В. Д. БОЛЬШАКОВ

ТЕОРИЯ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
геодезических вузов и факультетов

МОСКВА «НЕДРА» 1983

УДК 528.11 (075.8)

Большаков В. Д. Теория ошибок наблюдений: Учебник для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп. М., Недра, 1983. 223 с.

Изложены основы обработки результатов наблюдений, получаемых при испытаниях различных оптико-механических и оптико-электронных приборов. Второе издание (1-е изд.— 1965) отличается расширением круга вопросов собственно теории ошибок и метода наименьших квадратов — методов оценки параметров распределения ошибок наблюдений, вопросов построения доверительных интервалов, критериев обнаружения систематических ошибок и др. Вновь написана глава «Выравнивание опытных данных по методу наименьших квадратов».

Для студентов геодезических вузов и факультетов.

Табл. 41 + 6 прил., ил. 16, список лит.— 23 назв.

Рецензенты:

д-р техн. наук *М. М. Машимов* (ВИА им. Куйбышева),
д-р техн. наук *З. П. Тамутис* (Каунасский политехнический институт)

Б $\frac{1902020000-188}{043(01)-83}$ 6—83

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник является переработанным и дополненным изданием книги автора «Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей», вышедшим в 1965 г., и соответствует программам: первой части курса «Теория математической обработки геодезических измерений» для студентов геодезических вузов и факультетов, курса «Теория ошибок наблюдений» для студентов специальности «Оптическое и оптико-электронное приборостроение» Московского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии, утвержденным Учебно-методическим управлением Министерства высшего и среднего специального образования СССР в 1979 г.

Учитывая, что с наблюдениями и измерениями имеют дело представители всех точных наук, учебник может использоваться и студентами других специальностей. Различия в подходе при построении теории ошибок для приборостроителей и геодезистов и вообще для любых специалистов, на наш взгляд, не должны быть существенны, если иметь в виду как главную ее задачу изучить общий подход при математической обработке результатов наблюдений и измерений, а не вопросы точности изготовления деталей и сборки оптических и оптико-электронных измерительных приборов.

В настоящем издании добавлена глава X «Выравнивание опытных данных по методу наименьших квадратов». Значительное место в указанной главе отведено практическому применению рассмотренных способов определения параметров при математической обработке результатов измерений.

Автор благодарен коллективу кафедры геодезии и обработки измерений МИИГАиК за полезные советы и помощь при работе над рукописью настоящего учебника.

ВВЕДЕНИЕ

Разработчики и испытатели измерительных приборов и систем всегда сталкиваются с необходимостью математической обработки результатов измерений по нестандартным методикам. Хорошо известно, что оптимальная методика измерений вновь созданным прибором (системой) не может появиться до прибора, она рождается в процессе поэтапных, а на завершающем этапе — довольно сложных комплексных испытаний. Результатом же измерений всегда является число или совокупность чисел, количественно характеризующих ту или иную физическую величину, для определения которой предназначен испытуемый прибор. Сами величины, которые необходимо измерить, тоже зачастую бывают нестандартными. В принципе нельзя намного упрощать подход к организации измерений и в тех случаях, когда они производятся уже существующими приборами и по стандартным методикам, так как непрерывно меняющиеся условия измерений почти всегда создают при этом нестандартные ситуации. Что же касается значения измерений в науке, технике и производстве, то оно общеизвестно. И тем не менее здесь уместно привести слова президента Академии наук СССР академика А. П. Александрова, как нельзя лучше характеризующие важность проблемы измерений и математической обработки их результатов: «В современной науке всякого рода новые направления чаще всего возникают в связи с организацией измерений нового типа: либо с более высокой чувствительностью, либо при одновременном наблюдении разных событий, совпадающих или смешанных по времени, либо при наблюдении одного и того же события из разных точек пространства . . .

Большинство новых открытий связано именно с тем, что по-новому были поставлены методики наблюдений, по-новому были организованы сами измерительные системы, обработка результатов наблюдений . . .» (А. П. Александров «Инструментальный цех науки». Газета «Комсомольская правда» № 146 (16553) от 23 июня 1979 г.). Когда речь идет о значении измерений в науке, технике и производстве, всегда подразумевается их высокое качество, а качество измерений, как нетрудно понять, зависит от совокупных ошибок измерений, ограничивающих точность получаемых результатов измерений. Именно достигнутая точность результатов измерений, характеризуемая тем или иным критерием, в конечном счете является количественной мерой качества измерительного процесса. Чего было бы проще поставить условие «безошибочности» измерений с тем, чтобы точностной фактор измерений совсем не влиял на анализ изучаемых явлений. Однако ясно, что это — невозможная задача.

При любой точности измерений ошибки измерений (т. е. отклонение результатов измерений от истинного — безошибочного значения величины) неизбежны; они вызываются непрестанно изменяющимися условиями измерений, что учитывается с определенной долей приближения, точностью измерительного прибора и методики и др. «Поэтому их (т. е. неизбежные ошибки.— Прим. авт.) приходится терпеть в наблюдениях, но следует, по возможности, ослабить их влияние на полученные результаты» . . .*.

При организации измерений для решения задачи определения критериев их точности можно рекомендовать два подхода:

а) когда исследуется новое явление, измеряемые величины следует получать с максимально высокой точностью, достижимой с помощью данного прибора и метода;

б) когда необходимая точность окончательного результата задана (выбрана) и когда возможно хотя бы приблизительно распределить заранее ожидаемую суммарную ошибку между различными параметрами (например, при прокладке полигонометрического хода ожидаемую невязку можно распределить на две части: из-за ошибок линейных и угловых измерений), измерения следует выполнять с необходимой и достаточной (но не излишней!) точностью. Излишняя точность во втором случае приведет к ненужным затратам сил и средств на измерения, что нецелесообразно.

Из изложенного выше очевидно, что в любом случае необходимую точность результатов измерений можно обеспечить (при наличии соответствующих измерительных средств) методикой измерений с учетом комплекса всех условий. Однако этим задача не исчерпывается. Не меньшее внимание, чем самому процессу измерений, следует уделять и математической обработке результатов измерений. Без каких-либо пояснений представляется ясным, что из недоброкачественных измерений в целом никакими ухищрениями вычислительного искусства нельзя получить доброкачественных результатов. Однако и неумело поставленной математической обработкой результатов измерений можно «смазать» все то, в смысле точности, что добыто большим трудом при измерениях.

Таким образом, возникают задачи получения из измерений наиболее надежных значений окончательных результатов, сопровождаемых количественными характеристиками точности этих результатов с определенной степенью уверенности, выраженной в числовой мере.

Для решения поставленных выше и некоторых других с ними связанных вопросов и предназначен курс «Теория ошибок наблюдений».

В общем виде решаемые в теории ошибок задачи можно сформулировать следующим образом:

1) изучение законов распределения ошибок наблюдений и определение критериев оценки точности полученных результатов;

---

* *Гаусс К. Ф.* Избранные сочинения. Т. 1. М., Геодезиздат, 1957, с. 18.

2) установление допусков, ограничивающих использование результатов наблюдений в заданных пределах точности;

3) отыскание наиболее надежного значения определяемой величины по результатам ее многократных наблюдений;

4) оценка и предвычисление точности как отдельных наблюдений, так и окончательного их результата.

Перед теорией ошибок стоит также целый ряд других (общих и частных) задач, выходящих за рамки перечисленных выше вопросов.

В задачу общей теории ошибок не входит изучение ошибок по источникам их возникновения (приборные, от внешних условий, личные), так как надлежащим образом такое изучение можно выполнить только в тех дисциплинах, в которых рассматриваются сами приборы и методы измерений, например в курсах: «Оптические измерения», «Геодезия», «Фотограмметрия» и т. д.

Настоящий учебник в смысле расположения материала и логических связей между отдельными главами книги построен по принципу «от общего к частному» в отличие от капитальных трудов А. С. Чеботарева [22], Г. А. Бурмистрова [3] и др., которые до 1965 г. являлись основными учебниками в геодезических вузах по теории ошибок и методу наименьших квадратов. Упомянутые выше учебники строились на основе опытных данных, а теоретическое (вероятностное) обоснование приводилось в конце курса, хотя признавалось, что «с научной точки зрения следовало бы начать изложение . . . с основ теории вероятностей» [22, стр. 3].

Конечно, трудности, вытекающие из того, что преподавание «Теории ошибок» начинается на II курсе, т. е. тогда, когда еще изучение высшей математики не закончено, остаются, и это наложило свой отпечаток на содержание данной книги и на уровень математического аппарата, использованного в ней. Так, например, из теории вероятностей использованы элементарные сведения, но в применении к задачам теории ошибок они вполне достаточны, так как позволяют довольно строго рассмотреть проблему установления допусков при измерениях. Аналогичное положение и с другими вопросами теории ошибок.

Наряду с теорией тех или иных положений, рассматриваемых в книге, автор большое значение придает иллюстрациям теории примерами, так как конечной целью дисциплины является именно умение применять ее в практической деятельности.

Насколько удалось выполнить поставленные автором при написании книги задачи — решать читателю.

Все замечания и пожелания по содержанию книги будут восприняты автором как помощь в направлении ее улучшения в будущем.

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЙ

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. СОБЫТИЕ

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая количественные закономерности случайных явлений. Она базируется на ряде основных понятий и определений. В данной главе приведены те из них, без которых нельзя обойтись при последующем изложении вопросов, связанных с математической обработкой результатов наблюдений.

Для изучения разнообразных явлений реального мира в процессе научных исследований производятся многочисленные наблюдения, опыты и измерения.

Наблюдение является основой всех научных исследований; признаки наблюдаемого объекта, выявляемые при наблюдении, могут быть как качественными, так и количественными. Количественные признаки выявляются, как правило, путем измерения.

Измерение в простейшем истолковании есть процесс сравнения определяемой физической величины с другой однородной ей величиной, значение которой известно. В результате измерения получают число, показывающее, во сколько раз определяемая физическая величина больше или меньше величины, с которой ее сравнивали, и в конечном итоге больше или меньше величины, принятой за меру измерения.

Совокупность условий, при которых производятся опыт, наблюдение, измерение, называют **комплексом условий**. Возникает необходимость пояснить единство и различие терминов: **наблюдение** и **измерение**. В книге [17, стр. 4] по этому поводу говорится: «**Наблюдением** называется регистрация различных фактов искусственного или естественного происхождения. Наблюдения подразделяются на качественные и количественные. Последние разделяются еще на два вида: измерение и подсчет». И окончательно (там же), наблюдение определяется как «совокупность измерений, произведенных над наблюдаемым объектом в один момент времени». Таким образом, если подсчету как виду наблюдения не придавать самостоятельной роли, то разделять понятия «наблюдения» и «измерения» не имеет смысла; напротив, следует под наблюдением понимать сложный вид измерений. В последующем мы не будем проводить резкой границы между двумя рассмотренными понятиями, а будем руководствоваться их общими признаками.

Пример. При измерении углов теодолитом к комплексу условий могут быть отнесены: увеличение зрительной трубы прибора, точность отсчетного приспособления, точность центрировочного устройства, качество изображения визирных целей, внешние условия, опытность наблюдателя и т. д.

Осуществление каждого отдельного такого наблюдения, опыта или измерения при воспроизведении комплекса условий будем называть испытанием. Результат испытания называют событием (иногда исходом). Понятие события является одним из основных понятий теории вероятностей.

Примеры. а) При подбрасывании монеты могут происходить события: «появление герба», «появление цифры».

б) При измерениях трех углов в плоском треугольнике сумма измеренных углов вследствие несовершенства органов чувств наблюдателя, наличия приборных ошибок, влияния внешних условий и других причин будет отличаться от 180° в сторону увеличения либо уменьшения, либо будет случайно совпадать с теоретической суммой. Это соответствует следующим событиям: «появление положительной ошибки (невязки) в сумме измеренных углов», «появление отрицательной ошибки в сумме измеренных углов», «появление в сумме измеренных углов ошибки, равной нулю».

Элементарным (простым) событием назовем такой результат испытания, который полностью описывается одним (и только одним) событием. Элементарное событие не может быть разделено на составляющие события.

Сложным событием назовем событие, которое составляется из двух или нескольких элементарных событий.

Обозначим через A, B, C, D, . . . , W различные события; в последующем будем писать: «событие A», «событие B» и т. д.

§ 2. ВИДЫ СОБЫТИЙ

При рассмотрении событий как элементарных, так и сложных различают события: достоверные, невозможные, случайные.

Событие, которое при выполнении определенного комплекса условий непременно произойдет, называют достоверным.

Пример. В урне имеются только белые шары. Событие A — появление белого шара при взятии одного шара — событие достоверное. Достоверное событие принято обозначать буквой U. Следовательно, $A = U$.

Событие, которое при выполнении определенного комплекса условий не может произойти, называют невозможным.

Пример. В предыдущем случае невозможным будет событие B — появление черного шара (комплекс условий определяется наличием в урне только белых шаров). Невозможное событие принято обозначать буквой V. Следовательно, $B = V$.

Событие, которое при воспроизведении одного и того же опыта (при осуществлении данного комплекса условий) может наступить, а может и не наступить, называют случайным событием.

Соответственно этому явление, которое при многократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному в зависимости от некоторой изменчивости условий, в которых производится опыт, называют случайным явлением.

Пример. Результатами стрельбы из орудия при одной и той же установке являются случайные события: «попадание в цель», «недолет», «перелет», «отклонение влево», «отклонение вправо» и т. д. Эти результаты обусловлены тем, что, хотя стрельба производится и при одной установке орудия, неучтенные факторы (отклонение массы снаряда и заряда от стандарта, точность наведения, точность введения поправок и т. д.) оказывают свое влияние и опыт протекает каждый раз несколько по-иному.

Как показывает практика, при большом числе испытаний, производимых в одинаковых условиях*, обнаруживаются вполне устойчивые закономерности, что является основополагающим при применении методов теории вероятностей и математической статистики к обработке массовых наблюдений.

В свою очередь случайные события подразделяют на совместные, несовместные, единственно возможные, равновозможные.

Несколько событий называются совместными, если при выполнении комплекса условий при испытании они могут наступить одновременно. Если A, B, C, . . . , W — совместные события и известно, что они наверняка произойдут, то пишут $A\ B\ C\ .\ .\ .\ W = U$.

События несовместны, если при одном испытании они не могут произойти одновременно.

Примеры. в) В урне имеются белые и черные шары. При одном испытании (взятии) событие A — появление белого шара — и событие B — появление черного шара — несовместные события.

б) Производится один выстрел из орудия. События: «разрыв снаряда» и «неразрыв снаряда» — несовместные события.

Единственно возможными называются события, если в результате испытания появление одного и только одного из них является достоверным событием. Эти события попарно несовместны.

События равновозможны, если ни одно из них не является объективно возможным больше, чем любое другое, например выпадение герба или цифры при бросании монеты.

§ 3. ПОЛНАЯ ГРУППА СОБЫТИЙ

События образуют полную группу событий, если при опыте одно из них обязательно должно совершиться.

* Под одинаковыми условиями здесь и далее будем понимать условия, которые характеризуются примерно равными показателями основных действующих факторов (температуры, давления, влажности, силы и направления ветра и т. д.).

Пример. При подбрасывании монеты единственно возможными являются события «появление цифры» и «появление герба»; никакие другие события не могут произойти.

Два несовместных события, составляющих полную группу событий, называются противоположными.

В предыдущем примере события: «появление цифры» и «появление герба» — события противоположные.

Событие, противоположное событию A, обозначается той же буквой A, но с чертой наверху, т. е. $\bar{A}$ — событие, противоположное событию A (иногда говорят $\bar{A}$ = «не A»).

Примеры. а) A — выпадение герба при бросании монеты; $\bar{A}$ — выпадение цифры при бросании монеты;

б) B — попадание при выстреле; $\bar{B}$ — промах при выстреле;

в) C — все попадания при N выстрелах; $\bar{C}$ — хотя бы один промах при N выстрелах;

г) совершение некоторого события и его несовершение. (Этот пример имеет особое значение, так как к нему можно свести рассмотрение любого случайного события.)

Таким образом, при одном испытании

$$A\bar{A} = V$$

$$(\text{или } A, \text{ или } \bar{A}) = A + \bar{A} = U.$$

§ 4. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА И ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЙ

Относительной частотой (частостью) некоторого события называется отношение числа появлений этого события к числу всех произведенных испытаний при выполнении определенного комплекса условий.

Пусть Q — относительная частота, M — число появлений события, N — число всех произведенных испытаний. В соответствии с определением относительной частоты

$$Q = \frac{M}{N}. \tag{1}$$

Пример. Произведено 30 измерений одной и той же величины, при этом число отрицательных ошибок оказалось равным 12. Следовательно, $M = 12$, $N = 30$, относительная частота появления отрицательной ошибки $Q = 0{,}40$.

На основании определения относительной частоты легко установить, что она не может быть отрицательной и что ее значение заключено между нулем и единицей, т. е.

$$0 \leqslant Q \leqslant 1 \quad (\text{так как } 0 \leqslant M \leqslant N). \tag{2}$$

Выше (в § 1) было отмечено, что при большом числе испытаний, производимых в одинаковых условиях, обнаруживаются вполне устойчивые закономерности. Самым ярким проявлением подобных закономерностей является свойство устойчивости относительной частоты случайных событий, т. е. уменьшение разброса значений

частоты, получаемых в разных сериях испытаний, при увеличении числа испытаний в каждой серии. Поэтому, выполнив достаточно большую серию испытаний, можно с высокой точностью предсказать результат других таких же серий испытаний.

Так, английский ученый К. Пирсон, определяя относительную частоту появления герба при подбрасывании монеты 12 000 и 24 000 раз, получил значения этой частоты соответственно 0,5016 и 0,5005. Нетрудно для данного опыта установить, пользуясь обычными представлениями, что относительные частоты появления герба или цифры должны быть близки одна к другой, а их «точное» значение, около которого колеблются опытные данные, равно 0,5.

Итак, при большом числе испытаний N относительная частота Q обнаруживает устойчивость, которая характеризует объективную связь между комплексом условий, в которых производится опыт, и событием. Так как при увеличении числа испытаний N в сериях колебания относительной частоты Q уменьшаются, то есть основания предполагать, что существует некоторое постоянное определенное значение относительной частоты, от которого она отклоняется в ту и другую сторону. Этой постоянной величиной является количественная мера степени объективной возможности появления события при одном опыте, называемая вероятностью события.

Обозначим через $p(A)$ вероятность события A. В дальнейшем для упрощения будем обозначать вероятность просто буквой p.

В теории вероятностей часто рассматривают несовместные, равновозможные события, образующие полную группу. Такие события называют случаями (или шансами). Тогда, как принято говорить, опыт «сводится к схеме случаев» и вероятность может быть вычислена непосредственно как *отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу всех возможных случаев* (классическое определение вероятности), по формуле

$$p = \frac{m}{n}, \quad m \leqslant n, \tag{3}$$

где m — число случаев, благоприятствующих некоторому событию; n — число всех возможных случаев; p — вероятность события.

Случай называется благоприятствующим некоторому событию, если появление этого случая влечет за собой появление данного события.

Примеры. а) В урне находится 50 белых и 46 черных шаров. Определить вероятность появления двух белых шаров при одновременной выборке шаров из ящика.

Решение. Подсчитаем число всех возможных случаев n и число случаев m, благоприятствующих появлению двух белых шаров:

$$n = C_{96}^2 = \frac{96!}{2!\,(96-2)!},$$

$$m = C_{50}^2 = \frac{50!}{2!\,(50-2)!};$$

следовательно,

$$p = \frac{m}{n} = \frac{C_{50}^2}{C_{96}^2} = \frac{\dfrac{50!}{2!\,48!}}{\dfrac{96!}{2!\,94!}}.$$

Пользуясь основным свойством факториала $n! = n\,(n-1)!$, произведем соответствующие сокращения и получим

$$p = \frac{49 \cdot 50}{95 \cdot 96},$$

окончательно $p \approx 0{,}27$.

б) Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные грани.

Решение. Всего кубиков $n = 1000$. Куб имеет 12 ребер, на каждом из которых по 8 кубиков с двумя окрашенными гранями, следовательно,

$$m = 12 \cdot 8 = 96; \quad p = 0{,}096.$$

Отмеченное выше свойство относительной частоты — устойчивость — явилось предметом исследования многих ученых. Первым выразил эту закономерность в виде теоремы Яков Бернулли (1654—1705). Он установил, что при числе испытаний неограниченно большом с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, относительная частота события сколь угодно мало отличается от его вероятности в отдельном опыте. (Вероятность p в отдельном опыте постоянна). Это положение — простейшая формулировка закона больших чисел. Математически теорема Бернулли в принятых обозначениях может быть выражена формулой

$$\underset{N \to \infty}{p}\left\{\left|\frac{M}{N} - p\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \delta, \tag{4}$$

где ε и δ — сколь угодно малые положительные числа.

Формула (4) лежит в основе эмпирического определения вероятности в тех случаях, когда нет возможности применить формулу (3). В этих случаях вероятность принимают приближенно равной относительной частоте, полученной из достаточно большого числа испытаний. Вероятность, полученную таким путем, называют статистической. Заметим, кстати, что на практике это бывает как правило.

Из формулы (3) следует, что чем ближе вероятность к единице, тем чаще происходит событие, и чем ближе вероятность к нулю, тем событие происходит реже.

Если вероятность события сколь угодно близка к единице, его называют практически достоверным, если близка к нулю — практически невозможным. Степень приближения p к 1 или 0 оценивается, исходя из практических соображений. Иными словами, нельзя заранее указать абсолютную величину вероятности, при которой можно было бы событие считать или практически достоверным, или практически невозможным, весь вопрос состоит в том, о каком конкретном событии идет речь.

Пример. Если при стрельбе из артиллерийских орудий из 1000 снарядов 999 разорвутся при падении и один снаряд не разорвется, вероятность события «неразрыв снаряда», равную 0,001, можно уверенно считать величиной пренебрегаемо малой, а указанное событие — практически невозможным. Но если 0,001 есть вероятность события «нераскрытие парашюта после прыжка», то вряд ли мы так же легко отнесем это событие к практически невозможным.

Из изложенного следует, что для каждого испытания, исходя из практических соображений, необходимо установить как бы допустимую величину отклонения вероятности от единицы или нуля для того, чтобы можно было считать событие практически достоверным или, наоборот, практически невозможным.

Рассмотрим следствия, которые вытекают из определения вероятности.

1. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$p(V) = 0,$$

где V — невозможное событие.

Если в формуле (3) $m = 0$, то $p = 0$.

2. Вероятность достоверного события равна единице, т. е.

$$p(U) = 1,$$

где U — достоверное событие.

Если в формуле (3) $m = n \neq 0$, то $p = 1$.

3. Вероятность любого события, так же как и его относительная частота, всегда рациональная правильная дробь, т. е.

$$0 \leqslant p \leqslant 1,$$

так как число благоприятствующих случаев m в этом случае отвечает условию

$$0 \leqslant m \leqslant n.$$

4. Вероятность случайного события, как следует из теоремы Бернулли, всегда отвечает условию

$$0 < p < 1.$$

5. Сумма вероятностей событий полной группы равна единице, поскольку одно из событий полной группы обязательно должно совершиться при испытании.

6. Сумма вероятностей противоположных событий всегда равна единице, т. е.

$$p(\bar{A}) + p(A) = 1. \tag{5}$$

Это следует из того, что противоположные события составляют полную группу. Кроме того, если

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

то

$$p(\bar{A}) = \frac{n-m}{n}.$$

Складывая $p(A)$ и $p(\bar{A})$, получаем единицу. Здесь и далее будем обозначать:

$p(A) = p$ — вероятность появления события;

$p(\bar{A}) = q$ — вероятность непоявления события.

С учетом принятых обозначений выражение (5) перепишем в виде

$$q + p = 1. \tag{6}$$

§ 5. СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

С у м м о й нескольких несовместных событий называется сложное событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пусть даны несовместные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если событие B — сложное событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих несовместных событий, то

$$B = (\text{или } A_1, \text{ или } A_2, \ldots, \text{ или } A_n). \tag{7}$$

Более удобной записью выражения (7) могут служить

$$B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n; \tag{8}$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} A_i. \tag{9}$$

Т е о р е м а с л о ж е н и я в е р о я т н о с т е й. *Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*, т. е.

$$p(B) = p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n) \tag{10}$$

или

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i). \tag{11}$$

Докажем данную теорему, используя принцип перехода от частного к общему.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в ящике находятся a — белых, b — желтых, c — оранжевых, d — черных и e — коричневых шаров одинакового размера и массы. Определить вероятность того, что шар, извлеченный наудачу при одном взятии, будет иметь светлый тон (т. е. будет белого, желтого или оранжевого цвета).

Обозначим:

B — событие, состоящее в появлении шара светлого тона;
A_1 — » » » » » белого цвета;
A_2 — » » » » » желтого »
A_3 — » » » » » оранжевого »
A_4 — » » » » » черного »
A_5 — » » » » » коричневого »

По условию задачи можем записать

$$B = A_1 + A_2 + A_3. \tag{12}$$

Но в то же время, используя формулу (3) для непосредственного подсчета вероятностей, получим

$$p(B) = \frac{m}{n} = \frac{a+b+c}{a+b+c+d+e}. \tag{13}$$

Обозначив $a + b + c + d + e$ через n, выражение (13) перепишем так

$$p(B) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}. \tag{14}$$

В выражении (14), по определению вероятности,

$$\frac{a}{n} = p(A_1); \quad \frac{b}{n} = p(A_2); \quad \frac{c}{n} = p(A_3). \tag{15}$$

С учетом (15) выражение (14) примет вид

$$p(B) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3), \tag{16}$$

что и требовалось доказать.

Распространяя полученный частный вывод (16) на общий случай (8), можем считать формулу (11) доказанной.

П р и м е р. В лотерее 1000 билетов, из них падает выигрышей: на один билет — 500 руб; на 10 билетов — по 100 руб; на 50 билетов — по 20 руб; на 100 билетов — по 5 руб. Остальные билеты — невыигрышные.

Найти при наличии одного билета вероятность: 1) выигрыша не менее 20 руб и 2) выигрыша любой суммы.

Решение. Обозначим события: B_1 — выигрыш не менее 20 руб; B_2 — выигрыш какой-либо суммы при наличии одного билета; A_1 — выигрыш 20 руб; A_2 — выигрыш 100 руб; A_3 — выигрыш 500 руб; A_4 — выигрыш 5 руб.

Согласно условию

$$B_1 = A_1 + A_2 + A_3$$

и

$$p(B_1) = p(A_1 + A_2 + A_3).$$

По теореме сложения вероятностей имеем

$$p(B_1) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3).$$

Но

$$p(A_1) = \frac{50}{1000} = 0,050; \quad p(A_2) = \frac{10}{1000} = 0,010;$$

$$p(A_3) = \frac{1}{1000} = 0,001.$$

Следовательно, получим

$$p(B_1) = 0{,}050 + 0{,}010 + 0{,}001 = 0{,}061.$$

Вероятность выиграть какую-либо сумму, имея один билет, равна $p(B_2) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + p(A_4)$; так как $p(A_4) = \frac{100}{1\,000} = 0{,}100$, то $p(B_2) = 0{,}161$.

§ 6. НЕЗАВИСИМЫЕ И ЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Выводы, основанные на положениях теории вероятностей и касающиеся сложных событий, будут существенно различными в зависимости от характера связи между элементарными событиями. Поэтому представляется целесообразным дать определения независимых и зависимых событий и понятие об условной вероятности.

Два события называются *независимыми*, если вероятность появления любого из них не зависит от того, появилось или не появилось другое событие.

Несколько событий называются *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы.

Несколько событий называются *независимыми в совокупности*, если каждое из них и любое сложное событие (составленное из всех остальных или части их) — события независимые.

Независимость в совокупности и попарная независимость — не одно и то же.

Примеры. а) Отсчеты по шкале прибора при одной установке разными наблюдателями.

б) Результаты измерения одной и той же величины в разное время.

в) Результаты стрельбы по одной мишени разными стрелками.

Два или несколько событий называются *зависимыми*, если вероятность появления хотя бы одного из них зависит от того, появляются другие события или не появляются.

Пример. Если поражение цели достигается двумя попаданиями, то поражение цели при втором выстреле есть событие зависимое, так как оно может совершаться лишь при условии первого попадания в цель.

В связи с тем, что наряду с независимыми событиями при испытаниях приходится иметь дело и с зависимыми событиями, возникает вопрос о так называемой условной вероятности.

Вероятность, вычисленная в предположении, что одно или несколько событий уже произошло, называется *условной вероятностью*.

Примем обозначения:

$p(A/B)$ — условная вероятность события A, вычисленная в предположении, что произошло событие B;

$p(A/B_1, B_2, B_3, \ldots)$ — условная вероятность события A, вычисленная в предположении, что произошли события $B_1, B_2, B_3, \ldots$

События A и B зависимы, если выполняются неравенства

$$p(A/B) \neq p(A); \quad p(B/A) \neq p(B). \tag{17}$$

В отличие от условной вероятности вероятность независимого события называют иногда *безусловной вероятностью* (когда эти понятия используются вместе). События A и B независимы, если выполняются условия:

$$p(A/B) = p(A); \quad p(B/A) = p(B). \tag{18}$$

В приведенном выше примере условная вероятность поражения цели при втором выстреле равна вероятности попадания в случае, если первый выстрел сопровождался попаданием в цель, и равна нулю в случае промаха при первом выстреле.

§ 7. УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Одним из примеров сложного события является произведение событий.

Произведением двух или нескольких событий называется сложное событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Пример. Произведено три выстрела по цели. Пусть событие B — попадание при первом выстреле, событие C — попадание при втором выстреле, событие D — попадание при третьем выстреле. Тогда сложное событие — попадание всеми тремя выстрелами —

$$A = B \cdot C \cdot D.$$

Таким образом, если A — сложное событие, состоящее в совместном появлении событий $B, C, D, \ldots, W$, то произведение событий будет выражено

$$A = B \cdot C \cdot D \cdot \ldots \cdot W. \tag{19}$$

Иногда пишут

$$A = (\text{и } B, \text{ и } C, \text{ и } D, \text{ и} \ldots \text{ и } W). \tag{20}$$

В последующем изложении для обозначения произведения событий принята запись (19) как более простая.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух или нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других, т. е.

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \times \\ \times p(A_3/A_1A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n/A_1A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}). \tag{21}$$

В сокращенном виде формулу (21) можно представить так

$$p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \cdot p(A_3/A_1A_2) \cdot \ldots \\ \times \ldots p\left(A_n / \prod_{i=1}^{n-1} A_i\right)^{*}. \tag{22}$$

---

* Здесь и далее знак П означает произведение.

Для вероятности произведения двух зависимых событий A и B формула (22) принимает вид

$$p(AB) = p(A)\cdot p(B/A) = p(B)\cdot p(A/B). \quad (23)$$

Если события, составляющие произведение, независимы, то теорема умножения вероятностей упрощается, принимая следующую формулировку:

Вероятность произведения двух или нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Таким образом, если в формуле (22)

$$p(A_2/A_1) = p(A_2); \quad p(A_3/A_1A_2) = p(A_3); \ldots$$

$$\ldots p\left(A_n/\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) = p(A_n),$$

$$p(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(A_3)\cdot \ldots \cdot p(A_n). \quad (24)$$

Докажем теорему умножения вероятностей для независимых событий, имея при этом в виду, что этот случай для теории ошибок наблюдений является преимущественным, так как в большинстве испытаний удается обеспечить независимость измерений. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы сложения вероятностей проведем по принципу перехода от частного к общему.

Доказательство. Пусть в двух ящиках имеется: в первом — a_1 белых и b_1 — черных шаров, во втором — a_2 белых и b_2 черных шаров. Определить вероятность того, что будут вынуты два белых шара из двух ящиков, если из каждого ящика возьмут по одному шару.

Обозначим: событие A_1 — появление белого шара из первого ящика;

событие A_2 — появление белого шара из второго ящика;

событие $A = A_1\cdot A_2$ — совместное появление двух белых шаров при взятии по одному из каждого ящика.

Следовательно,

$$p(A) = p(A_1\cdot A_2). \quad (25)$$

Вероятность определим непосредственным подсчетом по формуле (3).

С этой целью сначала определим число благоприятствующих случаев m и число всех возможных случаев n, причем числом случаев при определении m и n будет число пар соответствующих шаров (белых или белых и черных вместе).

Каждый белый шар из первого ящика может выпасть в паре с одним из белых шаров из второго ящика a_2 раз. Следовательно, всего независимых пар белых шаров может быть

$$m = a_1a_2. \quad (26)$$

Число всех возможных пар, которые можно составить при опыте, равно

$$n = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2). \quad (27)$$

Вероятность появления двух белых шаров по одному из каждого ящика будет равна

$$p(A) = \frac{a_1a_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}. \quad (28)$$

Но в выражении (28)

$$\frac{a_1}{a_1 + b_1} = p(A_1)$$

— вероятность появления белого шара из первого ящика,

$$\frac{a_2}{a_2 + b_2} = p(A_2)$$

— вероятность появления белого шара из второго ящика.

С учетом этого формула (28) примет вид

$$p(A) = p(A_1)\cdot p(A_2), \quad (29)$$

что и требовалось доказать.

Распространяя полученный результат (29) на случай, когда сложное событие (произведение) составлено из n независимых событий, можно считать доказанным, что

$$p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i). \quad (30)$$

В частном случае, который, кстати сказать, при рассмотрении вопросов в теории ошибок встречается довольно часто, а именно, когда

$$p(A_1) = p(A_2) = \ldots = p(A_n) = p,$$

обозначив $p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$ через P, можно записать

$$P = p^n. \quad (31)$$

Примеры. а) Игральную кость подбрасывают пять раз. Определить вероятность того, что грань с 5-ю очками выпадет при этом пять раз.

Решение. Вероятность выпадения 5-ти очков

$$p = \frac{1}{6}; \quad P = \left(\frac{1}{6}\right)^5; \quad P = \frac{1}{7776} \approx 0{,}000129.$$

б) (На условную вероятность). Пусть в ящике имеется 25 белых и 36 черных шаров. Определить вероятность последовательного появления двух белых шаров при условии, что при взятии первого шара из ящика шар обратно не возвращается.

Решение. Обозначим: событие A_1 — появление первого белого шара, событие A_2 — появление второго белого шара. Можно записать

$$p(A_1A_2) = p(A_1)\,p(A_2/A_1),$$

$$p(A_1) = \frac{25}{61}; \qquad p(A_2/A_1) = \frac{25-1}{61-1} = \frac{24}{60};$$

$$p(A_1A_2) = \frac{25\cdot 24}{61\cdot 60} \approx 0{,}164.$$

в) Определить вероятность того, что выбранная наудачу деталь при сборке является первосортной, если известно, что в партии 2 % деталей — брак, а 80 % всех остальных деталей — первосортные.

Решение. Обозначим через событие A выбранное первосортное изделие. Тогда $p(A) = (1-0{,}02)\cdot 0{,}80 = 0{,}78$.

г) Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна $p(A_1) = 0{,}20$.

Какова вероятность поразить цель при одном выстреле, если 2 % взрывателей дают отказы?

Решение. Считая событием A_1 попадание в цель, а событием A_2 действие взрывателя, причем оба события — независимыми, по теореме умножения вероятностей имеем

$$p(A_1A_2) = (1-0{,}02)\cdot 0{,}20; \qquad p(A_1A_2) = 0{,}98\cdot 0{,}20 = 0{,}196.$$

Глава II
МНОГОКРАТНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

§ 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРИ МНОГОКРАТНЫХ ИСПЫТАНИЯХ. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

При исследовании новых приборов или при проверке новых методов работ независимые испытания производятся многократно, т. е. при сохранении определенного комплекса условий повторяются большое число раз. Испытателя в этом случае интересует конечный результат опыта, например сколько раз при n испытаниях появится ожидаемое событие.

Пусть A — некоторое событие, на появление (или непоявление) которого производятся многократные испытания. Вероятность этого события известна и постоянна. Результатом каждого отдельного опыта может быть появление или непоявление события A, т. е. совершение или A, или $\bar{A}$. Требуется определить вероятность того, что при n испытаниях событие появится k раз, т. е. необходимо найти $P_n(k)$. Проанализируем результаты n испытаний в «схеме случаев», т. е. последовательно: после первого испытания, после двух испытаний и т. д. и, наконец, после n испытаний.

Когда произведено одно испытание, получим или $\bar{A}$, или A, но p (или $\bar{A}$, или A) $= p(\bar{A}+A) = p(\bar{A}) + p(A) = q + p$. В то же время известно, что

$$q + p = 1. \qquad (32)$$

После двух испытаний возможны следующие комбинации сложных событий:

$$\text{или } \bar{A}\bar{A}, \text{ или } AA, \text{ или } \bar{A}A, \text{ или } A\bar{A},$$

т. е.

$$p(\bar{A}\bar{A} + AA + \bar{A}A + A\bar{A}) = p(\bar{A}\bar{A}) + p(AA) + p(\bar{A}A) + p(A\bar{A}). \qquad (33)$$

Из теоремы умножения вероятностей следует

$$p(\bar{A}\bar{A}) + p(AA) + p(\bar{A}A) + p(A\bar{A}) = q\cdot q + p\cdot p + q\times p + p\cdot q = (q+p)^2 = 1. \qquad (34)$$

После трех испытаний возможны комбинации сложных событий: или $\bar{A}\bar{A}\bar{A}$, или AAA, или $\bar{A}\bar{A}A$, или $\bar{A}A\bar{A}$, или $A\bar{A}\bar{A}$, или $\bar{A}AA$, или $A\bar{A}A$, или $AA\bar{A}$;
из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$p(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) + p(AAA) + p(\bar{A}\bar{A}A) + p(\bar{A}A\bar{A}) + p(A\bar{A}\bar{A}) + p(\bar{A}AA) + p(A\bar{A}A) + p(AA\bar{A}) = q^3 + p^3 + q^2p + q^2p + q^2p + qp^2 + p^2q + p^2q = q^3 + 3q^2p + 3p^2q + p^3 = 1. \qquad (35)$$

Окончательно

$$(q+p)^3 = 1. \qquad (35')$$

Рассуждая аналогично, для n испытаний получим

$$(q+p)^n = 1. \qquad (36)$$

Выражение (36) после разложения его в ряд по формуле бинома Ньютона даст вероятность для $(n+1)$ произведений сложных событий при многократных испытаниях без учета последовательности их появления.

Разлагая бином (36), с учетом того, что n целое и положительное число, получим

$$(q+p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \ldots + C_n^k q^{n-k} p^k + \ldots + C_n^n q^0 p^n = 1. \qquad (37)$$

В выражении (37) C_n^k — биномиальные коэффициенты ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$); при этом очевидно, что

$$C_n^1 = n, \quad C_n^n = C_n^0 = 1 \quad (0! = 1 \text{ по определению}).$$

Основное свойство сочетаний

$$C_n^k = C^{n-k}. \qquad (38)$$

Контролем вычислений вероятностей по формуле (37) является равенство суммы всех членов разложения единице.

Окончательно имеем

$$P_n(k) = C_n^k q^{n-k} p^k, \tag{39}$$

где $P_n(k)$ — вероятность появления события k раз при n испытаниях; $C_n^k = \frac{k!}{k!\,(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k; p—вероятность события; q — вероятность противоположного события.

Совокупность вероятностей $P_n(k)$ носит название **б и н о м и а л ь н о г о р а с п р е д е л е н и я в е р о я т н о с т е й**.

При больших значениях n и k (больше 10) для упрощения вычисления факториалов в формуле (39) применяют приближенную формулу Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \ldots\right). \tag{40}$$

Если отбросить множитель в скобках справа в формуле (40), что при больших значениях n несущественно, то формула Стирлинга примет вид

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{41}$$

Абсолютная ошибка вычислений факториалов по формуле (41) увеличивается с увеличением n. Относительная же точность (характеризуемая отношением абсолютной ошибки к значению факториала и выражаемая обычно в %) повышается с увеличением n. По этой причине формула Стирлинга принадлежит к числу асимптотических формул. Сравнивая формулы (40) и (41), легко подсчитать, что при $n = 10$ относительная ошибка вычислений составит 0,8 %, при $n = 20$ она будет равна 0,4 %.

Для определения биномиальных коэффициентов при вычислениях по формуле (39) целесообразно воспользоваться вычисленными значениями биномиальных коэффициентов, имеющимися в школьных справочных таблицах (например, Брадиса) или составить треугольник Паскаля, состоящий из совокупности биномиальных коэффициентов для заданного (выбранного) числа n.

n	Коэффициенты
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

Каждый биномиальный коэффициент в треугольнике Паскаля образуется сложением двух стоящих над ним коэффициентов слева и справа.

Заметим в заключение, что дополнительный контроль вычислений по формуле (37) может быть получен, исходя из свойств биномиальных коэффициентов, а именно: коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца, равны, а сумма всех коэффициентов в биноме n-й степени равна 2^n.

П р и м е р. Определить вероятность получения трех пробоин в мишени при четырех выстрелах, если вероятность поразить мишень при одном выстреле постоянна и равна 0,4.

Решение. Обозначим вероятность поражения мишени при первом выстреле через $p(A_1)$, при втором выстреле через $p(A_2)$, при третьем выстреле через $p(A_3)$, при четвертом выстреле через $p(A_4)$, вероятность получения трех пробоин в мишени при четырех выстрелах через $P_4(3)$. По условию примера имеем

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = p(A_4) = p = 0{,}4; \quad q = 1 - p, \text{ т. е. } q = 0{,}6.$$

По формуле (39) имеем

$$P_4(3) = C_4^3 q^{4-3} p^3 = 4\cdot(0{,}6)^1\cdot(0{,}4)^3; \qquad P_4(3) = 0{,}1536.$$

Этот результат может быть получен также путем применения теорем сложения и умножения вероятностей.

Событие «наличие в мишени трех пробоин» может наступить в следующих комбинациях:

$$1)\ B_1 = (A_1A_2A_3A_4); \qquad 3)\ B_3 = (A_1\overline{A}_2A_3A_4);$$

$$2)\ B_2 = (A_1A_2\overline{A}_3A_4); \qquad 4)\ B_4 = (\overline{A}_1A_2A_3A_4).$$

Применяя теорему умножения для независимых событий, получим

$$1)\ p(B_1) = p(A_1A_2A_3\overline{A}_4) = p(A_1)\,p(A_2)\,p(A_3)\,p(\overline{A}_4) = 0{,}0384;$$

$$2)\ p(B_2) = p(A_1A_2\overline{A}_3A_4) = p(A_1)\,p(A_2)\,p(\overline{A}_3)\,p(A_4) = 0{,}0384;$$

$$3)\ p(B_3) = p(A_1\overline{A}_2A_3A_4) = p(A_1)\,p(\overline{A}_2)\,p(A_3)\,p(A_4) = 0{,}0384;$$

$$4)\ p(B_4) = p(\overline{A}_1A_2A_3A_4) = p(\overline{A}_1)\,p(A_2)\,p(A_3)\,p(A_4) = 0{,}0384.$$

По условию примера появление одного из сложных событий — произведений 1—4 будет означать наступление ожидаемого события. Следовательно, по теореме сложения имеем

$$P_4(3) = p(B_1) + p(B_2) + p(B_3) + p(B_4)$$

или

$$P_4(3) = 0{,}1536.$$

Получен тот же результат, что и по формуле (39).

По формуле (39) можно вычислить вероятность появления события k раз при n независимых многократных испытаниях, причем $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

В практических целях представляется полезным уметь вычислять вероятность появления события хотя бы один раз при выполнении данного комплекса условий. Поскольку сумма вероятностей противоположных событий равна 1, т. е. $q + p = 1$, вероятность того, что некоторое событие A ни разу не появится при n испытаниях, равна $[p(\overline{A})]^n$.

Следовательно, вероятность того, что событие A произойдет хотя бы один раз, равна

$$P(A)=1-[p(\overline{A})]^n, \tag{42}$$

или

$$P(A)=1-q^n. \tag{43}$$

Так, в предыдущем примере $P(A) = 1 - (0{,}6)^4 = 0{,}8704$.

§ 9. ВЕРОЯТНЕЙШЕЕ ЧИСЛО ПОЯВЛЕНИЙ СОБЫТИЯ ПРИ МНОГОКРАТНЫХ ИСПЫТАНИЯХ

При испытаниях новых приборов или методов работ, а также при различных теоретических расчетах исследователь, естественно, ставит перед собой вопрос: какое число появлений ожидаемого события (при многократных испытаниях) наиболее возможно, если выполнен определенный комплекс условий, который в обобщающем виде характеризуется постоянством в процессе опыта вероятности появления события при одном испытании. Конечно, каждый раз, вычисляя все члены разложения в формуле (37) и зная из определения вероятности, что большая вероятность порождает большую уверенность в получении желаемого результата опыта, можно определить число появлений события, соответствующее этой вероятности. Для иллюстрации сказанного рассмотрим пример.

Пример. Произведено 8 независимых измерений одной и той же величины в одинаковых условиях. Вычислить вероятности появления отрицательных * ошибок Δ: одной, двух, трех и т. д., восьми из восьми, полагая, что

$$p(\Delta<0)=p(\Delta>0)=\frac{1}{2}; \qquad p(\Delta<0)=q; \qquad p(\Delta>0)=p.$$

Решение. Составим табл. 1.

Таблица 1

Число появлений	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Контроль
	$P_n(k)$									
n	$C_8^0\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^1\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^2\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^3\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8$	Σ
8	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$	1

* Вообще говоря, выражения «отрицательная ошибка», «положительная ошибка» неточны. Правильнее говорить: «ошибка, меньшая нуля», «ошибка, большая нуля», «ошибка, равная нулю» (вместо «нулевая ошибка» или «ошибки нет»).

Из табл. 1 видно, что наибольшая вероятность $\left(\frac{70}{256}\right)$ соответствует появлению четырех отрицательных ошибок.

Задача, следовательно, состоит в том, чтобы найти способ отыскания в общем виде числа появлений события, соответствующего наибольшей вероятности, или так называемого **вероятнейшего числа появлений** события при многократных испытаниях. Обозначим вероятнейшее число через k_0. Для решения поставленной задачи используем формулу (39) биномиального распределения вероятностей. Так как это распределение прерывное (дискретное), аппарат математического анализа непригоден для исследования изменения вероятностей $P_n(k)$ в зависимости от изменения числа появлений события k.

По определению вероятнейшего числа появлений события должны выполняться неравенства:

$$\left.\begin{array}{l} P_n(k_0)\geqslant P_n(k_0+1); \\ P_n(k_0)\geqslant P_n(k_0-1). \end{array}\right\} \tag{44}$$

Если условие (44) будет выполнено, k_0 будет вероятнейшим числом появлений события при многократных испытаниях.

Найдем k_0, отвечающее первой части условия (44).

Для этого составим отношение

$$\frac{P_n(k_0+1)}{P_n(k_0)}\leqslant 1. \tag{45}$$

Пользуясь формулой (39), преобразуем числитель и знаменатель левой части неравенства (45)

$$\frac{P_n(k_0+1)}{P_n(k_0)}=\frac{C_n^{k_0+1}q^{n-k_0-1}p^{k_0+1}}{C_n^{k_0}q^{n-k_0}p^{k_0}}=\frac{\dfrac{n!}{(k_0+1)!\,(n-k_0-1)!}\,p}{\dfrac{n!}{k_0!\,(n-k_0)!}\,q}. \tag{46}$$

Произведя соответствующие сокращения в (46) и имея в виду неравенство (45), получим

$$\frac{n-k_0}{k_0+1}\cdot\frac{p}{q}\leqslant 1. \tag{47}$$

Освободившись от знаменателя в левой части неравенства (47), запишем

$$(n-k_0)\,p\leqslant(k_0+1)\,q. \tag{48}$$

Но так как

$$q=1-p, \tag{49}$$

то, подставив значение q из (49) в формулу (48), получим

$$np-k_0p\leqslant k_0-k_0p+1-p$$

или

$$np-(1-p)\leqslant k_0. \tag{50}$$

Таким образом, для выполнения первой части условия (44) достаточно определить k_0 под условием (50).

Найдем правую границу неравенства (50), т. е. k_0, отвечающее второй половине условия (44), для чего составим отношение

$$\frac{P_n(k_0-1)}{P_n(k_0)} \leqslant 1. \qquad (51)$$

Поступая аналогично, после несложных преобразований получим

$$\frac{P_n(k_0-1)}{P_n(k_0)} = \frac{k_0}{n-k_0+1} \cdot \frac{q}{p} \leqslant 1 \qquad (52)$$

или

$$k_0 - k_0 p \leqslant np - k_0 p + p; \qquad (53)$$

$$k_0 \leqslant np + p. \qquad (54)$$

Окончательно, объединив неравенства (50) и (54), получим

$$np-(1-p) \leqslant k_0 \leqslant np + p. \qquad (55)$$

Неравенство (55) позволяет находить вероятнейшее число появлений события при многократных испытаниях, т. е. такое число, которое отвечает условию (44). Контролем вычислений k_0 является равенство единице разности, составленной из правой и левой частей неравенства (55). При вычислениях k_0 по формуле (55) n (число всех испытаний), как правило, известно по условию задачи (или им задаются произвольно); p (вероятность появления события) известна по условию задачи (или ее значение надо найти, исходя из условия задачи).

При числе испытаний достаточно большом и при значении p не близком к нулю неравенство (55) можно превратить в равенство и для практических целей использовать для вычисления k_0 приближенную формулу

$$k_0 \approx np. \qquad (56)$$

Формула (56) получена путем математических рассуждений, однако ее правильность легко обосновать логически. Для этого достаточно рассмотреть пример на многократное испытание с подбрасыванием монеты.

Следует подчеркнуть, что несмотря на свою простоту формула (56) имеет исключительно важное значение как для последующих теоретических выкладок, так и в особенности при решении задач на появление числа ошибок в заданных пределах.

Основную трудность при решении практических вопросов с использованием формулы (56) составляет определение вероятности появления события.

Глава III

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 10. ПОНЯТИЕ О СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЕ. ПРЕРЫВНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной называют переменную величину, сопутствующую случайному событию и отражающую многообразие неучтенных колебаний условий, при которых производит данный опыт. Таким образом, при проведении опыта приходится иметь дело со случайной величиной, конкретное значение которой заранее неизвестно.

Примеры случайных величин, сопутствующих случайным событиям:

а) Число появлений события или относительная частота при многократных испытаниях.

б) Производится 4 выстрела по мишени. Ожидаемое событие: «попадание в мишень». Это событие может сопровождаться случайными величинами (числом попаданий) 0 или 1, или 2, или 3, или 4.

в) Производится измерение одной и той же величины в одинаковых условиях n раз; точное значение измеряемой величины известно. Результаты измерений будут колебаться около точного значения, причем заранее нельзя назвать ни одного результата измерения; можно лишь, исходя из опыта аналогичных измерений, указать границы изменения случайных величин — результатов измерений или их отклонений от точного значения.

Различают два типа случайных величин: прерывные (дискретные) и непрерывные.

Прерывной случайной величиной называют такую случайную величину, возможные значения которой можно заранее указать (например, число попаданий при трех выстрелах — 0, 1, 2, 3; относительная частота попаданий при трех выстрелах — 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1; число появлений отрицательной ошибки при пяти измерениях — 0, 1, 2, 3, 4, 5; число появлений события при многократных испытаниях).

Непрерывной случайной величиной называют такую, которая может принять любые значения на некотором непрерывном интервале, которые не могут быть перечислены заранее.

Пример. Производится стрельба по цели, представляющей квадрат со стороной a. Начало координат x и y совпадает с центром квадрата. Событию «попадание в цель» соответствует условие

$$|x| \leqslant \frac{a}{2}; \quad |y| \leqslant \frac{a}{2}.$$

Таким образом, если случайное событие «попадание в цель» произойдет, можно утверждать, что координаты точки попадания x и y заключены в пределах от 0 до $\frac{a}{2}$, но нельзя перечислить возможные значения координат точек попадания, так как их несчетное множество.

Разумеется, конкретные значения случайной величины при ограниченном числе испытаний могут заметно отличаться друг от друга и в этом смысле она не является непрерывной, хотя эти значения и нельзя перечислить заранее. Однако речь идет о возможных значениях случайной величины, т. е. о таких, которые она может принимать в процессе опыта. Таким образом, число наблюденных значений случайной величины всегда конечное; однако возможное число значений непрерывной случайной величины — «несчетное множество»*.

Здесь и далее будем обозначать прерывные случайные величины прописными латинскими буквами, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами (например, X — случайная величина; x_1, x_2, x_3, . . . , x_n — возможные значения случайной величины X при n испытаниях; p_1, p_2, p_3, . . . , p_n — соответствующие величинам x_i вероятности).

§ 11. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для полной характеристики случайной величины недостаточно знать ее значения, а необходимо также знать вероятности, соответствующие этим значениям, т. е. p_1, p_2, p_3, . . . , p_n, или ожидаемые относительные частоты (статистические вероятности) этих значений.

Всякое соотношение, при помощи которого устанавливается связь между значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называют законом распределения случайной величины.

Закон распределения прерывной случайной величины может быть задан:

1. Аналитически в виде формулы

$$p(x_i) = f(x_i). \tag{57}$$

Примером аналитического выражения закона распределения для прерывных случайных величин может служить вероятность появлений события k раз при n испытаниях, вычисляемая по формуле (39).

В этой формуле каждому возможному значению числа появлений события k_i ($i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$) ставится в соответствие вероятность $P_n(k)$.

2. Численно в виде простой таблицы распределения (табл. 2), в которой приведены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности.

* Здесь следует иметь в виду, что результаты измерений округляют до некоторого десятичного знака; поэтому практически совокупность всех результатов измерений составляет прерывную случайную величину.

Таблица 2

x_i	x_1	x_2	x_3	. . . .	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	. . . .	p_n

Таблицу распределения часто называют также рядом распределения случайной величины X.

3. Графически в виде так называемого многоугольника распределения.

Многоугольником распределения называется графическое изображение таблицы распределения в прямоугольных координатах, где по оси абсцисс откладываются значения x_i случайной величины X, а по оси ординат — соответствующие им вероятности p_i.

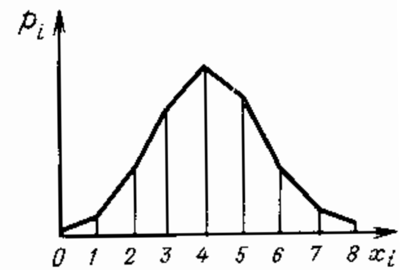

Рис. 1

Пример. По данным табл. 1 (§ 9) построить многоугольник распределения.

Решение. По оси ординат (рис. 1) откладывают p_i, приняв 8 единиц числителя соответствующими 0,256 см, по оси абсцисс — числа ошибок, приняв одно появление ошибки соответствующим 0,49 см. Концы ординат на графике — многоугольнике распределения соединяют отрезками прямых.

Часто результаты исследований задаются в виде интервальных статистических рядов. В этих случаях для графического представления полученных результатов используется гистограмма.

Пример*. Результаты исследования прочности 200 образцов бетона на сжатие представлены в таблице:

Интервалы прочности Δx, кг/см²	Число появлений, M_i	Относительные частоты, Q_i
190—200	10	0,05
200—210	26	0,13
210—220	56	0,28
220—230	64	0,32
230—240	30	0,15
240—250	14	0,07
	$N = 200$	1,00

* Пример заимствован из учебного пособия *А. И. Герасимовича, Я. И. Матвеевой* «Теория вероятностей и математическая статистика». Минск, изд. БПИ, 1975, с. 12—13.

Построить гистограмму относительных частот Q_i распределения.

Решение. На оси абсцисс откладываем значения интервалов и на каждом интервале как на основании Δx строим прямоугольник, площадь которого пропорциональна относительной частоте Q_i, с высотой $h_i = \dfrac{Q_i}{\Delta x}$. Полученный 14-угольник называется гистограммой (рис. 2).

Перейдем к рассмотрению способа задания закона распределения, который подходил бы как для прерывных, так и для непрерывных случайных величин, в чем почти всегда возникает необходимость. С этой целью удобно иметь дело с вероятностью случайной величины $X < x$ (а не $X = x$, как это имело место в законе распределения прерывных случайных величин).

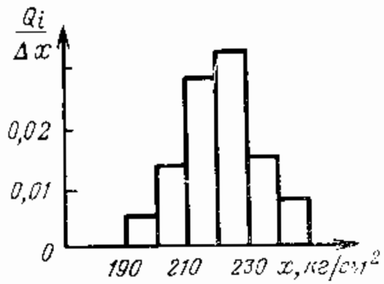

Рис. 2

Функцию вида

$$F(x) = P(X < x) \tag{58}$$

называют функцией распределения случайной величины X или интегральной функцией распределения.

Так, для случайной величины с биномиальным распределением функция распределения примет вид

$$F(x) = \sum_{k<x} C_n^k q^{n-k} p^k. \tag{59}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие непрерывные случайные величины, функция распределения которых непрерывна и дифференцируема, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x). \tag{60}$$

Производная функции распределения называется плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X*.

§ 12. ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПЛОТНОСТЬ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Для вычисления вероятностей появлений события k раз при n независимых многократных испытаниях в § 8 была получена формула (39). Поставим задачу получить вероятность появления события, если k — число появлений изменяется в пределах от a до b, причем

$$a < k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_w < b. \tag{61}$$

* Иногда ее называют «плотность вероятности», «дифференциальная функция распределения», «дифференциальный закон распределения».

Вероятность события $(a < k_i < b)$ по теореме сложения вероятностей равна

$$P(a < k_i < b) = \sum_{k=a}^{b} P_n(k). \tag{62}$$

Подставим в формулу (39) факториалы $n!$, $k!$, $(n-k)!$, вычисленные по формуле (41), получим

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} q^{n-k} p^k = \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} q^{n-k} p^k. \tag{63}$$

После сокращений имеем

$$P_n(k) = \frac{\sqrt{n}\, n^n}{\sqrt{2\pi}\sqrt{k(n-k)}\, k^k (n-k)^{n-k}} q^{n-k} p^k. \tag{64}$$

Приняв

$$n^n = n^k n^{n-k},$$

перепишем выражение (64)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}. \tag{65}$$

Ранее, в § 9, для вероятнейшего числа появлений события при многократных испытаниях была выведена формула (56), в соответствии с которой $k_0 \approx np$. Вместо числа появлений события k будем рассматривать отклонение его от k_0, т. е.

$$\Delta k = k - np, \tag{66}$$

заменив в формуле (65) $k = np + \Delta k$ и $n - k = nq - \Delta k$ (из формулы (66) $k = \Delta k + np$, но $p = 1 - q$, следовательно, $k = \Delta k + n - nq$, т. е. $n - k = nq - \Delta k$).

С учетом выражения (66) преобразуем * формулу (65)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq\left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right)\left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)}} \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right)^{-np-\Delta k} \times \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)^{-nq+\Delta k}. \tag{67}$$

В предположении, что p и q не близки ни к нулю, ни к единице, при числе испытаний, достаточно большом, дроби $\dfrac{\Delta k}{np}$ и $\dfrac{\Delta k}{nq}$ будут

* См. *Щиголев Б. М.* Математическая обработка наблюдений. М., Физматгиз, 1962, с. 130.

малыми величинами, а следовательно

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{\Delta k}{np}\right)\left(1-\frac{\Delta k}{nq}\right)}} \approx 1. \tag{68}$$

Упростим в формуле (67) последние два множителя

$$\left.\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{\Delta k}{np}\right)^{-np-\Delta k} &= -(np+\Delta k)\ln\left(1+\frac{\Delta k}{np}\right); \\ \ln\left(1-\frac{\Delta k}{nq}\right)^{-nq+\Delta k} &= (-nq+\Delta k)\ln\left(1-\frac{\Delta k}{nq}\right). \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Раскладывая в ряды $\ln\left(1+\frac{\Delta k}{np}\right)$ и $\ln\left(1-\frac{\Delta k}{nq}\right)$ по степеням $\frac{\Delta k}{np}$ и $\frac{\Delta k}{nq}$, получим *

$$\left.\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{\Delta k}{np}\right) &= \frac{\Delta k}{np} - \frac{\Delta k^2}{2n^2p^2} + \ldots; \\ \ln\left(1-\frac{\Delta k}{nq}\right) &= -\frac{\Delta k}{nq} - \frac{\Delta k^2}{2n^2q^2} + \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Подставляя формулу (70) в (69), имеем

$$\left.\begin{aligned} &\ln\left(1+\frac{\Delta k}{np}\right)^{-np-\Delta k} = -(np+\Delta k)\left(\frac{\Delta k}{np} - \frac{\Delta k^2}{2n^2p^2} + \ldots\right) = \\ &= -\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} \ldots; \\ &\ln\left(1-\frac{\Delta k}{nq}\right)^{-nq+\Delta k} = -(nq-\Delta k)\left(-\frac{\Delta k}{nq} - \right. \\ &\left. -\frac{\Delta k^2}{2n^2q^2} + \ldots\right) \approx \Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Используя свойство логарифмов, можно на основании формул (71) записать

$$\left.\begin{aligned} \left(1+\frac{\Delta k}{np}\right)^{-(np+\Delta k)} &= e^{-\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} + \ldots}; \\ \left(1-\frac{\Delta k}{nq}\right)^{-(nq-\Delta k)} &= e^{\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} + \ldots}. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

* Из дифференциального исчисления известно

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots; \quad \ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots\right).$$

Подставляя соответствующие значения последних двух сомножителей в формулу (67) из (72), получим

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} + \ldots} e^{\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} + \ldots}, \tag{73}$$

но

$$\begin{aligned} -\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} + \Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} &= \frac{-q\Delta k^2 - p\Delta k^2}{2npq} = \\ &= \frac{-(1-p)\Delta k^2 - p\Delta k^2}{2npq} = -\frac{\Delta k^2}{2npq}. \end{aligned} \tag{74}$$

Следовательно,

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{\Delta k^2}{2npq}}. \tag{75}$$

Подставим в формулу (75) вместо Δk^2 выражение $(k-np)^2$; тогда

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}. \tag{76}$$

Формула (76) служит для вычисления вероятности появлений события k раз при n испытаниях.

В формуле (76) примем

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}. \tag{77}$$

Изменим число появлений k на единицу и при этом условии по формуле (77) определим приращение новой переменной x

$$\left.\begin{aligned} x+\Delta x &= \frac{k-np+1}{\sqrt{npq}}; \\ x &= \frac{k-np}{\sqrt{npq}}. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Вычитая в формуле (78) из верхнего выражения нижнее, получим

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{npq}}. \tag{79}$$

Формула (76) с учетом (77) и (79) примет вид

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Delta x. \tag{80}$$

Подставим значение $P_n(k)$ из формулы (80) в (62)

$$P(a < k_i < b) = \sum_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Delta x. \tag{81}$$

Из (79) следует, что при $n \to \infty$ $\Delta x \to 0$.

Переходя к пределу и заменяя в выражении (81) знак суммы знаком интеграла, запишем

$$P(a<k_i<b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \qquad (82)$$

В формуле (82) пределы интегрирования a и b, относящиеся к переменной k_i, заменим пределами, относящимися к переменной

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}},$$

находящейся под знаком интеграла, для чего примем

$$\left.\begin{aligned} a&=np+\alpha\sqrt{npq};\\ b&=np+\beta\sqrt{npq},\end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

где α и β — пока неизвестные сомножители.

Из выражений (83) имеем

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=\frac{a-np}{\sqrt{npq}};\\ \beta&=\frac{b-np}{\sqrt{npq}}.\end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

Сравнивая формулы (84) с (77), видим, что если a и b — пределы изменения переменной k, то α и β — пределы, в которых изменяется x.

Таким образом,

$$P(a<k_i<b)=P(\alpha<x<\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \qquad (85)$$

Из формулы (85) следует т е о р е м а Л а п л а с а.

При достаточно большом числе независимых испытаний n вероятность появления события k_i раз (в границах изменения от a до b, где $a=np+\alpha\sqrt{npq}$ и $b=np+\beta\sqrt{npq}$) стремится к определенному значению, выражаемому соотношением (85).

При практическом использовании формулы (85) в преобладающем большинстве случаев приходится иметь дело с симметричными пределами. В соответствии с этим примем: $\alpha=-t$, $\beta=+t$.

Тогда формула (85) примет вид

$$P(\alpha<x<\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{+t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \qquad (86)$$

В силу четности подынтегральной функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\int_{-t}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \qquad (87)$$

Следовательно,

$$P(\alpha<x<\beta)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \qquad (88)$$

На основании теоремы Лейбница — Ньютона определенный интеграл с переменным верхним пределом есть непрерывная функция этого предела, первообразная по отношению к подынтегральной функции, т. е. можем записать

$$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \qquad (89)$$

Функция $\Phi(t)$ называется и н т е г р а л о м в е р о я т н о с т е й*, или функцией нормального распределения.

$$\Phi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx.$$

Таким образом, биномиальное распределение переменной величины

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

стремится к непрерывному, нормальному распределению, когда число испытаний неограниченно возрастает, а вероятности не близки ни к нулю, ни к единице. Графически это можно представить, например, так: если число испытаний (см. рис. 2) увеличить до неограниченно большой величины, интервалы между соседними основаниями ординат на оси абсцисс уменьшатся и будут неограниченно малы. Ломаная линия при этом превратится в плавную колоколообразную кривую, так называемую к р и в у ю н о р м а л ь н о г о р а с п р е д е л е н и я. Разумеется, для приведения этих рассуждений в соответствие с формулой (89) кривая на рис. 2 должна быть сдвинута влево так, чтобы она стала симметричной относительно оси ординат.

Геометрический смысл теоремы Лейбница—Ньютона состоит в том, что производная от переменной площади равна переменной конечной ординате.

В соответствии с этим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\Phi(t+\Delta t)-\frac{1}{2}\Phi(t)}{\Delta t}=y_1; \qquad (90)$$

$$y_1=\frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}. \qquad (91)$$

* Иногда функция (89) представляется в виде [1, стр. 107]

Функцию $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ обозначают через $\varphi(t)$ и называют плотностью нормального распределения вероятностей.

Иногда ее называют дифференциальной функцией нормального распределения. Таким образом,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}. \tag{92}$$

Построим график функции $y_1 = \varphi(t)$. Так как $\varphi(t)$ — функция четная, полученная кривая нормального распределения будет расположена симметрично относительно оси ординат (рис. 3). Свойства этой кривой более подробно будут рассмотрены ниже.

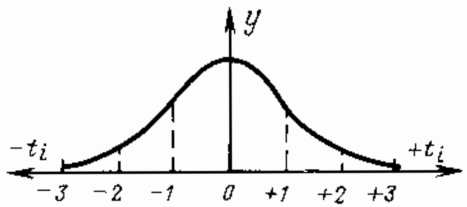

Рис. 3

Как следует из вышеизложенного, интеграл вероятностей геометрически представляет площадь, заключенную между кривой нормального распределения и осью абсцисс, в пределах от $-t$ до $+t$. При дальнейших рассуждениях полезно иметь в виду, что интеграл вероятностей принимает значения, приведенные в табл. 3.

Таблица 3

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0	0	3,0	0,9973
1	0,683	4,0	0,99994
2	0,954	5,0	0,9999994
2,5	0,988	8,0	0,999999999999999

Рассмотрим основные свойства интеграла вероятностей $\Phi(t)$.

1. Функция $\Phi(t)$ есть функция нечетная, т. е. при замене аргумента t на $-t$ функция $\Phi(t)$ меняет знак, не меняя своего численного значения.

Для доказательства этого свойства запишем

$$\Phi(-t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-t} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \tag{93}$$

Произведя под знаком интеграла замену переменной $x = -z$, $dx = -dz$, находим, что при $x = -t$, $z = t$

$$\Phi(-t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Следовательно,

$$\Phi(-t) = -\Phi(t). \tag{94}$$

2. С возрастанием аргумента t от нуля до бесконечности значение функции $\Phi(t)$ также возрастает, приближаясь к своему предельному значению, равному единице, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1. \tag{95}$$

Записав функцию

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \tag{96}$$

видим, что интеграл в правой части формулы (96) — это известный интеграл Эйлера—Пуассона, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}. \tag{97}$$

Подставляя формулу (97) в (96), получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1, \tag{98}$$

что и требовалось доказать.

§ 13. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СВЯЗЬ ЕЕ С ИНТЕГРАЛОМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Для характеристики закона распределения часто вместо интеграла вероятностей $\Phi(t)$ применяют так называемую интегральную функцию нормального распределения, имеющую вид

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \tag{99}$$

Сравнивая формулы (89) и (99), нетрудно установить, что геометрически интегральная функция нормального распределения представляет площадь, заключенную между кривой нормального распределения и осью абсцисс в пределах от $-\infty$ до t. Установим связь между интегралом вероятностей (89) и функцией $F(t)$, для чего интеграл (99) разобьем на два интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \tag{100}$$

На основании выражений (89) и (98) можем записать

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2}; \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2}\Phi(t);$$

с учетом полученного перепишем формулу (100) в виде

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(t). \tag{101}$$

Однако при практическом использовании связи (101) чаще приходится вычислять $\Phi(t)$ через $F(t)$, а не наоборот. Имея в виду это обстоятельство, умножим левую и правую части выражения (101) на 2 и, решив его относительно $\Phi(t)$, получим

$$\Phi(t) = 2F(t) - 1. \tag{102}$$

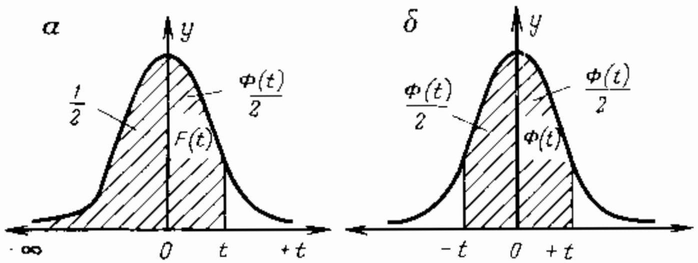

Рис. 4

Таким образом, если имеются таблицы для определения значения функции $F(t)$ по аргументу t, а необходимо найти значение интеграла вероятностей $\Phi(t)$, достаточно выбранное табличное значение $F(t)$ умножить на 2 и полученный результат уменьшить на 1.

Установленную связь (102) между функциями $\Phi(t)$ и $F(t)$ легко проверить графически на основании сравнения заштрихованных площадей на рис. 4, *а* и *б*.

§ 14. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Функция $\Phi(t)$ имеет большое применение в теории вероятностей.

При вычислении значений этой функции для заданных значений аргумента t она не может быть выражена через элементарные функции, взятые в конечном числе.

Учитывая, что в практике приходится иметь дело с не очень большими значениями аргумента t (так, в расчетах, связанных с теорией ошибок, $t \leqslant 3$ практически исчерпывает все интересующие нас случаи; см. табл. 3), вычислим значение $\Phi(t)$ по формуле (89) путем разложения подынтегральной функции $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ в ряд Маклорена и последующего интегрирования частной суммы.

Примем

$$-\frac{1}{2}x^2 = z.$$

Тогда, раскладывая e^z в ряд Маклорена, получим

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots,$$

или

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!\cdot 2} + \frac{x^4}{2!\cdot 4} - \frac{x^6}{3!\cdot 8} + \frac{x^8}{4!\cdot 16} - \frac{x^{10}}{5!\cdot 32} + \frac{x^{12}}{6!\cdot 64} \mp \ldots,$$

т. е.

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} - \frac{x^{10}}{3840} + \frac{x^{12}}{46\,080} \mp \ldots \tag{103}$$

Этот ряд по теореме Абеля сходится равномерно в любом конечном интервале.

Подставив значение $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ из (103) в формулу (89), получим

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} - \frac{x^{10}}{2840} + \frac{x^{12}}{46\,080} - \ldots\right)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^t dx - \frac{1}{2}\int_0^t x^2dx + \frac{1}{8}\int_0^t x^4dx - \frac{1}{48}\int_0^t x^6dx + \frac{1}{384}\int_0^t x^8dx - \frac{1}{3840}\int_0^t x^{10}dx + \frac{1}{46\,080}\int_0^t x^{12}dx - \ldots\right);$$

после интегрирования получим

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \frac{x^9}{3456} - \frac{x^{11}}{42\,240} + \frac{x^{13}}{599\,040} - \ldots\right)\Bigg|_0^t,$$

или

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \frac{t^7}{336} + \frac{t^9}{3456} - \frac{t^{11}}{42\,240} + \frac{t^{13}}{599\,040} - \ldots\right). \tag{104}$$

Ряд в правой части формулы (104) также сходится при всех конечных значениях t. Общий член этого ряда имеет вид

$$(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^n\, n!\,(2n+1)}; \tag{105}$$

здесь $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ представляет показатель степени t в вычисляемом члене разложения (104), уменьшенный на единицу и деленный на 2 (например, для члена с t^{13} $n = 6$), или порядковый номер дробного члена.

Так, например, третий и шестой члены разложения в формуле (104) можно вычислить по формуле (105) в следующем порядке:

$$\text{а) } n = 3; \quad (-1)^3 \frac{t^{2\cdot 3+1}}{2^3\cdot 3!\,(2\cdot 3+1)} = (-1)^3 \frac{t^7}{8\cdot 6\cdot 7} = -\frac{t^7}{336};$$

$$\text{б) } n = 6; \quad (-1)^6 \frac{t^{2\cdot 6+1}}{2^6\cdot 6!\,(2\cdot 6+1)} = \frac{t^{13}}{64\cdot 720\cdot 13} = \frac{t^{13}}{599\,040}.$$

Для вычисления значения функции $\Phi(t)$ с учетом (105) может быть написана более общая формула

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}. \qquad (106)$$

Пользуясь формулами (104) или (106), легко подсчитать, сколько членов разложения нужно удержать при вычислении значения функции $\Phi(t)$, чтобы в зависимости от аргумента t получить заданную точность.

Из анализа известно, что если в сходящемся знакочередующемся ряде отбросить все члены, начиная с $(n+1)$-го, то остаток $R_n = S - S_n$ имеет знак первого отброшенного $(n+1)$-го члена и будет меньше его по абсолютной величине.

Таким образом, ошибка вычисленного значения интеграла вероятностей $\Phi(t)$ будет удовлетворять условию

$$\Delta\Phi(t) < \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}. \qquad (107)$$

Пример. Определить, каким членом разложения можно пренебречь при вычислении $\Phi(t)$ для $t = 2{,}0$, если ошибка вычислений задана и не должна превышать по модулю 0,015. Ставим условие в соответствии с формулой (107) и заданной ошибкой 0,015 и находим n

$$\left| \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^n\cdot n!\,(2n+1)} \right| \leqslant \Delta\Phi(2,0);$$

$$\left| 0{,}798\,(-1)^n \frac{(2{,}0)^{2n+1}}{2^n\cdot n!\,(2n+1)} \right| \leqslant 0{,}015.$$

Методом подбора определим n; примем сначала $n = 5$, тогда

$$0{,}798 \frac{(2{,}0)^{11}}{2^5\cdot 5!\cdot 11} = 0{,}039,$$

что по абсолютной величине больше 0,015; примем $n = 6$, тогда

$$0{,}798 \frac{(2{,}0)^{13}}{2^6\cdot 6!\cdot 13} = 0{,}011,$$

что по абсолютной величине меньше 0,0 .

Поставленное условие: $\Delta\Phi(2{,}0) \leqslant 0{,}015$ будет выполнено, если при вычислении значения функции $\Phi(2{,}0)$ будут удержаны члены разложения в формулах (104) или (106) с t^{11} (при $n = 5$) и не приняты во внимание члены, начиная с содержащего t^{13} (неучет члена с t^{15} вносит ошибку в $\Phi(t)$, равную $-0{,}0027$*, а неучет члена с t^{13} — $+0{,}011$).

Очевидно, что вычисление значений $\Phi(t)$ даже для небольших аргументов t связано с большими техническими трудностями. Это обстоятельство потребовало составления таблиц интеграла вероятностей, первые из которых были составлены Крампом в 1799 г.

В настоящее время во всех руководствах и пособиях по теории вероятностей помещаются таблицы значений интеграла вероятностей, составляемых непосредственно по таблицам академика А. А. Маркова. Марков составил таблицы значения интеграла

$$\Phi_M(t) = \int_t^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

для значений x от 0 до 4,8 с точностью до 11-й значащей цифры. От значений $\Phi_M(t)$ таблиц Маркова легко перейти к значениям $F(t)$ интегральной функции, так как

$$F(t\sqrt{2}) = \frac{1 + \Phi_M(t)}{2}.$$

Переход от значений функции $F(t)$ к значениям интеграла вероятностей $\Phi(t)$ осуществляется по формуле связи (102).

Таблицы значений интеграла вероятностей

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

и таблицы плотности вероятности нормального распределения

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

для t от 0 до 8 помещены в прилож. 1 и 2.

---

* Член с t^{15}, как легко видеть из формул (103) и (104), имеет вид

$$-\frac{2}{645\,120\sqrt{2\pi}} \int_0^t x^{14}\,dx = -\frac{2t^{15}}{\sqrt{2\pi}\,9\,676\,800};$$

таким образом, в скобке с t^{15} имеем дробь $-\dfrac{t^{15}}{9\,676\,800}$, т. е. для $t = 2$

$$-\frac{t^{15}}{9\,676\,800} = -\frac{32\,768}{9\,676\,800} = -0{,}0034.$$

Его влияние на $\Phi(t = 2)$ будет равно $\Delta\Phi = -0{,}798\cdot 0{,}0034 = -0{,}0027$.

§ 15. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

При практическом использовании теории вероятностей для получения общих количественных характеристик случайных величин необходимо знать некоторые их числовые постоянные, основными из которых являются: математическое ожидание, моменты, среднее квадратическое отклонение (ошибка), дисперсия, эксцесс, асимметрия.

Математическое ожидание

Математическим ожиданием $M(X)$ прерывной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины, которые она может получить в процессе опыта, на соответствующие им вероятности.

Таким образом, при наличии таблицы распределения (см. табл. 2) по определению математического ожидания и при условии, что число возможных значений случайной величины x_i конечное, можно записать

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \qquad (108)$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, поскольку учтены все возможные значения x.

Если выражение математического ожидания (108) распространить на дискретные величины, имеющие бесконечное число возможных значений x_i, то в этом случае

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (109)$$

Учитывая, что в формулах (108) и (109) $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, иногда пишут

$$M(X) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}. \qquad (110)$$

Формула (110) позволяет дать механическую интерпретацию математического ожидания: $M(X)$ является абсциссой центра тяжести системы точек, абсциссы которых равны значениям случайной величины, которые она может принимать или принимает в процессе опыта, а массы, помещенные в эти точки, равны соответствующим вероятностям.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx, \qquad (111)$$

где $f(x)$ — плотность вероятности распределения случайной величины X.

Для нормального распределения

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx, \qquad (112)$$

где $\varphi(x)$ — плотность вероятности нормального распределения (см. § 12).

Пример. Вероятность попадания в цель при выстреле $p = 0{,}5$. Определить математическое ожидание числа попаданий при четырех выстрелах.

Решение. Вероятности возможного числа попаданий 0, 1, 2, 3, 4 равны

$$P_4(0) = C_4^0 q^4 p^0 = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(0) = 0{,}0625;$$

$$P_4(1) = C_4^1 q^3 p^1 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(1) = 0{,}2500;$$

$$P_4(2) = C_4^2 q^2 p^2 = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(2) = 0{,}3750;$$

$$P_4(3) = C_4^3 q^1 p^3 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(3) = 0{,}2500;$$

$$P_4(4) = C_4^4 q^0 p^4 = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(4) = 0{,}0625;$$

Контроль: $\quad \Sigma P_n(k) = 1{,}0000.$

Математическое ожидание числа попаданий при четырех выстрелах

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5;$$

$$M(X) = 0\cdot 0{,}0625 + 1\cdot 0{,}250 + 2\cdot 0{,}375 + 3\cdot 0{,}250 + 4\cdot 0{,}0625;$$

$M(X) = 2$ попадания (наиболее возможное $k_0 \approx np$; $k_0 \approx 4\cdot 0{,}5 = 2$ попадания; таким образом, доказано, что $M(X) = np$).

Реальный алгебраический смысл математического ожидания станет яснее, если установить его связь со средним арифметическим. Заметим, что средним арифметическим называют величину, вычисляемую по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (113)$$

Докажем, что при неограниченно большом числе испытаний пределом среднего арифметического является математическое ожидание случайной величины. Рассуждения будем вести применительно к формуле (108), т. е. для прерывных случайных величин, отметив при этом, что все полученные выводы можно распространить и на непрерывные случайные величины.

Пусть в процессе опыта случайная величина с численным значением

x_1 появилась M_1 раз
x_2 » M_2 »
x_3 » M_3 »
. . . .
x_n » M_n »

На основании формулы (113) можем записать

$$\bar{x} = \frac{x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3 + \ldots + x_nM_n}{M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n}. \qquad (114)$$

Обозначим

$$M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n = N;$$

N — число всех испытаний. Тогда

$$\bar{x} = x_1\frac{M_1}{N} + x_2\frac{M_2}{N} + x_3\frac{M_3}{N} + \ldots + x_n\frac{M_n}{N}. \qquad (115)$$

В формуле (115) дроби $\frac{M_1}{N}, \frac{M_2}{N}, \frac{M_3}{N}, \ldots, \frac{M_n}{N}$ по определению (1) есть относительные частоты, т. е.

$$\frac{M_1}{N} = Q_1; \quad \frac{M_2}{N} = Q_2; \quad \frac{M_3}{N} = Q_3; \ldots; \quad \frac{M_n}{N} = Q_n.$$

Следовательно,

$$\bar{x} = x_1Q_1 + x_2Q_2 + x_3Q_3 + \ldots + x_nQ_n. \qquad (116)$$

На основании теоремы Бернулли (§ 4), переходя к пределу и заменяя в формуле (116) Q_i соответствующими значениями p_i, получим

$$\text{вер.} \lim_{N\to\infty} \bar{x} = M(X). \qquad (117)$$

Таким образом, математическое ожидание $M(X)$ в вероятностном смысле является как бы теоретическим средним значением случайной величины.

Рассмотрим свойства математического ожидания для прерывных случайных величин, вытекающие из определения $M(X)$.

Первое свойство. *Математическое ожидание имеет ту же размерность, что и значения случайной величины.* Это свойство очевидно, так как в формуле (108) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ умножаются на вероятности, которые являются отвлеченными числами.

Второе свойство. *Математическое ожидание* $M(X)$ *может быть как положительным, так и отрицательным числом в зависимости от знаков значений случайной величины.* Это свойство также очевидно.

Третье свойство. *Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной*, т. е.

$$M(C) = C,$$

где C — постоянная.

Это свойство также не требует доказательства.

Четвертое свойство (теорема сложения математических ожиданий; простейший случай). *Математическое ожидание суммы двух или нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих случайных величин, т. е.*

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y); \qquad (118)$$

$$M(X+Y+\ldots+W) = M(X) + M(Y) + \ldots + M(W). \qquad (119)$$

Доказательство. Докажем частный случай формулы (118). Для случайных величин X и Y запишем

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i);$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{k} y_j p(y_j).$$

Для формулы (118) по определению математического ожидания можно записать

$$M(X+Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_i + y_j)\,p(x_iy_j), \qquad (120)$$

где $p(x_iy_j)$ — вероятность совместного появления возможных значений x_i и y_j.

Выражение (120) можно переписать так

$$M(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{k} p(x_iy_j) + \sum_{j=1}^{k} y_j \sum_{i=1}^{n} p(x_iy_j). \qquad (121)$$

Для независимых * событий

$$p(x_iy_j) = p(x_i)\,p(y_j). \qquad (122)$$

С учетом (122) выражение (121) примет вид

$$M(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) \sum_{j=1}^{k} p(y_j) + \sum_{j=1}^{k} y_j p(y_j) \sum_{i=1}^{n} p(x_i). \qquad (123)$$

Но в выражении (123)

$$\sum_{j=1}^{k} p(y_j) = 1; \qquad \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1.$$

* Для случая зависимых случайных величин используются условные вероятности $p(y_j/x_i)$.

Следовательно,

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)+\sum_{j=1}^{k} y_j p(y_j)$$

или

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y), \tag{124}$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно распространить это доказательство на любое число слагаемых.

Пятое свойство (теорема умножения математических ожиданий; простейший случай). *Математическое ожидание произведения двух или нескольких независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих случайных величин,* т. е.

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y); \tag{125}$$

$$M(X\cdot Y\cdot Z\cdot\ldots\cdot W)=M(X)\cdot M(Y)\cdot M(Z)\cdot\ldots\cdot M(W). \tag{126}$$

Доказательство. Докажем справедливость формулы (125). На основании определения математического ожидания можно записать

$$M(X\cdot Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j p(x_i y_j),$$

где x_i и y_j — различные значения величин X и Y соответственно; $p(x_i y_j)$ — вероятность произведения $x_i y_j$.

Для независимых случайных величин имеем

$$p(x_i y_j)=p(x_i)\,p(y_j)$$

или

$$M(X\cdot Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j p(x_i)\,p(y_j)=\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)\sum_{j=1}^{k} y_j p(y_j). \tag{127}$$

Окончательно, пользуясь определением математического ожидания и полученным выражением (127), имеем

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y), \tag{128}$$

что и требовалось доказать.

Полученный вывод (128) легко распространить на любое число независимых случайных величин.

Шестое свойство. *Математическое ожидание произведения случайной величины на постоянную равно произведению математического ожидания случайной величины на постоянную величину,* т. е.

$$M(C\cdot X)=C\cdot M(X), \tag{129}$$

где C — постоянная величина.

Доказательство. На основании пятого свойства можно для выражения (129) записать

$$M(C\cdot X)=M(C)\cdot M(X).$$

Но по третьему свойству $M(C)=C$. Следовательно, $M(CX)=C\cdot M(X)$, что и требовалось доказать.

Все свойства математического ожидания для прерывных случайных величин справедливы и для непрерывных случайных величин. Разумеется, при рассмотрении свойств математического ожидания в данном случае необходимо исходить из определения $M(X)$, выражаемого формулой (111).

Моменты

В теории вероятностей различают начальные и центральные моменты.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание k-й степени этой случайной величины, т. е.

$$\nu_k=M(X^k). \tag{130}$$

Центральным моментом порядка k случайной величины называют математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$, т. е.

$$\mu_k=M\{[X-M(X)]^k\}. \tag{131}$$

Для прерывной случайной величины X на основании формул (130) и (131) можно соответственно записать

$$\nu_k=\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, \tag{132}$$

где x_i — различные возможные значения случайной величины X; p_i — соответствующие вероятности;

$$\mu_k=\sum_{i=1}^{n}[x_i-M(X)]^k p_i. \tag{133}$$

На основании связи (117) среднего арифметического $\bar{x}$ с математическим ожиданием $M(X)$, в соответствии с которой

$$\text{вер.}\lim_{N\to\infty}\bar{x}=M(X),$$

для эмпирических распределений формулы (132) и (133) можно упростить и записать

$$\nu_k=\sum_{i=1}^{n} x_i^k Q_i; \tag{134}$$

$$\mu_k=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k Q_i. \tag{135}$$

Здесь Q_i — относительные частоты появления значений случайной величины, получаемых из массовых наблюдений.

В частном случае, когда для возможных значений x_i относительные частоты Q_i одинаковы (например, каждое значение x_i появилось один раз), формулы (134) и (135) еще упростятся и примут вид

$$\nu'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k;$$

$$\mu'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k.$$

Для непрерывной случайной величины X в соответствии с формулами (130), (131) для начального и центрального моментов запишем

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx; \tag{136}$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^k f(x)\, dx. \tag{137}$$

В формулах (136) и (137) функция $f(x)$ — плотность вероятности распределения непрерывной случайной величины X.

Пользуясь формулами (132), (133), (134) и (135), легко установить, что [23, с. 178]

$$\left.\begin{aligned} &\nu_0 = 1; \quad \mu_0 = 1;\\ &\nu_1 = \bar{x}; \quad \mu_1 = 0;\\ &\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2;\\ &\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3;\\ &\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\bar{x} + 6\nu_2\bar{x}^2 - 3\bar{x}^4; \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

$$\mu_{2i+2} = (2i+1)\,\mu_{2i}\mu_2 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{139}$$

Формула (139) позволяет вычислять центральные моменты четного порядка для теоретической связи, начиная с момента 4-го порядка, через момент второго порядка.

Так, например,

$$\left.\begin{aligned} &\mu_4 = \mu_{2i+2} = 3\mu_2^2 \qquad (i = 1);\\ &\mu_6 = \mu_{2i+2} = 15\mu_2^3 \qquad (i = 2);\\ &\mu_8 = \mu_{2i+2} = 105\mu_2^4 \quad (i = 3);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

При использовании моментов обычно ограничиваются моментами 4-го порядка; для надежного определения моментов более высокого порядка необходимо число испытаний (наблюдений) довести до нескольких тысяч.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

Дисперсия как одна из важнейших числовых характеристик случайной величины дает возможность оценить разброс значений этой случайной величины, вызываемый наличием при опыте ошибок наблюдений, неучетом колебаний условий и другими факторами.

При наличии двух рядов наблюдений одной и той же случайной величины X, в одном из которых разброс меньше, т. е. различные значения случайной величины теснее группируются около среднего значения, по самим отклонениям $X - M(X)$ можно составить некоторое суждение о точности наблюдений этих рядов. Заметим, однако, что во многих случаях ошибки наблюдений бывают ничтожно малы или даже отсутствуют совсем. (Например, при определении числа бракованных изделий в суточной выработке.)

Однако частные значения отклонений $X - M(X)$ сами по себе ничего не характеризуют, а математическое ожидание отклонения случайной величины, как легко убедиться, равно нулю вследствие взаимной компенсации отклонений положительных и отрицательных значений. Среднее значение из абсолютных значений этих отклонений также не всегда дает хороший результат при оценке разброса, так как результаты сильно сглаживаются и большие отклонения становятся мало ощутимыми, особенно при значительном числе испытаний.

С целью устранения указанных недостатков принято рассматривать не сами отклонения, а их вторые степени. В этом случае большие отклонения сказываются на конечном результате оценки значительно больше, чем малые. Привлечение для этой цели более высоких степеней $X - M(X)$ связано, как было отмечено выше, с дополнительной трудностью, вызываемой тем, что в практике приходится ограничиваться сравнительно небольшим числом испытаний (наблюдений).

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения значения случайной величины от ее математического ожидания, т. е.

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}. \tag{140}$$

Из формулы (140) следует, что дисперсия случайной величины есть не что иное, как центральный момент второго порядка, а именно $D(X) = \mu_2$.

Для прерывной случайной величины X

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(x)]^2 p_i,$$

или в более простом виде, с учетом формулы (117),

$$D'(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2. \tag{141}$$

Для непрерывной случайной величины X

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\{x_i-M(X)\}^2 f(x)\,dx. \tag{142}$$

Иногда обозначают

$$D(X)=\sigma_X^2-\sigma^2. \tag{143}$$

Величина $\sigma=+\sqrt{D(X)}$ называется **средним квадратическим отклонением** (иногда — стандартом); берется всегда со знаком «+». Среднее квадратическое отклонение σ обладает по сравнению с дисперсией $D(X)$ несомненным преимуществом: оно имеет ту же размерность, что и случайная величина. Отметим, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины.

Часто пользуются относительной числовой характеристикой разброса или так называемым **коэффициентом вариации** γ, представляющим отношение среднего квадратического отклонения к математическому ожиданию, выраженное в процентах, т. е.

$$\gamma=\frac{\sigma}{M(X)}100\%, \tag{144}$$

исключая, конечно, случай, когда $M(X)=0$.

Если в формуле дисперсии (141) x_i — различные значения случайной величины, полученные из наблюдений, а вместо $\bar{x}$ взято X — точное (истинное *) значение этой величины, то разность $\Delta_i = x_i - X$ называют **истинной ошибкой**. Дисперсия $D(X)$ в этом случае будет представлять собой квадрат средней квадратической ошибки m^2, т. е. $D'(X)=m^2$, а $m=\sigma$.

Формула средней квадратической ошибки, вычисленной по истинным ошибкам (так называемая формула Гаусса), имеет вид

$$m=\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \tag{145}$$

* Истинное — безошибочное значение отдельных физических величин, как правило, неизвестно. В некоторых случаях известно истинное значение функции нескольких величин: сумма углов в плоском треугольнике (180°), сумма превышений и приращений координат в замкнутых ходах (0) и т. д. Поэтому при испытаниях в качестве истинного берут точное значение наблюдаемой величины, ошибка которого пренебрегаемо мала по сравнению с ошибками испытуемого метода (например, ошибка величин X на порядок меньше ошибок измеряемой величины x_i).

где знак [ ] — гауссова сумма.

$$[\Delta^2]=\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots+\Delta_n^2,$$

n — число всех ошибок (наблюдений).

В последующем изложении понятие средней квадратической ошибки используется чаще, чем понятие среднего квадратического отклонения, поскольку речь пойдет об измерениях.

Понятия математического ожидания и дисперсии нетрудно применить для биномиального распределения вероятностей.

Определим математическое ожидание числа появлений события $M(k)$.

По определению

$$M(k)=\sum_{i=1}^{n}k_i p_i. \tag{146}$$

Таблица распределения для данного случая примет следующий вид (табл. 4).

Таблица 4

k_i	0	1	2	3	. . . .	n
p_i	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	$P_n(3)$	. . . .	$P_n(n)$

На основании формулы (146) и данных табл. 4 имеем

$$\begin{aligned}M(k)&=0\cdot P_n(0)+1\cdot P_n(1)+2\cdot P_n(2)+3\cdot P_n(3)+\ldots\\&\ldots+k\cdot P_n(k)+\ldots+(n-1)\cdot P_n(n-1)+n\cdot P_n(n)=\\&=0\cdot q^n+C_n^1q^{n-1}p+2C_n^2q^{n-2}p^2+3C_n^3q^{n-3}p^3+\ldots\\&\ldots+kC_n^kq^{n-k}p^k+\ldots+(n-1)C_n^{n-1}qp^{n-1}+nC_n^np^n=\frac{n!}{(n-1)!}q^{n-1}p+\\&+\frac{2n!}{2!\,(n-2)!}q^{n-2}p^2+\frac{3n!}{3!\,(n-3)!}q^{n-3}p^3+\ldots\\&\ldots+\frac{kn!}{k!\,(n-k)!}q^{n-k}p^k+\ldots+\frac{(n-1)\,n!}{(n-1)!}qp^{n-1}+np^n.\end{aligned} \tag{147}$$

Раскроем факториалы в правой части (147), произведя соответствующие сокращения

$$\begin{aligned}M(k)&=nq^{n-1}p+n(n-1)\,q^{n-2}p^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}q^{n-3}p^3+\ldots\\&\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!}q^{n-k}p^k+\ldots+n(n-1)\times\\&\times qp^{n-1}+np^n.\end{aligned} \tag{147'}$$

Вынесем в правой части формулы (147′) вероятнейшее число появлений события при многократных испытаниях $k_0 = np$ за скобку, получим

$$M(k) = np\left\{q^{n-1} + (n-1)q^{n-2}p + \frac{(n-1)(n-2)}{2}q^{n-3}p^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!}q^{n-k}p^{k-1} + \ldots + (n-1)qp^{n-2} + p^{n-1}\right\}. \qquad (148)$$

Но в формуле (148)

$$q^{n-1} + (n-1)q^{n-2}p + \frac{(n-1)(n-2)}{2}q^{n-3}p^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!}q^{n-k}p^{k-1} + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)qp^{n-2} + p^{n-1} = (q+p)^{n-1}. \qquad (149)$$

Вместе с тем

$$(q+p)^{n-1} = 1, \qquad (150)$$

так как $q + p = 1$. С вероятностной точки зрения $(q + n)^{n-1}$ есть вероятность появления всевозможных комбинаций $(n-1)$ сложных событий, составляющих полную группу событий. Вероятность того, что при одном испытании какое-либо из $(n-1)$ сложных событий произойдет, равна единице, т. е. $(q + p)^{n-1} = 1$.

Из (148) с учетом формулы (150) следует

$$M(k) = np. \qquad (151)$$

Формула (151) выше (см. § 15, стр. 43) была получена при решении примера, т. е. по принципу «от частного к общему». Напомним, что вероятнейшее число появлений события при многократных испытаниях согласно формуле (56)

$$k_0 \approx np.$$

Отсюда вытекает, что математическому ожиданию соответствует наибольшая вероятность, т. е. математическое ожидание является наиболее надежным окончательным результатом, количественно характеризующим случайную величину.

Определим теперь дисперсию числа появлений события при многократных испытаниях.

По определению (140)

$$D(k) = M\{[k - M(k)]^2\} = \sum_{i=0}^{n}(k_i - np)^2 p_i, \qquad (152)$$

или

$$D(k) = (0 - np)^2 P_n(0) + (1 - np)^2 P_n(1) + \ldots$$
$$\ldots + (n - np)^2 P_n(n). \qquad (153)$$

Выполнив несложные преобразования в правой части формулы (153), которые здесь опущены, нетрудно установить, что дисперсия биномиального распределения

$$D(k) = npq, \qquad (154)$$

а среднее квадратическое отклонение числа появлений биномиального распределения соответственно

$$\sigma = \sqrt{npq}. \qquad (155)$$

С учетом формул (151) и (155) выясним физический смысл переменной x, введенной формулой (77). Случайная величина в формуле (77) соответствует k, а np соответствует $M(X)$, поэтому имеем

$$\frac{x - M(X)}{\sigma} = t. \qquad (156)$$

Таким образом, раскрывается физический смысл симметричных пределов интегрирования в формуле (86); t — есть частное от деления отклонения случайной величины X от ее математического ожидания на среднее квадратическое отклонение или так называемая **нормированная случайная величина**; $M(X)$ и σ — параметры нормального распределения.

Если в формуле (156) $M(X)$ получено из измерений одной и той же величины X, то $\sigma = m$ — средняя квадратическая ошибка, а t — нормированная случайная ошибка. При расчете допусков при измерениях в числителе формулы (156) в большинстве случаев будет использоваться предельная допустимая ошибка $\Delta_{\text{пред}}$, и формула (156) примет вид

$$\frac{\Delta_{\text{пред}}}{m} = t_\alpha, \qquad (157)$$

где t_α — нормированная случайная ошибка, соответствующая доверительной вероятности P_α (см. табл. 3). Данное понятие t_α приводит к простым выражениям при расчете доверительных интервалов, о чем будет сказано ниже.

Эксцесс

Эксцессом в теории вероятностей называют величину, вычисляемую по формуле

$$E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \qquad (158)$$

и характеризующую положение вершины кривой эмпирического распределения относительно кривой нормального распределения.

В формуле (158) приняты следующие обозначения: E — эксцесс; μ_4 — четвертый центральный момент; μ_2 — второй центральный момент $(\mu_2^2 = \sigma^4)$.

Пользуясь формулой (139) для вычисления центральных моментов четного порядка

$$\mu_{2i+2} = (2i+1)\,\mu_{2i}\mu_2,$$

легко показать, что для теоретического (нормального) распределения эксцесс равен нулю, так как

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{(2i+1)\,\mu_{2i}\mu_2}{\mu_2^2} = 3 \quad (i=1).$$

Отклонение эксцесса эмпирического распределения от его теоретического значения, т. е. от нуля, будет указывать на отклонение эмпирического распределения от нормального, причем, если $E>0$, распределение будет «высоковершинным», если $E<0$ — «низковершинным» (рис. 5).

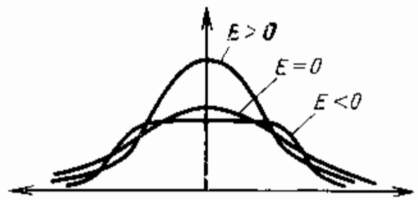

Рис. 5

Не требует пояснений утверждение, что эмпирическое распределение может точно совпасть с нормальным по чистой случайности или при числе испытаний, неограниченно большом. Таким образом, исследователь практически всегда при вычислении эксцесса эмпирического распределения получит величину, отличную от нуля. Но дело заключается в том, можно ли считать полученное значение эксцесса несущественным при данных условиях, а следовательно, отклонение вершины кривой эмпирического распределения от вершины нормального распределения кривой — допустимым.

Для этой цели можно применять следующую эмпирическую формулу,* позволяющую вычислять среднее квадратическое отклонение эксцесса

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24\,(n-5)}{n\,(n+7)}}, \tag{159}$$

где n — число наблюдений (испытаний).

Если число наблюдений не очень мало ($n>50$), эмпирическое распределение можно считать совпадающим с теоретическим (нормальным) с вероятностью 0,997 при условии

$$|E| \leqslant 3\sigma_E; \tag{160}$$

* Формула (159) получена упрощением формулы

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24n\,(n-2)\,(n-3)}{(n-1)^2\,(n+3)\,(n-5)}}$$

и обеспечивает определение σ_E с ошибкой $< 2\cdot 10^{-2}$ при $n \geqslant 20$ (см. *Смирнов Н. В., Белугин Д. А.* Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. М., Недра, 1969).

здесь $|E|$ — абсолютное значение эксцесса; σ_E — среднее квадратическое отклонение эксцесса.

Доверительный интервал для эксцесса вычисляется, в соответствии с изложенным, в следующем порядке:

$$p\,(E' - t_\alpha\sigma_E \leqslant E \leqslant E' + t_\alpha\sigma_E) = P_\alpha, \tag{161}$$

где E' — эмпирическое значение эксцесса, вычисленное по формуле

$$E' = \frac{\mu_4'}{\mu_2'^2} - 3; \tag{162}$$

t_α выбирается в соответствии с заданной доверительной вероятностью P_α из таблиц (см. прил. 1).

Асимметрия

В практике встречаются случаи, когда эмпирическая кривая распределения является как бы скошенной. В качестве числовой характеристики в этом случае применяют так называемый показатель асимметрии

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \tag{163}$$

где S_k — показатель асимметрии; μ_3 — третий центральный момент; σ^3 — третья степень среднего квадратического отклонения $\left(\text{очевидно, } \sigma^3 = \mu_2^{\frac{3}{2}}\right)$.

Для симметричных распределений, каким является и нормальное, очевидно, что теоретическое значение $Sk = 0$, так как суммы положительных и отрицательных кубов отклонений при вычислении μ_3 по формуле (131) взаимно компенсируются. Когда Sk окажется больше нуля, кривая будет скошена влево, а когда Sk окажется меньше нуля — вправо (рис. 6).

Для нормального распределения при большом числе испытаний n среднее квадратическое отклонение показателя асимметрии может быть вычислено по эмпирической формуле *

$$\sigma_{Sk} = \sqrt{\frac{6}{n+4}}. \tag{164}$$

Если будет выполнено условие (при $n>50$)

$$|Sk| \leqslant 3\sigma_{Sk}, \tag{165}$$

* Формула (164) получена упрощением известной формулы

$$\sigma_{Sk} = \sqrt{\frac{6\,(n-1)}{(n+1)\,(n+3)}}$$

и обеспечивает вычисление σ_{Sk} с ошибкой $< 1{,}5\cdot 10^{-2}$ при $n \geqslant 20$.

Таблица 5

Результаты измерений S_i, м	$\delta S_i = S_i - S_{ср}$, мм	δS_i^2	δS_i^3	Вычисление
6994,911	+17,8	316,84	+5639,9	$\mu_1' = \frac{-0{,}2}{16} = 0{,}0$
6994,890	−3,2	10,24	−32,8	$\mu_2' = \frac{1186{,}4}{16} = 74{,}2$
6994,879	−14,2	201,64	−2863,3	$\mu_3' = \frac{+653}{16} = +40{,}8$
6994,895	+1,8	3,24	+5,8	
6994,882	−11,2	125,44	−1404,9	$\mu_4' = \frac{199\,313}{16} = 12\,457 = \frac{\Sigma(\delta_i^2)^2}{n}$
6994,898	+4,8	23,04	+110,6	$\sigma = 8{,}6$ мм
6994,885	−8,2	67,24	−551,4	
6994,883	−10,2	104,04	−1061,2	$E' = \frac{\mu_4'}{\mu_2'^2} - 3$
6994,902	+8,8	77,44	+681,5	
6994,901	+7,8	60,84	+474,6	$E' = \frac{12\,457}{5506} - 3$
6994,895	+1,8	3,24	+5,8	$E' = -0{,}74$
6994,894	+0,8	0,64	+0,5	$\sigma_E = \sqrt{\frac{24 \cdot 11}{16 \cdot 23}} = 0{,}85$
6994,896	+2,8	7,84	+22,0	$\vert E' \vert < \sigma_E$
6994,883	−10,2	104,04	−1061,2	$Sk' = \frac{\mu_3'}{\sigma^3}$
6994,895	+1,8	3,24	+5,8	$Sk' = \frac{40{,}8}{638} = +0{,}06$
6994,902	+8,8	77,44	+681,5	$\sigma_{Sk} \approx \sqrt{\frac{6}{20}} = 0{,}55$; $Sk < \sigma_{Sk}$
$S_{ср} = 6994{,}8932$	$\Sigma = -0{,}2$	$\Sigma = 1186{,}4$	$\Sigma = +653{,}1$	$\Sigma \sigma S_i^4 = 199\,313$

(среднее точное $S_{точн} = 6994{,}8931875$) Контроль * $\Sigma_к = -0{,}2$ мм.

* Контрольная сумма $\Sigma_к$ в графе δS_i табл. 5 легко может быть получена на основании следующих соображений: среднее значение $S_{ср} = 6994{,}8932$ округлено до единицы 10^{-4} значащей цифры на величину $\beta = \overline{S}_{точн} - S_{ср}$, т. е. $\beta = -1{,}25 \cdot 10^{-5}$ м. Из простых рассуждений видно, что контрольная сумма $\Sigma_к = \beta\, n$, т. е. $\Sigma_к = -1{,}25$ м$\cdot 10^{-5} \cdot 16 = -2 \times 10^{-4}$ м, или $\Sigma_к = -0{,}2$ мм, т. е. полученная в графе $S\delta_i$ алгебраическая сумма $\sum_1^{16} \delta S_i = -0{,}2$ мм и контрольная $\Sigma_к$ совпали точно.

то эмпирическое распределение можно считать приближенно симметричным.

Иногда вместо показателя асимметрии Sk применяют постоянную Пирсона β_1, называемую **мерой скошенности**, равную

$$\beta_1 = S^2k = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}. \tag{166}$$

Нетрудно, установить что

$$\sigma_{\beta_1}^2 = 4S^2k\sigma_{Sk}^2; \quad \sigma_{\beta_1} = \sqrt{\beta_1}\sqrt{\frac{24}{n+4}}. \tag{167}$$

Условию (160) аналогично условие

$$|\beta_1| \leqslant 2\sigma_{\beta_1}. \tag{168}$$

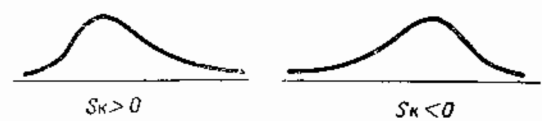

Рис. 6

Недопустимые отклонения Sk от нуля в большинстве случаев означают наличие в результатах наблюдений односторонне действующих ошибок. Понятие односторонне действующих ошибок доступно без дополнительных пояснений, однако к ним мы еще вернемся ниже.

Пример. При исследовании светодальномера одна и та же линия была измерена 16 раз. Пользуясь данными, помещенными в табл. 5, вычислить центральные моменты μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение σ, эксцесс E, среднее квадратическое отклонение эксцесса σ_E, асимметрию Sk и среднее квадратическое отклонение асимметрии σ_{Sk}. В графе «Вычисление» табл. 5 приведен расчет числовых характеристик.

Как нетрудно видеть из результатов вычислений, эксцесс и асимметрию здесь можно считать несущественными, а эмпирическое распределение — близким к нормальному.

§ 16. ОБОСНОВАНИЕ ЗАКОНА НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

До сих пор речь шла о законе нормального распределения вероятностей преимущественно для числа появлений события при многократных испытаниях, точнее — для отклонений этого числа от его вероятнейшего значения. В качестве аргумента функции распределения было принято значение

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \tag{77}$$

однако при наблюдениях каких-либо иных величин (а не числа появлений события, в частности) аргумент x по формуле (77) определить нельзя. Найдем формулу, позволяющую определять аргумент x функции нормального распределения для любой многократно наблюденной случайной величины.

В основу вывода искомой формулы возьмем формулу (80)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Delta x,$$

где

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{и} \quad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Перепишем формулу (80) в виде

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{169}$$

где P_x — вероятность значения x.

Так как

$$dx = \frac{1}{\sqrt{npq}},$$

то с увеличением числа испытаний n вероятность P_x будет неограниченно уменьшаться.

Представим теперь аргумент x в виде

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\frac{k}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{pq}}\left(\frac{k}{n} - p\right).$$

Обозначим

$$\frac{k}{n} - p = z; \qquad \sqrt{\frac{n}{2pq}} = h_0. \tag{170}$$

Тогда можем написать

$$x = h_0\sqrt{2}\,z; \quad dx = h_0\sqrt{2}\,dz. \tag{171}$$

Подставляя значение x и dx из (171) в формулу (169), получим

$$P_z = \frac{h_0}{\sqrt{\pi}} e^{-h_0^2 z^2} dz \tag{172}$$

и в интегральной форме

$$P_{z_1}^{z_2} = \frac{h_0}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-h_0^2 z^2} dz. \tag{173}$$

В качестве аргумента функции распределения, выраженной формулами (172) и (173), служит

$$z = \frac{k}{n} - p,$$

т. е. отклонение значения случайной величины (относительной частоты) от ее математического ожидания — вероятности

$$M\left(\frac{k}{n}\right) = p.$$

Учитывая рассмотренный частный случай, можем написать для любой случайной величины X, подчиняющейся закону нормального распределения

$$P_X = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} dz, \tag{174}$$

$$P_{x_1}^{x_2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-h^2 z^2} dz, \tag{175}$$

где

$$z = X - M(X), \quad z_i = x_i - M(X).$$

Однако если в формулах (172) и (173) параметр h_0 нам известен, то в формулах (174) и (175) параметр h остается пока неизвестным. Выясним его смысл.

Очевидно, что вероятности разных значений случайной величины зависят от степени разброса этих значений. Поэтому должна существовать связь параметра h с характеристикой указанного разброса, т. е. с дисперсией σ^2. Установим эту связь.

По определению дисперсии (140) и (143)

$$D(X) = \sigma^2 = M\{[X - M(X)]^2\}.$$

Но $X - M(X) = z$, поэтому

$$\sigma^2 = M(z^2),$$

т. е.

$$\sigma^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-h^2 z^2} dz. \tag{176}$$

Возьмем интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-h^2 z^2} dz = -\frac{1}{2h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{z}\, de^{-h^2 z^2} = -\frac{1}{2h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} z\, de^{-h^2 z^2}, \tag{177}$$

учитывая, что

$$de^{-h^2 z^2} = -2h^2 z e^{-h^2 z^2} dz.$$

Выражение

$$z\, de^{-h^2 z^2}$$

можно проинтегрировать по частям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z\, de^{-h^2 z^2} = z e^{-h^2 z^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 z^2} dz. \tag{178}$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$ze^{-h^2z^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{z\to+\infty}\frac{z}{e^{h^2z^2}} - \lim_{z\to-\infty}\frac{z}{e^{h^2z^2}} =$$

$$= \lim_{z\to+\infty}\frac{1}{2h^2ze^{h^2z^2}} - \lim_{z\to-\infty}\frac{1}{2h^2ze^{h^2z^2}} = 0. \tag{179}$$

Равенство (178) теперь перепишем так

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z\,de^{-h^2z^2} = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2z^2}dz. \tag{180}$$

Обозначая

$$hz = u, \tag{181}$$

откуда

$$dz = \frac{du}{h}, \tag{182}$$

и учитывая, что пределы интегрирования не изменятся, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z\,de^{-h^2z^2} = -\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = -\frac{\sqrt{\pi}}{h}, \tag{183}$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi} \quad \text{(интеграл Пуассона)}. \tag{184}$$

Обращаясь теперь к формуле (177), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2e^{-h^2z^2}dz = \left(\frac{-1}{2h^2}\right)\left(\frac{-\sqrt{\pi}}{h}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3} \tag{185}$$

и, наконец, согласно выражению (176)

$$\left.\begin{aligned} &\sigma^2 = \frac{1}{2h^2}, \\ \text{или}\quad & \\ &h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}. \end{aligned}\right\} \tag{186}$$

Формулы (186) устанавливают связь параметра закона нормального распределения значений любой случайной величины с ее дисперсией.

Выразим теперь h^2 через σ^2 и h через σ в формуле (174)

$$P_X = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2}dz. \tag{187}$$

Обозначим

$$\frac{z}{\sigma} = x; \qquad \frac{dz}{\sigma} = dx. \tag{188}$$

Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} P_X &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx; \\ P_{-t}^{+t} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi(t), \end{aligned}\right\} \tag{189}$$

где $\pm t$ — пределы интегрирования и аргумент функции интеграла вероятностей, значения которого даны в прил. 1, в соответствии с формулой (89).

Таким образом, для получения интегралов вероятностей для любой случайной величины X необходимо знать $M(X)$ и среднее квадратическое отклонение распределения σ. Тогда аргументами функции $\Phi(t)$, а стало быть и соответствующих таблиц будут служить нормированные случайные величины, которые иногда называют нормированными значениями, коэффициентом кратности

$$t = \frac{z}{\sigma}, \tag{190}$$

где

$$z = X - M(X).$$

Выше, в § 15, выясняя физический смысл симметричных пределов интегрирования $\pm t$ в формуле (86), мы путем логических рассуждений пришли к тому же самому, выраженному формулами (156) и (157).

Полученные формулы (186), (189) и (190) имеют исключительно важное значение для практики. Они позволяют пользоваться законом нормального распределения для решения задач, связанных с любыми случайными величинами X, подчиняющимися этому закону. Для определения аргумента

$$t_i = \frac{x_i - M(X)}{\sigma} \tag{191}$$

интегральной функции распределения или интеграла вероятностей необходимо знать две основные характеристики $M(X)$ и $\sigma^2 = M\{[X - M(X)]^2\}$. Точность этих двух параметров, а следовательно, и эффективность применения теории вероятностей зависит от числа наблюдений случайной величины. При малом числе наблюдений полученные результаты исследования будут ненадежны.

§ 17. ПОНЯТИЕ О ДРУГИХ ВИДАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Практика показывает, что при анализе экспериментальных данных рассмотренные выше распределения — биномиальное и нормальное — не исчерпывают вопроса, так как иногда приходится иметь дело с наблюдаемыми величинами, по своей природе не подчиняющимися этим законам. Примером могут служить ошибки округлений, которые в некотором интервале распределяются равномерно.

Рассмотрим некоторые из распределений, связанных с нормальным.

Распределение Пуассона

Вывод формулы (76)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

базировался на предположении, что вероятность p постоянна и не близка к нулю (или единице). Если последнее условие о величине p не выполнено, формулу (76) применять нельзя; в этом случае $P_n(k)$ следует вычислять по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{k_0^k e^{-k}}{k!}, \tag{192}$$

где k_0 — вероятнейшее число появлений события при многократных испытаниях ($k_0 \approx np$).

Распределением Пуассона, или распределением редких событий, называется распределение случайной величины X, при котором она может принимать только целочисленные значения $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$ с вероятностями, определяемыми формулой (192), причем $k_0 \approx np$ небольшое, а n — число испытаний очень велико.

Функция распределения в данном случае имеет вид

$$P(X = k) = e^{-k_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_0^k}{k!}. \tag{193}$$

Заметим, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины в этом случае равны параметру распределения Пуассона, т. е.

$$M(X) = D(X) = np. \tag{194}$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины в случае распределения Пуассона равно

$$\sigma = \sqrt{np}. \tag{195}$$

Пример*. Предполагая, что число частиц золота, находящихся во взвешенном состоянии в растворе, распределяется по закону Пуассона, найти выражение этого закона по распределению частиц золота, наблюдавшихся через 2 с в оптически изолированной части пространства, приведенному в табл. 6.

Таблица 6

Число частиц x_i	Число интервалов n_i	Вычисления $x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})\, n_i$	$(x_i - \bar{x})^2\, n_i$
0	381	−1,42703	−543,7	775,9
1	568	−0,42703	−242,6	103,6
2	357	+0,57297	+204,6	117,2
3	175	+1,57297	+275,3	433,0
4	67	+2,57297	+172,4	443,6
5	28	+3,57297	+100,0	357,3
6	5	+4,57297	+22,9	104,7
7	2	+5,57297	+11,1	61,9
Итого	1583	Контроль	−786,3	$\Sigma = 2397{,}2$
	$\Sigma x_i n_i = 2259$		+786,3	
	$\bar{x} = 1{,}42703$		$\Sigma = 0{,}0$	

Решение. Вычислим среднюю арифметическую (математическое ожидание) и дисперсию случайной величины. В соответствии с данными табл. 6 имеем

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n}; \qquad \bar{x} = \frac{2259}{1583} = 1{,}42703 \approx 1{,}43;$$

$$\mu_2' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 n_i; \qquad \mu_2' = \frac{2397{,}2}{1583} = 1{,}51.$$

Довольно хорошее совпадение среднего арифметического $\bar{x}$ и момента μ_2', равных 1,43 и 1,51 соответственно, подтверждает предположение о наличии распределения Пуассона. Выражение для закона Пуассона в данном случае примет вид

$$P(X = k) = \frac{(1{,}43)^k e^{-1{,}43}}{k!}, \tag{196}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ — возможное количество частиц золота, находящихся во взвешенном состоянии в растворе, наблюдавшееся через 2 с в оптически изолированной части пространства. По формуле (196) можно вычислить вероятность для заданного числа k.

* Пример заимствован из книги *Карасева А. И.* Основы математической статистики. Росвузиздат, 1962.

Распределение χ^2

Часто возникает необходимость проверки гипотезы о законе распределения случайной величины X опытным путем. Степень согласия эмпирического и теоретического рядов распределения чисел появления случайной величины в этом случае эффективно характеризует критерий К. Пирсона

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i}, \qquad (197)$$

где N — число интервалов, в которых ведется подсчет числа появлений k_i случайной величины X; p_i — вероятность попадания случайной величины в заданный интервал; n — число значений случайной величины, полученной опытным путем.

Не вдаваясь в теорию данного вопроса, укажем, что в таблицах (прил. 4) для распределения χ^2 по числу степеней свободы r и вычисленному значению критерия согласия χ^2 находится вероятность p. Принято считать согласие эмпирического распределения с нормальным (гипотетическим) при

$$p > 0{,}5 \quad \text{— отличным,}$$
$$0{,}3 < p < 0{,}5 \quad \text{— хорошим,}$$
$$0{,}1 \leqslant p < 0{,}3 \quad \text{— удовлетворительным.}$$

В случае невыполнения приведенных условий гипотеза не принимается.

Число степеней свободы вычисляется как разность числа интервалов и числа учтенных при вычислении χ^2 условий (например, $\sum\limits_{i=1}^{N} np_i = \sum\limits_{i=1}^{N} k_i,\ \bar{x},\ \sigma_x$).

Пример. В таблице приведены сводные результаты 300 ошибок измерения диаметров валиков при выборочном контроле продукции прецизионного токарного автомата, настроенного на номинальный размер $D = 10{,}000$ мм (ошибки вычислялись как разность измеренного диаметра d_i и D, т. е. $\Delta_i = d_i - D$).

Необходимо оценить гипотезу о нормальном законе распределения ошибок Δ_i.

Решение. По таблице χ^2 (прил. 4) для $r = 10-3$ находим $p = 0{,}35$. Гипотеза о нормальном распределении подтвердилась. Были, кроме того, вычислены коэффициенты $k_1 = \frac{\sigma_\Delta}{|\bar{\Delta}|} = \frac{9{,}74\ \text{мкм}}{7{,}99\ \text{мкм}} = 1{,}22$ (теоретич. — 1,25) и $k_2 = \frac{\sigma_\Delta}{r} = \frac{9{,}74\ \text{мкм}}{6{,}90\ \text{мкм}} = 1{,}42$ (теоретич. — 1,48).

При рассмотрении количественных характеристик случайных величин отмечалось, что в практике встречаются случаи, когда распределения асимметричны и отличаются от нормального (показатель асимметрии $Sk' \neq 0$; эксцесс $E' \neq 0$). При небольших показателях асимметрии и эксцесса такие распределения могут быть выравнены при помощи распределения Шарлье. Число появлений

случайной величины x в заданном интервале Δx в этом случае вычисляется по формуле

$$k_0' = \frac{n\Delta x}{\sigma} \varphi(t) \left[1 + \frac{Sk'}{6}(t^3 - 3t) + \frac{E'}{24}(t^4 - 6t^2 + 3)\right], \qquad (198)$$

где Δx — величина интервала (x разбивается на одинаковые интервалы); $\varphi(t)$ — плотность вероятности нормального распределения, равная $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$$\bar{\Delta} = -0{,}45\ \text{мкм};\ \sigma_\Delta = 9{,}74\ \text{мкм}$$

Интервалы в границах $\Delta_i = t_i\sigma_\Delta$	k_i	$k_0 = np_i$	$p_i = \frac{1}{2} \times [\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})]$	$k_i - np_i$	$\frac{(k_i - np_i)^2}{np_i}$
$0 \div +0{,}5\sigma_\Delta$	44	57,4	0,191462	−13,4	3,13
$+0{,}5\sigma_\Delta - +1{,}0\sigma_\Delta$	53	45,0	0,149882	+8,0	1,42
$+1{,}0\sigma_\Delta - +1{,}5\sigma_\Delta$	29	27,6	0,091848	+1,4	0,10
$+1{,}5\sigma_\Delta - +2{,}0\sigma_\Delta$	9	13,2	0,044057	−4,2	1,34
$+2{,}0\sigma_\Delta - +3{,}5\sigma_\Delta$	6	6,8	0,022517	−0,8	0,09
$-3{,}5\sigma_\Delta - -2{,}0\sigma_\Delta$	6	6,8	0,022517	−0,8	0,09
$-2{,}0\sigma_\Delta - -1{,}5\sigma_\Delta$	17	13,2	0,044057	+3,8	1,09
$-1{,}5\sigma_\Delta - -1{,}0\sigma_\Delta$	31	27,6	0,091848	+3,4	0,42
$-1{,}0\sigma_\Delta - -0{,}5\sigma_\Delta$	47	45,0	0,149882	+2,0	0,09
$-0{,}5\sigma_\Delta - 0$	58	57,4	0,191462	+0,6	0,01
Σ	300	300	0,9995		$\chi^2 = 7{,}78$

Примечание. При выборе интервалов на концах распределения, где $np_i - k_0$ мало, такие группы рекомендуется* объединять так, чтобы $k_0 \geqslant 5$ или $k_0 > 10$. Г. Крамер [12, стр. 457] считает, что критерием χ^2 вообще не следует пользоваться, если наблюдений мало и нельзя выполнить условия, чтобы $k_0 > 10$. Однако, как показывает практика использования этого критерия согласия, наиболее обоснованной является приведенная рекомендация А. М. Длина, т. е. возможность использования критерия χ^2 даже тогда, когда в отдельных (специально укрупненных) интервалах $k_0 \geqslant 5$.

* См. *А. М. Длин.* Математическая статистика в технике. М., Советская наука, 1958 и *Н. В. Смирнов, Д. А. Белугин.* Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. М., Недра, 1969.

Критерий χ^2 в этом случае вычисляется так:

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \frac{(k_i - k_0')^2}{k_0'}. \qquad (197')$$

По таблице, приведенной в прил. 4, пользуясь χ^2 и числом степеней свободы r как аргументами (число степеней свободы представляет разность между числом интервалов и числом параметров: σ, Sk', E', $\bar{x}$), можно найти вероятность p и по ней судить о сходимости эмпирического и теоретического распределений. Величины k_i и k_0' можно сравнить и непосредственно.

При использовании формул интеграла вероятностей и интегральной функции предполагается, что n (число испытаний) достаточно большое. В этом случае среднее квадратическое отклонение распределения будет определено надежно. Однако иногда среднее квадратическое отклонение определяется по небольшому числу наблюдений (10—20) и, следовательно, само значение σ (или m) будет ошибочным. Так, П. И. Шилов,* основываясь на зависимости средней квадратической ошибки от числа наблюдений, выражаемой формулой

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}, \tag{199}$$

приводит значения (в %) этой ошибки (табл. 7).

Таблица 7

Число наблюдений n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
$m_m = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \cdot 100$ %	71	50	41	35	32	29	27	25	24	21

Продолжение табл. 7

Число наблюдений n	14	16	18	20	25	30	40	50	75	100
$m_m = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \cdot 100$ %	20	18	17	16	14	13	11	10	8	7

Из табл. 7 следует, что значение σ или m, определенное по небольшому числу наблюдений n, содержит большие ошибки (см. значение ошибок при n, равном 2—10).

В этих случаях, т. е. при малом числе испытаний ($n < 20$), рекомендуется пользоваться распределением Стьюдента.

Распределением Стьюдента при любом $n \geqslant 2$ называется распределение с плотностью распределения вероятностей

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \tag{200}$$

* *Шилов П. И.* Предельные ошибки результатов измерений и уравновешиваний.— Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, 1958, с. 3—14.

где Γ — гамма-функция; $(n-1)$ — число степеней свободы (в теории ошибок — число избыточных измерений); $t = \frac{X - M(X)}{\sigma}$ — нормированное значение случайной величины.

Как известно из алгебры, понятие факториала может быть распространено на любые числа x, в том числе и на комплексные, при помощи гамма-функции, определяемой двояко выражением (см. [7], стр. 195)

$$\Gamma(x) \left\{ \begin{array}{ll} = \int\limits_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dz & \text{(только при } x > 0), \\ = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} & \text{(для всех действительных чисел } x \text{ кроме } \{0, -1, -2, -3\ldots\}). \end{array} \right\} \tag{201}$$

Гамма-функция обладает рядом свойств, в частности,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

при n целом положительном. Этими свойствами воспользуемся для дальнейших рассуждений. Для целых положительных x

$$\Gamma(x+1) = x!$$

Функция распределения

$$F_S(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dt. \tag{202}$$

Чаще функция распределения $F_S(t)$ записывается в виде

$$F_S(t) = C \int\limits_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dt, \tag{203}$$

где постоянный множитель

$$C = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \tag{204}$$

Таблица значений

$$2C \int\limits_0^{t_p} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dt = p \tag{205}$$

приведена в прил. 5. С помощью таблиц значений t_p можно определять значение t_p по заданной вероятности p или вероятность $p\,(t<t_p)$.

П. И. Шилов в упомянутой выше статье приводит для $p=0{,}95$ и $p=0{,}99$ при $n\geqslant 2$ значения t_p (табл. 8)

Таблица 8

n	t_p		n	t_p	
	$t_{0,95}$	$t_{0,99}$		$t_{0,95}$	$t_{0,99}$
2	12,7	63,7	12	2,2	3,1
3	4,3	9,9	13	2,2	3,1
4	3,2	5,8	14	2,2	3,0
5	2,8	4,6	15	2,1	3,0
6	2,6	4,0	16	2,1	2,9
7	2,4	3,7	20	2,1	2,9
8	2,4	3,5	25	2,0	2,8
9	2,3	3,4	30	2,0	2,8
10	2,3	3,2	∞	1,96	2,58
11	2,2	3,2			

П. И. Шилов делает вывод, что к таблицам Стьюдента следует прибегать при $n\leqslant 10$; В. И. Романовский делает аналогичный вывод для $n<20$. Например, придерживаясь рекомендации П. И. Шилова для $n\geqslant 10$, можно прийти к выводу, что распределение Стьюдента мало отличается от нормального. В самом деле, при $n=10$, $t_{0,95}=2{,}3$ и $t_{0,99}=3{,}2$; при $n=20$ при тех же значениях $\Phi(t)$ находим: $t_{0,95}=2{,}09$ и $t_{0,99}=2{,}86$. Для нормального распределения, пользуясь таблицей значений интеграла вероятностей $\Phi(t)$ прил. 1, находим

$$\Phi(t_1)=0{,}95, \qquad t_1=1{,}96,$$

$$\Phi(t_2)=0{,}99, \qquad t_2=2{,}58.$$

При числе испытаний неограниченно большом, как следует из сравнения значений t_1 и t_2 с данными строки ∞ табл. 8, коэффициенты совпадают точно, т. е. распределение Стьюдента совпадает с нормальным. Практически же при степенях свободы $(n-1)=13$ с вероятностью 0,99, т. е. близкой к достоверности, $t=3{,}012$. Следовательно, использование в качестве допусков (например, для предельного значения невязки) $2m$ и $3m$ с вероятностью 0,95 и 0,99 вполне оправдано уже при $n>10$.

Равномерное распределение

При обработке результатов наблюдений часто приходится иметь дело со случайными величинами, возможные значения которых равновероятны в некотором конечном интервале. Выше указывалось, что таким распределением обладают, например, ошибки округлений. Такое распределение носит название **равномерного**. Плотность равномерного распределения случайной величины X выражается функцией

$$f_r(x)=\frac{1}{x_1-x_2}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\alpha} & \text{при } x_2<x<x_1\\ 0 & \text{вне этого интервала,}\end{cases} \tag{206}$$

где

$$x_1=a+\alpha; \quad x_2=a-\alpha;$$

a — абсцисса центра интервала.

График функции $f_r(x)$ представлен на рис. 7. Так как график функции $f_r(x)$ изображается прямоугольником, распределение часто называют **прямоугольным**.

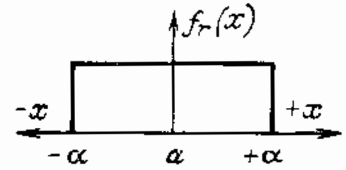

Рис. 7

Функция распределения $F_r(x)$ имеет вид

$$F_r(x)=\int\limits_{a-\alpha}^{a+\alpha}\frac{dx}{2\alpha}=1. \tag{207}$$

Найдем числовые характеристики равномерного распределения: математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. По определению математического ожидания (111) можем записать

$$M(X)=\int\limits_{a-\alpha}^{a+\alpha}x\,\frac{dx}{2\alpha}=\frac{1}{2\alpha}\int\limits_{a-\alpha}^{a+\alpha}x\,dx=\frac{x^2}{4\alpha}\Bigg|_{a-\alpha}^{a+\alpha}=$$
$$=\frac{1}{4\alpha}\left[(a+\alpha)^2-(a-\alpha)^2\right], \tag{208}$$

или

$$M(X)=\frac{1}{4\alpha}\left[(a+\alpha)^2-(a-\alpha)^2\right]=a. \tag{209}$$

Дисперсия по формуле (140) равна в этом случае

$$D(X)=M\,[X-M(X)]^2=M\,[X^2-2X\cdot M(X)+M(X)\cdot M(X)]=$$
$$=M(X^2)-M\,[2X\cdot M(X)]+M\,[M(X)\cdot M(X)],$$

или

$$D(X)=M(X^2)-2a^2+a^2=M(X^2)-a^2. \tag{210}$$

Но

$$M(X^2)=\int\limits_{a-\alpha}^{a+\alpha}x^2\,\frac{1}{2\alpha}\,dx=\frac{x^3}{6\alpha}\Bigg|_{a-\alpha}^{a+\alpha};$$

$$M(X^2)=\frac{x^3}{6\alpha}\Bigg|_{a-\alpha}^{a+\alpha}=\frac{1}{6\alpha}\left[(a+\alpha)^3-(a-\alpha)^3\right]. \tag{211}$$

После несложных преобразований в правой части (211) получим

$$M(X^2) = a^2 + \frac{\alpha^2}{3}. \tag{212}$$

С учетом выражения (212) дисперсия $D(X)$ из формулы (210) будет равна

$$D(X) = M(X^2) - a^2 = a^2 + \frac{\alpha^2}{3} - a^2 = \frac{\alpha^2}{3}. \tag{213}$$

Среднее квадратическое отклонение σ, следовательно, равно

$$\sigma = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}. \tag{214}$$

Напомним, что α — это наибольшая величина, на которую может отклоняться значение случайной величины от ее математического ожидания, т. е. α — это абсолютное значение предельного отклонения.

В книге В. Д. Большакова и П. А. Гайдаева * приведен алгебраический вывод формулы (214), основная суть которого состоит в следующем. Обозначим: α — предельная ошибка округления; m_0 — средняя квадратическая ошибка округления, вычисленная по формуле Гаусса (145); ε — элементарная (наименьшая) ошибка округления.

Очевидно, что в интервале от $-\alpha$ до $+\alpha$ ряд из возможных ошибок округления может быть представлен в виде

$$-n\varepsilon,\ -(n-1)\varepsilon,\ \ldots,\ -3\varepsilon,\ -2\varepsilon,\ -\varepsilon,\ 0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ \ldots,\ (n-1)\varepsilon,\ n\varepsilon, \tag{215}$$

где $-n\varepsilon = -\alpha$, $n\varepsilon = \alpha$, $2n+1$ — число ошибок ряда. Так как выражение (215) есть ряд истинных ошибок, по формуле Гаусса имеем

$$m_0^2 = \frac{2\{\varepsilon^2 + (2\varepsilon)^2 + (3\varepsilon)^2 + \ldots + (n\varepsilon)^2\}}{2n+1} = \frac{2\varepsilon^2}{2n+1}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2). \tag{216}$$

Из алгебры известно, что конечный числовой ряд

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{217}$$

Выражение (216) с учетом (217) примет вид

$$m_0^2 = \frac{\varepsilon^2 n(n+1)}{3}. \tag{218}$$

* *Большаков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 1977.

Учтя, что $\varepsilon^2 = \alpha^2/n^2$, перепишем формулу (218)

$$m_0^2 = \frac{\alpha^2(n+1)}{3n}$$

или

$$m_0^2 = \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^2}{3n} = \frac{\alpha^2}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{219}$$

При n большом в скобке правой части пренебрегаем дробью $\frac{1}{n}$ как малой по сравнению с 1.

Следовательно,

$$m_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \tag{220}$$

т. е. получен тот же результат, что и в формуле (214) (при n большом в формуле (214) $\sigma = m_0$).

Глава IV
ЭЛЕМЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

§ 18. ПОНЯТИЕ О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВЯЗЯХ

При математической обработке результатов наблюдений, производимых при конструировании и исследовании новых приборов и методов работ, а также при решении ряда других научно-технических задач часто приходится устанавливать зависимость полученных результатов от какой-либо главной причины (фактора) или от главного источника ошибок. Если зависимость между наблюдаемыми величинами будет установлена и выражена формулой, то ее можно использовать при предвычислении ожидаемой точности исследуемого прибора или для надлежащей организации наблюдений и обработки их результатов. При этом могут встретиться две формы связи: функциональная и статистическая. Ограничимся рассмотрением связей лишь между двумя величинами.

Функциональной связью между двумя переменными величинами x и y называют такую связь, при которой каждому значению x соответствует одно определенное значение y. Так, например, между объемом шара V и его радиусом R существует функциональная связь

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Статистической связью между двумя переменными x и y называют такую связь, при которой каждому значению x

соответствует распределение значений y, изменяющееся вместе с изменением x.

Пример. При испытании светодальномера СВВ-1 в 1953 г. были получены результаты, приведенные в табл. 9.

Если бы была возможность вместо табл. 9 привести все значения ошибок для каждого отдельного наблюдения, связь между D и Δ вообще не усматривалась бы. По данным же таблицы, в которой выписаны средние значения ошибок, можно видеть, что с увеличением D ошибка Δ растет при $D = 0{,}4—2{,}7$ и только при переходе D от 2,7 к 4,5 уменьшается. Следовательно, несмотря на имеющееся отклонение от выявленной закономерности, можно утверждать, что с увеличением измеряемого расстояния абсолютное значение средней ошибки имеет тенденцию увеличиваться.

Таблица 9

Номер серий	Число наблюдений в серии	Расстояние, измеренное СВВ-1 D, км	Средняя ошибка одного приема, вычисленная как среднее арифметическое из абсолютных значений ошибок в серии Δ, см
1	30	0,4	21
2	106	0,8	31
3	91	1,0	35
4	131	2,7	52
5	36	4,5	40

Выше рассмотрен пример, когда между средними значениями двух переменных величин существует статистическая связь. Задача исследователя сводится к тому, чтобы установить тесноту связи, т. е. оценить при помощи так называемого коэффициента корреляции степень близости статистической связи к функциональной и установить форму этой связи, выражаемую формулой, позволяющей предвычислять средние значения одной переменной по заданным значениям другой. Различают линейные и нелинейные статистические связи; в дальнейшем будут рассмотрены только линейные связи (линейная корреляция).

§ 19. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Коэффициент корреляции является мерой тесноты линейной корреляции и вычисляется по формуле

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}, \qquad (221)$$

где

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = k_{xy} \text{ — корреляционный момент,}$$

$$\begin{array}{c|c} x_i & x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \\ \hline y_i & y_1 y_2 y_3 \ldots y_n \end{array}$$

различные значения переменных x_i и y_i, полученные из наблюдений, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ — среднее арифметическое величины x; $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ — среднее арифметическое величины y; σ_x — среднее квадратическое отклонение x; σ_y — среднее квадратическое отклонение y; n — число наблюдений (значений x_i, y_i). Величины σ_x и σ_y вычисляются по формулам:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}, \qquad (222)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n}}. \qquad (223)$$

Таким образом, если предварительные графические построения покажут, что связь между x и y близка к линейной (точки на графике располагаются в прямолинейной области), то вычисляют средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$, разности $x_i - \bar{x}$ и $y_i - \bar{y}$ и по ним, пользуясь формулами (222) и (223), средние квадратические отклонения σ_x и σ_y (положительные значения корней) и, наконец, по формуле (221) вычисляют коэффициент корреляции.

§ 20. СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

Рассмотрим основные свойства коэффициента корреляции.

1. Коэффициент корреляции изменяется в пределах от -1 до $+1$, т. е. $-1 \leqslant r \leqslant +1$.

2. Когда коэффициент корреляции равен $+1$ или -1, между x и y существуют точные прямолинейные связи, т. е.

$$y = ax + c, \qquad x = by + d.$$

В случае, когда r со знаком «+», с увеличением или уменьшением x увеличивается или уменьшается y. Когда r со знаком «—», с увеличением x уменьшается y и с уменьшением x увеличивается y.

3. Если $r = 0$, между x и y прямолинейной корреляции не существует (нелинейная связь может существовать).

4. Чем ближе коэффициент корреляции r к $+1$ или -1, тем ближе корреляция между переменными x и y к функциональной связи; чем ближе коэффициент корреляции к 0, тем соответственно менее связаны между собой переменные x и y.

Естественно, возникает вопрос: с какой надежностью вычисляется само значение коэффициента корреляции и при каких условиях можно считать связь существующей, и наоборот. Возникает, таким образом, необходимость оценки надежности коэффициента корреляции.

При числе наблюдений $n \geqslant 50$ В. И. Романовский * рекомендует для среднего квадратического отклонения коэффициента корреляции применять формулу

$$\sigma_r \approx \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}. \qquad (224)$$

Связь считается установленной, если выполняется условие

$$|r| \geqslant 3\sigma_r. \qquad (225)$$

Наименьшая величина коэффициента корреляции $r_{\min}$, удовлетворяющего условию (225), в зависимости от числа наблюдений n может быть вычислена по формуле

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{n+36}-\sqrt{n}}{6}. \qquad (226)$$

П р и м е р. Пусть при вычислениях коэффициент корреляции оказался равным $r = +0{,}26$; $n = 394$.

Оценим точность коэффициента корреляции

$$\sigma_r = \frac{1-(0{,}26)^2}{\sqrt{394}} = 0{,}05.$$

С вероятностью 0,997 доверительный интервал для r будет

$$r \pm 3\sigma_r = 0{,}26 \pm 3 \cdot 0{,}05; \qquad +0{,}11 \leqslant r \leqslant +0{,}41. \qquad (227)$$

Вычислим

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{394+36}-\sqrt{394}}{6} = 0{,}17.$$

Нижняя граница коэффициента корреляции r в формуле (227) оказалась меньше минимального значения ($0{,}11 < 0{,}17$); следовательно, линейную корреляцию нельзя считать установленной, хотя условие формулы (225) выполнено ($0{,}26 > 0{,}15$).

Для оценки надежности коэффициента корреляции при $n < 50$ пользуются специальной функцией, так называемым к р и т е р и е м Ф и ш е р а (см. [5], стр. 67)

$$z = \frac{1}{2}\{\ln(1+r) - \ln(1-r)\}, \qquad (228)$$

которая подчиняется закону нормального распределения. Среднее

* *Романовский В. И.* Применение математической статистики в опытном деле. М.—Л., Гостехиздат, 1947.

квадратическое отклонение величины z вычисляется по формуле

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \qquad (229)$$

Значения величин z по вычисленным из опыта значениям коэффициента корреляции z могут быть вычислены непосредственно по формуле или по таблицам, приведенным в прил. 6.

П р и м е р. В табл. 10 помещены результаты испытания СВВ-1 в 1955 г. Определить коэффициент корреляции, характеризующий тесноту связи между измеренными длинами линий D и их ошибками (m_{20}), и оценить точность коэффициента корреляции, используя критерий Фишера.

Т а б л и ц а 10

Результаты наблюдений		Вычисление				
D_i, км	$\lvert m_{20}\rvert$, см	$\delta D_i = D_i - \overline{D}$, км	$\delta_{m_i} = m_i - \overline{m}$, см	δD_i^2	δm_i^2	$\delta_{m_i}\delta_{m_i}$
3,0	2,0	−2,6	−2,2			
3,6	5,0	−2,0	+0,8			
4,2	3,0	−1,4	−1,2			
4,6	4,0	−1,0	−0,2	Суммы Σ вычислены на ЭКВМ набором результатов		
5,6	6,0	0,0	+1,8			
5,7	3,0	+0,1	−1,2			
5,8	3,0	+0,2	−1,2			
8,0	4,0	+2,4	−0,2			
10,2	8,0	+4,6	+3,8			
$\overline{D} = 5{,}6$	$\lvert\overline{m}\rvert = 4{,}2$	−7,0	−6,2	Σ 40,7	27,6	+22,6
$\beta = +0{,}0333$	$\beta = 0{,}0222$	+7,3	+6,4			
		$\Sigma_к = +0{,}3$	+0,2			

На основании данных табл. 10 имеем $\sigma_D = 2{,}13$ км; $\sigma_m = 1{,}75$ см; $r = +0{,}67$; $z = 0{,}81$ (найдено по таблицам); $\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{9-3}} = 0{,}41$.

С вероятностью 0,68 ($t = 1$) величина z может принять значения

$$0{,}40 \leqslant z \leqslant 1{,}22. \qquad (230)$$

По той же таблице (прил. 6), пользуясь крайними значениями z из выражения (230), находим соответствующие им значения коэффициента корреляции

$$+0{,}38 \leqslant r \leqslant +0{,}84. \qquad (231)$$

Следовательно, с вероятностью 0,68 действительный коэффициент корреляции может быть заключен между 0,38 и 0,84.

Вычислим минимально допустимое значение коэффициента корреляции

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{9+36}-\sqrt{9}}{6} = 0{,}62.$$

Так как нижний предел r в выражении (231) меньше $r_{\min}$ ($0{,}40 < 0{,}62$), вопрос об установлении линейной корреляции нуждается в дополнительном исследовании.

Использование же формулы (224) для оценки надежности коэффициента корреляции в этом примере приводит к результату

$$\sigma_r = 0{,}18; \qquad 0{,}18 \cdot 3 < 0{,}67,$$

т. е. связь как бы установлена. Из этих противоречивых выводов следует, что при малом числе n оценка точности по формуле (224), впрочем как и по любой другой формуле, ненадежна.

§ 21. УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ

Для вывода эмпирической формулы, отражающей прямолинейную корреляцию между переменными x и y, применяется уравнение

$$y_i - \bar{y} = \rho_{y\,x}(x_i - \bar{x}), \qquad (232)$$

где $\rho_{y\,x}$ — коэффициент регрессии y на x, вычисляемый по формуле

$$\rho_{y\,x} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \qquad (233)$$

При прямолинейной корреляции между переменными x и y существует уравнение регрессии x на y, имеющее вид

$$x_i - \bar{x} = \rho_{x\,y}(y_i - \bar{y}), \qquad (234)$$

где $\rho_{x\,y}$ — коэффициент регрессии x на y, равный

$$\rho_{x\,y} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \qquad (235)$$

Однако во многих случаях уравнение вида (234), если исследовалась зависимость y от x, не имеет смысла; например, никто не станет по ошибкам измерений m_D (в рассмотренном выше примере) определять расстояние D.

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов регрессии при большом n вычисляется по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\rho_{y\,x}} &= \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}}; \\ \sigma_{\rho_{x\,y}} &= \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}}. \end{aligned}\right\} \qquad (236)$$

Уравнение (232) при практическом использовании целесообразно привести к виду

$$y_i = \rho_{y\,x}x_i + (\bar{y} - \rho_{y\,x}\bar{x}). \qquad (237)$$

Из формулы (237) легко видеть, что коэффициент регрессии — это тангенс угла наклона прямой, а постоянное слагаемое $(\bar{y} - \rho_{y\,x}\bar{x})$ — это отрезок, отсекаемый этой прямой на оси ординат.

Пример. В табл. 11 приведены расстояния D, измеренные светодальномером СВВ-1, и ошибки этих сторон Δ.

По данным табл. 11 вычислить коэффициент корреляции, коэффициент регрессии, оценить их точность с вероятностью не менее 0,90 и составить уравнение регрессии.

По данным, полученным при вычислении в табл. 11, имеем

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{61{,}47}{20}} = 1{,}75; \qquad \sigma_\Delta = \sqrt{\frac{39{,}20}{20}} = 1{,}40;$$

коэффициент корреляции по формуле (221) равен

$$r = \frac{+38{,}54}{20 \cdot 1{,}75 \cdot 1{,}40} = +0{,}79.$$

Оценим надежность коэффициента корреляции. Так как число наблюдений n сравнительно небольшое, для оценки надежности применим критерий Фишера z.

По таблице, помещенной в прил. 6, пользуясь коэффициентом корреляции $r = +0{,}79$ как аргументом, находим $z = 1{,}0714$.

Оценим надежность z по формуле (229)

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{20-3}} = 0{,}243.$$

Таблица 11

Результаты наблюдений		Вычисления				
D, км	$\lvert\Delta\rvert$, см	δD	$\delta\Delta$	δD^2	$\delta\Delta^2$	$\delta D\delta\Delta$
8,7	7,0	+3,8	3,2	14,44	10,24	+12,16
3,7	3,0	−1,2	−0,8	1,44	0,64	+0,96
6,0	4,0	+1,1	+0,2	1,21	0,04	+0,22
3,3	3,0	−1,6	−0,8	2,56	0,64	+1,28
5,1	4,0	−0,2	+0,2	0,04	0,04	+0,04
6,1	4,0	+1,2	+0,2	1,44	0,04	+0,24
2,7	3,0	−2,2	−0,8	4,84	0,64	+1,76
4,9	4,0	0,0	+0,2	0,0	0,04	0,00
3,1	4,0	−1,8	+0,2	3,24	0,04	−0,36
3,7	2,0	−1,2	−1,8	1,44	3,24	+2,16
5,7	6,0	+0,8	+2,2	0,64	4,84	+1,76
4,9	5,0	0,0	+1,2	0,0	1,44	0,00
5,6	3,0	+0,7	−0,8	0,49	0,64	−0,56
7,6	4,0	−2,7	+0,2	7,29	0,04	+0,54
4,2	3,0	−0,7	−0,8	0,49	0,64	+0,56
2,0	2,0	−2,9	−1,8	8,41	3,24	+5,22
4,0	2,0	−0,9	−1,8	0,81	3,24	+1,62
6,5	5,0	−1,6	+1,2	2,56	1,44	+1,92
7,2	6,0	−2,3	+2,2	5,29	4,84	+5,06
2,7	2,0	−2,2	−1,8	4,84	3,24	+3,96
4,9	3,80	−14,4	+11,2	Σ = 61,47	39,20	+38,54
(4,885)		−14,7	−11,2			
		$\Sigma_к$ = −0,3	0,0			

С вероятностью 0,90 ($t = 1{,}645$) величина z может принять значения

$$1{,}0714 - t\sigma_z \leqslant z \leqslant 1{,}0714 + t\sigma_z;$$

$$0{,}6717 \leqslant z \leqslant 1{,}4711.$$

Из таблицы (прил. 6) находим соответствующие крайним значениям z (0,6717 и 1,4711) значения коэффициента корреляции

$$+0{,}59 \leqslant r \leqslant +0{,}90. \tag{238}$$

Следовательно, с вероятностью не менее 0,90 действительный коэффициент корреляции может быть заключен между +0,59 и +0,90.

Минимальное значение r (при данном числе наблюдений $n = 20$)

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{20 + 36} - \sqrt{20}}{6} = 0{,}50.$$

Так как $0{,}50 < 0{,}59$, прямолинейную корреляцию можно считать установленной.

Определим σ_r по формуле (224), хотя, как было отмечено выше, она не совсем подходит в данном случае ($n < 50$)

$$\sigma_r \approx \left(\frac{1 - 0{,}79^2}{\sqrt{20}}\right) = \left(\frac{1 - 0{,}62}{\sqrt{20}}\right) = 0{,}085.$$

Как следует из неравенства (238), учитывая, что $t = 1{,}64$, σ_r', определенное с помощью критерия Фишера, равно

$$\sigma_r' \approx \left(\frac{0{,}90 - 0{,}59}{2 \cdot 1{,}64}\right) = 0{,}095. \tag{239}$$

Из сравнения σ_r' и σ_r следует, что формула (224) дает хорошие результаты при $n = 20$, хотя принято считать необходимым условием для ее применения $n \geqslant 50$.

Составим теперь уравнение регрессии Δ на D

$$\left.\begin{aligned} \Delta_i - \overline{\Delta} &= \rho_{\Delta/D}\left(D_i - \overline{D}\right), \\ \Delta_i &= \rho_{\Delta/D} D_i + \left(\overline{\Delta} - \rho_{\Delta/D}\overline{D}\right). \end{aligned}\right\} \tag{240}$$

Подставляя в формулу (240) численные значения r, σ_Δ, σ_D, $\overline{\Delta}$, $\overline{D}$, получим

$$\Delta_i = 0{,}79\,\frac{1{,}40}{1{,}75}\,D_i + \left(3{,}80 - 0{,}79\,\frac{1{,}40}{1{,}75}\,4{,}88\right);$$

$$\Delta_i = (0{,}63 D_i + 0{,}72) \text{ см},$$

где D_i — расстояния в километрах.

Оценим приближенно надежность коэффициента регрессии $\rho_{\Delta/D} = +0{,}66$

$$\sigma_{\rho_{\Delta/D}} = \left(\frac{\sigma_\Delta}{\sigma_D}\sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 3}}\right),$$

$$\sigma_{\rho_{\Delta/D}} = \left(\frac{1{,}40}{1{,}75}\sqrt{\frac{1 - 0{,}79^2}{20 - 3}}\right) = 0{,}12.$$

Следовательно,

$$\rho_{\Delta/D} \pm \sigma_{\rho_{\Delta/D}} = +0{,}63 \pm 0{,}12.$$

Доверительный интервал для коэффициента регрессии с доверительной вероятностью $P_\alpha = 0{,}90$ ($t_\alpha = 1{,}64$) будет иметь вид

$$p\,(+0{,}63 - t_\alpha 0{,}12 \leqslant \rho_{\Delta/D} \leqslant +0{,}63 + t_\alpha 0{,}12) = 0{,}90; \tag{241}$$

$$p\,(0{,}43 \leqslant \rho_{\Delta/D} \leqslant +0{,}83) = 0{,}90. \tag{242}$$

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ
ТЕОРИЯ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЙ

Глава V
ОШИБКИ НАБЛЮДЕНИЙ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК И КРИТЕРИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ

§ 22. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОШИБОК

При осуществлении наблюдений исследуемых объектов наблюдатель обычно получает ряд значений некоторых физических величин, которые затем используются при расчетах, проектировании и т. д. Следует отметить, что наблюдатель при этом ставит перед собой задачу получить указанные значения физических величин с возможно большей точностью или, иначе говоря, с возможно меньшей ошибкой. Однако понятия «возможно большая точность», «возможно меньшая ошибка» неконкретны, так как не сопровождены числовыми характеристиками. Очевидно, при числовой характеристике ошибки, равной нулю, наблюдения следует считать выполненными безошибочно (идеальный случай). Вместе с тем опыт свидетельствует, что безошибочных наблюдений не бывает, какими бы точными приборами они ни производились. Совершенствование приборов и методики работ, выбор наилучших условий наблюдений могут привести к повышению точности, т. е. к уменьшению отклонений полученных значений наблюденной величины от ее точного (истинного) значения. Вопрос, следовательно, сводится к определению порядка величин ошибок, ожидаемых при данных условиях наблюдений.

Предполагается, что определяемая величина в процессе наблюдений остается постоянной. Если наблюдают переменную величину, то результат наблюдения должен быть отнесен к точно обозначенному моменту времени. Причины возникновения ошибок наблюдений весьма разнообразны и зависят от точности приборов, внешних условий, при которых производятся наблюдения, от опытности наблюдателя, от характера определяемых физических величин и т. д.

В теории ошибок изучают причины возникновения и законы распределения ошибок наблюдений, а также свойства различных видов ошибок и разрабатывают методику наблюдений, позволяющую удержать эти ошибки в заданных пределах.

Более конкретно задачи, решаемые теорией ошибок, были сформулированы выше.

Перейдем к рассмотрению видов ошибок, наиболее часто встречающихся при наблюдениях.

§ 23. КЛАССИФИКАЦИЯ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЙ

По своим свойствам, а также по характеру влияния на результаты наблюдений и их функции ошибки подразделяют на грубые, систематические и случайные.

Грубые ошибки

К грубым ошибкам относят промахи в наблюдениях, вызываемые невнимательностью наблюдателя, неисправностью прибора, плохой организацией работы, неучетом влияния резко изменившихся внешних условий (температуры, ветра, видимости и т. п.).

Примером грубой ошибки может служить просчет при измерении угла (с отсчитыванием десятых долей минуты) на один градус, десять градусов и т. д.

Задача наблюдателя сводится к такой организации контроля наблюдений, чтобы грубые ошибки вовсе не имели места при исследовании объекта.

Для обнаружения грубых ошибок используют геометрические свойства наблюдаемых объектов (например, сумму углов в треугольнике), а также повторные наблюдения, которые можно выполнять с меньшей точностью, чем контролируемые результаты, но другим прибором или методом. Так, например, при линейных измерениях для обнаружения промаха — пропуска целого пролета, равного длине мерного прибора, достаточно измерить линию нитяным дальномером, иногда даже шагами.

Систематические ошибки

К систематическим относят такие ошибки наблюдений, которые входят в результат наблюдения по тому или иному закону в зависимости от источника возникновения ошибки. Систематические ошибки подразделяют на постоянные и односторонне действующие.

К постоянным систематическим ошибкам относят такие ошибки, которые в процессе наблюдений сохраняют свою величину и знак. Например, между действительной длиной мерного прибора и его номинальным значением существует какая-то разность. Эта разность будет постоянна для всех измерений; она будет, если ее не учитывать, искажать результаты измерений прямо пропорционально соотношению, например длины измеряемой линии и измерительного средства (ленты, рулетки и т. д.). Такого рода ошибку можно в значительной степени устранить из результатов измерений путем предварительного определения величины этой ошибки и введения поправки, примерно равной по величине систематической ошибке, но противоположной по знаку. Однако останется неустраненной ошибка определения указанной поправки — во многих случаях это ошибка эталонирования (эталонирование — сравнение рабочего мерного прибора с эталоном с целью определения фактического значения первого при заданных условиях). Часто оставшуюся ошибку, которая по своей природе будет тоже систематической, называют остаточным влиянием систематической ошибки, так как ее величина по модулю будет уже значительно меньшей.

Односторонне действующие ошибки — это более сложные систематические ошибки, которые при определенных условиях сохраняют знак, но изменяют свою величину в зависимости от изменения причины, которая их вызывает. Примером такого рода ошибки может служить ошибка, вызываемая неучетом температуры при измерении расстояния стальной лентой (рулеткой), если температура при этом колебалась в некоторых заметных пределах, но была, например, ниже температуры, при которой определялась эталонная длина ленты. Ошибка в этом случае все время будет сохранять один знак («+»), но величина ее в каждом пролете будет изменяться с изменением температуры. Односторонне действующие систематические ошибки могут быть изучены, предварительно определены или вычислены по данным, характеризующим причину, от которой они зависят, а основная часть их может быть исключена из результатов наблюдений путем введения поправок. Некоторые систематические ошибки могут быть устранены из результатов наблюдений путем организации «симметричных» наблюдений, в которых эти ошибки, примерно одинаковые по абсолютной величине, действуют во взаимно противоположных направлениях. В этом случае среднее из полученных результатов почти свободно от систематических ошибок. Примером такого рода может служить коллимационная ошибка при измерениях горизонтальных углов теодолитом, когда при визировании по одному направлению при двух положениях зрительной трубы (при «круге лево» и «круге право») среднее из отсчетов свободно от этой ошибки. Следует подчеркнуть, что полностью устранить систематические ошибки из результатов наблюдений практически невозможно.

В любом случае наблюдатель должен стремиться обеспечить условия, при которых основная часть систематической ошибки была бы исключена из результатов наблюдения, а остаточное влияние систематических ошибок было бы ничтожно малым. Это, конечно, удается сделать не всегда, подчас приходится перестраивать организацию работ с целью выявления систематических ошибок.

Случайные ошибки

Случайные ошибки наблюдений могут служить одним из наиболее ярких примеров случайной величины.

Под случайной ошибкой здесь и далее будем подразумевать разность между наблюденным значением случайной величины x_i и истинным (точным) значением X при условии исключения из результатов наблюдения влияния систематических ошибок, т. е.

$$\Delta_i = x_i - X \, (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (243)$$

В зависимости от применяемого при наблюдениях прибора, его точности, метода работ, внешних условий, квалификации наблюдателя и т. д. величина случайной ошибки будет меняться в процессе наблюдений, причем заранее нельзя указать, какое именно значение примет эта ошибка при данном наблюдении. Неучтенные колебания факторов, обусловливающих весь комплекс условий наблюдений, приводят к случайному изменению получаемых результатов.

Для дальнейшего изложения условно примем, что в любых результатах наблюдений грубые ошибки отсутствуют, основная часть систематических ошибок исключена из этих результатов, а остаточные систематические ошибки ничтожно малы.

Свойства случайных ошибок наблюдений проявляются при массовых испытаниях и могут быть характеризованы следующим образом.

Первое свойство. *Для ряда результатов наблюдений с известным параметром распределения абсолютные величины случайных ошибок с заданной вероятностью p не превосходят определенного предела.*

Очевидно, абсолютные величины ошибок с вероятностью $q = 1-p$ превысят этот предел или будут равны ему.

Пользуясь понятиями интеграла вероятностей (89) и вероятнейшим числом появлений события при многократных испытаниях (56), а также значениями $\Phi(t)$ из табл. 3 по формуле $k_0 \approx [1-\Phi(t)]\, n$ легко подсчитать, что, например, из 100 ошибок 32 в среднем превышают m (m — средняя квадратическая ошибка), 5 из 100 превышают $2m$; 1 из 100 превышает $2{,}5\, m$; 3 из 1000 превышают $3m$ и т. д.

В зависимости от комплекса условий наблюдений принимают такое значение вероятности q, которое считают ничтожно малым.

Второе свойство. *Положительные и отрицательные случайные ошибки равновозможны, т. е. они одинаково часто встречаются при наблюдениях*

$$p(\Delta > 0) = p(\Delta < 0) = \frac{1}{2}. \tag{244}$$

Третье свойство. *Среднее арифметическое из алгебраической суммы значений случайных ошибок при неограниченном возрастании числа наблюдений имеет пределом нуль*, т. е.

$$\text{вер.} \lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0. \tag{245}$$

На основании формул (117) и (245) можем записать

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta]}{n} = M(\Delta) = 0. \tag{246}$$

Отсюда третье свойство случайных ошибок окончательно можно сформулировать так: *математическое ожидание случайной ошибки равно нулю.*

Четвертое свойство. *Малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются при наблюдениях чаще, чем большие.*

В подавляющем большинстве случаев, встречающихся в практике обработки результатов наблюдений, случайные ошибки подчиняются закону нормального распределения вероятностей. Наглядным проявлением этого закона являются перечисленные выше свойства случайных ошибок, которым почти всегда достаточно хорошо отвечают исследуемые ряды ошибок наблюдений.

Пример. При исследовании точности съемки рельефа в разных условиях и на разных участках было получено 1759 ошибок обобщения рельефа при съемке. Не вдаваясь в природу происхождения этих ошибок, приведем табл. 12, по данным которой проследим закономерности ошибок в опытном ряду.

Как видно из таблицы, во всех 12 опытных рядах ошибки обобщения рельефа хорошо отвечают свойствам случайных ошибок, а именно: почти не превышают величины, равной утроенной средней квадратической ошибки $3m$; число положительных и отрицательных ошибок примерно одинаково; среднее арифметическое из алгебраической суммы случайных ошибок (245) во всех рядах может считаться малым по сравнению со средней квадратической ошибкой m; малые по абсолютной величине ошибки встречаются чаще, чем большие.

Таблица 12

Наименование	Номера участков						
	1	2	3	4	5	6	7
Средняя квадратическая ошибка обобщения рельефа, см	3,5	5,2	5,4	7,0	8,0	4,0	4,7
Число всех ошибок	220	161	115	100	59	95	93
Число положительных ошибок	112	75	48	45	30	59	45
Число отрицательных ошибок	95	82	63	50	29	33	40
Число нулевых ошибок	13	4	4	5	0	3	8
Число ошибок в интервалах:							
$0-m$	162	108	81	73	37	69	66
$m-2m$	47	46	29	21	21	23	20
$2m-3m$	9	7	5	5	1	3	7
Число ошибок, превышающих по абсолютной величине $3m$	2	0	0	1	0	0	0
Сумма положительных ошибок, см	352	351	248	307	189	192	182
Сумма отрицательных ошибок, см	254	358	220	225	208	113	154
Алгебраическая сумма ошибок, см	+98	—7	+28	+82	—19	+79	+28
Среднее арифметическое из суммы ошибок, см	+0,4	0	+0,2	+0,8	—0,3	+0,8	+0,3

Наименование	Номера участков					Всего
	8	9	10	11	12	
Средняя квадратическая ошибка обобщения рельефа, см	5,1	5,4	5,4	8,0	8,1	
Число всех ошибок	104	115	353	236	108	1759
Число положительных ошибок	45	54	150	119	53	835
Число отрицательных ошибок	56	55	185	110	53	851
Число нулевых ошибок	3	6	18	7	2	73
Число ошибок в интервалах:						
$0-m$	67	74	256	169	73	1235
$m-2m$	35	35	76	54	31	438
$2m-3m$	2	6	17	13	4	79
Число ошибок, превышающих по абсолютной величине $3m$	0	0	4	0	0	7
Сумма положительных ошибок, см	178	226	657	782	369	
Сумма отрицательных ошибок, см	278	270	793	719	336	
Алгебраическая сумма ошибок, см	−100	−44	−136	+63	+33	
Среднее арифметическое из суммы ошибок, см	−1,0	−0,4	−0,4	+0,3	+0,3	

Способы оценки приближения действительного распределения к нормальному позволяют дать количественные характеристики степени этого приближения, приведенные в табл. 13.

Таблица 13

Интервалы ошибок	Число ошибок			Относительная частота Q_i	Вероятность p_i	Разность $Q_i - p_i$
	в опытном ряду D	в теоретическом ряду T	разность $D-T$			
$0-m$	1235	1206	+29	0,702	0,686	+0,016
$m-2m$	438	481	−43	0,249	0,272	−0,023
$2m-3m$	79	70	+9	0,045	0,039	+0,006
$>3m$	7	2	+5	0,004	0,003	+0,001
Σ	1759	1759	0	1,000	1,000	0

Данные этой таблицы позволяют считать рассматриваемое распределение нормальным.

§ 24. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК

Возможные (конкретные) значения случайной ошибки нельзя предвычислить заранее, можно лишь указать границы, в которых она изменяется. Следовательно, случайная ошибка, как непрерывная случайная величина, может вполне характеризоваться законом распределения вероятностей случайных ошибок. Этот закон, как известно, характеризует объективно существующую связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления при многократных испытаниях.

Закон распределения случайной ошибки, представленный в виде функции распределения, может быть записан в общем виде

$$F(\Delta) = P(\alpha \leqslant \Delta), \qquad (247)$$

где $F(\Delta)$ — интегральная функция распределения ошибок Δ.

Таким образом, функцией распределения $F(\Delta)$ случайной ошибки α является вероятность того, что случайная ошибка α не превысит величины Δ.

Плотность вероятности распределения случайной ошибки по определению будет равна

$$\lim_{\delta\Delta \to 0} \frac{F(\Delta + \delta\Delta) - F(\Delta)}{\delta\Delta} = \varphi(\Delta), \qquad (248)$$

где $\delta\Delta$ — приращение случайной ошибки.

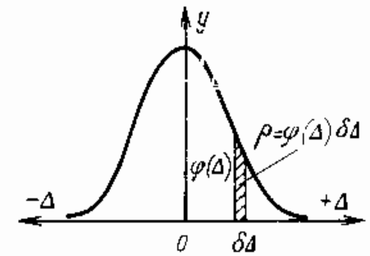

Рис. 8

Согласно рис. 8 вероятность того, что случайная ошибка α примет значение, заключенное между $\Delta + \delta\Delta$ и Δ, может быть представлена в виде

$$P(\Delta \leqslant \alpha \leqslant \Delta + \delta\Delta) = \varphi(\Delta) \cdot \delta\Delta. \qquad (249)$$

Примем обозначение для $\varphi(\Delta) \cdot \delta\Delta$, которого и будем придерживаться,

$$p = \varphi(\Delta) \cdot \delta\Delta. \qquad (250)$$

Геометрически вероятность p в выражении (250) представляет на рис. 8 площадь заштрихованного элементарного участка при бесконечно малом значении $\delta\Delta$.

Прежде чем перейти к дальнейшим рассуждениям, приведем без доказательства важную теорему: «*Если случайные ошибки удовлетворяют постулату Гаусса, то законом распределения случайных ошибок является нормальный закон*». Постулат Гаусса состоит в свою очередь в том, что наиболее вероятным значением искомой величины является среднее арифметическое из результатов ее повторных наблюдений (если учитывать только случайные ошибки).

Производная (248) от непрерывной площади $F(\Delta)$ согласно теореме Лейбница—Ньютона, как известно, есть ордината. Воспользуемся этим положением для получения формулы для вычисления ординат кривой распределения ошибок * (кривой нормального распределения) по заданным значениям Δ.

* Для краткости говорят: «кривой ошибок».

Обратимся к понятию нормированной случайной ошибки, введенному раньше (§ 15), т. е. примем

$$t = \frac{\Delta}{m}. \qquad (251)$$

Пусть

$$dF(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \qquad (252)$$

Тогда, принимая во внимание выражение (251), имеем

$$dF(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{m}\right)^2} \frac{d\Delta}{m}. \qquad (253)$$

Ордината кривой ошибок, как функция значений случайных ошибок Δ, равна

$$y = \frac{dF\left(t = \frac{\Delta}{m}\right)}{d\Delta} = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{m}\right)^2}. \qquad (254)$$

Обозначим в соответствии с формулами (186)

$$\frac{1}{m\sqrt{2}} = h. \qquad (255)$$

Смысл постоянной h, обычно называемой мерой точности, выясним несколько позднее.

С учетом выражения (255) уравнение для ординаты y примет вид

$$\varphi(\Delta) = y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}. \qquad (256)$$

Пример. Вычислить значения ординат кривой нормального распределения для ошибок $\Delta = 0,\ m,\ m\sqrt{2},\ 2m,\ 3m$, если средняя квадратическая ошибка $m = 0{,}47''$, и построить кривую ошибок.

Вычисления y проконтролировать по таблицам прил. 3.

Решение. а) Вычисление ординат по формуле (256)

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \quad (e = 2{,}718).$$

Составим табл. 14

б) Построение кривой ошибок (рис. 9).

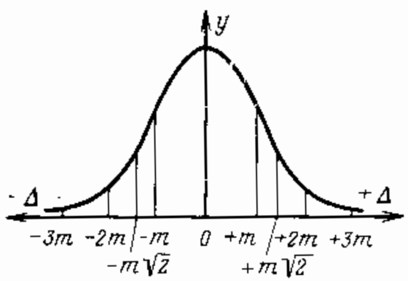

Рис. 9

При построении кривой примем следующие масштабы:

$y = 0{,}849$ соответствует 2,23 см;
$\Delta = m$ » 0,65 см.

Произведем вспомогательные вычисления; в соответствии с принятыми масштабами получим табл. 15.

Заменяя в формуле (250) $\delta\Delta$ на $d\Delta$ (при $\delta\Delta \to 0$), получим

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta. \qquad (257)$$

Таблица 14

Заданное значение Δ_i	h	y	Контроль $y = hy'$	y'	Вспомогательные вычисления	
					$-h^2\Delta_i^2$	t_i
0	1,504	$\frac{1{,}504}{\sqrt{\pi}} e^0 = 0{,}849$	0,848	0,5641	0	0
m		$\frac{1{,}504}{\sqrt{\pi}} e^{-0{,}50} = 0{,}515$	0,514	0,342	−0,50	1
$m\sqrt{2}$		$\frac{1{,}504}{\sqrt{\pi}} e^{-1{,}0} = 0{,}312$	0,314	0,209	−1,0	1,41
$2m$		$\frac{1{,}504}{\sqrt{\pi}} e^{-2{,}0} = 0{,}115$	0,114	0,076	−2,0	2,0
$3m$		$\frac{1{,}504}{\sqrt{\pi}} e^{-4{,}5} = 0{,}0094$	0,0095	0,0063	−4,5	3,0

Примечание. $\lg e^{4,5} = 4{,}5 \lg e$; $\lg e^{4,5} = 4{,}5 \cdot 0{,}434 = 1{,}95$; $e^{4,5} = 90$; $e^{-4,5} = \frac{1}{90}$.

Таблица 15

Ордината		Абсцисса	
y	y, см	Δ	Δ, см
0,849	2,23	0	0
0,515	1,35	m	0,65
0,312	0,82	$m\sqrt{2}$	0,92
0,115	0,30	$2m$	1,30
0,0094	0,025	$3m$	1,95

Здесь P — вероятность появления случайной ошибки Δ для каждого отдельного ее значения, стремящаяся к нулю.

Исходя из формулы (257), получим интеграл ошибок, выражающий вероятность того, что случайная ошибка будет заключена между $-\alpha$ и $+\alpha$, и равный

$$P_\alpha = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-h^2\Delta^2} d\Delta. \qquad (258)$$

Однако в расчетах рекомендуется пользоваться нормированной случайной ошибкой и для вычисления вероятностей применять интеграл вероятностей (89), для которого составлена таблица, приведенная в прил. 1.

§ 25. СВОЙСТВА КРИВОЙ ОШИБОК (КРИВОЙ ГАУССА)

Кривая ошибок, как было указано ранее, задается уравнением (256) и показана на рис. 10.

Эта кривая обладает следующими свойствами.

Первое свойство. *Функция $\varphi(\Delta)$ четная, т. е.*

$$\varphi(+\Delta) = \varphi(-\Delta), \tag{259}$$

и кривая ошибок в силу этого симметрична относительно оси ординат. Свойство очевидно.

Второе свойство. *Так как ни при каких значениях Δ, положительных или отрицательных, функция $\varphi(\Delta)$ отрицательных значений не принимает и в нуль не обращается, кривая ошибок лежит над осью абсцисс.* Свойство очевидно.

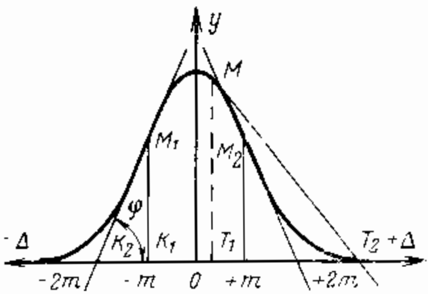

Рис. 10

Третье свойство. *Функция $\varphi(\Delta)$ имеет максимум при значении случайной ошибки, равном нулю ($\Delta = 0$).*

Докажем это свойство, для чего найдем первую производную $y' = \varphi'(\Delta)$ и, приравняв ее к нулю, определим значение переменной Δ, обращающей первую производную в нуль. Итак, согласно формуле (256),

$$\varphi'(\Delta) = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\Delta e^{-h^2\Delta^2}. \tag{260}$$

Приравняв правую часть формулы (260) к нулю

$$-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\Delta e^{-h^2\Delta^2} = 0, \tag{261}$$

видим, что условие (261) может быть выполнено только при $\Delta = 0$, что и требовалось доказать.

Четвертое свойство. *Кривая ошибок имеет две точки перегиба: одну справа и одну слева от оси ординат, причем эти точки соответствуют значению случайной ошибки, равному средней квадратической ошибке, т. е. $|\Delta| = m$.*

Для отыскания абсциссы точек перегиба найдем вторую производную $\varphi''(\Delta)$, для чего воспользуемся первой производной $\varphi'(\Delta)$ из формулы (261)

$$\varphi''(\Delta) = [\varphi'(\Delta)]' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2} + \frac{4h^5\Delta^2}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}. \tag{262}$$

Преобразуем правую часть производной $\varphi''(\Delta)$ в формуле (262) и, приравняв ее к нулю, найдем значение переменной Δ, обращающее вторую производную в нуль, т. е.

$$\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}(2h^2\Delta^2 - 1) = 0. \tag{263}$$

Условие (263) будет выполнено, если один из сомножителей равен нулю. Из простого анализа левой части условия (263) вытекает, что единственно возможно

$$(2h^2\Delta^2 - 1) = 0. \tag{264}$$

Из формулы находим

$$\Delta = \frac{1}{h\sqrt{2}}. \tag{265}$$

Но так как мера точности

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}},$$

то с учетом этого по формуле (265) имеем

$$\Delta = m. \tag{266}$$

Таким образом, абсцисса точек перегиба M_1 и M_2 (см. рис. 10) равна средней квадратической ошибке.

Пятое свойство. *Касательные к кривой в точках перегиба отсекают на оси абсцисс отрезки, равные удвоенной средней квадратической ошибке ($2m$).*

Докажем это свойство. Из рис. 10 следует, согласно четвертому свойству кривой, что отрезок прямой, концами которого являются начало координат (точка O) и основание ординаты точки перегиба (точка M_1), равен m. Для доказательства пятого свойства остается определить, чему равен отрезок

$$K_1K_2 = x = ?$$

Из прямоугольного треугольника $M_1K_1K_2$, в котором известны

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\varphi = \varphi'(\Delta), \\ &y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2} \quad (\text{причем } \Delta = m), \end{aligned}\right\} \tag{267}$$

имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \tag{268}$$

или

$$\varphi'(\Delta) = \frac{y}{x}.$$

Из формул (268) и (260) следует

$$x=\frac{y}{\varphi'(\Delta)}=\frac{\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}}{-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\Delta e^{-h^2\Delta^2}};\qquad x=\pm\frac{1}{2h^2\Delta}. \qquad (269)$$

В формуле (269), как известно,

$$h=\frac{1}{m\sqrt{2}},\qquad \Delta=m,$$

следовательно,

$$x=m. \qquad (270)$$

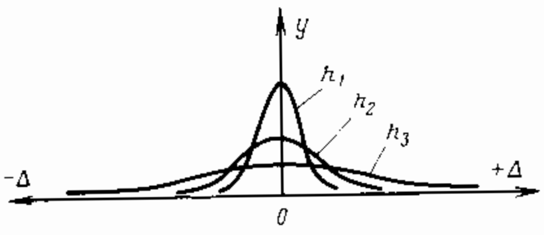

Рис. 11

В более общем виде пятое свойство формулируется следующим образом ([22], стр. 527): *произведение абсциссы на подкасательную в любой точке кривой ошибок есть величина постоянная, равная квадрату средней квадратической ошибки.*

В вышеприведенных рассуждениях подкасательной является отрезок K_1K_2 (для точки кривой M_1), абсцисса этой точки $OK_1=m$, но так как доказано, что $K_1K_2=m$, то

$$K_1K_2\cdot OK_1=m^2. \qquad (271)$$

Для произвольной точки M можем записать

$$T_1T_2\cdot OT_1=m^2. \qquad (272)$$

Сопоставляя свойства кривой ошибок и свойства случайных ошибок (§ 23), легко установить между ними непосредственную связь.

В силу того, что кривая ошибок является частным случаем кривой нормального распределения, рассмотренные выше свойства кривой ошибок можно распространить на кривую нормального распределения с параметром $\sigma=1$.

Выясним смысл и значение меры точности h. Если в формуле (257) для ординаты кривой ошибок принять $\Delta=0$, то легко видеть, что ордината

$$y_0=\frac{h}{\sqrt{\pi}}, \qquad (273)$$

т. е. положение вершины кривой в полной мере определяется величиной h.

Из формулы (273) нетрудно установить, что если $h_3<h_2<h_1$ (рис. 11), то параметру h_1 соответствует более высокое положение вершины кривой ошибок и h_3 — более низкое, чем параметру h_2. Но так как площадь между кривой ошибок и осью абсцисс в пределах $\pm\infty$ во всех трех случаях равна единице, то большему параметру соответствует более «узкая» в направлении оси ординат кривая, т. е. меньший разброс (рассеивание) ошибок, более высокая точность наблюдений. Таким образом, большему параметру h_1 соответствует большая точность наблюдений, т. е. меньшие средние квадратические ошибки. Поэтому параметр h и называют м е р о й т о ч н о с т и. Для вычисления ординат кривой ошибок по формуле (257) можно воспользоваться таблицами, приведенными в прил. 3.

§ 26. ДРУГИЕ КРИТЕРИИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ПРИ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ

Кроме средней квадратической ошибки m, при оценке точности применяются иногда и другие критерии, а именно: средняя ошибка и срединная ошибка.

С р е д н е й о ш и б к о й ϑ называется среднее арифметическое из суммы абсолютных значений случайных ошибок, т. е.

$$\vartheta=\frac{[|\Delta|]}{n}, \qquad (274)$$

где

$$[|\Delta|]=|\Delta_1|+|\Delta_2|+\ .\ .\ .\ +|\Delta_n| —$$

сумма абсолютных значений случайных ошибок.

Срединной (в е р о я т н о й) о ш и б к о й r называется такая величина, больше которой и меньше которой по абсолютной величине ошибки в ряде наблюдений равновозможны. Как следствие, вероятность срединной ошибки

$$p(|\Delta|\leqslant r)=\frac{1}{2}. \qquad (275)$$

Из определения срединной ошибки вытекает способ ее отыскания: если все полученные ошибки Δ_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ расположить в ряд по убывающим или возрастающим значениям абсолютных величин, то срединная ошибка окажется в середине ряда при n нечетном или берется как среднее из двух ближайших ошибок, расположенных по обе стороны середины ряда, при n четном.

Именно по этой причине, т. е. исходя из способа отыскания, указанную ошибку и называют с р е д и н н о й.

П р и м е р. Дан ряд случайных ошибок измерения размера некоторого изделия (ошибки в миллиметрах): $+8$, -1, $+13$, -5, $+6$, -10, $+4$.

Вычислить среднюю ϑ и срединную r ошибки.

Решение. Складывая абсолютные значения всех ошибок, получим $[|\Delta|] = 47$ мм.

Следовательно, $\vartheta = \frac{47}{7} = 6{,}7$ мм.

Определим срединную ошибку, для чего запишем: 1, 4, 5, 6, 8, 10, 13. Так как $n = 7$ нечетное, середина ряда приходится на число 6; следовательно, $r = 6$ мм. Если бы измерений было 8 и, например, прибавилась бы еще ошибка, равная 10, то середина ряда пришлась бы в промежуток между ошибками 6 и 8; в этом случае

$$r = \frac{6+8}{2} = 7{,}0 \text{ мм}.$$

При нормальном распределении вероятностей ошибок наблюдений средняя квадратическая ошибка m, с одной стороны, и средняя ϑ и срединная r ошибки, с другой стороны, связаны между собой определенным образом. Так как эти связи имеют очень важное значение для решения ряда теоретических и практических вопросов, в частности для оценки степени приближения действительного распределения к нормальному, установим форму связей между m и ϑ, m и r.

§ 27. СВЯЗЬ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ СО СРЕДНЕЙ ОШИБКОЙ

Для установления связи между m и ϑ воспользуемся математическим ожиданием абсолютного значения случайной ошибки $|\Delta|$. По определению математического ожидания имеем

$$M(|\Delta|) = \sum_{-\Delta_{\text{пред}}}^{+\Delta_{\text{пред}}} |\Delta| p, \tag{276}$$

или с учетом того, что

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta,$$

для случайной ошибки как непрерывной случайной величины запишем

$$M(|\Delta|) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta_{\text{пред}}}^{+\Delta_{\text{пред}}} |\Delta| e^{-h^2\Delta^2} d\Delta. \tag{277}$$

Расширив пределы интегрирования до $\pm\infty$, с учетом четности подынтегральной функции из формулы (277) получаем

$$M(|\Delta|) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} |\Delta| e^{-h^2\Delta^2} d\Delta. \tag{278}$$

Для интегрирования в формуле (278) подведем величину $-h^2\Delta^2$ под знак дифференциала

$$d(-h^2\Delta^2) = -2h^2\Delta d\Delta,$$

откуда

$$d\Delta = \frac{d(-h^2\Delta^2)}{-2h^2\Delta}. \tag{279}$$

Подставив значения $d\Delta$ из (279) в формулу (278), получим

$$M(|\Delta|) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} |\Delta| e^{-h^2\Delta^2} \frac{d(-h^2\Delta^2)}{-2h^2\Delta} = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2\Delta^2} d(-h^2\Delta^2)$$

или

$$M(|\Delta|) = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2\Delta^2} d(-h^2\Delta^2) = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \Big|_0^{\infty}. \tag{280}$$

Подставляя верхний и нижний пределы в формулу (280), имеем

$$M(|\Delta|) = 0 - \left(-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{281}$$

На основании формулы (117), при n неограниченно большом средняя ошибка в пределе

$$\vartheta = M(|\Delta|). \tag{282}$$

Тогда формула (281) примет вид

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{283}$$

Но так как $h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$, то на основании (283)

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta$$

или

$$m = 1{,}253314\ldots\vartheta. \tag{284}$$

Для практических целей достаточно принять

$$m \approx 1{,}25\vartheta. \tag{285}$$

§ 28. СВЯЗЬ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ СО СРЕДИННОЙ ОШИБКОЙ

По определению, вероятность срединной ошибки

$$p(|\Delta| \leqslant r) = \frac{1}{2}.$$

Если воспользуемся нормированной срединной ошибкой, то интеграл

$$\Phi\left(t = \frac{r}{m}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2}. \qquad (286)$$

Но так как в этом случае

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \ldots\right) = \frac{1}{2}, \qquad (287)$$

то, ограничившись пока членом с t^3 в формуле (287), вычислим коэффициент t, связывающий r и m,

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} t\left(1 - \frac{t^2}{6} + \cdots\right) \approx \frac{1}{2}. \qquad (288)$$

В качестве первого приближения t для вычисления значения скобки в формуле (288) примем

$$t' \approx \frac{0{,}500}{2}\sqrt{2\pi}. \qquad (289)$$

Подставив t' из (289) в формулу (288), имеем

$$t \approx \frac{0{,}500}{2\left\{1 - \frac{\left(\frac{0{,}500}{2}\sqrt{2\pi}\right)^2}{6}\right\}} \sqrt{2\pi} \approx 0{,}67.$$

Далее,

$$t \approx \frac{0{,}500\sqrt{2\pi}}{2\left(1 - \frac{0{,}67^2}{6} + \frac{0{,}67^4}{40}\right)} \approx 0{,}674. \qquad (290)$$

Взяв несколько приближений, можно вычислить, таким образом, коэффициент $t = \frac{r}{m}$ с любой заданной точностью.

Более просто значение t можно определить по таблицам, приведенным в прил. 1. Найдя в таблицах значение интеграла вероятностей, равное 0,5000, находим $t = 0{,}6745$.

Следовательно,

$$m = \frac{1}{0{,}6745\ldots} r,$$

или

$$m = 1{,}4825\ldots r.$$

В большинстве случаев достаточно

$$m = 1{,}48r. \qquad (291)$$

§ 29. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ m, ϑ и r ДЛЯ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ К НОРМАЛЬНОМУ

Как уже было отмечено выше, формулы (285) и (291) применяют при теоретических расчетах и при оценке степени приближения действительного распределения ошибок к нормальному.

Для этих целей, вычислив m, ϑ, r по данным опытного ряда, вычисляют коэффициенты

$$k_1 = \frac{m}{\vartheta}; \qquad k_2 = \frac{m}{r}. \qquad (292)$$

Сравнивая вычисленные по формулам (292) коэффициенты с их теоретическими значениями ($k_1 = 1{,}25$, $k_2 = 1{,}48$), по отклонениям ($k_{1\,выч} - 1{,}25$) и ($k_{2\,выч} - 1{,}48$) судят о степени приближения действительного распределения ошибок к нормальному.

Пример. При исследовании точности съемки рельефа (см. табл. 12) для 12 участков были получены: средняя квадратическая, средняя и срединная ошибки, приведенные в табл. 16. По данным табл. 16 вычислить коэффициенты k_1 и k_2 и сравнить их с теоретическими значениями.

Таблица 16

Номера участков	Критерии точности, см			Коэффициенты и их истинные ошибки				Число ошибок по участку
	m	ϑ	r	k_1	Δk_1	k_2	Δk_2	
1	3,5	2,8	2,0	1,25	0,00	1,75	+0,27	220
2	5,2	4,4	4,0	1,18	−0,07	1,30	−0,18	161
3	5,4	4,1	4,0	1,32	+0,07	1,35	−0,13	115
4	7,0	5,3	4,5	1,32	+0,07	1,55	+0,07	100
5	8,0	6,7	5,5	1,20	−0,05	1,46	−0,02	59
6	4,0	3,2	2,5	1,25	0,00	1,60	+0,12	95
7	4,7	3,6	3,0	1,31	+0,06	1,57	+0,09	93
8	5,1	4,4	4,0	1,16	−0,09	1,28	−0,20	104
9	5,4	4,3	3,5	1,26	+0,01	1,54	+0,06	115
10	5,4	4,1	3,5	1,32	+0,07	1,54	+0,06	353
11	8,0	6,4	5,0	1,25	0,00	1,60	+0,02	236
12	8,1	6,5	5,5	1,24	−0,01	1,47	−0,01	108

Вычисления, выполненные в табл. 16, показывают, что коэффициенты k_1 и k_2 достаточно хорошо совпадают с их теоретическими значениями. Большой разброс, соответствующий срединной ошибке, обусловлен тем, что этот критерий для оценки точности из вышеперечисленных трех (m, ϑ и r) наименее надежен в силу способа его определения (как срединной ошибки).

§ 30. СВОЙСТВА СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ И ТОЧНОСТЬ ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Следует отметить, что для оценки точности наблюдений наиболее часто применяют среднюю квадратическую ошибку m, которая по сравнению со средней и срединной обладает следующими преимуществами.

1. На величину средней квадратической ошибки m наибольшее влияние оказывают большие по абсолютной величине ошибки, т. е. те, которые и характеризуют реальную точность наблюдений. Это происходит вследствие того, что при вычислении m суммируются квадраты ошибок Δ_i, в то время как при вычислении, например, средней ошибки суммируются первые степени Δ_i по модулю. При большом n в последнем случае происходит сглаживание, т. е. крупные ошибки выступают в значении ϑ в завуалированном виде.

2. Средняя квадратическая ошибка связана с предельной простыми соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &\text{с вероятностью } 0{,}95 \ldots \ldots \Delta_{\text{пред}} \leqslant 2m; \\ &\text{с вероятностью } 0{,}9973 \ldots \ldots \Delta_{\text{пред}} \leqslant 3m. \end{aligned}\right\} \qquad (293)$$

Выражения (293) принято называть **допусками**, причем в качестве служебного допуска рекомендуется:

$$\text{с вероятностью } 0{,}99 \ldots \ldots \Delta_{\text{пред}} \leqslant 2{,}5m; \qquad (294)$$

$$\text{для теоретических расчетов} \ldots \ldots \Delta_{\text{пред}} \leqslant 3m. \qquad (295)$$

Пример. Вычислить наиболее возможное (вероятнейшее) число ошибок из общего их числа n:

$$\left.\begin{aligned} &p(\Delta_1 \geqslant m) \\ &p(\Delta_2 \geqslant 2m) \\ &p(\Delta_3 \geqslant 2{,}5m) \end{aligned}\right\} \quad \text{при } n = 100,$$

$$p(\Delta_4 \geqslant 3m) \qquad \text{при } n = 1000.$$

Решение. Если по оси абсцисс (рис. 12) отложить значение

$$\frac{\Delta_i}{m} = t_i,$$

то интеграл вероятностей $\Phi(t_i)$ представляет вероятность появления ошибок в пределах от 0 до $\pm t$.

Так как общая площадь между осью абсцисс и кривой Гаусса равна 1, то, следовательно, вероятность ошибок, не меньших заданного значения Δ_i, представляет сумму заштрихованных площадей, или $1 - \Phi(t_i)$.

Определяя $\Phi(t_i)$ по таблице, приведенной в прилож. 1, сведем результаты вычислений в табл. 17.

Полученные результаты хорошо иллюстрируют первое свойство случайных ошибок (§ 23).

3. Средняя квадратическая ошибка определяется достаточно надежно при ограниченном числе наблюдений.

Надежность средней квадратической ошибки характеризуется величиной

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2n}}, \qquad (296)$$

где m_m — средняя квадратическая ошибка самой средней квадратической ошибки.

Пример. Дано

$$m = \sqrt{\frac{81}{9}} = 3{,}0; \qquad m_m = \frac{3{,}0}{\sqrt{2 \cdot 9}} = 0{,}8.$$

Получаем надежность (с доверительной вероятностью $P_\alpha = 0{,}68$) $m = 3{,}0 \pm 0{,}8$.

При оценке точности по ограниченному числу наблюдений принято считать ее надежной, если средняя квадратическая ошибка m определена с ошибкой m_m, не превышающей $\frac{1}{4}$ m, т. е.

$$m_m \leqslant \frac{1}{4} m. \qquad (297)$$

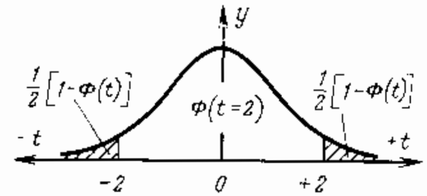

Рис. 12

Условие (297) выполняется при

$$n \geqslant 8. \qquad (298)$$

Следовательно, минимально необходимым числом наблюдений для надежной оценки точности является $n = 8$.

Таблица 17

Число ошибок n	Заданное предельное значение, $\Delta_{i\,\text{пред}}$	$t_i = \frac{\Delta_i}{m}$	$\varphi(t_i)$	$p(\Delta_i \geqslant t_i m) = 1 - \varphi(t_i)$	Число ошибок, превышающих заданные, Δ_i $k_0 \approx n\{1 - \Phi(t_i)\}$	Число ошибок, укладывающихся в пределах от 0 до $\pm\Delta_i$	Контроль
100	$1m$	1	0,6827	0,3173	32	68	100
100	$2m$	2	0,9545	0,0455	5	95	100
100	$2{,}5m$	2,5	0,9876	0,0124	1	99	100
1000	$3{,}0m$	3,0	0,9973	0,0027	3	997	1000

Дадим формуле (296) теоретическое обоснование. Средняя квадратическая ошибка m, вычисляемая по формуле Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \qquad (299)$$

при ограниченном числе наблюдений n ошибочна, как указано выше, вследствие ограниченности этого числа. Задача состоит в том, чтобы получить выражение, при помощи которого можно было бы оценить надежность средней квадратической ошибки, вычисляемой по формуле (299). Пусть случайное значение ошибки (299), вычисляемой по ограниченному числу n, будет m, а «точное» его значение (при $n \to \infty$) — m_*.

$$D(m^2) = M\{[m^2 - M(m^2)]^2\}. \tag{300}$$

Будем при этом иметь в виду, что

$$D\left(m^2\right) = \sigma^2_{m^2} = m^2_{m^2}. \tag{301}$$

Итак, по формуле (300) с учетом формулы (299)

$$D\left(m^2\right) = M\left\{\left[\frac{[\Delta^2]}{n} - M\left(m^2\right)\right]^2\right\} = M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)m_*^2 + m_*^4\right\} =$$

$$= M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2\right\} - 2M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)m_*^2\right\} + M\left(m_*^4\right). \tag{302}$$

Но

$$M\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right) = m_*^2. \tag{303}$$

Следовательно, из формулы (302) имеем

$$D\left(m^2\right) = M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2\right\} - 2m_*^4 + m_*^4 = M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2\right\} - m_*^4. \tag{304}$$

Найдем математическое ожидание

$$\begin{aligned} M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2\right\} = &\left\{\frac{1}{n^2}\left(\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \ldots + \Delta_n^4\right)\right\} + \\ &+ \left\{\frac{2\Delta_1^2}{n^2}\left(\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_n^2\right)\right\} + \\ &+ \left\{\frac{2\Delta_2^2}{n^2}\left(\Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \ldots + \Delta_n^2\right)\right\} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \left(\frac{2\Delta_{n-1}^2}{n^2}\Delta_n^2\right). \end{aligned} \tag{305}$$

Число членов, представляющих удвоенные произведения в правой части выражения (305), равно

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{306}$$

Необходимо также учитывать, что

$$\left\{\frac{1}{n^2}\left(\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \ldots + \Delta_n^4\right)\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i^4}{n} = \frac{\mu_4}{n} = \frac{3m_*^4}{n}, \tag{307}$$

где μ_4 — четвертый центральный момент, равный, как известно,

$$\mu_4 = 3\mu_2^2 = 3m_*^4. \tag{308}$$

Справедливость формулы (307) нетрудно установить из доказательства, воспользовавшись для этой цели понятием математического ожидания $M\left(\frac{\Delta^4}{n}\right)$.

Удвоенные произведения в формуле (305) равны (при n большом)

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\frac{2\Delta_1^2}{n^2}\left(\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_n^2\right)\right\} = \frac{2m_*^4}{n^2}(n-1); \\ &\left\{\frac{2\Delta_2^2}{n^2}\left(\Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \ldots + \Delta_n^2\right)\right\} = \frac{2m_*^4}{n^2}(n-2); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\left(\frac{2\Delta_{n-1}^2}{n^2}\Delta_n^2\right) = \frac{2m_*^4}{n^2}. \end{aligned}\right\} \tag{309}$$

Итак,

$$M\left(\frac{\Delta^4}{n}\right) = \frac{1}{n}M\left(\Delta^4\right) = \frac{1}{n}\sum_{-\Delta_{\text{пред}}}^{+\Delta_{\text{пред}}}\Delta^4 p = \frac{h}{n\sqrt{\pi}}\sum_{-\Delta_{\text{пред}}}^{+\Delta_{\text{пред}}}\Delta^4 e^{-h^2\Delta^2}d\Delta. \tag{310}$$

Переходя от суммирования в формуле (310) к интегрированию и расширив пределы интегрирования до $\pm\infty$ (как мы уже поступали ранее), запишем

$$M\left(\frac{\Delta^4}{n}\right) = \frac{2h}{n\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \Delta^4 e^{-h^2\Delta^2}d\Delta.$$

Умножив правую часть на $1 = \left(\frac{-2h^2}{-2h^2}\right)$, получим

$$M\left(\frac{\Delta^4}{n}\right) = -\frac{1}{nh\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \Delta^3 d\left(e^{-h^2\Delta^2}\right) \tag{311}$$

$$\left(\text{так как } d\left(e^{-h^2\Delta^2}\right) = -2h^2\Delta e^{-h^2\Delta^2}d\Delta;\ d\Delta = \frac{d\left(e^{-h^2\Delta^2}\right)}{-2h^2\Delta e^{-h^2\Delta^2}}\right).$$

Интегрируя формулу (311) по частям, получим

$$M\left(\frac{\Delta^4}{n}\right) = -\frac{1}{nh\sqrt{\pi}}\left\{\Delta^3 e^{-h^2\Delta^2}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-h^2\Delta^2}d\left(\Delta^3\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{nh\sqrt{\pi}}\int_0^\infty 3\Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}d\Delta = \frac{3}{nh\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}d\Delta.$$

Однако

$$M\left(\Delta^2\right) = m_*^2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}d\Delta.$$

Следовательно,

$$M\left(\frac{\Delta^4}{n}\right)=\frac{3m_*^2}{2nh^2}=\frac{3m_*^4}{n}.$$

Аналогично можно доказать и справедливость выражения (309).

Учитывая, что среднее значение Δ_i^2 при n большом обращается в m_*^2, сумма всех удвоенных произведений в формуле (305) согласно (309) и (306) будет равна

$$\frac{2m_*^4}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n-1}{n}m_*^4. \qquad (312)$$

Подставляя выражения (307) и (312) в формулу (305), получим

$$M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2\right\}=\frac{3m_*^4}{n}+\frac{(n-1)}{n}m_*^4=\frac{3m_*^4+nm_*^4-m_*^4}{n};$$

$$M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2\right\}=\frac{2m_*^4}{n}+m_*^4. \qquad (313)$$

Подставив значение $M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2\right\}$ из формулы (313) в (304), имеем

$$D\left(m^2\right)=\frac{2m_*^4}{n}+m_*^4-m_*^4=\frac{2m_*^4}{n}. \qquad (314)$$

Отсюда средняя квадратическая ошибка m_{m^2}

$$m_{m^2}=\sqrt{D\left(m^2\right)}=m_*^2\sqrt{\frac{2}{n}}. \qquad (315)$$

Из формулы (315) следует

$$m_{m^2}=\frac{d\left(m_*^2\right)}{dm_*}m_m,$$

откуда

$$m_m=\frac{m_{m^2}}{d\left(m_*^2\right)}dm_*=\frac{m_{m^2}}{2m_*dm_*}dm_*=\frac{m_{m^2}}{2m}. \qquad (316)$$

Подставляя в формуле (316) значение m_{m^2} из формулы (315) и заменяя неизвестное значение m_* через m, получим

$$m_m\approx\frac{m}{\sqrt{2n}}. \qquad (317)$$

Следовательно, если средняя квадратическая ошибка m вычислена по ограниченному числу ошибок n, то средняя квадратическая ошибка самой средней квадратической ошибки, обозначенная выше через m_m, в $\sqrt{2n}$ раз меньше величины m.

Примеры. 1. Выполнить исследование ряда истинных ошибок на нормальное распределение вероятностей.

При испытании дальномера двойного изображения типа ДНБ получено 36 значений параллактического угла β_i, помещенных в табл. 18. Точное значение угла β_0 вычислено на основании линейных измерений. По данным табл. 18 вычислить:

истинные ошибки Δ_i;

среднюю квадратическую ошибку $m=\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$

Таблица 18

$\beta_0=573,23''$

№ п/п	Углы, β_i	Истинные ошибки, $\Delta_i''=\beta_i-\beta_0$	№ п/п	Углы β_i	Истинные ошибки, $\Delta_i''=\beta_i-\beta_0$
1	573,5″	$+27\cdot10^{-2}$	19	573,7″	$+47\cdot10^{-2}$
2	3,2	−3	20	3,0	−23
3	3,1	−13	21	3,1	−13
4	2,7	−53	22	2,9	−33
5	3,6	+37	23	3,3	+7
6	3,0	−23	24	3,2	−3
7	2,8	−43	25	3,0	−23
8	3,4	+17	26	3,3	+7
9	3,2	−3	27	3,6	+37
10	4,4	+117	28	4,0	+77
11	2,8	−43	29	2,7	−53
12	3,5	+27	30	2,8	−43
13	2,5	−73	31	3,4	+17
14	3,2	−3	32	4,4	+117
15	3,1	−13	33	2,8	−43
16	4,1	+87	34	2,8	−43
17	2,7	−53	35	2,6	−63
18	3,5	+27	36	3,0	−23

$\sum\limits_1^{36}\Delta_i^2=79404\cdot10^{-4}$

$\Sigma+648\cdot10^{-2}$
$\Sigma-686\cdot10^{-2}$

с оценкой ее надежности $m_m=\frac{m}{\sqrt{2n}}$;

среднюю и срединную ошибки ϑ и r;

теоретическое k_0 и действительное g число ошибок в интервалах через $\pm0,5\ m$ от $-\Delta=-3,0\ m$ до $+\Delta=+3,0\ m$;

разности $g-k_0$;

коэффициенты $k_1=\frac{m}{\vartheta}$, $k_2=\frac{m}{r}$ и сравнить их с теоретическими 1,25 и 1,48 соответственно.

Решение. Истинные ошибки Δ_i даны в табл. 18 и выражены в секундах. Вычислим

$$m=\sqrt{\frac{79\,404\cdot10^{-4}}{36}}=0{,}47''; \quad m_m=\frac{0{,}47''}{\sqrt{2\cdot36}}=0{,}056'';$$

$$\vartheta=\frac{1534''\cdot10^{-2}}{36}=0{,}37''.$$

При определении срединной ошибки получено для значения № 18—0,27″, а для № 19 — 0,33″. Поэтому имеем $r=0{,}30''$.

Составим табл. 19 и в ней вычислим теоретическое число ошибок k_0.

Таблица 19

$n = 36;\ m = 0{,}47''$

Интервал Δ_i		Аргумент $t_i = \frac{\Delta_i}{m}$	$p_i = \Phi(t_i)$	$p_i - p_{i-1}$	$k_0 = n(p_i - p_{i-1})$
в общем виде	в секундах				
0,5m	0,24	0,5	0,383	0,383	14
1,0m	0,47	1,0	0,683	0,300	11
1,5m	0,70	1,5	0,867	0,184	7
2,0m	0,94	2,0	0,954	0,087	3
2,5m	1,17	2,5	0,988	0,034	1
3,0m	1,41	3,0	0,9973	0,0093	0
			Контроль	0,9973	36

Примечание. $\Phi(t_i)$ выбрано из таблиц прил. 1.

Подсчитаем по табл. 20 действительное число ошибок g и разности $g - k_0$. Далее вычислим

$$k_1 = \frac{0{,}47''}{0{,}37''} = 1{,}27;\quad k_2 = \frac{0{,}47''}{0{,}30''} = 1{,}56.$$

Сведем в табл. 21 ординаты, вычисленные по таблицам прил. 3.

В результате выполненного исследования рассматриваемый ряд ошибок можно считать удовлетворяющим нормальному распределению, так как он обладает следующими свойствами.

а) среднее арифметическое из алгебраической суммы ошибок практически равно нулю *

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{-38''\cdot 10^{-2}}{36} = -1{,}1''\cdot 10^{-2};$$

Таблица 20

Интервалы через $\pm 0{,}5\,m$ от $-\Delta = -3m$ до $+\Delta = +3\,m$	Число ошибок		
	g	k_0	$g - k_0$
От 0 до 0,24″	15	14	+1
» 0,25 » 0,47	12	11	+1
» 0,48 » 0,70	4	7	−3
» 0,71 » 0,94	3	3	0
» 0,95 » 1,17	2	1	+1
» 1,18 » 1,41	0	0	0
Более 1,41	0	0	0
Контроль	36	36	0

Примечание. g определено непосредственным подсчетом по данным таблицы, приведенным в условии задачи.

* Исходя из опыта, часто указывают, что отклонение от нуля среднего арифметического из алгебраической суммы случайных ошибок при достаточно большом их числе может считаться допустимым, если выполняется

б) ни одна из ошибок ряда не превышает 3,0 m;

в) разности $g - k_0$ при данном числе ошибок можно считать несущественными;

г) коэффициенты k_1 и k_2 сходятся с их теоретическими значениями удовлетворительно.

2. Проанализируем результаты исследования опытных рядов ошибок с использованием метода моментов, приведенные в табл. 22. Исследование производилось в рядах ошибок определения отметок точек по карте крупного масштаба.

Таблица 21

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = 1{,}50$$

№ п/п	$t_i = \frac{\Delta_i}{m}$	y'	$y = y'h$
1	0	0,564	0,85
2	0,5	0,498	0,75
3	1,0	0,342	0,52
4	1,5	0,183	0,28
5	2,0	0,076	0,11
6	2,5	0,025	0,04
7	3,0	0,006	0,01

Из результатов исследований, помещенных в табл. 22, со всей очевидностью вытекает, что ошибки определения отметок точек по горизонталям плана обладают нормальным распределением вероятностей.

3. В каких пределах можно с вероятностью $p = 0{,}954$ ожидать появления ошибки Δ, если средняя ошибка $\vartheta = 8{,}0''$?

Решение. Получим

$$m = 1{,}25\vartheta;\quad m = 8''\cdot 1{,}25 = 10'';\quad \Delta = tm.$$

По $\Phi(t) = p = 0{,}954$ в таблице (прил. 1) находим $t = 2$.

Ответ: $-20'' \leqslant \Delta \leqslant +20''$.

4. Сколько ошибок из 100 будут превышать удвоенную срединную ошибку?

Решение. Запишем

$$\Delta = 2r;\quad p(\Delta \geqslant 2r) = ?$$

$$t = \frac{2r}{m};\quad t = \frac{2r}{1{,}48r} = 1{,}35;\quad \Phi(t) = 0{,}823;$$

$$p(\Delta \geqslant 2r) = 1 - \Phi(t);\qquad p = 0{,}177;\qquad k_0 \approx np;\qquad k_0 = 18.$$

Ответ: $k_0 = 18$.

условие $\frac{[\Delta]}{n} \leqslant \frac{m}{5}$. В противном случае нельзя полагать, что систематические ошибки пренебрегаемо малы.

Таблица 22

Наименование	Номера участков			
	1	2	3	4
Число ошибок n	34	64	39	47
Средняя квадратическая ошибка m, см	8,5	7,5	7,8	8,8
Средняя квадратическая ошибка самой средней квадратической ошибки m_m, см	1,5	0,94	1,25	1,28
Средняя ошибка ϑ, см	7,0	6,7	6,3	6,9
Срединная ошибка r, см	5,0	6,0	5,0	5,0
Первый момент μ_1, см	+3,1	−0,6	−1,0	+1,7
Второй момент μ_2, м²	0,0073	0,0056	0,0061	0,0077
Третий момент μ_3, м³	+0,00030	+0,00013	−0,00059	+0,00046
Четвертый момент μ_4, м⁴	0,00014	0,000060	0,00015	0,00015
Эксцесс E	−0,37	−1,09	+1,03	−0,47
Мера скошенности β_1	+0,23	+0,10	+1,53	+0,46
Среднее квадратическое отклонение эксцесса σ_E	0,71	0,56	0,86	0,63
Допустимое отклонение эксцесса от нуля $E_{доп}$	2,13	1,68	2,58	1,89
Среднее квадратическое отклонение меры скошенности $\sigma\beta_1$	0,41	0,18	0,69	0,32
Допустимое отклонение меры скошенности $\beta_{1доп}$	1,23	0,54	2,07	0,96
Коэффициент перехода от средней ошибки к средней квадратической k_1	1,21	1,12	1,24	1,28
Коэффициент перехода от срединной ошибки к средней квадратической k_2	1,70	1,25	1,56	1,76

§ 31. АБСОЛЮТНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ОШИБКИ

Такие ошибки, как средняя квадратическая (m), средняя (ϑ), срединная (r), истинная (Δ_i) и предельная ($\Delta_{пред}$), называются **абсолютными** ошибками. **Относительной** ошибкой называют отношение соответствующей абсолютной ошибки к полученному значению измеренной величины.

Относительную ошибку обычно выражают в виде дроби с числителем, равным единице.

Наименование абсолютной ошибки, использованной при вычислении, определяет собой и название соответствующей относительной ошибки.

Пусть x — полученное значение некоторой физической величины. Тогда:

$\frac{m}{x} = \frac{1}{s_1}$ — средняя квадратическая относительная ошибка;

$\frac{\vartheta}{x} = \frac{1}{s_2}$ — средняя относительная ошибка;

$\frac{r}{x} = \frac{1}{s_3}$ — срединная относительная ошибка;

$\frac{\Delta}{x} = \frac{1}{s_4}$ — истинная относительная ошибка (сопровождается знаком ошибки Δ);

$\frac{\Delta_{пред}}{x} = \frac{1}{s_5}$ — предельная относительная ошибка.

Знаменатель относительной ошибки s_i целесообразно округлять до двух значащих цифр с нулями.

Пример. $m_x = 0{,}3$ м; $x = 152{,}0$ м; $\frac{m_x}{x} = \frac{1}{510}$.

$m_x = 0{,}25$ м; $x = 643{,}00$ м; $\frac{m_x}{x} = \frac{1}{2600}$.

$m_x = 0{,}033$ м; $x = 795{,}000$ м; $\frac{m_x}{x} = \frac{1}{24000}$.

Глава VI

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ВЕЛИЧИН, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ ЗАВИСИМЫХ И НЕЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

§ 32. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В инженерной практике часто возникают задачи, когда интересующую наблюдателя величину непосредственно измерить нельзя. В таких случаях приходится измерять некоторые величины (в последующем будем называть эти величины **аргументами**), связанные с искомой величиной функционально, а искомую величину — вычислять. Предполагается, что точность аргументов, т. е. их средние квадратические ошибки, известны.

Естественно ожидать, что искомая величина (будем называть ее **функцией**), вычисленная по аргументам, содержащим некоторые ошибки, тоже будет содержать ошибки. Очевидно, что ошибка функции в полной мере будет зависеть от ошибок аргументов, по которым она вычислялась, и от вида функции.

Пусть для определения длины окружности s по некоторому сечению вала измерен его диаметр d с точностью, характеризуемой средней квадратической ошибкой m_d. Вычислив длину окружности $s = \pi d$, определим, чему будет равна средняя квадратическая ошибка m_s, вычисленная по результатам измерения диаметра d. В данном случае ответ очевиден

$$m_s = \pi m_d.$$

Но функция может иметь и более сложный вид. Например,

$$u = \frac{xyzt^2}{\cos\alpha},$$

где x, y, z, t, α — аргументы, полученные из измерений со средними квадратическими ошибками m_x, m_y, m_z, m_t, m_α. Здесь ответ при определении m_u не является очевидным.

Сформулируем задачу в общем виде. Дана функция

$$u = f(x, y, z, \ldots, w),$$

где $x, y, z, \ldots, w$ — наблюденные аргументы, точность которых характеризуется средними квадратическими ошибками m_x, m_y, $m_z, \ldots, m_w$. Необходимо найти среднюю квадратическую ошибку функции u в зависимости от ошибок аргументов $x, y, z, \ldots, w$ (определение самой величины функции u не требует рассмотрения, хотя очевидно, что в первую очередь вычисляется сама функция u, затем ее средняя квадратическая ошибка). При решении поставленной задачи могут встретиться два случая: зависимых аргументов и независимых аргументов.

В качестве меры парной зависимости между случайными величинами (например, x и y, y и z и т. д.) используем коэффициент корреляции r (221), т. е. будем полагать, что если случайные величины и связаны, то связь эта прямолинейна.

Из свойств коэффициента корреляции r (§ 20) следует, что если $r = 0$, то прямолинейная связь между x и y отсутствует.

Как известно, корреляционная связь по условию (225) считается установленной, если $|r| \geqslant 3\ \sigma_r$, причем

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{n+36} - \sqrt{n}}{6}.$$

В силу этого, для случаев, когда $r \neq 0$, но $|r| < 3\ \sigma_r$ или нижний предел $|r| \geqslant |r|_{\min}$, случайные величины x и y также следует считать независимыми.

Л. Н. Большев, выполнивший перевод книги Б. Л. Ван дер Вардена «Математическая статистика» (М., ИЛ, 1960), в примечании на стр. 362 отмечает: «Практически использование коэффициента корреляции в качестве меры зависимости оправдано лишь тогда, когда предполагается, что случайные величины распределены нормально. В общем случае коэффициент корреляции как мера зависимости может оказаться неудовлетворительным». Это важное обстоятельство необходимо иметь в виду при рассмотрении поставленной задачи.

§ 33. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ФУНКЦИИ ЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ

Итак, пусть дана функция

$$u = f(x, y, z, \ldots, w), \tag{318}$$

где $x, y, z, \ldots, w$ — попарно зависимые аргументы, полученные из наблюдений со средними квадратическими ошибками m_x, m_y, $m_z, \ldots, m_w$.

Обозначим: $X, Y, Z, \ldots, W$ — истинные (точные) значения аргументов.

Необходимо определить m_u — среднюю квадратическую ошибку функции u.

Придадим аргументам малые приращения Δx, Δy, $\Delta z, \ldots,$ Δw — истинные ошибки аргументов, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= x - X; \\ \Delta y &= y - Y; \\ \Delta z &= z - Z; \\ &\ldots\ldots \\ \Delta w &= w - W. \end{aligned}\right\} \tag{319}$$

В соответствии с этим функция u также получит приращение, которое назовем **истинной ошибкой функции** и обозначим через Δu.

Итак, имеем

$$u + \Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z, \ldots, w + \Delta w). \tag{320}$$

Найдем линейную зависимость между малыми приращениями аргументов и функции, для чего в полном дифференциале функции (318) дифференциалы аргументов и функции заменим конечными приращениями. Полный дифференциал функции (318), как известно, равен

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots + \frac{\partial f}{\partial w} dw, \tag{321}$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial w}$$

— частные производные функции по каждому из аргументов.

Заменяя в формуле (321) дифференциалы истинными ошибками функции и аргументов, получим

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \ldots + \frac{\partial f}{\partial w} \Delta w + R, \tag{322}$$

где R — сумма членов, содержащих истинные ошибки Δx, Δy, $\Delta z, \ldots, \Delta w$ во второй, третьей и т. д. степенях.

Так как истинные ошибки Δx, Δy, $\Delta z, \ldots, \Delta w$ — величины малые, с точностью, удовлетворяющей все запросы практики, членом R можно пренебречь.

При многократном измерении аргументов, например n раз, столько же раз можно получить и приращение функции. Итак, пренебрегая членом R, можно записать

$$\left.\begin{aligned}\Delta u_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\Delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial w_1}\Delta w_1;\\ \Delta u_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_2}\Delta y_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial w_2}\Delta w_2;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Delta u_n &= \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n + \frac{\partial f}{\partial y_n}\Delta y_n + \ldots + \frac{\partial f}{\partial w_n}\Delta w_n.\end{aligned}\right\} \quad (323)$$

Производные по соответствующим аргументам в разных измерениях практически остаются постоянными и могут быть вычислены по приближенным значениям аргументов $x_0, y_0, \ldots, w_0$, в качестве которых можно взять, например, $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1, \ldots, w_0 = w_1$ ($x_1, y_1, \ldots, w_1$ — значения аргументов, полученные при первом измерении).

В соответствии с этим можем принять

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_1} \approx \frac{\partial f}{\partial x_2} \approx \ldots \approx \frac{\partial f}{\partial x_n} \approx \left(\frac{df}{dx}\right)_0;\\ &\frac{\partial f}{\partial y_1} \approx \frac{\partial f}{\partial y_2} \approx \ldots \approx \frac{\partial f}{\partial y_n} \approx \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{\partial f}{\partial w_1} \approx \frac{\partial f}{\partial w_2} \approx \ldots \approx \frac{\partial f}{\partial w_n} \approx \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0.\end{aligned}\right\} \quad (324)$$

С учетом формулы (324) выражение (323) примет вид

$$\Delta u_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x_i + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y_i + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0 \Delta w_i \quad (325)$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n).$$

Для перехода к средней квадратической ошибке функции u примем во внимание, что

$$m_u^2 = M\left(\Delta u^2\right) \approx \frac{[\Delta u^2]}{n}. \quad (326)$$

Возведем в квадрат левую и правую части выражения (325) для $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\left.\begin{aligned}\Delta u_1^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \Delta x_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \Delta y_1^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 \Delta w_1^2 +\\ &+ 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta x_1 \Delta y_1 + \ldots;\\ \Delta u_2^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \Delta x_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \Delta y_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 \Delta w_2^2 +\\ &+ 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta x_2 \Delta y_2 + \ldots;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Delta u_n^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \Delta x_n^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)_0^2 \Delta y_n^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 \Delta w_n^2 +\\ &+ 2\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \left(\frac{df}{dy}\right)_0 \Delta x_n \Delta y_n + \ldots\end{aligned}\right\} \quad (327)$$

После суммирования по столбцам в формулах (327) и деления левой и правой частей на число измерений n имеем

$$\frac{[\Delta u^2]}{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \frac{[\Delta x^2]}{n} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \frac{[\Delta y^2]}{n} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 \frac{[\Delta w^2]}{n} + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \frac{[\Delta x \Delta y]}{n} + \ldots. \quad (328)$$

Но в формуле (328), по определению (326),

$$\frac{[\Delta u^2]}{n} = m_u^2; \qquad \frac{[\Delta x^2]}{n} = m_x^2; \qquad \frac{[\Delta y^2]}{n} = m_y^2;$$

$$\ldots\ldots \frac{[\Delta w^2]}{n} = m_w^2. \quad (329)$$

Определим, чему равны удвоенные произведения в правой части выражения (328).

Из корреляционного анализа известно, что коэффициент корреляции

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_z},$$

с учетом чего нетрудно установить, что, приравняв

$$\sigma_x \approx m_x, \quad \sigma_y \approx m_y, \qquad x_i - \bar{x} \approx \Delta x_i, \qquad y_i - \bar{y} \approx \Delta y_i,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta x \Delta y]}{n} \approx r_{x,y} m_x m_y, \quad (330)$$

где $r_{x,y}$ — коэффициент корреляции между x и y.

Формула (328) с учетом выражений (329) и (330) примет вид

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 m_w^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 r_{x,y} m_x m_y + \ldots. \quad (331)$$

Окончательно

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 m_w^2 + + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 r_{x,y} m_x m_y + \ldots} \quad (332)$$

Таким образом, средняя квадратическая ошибка функции коррелятивно зависимых аргументов равна корню квадратному из суммы квадратов произведений частных производных функции по каждому из аргументов на средние квадратические ошибки соответствующих аргументов и удвоенных произведений частных производных на соответствующие средние квадратические ошибки попарно зависимых аргументов и коэффициенты корреляции парной зависимости.

Для практического использования формулы (332) коэффициенты корреляции попарно зависимых аргументов должны быть определены из специальных исследований.

§ 34. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ФУНКЦИИ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ

При организации наблюдений одним из основных требований является обеспечение таких условий, при которых результаты многократных наблюдений одной и той же величины (или разных величин) были бы по возможности независимыми один от другого. Это требование не имеет в научной практике точных рамок и исчерпывающих указаний, которые позволяли бы обеспечить полную независимость результатов наблюдений. Тем не менее любая методика наблюдения в той или иной мере рассчитана на выполнение этого требования.

Во многих случаях, особенно когда есть возможность рассредоточить наблюдения во времени или поручить их выполнение разным наблюдателям, или выполнить разными приборами, эти результаты практически можно считать независимыми.

Стремление обеспечить независимость результатов наблюдений вполне понятно: ведь все вероятностно-статистические расчеты в теории ошибок базируются на гипотезе, что случайные ошибки подчиняются нормальному закону, а математическое ожидание $M(\Delta) = 0$.

Исходя из этого, обратившись к удвоенному произведению в формуле (328) для независимых случайных величин, по пятому свойству математического ожидания (125) и теореме (117) можем записать

$$\text{вер.} \lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta x \Delta y]}{n} = M(\Delta x \Delta y) = M(\Delta x)\, M(\Delta y). \quad (333)$$

Но по третьему свойству случайных ошибок

$$M(\Delta) = 0.$$

Следовательно,

$$\text{вер.} \lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta x \Delta y]}{n} = 0. \quad (334)$$

Формула (332) с учетом (334) для функции независимых аргументов примет вид

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 m_w^2} \ . \quad (335)$$

Таким образом, средняя квадратическая ошибка функции независимых аргументов равна корню квадратному из суммы квадратов произведений частных производных функции по каждому из аргументов на средние квадратические ошибки соответствующих аргументов.

Формулы (332) и (335) решают поставленную в § 32 задачу оценки точности функций независимых и зависимых аргументов полностью, т. е. все другие функции могут рассматриваться при оценке точности как частные случаи функции общего вида (318).

В классической теории ошибок перед рассмотрением вопроса об оценке точности функции общего вида рассматривают простейшие случаи ([22], стр. 61—68) оценки точности функций.

1. $u = kx$.
2. $u = x \pm y$.
3. $u = x \pm y \pm z$.
4. $u = x \pm y \pm \ldots \pm w$.
5. $u = k_1 x \pm k_2 y \pm \ldots \pm k_n w$.

Посмотрим, как решается вопрос об оценке точности функций (случаи 1—5, если аргументы независимы один от другого, а средние квадратические ошибки m_x, m_y, ..., m_w и коэффициенты k_1, k_2, ..., k_n известны).

Применяя формулу (335), получим для каждого из указанных случаев.

1. Пусть

$$u = kx. \quad (336)$$

Даны x, k, m_x. Тогда

$$m_u^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)_0^2 m_x^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k;$$

следовательно,

$$m_u = k m_x. \quad (337)$$

2. Пусть

$$u = x \pm y. \tag{338}$$

Даны x, y, m_x, m_y. Тогда

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1;$$

следовательно,

$$m_u^2 = m_x^2 + m_y^2,$$

$$m_u = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}. \tag{339}$$

3. Пусть

$$u = x \pm y \pm z. \tag{340}$$

Даны x, y, z, m_x, m_y, m_z. Тогда

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 m_z^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1;$$

следовательно,

$$m_u^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2,$$

$$m_u = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}. \tag{341}$$

4. Пусть

$$u = x \pm y \pm \ldots \pm w. \tag{342}$$

Даны x, y, ..., w, m_x, m_y, ..., m_w. Тогда

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)_0^2 m_w^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial w} = 1;$$

следовательно,

$$m_u^2 = m_x^2 + m_y^2 + \ldots + m_w^2,$$

$$m_u = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + \ldots + m_w^2}. \tag{343}$$

В частном случае при $m_x = m_y = \ldots = m_w = m$ имеем

$$m_u = m\sqrt{n}, \tag{344}$$

где n — число аргументов.

усть

$$u = k_1 x \pm k_2 y \pm \ldots \pm k_n w. \tag{345}$$

Даны x, y, ..., w, k_1, k_2, ..., k_n, m_x, m_y, ..., m_w. Тогда

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)_0^2 m_m^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = k_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial w} = k_n;$$

следовательно

$$m_u^2 = k_1^2 m_x^2 + k_2^2 m_y^2 + \ldots + k_n^2 m_w^2,$$

$$m_u = \sqrt{k_1^2 m_x^2 + k_2^2 m_y^2 + \ldots + k_n^2 m_w^2} \tag{346}$$

В частном случае при $m_x = m_y = \ldots = m_w = m$ имеем

$$m_u = m\sqrt{[k^2]}. \tag{347}$$

§ 35. ПРИМЕРЫ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Пример. 1. Дана функция

$$u = \frac{x^2}{2y^2} z, \tag{348}$$

где x, y, z — независимые аргументы, полученные из наблюдений со средними квадратическими ошибками m_x, m_y, m_z. Определить m_u.

Решение. По формуле (335) имеем

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 m_z^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{y^2} z; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^3} z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x^2}{2y^2}.$$

Ответ.

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{x}{y^2} z\right)^2 m_x^2 + \left(-\frac{x^2}{y^3} z\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{x^2}{2y^2}\right) m_z^2}$$

или

$$m_u = \frac{x}{y^2}\sqrt{(zm_x)^2 + \left(\frac{xz}{y}\,m_y\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\,m_z\right)^2}\,. \qquad (349)$$

Пример 2. Дана функция

$$u = \frac{xyz}{th}, \qquad (350)$$

где x, y, z, t, h — независимые аргументы, полученные из наблюдений со средними квадратическими ошибками m_x, m_y, m_z, m_t, m_h. Определить m_u.

Решение. По формуле (335) имеем

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 m_z^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 m_t^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)^2 m_h^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yz}{th}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xz}{th}; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{xy}{th};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{xyz}{t^2h}; \qquad \frac{\partial u}{\partial h} = -\frac{xyz}{th^2}.$$

Ответ.

$$m_u^2 = \left(\frac{yz}{th}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{xz}{th}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{xy}{th}\right)^2 m_z^2 + \left(-\frac{xyz}{t^2h}\right)^2 m_t^2 + \left(-\frac{xyz}{th^2}\right)^2 m_h^2; \qquad (351)$$

$$m_u = \frac{1}{th}\sqrt{(yzm_x)^2 + (xzm_y)^2 + (xym_z)^2 + \left(-\frac{xyzm_t}{t}\right)^2 + \left(-\frac{xyzm_h}{h}\right)}\,.$$

Иногда удобнее функцию (350) приводить к линейному виду, логарифмируя ее (здесь по основанию e)

$$\ln u = \ln x + \ln y + \ln z - \ln t - \ln h.$$

Далее

$$m_{\ln u}^2 = m_{\ln x}^2 + m_{\ln y}^2 + m_{\ln z}^2 + m_{\ln t}^2 + m_{\ln h}^2;$$

$$\left(\frac{m_u}{u}\right)^2 = \left(\frac{m_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{z}\right)^2 + \left(\frac{m_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{m_h}{h}\right)^2. \qquad (352)$$

Так как $m_{\ln u} = \dfrac{m_u}{u}$, то

$$m_{\lg u} = \left(\frac{d}{du}\lg u\right) m_u,$$

где

$$\frac{d}{du}\lg u = 0{,}4343\ldots\frac{1}{u};$$

следовательно,

$$m_{\lg u} = \frac{0{,}4343\ldots}{u}\,m_u; \qquad \frac{m_u}{u} = \frac{m_{\lg u}}{0{,}4343\ldots}$$

(0,4343 — модуль десятичных логарифмов).

В формуле (352) $\dfrac{m_u}{u}, \dfrac{m_x}{x}, \ldots$ — средние квадратические относительные ошибки.

Для сравнения полученных результатов (351) и (352) умножим левую и правую части выражения (352) на

$$u^2 = \left(\frac{xyz}{th}\right)^2$$

и получим тот же ответ (351)

$$m_u^2 = \left(\frac{yz}{th}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{xz}{ht}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{xy}{ht}\right)^2 m_z^2 + \left(-\frac{xyz}{t^2h}\right)^2 m_t^2 + \left(-\frac{xyz}{th^2}\right)^2 m_h^2. \qquad (351')$$

Пример 3. Коэффициент k нитяного дальномера теодолита определяется на базисе, длина которого $s = 250{,}00$ м определена со средней квадратической ошибкой $m_s = 0{,}052$ м.

Из многократных измерений был получен средний дальномерный отсчет $l = 249{,}0$ см со средней квадратической ошибкой $m_l = 0{,}30$ см.

Определить $k = \dfrac{s}{l}$ (постоянное слагаемое дальномера $c = 0$) и m_k.

Решение. Имеем функцию $k = f(s, l)$, т. е. $k = \dfrac{s}{l}$. Согласно (332) получим

$$m_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)^2 m_s^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial l}\right)^2 m_l^2}\,.$$

Но

$$\frac{\partial k}{ds} = \frac{1}{l}; \qquad \frac{\partial k}{\partial l} = -\frac{s}{l^2};$$

$$m_k = \sqrt{\left(\frac{5{,}2}{249}\right)^2 + \left(\frac{25000}{249^2}\cdot 0{,}30\right)^2}\,. \qquad (353)$$

Ответ. $m_k = 0{,}12$; $k = 100{,}40 \pm 0{,}12$.

Пример 4. Определить превышение и среднюю квадратическую ошибку превышения $h' = s\,\mathrm{tg}\,\nu$, где $s = 143{,}5$ м (горизонтальное проложение); $\nu = 2°30'$ (угол наклона); если $m_s = 0{,}5$ м; $m_\nu = 1{,}0'$.

Решение.

$$h' = s\,\mathrm{tg}\,\nu;$$

$$m_{h'} = \sqrt{m_s^2\mathrm{tg}^2\nu + \frac{s^2}{\cos^4\nu}\,\frac{m_\nu^2}{\rho^2}}\,; \qquad (354)$$

$$m_{h'} = \sqrt{(0{,}5\cdot 0{,}044)^2 + \left(\frac{144}{0{,}998}\cdot\frac{1'}{3438'}\right)^2}\,;$$

$$m_{h'} = \sqrt{4{,}84\cdot 10^{-4} + 17{,}6\cdot 10^{-4}};$$

Ответ. $m_{h'} = 4{,}7\cdot 10$ м$^{-2}$; $m_{h'} = 0{,}047$ м.

Пример 5. Емкость конденсатора C определена по формуле

$$C = \frac{Q}{U},$$

где Q — абсолютная величина заряда (в кулонах); U — напряжение (в вольтах).

Определить (в общем виде) среднюю квадратическую ошибку m_C, если известны Q, U, m_Q, m_U.

Решение. По формуле (332) имеем

$$m_C^2 = \left(\frac{\partial C}{\partial Q}\right)^2 m_Q^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial U}\right)^2 m_U^2 .$$

Но

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = \frac{1}{U}; \quad \frac{\partial C}{\partial U} = -\frac{Q}{U^2}.$$

Ответ.

$$m_C = \sqrt{\left(\frac{m_Q}{U}\right)^2 + \left(-\frac{Q}{U^2} m_U\right)^2};$$

$$m_C = \frac{1}{U}\sqrt{m_Q^2 + \frac{Q^2}{U^2} m_U^2} \qquad (355)$$

(m_C будет выражена в единицах емкости C, т. е. в данном случае в фарадах).

Пример 6. Определить среднюю квадратическую ошибку вычисленной длины волны модулированного светового потока, если скорость света $c = 299792{,}5$ км/с $\pm 0{,}4$ км/с (m_C), а частота, равная $f = 10000{,}0$ кГц, определена со средней квадратической ошибкой $m_f = 0{,}15$ кГц.

Решение.

Так как $\lambda = \frac{c}{f}$, то

$$m_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial c}\right)^2 m_c^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial f}\right)^2 m_f^2},$$

или

$$m_\lambda = \sqrt{\left(\frac{m_c}{f}\right)^2 + \left(-\frac{c}{f^2} m_f\right)^2}. \qquad (356)$$

Подставим значения c, f, m_c, m_f в формулу (356), имея в виду, что если скорость света c дана в км/с, а частота f в кГц, то λ будет получено в м.

Предварительно преобразуем формулу (356)

$$m_\lambda = \sqrt{\left(\frac{m_c}{f}\right)^2 + \left(-\lambda\frac{m_f}{f}\right)^2} = \sqrt{\frac{m_c^2}{f^2} + \lambda^2\frac{m_f^2}{f^2}}. \qquad (356')$$

Итак,

$$m_\lambda = \sqrt{\frac{0{,}4^2}{10\,000^2} + 30^2\cdot\frac{0{,}15^2}{10\,000^2}} \approx \left(30\cdot\frac{0{,}15}{10\,000}\right) \text{ м}.$$

Ответ. $m_\lambda = 0{,}45\cdot 10^{-3}$ м $= 0{,}45$ мм.

Средняя квадратическая относительная ошибка

$$\frac{m_\lambda}{\lambda} = \frac{0{,}45 \text{ мм}}{30 \text{ м}} \approx \frac{1}{67\,000}.$$

Пример 7. В радио- и светолокации время t распространения волн в прямом и обратном направлениях определяется по формуле

$$t = \frac{\varphi}{2\pi f},$$

где φ — разность фаз (фазовый сдвиг); f — частота колебаний (модуляции).

Определить среднюю квадратическую ошибку времени m_t, если $m_\varphi = 1{,}0°$, $f = 10$ МГц, $m_f = 0{,}15$ кГц ($0{,}15\cdot 10^3$ Гц).

Решение. Принимая, что φ и f измерены независимо, по формуле (335) получим

$$m_t = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi f} m_\varphi\right)^2 + \left(-\frac{\varphi}{2\pi f^2} m_f\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi f} m_\varphi\right)^2 + \left(-t\frac{m_f}{f}\right)^2}. \qquad (357)$$

Подставив в формулу (357) соответствующие значения π, f, m_φ, m_f, t, примем, что двойное расстояние равно 30 км, тогда получим

$$t = \frac{30 \text{ км}}{299\,792{,}5 \text{ км/с}} = 1{,}01\cdot 10^{-4} \text{ с},$$

$$m_t = \sqrt{\left(\frac{1}{360}\cdot 10^{-7}\right)^2 + (-1{,}01\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}15\cdot 10^{-3})^2} =$$

$$= \sqrt{(2{,}8\cdot 10^{-10})^2 + (-151\cdot 10^{-10})^2}. \qquad (357')$$

Ответ. $m_t = 1{,}5\cdot 10^{-8}$ с.

Из формулы (357') видно, что ошибка в измерении фазового сдвига, равная $m_\varphi = 1{,}0°$, на точности определения времени практически не сказывается.

Пример 8. Горизонтальная дальность полета артиллерийского снаряда в безвоздушном пространстве на плоской невращающейся Земле вычисляется по формуле

$$s = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0, \qquad (358)$$

где v_0 — начальная скорость снаряда; θ_0 — угол возвышения; g — ускорение свободного падения.

Определить среднюю квадратическую ошибку m_s дальности s, если аргументы v_0 и θ_0 независимы и получены со средними квадратическими ошибками $m_{v_0} = 0{,}02$ % v_0, $m_{\theta_0} = 0{,}5'$; при этом $v_0 = 700$ м/с, $\theta_0 = 15°$.

Решение. По формуле (335) получим

$$m_s = \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial v_0}\right)^2 m_{v_0}^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial \theta_0}\right)^2 \frac{m_{\theta_0}^2}{\rho^2}}.$$

По формуле (358) находим

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v_0}\right) = \frac{2v_0}{g}\sin 2\theta_0; \quad \left(\frac{\partial s}{\partial \theta_0}\right) = \frac{2v_0^2}{g}\cos 2\theta_0.$$

Следовательно,

$$m_s=\sqrt{\left(\frac{2v_0}{g}\sin 2\theta_0 m_{v_0}\right)^2+\left(\frac{2v_0^2}{g}\cos\theta_0\frac{m_{\theta_0}}{\rho}\right)^2},$$

$$m_s=\sqrt{\left(\frac{2\cdot 700}{9,81}\cdot\sin 30^\circ\cdot 0,14\right)^2+\left(\frac{2\cdot 700\cdot 700}{9,81}\cdot\cos 30^\circ\cdot\frac{0,5'}{3438'}\right)^2},$$

$$m_s=\sqrt{10^2+12,6^2}. \qquad (359)$$

Ответ. $m_s = 16$ м ($s = 24975$ м).

Пример 9. Сторона треугольника вычислена по теореме синусов

$$a=b\frac{\sin A}{\sin B},$$

где b, A, B получены из независимых измерений со средними квадратическими ошибками m_b, m_A, m_B.

Определить в общем виде среднюю квадратическую ошибку m_a вычисленной стороны a.

Решение. В соответствии с формулой (335) имеем

$$m_a=\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 m_b^2+\left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2 m_A^2+\left(\frac{\partial a}{\partial B}\right)^2 m_B^2}.$$

Ответ.

$$m_a=\sqrt{\left(\frac{\sin A}{\sin B}\right)^2 m_b^2+\left(\frac{b\cos A}{\sin B}\right)^2\frac{m_A^2}{\rho^2}+\left(-\frac{b\sin A\cos B}{\sin^2 B}\right)^2\frac{m_B^2}{\rho^2}}. \qquad (360)$$

(Здесь ρ — радиан; $\rho^\circ = 57,3^\circ$; $\rho' = 3438'$; $\rho'' = 206265''$).

Пример 10. Известна средняя квадратическая ошибка измерения угла способом повторений $m_\beta = 6''$. Определить среднюю квадратическую ошибку суммы двух смежных углов β_1 и β_2.

Решение. Составим функцию

$$f(\beta_1, \beta_2)=\beta_1+\beta_2. \qquad (361)$$

Как известно, ошибки значений смежных углов, измеренных способом повторений, коррелятивно связаны (через систематическую ошибку общего направления). По исследованиям К. К. Скиданенко * $r_{\beta_1,\beta_2} = -0,25$. Применяя для оценки точности формулу (297), для функции (332) запишем

$$M_f=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial\beta_1}\right)^2 m_\beta^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\beta_2}\right)^2 m_\beta^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial\beta_1}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial\beta_2}\right)r_{\beta_1,\beta_2}m_\beta^2}$$

или

$$M_f=\sqrt{2m_\beta^2-2\cdot 0,25m_\beta^2}=m_\beta\sqrt{1,5}\approx 7,3''. \qquad (362)$$

Если бы не была учтена корреляция ошибок, тогда было бы получено $M_f = 8,5''$.

* *Скиданенко К. К.* Коррелятивные зависимые случайные ошибки в геодезических измерениях.— Геодезия и картография, 1958, № 10, с. 7—15.

Глава VII

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ РАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 36. ПРОСТАЯ АРИФМЕТИЧЕСКАЯ СРЕДИНА — НАИБОЛЕЕ НАДЕЖНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НАБЛЮДАЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть для определения значения некоторой величины X произведено n независимых равноточных наблюдений и получены результаты

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n. \qquad (363)$$

С вероятностной точки зрения, полученные из наблюдений результаты (363) представляют ряд значений случайной величины. Наиболее надежный окончательный результат, являющийся, очевидно, функцией величин $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ и приближенным значением неизвестной величины X, тоже является случайной величиной. Хотя понятие равноточности наблюдений общедоступно, заметим, что равноточными наблюдениями одной и той же величины или однородных величин называют такие наблюдения, которые выполнены одним прибором или приборами одинаковой точности, равным числом приемов, в примерно равных условиях и одним и тем же наблюдателем (или одинаково опытными наблюдателями).

С формальной вероятностно-статистической точки зрения, результаты наблюдений равноточны, если их средние квадратические ошибки одинаковы, т. е.

$$m_{x_1}=m_{x_2}=m_{x_3}=\ \ldots\ =m_{x_n}=m. \qquad (364)$$

Перейдем к вопросу определения из результатов многократных равноточных наблюдений наиболее надежного окончательного результата.

При рассмотрении вопроса о связи среднего арифметического с математическим ожиданием (§ 15) было установлено, что

$$\text{вер.}\lim_{N\to\infty}\bar{x}=M(X). \qquad (117)$$

Доказательство справедливости формулы (117) базировалось на основании закона больших чисел — теореме Бернулли. Одним из важнейших следствий закона больших чисел является теорема Чебышева об устойчивости среднего арифметического.

Теорема Чебышева. *При достаточно большом числе независимых испытаний среднее арифметическое наблюденных значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию,* т. е.

$$\underset{n\to\infty}{P}\left\{\left|\frac{[x]}{n}-M(X)\right|\leqslant\varepsilon\right\}>1-\delta, \qquad (365)$$

где $\frac{[x]}{n}=\bar{x}$ — среднее арифметическое из результатов наблюдений (363), которое будем называть простой арифметической срединой и обозначать через $\bar{x}$; ε и δ — сколь угодно малые положительные числа.

Принимая во внимание, что математическое ожидание $M(X)$ при отсутствии систематических ошибок многократных измерений одной и той же величины есть истинное значение случайной величины, которое мы выше обозначили через X, теорему Чебышева применительно к результатам равноточных наблюдений запишем в виде

$$\underset{n\to\infty}{P}\{|\bar{x}-X|<\varepsilon\}>1-\delta. \qquad (366)$$

Выражение «сходится по вероятности» означает следующее: при увеличении числа наблюдений n вероятность того, что значение случайной величины $\bar{x}$ и ее истинное значение X при отсутствии систематических ошибок многократных измерений одной и той же величины будут отличаться друг от друга на сколь угодно малую величину ε, сколь угодно близка к единице. Таким образом, исходя из теоремы Чебышева, в качестве приближенного значения неизвестной величины X, если получены результаты независимых равноточных наблюдений (363), следует рекомендовать простую арифметическую средину.

Формулу (117) можно доказать также чисто арифметически, опираясь на свойство компенсации случайных ошибок, согласно которому

$$\text{вер.}\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0.$$

В самом деле, записав ряд истинных ошибок

$$\left.\begin{aligned} x_1-X&=\Delta_1,\\ x_2-X&=\Delta_2,\\ &\ldots\ldots\\ x_n-X&=\Delta_n \end{aligned}\right\} \qquad (367)$$

и сложив левые и правые части равенств (367), имеем

$$[x]-nX=[\Delta]. \qquad (368)$$

Разделив на n число наблюдений — левую и правую части (368), получим

$$\frac{[x]}{n}-X=\frac{[\Delta]}{n}. \qquad (369)$$

Или, по свойству компенсации случайных ошибок, принимая обозначение

$$\bar{x}=\frac{[x]}{n}, \qquad (370)$$

будем иметь

$$\text{вер.}\lim_{n\to\infty}\bar{x}=X. \qquad (371)$$

Выражение (371) отражает так называемый принцип арифметической средины, сущность которого может быть сформулирована следующим образом: *при числе равноточных наблюдений одной и той же величины неограниченно большом и при отсутствии систематических ошибок простая арифметическая средина стремится к истинному значению.*

Недостатком доказательства (371), равно как и теоремы (366) в применении к обработке наблюдений, является то, что в практике число наблюдений отнюдь не бесконечно большое, в большинстве же случаев весьма ограниченное*.

Поставим вопрос несколько иначе, а именно: является ли простая арифметическая средина наиболее надежным, т. е. обладающим наибольшей при данных условиях вероятностью, значением?

Предположим, что ошибки наблюдений в ряде (363) случайны и подчиняются закону нормального распределения. Итак, имеем: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты наблюдений, $v_i=x_i-\bar{x}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ — их случайные ошибки, представляющие отклонения значений x_i от наиболее надежного значения $\bar{x}$.

Вероятность попадания случайной ошибки в интервал dv, как известно по формуле (257), равняется

$$p=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2v^2}\,dv. \qquad (372)$$

Вероятность того, что при n равноточных наблюдений появляются ошибки $v_1, v_2, \ldots, v_n$ по теореме умножения независимых событий (§ 7), равна

$$P=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2\left(v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2\right)}\,dv_1dv_2\ldots dv_n, \qquad (373)$$

или

$$P=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[v]^2}\,dv_1dv_2\ldots dv_n. \qquad (374)$$

Из формулы (374) вытекает, что при любом значении меры точности h вероятность P будет максимальной, если

$$[v^2]=\min, \qquad (375)$$

так как все множители в выражении (374), кроме $e^{-h^2[v^2]}$, не зависят от отклонений v_i.

* Вторым и не менее существенным недостатком принципа арифметической средины является то, что при наличии односторонне действующих систематических ошибок среднее арифметическое перестает практически заметно приближаться к истинному значению, начиная с некоторого значения n.

Множитель $e^{-h^2[v^2]}$ в свою очередь принимает максимальное значение при условии (375), так как

$$e^{-h^2[v^2]} = \frac{1}{e^{h^2[v^2]}}. \qquad (376)$$

Таким образом, *наиболее надежным значением из ряда независимых равноточных наблюдений одной и той же величины является такое значение x, для которого сумма квадратов отклонений $(x_i - x)$ минимальна*, т. е.

$$(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \ . \ . \ . \ + (x_n - x)^2 = [v^2] = \min. \qquad (377)$$

Условие (375) носит название п р и н ц и п а н а и м е н ь ш и х к в а д р а т о в.

Определим значение x, которое отвечает условию (377), для чего найдем первую производную $\frac{d}{dx}[v^2]$ и приравняем ее нулю.

Итак,

$$\frac{d}{dx}[v^2] = \frac{d}{dx}[(x_i - x)^2] = 2[(x_i - x)] = 0. \qquad (378)$$

Условие (378) выполняется, если вместо x подставить простую арифметическую средину $\bar{x}$ из формулы (370). В самом деле,

$$-2\left(x_1 - \frac{[x]}{n}\right) + 2\left(x_2 - \frac{[x]}{n}\right) + \ . \ . \ . + 2\left(x_n - \frac{[x]}{n}\right) = 2x_1 -$$

$$-2\frac{[x]}{n} + 2x_2 - 2\frac{[x]}{n} + \ . \ . \ . + 2x_n - 2\frac{[x]}{n} =$$

$$= 2(x_1 + x_2 + \ . \ . \ . \ + x_n) - 2[x] = 2[x] - 2[x] = 0. \qquad (379)$$

Таким образом, *если случайные ошибки Δ независимых равноточных наблюдений имеют $M(\Delta) = 0$ и подчиняются нормальному закону, то наиболее надежным значением определяемой величины является простая арифметическая средина.*

Иногда вместо простой арифметической средины используют так называемую м е д и а н у — срединное значение случайной величины, способ отыскания которого аналогичен описанному в § 26 способу отыскания вероятной ошибки. Легко показать, что медиана менее надежна, чем арифметическое среднее потому, что зависит от метода измерений.

При вычислении значения простой арифметической средины полезно иметь в виду следующие практические рекомендации. В большинстве случаев неудобно вычислять значение $\bar{x}$ по формуле (370), так как в сумму $[x]$ входит большая неизменяющаяся часть x_i. Для упрощения вычислений рекомендуется вводить приближенное значение измеренной величины x', равное, например, одному из значений ряда $x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n$ (предпочтительнее наименьшему);

тогда все операции по вычислению $\bar{x}$ сведутся практически к операциям с остатками $\varepsilon_i = x_i - x'$. В самом деле, если

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x' &= \varepsilon_1, \\ x_2 - x' &= \varepsilon_2, \\ &\ . \ . \ . \ . \ . \\ x_n - x' &= \varepsilon_n, \end{aligned}\right\} \qquad (380)$$

то, суммируя левую и правую части равенств (380) и разделив полученные суммы на число наблюдений n, получим

$$\frac{[x]}{n} - x' = \frac{[\varepsilon]}{n}$$

или

$$\bar{x} = x' + \frac{[\varepsilon]}{n}. \qquad (381)$$

Удобство выбора в качестве x' наименьшего значения из ряда $x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n$ состоит в том, что все остатки ε_i в данном случае будут положительными и возможность допустить просчет при вычислениях уменьшается по сравнению со случаем выбора в качестве приближенного значения x' произвольного числа.

§ 37. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ПРОСТОЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СРЕДИНЫ

Если при равноточных наблюдениях одной и той же величины получен ряд результатов $x_1, x_2, x_3, \ . \ . \ . \ , x_n$, то в качестве обобщенной характеристики равноточности всего ряда наблюдений можно принять, как отмечалось выше, среднюю квадратическую ошибку m, характеризующую точность любого из результатов ряда. Будем в последующем эту ошибку называть средней квадратической ошибкой одного наблюдения. Простая арифметическая средина $\bar{x}$ в общем случае вычисляется, как известно, по формуле (370).

Возникает вопрос: как определить среднюю квадратическую ошибку простой арифметической средины $m_{\bar{x}}$, т. е. как оценить ее надежность, если известна средняя квадратическая ошибка m одного наблюдения?

Для определения $m_{\bar{x}}$ представим $\bar{x}$ в виде

$$\bar{x} = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{n}x_n. \qquad (382)$$

Полагая результаты равноточных наблюдений $x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n$ независимыми, определим $m_{\bar{x}}$ по формуле средней квадратической ошибки функции общего вида (335)

$$m_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{x_2}^2 + \ . \ . \ . \ + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{x_n}^2, \qquad (383)$$

где

$$\frac{1}{n}=\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_1}\right)=\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_2}\right)=\ldots=\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_n}\right).$$

В силу равноточности наблюдений в формуле (382) можем принять

$$m_{x_1}=m_{x_2}=\ .\ \ .\ \ .\ =m_{x_n}=m; \tag{384}$$

следовательно,

$$m_{\bar{x}}^2=\frac{m^2}{n}.$$

Обозначим

$$m_{\bar{x}}=M$$

и окончательно запишем

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{385}$$

Итак, средняя квадратическая ошибка простой арифметической средины меньше средней квадратической ошибки одного наблюдения в корень квадратный раз из числа наблюдений.

Формула (385) имеет весьма важное значение и широкое применение в практике оценки точности наблюдений.

Однако следует иметь в виду, что увеличение числа наблюдений n с целью повышения точности окончательного результата — простой арифметической средины — должно быть ограничено разумными пределами, обусловленными наличием в результатах наблюдений систематических ошибок. Так, например, совместное влияние случайных ошибок наблюдений и постоянной систематической ошибки или остаточного влияния систематических ошибок, что сути дела не меняет, может быть выражено формулой

$$M'=\sqrt{\frac{m^2}{n}+a^2}, \tag{386}$$

где a — систематическая ошибка.

Очевидно, что при любом числе n, как бы велико оно ни было, M' не может стать меньше a. Отсюда следует, что и число повторных наблюдений n сверх некоторого предела не приводит к повышению точности простой арифметической средины. Так, при измерении углов одноминутным теодолитом точность измерений практически не повышается после 8—10 повторных измерений, так как при дальнейшем увеличении числа приемов влияние систематических ошибок (центрировка, приборные ошибки и пр.) начинает заметно превышать влияние ошибок случайных.

Таким образом, чтобы повысить точность окончательных результатов измерений, необходимо выбрать соответствующий прибор, правильно установить число измерений и организовать эти измерения надлежащим образом, например распределить наблюдения на разное время и т. п. В этом случае увеличение числа приемов может повысить точность. При сравнении же по точности двух однотипных приборов следует сравнивать показатели точности одного измерения (например, средние квадратические ошибки одного измерения m) или показатели точности (например, M) арифметических средин, полученных из равного числа измерений, выполненных сравниваемыми приборами.

После оценки точности арифметической средины производится запись $\bar{x}\pm M$. Границы, в которых может быть заключено точное значение измеренной величины, с вероятностью $\Phi(t)$ равны

$$P\left(\bar{x}-t_\alpha M\leqslant X\leqslant\bar{x}+t_\alpha M\right)=P_\alpha.$$

Например, из 12 измерений угла получено значение $\bar{x}=57°23'44{,}7''$, $M=0{,}75''$. С вероятностью $P_\alpha=0{,}9973$ измеренный угол заключен в пределах

$$P\,(57°23'42{,}4''\leqslant X\leqslant 57°23'47{,}0'')=0{,}9973.$$

§ 38. ОТКЛОНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ВЕЛИЧИНЫ ОТ ПРОСТОЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СРЕДИНЫ

При оценке точности результатов наблюдений формулу (145)

$$m=\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$$

в большинстве случаев использовать не представляется возможным, так как точное (истинное) значение наблюдаемой величины неизвестно. В силу этого, следовательно, невозможно вычислить истинные ошибки

$$\Delta_i=x_i-X,$$

необходимые для вычисления суммы $[\Delta^2]$ в упомянутой формуле. Простую арифметическую средину $\bar{x}$ можно вычислить всегда, когда наблюдение одной и той же величины выполнено два и более раз. Для надежной оценки точности, в соответствии с формулой (199), необходимо, чтобы число наблюдений n удовлетворяло условию $n\geqslant 8\div 10$.

Произведя n повторных наблюдений одной и той же величины, можно вычислить n отклонений результатов этих наблюдений от простой арифметической средины

$$v_i=x_i-\bar{x}\quad(i=1,\ 2,\ .\ \ .\ \ .\ ,\ n).$$

Задача состоит в том, чтобы получить формулу для оценки точности наблюдений, которая позволяла бы вычислять среднюю квадратическую ошибку m по отклонениям v_i результатов равноточных наблюдений одной и той же величины от простой арифметической средины. Прежде чем решить поставленную задачу, рассмотрим свойства отклонений v_i.

Первое свойство. *Алгебраическая сумма отклонений результатов равноточных наблюдений одной и той же величины от простой арифметической средины равна нулю при любом числе наблюдений*, т. е. $[v] = 0$.

Докажем это свойство, для чего по определению v_i запишем

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x_1 - \bar{x}, \\ v_2 &= x_2 - \bar{x}, \\ &\dots\dots \\ v_n &= x_n - \bar{x}. \end{aligned}\right\} \tag{387}$$

Суммируя левую и правую части равенств (387), получим

$$[v] = [x] - n\bar{x}. \tag{388}$$

Но в формуле (388) сумма $[x] = n\bar{x}$ (по определению простой арифметической средины), следовательно,

$$[v] = 0. \tag{389}$$

При вычислении отклонений v_i (387) часто используют округленное значение простой арифметической средины. Легко показать, что если ошибка округления $\bar{x}$

$$\beta = \bar{x} - \bar{x}_{\text{округл}},$$

то условию (389) будет соответствовать

$$[v] = n\beta^*. \tag{390}$$

Свойство (389) или (390) чисто арифметическое и выполняется при любом распределении ошибок. Формула (390) используется для контроля вычислений простой арифметической средины $\bar{x}$.

Второе свойство. *Сумма квадратов отклонений результатов равноточных наблюдений от простой арифметической средины меньше суммы квадратов отклонений этих же результатов наблюдений от любой другой величины, не равной простой арифметической средине*, т. е. если $x' \neq \bar{x}$, то

$$[v^2] < [\varepsilon^2], \tag{391}$$

где

$$v_i = x_i - \bar{x}, \quad \varepsilon_i = x_i - x'.$$

* Свойством (390) мы выше уже воспользовались при вычислениях контрольной суммы Σ_k в табл. 5 (§ 15).

Докажем второе свойство отклонений v_i алгебраическим путем. Для этой цели, вычитая v_i из ε_i по частям из правого равенства левое, получим

$$\varepsilon_i - v_i = x_i - x' - x_i + \bar{x} = \bar{x} - x' = c. \tag{392}$$

На основании выражения (392), для случая, когда число наблюдений равно n, можем записать

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= v_1 + c, \\ \varepsilon_2 &= v_2 + c, \\ &\dots\dots \\ \varepsilon_n &= v_n + c. \end{aligned}\right\} \tag{393}$$

Возведем в квадрат равенства (393) и, суммируя левую и правую части, получим

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + nc^2 + 2c[v]. \tag{394}$$

Но член $2c\,[v] = 0$ по первому свойству отклонений v_i, тогда

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + nc^2. \tag{395}$$

Из формулы (395) следует, что

$$[\varepsilon^2] > [v^2]$$

на положительное число nc^2, вне зависимости от того, $x' > \bar{x}$ или $x' < \bar{x}$.

Таким образом, при $x' \neq x$

$$[v^2] < [\varepsilon^2], \tag{396}$$

что и требовалось доказать.

Доказательство свойства отклонений v_i, приведшее к неравенству (396), подтверждает справедливость условия (375), а следовательно, и справедливость утверждения (§ 36), что наиболее надежным значением из ряда независимых равноточных наблюдений одной и той же величины является простая арифметическая средина.

Перейдем к решению поставленной выше задачи, т. е. найдем способ оценки точности результатов наблюдений с использованием v_i.

§ 39. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ОДНОГО НАБЛЮДЕНИЯ, ВЫЧИСЛЕННАЯ ПО ОТКЛОНЕНИЯМ РЕЗУЛЬТАТОВ РАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ОТ ПРОСТОЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СРЕДИНЫ

Для решения поставленной в § 38 задачи установим связь между истинными ошибками Δ_i и отклонениями v_i. С этой целью запишем

$$\Delta_i = x_i - X; \quad v_i = x_i - \bar{x}. \tag{397}$$

Составим разность

$$\Delta_i - v_i = x_i - X - x_i + \bar{x} = \bar{x} - X = \eta.$$

Здесь η — истинная ошибка простой арифметической средины.

Для случая, когда число измерений n, можем записать

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= v_1 + \eta, \\ \Delta_2 &= v_2 + \eta, \\ &\cdots\cdots \\ \Delta_n &= v_n + \eta. \end{aligned}\right\} \tag{398}$$

Возведем в квадрат равенства (398)

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1^2 &= v_1^2 + \eta^2 + 2v_1\eta, \\ \Delta_2^2 &= v_2^2 + \eta^2 + 2v_2\eta, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_n^2 &= v_n^2 + \eta^2 + 2v_n\eta. \end{aligned}\right\} \tag{399}$$

Суммируя левую и правую части равенств (399), получим

$$[\Delta^2] = [v^2] + n\eta^2 + 2\eta[v]. \tag{400}$$

Или по первому свойству отклонений

$$[\Delta^2] = [v^2] + n\eta^2. \tag{401}$$

Выражение (401) позволяет перейти к вычислению средней квадратической ошибки по отклонениям v_i вместо истинных ошибок Δ_i.

Разделив левую и правую части равенства (401) на число измерений n, получим

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n} + \eta^2, \tag{402}$$

или с учетом формулы (145)

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \eta^2. \tag{403}$$

По определению истинной ошибки

$$\Delta_i = x_i - X,$$

истинная ошибка η простой арифметической средины в соответствии с (369) может быть выражена формулой

$$\eta = \frac{[\Delta]}{n}. \tag{404}$$

Следовательно,

$$\eta^2 = \frac{[\Delta]^2}{n^2} = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n)^2}{n^2}. \tag{405}$$

Далее

$$\eta^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2 + 2\Delta_1\Delta_2 + 2\Delta_2\Delta_3 + \ldots}{n^2},$$

или

$$\eta^2 = \frac{[\Delta^2]}{n^2} + 2\,\frac{\Sigma\,\Delta_i\Delta_k}{n^2}. \tag{406}$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum \Delta_i\Delta_k = M(\Delta_i\Delta_k) = 0,$$

то по формуле (406) имеем

$$\eta^2 = \frac{m^2}{n}. \tag{407}$$

Выше было установлено, что $\eta = \bar{x} - X$ есть не что иное, как **истинная ошибка простой арифметической средины**. Из выражения (407) в соответствии с формулой (385) $\eta = M$, т. е. является **средней квадратической ошибкой простой арифметической средины**. Это в высшей степени важное положение теории ошибок, вытекающее из простых, но строгих рассуждений, привело к доказательству еще одного свойства кривой Гаусса, а именно: **средняя квадратическая ошибка есть именно та ошибка, которую следует ожидать при данном комплексе измерений** (см. [22, с. 527—528]).

Подставляя значение η^2 из (407) в формулу (403), получим

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \frac{m^2}{n}$$

или

$$m^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{[v^2]}{n}. \tag{408}$$

Окончательно

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \tag{409}$$

Формулу (409) часто называют формулой Бесселя.

Когда простую арифметическую средину вычисляют с введением приближенного значения x' по формуле (381), контролем вычисления $[v^2]$ может служить равенство

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n},$$

что очевидно, так как

$$v_i = x_i - \bar{x} = x_i - \left\{x' + \frac{[\varepsilon]}{n}\right\} = \varepsilon_i - \frac{[\varepsilon]}{n}. \qquad (410)$$

В самом деле, по формуле (410) можем записать

$$v_i^2 = \varepsilon_i^2 + \left\{\frac{[\varepsilon]}{n}\right\}^2 - 2\varepsilon_i \frac{[\varepsilon]}{n} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

или

$$[v^2] = [\varepsilon^2] + n\left\{\frac{[\varepsilon]}{n}\right\}^2 - 2\,\frac{[\varepsilon]^2}{n}.$$

Таким образом,

$$[v^2] = [\varepsilon^2] + \frac{[\varepsilon]^2}{n} - 2\,\frac{[\varepsilon]^2}{n},$$

или

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}, \qquad (411)$$

что и требовалось доказать.

Существуют также и другие способы контроля вычислений $[v^2]$.

Вычислив среднюю квадратическую ошибку m по формуле (409), среднюю квадратическую ошибку простой арифметической средины в соответствии с формулой (385) вычисляют по формуле

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}. \qquad (412)$$

Средняя квадратическая ошибка самой средней квадратической ошибки, вычисленной по формуле (409), в соответствии с формулой (199), равна

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (413)$$

Разность $(n-1)$ в формуле (409) называют числом избыточных (добавочных) наблюдений.

Практически достаточно как для формулы (145), так и для формулы (409) m_m вычислять по формуле

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2n}}. \qquad (296)$$

Для оценки степени приближения действительного распределения ошибок к нормальному, как уже отмечалось в § 30, вычисляют коэффициент

$$k_1 = \frac{m_{\text{эмп}}}{\vartheta_{\text{эмп}}}$$

соотношения средней квадратической и средней ошибок. В случае, когда истинные ошибки наблюдений неизвестны, среднюю ошибку можно вычислить по абсолютным значениям отклонений v_i по формуле

$$\vartheta \approx \frac{[|v|]}{n-0{,}5}. \qquad (414)$$

Формула (414) получена на основании формулы, предложенной Петерсом

$$m \approx 1{,}25\,\frac{[|v|]}{n-0{,}5}. \qquad (415)$$

В основу вывода формулы (415) положена теоретическая связь между средней и средней квадратической ошибками, выраженная формулой

$$m \approx 1{,}25\vartheta. \qquad (416)$$

Иногда среднюю квадратическую ошибку одного наблюдения, наряду с формулой (409), вычисляют по формуле (415). Совпадение или значительное расхождение полученных результатов, равно как и совпадение или значительное расхождение значения коэффициента

$$k_1 = \frac{m_{\text{эпм}}}{\vartheta_{\text{эпм}}},$$

с его теоретическим значением 1,25, являются количественными показателями сходимости действительного и теоретического распределений ошибок наблюдений.

§ 40. ПОРЯДОК МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЯДА РАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Получив в результате повторных равноточных наблюдений одной и той же величины ряд результатов

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

вычисляют:

1) простую арифметическую средину по формуле (370) или (381) с контролем: $[v] = 0$ (или $[v] = n\beta$, где β — ошибка округления значения $\bar{x}$);

2) среднюю квадратическую ошибку одного измерения по формуле (409) с оценкой ее надежности по формуле (296) и с контролем вычисления суммы квадратов отклонений

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}; \qquad (417)$$

иногда вычисляют также

$$m \approx 1{,}25\,\frac{[|v|]}{n-0{,}5}; \qquad (418)$$

3) среднюю квадратическую ошибку простой арифметической средины по формуле (412) с оценкой ее надежности по формуле

$$m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2n}}; \tag{419}$$

4) доверительный интервал для точного значения измеренной величины

$$P\left(\bar{x} - t_\alpha M \leqslant X \leqslant \bar{x} + t_\alpha M\right) = P_\alpha. \tag{420}$$

Примеры. 1. Даны результаты равноточных измерений одного и того же угла. Определить $\bar{x}$, m и M.

Решение. Составим табл. 23.

Примечание. Отклонение $[v]$ от нуля (— 0,4) вызвано округлением арифметической средины.

В самом деле, $\bar{x} = 57°23'44,667''$, а следовательно, $\beta = \bar{x} - \bar{x}_{\text{округл}} = -0,033''$; $[v] = n\beta = -0,033'' \cdot 12 = -0,4''$.

2. В табл. 24 приведены из книги А. Д. Бродского и В. Л. Кана «Краткий справочник по математической обработке результатов измерений»

Таблица 23

Результаты измерений x_i	v_i	v_i^2	ε_i	ε_i^2	Решение
57° 23′ 44″	−0,7	0,49	+4	16	Контроль $[v^2]$: $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$
40	−4,7	22,1	0	0	
43	−1,7	2,89	+3	9	
45	+0,3	0,09	+5	25	
46	+1,3	1,69	+6	36	$[v^2] = 334 - \frac{56^2}{12} = 73;$
43	−1,7	2,89	+3	9	
48	+3,3	10,9	+8	64	
45	+0,3	0,09	+5	25	$m = \sqrt{\frac{72,9}{11}};$
48	+3,3	10,9	+8	64	
46	+1,3	1,69	+6	36	$m = 2,6''$ [по формуле (415)
47	+2,3	5,29	+7	49	$m = 2,7''$];
41	−3,7	13,7	+1	1	$m_m = 0,55''$
					$M = \frac{2,6''}{\sqrt{12}}$; $M = 0,75''$;
					$m_M = 0,15''$
$x' = 57° 23' 40''$	−12,5	72,9	+56	334	
$\bar{x} = 57° 23' 44,7''$	+12,1 / −0,4				
($\bar{x} = 57°23'44,667''$)	$\Sigma_к = -0,4$				$\bar{x} = 57° 23' 44,7'' \pm 1,5''$ ($P_\alpha = 0,95$)

Таблица 24

Сопротивление R_i, Ом ($R_i = x_i$)	$\varepsilon_i = x_i - x'$, Ом	$v_i = x_i - \bar{x}$, Ом	Решение
6,2114	$+14 \cdot 10^{-4}$	$-0,1 \cdot 10^{-4}$	Контроль $[v^2]$:
111	+11	−3,1	
099	−1	−15,1	$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} =$
092	−8	−22,1	
125	+25	+10,9	$= 1,149 \cdot 10^{-4} - \frac{(650 \cdot 10^{-4})^2}{46}$
126	+26	+11,9	
127	+27	+12,9	$[v^2] = 0,231 \cdot 10^{-4}$
125	+25	+10,9	
116	+16	+1,9	$m = \sqrt{\frac{0,230 \cdot 10^{-4}}{46}}$
112	+12	−2,1	
110	+10	−4,1	$m = 7,1 \cdot 10^{-4}$ Ом
112	+12	−2,1	[по формуле (415)
114	+14	−0,1	
105	+5	−9,1	$m = 6,5 \cdot 10^{-4}$ Ом]
115	+15	+0,9	
116	+16	+1,9	$m_m \approx \frac{7,1 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{92}}$
117	+17	+2,9	
116	+16	+1,9	$m_m = 0,74 \cdot 10^{-4}$ Ом
112	+12	−2,1	
125	+25	+10,9	$M = \frac{7,1 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{46}}$
120	+20	−5,9	
121	+21	−6,9	$M = 1,05 \cdot 10^{-4}$ Ом
122	+22	−7,9	
129	+29	+14,9	$m_M \approx \frac{1,05 \cdot 10^{-5}\ \text{Ом}}{\sqrt{92}}$
114	+14	−0,1	
109	+9	−5,1	$m_M = 0,11 \cdot 10^{-4}$ Ом
119	+19	−4,9	
110	+10	−4,1	
108	+8	−6,1	
111	+11	−3,1	
111	+11	−3,1	
113	+13	−1,1	
116	+16	+1,9	
111	+11	−3,1	

Продолжение табл. 24

Сопротивление R_i, Ом ($R_i = x_i$)	$\varepsilon_i = x_i - x'$, Ом	$v_i = x_i - \bar{x}$, Ом	Решение
113	+13	−1,1	
103	+3	−11,1	
111	+11	−3,1	
106	+6	−8,1	
114	+14	−0,1	
110	+10	−4,1	
112	+12	−2,1	
113	+13	−1,1	
113	+13	−1,1	
121	+21	+6,9	
115	+15	+0,9	
116	+16	+1,9	
$x' = 6{,}2100$ Ом $\bar{x} = 6{,}211413$	$\Sigma = +650 \cdot 10^{-4}$ $[\varepsilon^2] = 1{,}149 \cdot 10^{-4}$	$-117{,}7 \cdot 10^{-4}$ $+119{,}1 \cdot 10^{-4}$ $[v^2] = 0{,}230 \cdot 10^{-4}$	

(М., Стандартгиз, 1960) результаты ряда равноточных измерений сопротивления при эталонировании платинового термометра № 318 (ВНИИМ) в точке кипения кислорода (при $t = -182{,}97$ °С). Вычислить окончательный результат исследования и оценить его точность.

Таким образом, в результате математической обработки получены:

1) наиболее надежное значение сопротивления в точке кипения кислорода $\bar{x} = R = 6{,}211413$ Ом $\pm 1{,}05 \cdot 10^{-4}$ Ом ($P_\alpha = 0{,}68$);

2) с вероятностью 0,95 истинное значение сопротивления R, заключенное в границах:

$$P(\bar{x} - t_\alpha M \leqslant R \leqslant \bar{x} + t_\alpha M) = P_\alpha,$$
$$P(6{,}21141 - 2 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-4} \leqslant R \leqslant 6{,}21141 + 2 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-4}) = 0{,}95,$$
$$P(6{,}21120 \text{ Ом} \leqslant R \leqslant 6{,}21162 \text{ Ом}) = 0{,}95. \qquad (421)$$

Глава VIII
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 41. ПОНЯТИЕ О НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

В практике математической обработки результатов наблюдений одной и той же величины часто встречаются случаи, когда опытный материал накапливается в виде серий с неодинаковым числом равноточных наблюдений (приемов). Иногда совместной обработке подлежат наблюдения, выполненные приборами различной точности и с разным числом приемов, в существенно разных условиях и т. п.

Пусть, например, имеется k серий равноточных наблюдений одной и той же величины, точное значение которой X,

$$\left.\begin{array}{l} \text{I)}\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i, \\ \text{II)}\ x_{i+1},\ x_{i+2},\ \ldots,\ x_{2i},\ x_{2i+1},\ x_{2i+2}, \\ \text{III)}\ x_{2i+3},\ x_{2i+4},\ \ldots,\ x_{3i-4},\ x_{3i-3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{к)}\ x_{(k-1)i},\ x_{ki-i+1},\ \ldots,\ x_{k(i-1)},\ x_{ki}. \end{array}\right\} \qquad (422)$$

Если каждая из серий обработана отдельно и получены простые арифметические средины

$$\bar{x}_{(\mathrm{I})},\ \bar{x}_{(\mathrm{II})},\ \bar{x}_{(\mathrm{III})},\ \ldots,\ \bar{x}_{(k)} \qquad (423)$$

и их средние квадратические ошибки

$$M_{\mathrm{I}},\ M_{\mathrm{II}},\ M_{\mathrm{III}},\ \ldots,\ M_k,$$

то совокупность (423) можно рассматривать как ряд случайных величин, представляющих простейший случай результатов неравноточных наблюдений. Могут встречаться и более сложные случаи, например, когда наблюдения в каждой серии между собой также неравноточны.

Таким образом, **неравноточными** наблюдениями одной и той же величины или однородных величин будем называть такие наблюдения, которые выполнены приборами различной точности или приборами одинаковой точности, но разным числом приемов, или выполнены в различных условиях (внешняя среда, опытность наблюдателя и т. д.).

Возникает задача отыскания по результатам неравноточных наблюдений одной и той же величины наиболее надежного окончательного результата, обладающего наименьшей средней квадратической ошибкой.

§ 42. ОБЩАЯ АРИФМЕТИЧЕСКАЯ СРЕДИНА ВЕСА НАБЛЮДЕНИЙ

Задачу на отыскание по результатам неравноточных наблюдений одной и той же величины наиболее надежного окончательного результата решим в общем виде.

Пусть в результате неравноточных наблюдений получен ряд

$$\left.\begin{array}{l} x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n, \\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots,\ m_n, \end{array}\right\} \qquad (424)$$

где m_1, m_2, m_3, ..., m_n — средние квадратические ошибки результатов наблюдений x_1, x_2, x_3, ..., x_n.

С формальной вероятностно-статистической точки зрения, следовательно, условие неравноточности различных значений x_i ($i = 1$, 2, 3, ..., n) может быть выражено неравенствами

$$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \ldots \neq m_n.$$

Для упрощения решения поставленной задачи от средних квадратических ошибок m_i перейдем к нормированным ошибкам t_i:

$$t_1 = \frac{x_1 - X}{m_1}; \quad t_2 = \frac{x_2 - X}{m_2}; \quad t_3 = \frac{x_3 - X}{m_3}; \ldots; \quad t_n = \frac{x_n - X}{m_n}. \quad (425)$$

Здесь

$$x_1 - X = \Delta_1; \; x_2 - X = \Delta_2; \; x_3 - X = \Delta_3; \; . \; . \; . \; ; \; x_n - X = \Delta_n$$

— истинные ошибки результатов неравноточных наблюдений. С вероятностной точки зрения, получение результатов x_i в (424) равносильно получению ряда нормированных ошибок (425).

Предположим, что случайные ошибки Δ_i подчиняются закону нормального распределения, тогда вероятности попадания нормированных ошибок в интервалы $t_i + dt_i$, $t_i - dt_i$ будут в соответствии с формулой (92) равны

$$\varphi(t_1)\,dt_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_1^2} dt_1; \; \varphi(t_2)\,dt_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_2^2} dt_2; \; . \; . \; . \; ;$$

$$\varphi(t_n)\,dt_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_n^2} dt_n.$$

Вероятность сложного события, состоящего в совместном появлении результатов неравноточных наблюдений (424), по теореме умножения для независимых случайных величин выражается формулой

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\left(t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2\right)} dt_1\,dt_2 \; . \; . \; . \; dt_n. \quad (426)$$

Наиболее надежное значение искомой величины, являющейся функцией результатов неравноточных наблюдений, будет соответствовать максимальному значению вероятности совокупности x_i (424). Из формулы (426) вытекает, что вероятность P примет максимальное значение, если будет выполнено условие

$$t_1^2 + t_2^2 + \; . \; . \; . \; + t_n^2 = \min$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - X}{m_i}\right)^2 = \min. \quad (427)$$

Примем в формуле (427) в качестве X его приближенное значение x_0 — наиболее надежное, пока неизвестное нам значение искомой величины и определим его под условием (427). Представим (427) в развернутом виде

$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{m_1^2} + \frac{(x_2 - x_0)^2}{m_2^2} + \ldots + \frac{(x_n - x_0)^2}{m_n^2} = \min. \quad (428)$$

Найдем первую производную по (428) и приравняем ее к нулю

$$\frac{d}{dx_i}\left\{\frac{(x_1 - x_0)^2}{m_1^2} + \frac{(x_2 - x_0)^2}{m_2^2} + \ldots + \frac{(x_n - x_0)^2}{m_n^2}\right\} =$$

$$= 2\left\{\frac{x_1 - x_0}{m_1^2} + \frac{x_2 - x_0}{m_2^2} + \ldots + \frac{x_n - x_0}{m_n^2}\right\} = 0$$

или, сокращая на 2 и умножив на произвольное постоянное c *, получим

$$x_1\frac{c}{m_1^2} - x_0\frac{c}{m_1^2} + x_2\frac{c}{m_2^2} - x_0\frac{c}{m_2^2} + \ldots + x_n\frac{c}{m_n^2} - x_0\frac{c}{m_n^2} = 0. \quad (429)$$

После преобразований в левой части равенства (429) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{c}{m_i^2} - x_0\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{m_i^2} = 0$$

или

$$\left[x\frac{c}{m^2}\right] - x_0\left[\frac{c}{m^2}\right] = 0. \quad (430)$$

Из выражения (430) следует

$$x_0 = \frac{\left[x\frac{c}{m^2}\right]}{\left[\frac{c}{m^2}\right]} = \bar{x}$$

или в развернутом виде

$$\bar{x} = \frac{x_1\frac{c}{m_1^2} + x_2\frac{c}{m_2^2} + \ldots + x_n\frac{c}{m_n^2}}{\frac{c}{m_1^2} + \frac{c}{m_2^2} + \ldots + \frac{c}{m_n^2}}. \quad (431)$$

Величины $\frac{c}{m_i^2}$, обратно пропорциональные квадратам средних квадратических ошибок, называют **весами** неравноточных наблюдений.

---

* Произвольное постоянное выбирается так, чтобы сомножители $\frac{c}{m_i^2}$ были по возможности близки к единице.

Обозначим:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{m_1^2} = p_1 \text{ — вес результата } x_1,\\ \dfrac{c}{m_2^2} = p_2 \text{ — вес результата } x_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{c}{m_n^2} = p_n \text{ — вес результата } x_n.\end{array}\right\} \qquad (432)$$

С учетом принятых обозначений выражение (431) примет вид

$$\bar{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

В сокращенном виде

$$\bar{x} = \frac{[xp]}{[p]}. \qquad (433)$$

Величину $\bar{x}$, являющуюся наиболее надежным значением искомой величины, равную частному от деления на сумму весов суммы произведений результатов неравноточных наблюдений на соответствующие веса, называют **весовым средним**, или **общей арифметической срединой**, в отличие от простой арифметической средины (370).

Таким образом, если случайные ошибки независимых неравноточных наблюдений подчиняются нормальному закону распределения, то наиболее надежным значением определяемой величины является общая арифметическая средина.

Из определения весов неравноточных наблюдений следует, что большей точности наблюдений (или меньшим средним квадратическим ошибкам) соответствуют большие веса. По этой причине говорят, что вес определяет степень доверия результату наблюдения.

При вычислении весов однородных результатов наблюдений по формуле

$$p_i = \frac{c}{m_i^2} \qquad (434)$$

размерность произвольного постоянного c принимают равной размерности m_i^2. В данном случае веса есть отвлеченные числа, являющиеся количественной характеристикой соотношения точности результатов неравноточных наблюдений. При вычислении весов по формуле (434) в большинстве случаев достаточно удерживать две значащие цифры.

Из вышеизложенного вытекает, что простая арифметическая средина есть частный случай общей арифметической средины, когда

$$p_1 = p_2 = \dots = 1 \quad ([p] = n).$$

Пользуясь определением весов (434), легко показать, что вес простой арифметической средины больше веса одного наблюдения, по которым она вычислена, в n раз (n — число наблюдений).

В самом деле, если P — вес простой арифметической средины, p — вес одного наблюдения, то в соответствии с определением весов (434) имеем

$$P = \frac{c}{M^2}; \quad p = \frac{c}{m^2}; \qquad (435)$$

здесь M — средняя квадратическая ошибка простой арифметической средины, m — средняя квадратическая ошибка одного наблюдения.

По формулам (435) получим

$$\frac{P}{p} = \frac{\dfrac{c}{M^2}}{\dfrac{c}{m^2}} = \frac{\dfrac{c}{\left(\dfrac{m}{\sqrt{n}}\right)^2}}{\dfrac{c}{m^2}} = n. \qquad (436)$$

Как следствие из формул (432) и (436), **вес общей арифметической средины $P_{\bar{x}}$ равен сумме весов результатов наблюдений, по которым она вычислена**, т. е.

$$P_{\bar{x}} = [p]. \qquad (437)$$

В частном случае, когда неравноточность полученных результатов обусловлена числом равноточных наблюдений, как это имело место в сериях (422), в качестве весов отдельных простых арифметических средин (423) следует взять число наблюдений в отдельных сериях, т. е.

$$p_1 = i; \; p_2 = i + 2; \; p_3 = i - 5; \; \dots; \; p_k = i + 1.$$

На этом примере легко установить сходство и некоторую аналогию между весом p_i и относительной частотой Q и, следовательно, между общей арифметической срединой (433) и математическим ожиданием (110). Для этой цели необходимо в формулах (433) принять

$$p_1' = \frac{p_1}{[p]}; \; p_2' = \frac{p_2}{[p]}; \; \dots; \; p_n' = \frac{p_n}{[p]} \qquad (438)$$

и рассматривать p_i' ($i = 1, 2, \dots, n$) как вероятности.

В большинстве случаев, так же как и при вычислении простой арифметической средины, общую арифметическую средину по формуле (433) вычислять неудобно. Удобнее вводить приближенное значение измеренной величины x'. Формула общей арифметической средины в этом случае может быть получена следующим образом

Если $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — результаты неравноточных наблюдений одной и той же величины, а $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ — их веса, то, вводя приближенное значение x', получим остатки

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= x_1 - x', \\ \varepsilon_2 &= x_2 - x', \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varepsilon_n &= x_n - x'. \end{aligned}\right\} \tag{439}$$

Далее в соответствии с формулой (432) и с учетом равенств (439) имеем

$$\bar{x} = \frac{(x' + \varepsilon_1) p_1 + (x' + \varepsilon_2) p_2 + \ldots + (x' + \varepsilon_n) p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n};$$

$$\bar{x} = x' + \frac{[\varepsilon p]}{[p]}. \tag{440}$$

В качестве приближенного значения x' при вычислении общей арифметической средины по формуле (440) рекомендуется выбирать также наименьшее из значений x_i с тем, чтобы остатки ε_i были положительны.

§ 43. ВЕСА ФУНКЦИЙ ВЕЛИЧИН, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ЗАВИСИМЫХ И НЕЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Задачу на определение весов функций решим в общем виде аналогично тому, как поступали при оценке точности (см. § 32). Пусть дана функция

$$u = f(x, y, z, \ldots w),$$

где $x, y, z, \ldots, w$ — наблюденные аргументы, веса которых (p_x, p_y, $p_z, \ldots, p_w$) предполагаются известными.

Необходимо определить вес функции u.

Рассмотрим два случая: случай функции коррелятивно-зависимых и функции независимых аргументов $x, y, z, \ldots w$.

Из приведенного сравнения формул (110) и (433) со всей очевидностью вытекает, что при математической обработке рядов равноточных измерений одной и той же величины при вычислении $\bar{x}$ по формуле (370) фактически имеем дело с точными значениями вероятностей $p_i = \frac{1}{n}$ и при математической обработке рядов неравноточных измерений одной и той же величины при вычислении $\bar{x}$ по формуле (433) имеем дело со статистическими вероятностями p_i, увеличенными в $[p]$ раз, причем для удобства вычислений условие $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ сознательно нарушается на том основании, что согласно формуле (433) веса можно увеличивать или уменьшать в любое число

раз, нельзя только нарушать соотношение весов. Именно в результате этого действия, т. е. при отказе от соблюдения условия $\sum_{i=1}^{n} p_i = [p] = 1$, и теряется видимая связь понятия веса с понятием вероятности. Однако описанное действие — всего лишь вычислительный прием, а сущность остается. Более сложным становится вопрос о весах неоднородных измерений при совместной их обработке, когда приходится говорить о соотношении весов, а следовательно, и о наименовании весов. И тем не менее в широком вероятностно-статистическом плане последнее тоже всего лишь вычислительный прием, не более.

Для функции коррелятивно-зависимых аргументов квадрат средней квадратической ошибки выражается формулой (331), т. е.

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 m_w^2 +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 r_{xy} m_x m_y + \ldots$$

Известно, что

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}.$$

Таким образом, обратный вес функции общего вида для случая коррелятивно-зависимых аргументов в соответствии с формулами (331) и (434) примет вид

$$\frac{c}{p_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \frac{c}{p_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \frac{c}{p_y} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 \frac{c}{p_w} +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 r_{xy} \frac{c}{\sqrt{p_x p_y}} + \ldots \tag{441}$$

или

$$\frac{1}{P_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \frac{1}{p_y} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 \frac{1}{p_w} +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 r_{xy} \frac{1}{\sqrt{p_x p_y}} + \ldots \tag{442}$$

Пример. Определить вес угла β (из примера 10, § 35), представляющего сумму значений двух смежных углов β_1 и β_2, если вес углов $p_{\beta_1} = p_{\beta_2} = 1$.

Так как

$$\beta = \beta_1 + \beta_2, \ r_{\beta_1\beta_2} = -0{,}25,$$

то

$$\frac{1}{p_\beta} = \frac{1}{p_{\beta_1}} + \frac{1}{p_{\beta_2}} + 2r_{\beta_1\beta_2} \frac{1}{p_{\beta_1} p_{\beta_2}}$$

или

$$\frac{1}{p_\beta} = 2 - 2\cdot 0{,}25\,\frac{1}{\sqrt{1}} = 2 - 0{,}5 = 1{,}5.$$

Таким образом, $p_\beta = 0{,}67$.

Если бы не была учтена корреляционная зависимость, то вместо верного значения $p_\beta = 0{,}67$ было бы получено $p_\beta = 0{,}5$.

Для средней квадратической ошибки функции независимых аргументов в § 34 была получена формула (335), в соответствии с которой

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 m_w^2. \tag{443}$$

Обратный вес функции в этом случае с учетом формул (434) и (443) может быть получен по формуле

$$\frac{1}{p_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \frac{1}{p_y} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 \frac{1}{p_w}. \tag{444}$$

Для всех пяти случаев функции общего вида, рассмотренных в § 34, по формуле (444) имеем

$$1.\ u = kx; \quad \frac{1}{p_u} = k\frac{1}{p_x}. \tag{445}$$

$$2.\ u = x \pm y; \quad \frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y}. \tag{446}$$

$$3.\ u = x \pm y \pm z; \quad \frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \frac{1}{p_z}. \tag{447}$$

$$4.\ u = x \pm y \pm \ldots \pm w; \quad \frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \ldots + \frac{1}{p_w}. \tag{448}$$

$$5.\ u = k_1x \pm k_2y \pm \ldots \pm k_nw; \quad \frac{1}{p_u} = k_1\frac{1}{p_x} + k_2\frac{1}{p_y} + \ldots + k_n\frac{1}{p_w}. \tag{449}$$

Примеры 1. Определить вес вычисленного значения длины окружности s, если вес радиуса R $p_R = 6{,}3$ ($R = 46{,}3 \pm 0{,}4$ мм).

Решение.

$$s = 2\pi R; \quad \frac{1}{p_s} = \frac{(2\pi)^2}{p_R}; \quad \frac{1}{p_s} = 6{,}3; \quad p_s = 0{,}16.$$

2. Определить вес функции

$$u = x - y + z, \text{ если } p_x = 3, \ p_y = \frac{1}{3}, \ p_z = \frac{1}{4}.$$

Решение.

$$\frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \frac{1}{p_z}; \quad \frac{1}{p_u} = \frac{1}{3} + 3 + 4 = \frac{22}{3}; \quad p_u = \frac{3}{22}.$$

3. Определить вес функции

$$u = 2x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}z, \text{ если } p_x = 3, \ p_y = \frac{1}{3}, \ p_z = \frac{1}{4}.$$

Решение.

$$\frac{1}{p_u} = \frac{4}{p_x} + \frac{1}{9p_y} + \frac{1}{4p_z} = \frac{4}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{4};$$

$$\frac{1}{p_u} = \frac{48 + 12 + 36}{36} = \frac{8}{3}; \quad p_u = \frac{3}{8}.$$

4. Определить вес площади треугольника, если основание его $b = 8{,}0$ м получено с весом $p_b = 1$, а высота $h = 16{,}0$ м с весом $p_h = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$u = \frac{1}{2}bh;$$

$$\frac{1}{p_u} = \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_0^2 \frac{1}{p_b} + \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)_0^2 \frac{1}{p_h}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_0 = \frac{1}{2}h; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)_0 = \frac{1}{2}b;$$

$$\frac{1}{p_u} = \frac{h^2}{4p_b} + \frac{b^2}{4p_h} = \frac{h^2 + 2b^2}{4}; \quad \frac{1}{p_u} = \frac{256 + 128}{4} = \frac{384}{4};$$

$$\frac{1}{p_u} = 96; \quad p_u = \frac{1}{96}.$$

§ 44. ОТКЛОНЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ОТ ОБЩЕЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СРЕДИНЫ

Отклонениями v_i результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической средины $\bar{x}$ будем называть разность

$$v_i = x_i - \bar{x}. \tag{450}$$

Рассмотрим свойства этих отклонений.

Первое свойство. *Алгебраическая сумма произведений отклонений результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической средины на соответствующие веса равна нулю при любом числе наблюдений*, т. е.

$$[vp] = 0. \tag{451}$$

Докажем это свойство, выражаемое равенством (451), для чего запишем

$$\left.\begin{array}{ll} p_1 & v_1 = x_1 - x_0, \\ p_2 & v_2 = x_2 - x_0, \\ \ldots & \ldots\ldots \\ p_n & v_n = x_n - x_0, \end{array}\right\} \tag{452}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — веса отклонений соответственно $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Перемножив равенства (452) на соответствующие веса и сложив левую и правую части, получим

$$[vp] = [xp] - \bar{x}\,[p].$$

Согласно формуле (433)

$$[xp] = \bar{x}\,[p],$$

следовательно,

$$[vp] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Если при вычислении отклонений v_i по формуле (450) общая арифметическая средина $\bar{x}$ была округлена на величину β, то нетрудно по формулам (452) установить, что свойству (451) соответствует

$$[vp] = \beta\,[p]. \tag{453}$$

Свойство (453) равно как и (451) применяют для контроля вычислений общей арифметической средины.

Второе свойство. *Сумма произведений квадратов отклонений результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической средины на соответствующие веса минимальна*, т. е.

$$[v^2p] = \min. \tag{454}$$

Выше (§ 42) было доказано, что

$$\frac{(x_1-\bar{x})^2}{m_1^2} + \frac{(x_2-\bar{x})^2}{m_2^2} + \ldots + \frac{(x_n-\bar{x})^2}{m_n^2} = \min. \tag{455}$$

Пользуясь определением весов (434), для частного случая $c = 1$ с учетом обозначения (450) по формуле (455) имеем

$$v_1^2p_1 + v_2^2p_2 + \ldots + v_n^2p_n = [v^2p] = \min.$$

Доказательство свойства (454) можно выполнить также алгебраическим путем. В самом деле, пусть $x' \neq \bar{x}$;

$$\varepsilon_i = x_i - x' \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Напишем

$$\varepsilon_i = x_i - x';\quad v_i = x_i - \bar{x}. \tag{456}$$

Установим связь между отклонениями ε_i и v_i, вычитая в выражениях (456) v_i из ε_i,

$$\varepsilon_i - v_i = \bar{x} - x' = c. \tag{457}$$

По формуле (457) можно получить

$$\left.\begin{aligned} p_1 \quad \varepsilon_1^2 &= v_1^2 + c^2 + 2cv_1,\\ p_2 \quad \varepsilon_2^2 &= v_2^2 + c^2 + 2cv_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ p_n \quad \varepsilon_n^2 &= v_n^2 + c^2 + 2cv_n, \end{aligned}\right\} \tag{458}$$

где $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ — веса отклонений соответственно $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n$.

Умножая равенства (458) на соответствующие веса и сложив левую и правую части, получим

$$[\varepsilon^2p] = [v^2p] + c^2\,[p] + 2c\,[vp]. \tag{459}$$

В правой части равенства (459) слагаемое

$$2c\,[vp] = 0$$

по первому свойству отклонений (451).

Из формулы (459) следует

$$[v^2p] < [\varepsilon^2p], \tag{460}$$

что и требовалось доказать.

Доказательство (460) еще раз убеждает в том, что если ошибки неравноточных наблюдений подчиняются закону нормального распределения, то наиболее надежным значением искомой величины является общая арифметическая средина.

§ 45. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ЕДИНИЦЫ ВЕСА

Как было установлено в § 42, вес — величина, обратно пропорциональная квадрату средней квадратической ошибки,— может быть вычислен по формуле (434).

Выберем некоторое (может быть, даже несуществующее) наблюдение x_k из ряда (424), вес которого был бы равен единице, т. е. $p_k = 1$. Обозначим среднюю квадратическую ошибку этого результата m_k через μ, тогда формула (434) примет вид

$$p_k = \frac{\mu^2}{m_k^2} = 1,$$

$$\mu = m_k;\quad \mu = \sqrt{c}\,. \tag{461}$$

Таким образом, по выражению (461) μ — это средняя квадратическая ошибка результата наблюдения, вес которого принят равным единице. Для краткости говорят, что μ есть средняя квадратическая ошибка единицы веса (или даже «ошибка единицы веса»).

В соответствии с формулой (434) и вторым равенством в выражении (461) можем записать

$$\mu = m_i\sqrt{p_i} \tag{462}$$

или

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \tag{463}$$

т. е. средняя квадратическая ошибка любого результата наблюдений равна ошибке единицe вeca, деленной на квадратный корень из веса этого результата.

Формула (463) является основной формулой оценки точности при обработке неравноточных наблюдений. Она показывает, что для оценки точности любой величины необходимо решить две задачи: 1) найти вес этой величины и 2) определить ошибку единицы веса. Первую задачу решают по формулам (442) и (443); о способах определения ошибки единицы веса будет сказано ниже.

Так как по формуле (434) вес общей арифметической средины равен $[p]$, то в соответствии с формулой (463) средняя квадратическая ошибка общей арифметической средины

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \tag{464}$$

§ 46. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ЕДИНИЦЫ ВЕСА, ВЫЧИСЛЕННАЯ ПО ИСТИННЫМ ОШИБКАМ НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Пусть в результате неравноточных наблюдений получены

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$
$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n,$$
$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,$$

где Δ_i — истинные ошибки неравноточных наблюдений; p_i — соответствующие веса ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$).

Для сравнения истинных ошибок Δ_i между собой, учитывая формулу (462), умножим каждую из них на корень квадратный из соответствующих весов и таким образом ряд ошибок неравноточных наблюдений $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n$ как бы превратим в ряд ошибок равноточных наблюдений

$$\Delta_1\sqrt{p_1},\quad \Delta_2\sqrt{p_2},\ \ldots,\quad \Delta_n\sqrt{p_n}. \tag{465}$$

Умножая ошибки на $\sqrt{p}$, их нормируют, т. е. получают возможность сравнивать нормированные значения

$$\Delta_i\sqrt{p_i} = \Delta_i\sqrt{\frac{\mu^2}{m_i^2}} = \mu\frac{\Delta_i}{m_i} = \mu t_i. \tag{466}$$

Но значения t_i для любых рядов наблюдений подчиняются одному закону распределения. В этом суть выполняемых преобразований.

Пользуясь рядом (465), среднюю квадратическую ошибку единицы веса получим по формуле (145)

$$\mu^2 = \frac{(\Delta_1\sqrt{p_1})^2 + (\Delta_2\sqrt{p_2})^2 + \ldots + (\Delta_n\sqrt{p_n})^2}{n};$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta^2 p]}{n}}. \tag{467}$$

Формулу (467) непосредственно применять удается редко, так как истинное значение наблюдаемой величины X, необходимое для вычисления истинных ошибок

$$\Delta_i = x_i - X,$$

в большинстве случаев неизвестно.

Тем не менее формула (467) играет весьма важную роль, когда вместо ошибок наблюдений используются ошибки функций результатов наблюдений, т. е. невязки. Тогда формула (467) примет вид

$$\mu = \sqrt{\frac{[P w^2]}{n}}, \tag{468}$$

где

$$w = \varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n) - \varphi(X_1,\ \ldots,\ X_n),$$
$$\frac{1}{P} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2\frac{1}{p_1} + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^2\frac{1}{p_n}.$$

Примером применения формулы (468) является известная формула Ферреро, используемая для оценки точности измерения углов в триангуляции по невязкам w в треугольниках

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}},$$

где

$$w = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - 180^\circ,$$
$$w = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - (180^\circ + \varepsilon),$$

$1/P = 3$ (обратный вес суммы трех углов); 180° — истинное значение функции, т. е. суммы трех углов плоского треугольника и $180^\circ + \varepsilon$ — в сферическом треугольнике, где ε — сферический избыток; n — число треугольников.

Кроме того, формула (467) будет далее использована для вывода некоторых других формул, имеющих практическое значение и, в частности, позволит перейти от оценки точности по истинным ошибкам к оценке точности по отклонениям результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической средины (450), т. е. по разностям $v_i = x_i - \bar{x}$.

§ 47. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ЕДИНИЦЫ ВЕСА, ВЫЧИСЛЕННАЯ ПО ОТКЛОНЕНИЯМ РЕЗУЛЬТАТОВ НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ОТ ОБЩЕЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СРЕДИНЫ

Выразим истинные ошибки неравноточных наблюдений в формуле (467) через отклонения (450), для чего запишем

$$\left.\begin{array}{ll} p_i & \Delta_i = x_i - X, \\ p_i & v_i = x_i - \bar{x}. \end{array}\right\} \tag{469}$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$$

Составим разность

$$\Delta_i - v_i = \bar{x} - X = \eta; \tag{470}$$

здесь η — истинная ошибка общей арифметической средины.

Далее запишем

$$\eta = \frac{[\Delta p]}{[p]}; \tag{471}$$

в самом деле,

$$\eta = \bar{x} - X = \frac{[xp]}{[p]} - X; \quad \eta = \frac{[xp]}{[p]} - \frac{[p]}{[p]} X = \frac{[xp] - X[p]}{[p]} =$$

$$= \frac{[(x-X)p]}{[p]} = \frac{[\Delta p]}{[p]}.$$

Для n наблюдений можем записать

$$\left.\begin{array}{ll} p_1 & \Delta_1 = v_1 + \eta, \\ p_2 & \Delta_2 = v_2 + \eta, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ p_n & \Delta_n = v_n + \eta. \end{array}\right\} \tag{472}$$

Для перехода к μ^2 в соответствии с формулой (467) возведем в квадрат равенства (472) и умножим на соответствующие веса; получим:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1^2 p_1 = v_1^2 p_1 + \eta^2 p_1 + 2\eta v_1 p_1, \\ \Delta_2^2 p_2 = v_2^2 p_2 + \eta^2 p_2 + 2\eta v_2 p_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_n^2 p_n = v_n^2 p_n + \eta^2 p_n + 2\eta v_n p_n. \end{array}\right\} \tag{473}$$

Суммируя левую и правую части равенств (473), имеем

$$[\Delta^2 p] = [v^2 p] + \eta^2 [p] + 2\eta [vp]. \tag{474}$$

Но по первому свойству отклонений в соответствии с выражением (451)

$$2\eta [vp] = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{[\Delta^2 p]}{n} = \frac{[v^2 p]}{n} + \eta^2 \frac{[p]}{n}. \tag{475}$$

Предварительно, с учетом формулы (467), преобразуем η^2 следующим образом:

$$\eta^2 = \left(\frac{[\Delta p]}{[p]}\right)^2 = \frac{\Delta_1^2 p_1^2 + \Delta_2^2 p_2^2 + \ldots + \Delta_n^2 p_n^2 + 2\Sigma \Delta_i p_i \Delta_k p_k}{[p]^2};$$

$$\eta^2 = \frac{[\Delta^2 p^2] + 2\Sigma \Delta_i p_i \Delta_k p_k}{[p]^2}. \tag{476}$$

Пусть в формуле (476)

$$[\Delta^2 p^2] = [\Delta^2 p]\, p_{\text{ср}}, \tag{477}$$

причем заранее подберем $p_{\text{ср}}$ таким образом, чтобы удовлетворялось равенство (477), т. е.

$$p_{\text{ср}} = \frac{[\Delta^2 p^2]}{[\Delta^2 p]}.$$

Равенство (476) можем представить с учетом (477) в виде

$$\eta^2 = \frac{[\Delta^2 p]\, p_{\text{ср}} + 2 p_{\text{ср}} \Sigma \Delta_i \Delta_k p_k'}{[p]^2}. \tag{478}$$

При числе наблюдений достаточно большом, очевидно, справедливо приближенное равенство

$$\frac{p_{\text{ср}}}{[p]} \approx \frac{1}{n}. \tag{479}$$

С учетом формулы (479) выражение (478) примет вид

$$\eta^2 \approx \frac{[\Delta^2 p]}{[p]\, n} + 2 \frac{1}{[p]\, n} \Sigma \Delta_i \Delta_k p_k'. \tag{480}$$

Пренебрегая в выражении (480) членом $\frac{2}{[p]\, n} \Sigma \Delta_i \Delta_k p_k'$ в силу того, что для независимых наблюдений

$$\frac{1}{n} \Sigma \Delta_i \Delta_k p_k' = M(\Delta_i)\, M(\Delta_k p_k') = 0,$$

получим

$$\eta^2 \approx \frac{[\Delta^2 p]}{[p]\, n} = \frac{\mu^2}{[p]} = M^2, \tag{481}$$

где M — средняя квадратическая ошибка общей арифметической средины. Из формулы (481) вытекает, что с р е д н я я к в а д р а т и ч е с к а я о ш и б к а о б щ е й а р и ф м е т и ч е с к о й с р е д и н ы е с т ь и м е н н о т а о ш и б к а ($M = \eta$), к о т о р у ю с л е д у е т о ж и д а т ь п р и д а н н о м к о м п л е к с е и з м е р е н и й. Таким образом подтверждается соответствующее свойство кривой Гаусса [см. формулу (407)] и для неравноточных измерений.

Подставляя значение η^2 из (481) в формулу (475), с учетом того что

$$\frac{[\Delta^2 p]}{n} = \mu^2,$$

запишем

$$\mu^2 - \frac{[v^2p]}{n} = \frac{\mu^2}{[p]} \cdot \frac{[p]}{n};$$

$$\mu^2 - \frac{\mu^2}{n} = \frac{[v^2p]}{n}. \qquad (482)$$

Далее имеем

$$\mu^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{[v^2p]}{n};$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2p]}{n-1}}. \qquad (483)$$

Применение формулы (483) позволяет решить поставленную выше задачу оценки точности по отклонениям результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической средины.

В соответствии с формулой (199) надежность средней квадратической ошибки единицы веса, вычисленной по формуле (483), будет определяться формулой

$$m_\mu \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (484)$$

В соответствии с формулами (463) и (484) надежность средней квадратической ошибки общей арифметической средины характеризуется формулой

$$m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2n}}. \qquad (485)$$

В том случае, когда общую арифметическую средину вычисляют по формуле (440) с введением приближенного значения x', контролем $[v^2p]$ служит равенство

$$[v^2p] = [\varepsilon^2p] - \frac{[\varepsilon p]^2}{[p]}. \qquad (486)$$

В самом деле,

$$v_i = x_i - \overline{x} = x_i - \left\{x' - \frac{[\varepsilon p]}{[p]}\right\} = \varepsilon_i - \frac{[\varepsilon p]}{[p]}.$$

Далее,

$$[v^2p] = \sum_{i=1}^{n} \left\{\varepsilon_i - \frac{[\varepsilon p]}{[p]}\right\}^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \left\{\varepsilon_i^2 + \frac{[\varepsilon p]^2}{[p]^2} - 2\varepsilon_i \frac{[\varepsilon p_i]}{[p]}\right\} p_i,$$

или

$$[v^2p] = [\varepsilon^2p] + \frac{[\varepsilon p]^2}{[p]^2}[p] - 2\frac{[\varepsilon p]^2}{[p]} = [\varepsilon^2p] - \frac{[\varepsilon p]^2}{[p]},$$

что и требовалось доказать.

§ 48. ПОРЯДОК МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЯДА НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Получив в результате многократных неравноточных наблюдений одной и той же величины ряд $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ с весами $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, вычисляют:

1) общую арифметическую средину по формуле (433) или (440) с контролем

$$[vp] = 0 \quad (\text{или } [vp] = [p]\,\beta);$$

2) среднюю квадратическую ошибку единицы веса по формуле (483) с оценкой надежности по формуле (484) и с контролем вычисления по формуле (486); в тех случаях, когда система весов определялась по формуле (434), ошибку единицы веса следует вычислять по формуле (461);

3) среднюю квадратическую ошибку общей арифметической средины по формуле (464) с оценкой ее надежности по формуле (485) или

$$m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2n}}. \qquad (487)$$

4) доверительный интервал $P\,(\overline{x} - t_\alpha M \leqslant X \leqslant x + t_\alpha M) = P_\alpha$.

Примеры. 1. Географическая широта одной из точек земной поверхности определена из 8 серий наблюдений восемь раз, в результате чего вычислены простые арифметические средины и их средние квадратические ошибки. Определить окончательное значение широты (общую арифметическую средину) и его среднюю квадратическую ошибку.

Решение. Составим табл. 25.

Таблица 25

Номер серии	Значение широты, полученное в серии φ_i	Средняя кв ошибка широты в серии M_i	$p_i = \frac{(0,28)^2}{M_i^2}$	ε_i''	$\varepsilon_i'' p_i$	$\varepsilon_i^2 p_i$	v_i''	$v_i p_i$	$v_i^2 p_i$
1	15°45′36,18″	0,25″	1,4	+0,91	+1,27	1,16	+0,40	+0,56	0,22
2	35,53	0,21	1,8	+0,26	+0,47	0,12	−0,25	−0,45	0,11
3	36,39	0,31	0,81	+1,12	+0,91	1,02	+0,61	+0,49	0,30
4	35,27	0,19	2,2	0,00	0,00	0,00	−0,51	−1,12	0,57
5	35,78	0,28	1,0	+0,51	+0,51	0,26	0,00	0,00	0,00
6	35,96	0,23	1,5	+0,69	+1,04	0,72	+0,18	+0,27	0,05
7	36,02	0,35	0,64	+0,75	+0,48	0,36	+0,24	+0,15	0,04
8	35,81	0,15	3,5	+0,54	+1,89	1,02	+0,03	+0,10	0,00
$\varphi' = 15°45'35{,}27''$;			12,85		6,57	4,66		+1,57	1,29
$\varphi_0 = 15°45'35{,}27'' + \frac{6{,}57}{12{,}85}$;								−1,57	
$\varphi_0 = 15°45'35{,}78''$								$[vp] = 0{,}00$	

Вычислим общую арифметическую средину по формуле (440)

$$\varphi_0 = \varphi' + \frac{[\varepsilon p]}{[p]}; \qquad \varphi_0 = 15°45'35,27'' + \frac{6,57''}{12,85};$$

$$\varphi_0 = 15°45'35,78''.$$

Контроль: $[vp] = 0$.

Далее вычислим среднюю квадратическую ошибку единицы веса по формуле (483)

$$\mu = \sqrt{\frac{1,29}{8-1}}; \qquad \mu = 0,43''$$

с оценкой надежности μ по формуле (484)

$$m_\mu = \frac{0,43''}{\sqrt{2(8-1)}}; \qquad m_\mu = 0,11''.$$

Контроль вычисления:

$$[v^2p] = [\varepsilon^2 p] - \frac{[\varepsilon p]^2}{[p]} = 4,66 - \frac{(6,57)^2}{12,85};$$

$$[v^2p] = 4,66 - 3,36 = 1,30.$$

И, наконец, вычислим среднюю квадратическую ошибку общей арифметической средины по формуле (463)

$$M = \frac{0,43''}{\sqrt{12,85}} = 0,12''$$

с оценкой ее надежности по формуле (485)

$$m_M = \frac{0,12''}{\sqrt{2 \cdot 8}} = 0,030''.$$

С вероятностью 0,9973 значение искомой широты заключено в пределах

$$15°45'35,42'' \leqslant \varphi \leqslant 15°45'36,14''.$$

2. В § 29 приведен пример на определение коэффициентов соотношения средней квадратической, средней и вероятной ошибок.

Принимая в качестве весов отдельных значений k_1 и k_2 число ошибок по участку, найти средние весовые значения коэффициентов k_1 и k_2 и их средние квадратические ошибки.

Решение. На основании данных табл. 16 составим табл. 26. Вычислим средние весовые значения коэффициентов k_1 и k_2

$$k_1 = \frac{[k_1 p]}{[p]} = \frac{22,22}{17,59}; \qquad k_1 = 1,263 \text{ (должно быть } 1,253\ldots);$$

$$k_2 = \frac{[k_2 p]}{[p]} = \frac{26,79}{17,59}; \qquad k_2 = 1,523 \text{ (должно быть } 1,483\ldots).$$

Контроль:

$$[v_{k_1} p] = -0,010; \qquad [v_{k_2} p] = -0,01.$$

Вычислим средние квадратические ошибки единицы веса (за единицы веса приняты k_1 и k_2, вычисленные по 100 ошибкам) и оценим их надежность

$$\mu_{k_1} = \sqrt{\frac{0,0466}{12-1}} = 0,065; \qquad \mu_{k_2} = \sqrt{\frac{0,315}{12-1}} = 0,17;$$

$$m_{\mu_{k_1}} = \frac{0,065}{\sqrt{2(12-1)}} = 0,014; \qquad m_{\mu_{k_2}} = \frac{0,17}{\sqrt{2(12-1)}} = 0,036.$$

Таблица 26

Номера участков	Коэффициенты $k_1 = \frac{m_{эмп}}{v_{эмп}}$	$k_2 = \frac{m_{эмп}}{r_{эмп}}$	Число ошибок n	Вес $p_i = \frac{n_i}{100}$	$k_{1_i} p_i$	$k_{2_i} p_i$	Отклонения $v_{k_{1_i}}$	$v_{k_{2_i}}$	Контроль $v_{k_1} p_i$	$v_{k_2} p_i$	$v^2_{k_1} p_i$	$v^2_{k_2} p_i$
1	1,25	1,75	220	2,2	2,75	3,35	−0,013	+0,228	−0,029	+0,50	0,0004	0,114
2	1,18	1,30	161	1,61	1,90	2,09	−0,083	−0,222	−0,134	−0,36	0,0111	0,079
3	1,32	1,35	115	1,15	1,52	1,55	+0,057	−0,172	+0,066	−0,20	0,0038	0,034
4	1,32	1,55	100	1,00	1,32	1,55	+0,057	+0,028	+0,057	+0,03	0,0032	0,001
5	1,20	1,46	59	0,59	0,71	0,86	−0,063	−0,062	−0,037	−0,04	0,0023	0,002
6	1,25	1,60	95	0,95	1,19	1,52	−0,013	−0,078	−0,012	+0,07	0,0002	0,005
7	1,31	1,57	93	0,93	1,22	1,46	+0,047	+0,048	+0,044	+0,04	0,0021	0,002
8	1,16	1,28	104	1,04	1,21	1,33	−0,103	−0,242	−0,107	−0,25	0,0110	0,060
9	1,26	1,54	115	1,15	1,45	1,77	−0,003	+0,018	−0,003	+0,02	0,0000	0,000
10	1,32	1,54	353	3,53	4,66	5,44	+0,057	+0,018	+0,201	+0,06	0,0115	0,001
11	1,25	1,60	236	2,36	2,95	3,78	−0,013	+0,078	−0,031	+0,18	0,0004	0,014
12	1,24	1,47	108	1,08	1,34	1,59	−0,023	−0,052	−0,025	−0,06	0,0006	0,003
				17,59	22,22	26,79			−0,378	−0,91	0,0466	0,315
									+0,368	+0,90		
									Σ −0,010	−0,01		

Вычислим средние квадратические ошибки весовых средних

$$M_{k_1} = \frac{0{,}065}{\sqrt{17{,}59}} = 0{,}016; \qquad M_{k_2} = \frac{0{,}17}{\sqrt{17{,}59}} = 0{,}041.$$

С вероятностью 0,95 искомые коэффициенты k_1 и k_2 заключены в пределах

$$1{,}231 \leqslant k_1 \leqslant 1{,}295;$$
$$1{,}441 \leqslant k_2 \leqslant 1{,}603.$$

Глава IX

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

§ 49. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В практике технических измерений часто встречаются случаи, когда приходится измерять большие группы однородных величин. Естественно, что для получения значений каждой из измеряемых величин и надежной оценки точности целесообразно было бы каждую из этих величин измерять многократно, по крайней мере не менее 8—10 раз (см. § 30).

Однако большой объем работы при такой организации измерений во многих случаях вынуждает исполнителя сокращать число повторных измерений каждой величины до минимума, но не менее двух раз, с учетом необходимости контроля измерений. Значения интересующих исполнителя величин получаются во многих случаях достаточно точно и при двух повторных измерениях (и даже при одном), однако оценить точность измерений каждой измеренной величины при числе повторных измерений $n = 2$ не представляется возможным*.

Возникает вопрос: нельзя ли, пользуясь всеми разностями двойных измерений однородных величин, оценить точность произведенных измерений?

---

* Конечно, подходя к вопросу чисто формально, можно оценить точность и при $n = 2$, а при вычислении доверительного интервала нормированную случайную величину t_p, соответствующую заданной вероятности p, найти по формуле (распределение Стьюдента (прил. 5)

$$2c \int_0^{t_p} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{-n}{2}} dt = p.$$

Приведем пример: пусть отрезок s измерен рулеткой дважды и получены результаты: $s_1 = 1{,}125$ м (прямо), $s_2 = 1{,}131$ м (обратно).

Вычисления: $\bar{s} = 1{,}128$ м; $v_1 = -3$ мм, $v_2 = +3$ мм, $[v] = 0$; $[v^2] = 18$ мм^2;

$$m = 1{,}25 \frac{[|v|]}{n - 0{,}5}; \qquad m = \frac{6 \text{ мм}}{1{,}5} = 4 \text{ мм}; \qquad M = \frac{m}{\sqrt{n}};$$

$$M = \frac{4 \text{ мм}}{\sqrt{2}}; \qquad M = 2{,}8 \text{ мм}.$$

В общем виде задача на оценку точности может быть сформулирована следующим образом. Пусть некоторые однородные величины $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ наблюдены каждая дважды и получено:

$$\left.\begin{array}{l} \text{в результате первого наблюдения} — l_1,\ l_2,\ l_3, \ldots, l_n, \\ \text{в результате второго наблюдения} — l'_1,\ l'_2,\ l'_3, \ldots, l'_n. \end{array}\right\} \quad (488)$$

Пользуясь рядами (488), можно вычислить разности двойных наблюдений

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = l_1 - l'_1, \\ d_2 = l_2 - l'_2, \\ \ldots\ldots \\ d_n = l_n - l'_n. \end{array}\right\} \quad (489)$$

Задача сводится к тому, чтобы использовать разности (489) при оценке точности. При этом может быть два случая: а) случай, когда наблюдения l_1 (или l'_1), l_2 (или l'_2), ..., l_n (или l'_n) равноточны; б) случай, когда эти наблюдения неравноточны.

В дальнейших рассуждениях будем полагать, что двойные наблюдения, относящиеся к одной величине, между собой равноточны в обоих случаях. Практически это условие выполняется почти всегда.

§ 50. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ РАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Итак, пусть некоторые однородные величины

$$L_1,\ L_2,\ L_3, \ldots, L_n \quad (490)$$

наблюдены равноточно каждая дважды и получено

$$\left.\begin{array}{l} l_1,\ l_2,\ l_3, \ldots, l_n, \\ l'_1,\ l'_2,\ l'_3, \ldots, l'_n \end{array}\right\} \quad (491)$$

$$P\left(\bar{s} - t_p M \leqslant s \leqslant \bar{s} + t_p M\right) = 0{,}999.$$

Из таблиц (прил. 5) для $n = 2$ и $p = 0{,}999$ находим $t_p = 636{,}6$ и p (1,128 м — 636,6·2,8 мм $\leqslant s \leqslant$ 1,128 + 636,6·2,8 мм) = 0,999; p (— 0,654 м $\leqslant s \leqslant$ 2,910 м) = 0,999.*

Получили результат (*), противоречащий элементарному здравому смыслу: измерялся реальный отрезок в 1,13 м с ошибкой, гарантирующей определение значения не грубее 1 см. По теории же (распределение Стьюдента) выходит, что с вероятностью 0,999 точное значение s надо считать заключенным между отрицательной величиной (— 0,65 м) и более чем удвоенным отрезком (2,91 м)!

Вот почему правы те авторы, которые утверждают, что при $n < 8 \div 10$ надежных оценок эмпирических параметров получить нельзя.

Что же касается приведенного примера, то вывод может быть сделан только один: хотя формально распределение Стьюдента можно применять, начиная с $n = 2$, делать этого не следует, так как полностью искажается точностная картина измерений. В то же время нормальное распределение дает вполне удовлетворительные результаты при $n \geqslant 10$.

с истинными ошибками

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \ldots,\ \Delta_n,\\ \Delta'_1,\ \Delta'_2,\ \Delta'_3,\ \ldots,\ \Delta'_n.\end{array}\right\} \quad (492)$$

По определению истинной ошибки (§ 23) с учетом выражений (491), (492) и (490) можно записать:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = l_1 - L_1,\quad \Delta_2 = l_2 - L_2,\ \ldots,\ \Delta_n = l_n - L_n,\\ \Delta'_1 = l'_1 - L_1,\quad \Delta'_2 = l'_2 - L_2,\ \ldots,\ \Delta'_n = l'_n - L_n.\end{array}\right\} \quad (493)$$

Составим разности

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 - \Delta'_1 = l_1 - l'_1,\\ \Delta_2 - \Delta'_2 = l_2 - l'_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Delta_n - \Delta'_n = l_n - l'_n.\end{array}\right\} \quad (494)$$

Из формул (494) следует, что разности двойных наблюдений $l_i - l'_i = d_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, выражаемые равенствами (489), равны разностям соответствующих истинных ошибок. Поэтому запишем

$$\left.\begin{array}{l}d_1 = \Delta_1 - \Delta'_1,\\ d_2 = \Delta_2 - \Delta'_2,\\ \ldots\ldots\ldots\\ d_n = \Delta_n - \Delta'_n.\end{array}\right\} \quad (495)$$

Возведем в квадрат равенства (495)

$$\left.\begin{array}{l}d_1^2 = \Delta_1^2 + \Delta_1'^2 - 2\Delta_1\Delta'_1,\\ d_2^2 = \Delta_2^2 + \Delta_2'^2 - 2\Delta_2\Delta'_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ d_n^2 = \Delta_n^2 + \Delta_n'^2 - 2\Delta_n\Delta'_n.\end{array}\right\} \quad (496)$$

Суммируя левую и правую части равенств (496) и деля суммы на число разностей d_i, получим

$$\frac{[d^2]}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} + \frac{[\Delta'^2]}{n} - 2\,\frac{[\Delta\Delta']}{n}. \quad (497)$$

В формуле (497) для независимых наблюдений

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta\Delta']}{n} = M(\Delta\Delta') = M(\Delta)\,M(\Delta') = 0;$$

следовательно,

$$\frac{[d^2]}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} + \frac{[\Delta'^2]}{n}. \quad (498)$$

Но так как наблюдения равноточны, в формуле (498)

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[\Delta'^2]}{n} = m^2, \quad (499)$$

где m — средняя квадратическая ошибка одного наблюдения.

С учетом (499) равенство (498) примет вид

$$2m^2 = \frac{[d^2]}{n} = m_d^2, \quad (500)$$

откуда

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (501)$$

По формуле (501) и вычисляется средняя квадратическая ошибка одного наблюдения по разностям двойных наблюдений d_i.

Приближенные значения искомых величин $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$, полученные из наблюдений, вычисляются как средние арифметические из результатов двойных наблюдений, т. е.

$$\bar{l}_1 = \frac{l_1 + l'_1}{2};\qquad \bar{l}_2 = \frac{l_2 + l'_2}{2};\ \ldots;\ \bar{l}_n = \frac{l_n + l'_n}{2}.$$

Очевидно, что

$$m_{\bar{l}_i} = m_{\text{ср}} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \quad (502)$$

так как $\bar{l}_i$ — среднее арифметическое из двух результатов.

Формулу (501) можно получить и несколько иным путем. Запишем

$$d_i = l_i - l'_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n);$$

рассматривая разности d_i как функции двойных независимых наблюдений, по формуле (335) имеем

$$m_d^2 = m_l^2 + m_{l'}^2. \quad (503)$$

Так как $m_l = m_{l'} = m$, то

$$m_d = m\sqrt{2}. \quad (504)$$

В то же время по формуле (500)

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}.$$

Из формул (504) и (500) следует

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (505)$$

В случае, когда разности d_i — функции зависимых (коррелированных) наблюдений, вместо формулы (503) получим

$$m_d^2 = m_l^2 + m_{l'}^2 - 2m_l m_{l'} r_{l,l'} \tag{506}$$

или с учетом равноточности

$$m_d^2 = 2m^2 - 2m^2 r_{l,l'}; \tag{506'}$$

окончательно $(r_{l,l'} = r)$

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n(1-r)}}. \tag{507}$$

Если в ряде разностей двойных наблюдений (495) содержатся значительные систематические ошибки, величина $\frac{[d]}{n}$ будет заметно отличаться от нуля. Предполагая, что разности d_i содержат в данном случае постоянную систематическую ошибку, ее можно исключить, вычитая из d_i величину $\theta = \frac{[d]}{n}$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} d_1' &= d_1 - \theta, \\ d_2' &= d_2 - \theta, \\ &\ldots\ldots \\ d_n' &= d_n - \theta, \end{aligned}\right\} \tag{508}$$

где d_i' $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ — разности двойных наблюдений, свободные от систематической ошибки. Складывая левую и правую части равенства (508), получим

$$[d'] = [d] - n\theta = 0. \tag{509}$$

Таким образом, алгебраическая сумма разностей двойных равноточных наблюдений, свободных от систематической ошибки, равна нулю при любом числе наблюдений. На этом основании разности d_i' можно рассматривать как отклонения результатов равноточных наблюдений от простой арифметической средины. Подставляя в формулу (409) $[d'^2]$ вместо $[v^2]$, получим

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \tag{510}$$

или в соответствии с формулой (500)

$$m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}. \tag{511}$$

Для коррелированных наблюдений аналогично формуле (507) получим

$$m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)(1-r)}}. \tag{512}$$

Вычисление суммы $[d'^2]$ можно проконтролировать по формуле

$$[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}. \tag{513}$$

Справедливость формулы (513) подтверждается, если равенства (508) возвести в квадрат и получить суммы левой и правой частей, т. е.

$$\left.\begin{aligned} d_1'^2 &= d_1^2 + \theta^2 - 2\theta d_1, \\ d_2'^2 &= d_2^2 + \theta^2 - 2\theta d_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_n'^2 &= d_n^2 - \theta^2 - 2\theta d_n. \end{aligned}\right\}$$

и далее

$$[d'^2] = [d^2] + \frac{[d]^2}{n} - 2\frac{[d]}{n}[d] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}. \tag{514}$$

§ 51. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Рассмотрим теперь другой случай, а именно: пусть некоторые однородные величины $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ наблюдены дважды, причем каждая пара наблюдений по отношению к другой является неравноточной (наблюдения в паре равноточные). В результате наблюдений получены

$$\left.\begin{aligned} &l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n, \\ &l_1', l_2', l_3', \ldots, l_n', \\ &p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \end{aligned}\right\} \tag{515}$$

где p_1 — вес наблюдения l_1 или l_1',
p_2 — » » l_2 » l_2'
. . . .
p_n — » » l_n » l_n'

Получим формулу для вычисления средней квадратической ошибки единицы веса по разностям двойных неравноточных наблюдений.

Для этого запишем разности

$$d_i = l_i - l_i' \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{516}$$

Вес разности d_i согласно (444) для независимых наблюдений будет определяться формулой

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{l_i}} + \frac{1}{p_{l_i'}} = \frac{2}{p_i}, \tag{517}$$

где $p_{l_i} = p_{l_i'} = p_i$ — вес отдельного наблюдения.

Из выражения (517) следует, что

$$p_{d_i} = \frac{p_i}{2}, \tag{518}$$

т. е. вес разности в два раза меньше веса отдельных наблюдений, по которым составлена разность.

Для результатов наблюдений (515) с учетом (516) и (518) можно записать

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{p_1}{2} & d_1 = l_1 - l_1', \\ \frac{p_2}{2} & d_2 = l_2 - l_2', \\ \frac{p_3}{2} & d_3 = l_3 - l_3', \\ \dots & \dots\dots\dots \\ \frac{p_n}{2} & d_n = l_n - l_n'. \end{array}\right\} \tag{519}$$

В соответствии с формулой (467) имеем

$$\mu^2 = \frac{d_1^2 \frac{p_1}{2} + d_2^2 \frac{p_2}{2} + d_3^2 \frac{p_3}{2} + \dots + d_n^2 \frac{p_n}{2}}{n}$$

или

$$\mu = \sqrt{\frac{[d^2 p]}{2n}}. \tag{520}$$

Для коррелированных измерений соответственно

$$\mu = \sqrt{\frac{[d^2 p]}{2n(1-r)}}. \tag{520'}$$

Средние квадратические ошибки приближенных значений искомых величин, вычисленных как средние арифметические из результатов двойных наблюдений, равноточных попарно, т. е.

$$\bar{l}_1 = \frac{l_1 + l_1'}{2}; \quad \bar{l}_2 = \frac{l_2 + l_2'}{2}; \dots; \quad \bar{l}_n = \frac{l_n + l_n'}{2}; \tag{521}$$

будут соответственно равны

$$m_{\bar{l}_1} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_1}}; \quad m_{\bar{l}_2} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_2}}; \dots; \quad m_{\bar{l}_n} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_n}}. \tag{522}$$

Справедливость выражений (522) легко проверить следующим образом. Пусть

$$\bar{l}_i = \frac{l_i + l_i'}{2},$$

где l_i и l_i' имеют одинаковый вес p_i.

Тогда по формуле (444) имеем

$$\frac{1}{p_{\bar{l}_i}} = \frac{1}{4p_{l_i}} + \frac{1}{4p_{l_i'}} = \frac{2}{4p_i},$$

откуда

$$p_{\bar{l}_i} = 2p_i. \tag{523}$$

В соответствии с формулой (463) запишем

$$m_{\bar{l}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\bar{l}_i}}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \tag{524}$$

Иногда при обработке двойных неравноточных наблюдений встречаются случаи, когда наблюдения и попарно неравноточны, т. е.

$$p_{l_i} \neq p_{l_i'} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Нетрудно установить, что веса разностей (519) в этом случае в соответствии с формулой (444) равны

$$\left.\begin{array}{l} p_{d_1} = \frac{p_{l_1} p_{l_1'}}{p_{l_1} + p_{l_1'}}, \\ p_{d_2} = \frac{p_{l_2} p_{l_2'}}{p_{l_2} + p_{l_2'}}, \\ \dots\dots\dots \\ p_{d_n} = \frac{p_{l_n} p_{l_n'}}{p_{l_n} + p_{l_n'}}. \end{array}\right\} \tag{525}$$

Приближенные значения искомых величин и их средние квадратические ошибки должны быть вычислены по формулам

$$\bar{l}_i = \frac{l_i p_{l_i} + l_i' p_{l_i'}}{p_{l_i} + p_{l_i'}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n); \tag{526}$$

$$m_{\bar{l}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{l_i} + p_{l_i'}}}. \tag{527}$$

В том случае, когда разности двойных неравноточных наблюдений (519) содержат систематические ошибки, величина

$$\theta = \frac{[pd]}{[p]}, \tag{528}$$

будет заметно отличаться от нуля и будет представлять как бы систематическую ошибку двойных неравноточных наблюдений (точнее, остаточное влияние систематических ошибок, так как равные систематические ошибки, входящие в наблюдения l_i и l'_i, на разностях не сказываются). Это обстоятельство приводит к завышению оценки точности и является крупным недостатком оценки точности по разностям двойных наблюдений.

После исключения величины θ из разностей, т. е.

$$d'_i = d_i - \theta \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ .,\ n)$$

средняя квадратическая ошибка единицы веса по аналогии с формулой (511) вычисляется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[d'^2 p]}{2(n-1)}}. \tag{529}$$

Для коррелированных измерений соответственно

$$\mu = \sqrt{\frac{[d'^2 p]}{2(n-1)(1-r)}}. \tag{530}$$

§ 52. О ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОСТАТОЧНОГО ВЛИЯНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК В РАЗНОСТЯХ ДВОЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Выше отмечалось, что остаточное влияние систематических ошибок можно в разностях двойных равноточных и неравноточных измерений выявить, вычисляя соответственно

$$\theta = \frac{[d]}{n}, \tag{531}$$

$$\theta = \frac{[pd]}{[p]}. \tag{532}$$

Получены формулы (511), (512), (529) и (530) для оценки точности по разностям двойных измерений.

Однако вполне законно спросить, с какими значениями θ в формулах (531) и (532) следует считаться и соответственно оценку точности производить по формулам (511), (512), (529) и (530) и когда их (θ) можно считать несущественными и оценку точности производить по формулам (505), (507), (520) и (520′).

Общепринято пренебрегать систематической ошибкой в отдельных измерениях, если она привносит в суммарную ошибку не более $^1/_5$ ее величины, т. е. не превышает ошибки вычислений. Исходя из этого, для определения значимости отклонения от нуля для равноточных измерений примем

$$\frac{|[d]|}{n} \leqslant \frac{1}{5} m_d; \tag{533}$$

для неравноточных измерений

$$\frac{|[pd]|}{[p]} \leqslant \frac{1}{5} \mu. \tag{533'}$$

Среднюю квадратическую ошибку можно вычислить, не применяя формул § 50, по формуле связи ее со средней ошибкой (см. формулу 285), т. е. для данного случая

$$m_d = 1{,}25 \frac{[|d|]}{n}. \tag{534}$$

Соединяя условие (533) и формулу (534), запишем

$$\frac{|[d]|}{n} \leqslant 0{,}25 \frac{[|d|]}{n}. \tag{535}$$

Окончательно на основании (535) имеем

$$|[d]| \leqslant 0{,}25 [|d|]. \tag{536}$$

Назовем это неравенство **критерием допустимости абсолютного значения алгебраической суммы разностей двойных равноточных измерений.**

Для неравноточных измерений по аналогии с изложенным можем записать

$$|[d\sqrt{p}]| \leqslant 0{,}25 [|d\sqrt{p}|]. \tag{537}$$

Выражение (537) будет в свою очередь **критерием допустимости абсолютного значения алгебраической суммы произведений разностей двойных неравноточных измерений на корень квадратный из соответствующих весов этих разностей.**

Критерии (536) и (537) фактически будут определять условия применимости формул (505), (507) и (520), (520′) соответственно.

§ 53. ПРИМЕРЫ НА ОЦЕНКУ ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Пример 1. Двумя наблюдателями произведены измерения одних и тех же линий топографическим светодальномером СТ-62 (табл. 27). Вычислить среднюю квадратическую ошибку одного измерения (одним наблюдателем) и среднего из двух измерений, принимая измерения равноточными (и некоррелированными).

Таблица 27

Результат измерений s_i, м		Разность d_i, см	d', см	$d_i'^2$
1-й наблюдатель	2-й наблюдатель			
967,489	967,398	+9,1	+5,7	32,5
752,468	752,412	+5,6	+2,2	4,8
692,223	692,250	—2,7	—6,1	37,2
1023,536	1023,536	0,0	—3,4	11,6
808,457	808,444	+1,3	—2,1	4,4
612,692	612,665	+2,7	—0,7	0,5
675,158	675,082	+7,6	+4,2	17,6
		+26,3 —2,7	—0,2	108,6
		$[\lvert d\rvert] = 29{,}0$ $[d] = +23{,}6$ $\theta = +3{,}4$		

Решение.

а) Критерий допустимости θ

$0{,}25\ [\lvert d\rvert] = 0{,}25 \cdot 29 = 7{,}2$; $\lvert [d]\rvert > 0{,}25\ [\lvert d\rvert]$ $(23{,}6 > 7{,}2)$.

Величиной θ пренебрегать нельзя.

б) Остаточное влияние систематических ошибок

$$\theta = \frac{+23{,}6}{7} = +\ 3{,}4 \text{ см}.$$

в) Средняя квадратическая ошибка одного измерения

$$m_\Delta = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{108{,}6}{12}} = 3{,}0 \text{ см}.$$

г) Средняя квадратическая ошибка средних из двух измерений

$$m_{\bar{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{108{,}6}{6}} = 2{,}1 \text{ см}.$$

д) Относительные ошибки

$$\frac{m_\Delta}{s_{\text{ср}}} = \frac{3{,}0 \text{ см}}{79\,000 \text{ см}} = \frac{1}{26\,000};$$

$$\frac{m_{\bar{x}}}{s_{\text{ср}}} = \frac{2{,}1 \text{ см}}{79\,000 \text{ см}} = \frac{1}{38\,000}.$$

Примечание. При дальнейших исследованиях было обнаружено, что величина θ есть личная ошибка второго наблюдателя при определении постоянной прибора. Она устойчиво держалась на протяжении целого сезона работ и оказалась равной $\theta = +\ 3{,}0$ см.

Пример 2. Превышения на 10 станциях нивелирного хода определяли при двух горизонтах прибора. Найти средние квадратические ошибки: превышения на станции, измеренного при одном горизонте, при двух горизонтах, и отсчета по рейке (табл. 28).

Решение.

а) Критерий допустимости $0{,}25\ [\lvert d\rvert] = 6{,}2$; $\lvert [d]\rvert < 0{,}25\ [\lvert d\rvert]$ (так как $1 < 6{,}2$). Систематическими влияниями при оценке точности можно пренебречь.

б) Средняя квадратическая ошибка разности d_i

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} = \sqrt{\frac{65}{10}} = 2{,}5 \text{ мм}.$$

Таблица 28

Номера станций	Превышение, мм		d_i, мм	d_i^2
	h'	h''		
1	—1561	—1564	+3	9
2	—1484	—1482	—2	4
3	—1370	—1373	+3	9
4	+102	+105	—3	9
5	+2184	+2182	+2	4
6	+1219	+1222	—3	9
7	—100	—102	+2	4
8	—153	—151	—2	4
9	+1201	+1198	+3	9
10	+157	+159	—2	4
			+13 —12 $[\lvert d\rvert] = 25$ $[d] = +1$	65

в) Средняя квадратическая ошибка превышения, измеренного при одном горизонте,

$$m_h = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \frac{2{,}5 \text{ мм}}{\sqrt{2}} = 1{,}8 \text{ мм}.$$

г) Средняя квадратическая ошибка превышения, измеренного при двух горизонтах,

$$h_{\text{ср}} = \frac{h_i' + h_i''}{2}; \qquad m_{h_{\text{ср}}} = \frac{1{,}8 \text{ мм}}{\sqrt{2}} = 1{,}3 \text{ мм}.$$

д) Средняя квадратическая ошибка отсчета по рейке ($h = a - b$, где a и b—отсчеты) $m_h^2 = m_a^2 + m_b^2$; $m_a = m_b = m_0$, где m_0 — средняя квадратическая ошибка отсчета

$$m_0 = \frac{m_h}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}8 \text{ мм}}{\sqrt{2}} = 1{,}3 \text{ мм}.$$

Пример 3. Даны разности суммы превышений в нивелирных ходах в прямом и обратном направлениях и число станций по ходам (табл. 29). Определить среднюю квадратическую ошибку одиночного хода в 10 станций (один условный километр) и двойного хода той же длины.

Решение.

а) Критерий допустимости

$0{,}25\ [\lvert d\sqrt{p}\rvert] = 0{,}25 \cdot 78{,}9 \approx 19$; $\lvert [d\sqrt{p}]\rvert < 0{,}25\ [\lvert d\sqrt{p}\rvert]$ $(6{,}1 < 19)$.

Следовательно, систематическими влияниями при оценке точности можно пренебречь.

Таблица 29

Номер хода	Разность d_i, мм	Число станций k_i	Вес разности $p_i = \frac{10}{k_i}$	$d_i\sqrt{p_i}$	$p_i d_i$	$p_i d_i^2$
1	+4	7	1,43	+4,8	+5,7	
2	−14	27	0,37	−8,5	−5,2	
3	−9	13	0,77	−7,9	−6,9	
4	+15	25	0,40	+9,5	+6,0	
5	−12	32	0,31	−6,7	−3,7	
6	+11	15	0,67	+9,0	+7,4	
7	−12	19	0,53	−8,7	−6,4	
8	+13	18	0,56	+9,7	+7,3	
9	+12	16	0,62	+9,5	+7,4	
10	−7	23	0,43	−4,6	−3,0	
			6,09	+42,5 −36,4	+33,8 −25,2	655
			$[d\sqrt{p}] = +6,1$ $[\lvert d\sqrt{p}\rvert] = 78,9$		+8,6	

б) Средняя квадратическая ошибка одиночного хода в 10 станций

$$\mu_{10} = \sqrt{\frac{655}{2 \cdot 10}} = 5,7 \text{ мм.}$$

в) Средняя квадратическая ошибка $\mu_{10\,(ср)}$ двойного хода (т. е. среднего из двух ходов) в 10 станций

$$\mu_{10\,(ср)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{655}{10}} = 4,0 \text{ мм.}$$

Пример 4. 37 линий измерены двумя наблюдателями светодальномерами СТ-61 и позднее — проволоками. В результате получены разности двойных измерений и истинные ошибки измерений (табл. 30). Произвести оценку точности по разностям двойных измерений и по истинным ошибкам.

Решение.

а) Критерий допустимости для $[d]$:

$0,25\ [\lvert d\rvert] = 0,25 \cdot 94,4 \approx 24$; $\lvert [d] \rvert < 0,25\ [\lvert d \rvert]$, так как $22,8 < 24$.

б) Средняя квадратическая ошибка одного измерения длины линии светодальномером, подсчитанная по разностям d_i,

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{356}{2 \cdot 37}} = 2,2 \text{ см.}$$

в) Средняя квадратическая ошибка среднего из двух измерений длины линии, подсчитанная по разностям d_i,

$$m_{\bar{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{356}{37}} = 1,6 \text{ см.}$$

Таблица 30

№ п/п	Длина линии s_i, измеренная, м: СТ-61 1-й наблюдатель s_i'	СТ-61 2-й наблюдатель s_i''	проволоками (точная)	Истинная ошибка Δ_i, см: 1-й наблюдатель Δ_i'	2-й наблюдатель Δ_i''	Разность $d_i = s_i' - s_i''$, см	$\Delta_i'^2$	$\Delta_i''^2$	d_i^2
1	214,945	214,951	214,940	+0,5	+1,1	−0,6			
2	231,408	231,406	231,417	−0,9	−1,1	+0,2			
3	243,021	243,041	243,006	+1,5	+3,5	−2,0			
4	247,370	247,362	247,330	+4,0	+3,2	+0,8			
5	267,394	267,367	267,411	−1,7	−4,4	+2,7			
6	275,732	275,792	275,786	−5,4	+0,6	−6,0			
7	276,375	276,396	276,408	−3,3	−1,2	−2,1			
8	292,277	292,297	292,306	−2,9	−0,9	−2,0			
9	324,436	324,466	324,503	−6,7	−3,7	−3,0			
10	347,305	347,336	347,358	−5,3	−2,2	−3,1			
11	350,447	350,435	350,467	−2,0	−3,2	+1,2			
12	368,915	368,926	368,943	−2,8	−1,7	−1,1			
13	370,545	370,543	370,543	+0,2	0,0	+0,2			
14	370,846	370,832	370,853	−0,7	−2,1	+1,4			
15	371,942	371,960	371,963	−2,1	−0,3	−1,8			
16	375,150	375,196	375,188	−3,8	+0,8	−4,6			
17	399,253	399,322	399,264	−1,1	+5,8	−6,9			
18	406,203	406,218	406,185	+1,8	+3,3	−1,5			
19	411,919	411,961	412,004	−8,5	−4,3	−4,2			
20	420,192	420,154	420,175	+1,7	−2,1	+3,8			
21	440,358	440,358	440,354	+0,4	+0,4	0,0			
22	463,794	463,822	463,826	−3,2	−0,4	−2,8			
23	471,458	471,420	471,474	−1,6	−5,4	+3,8			
24	509,738	509,754	509,790	−5,2	−3,6	−1,6			
25	517,504	517,487	517,525	−2,4	−4,1	+1,7			
26	551,857	551,854	551,849	+0,8	+0,5	+0,3			
27	575,273	575,300	575,298	−2,5	+0,2	−2,7			
28	592,023	592,042	592,037	−1,4	+0,5	−1,9			
29	593,343	593,305	593,315	+2,8	−1,0	+3,8			
30	608,190	608,164	608,200	−1,0	−3,6	+2,6			
31	612,672	612,675	612,704	−3,2	−2,9	−0,3			
32	675,138	675,092	675,116	+2,2	−2,4	+4,6			
33	692,203	692,260	692,208	−0,5	+5,2	−5,7			
34	752,448	752,422	752,436	+1,2	−1,4	+2,6			
35	808,437	808,454	808,447	−1,0	+0,7	−1,7			
36	967,469	967,408	967,437	+3,3	−2,8	+6,1			
37	1023,516	1023,546	1023,528	−1,2	+1,8	−3,0			
						−58,6 +35,8	348	280	356
						$[d] = -22,8$ $[\lvert d\rvert] = 94,4$			

г) Средняя квадратическая ошибка m одного измерения, вычисленная по истинным ошибкам обоих наблюдателей,

$$m_\Delta = \sqrt{\frac{[\Delta'^2] + [\Delta''^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{628}{74}} = 2{,}9 \text{ см.}$$

д) Средняя квадратическая ошибка $m_{\text{ср}}$ среднего из двух измерений, подсчитанная по истинным ошибкам,

$$m_{\text{ср}} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{2{,}9 \text{ см}}{\sqrt{2}} = 2{,}1 \text{ см.}$$

Глава X

ВЫРАВНИВАНИЕ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§ 54. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При математической обработке результатов измерений перед исследователем часто ставится задача определения параметров той или иной функциональной зависимости, причем вид функции известен заранее и точно; например, он легко определяется из физической сущности наблюдаемых явлений. Во многих случаях вид функции можно установить до начала математической обработки путем построения графика по экспериментальным данным. Простейшим примером такого рода зависимости может служить линейная зависимость

$$y = a + bx. \tag{538}$$

Задача обработки наблюдений в случае (538) сведется к определению по результатам многократных наблюдений функции y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) наиболее надежных значений параметров a и b и оценке их точности. Ниже будет показано, как такого рода задачи, называемые для краткости *уравниванием*, можно решать с помощью метода наименьших квадратов, хорошо зарекомендовавшего себя в смысле строгости решения, точности получаемых результатов и возможности попутно с отысканием наиболее надежных (уравненных) значений неизвестных оценки их точности.

§ 55. СУЩНОСТЬ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Пусть установлены функциональные связи, которые приняты в качестве точных; будем называть их *параметрическими уравнениями связи**

$$u_i = f_i(X, Y, Z, \ldots, T) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{539}$$

* В [23, стр. 240] подобные уравнения названы *условными уравнениями*. Иногда их называют *начальными* или просто *уравнениями связи* [22, стр. 280].

Систему (539) назовем системой *параметрических уравнений связи*. Обозначим измеренные значения функции (539) через u'_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Задача уравнивания возникает в связи с тем, что число измерений функции n всегда необходимо выбирать больше числа определяемых параметров k, т. е.

$$n > k.$$

Составим систему *уравнений ошибок*

$$u'_i - f_i(X, Y, Z, \ldots, T) = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{541}$$

из которой видно, что условие (540) вызывается наличием ошибок измерений в u'_i, равных Δ_i, которые, естественно, неизвестны, как и неизвестны точные значения параметров $X, Y, Z, \ldots, T$, хотя точная связь их с функцией u_i, выражаемая формулой (539), в большинстве случаев известна (или выбрана) заранее. Значит, нам ничего не остается, как в *уравнениях ошибок* заменить неизвестные точные значения параметров $X, Y, Z, \ldots, T$ наиболее надежными значениями их $x, y, z, \ldots, t$, которые попытаемся найти на основании измерений u'_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), $n > k$.

Составим также систему *уравнений поправок*

$$f_i(x, y, z, \ldots, t) - u'_i = v_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{542}$$

При: 1) $n < k$ — задача неопределенная;

2) $n = k$ — задача решается любым из методов алгебры в предположении, что ошибки измерений отсутствуют или пренебрегаемо малы, что исключено.

Избыточное число измерений, равное $(n-k)$, приводит к $(n-k)$ независимых решений системы (542) с $(n-k)$ ответами.

Таким образом, кроме вышеперечисленных условий отыскания параметров (см. § 54), необходимо подобрать такой метод решения возникшей задачи, чтобы были устранены все внутренние противоречия в системе (542), вызываемые наличием ошибок измерений в значениях u'_i, и чтобы решение системы (542) было единственное (однозначное).

В § 36 был обоснован принцип наименьших квадратов (375), решение задачи под условием которого приводит к отысканию наиболее надежного значения окончательного результата.

Исходя из этого, решим систему (542) под условием

$$\sigma = [v^2] = \min, \tag{375}$$

т. е. пока для случая равноточных измерений. Найдем частные производные для системы (542) по каждому из переменных и приравняем их к нулю; под условием равенства нулю производных найдем $x, y, z, \ldots, t$, которые и будут наиболее надежными значениями неизвестных. Итак:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial x}&=2v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+2v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+\ldots+2v_n\frac{\partial v_n}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial\sigma}{\partial y}&=2v_1\frac{\partial v_1}{\partial y}+2v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+\ldots+2v_n\frac{\partial v_n}{\partial y}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial\sigma}{\partial t}&=2v_1\frac{\partial v_1}{\partial t}+2v_2\frac{\partial v_2}{\partial t}+\ldots+2v_n\frac{\partial v_n}{\partial t}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (543)$$

или

$$\left.\begin{aligned}\left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right]&=0,\\ \left[v\frac{\partial v}{\partial y}\right]&=0,\\ &\ldots\ldots\\ \left[v\frac{\partial v}{\partial t}\right]&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (544)$$

Систему (544) назовем *системой нормальных уравнений в общем виде.*

Обратим внимание на то, что в системе (544) число уравнений равно числу неизвестных.

§ 56. ВЫВОД НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть система уравнений (539) имеет линейный вид, т. е.

$$u_i=a_iX+b_iY+c_iZ+\ldots+g_iT+r_i \quad (i=1,\ 2,\ldots,n), \quad (545)$$

где r_i — свободный член; a_i, b_i, c_i, ..., g_i — точные коэффициенты.

Запишем уравнение поправок (542) для системы (545)

$$a_ix+b_iy+c_iz+\ldots+g_it+r_i-u_i'=v_i \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ldots,n), \quad (546)$$

где

$$r-u'=l_i \qquad (547)$$

— свободные члены уравнений поправок; в геодезии это, как правило, величины, противоположные невязкам (невязка — разность измеренного и теоретического значений функции (539).

С учетом (547) перепишем уравнение (546)

$$a_ix+b_iy+c_iz+\ldots+g_it+l_i=v_i \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ldots,n) \quad (548)$$

— это *уравнение поправок для линейной функции.*

Для связи (548) и (544) найдем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_i}{\partial x}&=a_i,\\ \frac{\partial v_i}{\partial y}&=b_i,\\ &\ldots\ldots\\ \frac{\partial v_i}{\partial t}&=g_i.\end{aligned}\right\} \qquad (549)$$

$$(i=1,\ 2,\ldots,n).$$

Раскроем уравнения (544) с учетом (546) и (549), для чего систему (548) последовательно умножим на столбцы a_i, b_i, c_i, ..., g_i и сложим полученные результаты по столбцам, т. е.

$$|g_i|\ldots|c_i|\,|b_i|\,|a_i| \quad a_ix+b_iy+c_iz+\ldots+g_it+l_i=v_i$$

$$(i=1,\ 2,\ldots,n); \qquad (550)$$

имеем

$$\left.\begin{aligned}&N_1\quad [aa]x+[ab]y+[ac]z+\ldots+[ag]t+[al]=[av]=0,\\ &N_2\quad [ab]x+[bb]y+[bc]z+\ldots+[bg]t+[bl]=[bv]=0,\\ &N_3\quad [ac]x+[bc]y+[cc]z+\ldots+[cg]t+[cl]=[cv]=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &N_k\quad [ag]x+[bg]y+[cg]z+\ldots+[gg]t+[gl]=[gv]=0.\end{aligned}\right\} \qquad (551)$$

Система (551) носит название *системы нормальных уравнений* и обладает рядом свойств, а именно:

1) по диагонали системы расположены члены с квадратичными коэффициентами $[aa]$, $[bb]$, ..., $[gg]$;

2) симметрично относительно диагонали в системе (551) располагаются члены с идентичными коэффициентами;

3) в правой части системы (551) нули.

Система

$$\left.\begin{aligned}[][av]&=0,\\ [bv]&=0,\\ &\ldots\\ [gv]&=0\end{aligned}\right\} \qquad (552)$$

называется *системой нормальных уравнений в свернутом виде.*

§ 57. ВЫВОД НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В случае неравноточных измерений имеем

$$\left.\begin{matrix} u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{matrix}\right\}$$

$$(i=1, 2, \ldots, n),$$

где u'_i — результаты измерений, p_i — веса измерений.

В соответствии с условием (454)

$$\sigma = [pv^2] = \min. \quad (454)$$

Решая систему (542) под условием (454), по аналогии с предыдущим легко получить:

$$\left.\begin{aligned} &\left[pv\frac{\partial v}{\partial x}\right]=0, \\ &\left[pv\frac{\partial v}{\partial y}\right]=0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\left[pv\frac{\partial v}{\partial t}\right]=0, \end{aligned}\right\} \quad (553)$$

$$\left.\begin{aligned} &[pav]=0, \\ &[pbv]=0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &[pgv]=0, \end{aligned}\right\} \quad (554)$$

$$\left.\begin{aligned} &[paa]\,x+[pab]\,y+[pac]\,z+\ldots+[pag]\,t+[pal]=0, \\ &[pab]\,x+[pbb]\,y+[pbc]\,z+\ldots+[pbg]\,t+[pbl]=0 \\ &[pac]\,x+[pbc]\,y+[pcc]\,z+\ldots+[pcg]\,t+[pcl]=\;, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[pag]\,x+[pbg]\,y+[pcg]\,z+\ldots+[pgg]\,t+[pgl]=0, \end{aligned}\right\} \quad (555)$$

где (553) — система нормальных уравнений в общем виде для случая неравноточных измерений; (554) — система нормальных уравнений в свернутом виде для случая неравноточных измерений; (555) — система нормальных уравнений (в «конкретном виде») для случая неравноточных измерений.

§ 58. ВЫВОД НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Если система условных уравнений (539) нелинейна, прежде чем решать задачу по методу наименьших квадратов, ее надо привести к линейному виду, например разложением функций в ряд

Тэйлора по степеням малых приращений искомых неизвестных $\delta x, \delta y, \ldots, \delta t$.

Представим $x, y, z, \ldots, t$ в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0+\delta x, \\ y &= y_0+\delta y, \\ &\ldots\ldots \\ t &= t_0+\delta t, \end{aligned}\right\} \quad (556)$$

где $x_0, y_0, \ldots, t_0$ — приближенные значения неизвестных, вычисленные, например, решением любой системы из k уравнений (548). Получим

$$f_i(x_0+\delta x,\ y_0+\delta y, \ldots, t_0+\delta t)=f_i+(x_0, y_0, \ldots, t_0)+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0\delta x+$$
$$+\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0\delta y+\ldots+\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_0\delta t+R. \quad (557)$$

Пренебрегаем в формуле (557) остаточным членом по его очевидной малости ($\delta x, \delta y, \ldots, \delta t$ — очень малые величины по сравнению с $x_0, y_0, \ldots, t_0$) и после введения обозначений

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0=a_i;\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0=b_i;\ \ldots;\quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_0=g_i \quad (558)$$

формулу (557) перепишем

$$f_i(x_0+\delta x,\ y_0+\delta y, \ldots, t_0+\delta t)=f_i(x_0, y_0, \ldots, t_0)+$$
$$+a_i\delta x+b_i\delta y+\ldots+g_i\delta t\quad (i=1, 2, \ldots, n). \quad (559)$$

Уравнения поправок (542)

$$f_i(x, y, \ldots, t)-u'_i=v_i$$

с учетом (559) примут вид

$$a_i\delta x+b_i\delta y+\ldots+g_i\delta t+f_i(x_0, y_0, \ldots, t_0)-u'_i=v_i. \quad (560)$$

Обозначим

$$f_i(x_0, y_0, \ldots, t_0)-u'_i=l_i\ (i=1, 2, \ldots, n) \quad (561)$$

— свободные члены уравнений поправок.

Окончательно система уравнений поправок (560) с учетом обозначения (561) будет

$$a_i\delta x+b_i\delta y+\ldots+g_i\delta t+l_i=v_i\quad (i=1, 2, \ldots, n). \quad (562)$$

Поступая аналогично тому, как это имело место в § 56, придем к системе линейных нормальных уравнений (для равноточных измерений)

$$\left.\begin{aligned} &[aa]\,\delta x+[ab]\,\delta y+[ac]\,\delta z+\ldots+[ag]\,\delta t+[al]=0, \\ &[ab]\,\delta x+[bb]\,\delta y+[bc]\,\delta z+\ldots+[bg]\,\delta t+[bl]=0, \\ &[ac]\,\delta x+[bc]\,\delta y+[cc]\,\delta z+\ldots+[cg]\,\delta t+[cl]=\;, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[ag]\,\delta x+[bg]\,\delta y+[cg]\,\delta z+\ldots+[gg]\,\delta t+[gl]=0. \end{aligned}\right\} \quad (563)$$

Для случая неравноточных измерений система нормальных уравнений будет аналогична системе (555), только в качестве неизвестных в ней будут $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots, \delta t$ вместо $x, y, z, \ldots, t$, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
&[paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y + [pac]\,\delta z + \ldots + [pag]\,\delta t + [pal] = 0,\\
&[pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y + [pbc]\,\delta z + \ldots + [pbg]\,\delta t + [pbl] = 0,\\
&[pac]\,\delta x + [pbc]\,\delta y + [pcc]\,\delta z + \ldots + [pcg]\,\delta t + [pcl] = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[pag]\,\delta x + [pbg]\,\delta y + [pcg]\,\delta z + \ldots + [pgg]\,\delta t + [pgl] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (564)$$

Рассмотренный в § 55—58 способ называется параметрическим способом уравнивания.

Если уравнения (539) выражают криволинейную зависимость, во многих случаях ее можно свести к линейной методом «выравнивания», сущность которого состоит в следующем (возьмем для простоты функцию двух неизвестных — $\varphi(x, y)$). Функция $\varphi(x, y)$ преобразуется к виду

$$\varphi(x, y) = a + bf(x, y)$$

и вводятся новые неизвестные

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y).$$

Так, например, криволинейная зависимость

$$y = ax^b$$

логарифмированием сводится к линейной, т. е.

$$\lg y = \lg a + b \lg x.$$

Уравнение поправок примет вид

$$\lg a + b \lg x_i - \lg y_i = v_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Нормальные уравнения составляются по изложенному выше пути; указанный прием будет продемонстрирован на примере.

§ 59. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для получения только самих значений неизвестных системы (551), (555), (563), (564) можно решить любым из известных способов алгебры и найденные значения неизвестных будут наиболее надежными, поскольку системы нормальных уравнений составлены под условиями (375) и (454) для равноточных и неравноточных измерений соответственно.

Однако выше (§ 54) была поставлена задача совместного решения двух главных проблем уравнивания получения наиболее надежных значений неизвестных параметров и оценки их точности. Часто возникает также необходимость оценки точности функций уравненных параметров. В этом случае целесообразно применять

при решении системы нормальных уравнений один из трех способов [23, стр. 258—259]: 1) способ определителей; 2) способ Гаусса; 3) матричный способ.

Рассмотрим способ Гаусса как наиболее простой и общеизвестный на примере трех нормальных уравнений для случая равноточных измерений.

Итак,

$$\left.\begin{aligned}
N_1 \quad &[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [al] = 0,\\
N_2 \quad &[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bl] = 0,\\
N_3 \quad &[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cl] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (565)$$

Сущность способа Гаусса на этом этапе состоит в последовательном исключении неизвестных и своеобразном обозначении полученных результатов.

Из N_1 находим

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[al]}{[aa]} \quad (566)$$

и, подставляя (566) в N_2 и N_3 уравнений (565), получим

$$\left.\begin{aligned}
N_2' \quad &[ab]\left(-\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[al]}{[aa]}\right) + [bb]\,y + [bc]\,z + [bl] = 0,\\
N_3' \quad &[ac]\left(-\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[al]}{[aa]}\right) + [bc]\,y + [cc]\,z + [cl] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (567)$$

бозначим:

$$\left.\begin{aligned}
&[bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]} = [bb1],\\
&[bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]} = [bc1],\\
&[cc] - \frac{[ac]\,[ac]}{[aa]} = [cc1],\\
&[cl] - \frac{[ac]\,[al]}{[aa]} = [cl1].
\end{aligned}\right\} \quad (568)^*$$

С учетом (568) перепишем уравнения (567):

$$\left.\begin{aligned}
N_2' \quad &[bb1]\,y + [bc1]\,z + [bl1] = 0,\\
N_3' \quad &[bc1]\,y + [cc1]\,z + [cl1] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (569)$$

* Числовой символ 1 означает номер исключенного неизвестного, в данном случае — первого (x).

Далее исключаем 2-е неизвестное y; из N_2' — уравнения (569) получим

$$y = -\frac{[bc1]}{[bb1]}z - \frac{[bl1]}{[bb1]}. \tag{570}$$

Подставим значение y из (570) в N_3' уравнения (569)

$$N_3' \quad [bc1]\left(-\frac{[bc1]}{[bb1]}z - \frac{[bl1]}{[bb1]}\right) + [cc1]z + [cl1] = 0. \tag{571}$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} [cc1] - \frac{[bc1][bc1]}{[bb1]} &= [cc2], \\ [cl1] - \frac{[bc1][bl1]}{[bb1]} &= [cl2]. \end{aligned}\right\} \tag{572}$$

Уравнение (571) с учетом (572) примет вид

$$N_3'' \quad [cc2]z + [cl2] = 0; \tag{573}$$

$$z = -\frac{[cl2]}{[cc2]}. \tag{574}$$

Соберем в систему N_1 из уравнений (565), N_2' из уравнений (569) и N_3'' из уравнений (573)

$$\left.\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [al] &= 0, \\ [bb1]y + [bc1]z + [bl1] &= 0, \\ [cc2]z + [cl2] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{575}$$

Получили так называемую систему **эквивалентных уравнений** (эквивалентный — равнозначный, равноценный).

Соберем в систему значения x, y, z из выражений (566), (570) и (574)

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[al]}{[aa]}, \\ y &= -\frac{[bc1]}{[bb1]}z - \frac{[bl1]}{[bb1]}, \\ z &= -\frac{[cl2]}{[cc2]}. \end{aligned}\right\} \tag{576}$$

Систему (576) называют системой **элиминационных уравнений** (элиминировать — исключать, устранять).

Выражения $[bb1]$, $[bc1]$, $[bl1]$, $[cc2]$, $[cl2]$ в (575) называют **алгоритмами** Гаусса.

§ 60. ПРАВИЛО РАСКРЫТИЯ АЛГОРИТМА ГАУССА

На основании выражений (568) и (572) нетрудно сформулировать общее (сокращенное) правило раскрытия алгоритма Гаусса, а именно: *раскрываемый алгоритм равен разности уменьшаемого,*

буквенные символы которого те же, что и у раскрываемого, с числовым символом на единицу меньше, чем у раскрываемого, и вычитаемого, представляющего дробь, в знаменателе которой коэффициент при исключенном неизвестном, а в числителе — произведение двух алгоритмов, буквенные символы которых составлены путем попарного соединения букв уменьшаемого и знаменателя дроби с тем же (что и в знаменателе) числовым символом.

Правило составления системы эквивалентных уравнений (575) и раскрытия алгоритма Гаусса легко распространить на общий случай, т. е. когда число уравнений в системе не 3, как в системе (565), а k. В самом деле

$$\left.\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots + [ag]t + [al] &= 0, \\ [bb1]y + [bc1]z + \ldots + [bg1]t + [bl1] &= 0, \\ [cc2]z + \ldots + [cg2]t + [cl2] &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ [gg(k-1)]t + [gl(k-1)] &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{577}$$

$$[gg(k-1)] = [gg(k-2)] - \frac{[gf(k-2)][gf(k-2)]^*}{[ff(k-2)]}. \tag{578}$$

Пользуясь сформулированным выше сокращенным правилом раскрытия алгоритма Гаусса и последовательно применяя указанное правило для раскрытия алгоритма $[gg(k-2)]$, в конечном счете получаем

$$[gg(k-1)] = [gg] - \frac{[ag]^2}{[aa]} - \frac{[bg1]^2}{[bb1]} - \ldots - \frac{[gf(k-2)]^2}{[ff(k-2)]}. \tag{578'}$$

По аналогии с выражением (578′) для любого алгоритма $[lsk]$ имеем

$$[lsk] = [ls] - \frac{[al][as]}{[aa]} - \frac{[bl1][bs1]}{[bb1]} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{[gl(k-1)][gs(k-1)]}{[gg(k-1)]}. \tag{579}$$

На основании выражений (578′) и (579) сформулируем полное правило раскрытия алгоритма Гаусса: *раскрываемый алгоритм равен разности уменьшаемого, буквенные символы которого те же, что и у раскрываемого, а числовой символ отсутствует (равен нулю), и вычитаемого, составленного из дробей, число которых равно числовому символу раскрываемого алгоритма: знаменатели дробей — коэффициенты при исключенных неизвестных, а числители — произведения двух алгоритмов, буквенные символы которых составлены путем попарного соединения букв соответствующего знаменателя и уменьшаемого с теми же (что в знаменателе) числовыми символами.*

---

* В уравнении (548) коэффициент при предпоследнем неизвестном — g_f.

§ 61. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ (ДЕТЕРМИНАНТОВ).

Если система нормальных уравнений не выше 4-го порядка (четыре уравнения, четыре неизвестных), то весьма удобным способом ее решения является способ определителей. При числе уравнений в системе больше четырех прямое вычисление определителей является громоздкой задачей. При выравнивании опытных данных наиболее распространенными являются случаи определения от 2 до 4 параметров, поэтому рассмотрим удобный при этом способ решения системы нормальных уравнений с помощью определителей на примере решений системы (565). Из алгебры известно, что если определитель системы $D \neq 0$, то система определенная, и по Крамеру ее неизвестные выражаются формулами

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad z = \frac{D_z}{D}, \tag{580}$$

где D — определитель системы; D_x, D_y, D_z — определители соответствующих неизвестных.

В формулах (580), как известно,

$$D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{vmatrix}, \tag{581}$$

$$D_x = -\begin{vmatrix} [al] & [ab] & [ac] \\ [bl] & [bb] & [bc] \\ [cl] & [bc] & [cc] \end{vmatrix}, \tag{582}$$

$$D_y = -\begin{vmatrix} [aa] & [al] & [ac] \\ [ab] & [bl] & [bc] \\ [ac] & [cl] & [cc] \end{vmatrix}, \tag{583}$$

$$D_z = -\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [al] \\ [ab] & [bb] & [bl] \\ [ac] & [bc] & [cl] \end{vmatrix}. \tag{584}$$

Из сравнения формул (581), (582), (583), (584) видно, что D_x, D_y, D_z составляются заменой в определителе системы D соответствующего номеру неизвестного столбца столбцом свободных членов нормальных уравнений и переменой знака «+» на «—».

Правило вычисления определителя 2-го порядка выражается формулой [7, стр. 240]

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{585}$$

Для определителя 3-го порядка по «правилу Саррюса» имеем

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{586}$$

Как видим из формулы (586), «правило Саррюса» состоит в том, что при вычислении определителя 3-го порядка к нему приписывается два первых столбца и далее обычным путем определитель представляется как алгебраическая сумма произведений его элементов, составленных по соответствующим диагоналям (сверху вниз все со знаком «+» и снизу вверх все со знаком «—»).

Если необходимо найти определитель n-го порядка, по одному из свойств определителей его сводят к $(n-1)$-у, разложив по элементам любой (i-й) строки по формуле

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \tag{587}$$

где A_{in} — алгебраические дополнения элемента строки a_{ij}.

Так, для (581)

$$D = [aa]\,A_{11} + [ab]\,A_{12} + [ac]\,A_{13}, \tag{588}$$

или

$$D = [aa]\begin{vmatrix} [bb] & [bc] \\ [bc] & [cc] \end{vmatrix} - [ab]\begin{vmatrix} [ab] & [bc] \\ [ac] & [cc] \end{vmatrix} +$$

$$+ [ac]\begin{vmatrix} [ab] & [bb] \\ [ac] & [bc] \end{vmatrix}. \tag{589}$$

A_{11}, A_{12}, A_{13} в данном случае в формуле (589) получены по общей формуле минора соответствующего алгебраического дополнения

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$
= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots a_{i+1,n} \\ a_{n1} & \dots a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (590)
$$

Как известно из алгебры, **минором** элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$ порядка, составленный после зачеркивания в данном определителе порядка n i-й строки и j-го столбца.

Из (590) для формул (588) и (589) следует:

$$
\left.\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [bb] & [bc] \\ [bc] & [cc] \end{vmatrix} = [bb]\,[cc] - [bc]^2, \\
A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} [ab] & [bc] \\ [ac] & [cc] \end{vmatrix} = -[ab]\,[cc] + [ac]\,[bc], \\
A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [ab] & [bb] \\ [ac] & [bc] \end{vmatrix} = [ab]\,[bc] - [ac]\,[bb].
\end{aligned}\right\} \qquad (591)
$$

§ 62. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПАРАМЕТРОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

На основании доказательств, содержащихся в книге [23, стр. 267], для системы (565) в принятых обозначениях можем записать:

$$
\left.\begin{aligned}
m_x &= m\sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \\
m_y &= m\sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \\
m_z &= m\sqrt{\frac{A_{33}}{D}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (592)
$$

Здесь m_x, m_y, m_z — средние квадратические ошибки параметров x, y, z;

$$
m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-k}} \qquad (592')
$$

— средняя квадратическая ошибка, характеризующая точность измерений функции (539); A_{11}, A_{22}, A_{33} — алгебраические дополнения первого, второго и третьего диагональных элементов; D — определитель системы.

На основании обозначений (592), принимая при вычислении весов найденных параметров $c = m^2$, получим

$$
p_x = \frac{D}{A_{11}}, \qquad p_y = \frac{D}{A_{22}}, \qquad p_z = \frac{D}{A_{33}}. \qquad (593)
$$

Сделаем замечания к формуле (592′). Эта формула записана здесь на основании вывода формулы Бесселя для равноточных измерений. Как указывалось ранее, в формуле Бесселя (409) под квадратным корнем в знаменателе $(n-1)$ есть избыточное число измерений; для случая, когда измеряется одна величина, как это было в том случае (см. § 39), число определяемых (необходимых) величин равнялось единице. В данном случае определяется k параметров x, y, z, . . . , t. Следовательно, число избыточных измерений в этом случае есть $n-k$. С учетом этих соображений и записана формула (592′). Для определения m по формуле (592′) необходимо получить $[vv]$ для равноточных и $[pvv]$ — для неравноточных измерений.

Запишем уравнения поправок

$$
v_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ . \ . \ . + g_i t + l_i \qquad (548)
$$

и

$$
v_i = a_i \delta x + b_i \delta y + c_i \delta z + \ . \ . \ . + g_i \delta t + l_i. \qquad (562)
$$

На основании уравнений (548) и (562), умножая левую и правую их части на столбец v_i, легко получить

$$
\left.\begin{aligned}
[vv] &= [av]\,x + [bv]\,y + [cv]\,z + \ . \ . \ . + [gv]\,t + [lv], \\
[vv] &= [av]\,\delta x + [bv]\,\delta y + [cv]\,\delta z + \ . \ . \ . + [gv]\,\delta t + [lv].
\end{aligned}\right\} \qquad (594)
$$

На основании (552) для обоих уравнений системы (594) имеем

$$
[vv] = [lv]. \qquad (595)
$$

Значит, вычислив поправки v_i непосредственно путем подстановки найденных параметров x, y, z, . . . , t или δx, δy, δz, . . . , δt в формулу (548) или (562) соответственно, можно сумму $[vv]$ также получить непосредственно и определение этой важной суммы проконтролировать по формуле (595). Совпадение $[vv]$ с $[lv]$ в пределах 3—5 % от $[vv]$ считается вполне удовлетворительным.

Нетрудно доказать, что в случае решения уравнений по способу Гаусса существует контрольное равенство для $[vv]$

$$
[vv] = [lv] = [sv] = [llk] = [lsk] = [ssk], \qquad (596)
$$

если при составлении коэффициентов нормальных уравнений осуществлялся контроль

$$\left.\begin{array}{l}[aa]+[ab]+[ac]+\ .\ .\ .\ +[ag]+[al]=[as]\\ [ab]+[bb]+[bc]+\ .\ .\ .\ +[bg]+[bl]=[bs]\\ [ac]+[bc]+[cc]+\ .\ .\ .\ +[cg]+[cl]=[cs]\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ [ag]+[bg]+[cg]+\ .\ .\ .\ +[gg]+[gl]=[gs]\\ [al]+[bl]+[cl]+\ .\ .\ .\ +[gl]+[ll]=[ls]\\ \hline [as]+[bs]+[cs]+\ .\ .\ .\ +[gs]+[ls]=[ss]\end{array}\right\} . \qquad (597)$$

Составление коэффициентов уравнений поправок в формулах (548) и (562) в свою очередь контролировалось по формуле

$$[a]+[b]+[c]+\ .\ .\ .\ +[g]+[l]=[s]. \qquad (598)$$

В этом случае система контрольных сумм коэффициентов эквивалентных уравнений при решении системы нормальных уравнений с коэффициентами (597) имеет вид (см. формулу 577)

$$\left.\begin{array}{l}[aa]+[ab]+[ac]+\ .\ .\ .\ +[ag]+[al]=[as],\\ \quad [bb1]+[bc1]+\ .\ .\ .\ +[bg1]+[bl1]=[bs1],\\ \qquad [cc2]+\ .\ .\ .\ +[cg2]+[cl2]=[cs2],\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ \qquad [gg(k-1)]+[gl(k-1)]=[gs(k-1)],\\ \qquad\qquad [llk]=[lsk],\\ \qquad\qquad [lsk]=[ssk].\end{array}\right\} \qquad (599)$$

Вернемся к контрольной сумме (596). Умножим систему (548) на столбец l_i и, суммируя по столбцам, получим

$$[lv]=[al]x+[bl]y+[cl]z+\ .\ .\ .\ +[gl]t+[ll]. \qquad (600)$$

В то же время на основании выражения (577) можем записать

$$\left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{[ab]}{[aa]}y-\dfrac{[ac]}{[aa]}z-\ .\ .\ .\ -\dfrac{[ag]}{[aa]}t-\dfrac{[al]}{[aa]},\\ y=-\dfrac{[bc1]}{[bb1]}z-\ .\ .\ .\ -\dfrac{[bg1]}{[bb1]}t-\dfrac{[bl1]}{[bb1]},\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ t=-\dfrac{[gl(k-1)]}{[gg(k-1)]}.\end{array}\right\} \qquad (601)$$

Если из формулы (600) последовательно методом Гаусса исключить все неизвестные, получим

$$[lv]=[llk]. \qquad (602)$$

В самом деле, после исключения предпоследнего неизвестного имеем

$$[lv]=[gl(k-1)]t+[ll(k-1)]. \qquad (603)$$

Подставив в формулу (603) t из (601), имеем

$$[lv]=-\frac{[gl(k-1)][gl(k-1)]}{[gg(k-1)]}+[ll(k-1)]=[llk]. \qquad (604)$$

Аналогично формуле (600) умножим систему (548) на столбец s_i из контроля (598), получим

$$[sv]=[as]x+[bs]y+[cs]z+\ .\ .\ .\ +[gs]t+[ls]. \qquad (605)$$

Исключив из формулы (605) предпоследнее неизвестное, имеем

$$[sv]=-\frac{[gl(k-1)][gs(k-1)]}{[gg(k-1)]}+[ls(k-1)]=[lsk]. \qquad (605')$$

Из выражения (599) видно, что

$$[lsk]=[ssk]. \qquad (605'')$$

Соединяя полученные результаты из формул (595), (602), (604), (605′) и (605″), получим

$$[vv]=[lv]=[sv]=[llk]=[lsk]=[ssk]. \qquad (606)$$

Контроль (606) называется заключительным контролем при решении нормальных уравнений способом Гаусса.

Если в отличие от рассмотренного имел место случай неравноточных измерений, выводы принципиально не меняются и формула (606) примет вид

$$[pvv]=[plv]=[psv]=[pllk]=[plsk]=[pssk]. \qquad (607)$$

Формулы (592) для этого случая будут

$$\left.\begin{array}{l}m_x=\mu\sqrt{\dfrac{A_{11}}{D}},\\ m_y=\mu\sqrt{\dfrac{A_{22}}{D}},\\ m_z=\mu\sqrt{\dfrac{A_{33}}{D}},\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ m_t=\mu\sqrt{\dfrac{A_{kk}}{D}},\end{array}\right\} \qquad (608)$$

а формула Бесселя примет вид

$$\mu=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}}. \qquad (609)$$

Оценка надежности определения m и μ по формулам (593) и (609) в соответствии с формулами (413) и (484) может быть произведена следующим образом:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-k)}}, \tag{610}$$

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-k)}}. \tag{611}$$

При вычислении весов параметров $x, y, z, \ldots, t$ (или $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots, \delta t$, что одно и то же) с учетом формул (593) и (608) следует принять $c = \mu^2$ и применять формулы

$$p_x = \frac{D}{A_{11}}, \qquad p_y = \frac{D}{A_{22}}, \qquad p_z = \frac{D}{A_{33}}, \ldots,$$

$$p_t = \frac{D}{A_{tt}}, \tag{612}$$

если система нормальных уравнений решалась способом определителей.

§ 63. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПАРАМЕТРОВ С ПОМОЩЬЮ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Задачу определения значений $m_x, m_y, \ldots, m_t$ или $p_x, p_y, \ldots, p_t$ в случае решения системы нормальных уравнений по способу Гаусса рассмотрим на примере системы трех нормальных уравнений.

Введем Q_{ij}-множители и назовем их весовыми коэффициентами (i — номер неизвестного, j — номер уравнения).

$$\left.\begin{array}{l|c|c|c}
 & x & y & z \\
\hline
[aa]x+[ab]y+[ac]z+[al]=0, & Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\
[ab]x+[bb]y+[bc]z+[bl]=0, & Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\
[ac]x+[bc]y+[cc]z+[cl]=0, & Q_{13} & Q_{23} & Q_{33}
\end{array}\right\} \tag{613}$$

Умножим каждое уравнение (613) последовательно на весовые коэффициенты неизвестных x, y, z и принимая для каждой суммы результатов умножения на соответствующий столбец Q_{ij},

$$\left.\begin{aligned}
[aa]Q_{11}+[ab]Q_{12}+[ac]Q_{13}&=1,\\
[ab]Q_{11}+[bb]Q_{12}+[bc]Q_{13}&=0,\\
[ac]Q_{11}+[bc]Q_{12}+[cc]Q_{13}&=0,
\end{aligned}\right\} \tag{614}$$

$$\left.\begin{aligned}
[aa]Q_{21}+[ab]Q_{22}+[ac]Q_{23}&=0,\\
[ab]Q_{21}+[bb]Q_{22}+[bc]Q_{23}&=1,\\
[ac]Q_{21}+[bc]Q_{22}+[cc]Q_{22}&=0,
\end{aligned}\right\} \tag{615}$$

$$\left.\begin{aligned}
[aa]Q_{31}+[ab]Q_{32}+[ac]Q_{33}&=0,\\
[ab]Q_{31}+[bb]Q_{32}+[bc]Q_{33}&=0,\\
[ac]Q_{31}+[bc]Q_{32}+[cc]Q_{33}&=1,
\end{aligned}\right\} \tag{616}$$

после решения систем относительно неизвестных получим

$$\left.\begin{aligned}
-x&=[al]Q_{11}+[bl]Q_{12}+[cl]Q_{13},\\
-y&=[al]Q_{21}+[bl]Q_{22}+[cl]Q_{23},\\
-z&=[al]Q_{31}+[bl]Q_{32}+[cl]Q_{33}.
\end{aligned}\right\} \tag{617*}$$

Целью дальнейших преобразований поставим задачу окончательно выразить зависимые в уравнениях (613) между собой неизвестные x, y, z в функции от непосредственных результатов измерений (невязок) l_i**. При преобразовании системы (617) обозначим

$$\left.\begin{aligned}
a_iQ_{11}+b_iQ_{12}+c_iQ_{13}&=\alpha_i,\\
a_iQ_{21}+b_iQ_{22}+c_iQ_{23}&=\beta_i,\\
a_iQ_{31}+b_iQ_{32}+c_iQ_{33}&=\gamma_i.
\end{aligned}\right\}(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{618}$$

С учетом (618), формулы (617) примут вид

$$\left.\begin{aligned}
x&=-[\alpha l],\\
y&=-[\beta l],\\
z&=-[\gamma l].
\end{aligned}\right\} \tag{619}$$

Применяя к формулам (619) известную из теории ошибок (§ 34) формулу (335), имеем

$$\left.\begin{aligned}
m_x^2&=[\alpha\alpha]m^2,\\
m_y^2&=[\beta\beta]m^2,\\
m_z^2&=[\gamma\gamma]m^2.
\end{aligned}\right\} \tag{620}$$

Необходимые для формул (620) суммы $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ получаем, умножив систему α_i на столбец α_i, систему β_i на столбец β_i и систему γ_i на столбец γ_i, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
[\alpha\alpha]&=[\alpha a]Q_{11}+[\alpha b]Q_{12}+[\alpha c]Q_{13},\\
[\beta\beta]&=[\beta a]Q_{21}+[\beta b]Q_{22}+[\beta c]Q_{23},\\
[\gamma\gamma]&=[\gamma a]Q_{31}+[\gamma b]Q_{32}+[\gamma c]Q_{33}.
\end{aligned}\right\} \tag{621}$$

* Знаки «—» в формулах (617) для удобства перенесены в левую часть; на оценке точности это не скажется.

** Как было принято в формуле (547),

$$r_i - u_i' = l_i,$$

откуда следует, что $m_{u_i'}^2 = m_{l_i}^2 = m^2$ (r_i — свободный член в формуле (545) безошибочен).

С учетом несложных преобразований системы (621) и того, что, как следует из выражений (614) — (616),

$$[\alpha a]=1,\qquad [\beta b]=1,\qquad [\gamma c]=1,$$

получаем

$$[\alpha\alpha]=Q_{11},\qquad [\beta\beta]=Q_{22},\qquad [\gamma\gamma]=Q_{33}, \tag{622}$$

С учетом (622) по формулам (620) для первых степеней средних квадратических ошибок уравненных параметров, т. е. не для случая трех уравнений, а для общего случая, когда число уравнений k, запишем

$$\left.\begin{aligned} m_x &= m\sqrt{Q_{11}},\\ m_y &= m\sqrt{Q_{22}},\\ m_z &= m\sqrt{Q_{33}},\\ &\dots\dots\\ m_i &= m\sqrt{Q_{kk}}.\end{aligned}\right\} \tag{623}$$

Для неравноточных измерений соответственно имеем

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \mu\sqrt{Q_{11}},\\ m_y &= \mu\sqrt{Q_{22}},\\ m_z &= \mu\sqrt{Q_{33}},\\ &\dots\dots\\ m_i &= \mu\sqrt{Q_{kk}}.\end{aligned}\right\} \tag{624}$$

Сравнивая формулы (608) и (624), приходим к очень важному положению, а именно

$$Q_{11}=\frac{A_{11}}{D},\qquad Q_{22}=\frac{A_{22}}{D},\qquad Q_{33}=\frac{A_{33}}{D},\ \dots,$$

$$Q_{kk}=\frac{A_{kk}}{D}. \tag{625}$$

Таким образом, диагональные весовые коэффициенты по формулам (625) при оценке точности в способе Гаусса равны частному от деления алгебраических дополнений соответствующих диагональных элементов определителя системы на определитель системы, т. е.

$$Q_{ii}=\frac{A_{ii}}{D}. \tag{626}$$

Можно доказать [22, стр. 336], что любые весовые коэффициенты являются алгебраическими дополнениями элементов, разделенными на определитель системы, т. е.

$$Q_{ij}=\frac{A_{ij}}{D}. \tag{627}$$

Пользуясь выражениями (618) и составляя суммы $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$, $[\beta\alpha]$, $[\gamma\beta]$ и др., нетрудно убедиться, что справедливы равенства

$$[\alpha\beta]=Q_{12},\ [\beta\alpha]=Q_{21},\ [\alpha\gamma]=Q_{13},\ [\gamma\alpha]=Q_{31}\ \text{и т. д.},$$

т. е.

$$Q_{ij}=Q_{ji}. \tag{628}$$

Свойство (628) приводит к сокращению объема вычислительных работ при определении весовых коэффициентов; из системы (613) легко подсчитать, что можно ограничиться необходимым и достаточным числом весовых коэффициентов, равным $k^2+k/2$, где k — число неизвестных.

§ 64. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПО СПОСОБУ ГАНЗЕНА

Кроме вышеприведенных способов и формул определения весовых коэффициентов (622), (625), (626), (627), (628), их можно сравнительно нетрудно определить способом, разработанным немецким астрономом Ганзеном. Сущность способа, применительно к системе (565), заключается в следующем. Решим систему (616) методом последовательного исключения неизвестных

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,Q_{31}+[ab]\,Q_{32}+[ac]\,Q_{33}&=0,\\ [ab]\,Q_{31}+[bb]\,Q_{32}+[bc]\,Q_{33}&=0,\\ [ac]\,Q_{31}+[bc]\,Q_{32}+[cc]\,Q_{33}&=1\end{aligned}\right\} \tag{616}$$

и получим

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,Q_{31}+[ab]\,Q_{32}+[ac]\,Q_{33}&=0,\\ [bb1]\,Q_{32}+[bc1]\,Q_{33}&=0,\\ [cc2]\,Q_{33}&=1.\end{aligned}\right\} \tag{629}$$

Из системы эквивалентных уравнений (629) находим

$$\left.\begin{aligned} Q_{33}&=\frac{1}{[cc2]},\\ Q_{32}&=-\frac{[bc1]}{[bb1]}\,Q_{33},\\ Q_{31}&=-\frac{[ab]}{[aa]}\,Q_{32}-\frac{[ac]}{[aa]}\,Q_{33}.\end{aligned}\right\} \tag{630}$$

Запишем два первых уравнения эквивалентной системы для (615); имеем

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,Q_{21}+[ab]\,Q_{22}+[ac]\,Q_{23}&=0,\\ [bb1]\,Q_{22}+[bc1]\,Q_{23}&=1.\end{aligned}\right\} \tag{631}$$

деления коэффициента при нем в системе (638) на коэффициент при последнем неизвестном (z), умноженному на вес последнего неизвестного (p_z). При небольшом числе неизвестных (до 4) рассмотренный способ определения весов неизвестных весьма эффективен.

§ 66. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ПАРАМЕТРОВ, НАЙДЕННЫХ СПОСОБОМ ГАУССА ИЛИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Часто исследователя может интересовать показатель точности функции параметров, найденных рассмотренными выше способами, а не только точность их самих ($m_x, m_y, \ldots, m_t$). Задача в этом случае ставится следующим образом. Пусть дана функция (возьмем для простоты 3 параметра)

$$F = \varphi(x, y, z) = f_1 x + f_2 y + f_3 z + f_0, \tag{643}$$

где f_1, f_2, f_3 — известные коэффициенты функции (643), которую иногда называют весовой; f_0 — постоянное слагаемое.

Необходимо найти среднюю квадратическую ошибку m_F или вес функции p_F. Формулу (335) здесь применять пока нельзя, так как x, y, z зависимы. Первая задача при решении вопроса на определение m_F (или p_F), таким образом, состоит в том, чтобы попытаться выразить F в функции от независимых результатов измерений l_i. Итак, подставим в формулу (643) вместо x, y, z их значения из (619), получим

$$\begin{aligned} F &= f_0 - f_1[\alpha l] - f_2[\beta l] - f_3[\gamma l] = \\ &= f_0 - f_1(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_n l_n) - \\ &\quad - f_2(\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \ldots + \beta_n l_n) - \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad - f_3(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \ldots + \gamma_n l_n) \end{aligned} \tag{644}$$

или

$$\begin{aligned} F = f_0 &- (f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1) l_1 - \\ &- (f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2) l_2 - \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- (f_1\alpha_n + f_2\beta_n + f_3\gamma_n) l_n. \end{aligned} \tag{645}$$

Принимая $m_{l_1} = m_{l_2} = \ldots = m_{l_n} = m$ по формуле (335), имеем

$$\begin{aligned} m_F^2 = [&(f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1)^2 + (f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2)^2 + \ldots + \\ &+ (f_1\alpha_n + f_2\beta_n + f_3\gamma_n)^2] m^2. \end{aligned} \tag{646}$$

Так как

$$m_F = m\sqrt{\frac{1}{P_F}}, \tag{647}$$

то с учетом формулы (647) можем, раскрывая скобки, формулу (646) переписать

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} = &f_1^2\alpha_1^2 + f_2^2\beta_1^2 + f_3^2\gamma_1^2 + 2f_1f_2\alpha_1\beta_1 + 2f_1f_3\alpha_1\gamma_1 + 2f_2f_3\beta_1\gamma_1 + \\ &+ f_1^2\alpha_2^2 + f_2^2\beta_2^2 + f_3^2\gamma_2^2 + 2f_1f_2\alpha_2\beta_2 + 2f_1f_3\alpha_2\gamma_2 + 2f_2f_3\beta_2\gamma_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ f_1^2\alpha_n^2 + f_2^2\beta_n^2 + f_3^2\gamma_n^2 + 2f_1f_2\alpha_n\beta_n + 2f_1f_3\alpha_n\gamma_n + 2f_2f_3\beta_n\gamma_n. \end{aligned} \tag{648}$$

Суммируя формулы (648), в сокращенной записи получим

$$\frac{1}{P_F} = f_1^2[\alpha\alpha] + f_2^2[\beta\beta] + f_3^2[\gamma\gamma] + 2f_1f_2[\alpha\beta] + 2f_1f_3[\alpha\gamma] + 2f_2f_3[\beta\gamma]. \tag{649}$$

Учитывая, что

$$[\alpha\alpha] = Q_{11}, \ [\beta\beta] = Q_{22}, \ [\gamma\gamma] = Q_{33}, \ [\alpha\beta] = Q_{12}, \ [\alpha\gamma] = Q_{13}, \ [\beta\gamma] = Q_{23}, \tag{650}$$

формулу (649) в случае применения при решении нормальных уравнений способа Гаусса запишем

$$\frac{1}{P_F} = f_1^2 Q_{11} + f_2^2 Q_{22} + f_3^2 Q_{33} + 2f_1f_2Q_{12} + 2f_1f_3Q_{13} + 2f_2f_3Q_{23}. \tag{651}$$

Если в формуле (643) k параметров, формула (651) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} = &f_1^2 Q_{11} + f_2^2 Q_{22} + \ldots + f_k^2 Q_{kk} + 2f_1f_2Q_{12} + \ldots + \\ &+ 2f_{k-1}f_kQ_{k-1,\,k}. \end{aligned} \tag{652}$$

В случае применения способа определителей для отыскания $x, y, z, \ldots, t$ формула для обратного веса, с учетом (626) и (627), может быть записана так

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} = \frac{1}{D}(&f_1^2A_{11} + f_2^2A_{22} + \ldots + f_k^2A_{kk} + 2f_1f_2A_{12} + \ldots + \\ &+ 2f_{13}A_{13} + \ldots + 2f_{k-1}f_kA_{k-1,\,k}). \end{aligned} \tag{653}$$

§ 67. ПРИМЕРЫ НА ВЫРАВНИВАНИЕ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Пример 1. В табл. 31 приведены из работы [7] результаты измерений электрического сопротивления R_i медного стержня при разной температуре t_i (°C). Зависимость R от t согласно рис. 13 выражается формулой

$$R = a + bt. \tag{1}$$

Определить параметры a и b по методу наименьших квадратов и оценить их точность; определить вес и среднюю квадратическую ошибку функции

$$R = a + 40b; \qquad \text{(II)}$$

Решение.

1. Составление уравнений поправок.

Исходя из условного уравнения (I), с учетом формулы (548) уравнения поправок выражаются в виде

$$v_i = a + t_i b - R_i \qquad (i = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ 7)$$

или конкретно

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a + 19{,}1b - 76{,}30, \\ v_2 &= a + 25{,}0b - 77{,}80, \\ v_3 &= a + 30{,}1b - 79{,}75, \\ v_4 &= a + 36{,}0b - 80{,}80, \\ v_5 &= a + 40{,}0b - 82{,}35, \\ v_6 &= a + 45{,}1b - 83{,}90, \\ v_7 &= a + 50{,}0b - 85{,}10. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

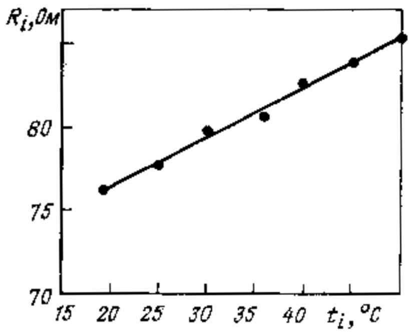

Рис. 13

По данным табл. 31 и системы (III) составим нормальные уравнения

$$\left.\begin{aligned} N_1 \quad & 7a + 245{,}3b - 566{,}0 = 0 \\ N_2 \quad & 245{,}3a + 9325{,}83b - 20044{,}495 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

2. Решение нормальных уравнений

Способом определителей:

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 245{,}3 \\ 245{,}3 & +9325{,}83 \end{vmatrix} = 65280{,}81 - 60172{,}09 = 5108{,}72;$$

$$D_a = -\begin{vmatrix} 566{,}0 & +245{,}3 \\ -20044{,}495 & +9325{,}83 \end{vmatrix} = 5278419{,}78 - 4916914{,}62 = 361505{,}16;$$

$$D_b = -\begin{vmatrix} 7 & -566{,}0 \\ 245{,}3 & -20044{,}495 \end{vmatrix} = 140311{,}465 - 138839{,}80 = 1471{,}665;$$

$$a = \mathbf{70{,}762375}; \qquad b = \mathbf{0{,}28806922}.$$

Способом Гаусса*:

составим систему эквивалентных уравнений

$$\left.\begin{aligned} 7a + 245{,}3b - 566{,}0 &= 0, \\ 729{,}817143b - 210{,}23786 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V)}$$

из решения системы (V) получаем $b = \mathbf{0{,}28806923}$; $a = \mathbf{70{,}762374}$ **Ом.**

* Матричный способ подробно изложен в работе *В. Д. Большакова, Ю. И. Маркузе* «Городская полигонометрия» (М., Недра, 1979).

Таблица 31

t_i, °C	R_i, Ом	$t_i\ t_i$	$t_i\ R_i$
19,1	76,30	364,81	1457,33
25,0	77,80	625,00	1945,00
30,1	79,75	906,01	2400,475
36,0	80,80	1296,00	2908,80
40,0	82,35	1600,00	3294,00
45,1	83,90	2034,01	3783,89
50,0	85,10	2500,00	4255,00
245,3	566,00	9325,83	20 044,495

3. Вычисление поправок согласно формулам (III) дано в табл. 32.

Таблица 32

№ п п	a	bt_i	R_i	$R_{выч} = a + bt_i$	v_i	v_i^2	$v_i\ R_i^*$
1	70,762375	5,502122	−76,30	76,264497	−0,035503	0,001	+2,709
2	70,762375	7,201730	−77,80	77,964105	+0,164105	0,027	−12,767
3	70,762375	8,670884	−79,75	79,433259	−0,316741	0,100	+25,260
4	70,762375	10,370492	−80,80	81,132867	+0,332867	0,111	−26,896
5	70,762375	11,522769	−82,35	82,285144	−0,064856	0,004	+5,341
6	70,762375	12,991922	−83,90	83,754297	−0,145703	0,021	+12,224
7	70,762375	14,403461	−85,10	85,165836	+0,065836	0,004	−5,603
			$[av]^{**} = [v] = -2{,}3 \cdot 10^{-4}$ $[bv]^{**} = [tv] = +1{,}8 \cdot 10^{-4}$			$[vv] = 0{,}268$	+45,534 −45,466 $[vR] = 0{,}268$

* См. Контрольное равенство (595).

** Нормальные уравнения в свернутом виде.

Контроль решения нормальных уравнений подстановкой найденных неизвестных в уравнения (IV):

$$\left.\begin{aligned} N_1 \quad & 7 \cdot 70{,}762375 + 245{,}3 \cdot 0{,}28806922 - 566{,}0 = +5 \cdot 10^{-6} \text{ (должно быть равно нулю)}, \\ N_2 \quad & 245{,}3 \cdot 70{,}762375 + 9325{,}83 \cdot 0{,}28806922 - 20044{,}495 = +15 \times 10^{-5} \text{ (должно быть равно нулю)}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

Таким образом, получено уравнение электрического сопротивления

$$\mathbf{R = (70{,}762375 + 0{,}288069_2 t)\ Ом.} \qquad \text{(VII)}$$

4. Оценка точности

Оценка точности измерений

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}=\sqrt{\frac{0,268}{5}}=0,23\ \text{Ом};\qquad m_m\approx 0,073.$$

Оценка точности вычисленных параметров a и b.

Вычислим весовые коэффициенты (см. формулу 625) способом определителей

$$Q_{11}=\frac{A_{11}}{D}=(-1)^2\frac{9325,83}{5108,72}=\mathbf{1,825};$$

$$Q_{22}=\frac{A_{22}}{D}=(-1)^4\frac{7}{5108,72}=\mathbf{1,3702062\cdot 10^{-3}}.$$

Вычислим весовые коэффициенты способом Ганзена и Энке (см. § 64—65); из уравнений (V) имеем

$$[bb1]=729,817_1;\qquad Q_{22}=\frac{1}{[bb1]}=\mathbf{1,3702062\cdot 10^{-3}}.$$

Для получения Q_{11} переформируем уравнения (V) к следующему виду (способ Энке):

$$\left.\begin{aligned}9325,83b+245,3a-20044,6&=0,\\ 245,3b+7a\qquad\qquad -566,0&=0,\end{aligned}\right\}\qquad (V')$$

т. е. первое неизвестное (a) поставим на второе место, сохранив при этом свойства системы; имеем

$$p_a=\frac{1}{Q_{11}}=7-\frac{245,3^2}{9325,83}=0,547;\qquad Q_{11}=1,828.$$

Оценим точность вычисленных параметров a и b, т. е.

$$m_a=\mathbf{0,23}\sqrt{Q_{11}}=0,23\sqrt{1,83}\approx 0,31\ \text{Ом}.$$

$$m_b=0,23\sqrt{Q_{22}}=0,23\sqrt{0,0014}\approx 8,6\cdot 10^{-3}.$$

Окончательно запишем

$$\mathbf{a=(70,76\pm 0,31)\ Ом};\qquad \mathbf{b=0,288\pm 8,6\cdot 10^{-3}}.$$

При контроле вычислений на ЭВМ «Наири-К» получено

$$a=(70,759\pm 0,313)\ \text{Ом};\qquad b=0,288\pm 0,008.$$

Примечание. При вычислениях в табл. 32 число значащих цифр для обеспечения контроля $[vv]=[vR]$ взято с запасом по сравнению с необходимой точностью определений параметров a и b, подтвержденной (согласующейся) с точностью измерений. Легко убедиться, что ни этим, ни другими контрольными вычислениями нельзя было воспользоваться, если ограничиться точностью вычислений, принятой в работе [7, стр. 570]: при этом расхождение $[vv]$ и $[vR]$ будет превышать саму сумму $[vv]=0,268$ почти в 7 раз ($[vv]=0,27$; $[vR]=1,86$) при допустимом 5 %.

Оценка точности весовой функции

$$R=a+40b\ (f_1=1;\quad f_2=40).\qquad (VIII)$$

Определим $\frac{1}{p_R}$ и m_R; по формуле (651) для (VIII) получим

$$\frac{1}{p_R}=f_1^2Q_{11}+f_2^2Q_{22}+2f_1f_2Q_{12}.\qquad (IX)$$

Неизвестный весовой коэффициент по аналогии с (629) по выражению (V)

$$\left.\begin{aligned}7Q_{21}+245,3Q_{22}&=0,\\ 729,8171_{428}Q_{22}&=1.\end{aligned}\right\}\qquad (X)$$

Из уравнений (X)

$$Q_{21}=-\frac{245,3}{7}Q_{22},$$

или

$$Q_{21}=-\frac{245,3}{7}1,3702063\cdot 10^{-3}=-0,0480159.$$

$$\left(\text{Контроль:}\quad Q_{12}=\frac{A_{12}}{D},\quad Q_{12}=(-1)^3\frac{+245,3}{5108,72}=-0,0480159.\right)$$

Проконтролируем вычисление весовых коэффициентов

$$7Q_{12}+245,3Q_{22}=7(-4,80159\cdot 10^{-2})+245,3\cdot 1,3702063\cdot 10^{-3}=$$
$$=\mathbf{-0,336+0,336=0}\ \text{(должен быть нуль)};$$
$$245,3Q_{12}+9325,8Q_{22}=245,3(-4,80159\cdot 10^{-2})+9325,8\times$$
$$\times 1,3702063\cdot 10^{-3}=\mathbf{-11,78+12,78=1,00}\ \text{(должна быть 1)}.$$

По формуле (IX)

$$\frac{1}{p_R}=1,825+16\cdot 10^2\cdot 1,4\cdot 10^{-3}-2\cdot 4\cdot 0,4802;$$

$$\frac{1}{p_R}=0,223;\qquad m_R=0,23\sqrt{0,223}=\mathbf{0,11\ \ Ом}.$$

Пример 2. В табл. 33 дано количество S безводного хлористого аммония (в граммах), способное растворяться в 100 г воды при абсолютной температуре 0°. Из рис. 14 видно, что

$$S=a\theta^b.\qquad (*)$$

Таблица 33

Величины, г		Логарифмы		$\lg\theta_i\lg S_i$	$(\lg\theta_i)^2$
θ_i	S_i	$\lg\theta_i$	$\lg S_i$		
273	29,4	2.436163	1.468347	3.577133	5.934890
283	33,3	2.451786	1.522444	3.732707	6.011255
288	35,2	2.459392	1.546543	3.803555	6.048609
293	37,2	2.466868	1.570543	3.874322	6.085438
313	45,8	2.495544	1.660865	4.144762	6.227740
333	55,2	2.522444	1.741939	4.393944	6.362724
353	65,6	2.547775	1.816904	4.629063	6.491157
373	77,3	2.571709	1.888179	4.855847	6.613687
	Σ	19.951681	13.215764	33.011333	49.775500 49.775499₇

Найти по методу наименьших квадратов постоянные a и b и оценить их точность.

«Выравниваем» зависимость (*) путем логарифмирования

$$\lg S = \lg a + b \lg \theta. \qquad (**)$$

На рис. 14 точки, нанесенные по координатам ($\lg \theta_i$, $\lg S_i$), разместились на одной прямой, следовательно, подтвердилось предположение о форме связи (*).

Уравнения поправок будут

$$v_i = \lg a + b \lg \theta_i - \lg S_i \qquad (i = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ 8). \qquad (***)$$

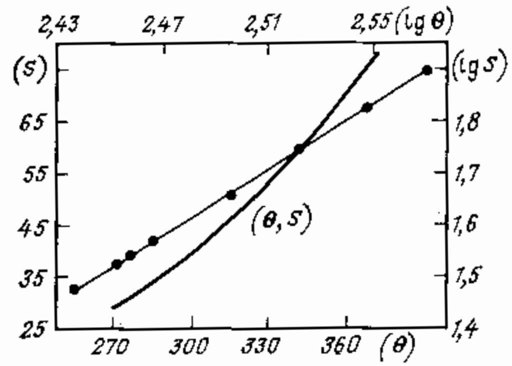

Рис. 14

Составим нормальные уравнения

$$\left.\begin{aligned} N_1 \quad & 8\lg a + [\lg\theta]\, b - \\ & - [\lg S] = 0, \\ N_2 \quad & [\lg\theta] \lg a + \\ & + [(\lg\theta_i)^2]\, b - \\ & - [\lg\theta \lg S] = 0. \end{aligned}\right\}$$

В качестве неизвестных здесь выступают $\lg a$ и b.

Нормальные уравнения в конкретном виде с учетом результатов вычислений в табл. 33 будут

$$\left.\begin{aligned} & 8\lg a + 19{,}951681 b - 13{,}215764 = 0, \\ & 19{,}951681 \lg a + 49{,}775500 b - 33{,}011333 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (****)$$

Решим полученную систему способом определителей:

$$D = \begin{vmatrix} 8 & +19{,}951681 \\ +19{,}951681 & +49{,}775500 \end{vmatrix} = +0{,}134425,$$

$$D_{\lg a} = -\begin{vmatrix} -13{,}215764 & +19{,}951681 \\ -33{,}011333 & +49{,}775500 \end{vmatrix} = -0{,}810324,$$

$$D_b = -\begin{vmatrix} 8 & -13{,}215764 \\ +19{,}951681 & -33{,}011333 \end{vmatrix} = +0{,}413957,$$

$$\lg a = \frac{-0{,}810324}{+0{,}134425} = -\ \mathbf{6{,}028075} \text{ (на ЭВМ «Наири-К»} : -6{,}028056);$$

$$b = \frac{+0{,}413957}{+0{,}134425} = +\ \mathbf{3{,}079464} \text{ (на ЭВМ «Наири-К»} : +3{,}0794506).$$

Уравнение связи (**) для практического использования имеет вид

$$\lg S_i = -6{,}028075 + 3{,}079464 \lg \theta_i. \qquad (*****)$$

В соответствии с уравнениями (***) и (*****) вычислим поправки v_i (табл. 34).

Контроль решения нормальных уравнений подстановкой найденных неизвестных в (****)

$$\left.\begin{aligned} N_1 \qquad & -48{,}224600 + 61{,}440483 - 13{,}215764 = \\ & = +1{,}2\cdot10^{-4}, \\ N_2 \qquad & -120{,}270229 + 153{,}281186 - 33{,}011333 = \\ & = +3{,}0\cdot10^{-4}. \end{aligned}\right\} \text{(должны быть нули; совпадение достаточно хорошее).}$$

Таблица 34

$-\lg S$	$\lg S_i$ (вычисл)	v_i	v_i^2	Контроль* $v_i\,\delta \lg S_i$
—1.468347	1.474001	+0,005654	$3{,}2\cdot10^{-5}$	
—1.522444	1.522112	—0,000332	$1{,}1\cdot10^{-7}$	
—1.546543	1.545534	—0,001009	$1{,}0\cdot10^{-6}$	
—1.570543	1.568556	—0,001987	$3{,}9\cdot10^{-6}$	
—1.660865	1.656863	—0,004002	$1{,}6\cdot10^{-5}$	
—1.741939	1.739700	—0,002239	$5{,}0\cdot10^{-6}$	
—1.816904	1.817706	+0,000802	$6{,}4\cdot10^{-7}$	
—1.888179	1.891410	+0,003231	$1{,}04\cdot10^{-5}$	
	Σ	$+9{,}70\cdot10^{-3}$	$6{,}90\cdot10^{-5}$	$6{,}92\cdot10^{-5}$

$$[av]^{**} = [v] = \frac{-9{,}57\cdot10^{-3}}{+1{,}3\cdot10^{-4}}; \quad [bv]^{**} = [v \lg\theta] = +2{,}9\cdot10^{-4}$$

* Контрольная сумма $[v\delta \lg S] = 6{,}92\cdot10^{-5}$ вычислена на ЭВМ «Наири-К» при решении задачи по определению параметров $\lg a$ и b с введением приближенных значений неизвестных $\lg a = (\lg a)_0 + \delta \lg a$ и $b = b_0 + \delta b$; $(\lg a)_0 = -6{,}028$; $b_0 = +3{,}08$. При плохо обусловленных системах уравнений контроль $[v \lg S] = [vv]$ не надежен.

** Нормальные уравнения в свернутом виде.

Оценим точность

$$m = \sqrt{\frac{6{,}90\cdot10^{-5}}{8-2}} = 3{,}4\cdot10^{-3} \qquad m_m \approx \frac{3{,}4\cdot10^{-3}}{\sqrt{2\,(8-2)}} \approx 0{,}98\cdot10^{-3}.$$

Вычислим весовые коэффициенты Q_{11} и Q_{22}

$$Q_{11} = \frac{A_{11}}{D}; \qquad Q_{22} = \frac{A_{22}}{D}; \qquad A_{11} = 49{,}775500; \qquad A_{22} = 8.$$

$$Q_{11} = \frac{49{,}7755}{0{,}134425} = 370{,}285; \qquad Q_{22} = \frac{8}{0{,}134425} = \mathbf{59{,}51274},$$

$$m_{\lg a} = 3{,}4\cdot10^{-3}\sqrt{370} \approx \mathbf{6{,}5\cdot10^{-2}},$$

$$m_b = 3{,}4\cdot10^{-3}\sqrt{59{,}5} \approx 2{,}6\cdot10^{-2}.$$

Окончательно

$$\lg S_i = -6{,}028075 + 3{,}079464 \lg \theta_i; \qquad \lg a = -\ \mathbf{6{,}028 \pm 6{,}5\cdot10^{-2}}; \quad b = +\ \mathbf{3{,}079 \pm 2{,}6\cdot10^{-2}}.$$

При контроле вычислений на ЭВМ «Наири-К» получено

$$\lg a = -6.0281 \pm 0,065, \qquad b = +3,0795 \pm 0,026.$$

При определении этих же параметров по методу средних (без оценки точности) К. А. Семендяевым получено

$$\lg a = -6.055, \qquad b = +3,09.$$

При определении $\lg a$ и b по тем же числовым данным, но методом «логарифмической» корреляции (без оценки точности) автором * получено

$$\lg a = -6.054, \qquad b = +3,09.$$

Во всех случаях совпадение хорошее.

В заключение оценим точность функции для случая, когда $\theta_1 = 273$ г, т. е.

$$\lg S_1 = -6.028075 + 3.079464 \lg 273,$$
$$(f_1 = +1, \quad f_2 = \lg 273 = 2.43616265).$$

По формуле (653) имеем

$$\frac{1}{p_{\lg S_1}} = f_1^2 Q_{11} + f_2^2 Q_{22} + 2 f_1 f_2 Q_{12},$$

$$\frac{1}{p_{\lg S_1}} = 370,285 + 353,201 - 723,162;$$

здесь

$$Q_{12} = (-1)^3 \frac{+19,95168}{+0,134425} = -148,42239;$$

$$\frac{1}{p_{\lg S_1}} = 0,324 \text{ (на ЭВМ «Наири-К» : 0,324).}$$

$$m_{\lg S_1} = 3,4 \cdot 10^{-3} \sqrt{0,324} = 1,94 \cdot 10^{-3}.$$

Примечание. Для контроля определения параметров $\lg a$ и b непосредственные вычисления повторены, но с введением приближенных значений

$$\lg a = (\lg a)_0 + \delta \lg a, \qquad b = b_0 + \delta b;$$
$$(\lg a)_0 = -6.055; \qquad b_0 = +3,09;$$

свободные члены уравнений поправок вычислены по формуле

$$\delta \lg S_i = -6,055 + 3,09 \lg \theta_i - \lg S_i.$$

При этом были получены нормальные уравнения

$$+8\delta \lg a + 19,9516818\delta b + 0,8131 \cdot 10^{-2} = 0,$$
$$+19,9516818 \lg a + 49,775500\delta b + 2,03392 \cdot 10^{-2} = 0,$$

и параметрические поправки

$$\delta \lg a = +8.0251 \cdot 10^{-3}; \qquad \delta b = -4,8648 \cdot 10^{-4};$$

* *Большаков В. Д.* Определение постоянных в эмпирических формулах методом логарифмической корреляции.— Труды МИИГАиК, 1962, вып. 49, с. 3—10.

а также параметры

$$\lg a = -6,0470, \qquad b = +3,0864.$$

Доверительные интервалы ($t_p = 2,57$ взято из таблиц, прил. 5)

$$p(-6.0470 - 2,57 \cdot 6,5 \cdot 10^{-2} \leqslant \lg a \leqslant -6.0470 + 2,57 \cdot 6,5 \cdot 10^{-2}) = 0,95;$$
$$p(3,0864 - 2,57 \cdot 2,6 \cdot 10^{-2} \leqslant b \leqslant 3,0864 + 2,57 \cdot 2,6 \cdot 10^{-2}) = 0,95;$$

или

$$p(-6.214 \leqslant \lg a \leqslant 5.880) = 0,95;$$
$$p(3,019 \leqslant b \leqslant 3,153) = 0,95.$$

Пример 3. В табл. 35 даны длины сторон нивелировочной сетки квадратов L_i, м и соответствующие им средние квадратические ошибки объемов земляных работ m_{v_i}, приходящиеся на один квадрат. Из рис. 15 видно, что

$$m_v = v L^x. \; (*)$$

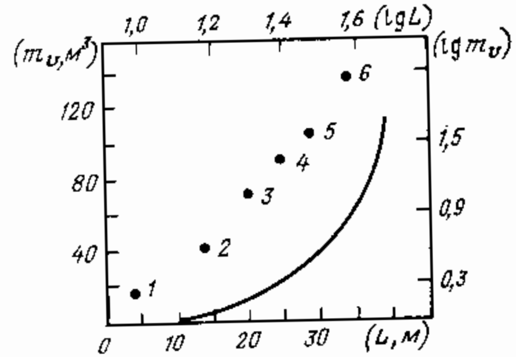

Рис. 15

Определить постоянные v и x и оценить их точность.

Учитывая большую кривизну аппроксимирующей связь (*) кривой, применим «двойное» выравнивание, а именно — после логарифмирования (*)

$$\lg m_v = \lg v + x \lg L \; (**)$$

поставим задачу отыскания по методу наименьших квадратов не самих параметров $\lg v$ и x, а малых поправок ($\delta \lg v$, δx) к приближенным значениям $(\lg v)_0$ и x_0.

Примем

$$\left.\begin{aligned} \lg v &= (\lg v)_0 + \delta \lg v, \\ x &= x_0 + \delta x. \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

В качестве приближенных значений параметров возьмем $(\lg v)_0 = -2,76$, $x_0 = +2,98$.

В соответствии с изложенным свободные члены параметрических уравнений поправок вычислим по формуле

$$\Delta l_i = -2,76 + 2,98 \lg L_i - \lg m_{v(i)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Нормальные уравнения будут

$$\left.\begin{aligned} +6\delta \lg v + 7,954242\delta x + 0,026336 &= 0, \\ +7,954242\delta \lg v + 10,778587\delta x + 0,039972 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (****)$$

Вычислим определители системы и неизвестных и сами неизвестные; имеем:

$$D = +1,401556;$$

$$D_{\delta \lg v} = -(+0,28386487 - 0,31794696) = +0,03408209;$$

$$\delta \lg v = +0,0243173;$$

Величины		Логарифмы		
L_i, м	$m_{\underline{v}(i)}$, м³	$\lg L_i\ (b_i)$	$\lg m_{\underline{v}(i)}\ (l_i)$	$\delta \lg m_{\underline{v}(i)}\ (\Delta l_i)$
10	2,1	1.000	0.322219	−0.102219
15	4,2	1.176091	0.623249	+0.121502
20	13,0	1.301030	1.113943	+0.003126
25	25,0	1.397940	1.397940	+0.007921
30	39,4	1.477121	1.595496	+0.046325
40	116,0	1.602060	2.064458	−0.050319
	Σ	7.954242	Σ	0.026336

$$D_{\delta x} = -(+0{,}239832 - 0{,}2094829) = -0{,}0303491; \quad \delta x = -\mathbf{0{,}0216539};$$

$$\lg \mathbf{v} = -2.76 + 0.0243173; \quad \lg \mathbf{v} = -\mathbf{2.7356827};$$

$$x = +2{,}98 - 0{,}0216539; \quad x = +\mathbf{2{,}9583461}.$$

Оценим точность уравненных (вычисленных) параметров и функции, для чего получим Q_{11}, Q_{22}, Q_{12} и m:

$$Q_{11} = \frac{A_{11}}{D}, \qquad Q_{22} = \frac{A_{22}}{D}, \qquad Q_{12} = \frac{A_{12}}{D};$$

$$Q_{11} = 7{,}690\ (A_{11} = 10{,}778587); \qquad Q_{22} = 4{,}281\ (A_{22} = 6);$$

$$Q_{12} = -5{,}675\ (A_{12} = -7{,}954242).$$

На ЭВМ «Наири-К» получено соответственно

$$Q_{11} = 7{,}687, \qquad Q_{22} = 4{,}281, \qquad Q_{12} = -5{,}674.$$

Вычислим поправки (табл. 36).
На основании данных табл. 36 вычислим

$$m = \sqrt{\frac{29{,}57\cdot 10^{-3}}{6-2}} = \mathbf{0{,}0860};$$

$$m_{\lg \mathbf{v}} = 0{,}0860\sqrt{7{,}6904} = \mathbf{0{,}238} \text{ (На ЭВМ «Наири-К» : 0,238)};$$

$$m_x = 0{,}0860\sqrt{4{,}281} = \mathbf{0{,}178} \text{ (На ЭВМ «Наири-К» : 0,177)}.$$

В заключение оценим функцию по результатам первого измерения (см. табл. 35)

$$\lg m_{\mathbf{v}\,(1)} = \lg \mathbf{v} + x \lg L_1,$$

для первого измерения $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, следовательно

$$\frac{1}{p_{\lg m_{\mathbf{v}\,(1)}}} = f_1^2 Q_{11} + f_2^2 Q_{22} + 2 f_1 f_2 Q_{12}, \text{ т. е.}$$

Вычисление коэффициентов и свободных членов нормальных уравнений				
$a_i a_i$	$a_i b_i$	$b_i b_i$	$a_i \Delta l_i$	$b_i \Delta l_i$
1	1,000	1,000	−0,102219	−0,102219
1	1,176091	1,383190	+0,121502	+0,142897
1	1,301030	1,692679	+0,003126	+0,000407
1	1,397940	1,954236	+0,007921	+0,011073
1	1,477121	2,181886	+0,046325	+0,068428
1	1,602060	2,566596	−0,050319	−0,080614
6	7,954242	10,778587	+0,026336	+0,039972

$$\frac{1}{p_{\lg m_{\mathbf{v}\,(1)}}} = 7{,}690 + 4{,}281 - 2\cdot 5{,}675 = 0{,}621 \text{ (На ЭВМ «Наири-К» 0,620)};$$

$$m_{\lg m_{\mathbf{v}\,(1)}} = \mathbf{0{,}068}.$$

Таблица 36

$\lg \mathbf{v}$	$+x \lg L_i$	$-\lg m_{\mathbf{v}_i}$	v_i	v_i^2
−2.7356827	+2.9583461	−0.322219	−0.09956	
	+3.4792842	−0.623249	+0,12035	
	+3.848897	−1.113943	−0,00073	
	+4.135590	−1.397940	+0,00197	
	+4.369835	−1.595496	+0,03866	
	+4.739448	−2.064458	−0,06069	
			−0,16098 +0,16098	$[vv] = 29{,}57\times$ $\times 10^{-3}$

$$[av]^* = [v] = 0$$
$$[bv]^* = [v \lg L] = +3{,}7\cdot 10^{-3}$$

* Нормальные уравнения в свернутом виде.

Пример 4. В табл. 37 дано давление **P** насыщенного пара в кг/см², соответствующее удельному объему **v** (в м³/кг). Из рис. 16 видно, что точки (**v**, **P**), соединенные плавной кривой, образуют гиперболу. Построив совмещенный график по новым координатам ($\lg \mathbf{v}$, $\lg \mathbf{P}$), получим прямую линию. Следовательно, имеем теоретическую связь

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}\mathbf{v}^{\mathbf{b}}. \qquad (*)$$

Определить параметры **a**, **b** и оценить их точность.

Итак, имеем два нормальных уравнения с неизвестными lg a и b

$$\left.\begin{array}{ll} N_1 & 7\lg \mathbf{a} - 1{,}9796\mathbf{b} - 3{,}7929 = 0, \\ N_2 & -1{,}9796\lg \mathbf{a} + 2{,}266207\mathbf{b} + 2{,}892086 = 0. \end{array}\right\} \qquad {**})$$

Вычислим определители: системы D, неизвестных $D_{\lg \mathbf{a}}$, $D_{\mathbf{b}}$

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -1{,}9796 \\ -1{,}9796 & +2{,}266207 \end{vmatrix} = 15{,}863449 - 3{,}918816 = \mathbf{+11{,}944633}.$$

$$D_{\lg \mathbf{a}} = -\begin{vmatrix} -3{,}7929 & -1{,}9796 \\ +2{,}892086 & +2{,}266207 \end{vmatrix} = -(-8{,}595497 + 5{,}725173) = \mathbf{+2{,}870324}.$$

$$D_{\mathbf{b}} = -\begin{vmatrix} 7 & -3{,}7929 \\ -1{,}9796 & +2{,}892086 \end{vmatrix} = -(+20{,}244602 - 7{,}508425) = \mathbf{-12{,}736177}$$

Вычислим параметры lg a и b

$$\lg \mathbf{a} = \frac{+2{,}870324}{+11{,}944633} = +\mathbf{0{,}240302} \text{ (На ЭВМ «Наири-К» } +0{,}2403020_9);$$

$$\mathbf{b} = \frac{-12{,}736177}{+11{,}944633} = -\mathbf{1{,}066268} \text{ (На ЭВМ «Наири-К» } -1{,}066268_8).$$

Таблица 37

Величины		Логарифмы		Вычисления коэффициентов и свободных членов нормальных уравнений				
v_i, м³/кг	P_i, кг/см²	$\lg v_i$	$\lg P_i$	$a_i a_i$	$a_i b_i = a_i \lg v_i$	$b_i b_i = (\lg v_i)^2$	$a_i l_i = -\lg P_i$	$b_i l_i = -\lg v_i \lg P_i$
3,334	0,482	0.5230	—0.3170	1			+0.3170	+0.165791
1,630	1,034	0.2122	0.0145	1			—0.0145	—0.003077
0,8657	2,027	—0.0626	0.30680	1			—0.3068	+0.019206
0,4323	4,247	—0.3642	0.6281	1			—0.6281	+0.228754
0,2646	7,164	—0.5774	0.8551	1			—0.8551	+0.493735
0,1699	11,48	—0.7698	1.0599	1			—1.0599	+0.815911
0,1146	17,60	—0.9408	1.2455	1			—1.2455	+1.171766
	Σ	—1.9796	3.7929	[aa] 7	[ab] —1,9796	[bb] 2,266207	[al] —3,7929	[bl] +2,892086

Переходим к оценке точности, для чего вычислим Q_{11}, Q_{22}, Q_{12} и m:

$$Q_{11} = \frac{A_{11}}{D}, \qquad Q_{22} = \frac{A_{22}}{D}, \qquad Q_{12} = \frac{A_{12}}{D};$$

$$Q_{11} = \mathbf{0{,}1897}\ (A_{11} = +2{,}266207); \qquad Q_{22} = \mathbf{0{,}5860}\ (A_{22} = +7);$$
$$Q_{12} = +\mathbf{0{,}16573}\ (A_{12} = +1{,}9796);$$

(Контроль на ЭВМ «Наири-К»: $Q_{11} = 0{,}1897_3$; $Q_{22} = 0{,}5860_4$; $Q_{12} = + 0{,}16573_1$).

Поправки $v_i = \lg \mathbf{a} + \mathbf{b} \lg \mathbf{v}_i - \lg \mathbf{P}_i$ и $[vv]$ вычислим в табл. 38. $\lg \mathbf{a} = +0{,}240302$; $\mathbf{b} = -1{,}066268$.

Оценим точность параметров lg a, b и функции $\lg \mathbf{P}_i = \lg \mathbf{a} + \mathbf{b} \lg \mathbf{v}_1$ по результатам, помещенным в первой строке табл. 38. Итак,

$$m_{\lg \mathbf{a}} = m\sqrt{Q_{11}} = \mathbf{5{,}1 \cdot 10^{-4}}.$$

$$m_{\mathbf{b}} = m\sqrt{Q_{22}} = \mathbf{9{,}0 \cdot 10^{-4}}.$$

$$\frac{1}{P_{\lg \mathbf{P}_1}} = f_1^2 Q_{11} + f_2^2 Q_{22} + 2f_1 f_2 Q_{12}, \qquad ({*}{*}{*})$$

где $f_1 = +1$, $f_2 = +0{,}523$, т. е.

$$\frac{1}{P_{\lg \mathbf{P}_1}} = 0{,}1897 + 0{,}1603 + 0{,}1734 = $$
$= 0{,}523_4$ (контроль на ЭВМ «Наири-К»: $0{,}523_{38}$).

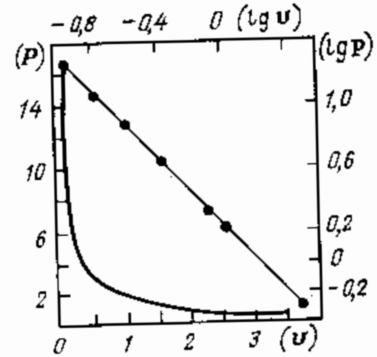

Рис. 16

$$m_{\lg \mathbf{P}_1} = m\sqrt{\frac{1}{P_{\lg \mathbf{P}_1}}} = \mathbf{8{,}5 \cdot 10^{-4}}.$$

Таблица 38

lg	b lg v_i	lg P_i	v_i	$v_i v_i$
+0,240302	—0.557658	+0.3170	$-3{,}56_2 \cdot 10^{-4}$	$12{,}7 \cdot 10^{-8}$
	—0.226262	—0.0145	$-4{,}60_1$	21,2
	+0.066748	—0.3068	$+2{,}50_1$	6,2
	—0.388335	—0.6281	$+5{,}36_8$	28,8
	+0.615663	—0.8551	$+8{,}65_1$	74,8
	—0.820813	—1.0599	$+12{,}15_1$	147,6
	+1.003145	—1.2455	$-20{,}05_3$	402,1

$[av]^* = [v] = +0{,}46 \cdot 10^{-4}$; $[vv] = 692{,}9 \cdot 10^{-8}$
$[bv]^* = [\lg \mathbf{v} \cdot v] = +1{,}6 \cdot 10^{-3}$;

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-k}} = \sqrt{\frac{6{,}93 \cdot 10^{-6}}{5}} = 1{,}18 \cdot 10^{-3}.$$ (Контроль $[vv]$ на ЭВМ «Наири-К» $[vv] = 7{,}12 \cdot 10^{-6}$.)

* Нормальные уравнения в свернутом виде.

Дополнительные пояснения к примерам

Как отмечалось выше, все вычисления в приведенных в § 67 примерах проверены на ЭВМ «Наири-К». Алгоритмы для указанных вычислений составлены на основе матричного способа. Покажем его применение на примере выравнивания функции

$$P_i = a v_i^b. \tag{654}$$

Приведем связь (654) к линейному виду

$$\lg P_i = \lg \mathbf{a} + b \lg \mathbf{v}_i; \tag{655}$$

от формулы (655) целесообразно перейти к параметрическим уравнениям поправок $\delta \lg \mathbf{a}$ и δb с целью уменьшения влияния ошибок округлений. Выше этот прием назван «двойным» выравниванием.

Имеем

$$v_i = \delta \lg \mathbf{a} + \lg \mathbf{v}_i \delta b + l_i, \tag{656}$$

где свободный член уравнений поправок

$$l_i = \lg \mathbf{a} + b \lg \mathbf{v}_i - \lg \mathbf{P}_i \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{657}$$

В матричном виде формула (656) запишется так

$$V = A\Delta + L, \tag{658}$$

где

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}; \qquad \Delta = \begin{pmatrix} \delta \lg \mathbf{a} \\ \delta b \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \lg \mathbf{v}_1 \\ 1 & \lg \mathbf{v}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \lg \mathbf{v}_n \end{pmatrix};$$

здесь A — матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; Δ — вектор параметрических поправок; L — вектор свободных членов уравнений (656), V — вектор поправок функции $\lg \mathbf{P}_i$.

Согласно теории метода наименьших квадратов от формулы (658) переходят к системе нормальных уравнений

$$A^{\tau} A \Delta + A^{\tau} L = 0. \tag{659}$$

В формуле (659)

$$A^{\tau} A = R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \lg \mathbf{v}_1 & \lg \mathbf{v}_2 & \ldots & \lg \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lg \mathbf{v}_1 \\ 1 & \lg \mathbf{v}_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \lg \mathbf{v}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n & [\lg \mathbf{v}] \\ [\lg \mathbf{v}] & [(\lg \mathbf{v})^2] \end{pmatrix}; \tag{660}$$

$$A^{\tau} L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lg \mathbf{v}_1 & \lg \mathbf{v}_2 & \ldots & \lg \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [l] \\ [l \lg \mathbf{v}] \end{pmatrix}. \tag{661}$$

Следовательно, в привычной записи система нормальных уравнений в данном случае будет иметь вид *

$$\left.\begin{aligned} n\delta \lg \mathbf{a} + [\lg \mathbf{v}]\, \delta b + [l] = 0, \\ [\lg \mathbf{v}]\, \delta \lg \mathbf{a} + [(\lg \mathbf{v})^2]\, \delta b + [l \lg \mathbf{v}] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{662}$$

Обращая матрицу коэффициентов нормальных уравнений $R = A^{\tau} A$ (например, по способу Гаусса или методом квадратных корней), получим матрицу весовых коэффициентов

$$Q = R^{-1}, \tag{663}$$

а затем искомый вектор

$$\Delta = -QA^{\tau}L. \tag{664}$$

Обращение матрицы R, например, по способу Гаусса заключается в решении в данном случае двух систем нормальных уравнений [см. § 63, (614) — (616)]

$$\left.\begin{aligned} nQ_{11} + [\lg \mathbf{v}]\, Q_{12} - 1 = 0, \\ [\lg \mathbf{v}]\, Q_{11} + [(\lg \mathbf{v})^2]\, Q_{12} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{665}$$

$$\left.\begin{aligned} nQ_{21} + [\lg \mathbf{v}]\, Q_{22} = 0, \\ [\lg \mathbf{v}]\, Q_{21} + [(\lg \mathbf{v})^2]\, Q_{22} - 1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{666}$$

Решение систем (665) и (666) дает матрицу весовых коэффициентов

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}. \tag{667}$$

Искомый вектор $\Delta = -QA^{\tau}L$ или, что одно и то же,

$$\begin{pmatrix} \delta \lg \mathbf{a} \\ \delta b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [l] \\ [l \lg \mathbf{v}] \end{pmatrix}. \tag{668}$$

Из выражения (668)

$$\left.\begin{aligned} \delta \lg \mathbf{a} = -Q_{11}[l] - Q_{12}[l \lg \mathbf{v}], \\ \delta b = -Q_{21}[l] - Q_{22}[l \lg \mathbf{v}]. \end{aligned}\right\} \tag{669}$$

Уравненные значения параметров будут

$$\left.\begin{aligned} \lg \mathbf{a} = (\lg \mathbf{a})_0 + \delta \lg \mathbf{a}, \\ b = b_0 + \delta b. \end{aligned}\right\} \tag{670}$$

---

* $[l] = -[\lg P]$

Контролем вычислений служит равенство

$$[vv] = -[vl]. \tag{671}$$

Выше (§ 67) упоминался метод «логарифмической» корреляции. Изложим кратко его сущность.

При подборе уравнения связи переменных чаще всего используется таблица кривых.

После того как уравнение связи выбрано, задача сводится, как отмечалось выше, к определению постоянных с достаточной точностью. Определение постоянных возможно различными путями, причем наиболее надежным из них является метод наименьших квадратов. Однако с точки зрения простоты решения указанной задачи целесообразно было бы применять такие способы, которые обеспечивают достаточную точность и в то же время менее громоздки.

Для получения постоянных в эмпирических формулах вида

$$y = a + bx$$

в § 21 рассмотрено использование коэффициента корреляции и связанных с ним коэффициента регрессии и уравнения регрессии. Эту методику определения постоянных можно использовать взамен метода наименьших квадратов и для функциональных связей с той лишь разницей, что в этом случае коэффициент корреляции всегда должен быть равен единице в пределах ошибок вычислений. В свою очередь это является подтверждением, что исследуемая связь функциональная.

Однако в практике исследований линейная функция как форма функциональной зависимости встречается сравнительно редко. Значительно чаще связь выражается криволинейной зависимостью и для характеристики статистической криволинейной зависимости переменных коэффициент корреляции, позволяющей легко переходить к уравнению регрессии, не подходит. Здесь необходимо вычислять корреляционное отношение, которое служит отвлеченной мерой связи и которое невозможно использовать для выражения этой связи формулой. В большинстве же случаев исследователя в меньшей мере интересует отвлеченная характеристика тесноты той или иной связи, чем конечное математическое выражение, позволяющее производить предвычисления одной из переменных для заданного значения другой.

Дальнейшие рассуждения сводятся к следующему. Имея на графике кривую, характеризующую зависимость между двумя переменными, необходимо ее «выровнять». На графике в прямоугольных координатах будет получена прямая линия в случае функциональной связи между переменными и прямолинейная область в случае статистической связи. Далее, пользуясь приемами математической статистики, вычисляют средние квадратические отклонения σ_y и σ_x, коэффициент корреляции r и составляют уравнение регрессии. Получив уравнение регрессии, дающее математическое выражение связи между новыми переменными x' и y' (см. § 21), в случае необходимости можно перейти к форме первоначальной связи между x и y. Существо вышеизложенного и методику вычислений рассмотрим более детально на нескольких примерах, рассмотренных выше.

Пусть переменные связаны уравнением вида

$$y = ax^b. \tag{672}$$

Имея из экспериментов ряд значений y и x, необходимо найти постоянные a и b. Предположение о имеющейся связи (672) легко проверяется логарифмированием и построением графика

$$\lg y = \lg a + b \lg x. \tag{673}$$

Полученное уравнение (673) свидетельствует о наличии линейной связи $\lg x$ и $\lg y$. Можно было бы постоянные a и b найти или методом избранных точек, или методом средних, или, как это сделано выше, по методу наименьших квадратов. Наиболее часто из указанных трех методов применяется метод средних как наиболее простой и сравнительно надежный. Однако этот метод содержит существенный недостаток, так как не позволяет проверить, действительно ли исследуемая связь функциональная и, что еще более важно, не исключает возможности субъективного подхода при разбивке экспериментальных данных на две группы, так как в противном случае задача вообще не решается, ибо нельзя найти двух неизвестных из одного уравнения. Метод избранных точек по существу графический и не обеспечивает желаемой точности. Метод наименьших квадратов, дающий возможность наилучшим образом отыскать постоянные a и b, часто избегают применять из-за сравнительной сложности.

Итак, когда будут получены $\lg x$ и $\lg y$, вычисляют «логарифмический» * коэффициент корреляции r

$$r = \frac{[(\lg x - \overline{\lg x})(\lg y - \overline{\lg y})]}{n\sigma_{\lg x}\sigma_{\lg y}}, \tag{674}$$

где

$$\overline{\lg x} = \frac{[\lg x]}{n}; \tag{675}$$

$$\overline{\lg y} = \frac{[\lg y]}{n}; \tag{676}$$

$$\sigma_{\lg x} = \sqrt{\frac{[(\lg x - \overline{\lg x})^2]}{n}}; \tag{677}$$

$$\sigma_{\lg y} = \sqrt{\frac{[(\lg y - \overline{\lg y})]^2}{n}}. \tag{678}$$

* Название «логарифмический» коэффициент корреляции чисто условное.

Если исследователя интересует регрессия с y на x, т. е. последующее вычисление y в зависимости от заданных значений x, то после получения величин $\overline{\lg y}$, $\overline{\lg x}$, $\sigma_{\lg x}$, $\sigma_{\lg y}$, r вычисляют коэффициент «логарифмической» регрессии

$$\rho_{\lg y/\lg x} = r\,\frac{\sigma_{\lg y}}{\sigma_{\lg x}}, \tag{679}$$

$$\rho_{\lg y\,\lg x} = \frac{[(\lg x - \overline{\lg x})\,[(\lg y - \overline{\lg y})]}{n\sigma^2_{\lg x}}, \tag{680}$$

где $\sigma^2_{\lg x}$ — дисперсия логарифма переменной x. Затем, имея

$$\rho_{\lg y/\lg x},\ \overline{\lg x},\ \overline{\lg y},$$

составляют уравнение регрессии

$$\lg y = \rho_{\lg y/\lg x}\,(\lg x - \overline{\lg x}) + \overline{\lg y}. \tag{681}$$

Преобразовав уравнение (681) к виду

$$\lg y = \rho_{\lg y/\lg x}\lg x + (\overline{\lg y} - \rho_{\lg y/\lg x}\,\overline{\lg x}), \tag{682}$$

имеем

$$b = \rho_{\lg y/\lg x};\qquad \lg a = (\overline{\lg y} - \rho_{\lg y/\lg x}\,\overline{\lg x}). \tag{683}$$

Следует заметить, что уравнения вида $y = ae^{bx}$, $y = a + bx^n$, $y = a + b/x$, $y = ax^b + c$, $y = ae^{bx} + c$ и ряд других можно «выровнять», и, следовательно, задача определения постоянных для указанных случаев принципиально может быть решена аналогично случаю, когда переменные связаны уравнением $y = ax^b$. Предлагаемое решение эффективно для случаев сравнительно простых (с двумя параметрами) уравнений, поддающихся логарифмическому выравниванию.

Рассмотрим решение методом «логарифмической» корреляции примеров 2, 3 и 4 (без оценки точности), решенных выше по методу наименьших квадратов.

Пример 2 (см. стр. 195).
По данным табл. 39 вычислим $\sigma_{\lg \theta}$, $\sigma_{\lg S}$, r, $\rho_{\lg S.\lg \theta}$; составим уравнение регрессии и вычислим $\lg a$

$$\sigma_{\lg \theta} = \sqrt{\frac{0{,}01685}{8}} = 0{,}04589;\qquad \sigma_{\lg S} = \sqrt{\frac{0{,}15944}{8}} = 0{,}1412.$$

$$r = \frac{+0{,}05186}{8\cdot 0{,}0458_9\cdot 0{,}1412} = +1{,}00; \tag{684}$$

$$b = \rho_{\lg S/\lg \theta} = \frac{+0{,}05186}{8\cdot(0{,}0458)^2} = +3{,}078 \tag{685}$$

Таблица 39

Величины		Логарифмы		Уклонения		$\delta \lg \theta_i \delta \lg S_i$	Квадраты уклонений	
θ_i	S_i	$\lg \theta_i$	$\lg S_i$	$\delta \lg \theta_i$	$\delta \lg S_i$		$(\delta \lg Q_i)^2$	$(\delta \lg S_i)^2$
273	29,4	2.436	1.468	—0.058	—0.184	+0.01067	0.00336	0.03386
283	33,3	2.452	1.522	—0.042	—0.130	+0.00546	0.00176	0.01690
288	35,2	2.459	1.547	—0.035	—0.105	+0.00368	0.00122	0.01102
293	37,2	2.467	1.571	—0.027	—0.081	+0.00219	0.00073	0.00656
313	45,8	2.496	1.661	+0.002	+0.009	+0.00002	0.00000	0.00008
333	55,2	2.522	1.742	+0.028	+0.090	+0.00252	0.00078	0.00810
353	65,6	2.548	1.817	+0.054	+0.165	+0.00891	0.00292	0.02722
373	77,3	2,572	1.888	+0.078	+0.236	+0.01841	0.00608	0.05570
		19,952	13,216	—0,162	—0,500	+0.05186	0.01685	0.15944

$\overline{\lg \theta} = 2{,}494$, $\overline{\lg s} = 1{,}652$ +0,162   +0,500

Контроль: 0,000   0,000

или

$$\lg S = 3{,}078\lg\theta - 6{,}025. \tag{686}$$

Таким образом,

$$\lg \mathbf{a} = -6{,}025;\quad \mathbf{b} = +3{,}08. \tag{687}$$

При определении $\lg \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по методу средних К. А. Семендяевым получено

$$\lg \mathbf{a} = -6{,}055;\quad \mathbf{b} = +3{,}09. \tag{687'}$$

Выше (стр. 196) по методу наименьших квадратов было получено

$$\lg \mathbf{a} = -6{,}028;\quad \mathbf{b} = +3{,}078. \tag{687''}$$

Пример 3 (см. стр. 199)
На основании табл. 35 составим табл. 40.

$$\sigma_{\lg L} = \sqrt{\frac{0{,}232}{6}} = 0{,}1966_4;\qquad \sigma_{\lg m_v} = \sqrt{\frac{2{,}052}{6}} = 0{,}584_8. \tag{688}$$

$$r = \frac{+0{,}686}{6\cdot 0{,}19664\cdot 0{,}5848} = +0{,}994; \tag{689}$$

$$x = \rho_{\lg m_v/\lg L} = \frac{+0{,}686}{6\,(0{,}19664)^2} = +2{,}956849; \tag{690}$$

$$\lg m_v = +2{,}957;\ \lg L = 2{,}735. \tag{691}$$

Таким образом, в конечном счете имеем

$$\lg \mathbf{v} = -2{,}735;\qquad x = +2{,}957. \tag{692}$$

По методу наименьших квадратов получено

$$\lg \mathbf{v} = -2{,}736;\qquad x = +2{,}958. \tag{692'}$$

Таблица 40

Величины		Логарифмы		Уклонения		Квадраты уклонений		$\delta \lg L_i \cdot \delta \lg m_{v\,(i)}$
L_i, м	$m_{v\,(i)}$, м³	$\lg L_i$	$\lg m_{v\,(i)}$	$\delta \lg L_i$	$\delta \lg m_{v\,(i)}$	$(\delta \lg L)^2$	$(\delta m_v)^2$	
10	2,1	1.000	0.322	—0.326	—0.864	0.106	0.746	+0.288
15	4,2	1.176	0.623	—0.150	—0.563	0.022	0.317	+0.084
20	13,0	1.301	1.114	—0.025	—0.072	0.001	0.005	+0.002
25	25,0	1.398	1.398	+0.072	+0.212	0.005	0.045	+0.015
30	39,4	1.477	1.596	+0.151	+0.410	0.023	0.168	+0.062
40	116	1.602	2.064	+0.274	+0.878	0.075	0.771	+0.241
		7.954	7.117	—0.501	—1.499	0.232	2.052	+0.686
				+0.497	+1.500			
				—0,004	+0,001			

$\overline{\lg L} = 1.326$

$\overline{\lg m_v} = 1,186$

Совпадение результатов в пределах ошибок округлений.

Пример 4 (см. стр. 201). По данным табл. 37 составим табл. 41.

Аналогично предыдущему вычислим

$$\sigma_{\lg v} = \sqrt{\frac{1,7064}{7}} = 0,4937; \quad \sigma_{\lg P} = \sqrt{\frac{1,9399}{7}} = 0,526; \quad (693)$$

$$r = \frac{-1,8193}{7 \cdot 0,494 \cdot 0,526} = -1,00; \quad (694)$$

Таблица 41

Величины		Логарифмы		Уклонения		$\delta \lg v_i \delta \lg P_i$	Квадраты уклонений	
v_i, м³/кг	P_i, кг/см²	$\lg v_i$	$\lg P_i$	$\delta \lg v_i$	$\delta \lg P_i$		$(\delta \lg v_i)^2$	$(\delta \lg P_i)^2$
3,334	0,482	0.5230	—0.3170	+0.8058	—0.8588	—0.6920	0.6493	0.7375
1,630	1,034	0.2122	0.0145	+0.4950	—0.5273	—0.2610	0.2450	0.2780
0,8657	2,027	—0.0626	0.3068	+0.2202	—0.2350	—0.0517	0.0485	0.0552
0,4323	4,247	—0.3642	0.6281	—0.0814	+0.0863	—0.0070	0.0066	0.0074
0,2646	7,164	—0.5774	0.8551	—0.2946	+0.3133	—0.0923	0.0868	0.0982
0,1699	11,48	—0.7698	1.0599	—0.4870	+0.5181	—0.2523	0.2372	0.2684
0,1146	17,60	—0.9408	1.2455	—0.6580	+0.7037	—0.4630	0.4330	0.4952
		—1.9796	3.7929	+1.5210	+1.6210	—1.8193	1.7064	1.9399
				—1.5210	—1.6211			
		—0.2828	+0.5418					
			Σ	0	$-0,1 \cdot 10^{-3}$			

$$b = \rho_{\lg P/\lg v} = \frac{-1,8193}{7\,(0,4937)^2} = -1,06630; \quad (695)$$

$$\lg P = -1,0663 \lg v + 0,24025. \quad (696)$$

Итак,

$$\lg a = +0,240_{25}; \quad b = -1,066_{30}. \quad (697)$$

По методу наименьших квадратов было получено

$$\lg a = +0,240_{30}; \quad b = -1,066_{27}. \quad (697')$$

По К. А. Семендяеву,

$$\lg a = +0,240; \quad b = -1,066. \quad (697'')$$

Из приведенных сравнений видно, что метод «логарифмической» корреляции, обладая не меньшей по сравнению с методом наименьших квадратов точностью, имеет несомненное преимущество для случая определения двух параметров — простоту. Кроме того, с помощью коэффициента корреляции по его близости к ± 1 можно получить количественную характеристику меры прямолинейности, точнее — отклонение прямолинейности от своего максимума, которого она достигает при значении коэффициента корреляции $r = \pm 1$ [12, стр. 308]. Недостатком является отсутствие оценки точности и самое главное — не для всех случаев можно применить указанный метод, а только для линейных связей между двумя переменными (или приведенных к линейным путем «выравнивания»).

Следует заметить, однако, что один из недостатков метода «логарифмической» корреляции, касающихся оценки точности, легко устранить, произведя небольшие дополнительные вычисления.

Для вычисления определителя системы в табл. 40 * недостает только $[bb] = [(\lg L^2)] = 10,777914$. Тогда

$$D = \begin{vmatrix} +6 & 7,954 \\ +7,954 & +10,777914 \end{vmatrix} = +1,401368.$$

$$Q_{11} = +7,69099; \quad Q_{22} = +4,28153; \quad Q_{12} = -5,67588.$$

Для вычисления $[vv]$ по данным табл. 40 с учетом полученных по формуле значений $\lg v$ и x определим поправки

$$v_i = \lg v + x \lg L_i - \lg m_{v\,(i)},$$

сумма квадратов которых оказывается $[vv] = 30 \cdot 10^{-3}$. Получаем

$$m = \sqrt{\frac{30 \cdot 10^{-3}}{6 - 2}} = 0,087; \quad m_{\lg v} = 0,087\sqrt{7,691} = \mathbf{0,24}.$$

$$m_x = 0,087\sqrt{4,282} = \mathbf{0,18}.$$

Обратный вес функции $\lg m_{v\,(1)}$

$$\frac{1}{p_{\lg m_{v\,(1)}}} = 7,691 + 4,282 - 2 \cdot 5,676 = 0,621. \quad m_{\lg m_{v\,(1)}} = 0,087\sqrt{0,621} =$$

$$= \mathbf{0,069}.$$

* Для оценки точности параметров из примера 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агекян Т. А.* Теория вероятностей для астрономов и физиков. М., Наука, 1974.
2. *Беляев Ю. К.* Вероятностные методы выборочного контроля. М., Наука, 1975.
3. *Бурмистров Г. А.* Основы способа наименьших квадратов. М., Госгеолтехиздат, 1963.
4. *Борель Э. М.* и др. Вероятности, ошибки. М., Статистика, 1972.
5. *Большаков В. Д.* Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей. М., Недра, 1965.
6. *Boljsakov V. D.* Teorija grěsaka posmatranja sa osnovama teorija Verovatnocé. Beograd, Naučna knjiga, 1970.
7. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Лейпциг, 1979. М., Наука, 1980.
8. *Гайдаев П. А.* Математическая обработка геодезических сетей. М., Недра, 1977.
9. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа, 1979.
10. *Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. М., Наука, 1976.
11. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М., Наука, 1978.
12. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М., Мир, 1975.
13. *Краткий* топографо-геодезический словарь. Б. С. Кузьмин, Ф. Я. Герасимов, В. М. Молоканов и др. М., Недра, 1979.
14. *Маркузе Ю. И., Голубев В. В.* Техника вычислений в геодезии. М., Недра, 1980.
15. *Математическая* статистика. Под ред. А. М. Длина. М., Высшая школа, 1975.
16. *Мардиа К.* Статистический анализ угловых наблюдений. М., Наука, 1978.
17. *Мудров В. И., Кушко В. Л.* Методы обработки измерений. М., Советское радио, 1976.
18. *Скорняков Л. А.* Элементы алгебры. М., Наука, 1980.
19. *Справочник* геодезиста/ Большаков В. Д., Левчук Г. П., Багратуни Г. В. и др. М., Недра, 1975.
20. *Статистические* методы обработки данных. М., Изд-во стандартов, 1978.
21. *Тамутис З. П.* Оптимальные методы проектирования геодезических сетей. М., Недра, 1979.
22. *Чеботарев А. С.* Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М., Геодезиздат, 1958.
23. *Щиголев Б. М.* Математическая обработка наблюдений. М., Наука, 1969.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

СОКРАЩЕННАЯ ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx; \quad 0 \leqslant \Phi(t) < 1$$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,00000	0,75	0,54675	1,50	0,86639	2,25	0,97555	3,0	0,99730
0,05	0,03988	0,80	0,57629	1,55	0,87886	2,30	0,97855	3,0	0,99806
0,10	0,07966	0,85	0,60468	1,60	0,89040	2,35	0,98123	3,2	0,99863
0,15	0,11924	0,90	0,63188	1,65	0,90106	2,40	0,98360	3,3	0,99903
0,20	0,15852	0,95	0,65789	1,70	0,91087	2,45	0,98571	3,4	0,99933
0,30	0,23582	1,05	0,70628	1,80	0,92814	2,55	0,98922	3,6	0,99968
0,35	0,27366	1,10	0,72867	1,85	0,93569	2,60	0,99068	3,7	0,99978
0,40	0,31084	1,15	0,74986	1,90	0,94257	2,65	0,99195	3,8	0,99986
0,45	0,34729	1,20	0,76986	1,95	0,94882	2,70	0,99307	3,9	0,99990
0,50	0,38292	1,25	0,78870	2,00	0,95450	2,75	0,99404	4,0	0,99994
0,55	0,41768	1,30	0,80640	2,05	0,95964	2,80	0,99489	4,1	0,99996
0,60	0,45149	1,35	0,82298	2,10	0,96427	2,85	0,99563	4,2	0,99997
0,65	0,48431	1,40	0,83849	2,15	0,96844	2,90	0,99627	4,4	0,99999
0,70	0,51607	1,45	0,85294	2,20	0,97219	2,95	0,99682	4,5	0,999993

Продолжение прилож. 1

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
		5,0	0,99999 94	6,0	0,999999 9980	7,0	0,9999 999999 97440
		1	99999 97	1	999999 9989	1	9999 999999 98752
		2	99999 98	2	999999 9994	2	9999 999999 99398
		3	99999 99	3	999999 9997	3	9999 999999 99712
		4	99999 99	4	999999 9998	4	9999 999999 99864
		5	99999 996	5	999999 9999	5	9999 999999 99936
4,6	0,99999 6	6	99999 998	6	999999 9999 6	6	9999 999999 99970
7	99999 7	7	99999 9988	7	999999 9999 8	7	9999 999999 99986
8	99999 8	8	99999 9993	8	999999 9999 9	8	9999 999999 99994
9	99999 9	9	99999 9996	9	999999 9999 95	9	9999 999999 99997
						8,0	9999 999999 99999

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,398942	398922	398862	398763	398623	398444	398225	397966	397658	397330
0,1	396953	396536	396080	395585	395052	394479	393868	393219	392531	391806
0,2	391043	390242	389404	388529	387618	386668	385683	384663	383606	382515
0,3	381388	380226	379031	377801	376537	375240	373911	372548	371154	369728
0,4	368270	366782	365263	363714	362135	360527	358890	357225	355533	353812
0,5	352065	350292	348493	346668	344818	342944	341046	339124	337180	335213
0,6	333225	331215	329184	327133	325062	322972	320864	318737	316593	314432
0,7	312254	310060	307851	305627	303389	301137	298872	296595	294305	292004
0,8	289692	287369	285036	282694	280344	277985	275618	273244	270864	268477
0,9	266085	263088	261286	258881	256471	254050	251644	249228	246809	244390
1,0	241971	239551	237132	234714	232297	229882	227470	225060	222653	220251
1,1	217852	215458	213069	210686	208308	205936	203571	201214	198863	196520
1,2	194186	191860	189543	187235	184937	182649	180371	178104	175847	173602
1,3	171369	169147	166937	164740	162555	160383	158225	156080	153948	151831
1,4	149727	147639	145564	143505	141460	139431	137417	135418	133435	131468
1,5	129518	127583	125665	123763	121878	120009	118157	116323	114505	112704
1,6	110921	109155	107406	105675	103961	102265	100586	098925	097282	095657
1,7	094049	092459	090887	089333	087796	086277	084776	083293	081828	080380
1,8	078950	077538	076143	074766	073407	072065	070740	069433	068144	066871
1,9	065616	064378	063157	061952	060765	059595	058441	057304	056183	055079
2,0	053991	052919	051864	050824	049800	048792	047800	046823	045861	044915
2,1	043984	043067	042166	041280	040408	039550	038707	037878	037063	036262
2,2	035475	034701	033941	033194	032460	031740	031032	030337	029655	028985
2,3	028327	027682	027048	026426	025817	025218	024631	024056	023491	022937
2,4	022395	021862	021341	020829	020328	019837	019356	018885	018423	017971
2,5	017528	017095	016670	016254	015848	015449	015060	014678	014305	013940
2,6	013583	013234	012892	012558	012232	011912	011600	011295	010997	010706
2,7	010421	010143	009871	009606	009347	009094	008846	008605	008370	008140
2,8	007915	007697	007483	007274	007071	006873	006679	006491	006307	006127
2,9	005953	005782	005616	005454	005296	005143	004993	004847	004705	004567
3,0	0,0044318	0,032668	0,023841	0,017226	0,012322	0,008727	0,006119	0,004248	0,002919	0,001987
4,0	0001338	0,000893	0,000589	0,000385	0,000249	0,000160	0,000101	0,000064	0,000040	0,000024
5,0	0000015									

Продолжение прил. 2

t	y_1	t	y_1	t	y_1	t	y_1
4,0	0,000133830225765	5,0	0,000001486719515	6,0	0,000000006075883	7,0	0,000000000009135
1	0,000089261657177	1	0,000000897243516	1	0,000000003317884	1	0,000000000004514
2	0,000058943067757	2	0,000000536103534	2	0,000000001793784	2	0,000000000002208
3	0,000038535196742	3	0,000000317134922	3	0,000000000960143	3	0,000000000001069
4	0,000024942471290	4	0,000000185736184	4	0,000000000508814	4	0,000000000000513
5	0,000015983741107	5	0,000000107697600	5	0,000000000266956	5	0,000000000000243
6	0,000010140852065	6	0,000000061826205	6	0,000000000138668	6	0,000000000000114
7	0,000006369825179	7	0,000000035139551	7	0,000000000071313	7	0,000000000000053
8	0,000003961299091	8	0,000000019773196	8	0,000000000036310	8	0,000000000000025
9	0,000002438960746	9	0,000000011015764	9	0,000000000018303	9	0,000000000000011
						8,0	0,000000000000005
						1	0,000000000000002
						2	0,000000000000001

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}$ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОРДИНАТ КРИВОЙ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ФОРМУЛЕ $y = y'h$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5641	0,5641	0,5641	0,5640	0,5637	0,5634	0,5631	0,5629	0,5624	0,5619
0,1	0,5614	0,5607	0,5602	0,5595	0,5588	0,5579	0,5571	0,5561	0,5551	0,5541
0,2	0,5530	0,5518	0,5507	0,5494	0,5481	0,5469	0,5455	0,5440	0,5425	0,5409
0,3	0,5394	0,5377	0,5360	0,5343	0,5325	0,5306	0,5288	0,5268	0,5250	0,5228
0,4	0,5209	0,5187	0,5166	0,5143	0,5121	0,5098	0,5076	0,5052	0,5028	0,5003
0,5	0,4979	0,4954	0,4929	0,4903	0,4876	0,4849	0,4822	0,4796	0,4769	0,4740
0,6	0,4712	0,4684	0,4656	0,4626	0,4598	0,4568	0,4538	0,4507	0,4477	0,4446
0,7	0,4417	0,4385	0,4354	0,4322	0,4291	0,4258	0,4227	0,4195	0,4162	0,4129
0,8	0,4097	0,4064	0,4030	0,3998	0,3964	0,3932	0,3898	0,3864	0,3831	0,3797
0,9	0,3763	0,3729	0,3695	0,3661	0,3627	0,3594	0,3558	0,3524	0,3490	0,3456
1,0	0,342	0,339	0,336	0,332	0,329	0,326	0,322	0,318	0,315	0,312
1,1	0,308	0,304	0,302	0,298	0,295	0,292	0,288	0,284	0,282	0,278
1,2	0,275	0,272	0,268	0,265	0,262	0,258	0,256	0,252	0,248	0,246
1,3	0,242	0,240	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,214
1,4	0,212	0,209	0,206	0,203	0,200	0,197	0,194	0,192	0,189	0,186
1,5	0,183	0,180	0,178	0,175	0,172	0,170	0,167	0,165	0,162	0,159
1,6	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,145	0,142	0,140	0,138	0,135
1,7	0,133	0,131	0,129	0,126	0,124	0,122	0,120	0,118	0,116	0,114
1,8	0,112	0,110	0,108	0,106	0,104	0,102	0,100	0,098	0,096	0,094
1,9	0,093	0,091	0,090	0,088	0,086	0,084	0,083	0,081	0,080	0,078
2,0	0,076	0,076	0,075	0,073	0,072	0,069	0,068	0,066	0,065	0,063
2,1	0,062	0,061	0,060	0,058	0,057	0,056	0,055	0,053	0,052	0,051
2,2	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041
2,3	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037	0,036	0,036	0,034	0,033	0,032
2,4	0,032	0,031	0,030	0,030	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,025
2,5	0,025	0,024	0,024	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020
2,6	0,010	0,019	0,018	0,018	0,017	0,017	0,016	0,016	0,016	0,015
2,7	0,015	0,014	0,014	0,014	0,013	0,017	0,012	0,012	0,012	0,011
2,8	0,011	0,011	0,011	0,010	0,010	0,010	0,0096	0,0094	0,0092	0,0090
2,9	0,0085	0,0082	0,0080	0,0078	0,0076	0,0074	0,0071	0,0069	0,0067	0,0066
3,0	0,0063									

Пример. Дано $m = 0,47''$; $\Delta = 0,94''$; $y = ?$

Решение: $t = 2$; $h = 1,504$; $y' = 0,076$; $y = 0,1143$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ КРИТЕРИЯ χ^3

χ^2 \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0,9982	0,9994	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,1574	0,3679	0,5724	0,7358	0,8491	0,9197	0,9598	0,9810	0,9915	0,9963	0,9985	0,9994	0,9998	0,9999	1,0000
3	0,0833	0,2231	0,3916	0,5578	0,7000	0,8088	0,8850	0,9344	0,9643	0,9814	0,9907	0,9955	0,9979	0,9991	0,9996
4	0,0455	0,1353	0,2615	0,4060	0,5494	0,6767	0,7798	0,8571	0,9114	0,9473	0,9699	0,9834	0,9912	0,9955	0,9977
5	0,0254	0,0821	0,1718	0,2873	0,4159	0,5438	0,6600	0,7576	0,8343	0,8912	0,9312	0,9580	0,9752	0,9858	0,9921
6	0,0143	0,0498	0,1116	0,1991	0,3062	0,4232	0,5398	0,6472	0,7399	0,8153	0,8734	0,9161	0,9462	0,9665	0,9767
7	0,0081	0,0302	0,0719	0,1359	0,2206	0,3208	0,4289	0,5366	0,6371	0,7254	0,7991	0,8576	0,9022	0,9347	0,9576
8	0,0047	0,0183	0,0460	0,0916	0,1562	0,2381	0,3326	0,4335	0,5341	0,6288	0,7133	0,7851	0,8436	0,8893	0,9238
9	0,0027	0,0111	0,0293	0,0611	0,1091	0,1736	0,2527	0,3423	0,4373	0,5321	0,6219	0,7029	0,7729	0,8311	0,8775
10	0,0016	0,0067	0,0186	0,0404	0,0752	0,1247	0,1886	0,2650	0,3505	0,4405	0,5304	0,6160	0,6939	0,7622	0,8197
11	0,0009	0,0041	0,0117	0,0266	0,0514	0,0884	0,1386	0,2017	0,2757	0,3575	0,4433	0,5289	0,6108	0,6860	0,7526
12	0,0005	0,0025	0,0074	0,0174	0,0348	0,0620	0,1006	0,1512	0,2133	0,2851	0,3626	0,4457	0,5276	0,6063	0,6790
13	0,0003	0,0015	0,0046	0,0113	0,0234	0,0430	0,0721	0,1119	0,1626	0,2237	0,2933	0,3690	0,4478	0,5265	0,6023
14	0,0002	0,0009	0,0029	0,0073	0,0156	0,0296	0,0512	0,0818	0,1223	0,1730	0,2330	0,3007	0,3738	0,4497	0,5255
15	0,0001	0,0006	0,0018	0,0047	0,0104	0,0203	0,0360	0,0591	0,0909	0,1321	0,1825	0,2414	0,3074	0,3782	0,4514
16	0,0001	0,0003	0,0011	0,0030	0,0068	0,0138	0,0251	0,0424	0,0669	0,0996	0,1411	0,1912	0,2491	0,3134	0,3821
17	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0045	0,0093	0,0174	0,0301	0,0487	0,0744	0,1079	0,1496	0,1993	0,2562	0,3189
18		0,0001	0,0004	0,0012	0,0029	0,0062	0,0120	0,0212	0,0352	0,0550	0,0816	0,1157	0,1575	0,2068	0,2627
19		0,0001	0,0003	0,0008	0,0019	0,0042	0,0082	0,0149	0,0252	0,0403	0,0611	0,0885	0,1231	0,1649	0,2137
20		0,0000	0,0002	0,0005	0,0013	0,0028	0,0056	0,0103	0,0179	0,0293	0,0453	0,0671	0,0952	0,1301	0,1719
21			0,0001	0,0003	0,0008	0,0018	0,0038	0,0071	0,0126	0,0211	0,0334	0,0504	0,0729	0,1016	0,1368
22			0,0001	0,0002	0,0005	0,0012	0,0025	0,0049	0,0089	0,0151	0,0244	0,0375	0,0554	0,0786	0,1078
23			0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0017	0,0034	0,0062	0,0107	0,0177	0,0277	0,0417	0,0603	0,0841
24				0,0001	0,0002	0,0005	0,0011	0,0023	0,0043	0,0076	0,0127	0,0203	0,0311	0,0458	0,0651
25				0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016	0,0030	0,0053	0,0091	0,0148	0,0231	0,0346	0,0490
26				0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,0020	0,0037	0,0065	0,0107	0,0170	0,0259	0,0380
27					0,0001	0,0001	0,0003	0,0007	0,0014	0,0026	0,0046	0,0077	0,0124	0,0193	0,0287
28					0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,0018	0,0032	0,0055	0,0090	0,0142	0,0216
29						0,0001	0,0001	0,0003	0,0006	0,0012	0,0023	0,0039	0,0065	0,0104	0,0161
30						0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0009	0,0016	0,0028	0,0047	0,0076	0,0119

χ^2	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0,9989	0,9995	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0,9958	0,9978	0,9989	0,9994	0,9997	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0,9881	0,9932	0,9962	0,9979	0,9989	0,9994	0,9997	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0,9733	0,9835	0,9901	0,9942	0,9967	0,9981	0,9990	0,9995	0,9997	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
8	0,9489	0,9665	0,9786	0,9867	0,9919	0,9951	0,9972	0,9984	0,9991	0,9995	0,9997	0,9999	0,9999	1,0000
9	0,9134	0,9403	0,9597	0,9735	0,9829	0,9892	0,9933	0,9960	0,9976	0,9986	0,9992	0,9995	0,9997	0,9999
10	0,8666	0,9036	0,9319	0,9539	0,9682	0,9789	0,9863	0,9913	0,9945	0,9967	0,9980	0,9988	0,9993	0,9996
11	0,8095	0,8566	0,8944	0,9238	0,9462	0,9628	0,9747	0,9832	0,9890	0,9929	0,9955	0,9972	0,9983	0,9990
12	0,7440	0,8001	0,8472	0,8856	0,9161	0,9396	0,9574	0,9705	0,9799	0,9866	0,9912	0,9943	0,9964	0,9977
13	0,6728	0,7362	0,7916	0,8386	0,8774	0,9086	0,9332	0,9520	0,9661	0,9765	0,9840	0,9892	0,9929	0,9954
14	0,5987	0,6671	0,7291	0,7837	0,8305	0,8696	0,9015	0,9269	0,9466	0,9617	0,9730	0,9813	0,9872	0,9914
15	0,5246	0,5955	0,6620	0,7226	0,7764	0,8230	0,8622	0,8946	0,9208	0,9414	0,9573	0,9694	0,9784	0,9850
16	0,4530	0,5238	0,5925	0,6573	0,7166	0,7696	0,8159	0,8553	0,8881	0,9148	0,9362	0,9529	0,9658	0,9755
17	0,3856	0,4544	0,5231	0,5899	0,6530	0,7111	0,7634	0,8093	0,8487	0,8818	0,9091	0,9311	0,9486	0,9622
18	0,3239	0,3888	0,4557	0,5224	0,5874	0,6490	0,7060	0,7575	0,8030	0,8424	0,8758	0,9035	0,9261	0,9443
19	0,2687	0,3285	0,3918	0,4568	0,5218	0,5851	0,6453	0,7012	0,7520	0,7971	0,8364	0,8700	0,8981	0,9213
20	0,2202	0,2742	0,3328	0,3946	0,4579	0,5213	0,5830	0,6419	0,6968	0,7468	0,7916	0,8308	0,8645	0,8929
21	0,1785	0,2263	0,2794	0,3368	0,3971	0,4589	0,5207	0,5811	0,6387	0,6926	0,7420	0,7863	0,8253	0,8591
22	0,1432	0,1847	0,2320	0,2843	0,3405	0,3995	0,4599	0,5203	0,5793	0,6357	0,6887	0,7374	0,7813	0,8202
23	0,1137	0,1493	0,1906	0,2373	0,2883	0,3440	0,4017	0,4608	0,5198	0,5776	0,6320	0,6850	0,7330	0,7765
24	0,0895	0,1194	0,1550	0,1962	0,2424	0,2931	0,3472	0,4038	0,4616	0,5194	0,5760	0,6303	0,6815	0,7289
25	0,0698	0,0947	0,1249	0,1605	0,2014	0,2472	0,2971	0,3503	0,4058	0,4624	0,5190	0,5745	0,6278	0,6782
26	0,0540	0,0745	0,0998	0,1302	0,1658	0,2064	0,2517	0,3009	0,3532	0,4076	0,4631	0,5186	0,5730	0,6255
27	0,0415	0,0581	0,0790	0,1047	0,1353	0,1709	0,2112	0,2560	0,3045	0,3559	0,4093	0,4638	0,5182	0,5717
28	0,0316	0,0449	0,0621	0,0834	0,1094	0,1402	0,1757	0,2158	0,2600	0,3079	0,3585	0,4110	0,4644	0,5179
29	0,0239	0,0345	0,0484	0,0660	0,0878	0,1140	0,1449	0,1803	0,2201	0,2639	0,3111	0,3609	0,4125	0,4651
30	0,0180	0,0263	0,0374	0,0518	0,0699	0,0920	0,1185	0,1494	0,1848	0,2243	0,2676	0,3142	0,3632	0,4140

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН t_p, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ РАВЕНСТВУ $2C\int_0^{t_p}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}dt = p$,

n	p									
	0,2	0,4	0,6	0,8	0,90	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
2	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
3	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
4	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
5	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
6	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
7	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
8	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
9	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
10	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
11	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
12	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
13	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
14	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
15	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,878	4,140
16	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
17	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
18	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
19	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
20	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
21	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
22	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
23	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
24	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
25	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
26	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
27	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
28	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690

n	p: 0,2	0,4	0,6	0,8	0,90	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
29	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
30	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
31	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
41	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
51	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
61	0,254	0,527	0,848	1,206	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
81	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
101	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
201	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
501	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$$

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1104	0,1206	0,1307	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3095	0,3205	0,3316	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5104	0,5230	0,5361
0,5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
0,9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6466
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3,4534	3,8002

ОГЛАВЛЕНИЕ