0\,|\,j_1\,0\,j\,m) = \delta(j_1,\,j)\,\delta(m_1,\,m)$.

27.9.11. $(j_1\,j_2 00\,|\,j_1\,j_2\,j0) = 0$ при $j_1+j_2+j=2n+1$.

27.9.12. $(j_1\,j_1\,m_1m_1\,|\,j_1\,j_1\,jm) = 0$ при $2j_1+j=2n+1$.

Соотношения симметрии

27.9.13. $(j_1j_2m_1m_2\,|\,j_1j_2jm) =$
$= (-1)^{j_1+j_2-j}\,(j_1j_2-m_1-m_2\,|\,j_1j_2j-m)$.

27.9.14. $(j_1j_2m_1m_2\,|\,j_1j_2jm) = (j_2j_1-m_2-m_1\,|\,j_2j_1j-m)$.

27.9.15. $(j_1j_2m_1m_2\,|\,j_1j_2jm) = (-1)^{j_1+j_2-j}(j_2j_1m_1m_2\,|\,j_2j_1jm)$.

27.9.16. $(j_1j_2m_1m_2\,|\,j_1j_2jm) =$
$= \sqrt{(2j+1)/(2j_1+1)}\,(-1)^{j_2+m_2}(jj_2-mm_2\,|\,jj_2j_1-m_1)$.

27.9.17. $(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m) =$

$$= \sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}}(-1)^{j_1-m_1+j-m}(jj_2 m - m_2 | jj_2 j_1 m_1).$$

27.9.18. $(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m) =$

$$= \sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}}(-1)^{j-m+j_1-m_1}(j_2 j m_2 - m | j_2 j j_1 - m_1).$$

27.9.19. $(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m) =$

$$= \sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}}(-1)^{j_1-m_1}(j_1 j m_1 - m | j_1 j j_2 - m_2).$$

27.9.20. $(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m) =$

$$= \sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}}(-1)^{j_1-m_1}(jj_2 m - m_1 | jj_1 j_2 m_2).$$

Таблица 27.9.1. $\left(j_1 \frac{1}{2}\ m_1 m_2 | j_1 \frac{1}{2}\ jm\right)$

j	$m_2 = 1/2$	$m_2 = -1/2$
$j_1 + 1/2$	$\sqrt{\frac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\frac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}}$
$j_1 - 1/2$	$-\sqrt{\frac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\frac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}}$

Таблица 27.9.2. $(j_1 1 m_1 m_2 | j_1 1 jm)$

j	$m_2 = 1$	$m_2 = 0$	$m_2 = -1$
$j_1 + 1$	$\sqrt{\frac{(j_1+m)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m+1)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
j_1	$-\sqrt{\frac{(j_1+m)(j_1-m+1)}{2j_1(j_1+1)}}$	$\frac{m}{\sqrt{j_1(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1+m+1)}{2j_1(j_1+1)}}$
$j_1 - 1$	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{2j_1(2j_1+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1+m)}{j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1+m+1)(j_1+m)}{2j_1(2j_1+1)}}$

Таблица 27.9.3. $\left(j_1 \frac{3}{2}\ m_1 m_2 | j_1 \frac{3}{2}\ jm\right)$

j	$m_2 = 3/2$	$m_2 = 1/2$
$j_1 + 3/2$	$\sqrt{\frac{(j+m-1/2)(j_1+m+1/2)(j_1+m+3/2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m+1/2)(j_1+m+3/2)(j_1-m+3/2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$
$j_1 + 1/2$	$-\sqrt{\frac{3(j_1+m-1/2)(j_1+m+1/2)(j_1-m+1/2)}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$	$-(j_1-3m+3/2)\sqrt{\frac{j_1+m+1/2}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$
$j_1 - 1/2$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m-1/2)(j_1-m+1/2)(j_1-m+3/2)}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$-(j_1+3m-1/2)\sqrt{\frac{j_1-m+1/2}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
$j_1 - 3/2$	$-\sqrt{\frac{(j_1-m-1/2)(j_1-m+1/2)(j_1-m+3/2)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m-1/2)(j_1-m-1/2)(j_1-m+1/2)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$

j	$m_2 = -1/2$	$m_2 = -3/2$
$j_1 + 3/2$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m+3/2)(j_1-m+1/2)(j_1-m+3/2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m-1/2)(j_1-m+1/2)(j_1-m+3/2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$
$j_1 + 1/2$	$(j_1+3m+3/2)\sqrt{\frac{j_1-m+1/2}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m+3/2)(j_1-m-1/2)(j_1-m+1/2)}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$
$j_1 - 1/2$	$-(j_1-3m-1/2)\sqrt{\frac{j_1+m+1/2}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m+1/2)(j_1+m+3/2)(j_1-m-1/2)}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
$j_1 - 3/2$	$-\sqrt{\frac{3(j_1+m-1/2)(j_1+m+1/2)(j_1-m-1/2)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1+m-1/2)(j_1+m+1/2)(j_1+m+3/2)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$

Таблица 27.9.4. $(j_1 2 m_1 m_2 | j_1 2 j m)$

j	$m_2 = 2$	$m_2 = 1$	$m_2 = 0$	$m_2 = -1$	$m_2 = -2$
j_1+2	$\sqrt{\frac{(j_1+m-1)(j_1+m)(j_1+m+1)(j_1+m+2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)(2j_1+4)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m+2)(j_1+m+2)(j_1+m+1)(j_1+m)}{(2j_1+1)(j_1+1)(2j_1+3)(j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1-m+2)(j_1-m+1)(j_1+m+2)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)(j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m+2)(j_1-m+1)(j_1-m)(j_1+m+2)}{(2j_1+1)(j_1+1)(2j_1+3)(j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m-1)(j_1-m)(j_1-m+1)(j_1-m+2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)(2j_1+4)}}$
j_1+1	$-\sqrt{\frac{(j_1+m-1)(j_1+m)(j_1+m+1)(j_1-m+2)}{2j_1(j_1+1)(j_1+2)(2j_1+1)}}$	$-(j_1-2m+2)\sqrt{\frac{(j_1+m+1)(j_1+m)}{2j_1(2j_1+1)(j_1+1)(j_1+2)}}$	$m\sqrt{\frac{3(j_1-m+1)(j_1+m+1)}{j_1(2j_1+1)(j_1+1)(j_1+2)}}$	$(j_1+2m+2)\sqrt{\frac{(j_1-m+1)(j_1-m)}{j_1(2j_1+1)(2j_1+2)(j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m-1)(j_1-m)(j_1-m+1)(j_1+m+2)}{j_1(2j_1+1)(j_1+1)(2j_1+4)}}$
j_1	$\sqrt{\frac{3(j_1+m-1)(j_1+m)(j_1-m+1)(j_1-m+2)}{(2j_1-1)2j_1(j_1+1)(2j_1+3)}}$	$(1-2m)\sqrt{\frac{3(j_1-m+1)(j_1+m)}{(2j_1-1)j_1(2j+2)(2j_1+3)}}$	$\frac{3m^2-j_1(j_1+1)}{\sqrt{(2j_1-1)j_1(j_1+1)(2j_1+3)}}$	$(2m+1)\sqrt{\frac{3(j_1-m)(j_1+m+1)}{(2j_1-1)j_1(2j_1+2)(2j_1+3)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1-m-1)(j_1-m)(j_1+m+1)(j_1+m+2)}{(2j_1-1)j_1(2j_1+2)(2j_1+3)}}$
j_1-1	$-\sqrt{\frac{(j_1+m-1)(j_1-m)(j_1-m+1)(j_1-m+2)}{2(j_1-1)j_1(j_1+1)(2j_1+1)}}$	$(j_1+2m-1)\sqrt{\frac{(j_1-m+1)(j_1-m)}{(j_1-1)j_1(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$-m\sqrt{\frac{3(j_1-m)(j_1+m)}{(j_1-1)j_1(2j_1+1)(j_1+1)}}$	$-(j_1-2m-1)\sqrt{\frac{(j_1+m+1)(j_1+m)}{(j_1-1)j_1(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m-1)(j_1+m)(j_1+m+1)(j_1+m+2)}{(j_1-1)j_1(2j+1)(2j_1+2)}}$
j_1-2	$\sqrt{\frac{(j_1-m-1)(j_1-m)(j_1-m+1)(j_1-m+2)}{(2j_1-2)(2j_1-1)2j_1(2j_1+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1-m+1)(j_1-m)(j_1-m-1)(j_1+m-1)}{(j_1-1)(2j_1-1)j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1-m)(j_1-m-1)(j_1+m)(j_1+m-1)}{(2j_1-2)(2j_1-1)j_1(2j_1+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1-m-1)(j_1+m+1)(j_1+m)(j_1+m-1)}{(j_1-1)(2j_1-1)j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1+m-1)(j_1+m)(j_1+m+1)(j_1+m+2)}{(2j_1-2)(2j_1-1)2j_1(2j_1+1)}}$

Таблица 27.9.5

(Используя соотношения симметрии, можно привести коэффициенты к стандартному виду, в котором $j_1 \leqslant j_2 \leqslant j$ и $m \geqslant 0$.)

m_2	m	j_1	j	$(j_1 j_2 m_1 m_2 \mid j_1 j_2 j m)$	
		$j_2 = 1/2$			
$-1/2$	0	1/2	1	$\sqrt{1/2}$	0.70711
1/2	0	1/2	1	$\sqrt{1/2}$	0.70711
1/2	1	1/2	1		1.00000
		$j_2 = 1$			
-1	0	1	1	$\sqrt{1/2}$	0.70711
0	0	1	1		0.00000
1	0	1	1	$-\sqrt{1/2}$	-0.70711
0	1	1	1	$\sqrt{1/2}$	0.70711
1	1	1	1	$-\sqrt{1/2}$	-0.70711
0	1/2	1/2	3/2	$\sqrt{2/3}$	0.81650
1	1/2	1/2	3/2	$\sqrt{1/3}$	0.57735
1	3/2	1/2	3/2		1.00000
-1	0	1	2	$\sqrt{1/6}$	0.40825
0	0	1	2	$\sqrt{2/3}$	0.81650
1	0	1	2	$\sqrt{1/6}$	0.40825
0	1	1	2	$\sqrt{1/2}$	0.70711
1	1	1	2	$\sqrt{1/2}$	0.70711
1	2	1	2		1.00000
		$j_2 = 3/2$			
$-1/2$	1/2	1	3/2	$\sqrt{8/15}$	0.73030
1/2	1/2	1	3/2	$-\sqrt{1/15}$	-0.25820
3/2	1/2	1	3/2	$-\sqrt{2/5}$	-0.63246
1/2	3/2	1	3/2	$\sqrt{2/5}$	0.63246
3/2	3/2	1	3/2	$-\sqrt{3/5}$	-0.77460
$-1/2$	0	1/2	2	$\sqrt{1/2}$	0.70711

(*продолжение таблицы 27.9.5*)

m_2	m	j_1	j	$(j_2 j_1 m_1 m_2 \mid j_1 j_2 j m)$	
		$j_2 = 3/2$			
1/2	0	1/2	2	$\sqrt{1/2}$	0.70711
1/2	1	1/2	2	$1/2\sqrt{3}$	0.86603
3/2	1	1/2	2		0.50000
3/2	2	1/2	2		1.00000
$-3/2$	0	3/2	2		0.50000
$-1/2$	0	3/2	2		0.50000
1/2	0	3/2	2		-0.50000
3/2	0	3/2	2		-0.50000
$-1/2$	1	3/2	2	$\sqrt{1/2}$	0.70711
1/2	1	3/2	2		0.00000
3/2	1	3/2	2	$-\sqrt{1/2}$	-0.70711
1/2	2	3/2	2	$\sqrt{1/2}$	0.70711
3/2	2	3/2	2	$-\sqrt{1/2}$	-0.70711
$-1/2$	1/2	1	5/2	$\sqrt{3/10}$	0.54772
1/2	1/2	1	5/2	$\sqrt{3/5}$	0.77460
3/2	1/2	1	5/2	$\sqrt{1/10}$	0.31623
1/2	3/2	1	5/2	$\sqrt{3/5}$	0.77460
3/2	3/2	1	5/2	$\sqrt{2/5}$	0.63246
3/2	5/2	1	5/2		1.00000

27.25. Condon E. U., Shortley G. A. Theory of atomic spectra — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1935.

27.26. Rose M. E. Elementary theory of angular momentum. — New York: John Wiley & Sons, 1955.

27.27. Simon A. Numerical tables of the Clebsch — Gordan coefficients. — Oak Ridge National Laboratory Report № 1718. — Oak Ridge, 1954.

$C(j_1 j_2 j;\ m_1 m_2 m)$ для всех угловых моментов $< 9/2$, 10D.

Глава 28

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

С. ПЕВИ, А. ШОПФ

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ

Любое положительное действительное число x может быть единственным образом представлено в системе, соответствующей некоторому целому числу $b > 1$, в виде

$$x = (A_m \dots A_1 A_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \dots)_{(b)},$$

где каждое из A_i и a_j принимает одно из целых значений $0, 1, \dots, b-1$, не все A_i, a_{-j} равны нулю и $A_m > 0$, если $x \geq 1$. Существует взаимно однозначное соответствие между числом и последовательностью

$$x = A_m b^m + \dots + A_1 b + A_0 + \sum_{1}^{\infty} {}_j b^{-j},$$

причем бесконечный ряд сходится. Целое число b называется *основанием системы счисления*. Последовательность для x в системе b может быть конечной, т. е. $a_{-n-1} = a_{-n-2} = \dots = 0$ для некоторого $n \geq 1$, так что

$$x = (A_m \dots A_1 A_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n})_{(b)};$$

в этом случае x называется *конечным b-адическим числом*. Последовательность, которая не является конечной, может обладать тем свойством, что бесконечная последовательность $a_{-1}, a_{-2}, \dots$ становится периодической, начиная с некоторого знака a_{-n} $(n \geq 1)$. Такая последовательность при $n = 1$ или $n > 1$ называется соответственно *чисто* или *смешанно возвратной*.

Последовательность, которая не является ни конечной, ни возвратной, представляет собой некоторое иррациональное число.

Название систем

Основание	Система	Основание	Система
2	двоичная	8	восьмеричная
3	троичная	9	девятеричная
4	четверичная	10	десятичная
5	пятеричная	11	одиннадцатеричная
6	шестеричная	12	двенадцатеричная
7	семеричная	16	шестнадцатеричная

Общие методы перевода

Любое число может быть переведено из системы b в систему некоторого целого числа $\bar{b} \neq b$, $\bar{b} > 1$, при помощи арифметических операций в b-системе или в $\bar{b}$-системе. Соответственно этому существуют четыре метода перевода, используемые в зависимости от того, является ли переводимое число целым или правильной дробью.

Целые числа $X = (A_m \ldots A_1 A_0)_{(b)}$

(I) Арифметика в b-системе. Переведем число $\bar{b}$ в b-систему и определим

$$X/\bar{b} = X_1 + \bar{A}'_0/\bar{b},$$

$$X_1/\bar{b} = X_2 + \bar{A}'_1/\bar{b},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_{\bar{m}}/\bar{b} = 0 + \bar{A}'_{\bar{m}}/\bar{b},$$

где $\bar{A}'_0, \bar{A}'_1, \ldots, \bar{A}'_{\bar{m}}$ — остатки и $X_1, X_2, \ldots, X_{\bar{m}}$ — частные (в b-системе) при делении $X, X_1, \ldots, X_{\bar{m}-1}$ соответственно на $\bar{b}$ в b-системе. Затем переведем остатки в $\bar{b}$-систему

$$(\bar{A}'_0)_{(\bar{b})} = \bar{A}_0, \ (\bar{A}'_1)_{(\bar{b})} = \bar{A}_1, \ \ldots, \ (\bar{A}'_{\bar{m}})_{(\bar{b})} = \bar{A}_{\bar{m}}$$

и получим

$$X = (\bar{A}_{\bar{m}} \ldots \bar{A}_1 \bar{A}_0)_{(\bar{b})}.$$

(II) Арифметика в $\bar{b}$-системе. Переведем b и $A_0, A_1, \ldots, A_m$ в $\bar{b}$-систему и определим, используя арифметические операции в $\bar{b}$-системе,

$$X_{m-1} = A_m b + A_{m-1},$$

$$X_{m-2} = X_{m-1} b + A_{m-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_1 = X_2 b + A_1.$$

Тогда

$$X = X_1 b + A_0.$$

Правильные дроби $x = (0.a_{-1}a_{-2}\ldots)_{(b)}$

Для того чтобы перевести в систему $\bar{b} \neq b$ правильную дробь x, заданную с точностью n знаков в b-системе таким образом, чтобы обратный перевод из $\bar{b}$-системы дал те же самые n округленных знаков в b-системе, представление x в $\bar{b}$-системе должно быть получено с точностью в $\bar{n}$ округленных знаков, где $\bar{n}$ удовлетворяет условию $\bar{b}^{\bar{n}} > b^n$.

(III) Арифметика в b-системе. Переведем $\bar{b}$ в b-систему и определим

$$x\bar{b} = x_1 + \bar{a}'_{-1},$$

$$x_1\bar{b} = x_2 + \bar{a}'_{-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{\bar{n}-1}\bar{b} = x_{\bar{n}} + \bar{a}'_{-n},$$

где $\bar{a}_{-1}, \bar{a}'_{-2}, \ldots, \bar{a}_{-\bar{n}}$ — целые части и $x_1, x_2, \ldots, x_{\bar{n}}$ — дробные части (в b-системе) произведений $x\bar{b}, x_1\bar{b}, \ldots, x_{\bar{n}-1}\bar{b}$ соответственно. Затем переводим целые части в $\bar{b}$-систему,

$$(\bar{a}'_{-1})_{(\bar{b})} = \bar{a}_{-1}, \ (\bar{a}'_{-2})_{(\bar{b})} = \bar{a}_{-2}, \ \ldots, \ (\bar{a}'_{-n})_{(\bar{b})} = \bar{a}_{-n}$$

и получаем

$$x = (0.\bar{a}_{-1}, \ \bar{a}_{-2} \ldots, \ \bar{a}_{-n})_{(\bar{b})}.$$

(IV) Арифметика в $\bar{b}$-системе. Переведем b и $a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-n}$ в $\bar{b}$-систему и определим, используя арифметические операции в $\bar{b}$-системе,

$$x_{-n+1} = \frac{a_{-n}}{b} + a_{-n+1},$$

$$x_{-n+2} = \frac{x_{-n+1}}{b} + a_{-n+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{-1} = \frac{x_2}{b} + a_{-1}.$$

Тогда

$$x = \frac{x_{-1}}{b}.$$

ПРИМЕРЫ

В примерах мы ограничимся системами с основаниями 2, 8, 10 ввиду их важности для ЭВМ.

Заметим, что восьмеричная система является степенью двоичной. Действительно, восьмеричный знак соответствует тройке двоичных знаков. Поэтому двоичная арифметика может быть использована всякий раз, когда число нужно перевести в восьмеричную систему или оно дано в восьмеричной системе и должно быть переведено в какую-нибудь другую.

Десятичная	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Восьмеричная	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12
Двоичная	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

Пример 1. Перевести $X = (1369)_{(10)}$ в восьмеричную систему. Применим метод (I), положив $b = 10$, $\bar{b} = 8_{(10)}$ и используя десятичную арифметику. Находим

$$\frac{1369}{8} = 171 + \frac{1}{8}, \quad \frac{171}{8} = 21 + \frac{3}{8},$$

$$\frac{21}{8} = 2 + \frac{5}{8}, \quad \frac{2}{8} = 0 + \frac{2}{8};$$

таким образом,

$$X = (2531)_{(8)}.$$

По методу (II) имеем $b = (12)_{(8)}$ и $A_3 = 1_{(8)}$, $A_2 = 3_{(8)}$, $A_1 = 6_{(8)}$, $A_0 = (11)_{(8)}$. Следовательно, используя восьмеричную арифметику, находим

$$X_2 = 1 \cdot 12 + 3 = (15)_{(8)},$$
$$X_1 = 15 \cdot 12 + 6 = (210)_{(8)},$$
$$X = 210 \cdot 12 + 11 = (2531)_{(8)}.$$

Используя двоичную арифметику, по методу (II) получим, что $b = (1010)_{(2)}$, $A_3 = 1_{(2)}$, $A_2 = (11)_{(2)}$, $A_1 = (110)_{(2)}$. Таким образом,

$$X_2 = 1 \cdot 1010 + 11 = (1101)_{(2)},$$
$$X_1 = 1101 \cdot 1010 + 110 = (10\,001\,000)_{(2)},$$
$$X = 10\,001\,000 \cdot 1010 + 1001 = (10\,101\,011\,001)_{(2)},$$

откуда, переходя к восьмеричной системе, получаем

$$X = (2531)_{(8)}.$$

Пример 2. Перевести $X = (2531)_{(8)}$ в десятичную систему. По методу (I) имеем $\bar{b} = 10 = (12)_{(8)}$ и, используя восьмеричную арифметику, находим

$$2531/12 = 210 + 11/12,$$
$$210/12 = 15 + 6/12,$$
$$15/12 = 1 + 3/12,$$
$$1/12 = 0 + 1/12.$$

Переходя к десятичной системе, получаем

$$\bar{A}_0 = (11)_{(8)} = 9,\ \bar{A}_1 = 6_{(8)} = 6,\ \bar{A}_2 = 3_{(8)} = 3,\ \bar{A}_3 = 1$$

и, таким образом, $X = (1369)_{(10)}$.

Применим теперь метод (II). Имеем $\bar{b} = 10$, а восьмеричные цифры числа X не меняются при переходе к десятичной системе. Следовательно, используя десятичную арифметику, получаем

$$X_2 = 2 \cdot 8 + 5 = (21)_{(10)},$$
$$X_1 = 21 \cdot 8 + 3 = (171)_{(10)},$$
$$X = 171 \cdot 8 + 1 = (1369)_{(10)}.$$

Используя двоичную арифметику, по методу (II) имеем

$$b = 8 = (1000)_{(2)} \text{ и } A_0 = 1,$$
$$A_1 = (11)_{(2)},\ A_2 = (101)_{(2)},\ A_3 = (10)_{(2)}.$$

Тогда

$$X_2 = 10 \cdot 1000 + 101 = (10\,101)_{(2)},$$
$$X_1 = 10\,101 \cdot 1000 + 11 = (10\,101\,011)_{(2)},$$
$$X = 10\,101\,011 \cdot 1000 + 1 = (10\,101\,011\,001)_{(2)}.$$

Переводя это число в десятичную систему, получаем

$$X = (1369)_{(10)}.$$

Заметим, что в обоих приведенных примерах восьмеричная арифметика использовалась в качестве промежуточного шага при переводе заданного числа в двоичную систему согласно правилам метода (II). Вместо этого можно данное число перевести сначала в двоичную систему, и тогда согласно методу (I) может быть применена непосредственно двоичная арифметика для перевода заданного числа из двоичной системы в требуемую.

Например, переводя $X = (2531)_{(8)}$ в десятичную систему, находим сначала $X = (101010\,11001)_{(2)}$ и затем, используя метод (I) при $\bar{b} = 10 = (1010)_{(2)}$, получаем

$$10\,101\,011\,001/1010 = 10\,001\,000 + 1001/1010,$$
$$10\,001\,000/1010 = 1101 + 110/1010,$$
$$1101/1010 = 1 + 11/1010,$$
$$1/1010 = 0 + 1/1010.$$

Переводя теперь в десятичную систему, имеем

$$A_0 = (1001)_{(2)} = 9,\ A_1 = (110)_{(2)} = 6,$$
$$A_2 = (11)_{(2)} = 3,\quad A_3 = 1,$$

откуда

$$X = (1369)_{(10)}.$$

Пример 3. Перевести $x = (0.355)_{(10)}$ в двоичную систему. Переводим это число сначала в восьмеричную систему, используя десятичную арифметику. По методу (III), полагая $\bar{b} = 8$, находим

$$(0.355) \cdot 8 = 2 + 0.840,\quad (0.080) \cdot 8 = 0 + 0.640,$$
$$(0.840) \cdot 8 = 6 + 0.720,\quad (0.640) \cdot 8 = 5 + 0.120,$$
$$(0.720) \cdot 8 = 5 + 0.760,\quad (0.120) \cdot 8 = 0 + 0.960,$$
$$(0.760) \cdot 8 = 6 + 0.080,\quad (0.960) \cdot 8 = 7 + 0.680,$$

откуда $x = (0.2656\,0507\,...)_{(8)}$. Поэтому, переводя x в двоичную систему, имеем

$$x = (0.010\,110\,101\,110\,000\,101\,000\,111\,...)_{(2)}.$$

Для того чтобы обратный перевод x из двоичной в десятичную систему давал x снова с заданным числом n десятичных знаков, нужно иметь x в двоичной системе по крайней мере с $\bar{n}$ знаками, где $\bar{n}$ выбирается таким, чтобы $2^{\bar{n}} > 10^n$. В качестве рабочего правила можно взять $\bar{n} \geqslant \frac{10}{3} n$.

Следовательно, чтобы можно было получить $x = (0.355)_{(10)}$ обратным переводом, x должно содержать в двоичной системе $\bar{n} \geqslant \frac{10}{3} \cdot 3 = 10$ знаков. Таким образом,

$$x = (0.010\,110\,110\,0)_{(2)}.$$

Для того чтобы совершить обратный перевод, перейдем в восьмеричную систему, где

$$x = (0.266)_{(8)},$$

и затем применим метод (IV) с $b = 8$, используя десятичную арифметику:

$$x_{-2} = \frac{6}{8} + 6 = 6.75,$$
$$x_{-1} = \frac{6.75}{8} + 2 = 2.84375,$$
$$x = \frac{2.84375}{8} = 0.355\,46875.$$

Можно также применить метод (III) с $\bar{b} = (1010)_{(2)}$, используя двоичную арифметику:

$$(0.010\,11011) \cdot 1010 = 11 + (0.100\,011\,1),$$
$$(0.100\,0111) \cdot 1010 = 101 + (0.100\,011),$$
$$(0.100\,011) \cdot 1010 = 101 + (0.011\,11),$$
$$(0.011\,11) \cdot 1010 = 100 + (0.101\,1).$$

Переводя целые части в десятичную систему, находим

$$\bar{a}_{-1} = (11)_{(2)} = 3, \quad \bar{a}_{-2} = \bar{a}_{-3} = (101)_{(2)} = 5,$$

$$\bar{a}_{-4} = (101)_{(2)} = 4,$$

поэтому

$$x = 0.(3554)_{(10)}.$$

Заметим, что дробная часть представляет собой на каждом шаге непереводимый остаток. Поэтому для того, чтобы округлять на каждом шаге, необходимо только установить, больше или меньше непереводимая отбрасываемая часть, чем 1/2, т.е. в двоичной системе определить, равна первая отбрасываемая цифра 1 или 0.

Пример 4. Перевести $x = (3.141593)_{(10)} \cdot 10^{-9}$ в двоичную систему.

Искомое представление имеет вид

$$x = (1.\ a_{-1}a_{-2} \ldots a_{-n})_{(2)} \cdot 2^{-k},$$

где n и k таковы, что обратный переход из двоичной системы в десятичную дает x с той же точностью в 15 десятичных знаков. Согласно правилу, установленному в примере 3, n и k должны быть выбраны такими, чтобы $n + k \geqslant \frac{10}{3} \cdot 15 = 50$.

По табл. 28.1 находим

$$2^{-29} < (3.141593)_{(10)} \cdot 10^{-9} < 2^{-28}.$$

Таким образом, нужно взять $k = 29$ и, следовательно, выбрать $n > 21$. Поэтому перевод на настольной счетной машине происходит следующим образом. Сначала, используя табл. 28.1, находим

$$2^{29}\, x = (1.686\ 629\ 899)_{(10)}.$$

Затем для удобства переводим это число в восьмеричную систему, используя метод примера 3 и округляя по крайней мере до 7 восьмеричных (21 двоичных) знаков. Находим

$$2^{29}x = (1.537\ 4337)_{(8)}.$$

Поэтому

$$x = (1.537\ 433\ 7)_{(8)} \cdot 2^{-29}$$

и, следовательно,

$$x = (1.101\ 011\ 111\ 100\ 011\ 011\ 111)_{(2)} \cdot 2^{-29}.$$

Для того чтобы перевести x обратно в десятичную систему, нужно только взять из табл. 28.1 различные степени 2, которые содержатся в вышеприведенном представлении, и просуммировать их. Однако, так как $2^{-m} = 2^{-m+1} - 2^{-m}$ для любой действительной переменной m, то более удобно привести сначала представление x к форме

$$x = 2^{-28} - 2^{-31} - 2^{-33} - 2^{-39} + 2^{-42} - 2^{-45} - 2^{-50}$$

и затем просуммировать эти степени 2. (Заметим, что число слагаемых уменьшается, таким образом, с 16 до 7.)

Из табл. 28.1 находим

$$\begin{aligned}
+2^{-28} &= +3.725\ 290\ 298 \cdot 10^{-9}\\
-2^{-31} &= -0.465\ 661\ 287 \cdot 10^{-9}\\
-2^{-33} &= -0.116\ 415\ 322 \cdot 10^{-9}\\
-2^{-39} &= -0.001\ 818\ 989 \cdot 10^{-9}\\
+2^{-42} &= +0.000\ 227\ 374 \cdot 10^{-9}\\
-2^{-45} &= -0.000\ 028\ 422 \cdot 10^{-9}\\
-2^{-50} &= -0.000\ 000\ 888 \cdot 10^{-9}\\
\hline
x &= 3.141\ 592\ 764 \cdot 10^{-9}
\end{aligned}$$

Для обеспечения достаточной точности учитываются девять десятичных знаков. Округляя до семи значащих цифр, имеем

$$x = (3.141593)_{(10)} \cdot 10^{-9}.$$

Для того чтобы перевести в двоичную систему такое число, как $x = (\xi)_{(10)} \cdot 10^k$, где k — положительное целое число, настолько большое, что табл. 28.1 не может быть использована, применим следующий метод. Вычислим

$$\log_2 x = \frac{\lg x}{\lg\ 2} = k + \frac{x_1}{\lg\ 2},$$

где k — частное, а x_1 — остаток, причем деление производится в десятичной системе. Затем находим $\eta = 10x_1$, т.е. $x_1 = \lg \eta$, так что

$$\log_2 x = k + \frac{\lg \eta}{\lg 2} = k + \log_2 \eta;$$

следовательно,

$$x = (\eta)_{(10)} \cdot 2^k.$$

Теперь переводим $(\eta)_{(10)}$ в двоичную систему любым из методов, описанных выше.

Аналогичный метод может быть использован при переводе в десятичную систему двоичного числа, которое лежит вне области табулирования табл. 28.1.

Пример 5. Перевести $x = (2.773)_{(10)} \cdot 10^{83}$ в двоичную систему.

Вычислим сначала, используя 4.1.19:

$$\log_2 x = \frac{\lg x}{\lg 2} = \frac{83.44295}{0.30103} = 277 + \frac{0.05764}{0.30103},$$

и найдем

$$0.05764 = \lg 1.1419.$$

Следовательно,

$$\log_2 x = 277 + \frac{\lg 1.1419}{\lg 2} = 277 + \log_2 1.1419$$

$$x = (1.1419)_{(10)} \cdot 2^{277}.$$

Теперь применим методы примера 3 для того, чтобы получать $(1.1419)_{(10)} = (1.110516)_{(8)}$, где для удобства используются восьмеричные обозначения.

Теперь нужно определить, сколько знаков следует оставить в полученном числе, чтобы при обратном переводе сохранились все десятичные знаки x. Заметим, что последний ненулевой десятичный знак числа x есть $3 \cdot 10^{80}$. По табл. 28.4 определяем, что $2^{265} < 10^{80} < 2^{266}$. Следовательно, в двоичной системе x должно быть двоичным целым числом, умноженным на 2^{265}, т.е. $(1.110\ 516)_{(8)}$ должно быть округлено до 4 восьмеричных (12 двоичных) знаков. В качестве окончательного результата получаем

$$x = (1.1105)_{(8)} \cdot 2^{277} = (11105)_{(8)} \cdot 2^{265} =$$

$$= (1\ 001\ 001\ 000\ 101)_{(2)} \cdot 2^{265}.$$

Перевод обратно в десятичную систему происходит следующим образом. Запишем

$$\lg x = \lg 2 \log_2 x = \lg 2\, \{265 + \log_2 (11105)_{(8)}\} =$$

$$= \lg 2 \left\{ 265 + \frac{\lg\,(11105)_{(8)}}{\lg 2} \right\} = 265 \lg 2 + \lg\,(11105)_{(8)}.$$

Переводя $(111\ 05)_{(8)}$ в десятичную систему любым из методов примера 2, получаем

$$\lg x = 265 \lg 2 + \lg 4677,$$

что дает

$$\lg x = 83.44292.$$

Таким образом, находим, округляя до 4 значащих цифр, что

$$x = (2.\ 773)_{(10)} \cdot 10^{83}.$$

Таблица 28.1. $2^{\pm n}$ в десятичной системе

2^n	n	2^{-n}
1	0	1.0
2	1	0.5
4	2	0.25
8	3	0.125
16	4	0.0625
32	5	0.03125
64	6	0.01562 5
128	7	0.00781 25
256	8	0.00390 625
512	9	0.00195 3125
1024	10	0.00097 65625
2048	11	0.00048 82812 5
4096	12	0.00024 41406 25
8192	13	0.00012 20703 125
16384	14	0.00006 10351 5625
32768	15	0.00003 05175 78125
65536	16	0.00001 52587 89062 5
1 31072	17	0.00000 76293 94531 25
2 62144	18	0.00000 38146 97265 625
5 24288	19	0.00000 19073 48632 8125
10 48576	20	0.00000 09536 74316 40625
20 97152	21	0.00000 04768 37158 20312 5
41 94304	22	0.00000 02384 18579 10156 25
83 88608	23	0.00000 01192 09289 55078 125
167 77216	24	0.00000 00596 04644 77539 0625
335 54432	25	0.00000 00298 02322 38769 53125
671 08864	26	0.00000 00149 01161 19384 76562 5
1342 17728	27	0.00000 00074 50580 59692 38281 25
2684 35456	28	0.00000 00037 25290 29846 19140 625
5368 70912	29	0.00000 00018 62645 14923 09570 3125
10737 41824	30	0.00000 00009 31322 57461 54785 15625
21474 83648	31	0.00000 00004 65661 28730 77392 57812 5
42949 67296	32	0.00000 00002 32830 64365 38696 28906 25
85899 34592	33	0.00000 00001 16415 32182 69348 14453 125
1 71798 69184	34	0.00000 00000 58207 66091 34674 07226 5625
3 43597 38368	35	0.00000 00000 29103 83045 67337 03613 28125
6 87194 76736	36	0.00000 00000 14551 91522 83668 51806 64062 5
13 74389 53472	37	0.00000 00000 07275 95761 41834 25903 32031 25
27 48779 06944	38	0.00000 00000 03637 97880 70917 12951 66015 625
54 97558 13888	39	0.00000 00000 01818 98940 35458 56475 83007 8125
109 95116 27776	40	0.00000 00000 00909 49470 17729 28237 91503 90625
219 90232 55552	41	0.00000 00000 00454 74735 08864 64118 95751 95312 5
439 80465 11104	42	0.00000 00000 00227 37367 54432 32059 47875 97656 25
879 60930 22208	43	0.00000 00000 00113 68683 77216 16029 73937 98828 125
1759 21860 44416	44	0.00000 00000 00056 84341 88608 08014 86968 99414 0625
3518 43720 88832	45	0.00000 00000 00028 42170 94304 04007 43484 49707 03125
7036 87441 77664	46	0.00000 00000 00014 21085 47152 02003 71742 24853 51562 5
14073 74883 55328	47	0.00000 00000 00007 10542 73576 01001 85871 12426 75781 25
28147 49767 10656	48	0.00000 00000 00003 55271 36788 00500 92935 56213 37890 625
56294 99534 21312	49	0.00000 00000 00001 77635 68394 00250 46467 78106 68945 3125
112589 99068 42624	50	0.00000 00000 00000 88817 84197 00125 23233 89053 34472 65625

Таблица 28.2. 2^x в десятичной системе

x	2^x	x	2^x	x	2^x
0,001	1,00069 33874 62581	0,01	1,00695 55500 56719	0,1	1,07177 34625 36293
0,002	1,00138 72557 11335	0,02	1,01395 94797 90029	0,2	1,14869 83549 97035
0,003	1,00208 16050 79633	0,03	1,02101 21257 07193	0,3	1,23114 44133 44916
0,004	1,00277 64359 01078	0,04	1,02811 38266 56067	0,4	1,31950 79107 72894
0,005	1,00347 17485 09503	0,05	1,03526 49238 41377	0,5	1,41421 35623 73095
0,006	1,00416 75432 38973	0,06	1,04246 57608 41121	0,6	1,51571 65665 10398
0,007	1,00486 38203 23785	0,07	1,04971 66836 23067	0,7	1,62450 47927 12471
0,008	1,00556 05803 98468	0,08	1,05701 80405 61380	0,8	1,74110 11265 92248
0,009	1,00625 78234 97782	0,09	1,06437 01824 53360	0,9	1,86606 59830 73615

Таблица 28.3. $10^{\pm n}$ в восьмеричной системе

10^n	n	10^{-n}	10^n	n	10^{-n}
1	0	1,000 000 000 000 000 000 00	112 402 762 000	10	0,000 000 000 006 676 337 66
12	1	0,063 146 314 631 463 146 31	1 351 035 564 000	11	0,000 000 000 000 537 657 77
144	2	0,005 075 341 217 270 243 66	16 432 451 210 000	12	0,000 000 000 000 043 136 32
1 750	3	0,000 406 111 564 570 651 77	221 411 634 520 000	13	0,000 000 000 000 003 411 35
23 420	4	0,000 032 155 613 530 704 15	2 657 142 036 440 000	14	0,000 000 000 000 000 264 11
303 240	5	0,000 002 476 132 610 706 64	34 327 724 461 500 000	15	0,000 000 000 000 000 022 01
3 641 100	6	0,000 000 206 157 364 055 37	434 157 115 760 200 000	16	0,000 000 000 000 000 001 63
45 113 200	7	0,000 000 015 327 745 152 75	5 432 127 413 542 400 000	17	0,000 000 000 000 000 000 14
575 360 400	8	0,000 000 001 257 143 561 06	67 405 553 164 731 000 000	18	0,000 000 000 000 000 000 01
7 346 545 000	9	0,000 000 000 104 560 276 41			

Таблица 28.4. $n \lg 2$, $n \log_2 10$ в десятичной системе

n	$n \log_{10} 2$	$n \log_2 10$	n	$n \log_{10} 2$	$n \log_2 10$
1	0,30102 99957	3,32192 80949	6	1,80617 99740	19,93156 85693
2	0,60205 99913	6,64385 61898	7	2,10720 99696	23,25349 66642
3	0,90308 99870	9,96578 42847	8	2,40823 99653	26,57542 47591
4	1,20411 99827	13,28771 23795	9	2,70926 99610	29,89735 28540
5	1,50514 99783	16,60964 04744	10	3,01029 99566	33,21928 09489

Таблица 28.5. Таблицы сложения и умножения в двоичной и восьмеричной системах

Сложение Умножение

Двоичная система

Сложение:

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 10$

Умножение:

$0 \times 0 = 0$

$0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$

$1 \times 1 = 1$

Восьмеричная система

Сложение:

0	01	02	03	04	05	06	07
1	02	03	04	05	06	07	10
2	03	04	05	06	07	10	11
3	04	05	06	07	10	11	12
4	05	06	07	10	11	12	13
5	06	07	10	11	12	13	14
6	07	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

Умножение:

1	02	03	04	05	06	07
2	04	06	10	12	14	16
3	06	11	14	17	22	25
4	10	14	20	24	30	34
5	12	17	24	31	36	43
6	14	22	30	36	44	52
7	16	25	34	43	52	61

Таблица 28.6. Математические константы в восьмеричной системе

$\pi = (3.11037\ 552421)_{(8)}$	$e = (2.55760\ 521305)_{(8)}$	$\gamma = (0.44742\ 147707)_{(8)}$
$\pi^{-1} = (0.24276\ 301556)_{(8)}$	$e^{-1} = (0.27426\ 530661)_{(8)}$	$\ln \gamma = -(0.43127\ 233602)_{(8)}$
$\sqrt{\pi} = (1.61337\ 611067)_{(8)}$	$\sqrt{e} = (1.51411\ 230704)_{(8)}$	$\log_2 \gamma = -(0.62573\ 030645)_{(8)}$
$\ln \pi = (1.11206\ 404435)_{(8)}$	$\log_{10} e = (0.33626\ 754251)_{(8)}$	$\sqrt{2} = (1.32404\ 746320)_{(8)}$
$\log_2 \pi = (1.51544\ 163223)_{(8)}$	$\log_2 e = (1.34252\ 166245)_{(8)}$	$\ln 2 = (0.54271\ 027760)_{(8)}$
$\sqrt{10} = (3.12305\ 407267)_{(8)}$	$\log_2 10 = (3.24464\ 741136)_{(8)}$	$\ln 10 = (2.23273\ 067355)_{(8)}$

ЛИТЕРАТУРА

28.1. Malengreau J. Étude des écritures binaires. — Neuchâtel: Édition Griffon, 1958. — (Bibliothèque Sci., **32**. Mathematique).

28.2. McCracken D. D. Digital computer programming. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1957.

28.3. Richards R. B. Arithmetic operation in digital computers. — N.Y.: Van Nostrand Co., 1955.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

28.4. Криницкий Н. А., Миронов Г. А., Фролов Г. Д. Программирование. — М.: Наука, 1966.

Глава 29
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

СОДЕРЖАНИЕ

29.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Одномерное преобразование Лапласа

29.1.1. $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int\limits_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt.$

$F(t)$ — функция действительной переменной t, s — комплексная переменная. $F(t)$ называется оригиналом, $f(s)$ — изображением. Если интеграл 29.1.1 сходится для действительного значения $s = s_0$, т.е.

$$\lim_{\substack{A\to 0\\ B\to\infty}} \int\limits_A^B e^{-s_0 t} F(t)\,dt$$

существует, то он сходится для всех s, для которых $\operatorname{Re} s > s_0$, и изображение — однозначная аналитическая функция s в полуплоскости $\operatorname{Re} s > s_0$.

Двумерное преобразование Лапласа

29.1.2. $f(u, v) = \mathcal{L}\{F(x, y)\} =$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-ux-vy} F(x, y)\,dx\,dy.$$

Определение единичной функции Хевисайда

29.1.3. $u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ 1/2 & (t = 0), \\ 1 & (t > 0). \end{cases}$

В содержащихся здесь таблицах произведение $F(t)\ u\ (t)$ обозначено через $F(t)$.

29.2. ОПЕРАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА *)

Оригинал $F(t)$	*Изображение* $f(s)$
29.2.1. $F(t)$	$\int\limits_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$
	Формула обращения
29.2.2. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ts} f(s)\,ds$	$f(s)$
	Свойство линейности
29.2.3. $AF(t) + BG(t)$	$Af(s) + Bg(s)$
	Дифференцирование
29.2.4. $F'(t)$	$sf(s) - F(+0)$
29.2.5. $F^{(n)}(t)$	$s^n f(s) - s^{n-1}F(+0) - s^{n-2}F'(+0) - \ldots - F^{(n-1)}(+0)$

*) Соотношения взяты из [29.2].

Оригинал $F(t)$	*Изображение* $f(s)$
	Интегрирование
29.2.6. $\int_0^t F(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}f(s)$
29.2.7. $\int_0^t\int_0^\tau F(\lambda)\,d\lambda\,d\tau$	$\frac{1}{s^2}f(s)$
	Теорема о свертке
29.2.8. $\int_0^t F_1(t-\tau)F_2(\tau)\,d\tau = F_1 * F_2$	$f_1(s)f_2(s)$
	Дифференцирование
29.2.9. $-tF(t)$	$f'(s)$
29.2.10. $(-1)^n t^n F(t)$	$f^{(n)}(s)$
	Интегрирование
29.2.11. $\frac{1}{t}F(t)$	$\int_s^\infty f(x)\,dx$
	Теорема смещения
29.2.12. $e^{at}F(t)$	$f(s-a)$
29.2.13. $\frac{1}{c}F\left(\frac{t}{c}\right)\quad (c>0)$	$f(cs)$
29.2.14. $\frac{1}{c}e^{(b/c)t}F\left(\frac{t}{c}\right)\quad (c>0)$	$f(cs-b)$
	Теорема запаздывания
29.2.15. $F(t-b)\,u(t-b)\quad (b>0)$	$e^{-bs}f(s)$
	Периодические функции
29.2.16. $F(t+a)=F(t)$	$\dfrac{\int_0^a e^{-st}F(t)\,dt}{1-e^{-as}}$
29.2.17. $F(t+a)=-F(t)$	$\dfrac{\int_0^a e^{-st}F(t)\,dt}{1+e^{-as}}$
29.2.18. $F(t)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u(t-na)$	$\dfrac{f(s)}{1-e^{-as}}$
29.2.19. $\lvert F(t)\rvert$	$f(s)\,\mathrm{cth}\,\dfrac{as}{2}$
	Теорема разложения Хевисайда
29.2.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(a_n)}{q'(a_n)}e^{a_n t}$	$\frac{p(s)}{q(s)}$, $q(s)=(s-a_1)(s-a_2)\ldots(s-a_m)$ $p(s)$ — многочлен степени $< m$
29.2.21. $e^{at}\sum_{n=1}^{r}\frac{p^{(r-n)}(a)}{(r-n)!}\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{p(s)}{(s-a)^r}$ $p(s)$ — многочлен степени $< r$

29.3. ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА *)

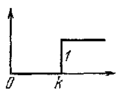
Более полные таблицы преобразований Лапласа и других интегральных преобразований см. в [29.9]. Таблицы двумерных преобразований Лапласа см. в [29.11].

	$f(s)$	$F(t)$
29.3.1.	$\dfrac{1}{s}$	1
29.3.2.	$\dfrac{1}{s^2}$	t
29.3.3.	$\dfrac{1}{s^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
29.3.4.	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
29.3.5.	$s^{-3/2}$	$2\sqrt{t/\pi}$
29.3.6.	$s^{-(n+1/2)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\dfrac{2^n t^{n-1/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)\sqrt{\pi}}$
29.3.7.	$\dfrac{\Gamma(k)}{s^k} \quad (k > 0)$	t^{k-1}
29.3.8.	$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}
29.3.9.	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
29.3.10.	$\dfrac{1}{(s+a)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\dfrac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$
29.3.11.	$\dfrac{\Gamma(k)}{(s-a)^k} \quad (k > 0)$	$t^{k-1}e^{-at}$
29.3.12.	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)} \quad (a \neq b)$	$\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
29.3.13.	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)} \quad (a \neq b)$	$\dfrac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$
29.3.14.	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$ (a, b, c — различные постоянные)	$-\dfrac{(b-c)e^{-at} + (c-a)e^{-bt} + (a-b)e^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
29.3.15.	$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sin at$
29.3.16.	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
29.3.17.	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{sh} at$
29.3.18.	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\operatorname{ch} at$
29.3.19.	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(1 - \cos at)$

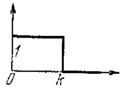
*) Таблица взята из [29.2].

	$f(s)$	$F(t)$
29.3.20.	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^3}(at-\sin at)$
29.3.21.	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
29.3.22.	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin at$
29.3.23.	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin at + at\cos at)$
29.3.24.	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
29.3.25.	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \quad (a^2\neq b^2)$	$\frac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}$
29.3.26.	$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}e^{-at}\sin bt$
29.3.27.	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
29.3.28.	$\frac{3a^2}{s^3+a^3}$	$e^{-at}-e^{at/2}\left(\cos\frac{at\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{at\sqrt{3}}{2}\right)$
29.3.29.	$\frac{4a^3}{s^4+4a^4}$	$\sin at\,\mathrm{ch}\,at-\cos at\,\mathrm{sh}\,at$
29.3.30.	$\frac{s}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{2a^2}\sin at\,\mathrm{sh}\,at$
29.3.31.	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(\mathrm{sh}\,at-\sin at)$
29.3.32.	$\frac{s}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2}(\mathrm{ch}\,at-\cos at)$
29.3.33.	$\frac{8a^3s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$(1+a^2t^2)\sin at-at\cos at$
29.3.34.	$\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n$	$L_n(t)$
29.3.35.	$\frac{s}{(s+a)^{3/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-at}(1-2at)$
29.3.36.	$\sqrt{s+a}-\sqrt{s+b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{-bt}-e^{-at})$
29.3.37.	$\frac{1}{\sqrt{s}+a}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-ae^{a^2t}\operatorname{erfc} a\sqrt{t}$
29.3.38.	$\frac{\sqrt{s}}{s-a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}+ae^{a^2t}\operatorname{erf} a\sqrt{t}$
29.3.39.	$\frac{\sqrt{s}}{s+a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-\frac{2a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t}\int_0^{a\sqrt{t}}e^{\lambda^2}\,d\lambda$
29.3.40.	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a^2)}$	$\frac{1}{a}e^{a^2t}\operatorname{erf} a\sqrt{t}$
29.3.41.	$\frac{1}{\sqrt{s}(s+a^2)}$	$\frac{2}{a\sqrt{\pi}}e^{-a^2t}\int_0^{a\sqrt{t}}e^{\lambda^2}\,d\lambda$

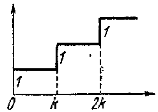
	$f(s)$	$F(t)$
29.3.42.	$\dfrac{b^2-a^2}{(s-a^2)(b+\sqrt{s})}$	$e^{a^2t}[b-a\,\mathrm{erf}\,a\sqrt{t}]-be^{b^2t}\,\mathrm{erfc}\,b\sqrt{t}$
29.3.43.	$\dfrac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+a)}$	$e^{a^2t}\,\mathrm{erfc}\,a\sqrt{t}$
29.3.44.	$\dfrac{1}{(s+a)\sqrt{s+b}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{b-a}}\,e^{-at}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{b-a}\sqrt{t})$
29.3.45.	$\dfrac{b^2-a^2}{\sqrt{s}(s-a^2)(\sqrt{s}+b)}$	$e^{a^2t}\left[\dfrac{b}{a}\,\mathrm{erf}\,(a\sqrt{t})-1\right]+e^{b^2t}\,\mathrm{erfc}\,b\sqrt{t}$
29.3.46.	$\dfrac{(1-s)^n}{s^{n+1/2}}$	$\dfrac{n!}{(2n)!\sqrt{\pi t}}\,H_{2n}(\sqrt{t})$
29.3.47.	$\dfrac{(1-s)^n}{s^{n+1/2}}$	$\dfrac{n!}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}\,H_{2n+1}(\sqrt{t})$
29.3.48.	$\dfrac{\sqrt{s+2a}}{\sqrt{s}}-1$	$ae^{-at}[I_1(at)+I_0(at)]$
29.3.49.	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{-\frac{1}{2}(a+b)t}\,I_0\left(\dfrac{a-b}{2}\,t\right)$
29.3.50.	$\dfrac{\Gamma(k)}{(s+a)^k(s+b)^k}\quad(k>0)$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{t}{a-b}\right)^{k-1/2}e^{-\frac{1}{2}(a+b)t}\,I_{k-1/2}\left(\dfrac{a-b}{2}\,t\right)$
29.3.51.	$\dfrac{1}{(s+a)^{1/2}(s+b)^{3/2}}$	$te^{-\frac{1}{2}(a+b)t}\left[I_0\left(\dfrac{a-b}{2}\,t\right)+I_1\left(\dfrac{a-b}{2}\,t\right)\right]$
29.3.52.	$\dfrac{\sqrt{s+2a}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+2a}+\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{t}\,e^{-at}I_1(at)$
29.3.53.	$\dfrac{(a-b)^k}{(\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b})^{2k}}\quad(k>0)$	$\dfrac{k}{t}\,e^{-\frac{1}{2}(a+b)t}\,I_k\left(\dfrac{a-b}{2}\,t\right)$
29.3.54.	$\dfrac{(\sqrt{s+a}+\sqrt{s})^{-2\nu}}{\sqrt{s}\sqrt{s+a}}\quad(\nu>-1)$	$\dfrac{1}{a^\nu}e^{-\frac{1}{2}at}\,I_\nu\left(\dfrac{1}{2}\,at\right)$
29.3.55.	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
29.3.56.	$\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^\nu}{\sqrt{s^2+a^2}}\quad(\nu>-1)$	$a^\nu J_\nu(at)$
29.3.57.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^k}\quad(k>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-1/2}J_{k-1/2}(at)$
29.3.58.	$(\sqrt{s^2+a^2}-s)^k\quad(k>0)$	$\dfrac{ka^k}{t}\,J_k(at)$
29.3.59.	$\dfrac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^\nu}{\sqrt{s^2-a^2}}\quad(\nu>-1)$	$a^\nu I_\nu(at)$
29.3.60.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^k}\quad(k>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-1/2}I_{k-1/2}(at)$
29.3.61.	$\dfrac{1}{s}\,e^{-ks}$	$u(t-k)$
29.3.62.	$\dfrac{1}{s^2}\,e^{-ks}$	$(t-k)\,u(t-k)$



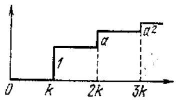
$f(s)$	$F(t)$
29.3.63. $\dfrac{1}{s^{\mu}}e^{-ks} \quad (\mu>0)$	$\dfrac{(t-k)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}u(t-k)$



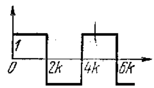
$f(s)$	$F(t)$
29.3.64. $\dfrac{1-e^{-ks}}{s}$	$u(t)-u(t-k)$
29.3.65. $\dfrac{1}{s(1-e^{-ks})}=\dfrac{1+\operatorname{cth}\frac{1}{2}ks}{2s}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u(t-nk)$



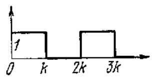
$f(s)$	$F(t)$
29.3.66. $\dfrac{1}{s(e^{ks}-a)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{n-1}u(t-nk)$



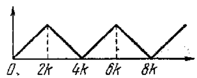
$f(s)$	$F(t)$
29.3.67. $\dfrac{1}{s}\operatorname{th}ks$	$u(t)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-2nk)$



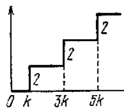
$f(s)$	$F(t)$
29.3.68. $\dfrac{1}{s(1+e^{-ks})}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u(t-nk)$



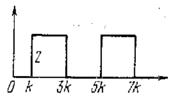
$f(s)$	$F(t)$
29.3.69. $\dfrac{1}{s^2}\operatorname{th}ks$	$tu(t)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times(t-2nk)\,u(t-2nk)$



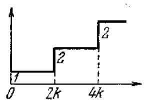
$f(s)$	$F(t)$
29.3.70. $\dfrac{1}{s\operatorname{sh}ks}$	$2\sum\limits_{n=0}^{\infty}u[t-(2n+1)k]$



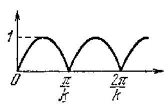
$f(s)$	$F(t)$
29.3.71. $\dfrac{1}{s\operatorname{ch}ks}$	$2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u[t-(2n+1)k]$

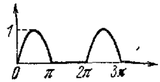


$f(s)$	$F(t)$
29.3.72. $\dfrac{1}{s}\operatorname{cth}ks$	$u(t)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}u(t-2nk)$



$f(s)$	$F(t)$
29.3.73. $\dfrac{k}{s^2+k^2}\operatorname{cth}\dfrac{\pi s}{2k}$	$\lvert\sin kt\rvert$



	$f(s)$	$F(t)$
29.3.74.	$\dfrac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u(t-n\pi)\sin t$ 
29.3.75.	$\dfrac{1}{s}e^{-k/s}$	$J_0(2\sqrt{kt})$
29.3.76.	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{kt}$
29.3.77.	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{ch} 2\sqrt{kt}$
29.3.78.	$\dfrac{1}{s^{3/2}}e^{-k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}\sin 2\sqrt{kt}$
29.3.79.	$\dfrac{1}{s^{3/2}}e^{k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}\operatorname{sh} 2\sqrt{kt}$
29.3.80.	$\dfrac{1}{s^{\mu}}e^{-k/s}\quad(\mu>0)$	$\left(\dfrac{t}{k}\right)^{(\mu-1)/2}J_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$
29.3.81.	$\dfrac{1}{s^{\mu}}e^{k/s}\quad(\mu>0)$	$\left(\dfrac{t}{k}\right)^{(\mu-1)/2}I_{\mu-1}(2\sqrt{kt})$
29.3.82.	$e^{-k\sqrt{s}}\quad(k>0)$	$\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\dfrac{k^2}{4t}\right)$
29.3.83.	$\dfrac{1}{s}e^{-k\sqrt{s}}\quad(k\geqslant 0)$	$\operatorname{erfc}\dfrac{k}{2\sqrt{t}}$
29.3.84.	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-k\sqrt{s}}\quad(k\geqslant 0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{k^2}{4t}\right)$
29.3.85.	$\dfrac{1}{s^{3/2}}e^{-k\sqrt{s}}\quad(k\geqslant 0)$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\exp\left(-\dfrac{k^2}{4t}\right)-k\operatorname{erfc}\dfrac{k}{2\sqrt{t}}=2\sqrt{t}\,\mathrm{i}\operatorname{erfc}\dfrac{k}{2\sqrt{t}}$
29.3.86.	$\dfrac{1}{s^{1+n/2}}e^{-k\sqrt{s}}\quad(n=0,1,2,\ldots,\ k\geqslant 0)$	$(4t)^{n/2}\,\mathrm{i}^n\operatorname{erfc}\dfrac{k}{2\sqrt{t}}$
29.3.87.	$s^{(n-1)/2}e^{-k\sqrt{s}}\quad(n=0,1,2,\ldots;\ k>0)$	$\dfrac{\exp\left(-\dfrac{k^2}{4t}\right)}{2^n\sqrt{\pi t^{n+1}}}H_n\left(\dfrac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
29.3.88.	$\dfrac{e^{-k\sqrt{s}}}{a+\sqrt{s}}\quad(k\geqslant 0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{k^2}{4t}\right)-a e^{ak}e^{a^2t}\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t}+\dfrac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
29.3.89.	$\dfrac{a e^{-k\sqrt{s}}}{s(a+\sqrt{s})}\quad(k\geqslant 0)$	$-e^{ak}e^{a^2t}\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t}+\dfrac{k}{2\sqrt{t}}\right)+\operatorname{erfc}\dfrac{k}{2\sqrt{t}}$
29.3.90.	$\dfrac{e^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(a+\sqrt{s})}\quad(k\geqslant 0)$	$e^{ak}e^{a^2t}\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t}+\dfrac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
29.3.91.	$\dfrac{e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s(s+a)}}\quad(k\geqslant 0)$	$e^{-at/2}I_0\left(\dfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2}\right)u(t-k)$
29.3.92.	$\dfrac{e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}\quad(k\geqslant 0)$	$J_0(a\sqrt{t^2-k^2})\,u(t-k)$

	$f(s)$	$F(t)$
29.3.93.	$\dfrac{e^{-k\sqrt{s^2-a^2}}}{\sqrt{s^2-a^2}} \quad (k \geqslant 0)$	$I_0(a\sqrt{t^2-k^2})\,u(t-k)$
29.3.94.	$\dfrac{e^{-k(\sqrt{s^2+a^2}-s)}}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad (k \geqslant 0)$	$J_0(a\sqrt{t^2+2kt})$
29.3.95.	$e^{-ks}-e^{-k\sqrt{s^2+a^2}} \quad (k>0)$	$\dfrac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}}J_1(a\sqrt{t^2-k^2})\,u(t-k)$
29.3.96.	$e^{-k\sqrt{s^2-a^2}}-e^{-ks} \quad (k>0)$	$\dfrac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}}I_1(a\sqrt{t^2-k^2})\,u(t-k)$
29.3.97.	$\dfrac{a^\nu e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}(\sqrt{s^2+a^2}+s)^\nu} \quad (\nu>-1,\ k \geqslant 0)$	$\left(\dfrac{t-k}{t+k}\right)^{\nu/2} J_\nu(a\sqrt{t^2-k^2})\,u(t-k)$
29.3.98.	$\dfrac{1}{s}\ln s$	$-\gamma-\ln t$ ($\gamma = 0.57721\ 56649\ \ldots$ — постоянная Эйлера)
29.3.99.	$\dfrac{1}{s^k}\ln s \quad (k>0)$	$\dfrac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}[\psi(k)-\ln t]$
29.3.100.	$\dfrac{\ln s}{s-a} \quad (a>0)$	$e^{at}[\ln a + E_1(at)]$
29.3.101.	$\dfrac{\ln s}{s^2+1}$	$\cos t\,\mathrm{Si}\,(t)-\sin t\,\mathrm{Ci}\,(t)$
29.3.102.	$\dfrac{s\ln s}{s^2+1}$	$-\sin t\,\mathrm{Si}\,(t)-\cos t\,\mathrm{Ci}(t)$
29.3.103.	$\dfrac{1}{s}\ln(1+ks) \quad (k>0)$	$E_1\left(\dfrac{t}{k}\right)$
29.3.104.	$\ln\dfrac{s+a}{s+b}$	$\dfrac{1}{t}(e^{-bt}-e^{-at})$
29.3.105.	$\dfrac{1}{s}\ln(1+k^2s^2) \quad (k>0)$	$-2\,\mathrm{Ci}\left(\dfrac{t}{k}\right)$
29.3.106.	$\dfrac{1}{s}\ln(s^2+a^2) \quad (a>0)$	$2\ln a - 2\,\mathrm{Ci}\,(at)$
29.3.107.	$\dfrac{1}{s^2}\ln(s^2+a^2) \quad (a>0)$	$\dfrac{2}{a}[at\ln a+\sin at - at\,\mathrm{Ci}\,(at)]$
29.3.108.	$\ln\dfrac{s^2+a^2}{s^2}$	$\dfrac{2}{t}(1-\cos at)$
29.3.109.	$\ln\dfrac{s^2-a^2}{s^2}$	$\dfrac{2}{t}(1-\mathrm{ch}\,at)$
29.3.110.	$\mathrm{arctg}\,\dfrac{k}{s}$	$\dfrac{1}{t}\sin kt$
29.3.111.	$\dfrac{1}{s}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{k}{s}$	$\mathrm{Si}\,(kt)$
29.3.112.	$e^{k^2s^2}\,\mathrm{erfc}\,ks \quad (k>0)$	$\dfrac{1}{k\sqrt{\pi}}\exp\left(-\dfrac{t^2}{4k^2}\right)$
29.3.113.	$\dfrac{1}{s}e^{k^2s^2}\,\mathrm{erfc}\,ks \quad (k>0)$	$\mathrm{erf}\,\dfrac{t}{2k}$
29.3.114.	$e^{ks}\,\mathrm{erfc}\,\sqrt{ks} \quad (k>0)$	$\dfrac{\sqrt{k}}{\pi\sqrt{t}(t+k)}$

$f(s)$	$F(t)$
29.3.115. $\frac{1}{\sqrt{s}}\operatorname{erfc}\sqrt{ks}\quad (k \geqslant 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}u(t-k)$
29.3.116. $\frac{1}{\sqrt{s}}e^{ks}\operatorname{erfc}\sqrt{ks}\quad (k \geqslant 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi(t+k)}}$
29.3.117. $\operatorname{erf}\frac{k}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\pi t}\sin 2k\sqrt{t}$
29.3.118. $\frac{1}{\sqrt{s}}e^{k^2/s}\operatorname{erfc}\frac{k}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2k\sqrt{t}}$
29.3.119. $K_0(ks)\quad (k>0)$	$\frac{1}{\sqrt{t^2-k^2}}u(t-k)$
29.3.120. $K_0(k\sqrt{s})\quad (k>0)$	$\frac{1}{2t}\exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$
29.3.121. $\frac{1}{s}e^{ks}K_1(ks)\quad (k>0)$	$\frac{1}{k}\sqrt{t(t+2k)}$
29.3.122. $\frac{1}{\sqrt{s}}K_1(k\sqrt{s})\quad (k>0)$	$\frac{1}{k}\exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$
29.3.123. $\frac{1}{\sqrt{s}}e^{k/s}K_0\left(\frac{k}{s}\right)\quad (k>0)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi t}}K_0(2\sqrt{2kt})$
29.3.124. $\pi e^{-ks}I_0(ks)\quad (k>0)$	$\frac{1}{\sqrt{t(2k-t)}}[u(t)-u(t-2k)]$
29.3.125. $e^{-ks}I_1(ks)\quad (k>0)$	$\frac{k-t}{\pi k\sqrt{t(2k-t)}}[u(t)-u(t-2k)]$
29.3.126. $e^{as}E_1(as)\quad (a>0)$	$\frac{1}{t+a}$
29.3.127. $\frac{1}{a}-se^{as}E_1(as)\quad (a>0)$	$\frac{1}{(t+a)^2}$
29.3.128. $a^{1-n}e^{as}E_n(as)\quad (a>0; n=0, 1, 2,\ldots)$	$\frac{1}{(t+a)^n}$
29.3.129. $\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{Si}(s)\right]\cos s+\operatorname{Ci}(s)\sin s$	$\frac{1}{t^2+1}$

29.4. ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА—СТИЛТЬЕСА *)

$\varphi(s)$	$\Phi(t)$
29.4.1. $\int\limits_0^\infty e^{-st}\,d\Phi(t)$	$\Phi(t)$
29.4.2. $e^{-ks}\quad (k>0)$	$u(t-k)$
29.4.3. $\frac{1}{1-e^{-ks}}\quad (k>0)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u(t-nk)$
29.4.4. $\frac{1}{1+e^{-ks}}\quad (k>0)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u(t-nk)$

*) Таблица взята из [29.5].

	$\varphi(s)$	$\Phi(t)$
29.4.5.	$\dfrac{1}{\operatorname{sh} ks} \quad (k>0)$	$2\sum_{n=0}^{\infty} u[t-(2n+1)k]$
29.4.6.	$\dfrac{1}{\operatorname{ch} ks} \quad (k>0)$	$2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u[t-(2n+1)k]$
29.4.7.	$\operatorname{th} ks \quad (k>0)$	$u(t)+2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u(t-2nk)$
29.4.8.	$\dfrac{1}{\operatorname{sh}(ks+a)} \quad (k>0)$	$2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)a}\, u[t-(2n+1)k]$
29.4.9.	$\dfrac{e^{-hs}}{\operatorname{sh}(ks+a)} \quad (k>0,\ h>0)$	$2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)a}\, u[t-h-(2n+1)k]$
29.4.10.	$\dfrac{\operatorname{sh}(hs+b)}{\operatorname{sh}(ks+a)} \quad (0<h<k)$	$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)a}\{e^{b} u[t+h-(2n+1)k]-e^{-b} u[t-h-(2n+1)k]\}$
29.4.11.	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-k_n s} \quad (0<k_0<k_1<\ldots)$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u(t-k_n)$

Определение преобразования Лапласа—Стилтьеса см. в [29.7]. На практике преобразования Лапласа—Стилтьеса часто записываются как обычные преобразования Лапласа, содержащие дельта-функцию Дирака $\delta(t)$. Эта «функция» формально может рассматриваться как производная единичной функции Хевисайда $du(t) = \delta(t)\,dt$, так что

$$\int_{-\infty}^{x} du(t) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)\,dt = \begin{cases} 0 & (x<0), \\ 1 & (x>0). \end{cases}$$

Тогда, например, соответствие 29.4.2 представляется в виде

$$e^{-ks} = \int_{0}^{x} e^{-st}\delta(t-k)\,dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи

29.1. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Operational methods in applied mathematics.— L.: Oxford Univ. Press, 1948. Русский перевод: Карслоу Х., Егер Ф. Операционные методы в прикладной математике. — М.: ИЛ, 1948.

29.2. Churchill R. V. Operational mathematics.— N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1958.

29.3. Doetsch G. Handbuch der Laplace-Transformation. — Basel: Stuttgart, 1955, 1956, V. I—III.

29.4. Doetsch G. Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. — Basel: Birkhäuser, 1958.

29.5. Morse P. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics. — N.Y.: Mc-Graw-Hill Book Co., 1953, V. I, II. Русский перевод: Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики.— М.: ИЛ, 1958—1960, Т. I, II.

29.6. van der Pol B., Bremmer H. Operational calculus. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1955. Русский перевод: Ван дер Поль Б., Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа.— М.: ИЛ. 1952.

29.7. Widder D. V. The Laplace transform. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.

Таблицы

29.8. Doetsch G. Guide to the applications of Laplace-transforms. — L.: D. Van Nostrand, 1961.

29.9. Erdélyi A. et al. Tables of integral transforms. — N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1954, V. I, II. Русский перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. — М.: Наука, 1969—1970, Т.I, II.

29.10. Magnus W., Oberhettinger F., Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. — N.Y.: Chelsea Publishing Co., 1949.

29.11. Voelker D., Doetsch G. Die zweidimensionale Laplace-Transformation. — Basel: Birkhäuser, 1950.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

29.12. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению.— М.: Высшая школа, 1965.

29.13. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление.— М.: Наука, 1974.

29.14. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление.— М.: Высшая школа, 1975.

29.15. Микусинский Я. Операторное исчисление. — М.: ИЛ, 1956.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Б

В

Г

Д

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Ц

Ч

Э

Я

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

$\left.\begin{matrix} f_{e,r} \\ f_{o,r} \end{matrix}\right\}$ — множители связи для функций Матье 20.6

$F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция 15.1

$F(\varphi \setminus \alpha)$ — эллиптический интеграл первого рода 17.2

$F_L(\eta \setminus \rho)$ — волновая функция Кулона (регулярная) 14.1

FPP — фундаментальный параллелограмм периодов 18.1

${}_nF_m\,(a_1,\ldots, a_n;\ b_1,\ldots, b_m; z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция 15.1

g_2, g_3 — инварианты эллиптических функций Вейерштрасса 18.1

$\left.\begin{matrix} g_{e,r} \\ g_{o,r} \end{matrix}\right\}$ — множители связи для функций Матье 20.8

$g(x, y, \rho)$ — двумерное нормальное распределение 26.3

$\mathrm{Gi}\,(z)$ — присоединенная функция Эйри 10.4

$G_L(\eta, \rho)$ — волновая функция Кулона (иррегулярная или логарифмическая) 14.1

$G_n(p, q, x)$ — многочлен Якоби 22.2

$\mathrm{gd}\,(z)$ — 4.3.117

$h_n^{(i)}(z)$ — сферическая функция Бесселя третьего рода 10.1

$\left.\begin{matrix} \mathrm{hav}\ A \\ \mathrm{haversine}\ A \end{matrix}\right\}$ — 4.3.147

$\mathbf{H}_\nu(z)$ — функция Струве 12.1

$\mathrm{Hi}\,(z)$ — присоединенная функция Эйри 10.4

$He_n(z)$ — многочлен Эрмита 22.2

$H_\nu^{(n)}(z)$ — функции Бесселя третьего рода (Ханкеля) 9.1

$Hh_n(x)$ — Hh-вероятности функция 19.14

$H_n(x)$ — многочлен Эрмита 22.2

$H(m, n, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция 19.25

$I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя 9.6

$\sqrt{\dfrac{\pi}{2z}}\,I_{n+1/2}(z)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода 10.2

$\sqrt{\dfrac{\pi}{2z}}\,I_{-n-1/2}(z)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя второго рода 10.2

$I(u, p)$ — неполная гамма-функция (форма Пирсона) 6.5.6

$I_x(a, b)$ — неполная бета-функция 6.6

$\mathrm{Im}\ z$ — мнимая часть $z(=y)$ 3.7

$i^n\,\mathrm{erfc}\ z$ — 7.2

$j_n(z)$ — сферическая функция Бесселя первого рода 10.1

$\mathbf{J}_\nu(z)$ — функция Ангера 12.3

$J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода 9.1

k — модуль эллиптического интеграла 17.2

k' — дополнительный модуль эллиптического интеграла 17.2

$k_\nu(z)$ — функция Бейтмена 13.6

$\mathrm{Ki}_r(z)$ — кратные интегралы от $K_0(z)$ 11.2

$\sqrt{\dfrac{\pi}{2z}}\,K_{n+1/2}(z)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя третьего рода 10.2

$K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя 9.6

$K(m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода 17.3

$\left.\begin{matrix} \mathrm{ker}_\nu(x) \\ \mathrm{kei}_\nu(x) \end{matrix}\right\}$ — функции Кельвина 9.9

$\mathrm{li}(x)$ — интегральный логарифм 5.1

$\lg x$ — десятичный логарифм 4.1

$\lg_a z$ — логарифм числа z по основанию a 4.1

$\ln z\ (=\lg_e z)$ — натуральный логарифм 4.1

$\mathcal{L}\,[F(t)] = f(s)$ — преобразования Лапласа 29.1

$L(h, k, \rho)$ — кумулятивное двумерное нормальное распределение 26.3

$L_n(x)$ — многочлен Лагерра 22.2

$L_n^{(\alpha)}(x)$ — обобщенный многочлен Лагерра 22.2

$\mathbf{L}_\nu(z)$ — модифицированная функция Струве 12.2

$m = \mu_1'$ — среднее значение 26.1

m — параметр (эллиптических функций) 16.1

m_1 — дополнительный параметр 16.1

$M(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера 13.1

$Mc_r^{(j)}(z, q)$ — модифицированная функция Матье 20.6

$Ms_r^{(j)}(z, q)$ — модифицированная функция Матье 20.6

$M_{k,\mu}(z)$ — функция Уиттекера 13.1

n — характеристика эллиптического интеграла третьего рода 17.2

$O_n(z)$ — многочлен Неймана 9.1.83

$p(n)$ — число разбиений 24.2

$\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса 18.1

$\mathrm{ph}\ z$ — фаза комплексного числа z 3.7

$P(a, x)$ — неполная гамма-функция 6.5

$\mathcal{P}(\chi^2\,|\,\nu)$ — распределение хи-квадрат 6.5, 26.4

$P_\nu^\mu(z)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода 8.1

$P(x)$ — нормальное распределение 26.2

$P_n(x)$ — многочлен Лежандра (сферический многочлен) 8.4, 22.2

$P_n^*(x)$ — смещенный многочлен Лежандра 22.2

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлен Якоби 22.2

$\Pr\{X \leqslant x\}$ — вероятность события $X \leqslant x$ 26.1

q — параметр Якоби 17.3

$Q(x) = 1 - P(x)$ — нормальное распределение 26.2

$q(n)$ — число разбиений на различные целые слагаемые 24.2

$Q_\nu^\mu(z)$ — присоединенная функция Лежандра второго рода 8.1

$Q_n(x)$ — функция Лежандра второго рода 8.4

$\operatorname{Re} z$ — действительная часть $z(=x)$ 3.7
$R_{mn}^{(\nu)}(c, \xi)$ — радиальная волновая сфероидальная функция 26.1

$\left.\begin{matrix} S_n^{(m)} \\ \sigma_n^{(m)} \end{matrix}\right\}$ — число Стирлинга первого рода 24.1
$se_r(z, q)$ — функция Матье 20.2
sn — эллиптическая функция Якоби 16.1
$S(z)$ — интеграл Френеля 7.3
$S_1(z)$, $S_2(z)$ — интегралы Френеля 7.3
$Se_r(z, q)$ — модифицированная функция Матье 20.6
$S(x, a)$ — обобщенный интеграл Френеля 6.5.8
$\operatorname{Shi}(z)$ — интегральный гиперболический синус 5.2
$\operatorname{Si}(z)$ — интегральный синус 5.2
$S_n(x)$ — многочлен Чебышева второго рода 22.2
$\operatorname{Sih}(z)$ — интегральный гиперболический синус 5.2
$S_{mn}^{(p)}(c, \eta)$ — угловая волновая сфероидальная функция 26.1
$\operatorname{si}(z)$ — интегральный синус 5.2

$\left.\begin{matrix} \sin z \\ \cos z \\ \operatorname{tg} z \\ \operatorname{ctg} z \\ \sec z \\ \csc z \end{matrix}\right\}$ — тригонометрические функции 4.3

$\left.\begin{matrix} \operatorname{sh} z \\ \operatorname{ch} z \\ \operatorname{th} z \\ \operatorname{cth} z \\ \operatorname{sech} z \\ \operatorname{csch} z \end{matrix}\right\}$ — гиперболические функции 4.5

$T(m, n, r)$ — функция Торонто 13.6
$T_n(x)$ — многочлен Чебышева первого рода 22.2
$T_n^*(x)$ — смещенный многочлен Чебышева первого рода 22.2

$U(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера 13.1
$U_n(x)$ — многочлен Чебышева второго рода 22.2
$U_n^*(x)$ — смещенный многочлен Чебышева второго рода 22.2
$U(a, x)$ — функция параболического цилиндра Вебера 19.3

$\left.\begin{matrix} \operatorname{vers} A \\ \operatorname{versine} A \end{matrix}\right\}$ — 4.3.147
$V(a, x)$ — функция параболического цилиндра Вебера 19.3

$W(a, x)$ — функция параболического цилиндра Вебера 19.17
$W_{k,\mu}(z)$ — функция Уиттекера 13.1
$W\{f(x), g(x)\}$ $(=f(x)\,g'(x)-f'(x)\,g(x))$ — вронскиан 13.1

$[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ — разделенная разность 25.1

$y_n(z)$ — сферическая функция Бесселя второго рода 10.1
$Y_\nu(z)$ — функция Бесселя второго рода 9.1
$Y_n^m(\theta, \varphi)$ — сферическая гармоника первого рода 8.1

$Z(x)$ — плотность вероятности нормального распределения 26.2

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

α — модулярный угол 17.2

$\alpha_n(z)=\int_1^\infty t^n e^{-zt}\,dt$ — 5.1

$\beta_n(z)=\int_{-1}^{1} t^n e^{-zt}\,dt$ — 5.1

$\beta(n)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)^{-n}$ — 23.2

$B_x(a, b)$ — неполная бета-функция 6.6
$B(z, w)$ — бета-функция 6.2

γ — постоянная Эйлера 6.1
$\gamma(a, x)$ — неполная гамма-функция (нормализованная) 6.5

$\gamma_1=\frac{\mu_3}{\sigma_3}$ — коэффициент асимметрии 26.1

$\gamma_2=\frac{\mu_4}{\sigma_4}-3$ — коэффициент эксцесса 26.1

$\Gamma(z)$ — гамма-функция 6.1
$\Gamma(a, x)$ — неполная гамма-функция 6.5

δ_{ij} — дельта-функция Кронекера 24.1
$\delta_n^k(f_n)$ — центральная разность 25.1

Δ — разностный оператор 24.1
Δ — дискриминант канонической формы Вейерштрасса 18.1
Δx — абсолютная ошибка 3.5

$\zeta(x)$ — дзета-функция Римана 23.2
$\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса 18.1
$Z(u|m)$ — дзета функция Якоби 16.34

$\eta(n)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{-n}$ — 23.2
$\eta_a=\zeta(\omega_a)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса 13.2
$H(u)$, $H_1(u)$ — эта-функции Якоби 16.31

$\vartheta_n(z)$ — тэта-функция 16.27

$\left.\begin{matrix}\vartheta_c(\varepsilon\diagdown\alpha)\\ \vartheta_d(\varepsilon\diagdown\alpha)\\ \vartheta_n(\varepsilon\diagdown\alpha)\\ \vartheta_s(\varepsilon\diagdown\alpha)\end{matrix}\right\}$ — обозначения Невиля для тэта-функций 16.36

$\theta(u|m)$ — тэта-функция Якоби 16.31

$\varkappa_n$ — n-й семиинвариант 26.1

$\varkappa_{mn}^{(p)}$ — множитель связи для волновых сфероидальных функций 21.10

$\lambda(n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-n}$ — 23.2

λ_{mn} — собственное значение сфероидального волнового уравнения 21.6

$\Lambda_0(\varphi\diagdown\alpha)$ — лямбда-функция Хеймана 17.4

$\mu(f_n)$ — средние разности 25.1.3

$\mu(n)$ — функции Мёбиуса 24.3

μ_n — n-й центральный момент 26.1

μ_n' — n-й момент относительно начала 26.1

$\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x 5.1

$\pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$ — 25.1

$\Pi(\ \ \varphi\diagdown\alpha)$ — эллиптический интеграл третьего рода 17.2

$\Pi(z)$ — факториал 6.1

ρ — коэффициент корреляции 26.3

$\rho_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — обратная разность 25.1

$\rho_n(\nu, x)$ — функция Пуассона — Шарлье 13.6

σ^2 — дисперсия 26.1

$\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса 18.1

$\sigma_k(n)$ — сумма k-х степеней делителей числа n 24.3

$\tau_n(x)$ — тетрахорическая функция 26.2

$\varphi = \operatorname{am} u$ — амплитуда 16.1

$\varphi(n)$ — функция Эйлера — Тотьена 24.3

$\varphi(t) = E(e^{itX})$ — характеристическая функция X 26.1

$\Phi(a;\ b;\ z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция 13.1

$\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции 6.3

$\Psi(a;\ c;\ z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция 13.1

ω_α — период эллиптических функций Вейерштрасса 18.1

$\omega_{k,\mu}(x)$ — функция Каннингхэма 13.6

СМЕШАННЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$[\gamma_{ik}]$ — детерминант

∇^n — оператор Лапласа

Δ_n^k — односторонняя разность

$\dbinom{n}{k}$ — биномиальный коэффициент

$(m,\ n)$ — наибольший общий делитель n и m

$(n,\ k) = \dfrac{\Gamma(1/2 + n + k)}{k!\,\Gamma(1/2 + n - k)}$ — символ Ханкеля

$(n;\ n_1, n_2, \ldots, n_m)$ — мультиномиальный коэффициент

$[x]$ — наибольшее целое число $\leqslant x$

$\langle x \rangle$ — целое число, ближайшее к x

$\bar z$ — комплексно-сопряженное с $z (= x - iy)$

$|z|$ — абсолютная величина, или модуль, z

$\sum\limits_p,\ \prod\limits_p$ — сумма и произведение по всем простым числам p

$\sum\limits_{d|n},\ \prod\limits_{d|n}$ — сумма и произведение, взятые по всем положительным делителям d числа n

$\mathrm{vp}\int$ — главное значение интеграла

СПРАВОЧНИК ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ С ФОРМУЛАМИ, ГРАФИКАМИ И ТАБЛИЦАМИ

М., 1979 г., 832 стр. с илл.

Редакторы *Т. И. Кузнецова, Е. Ю. Ходан.*
Технический редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректоры *Г. В. Подвольская, Л. С. Сомова.*

ИБ № 11085

Сдано в набор 02 08.78. Подписано к печати 07.09.79. Бумага $84\times108\ ^1/_{16}$.
Литературная гарнитура. Высокая печать.
Условн. печ. л. 87,36. Уч.-изд. л. 101,44.
Тираж 50 000 экз. Заказ № 68. Цена книги 6 р. 10 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Напечатано в Румынии
Полиграфическое предприятие
«13 Дечембрие 1918»