

УДК 621  
Г15  
ББК 32.818

Федеральная целевая программа "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997 – 2000 годы"

## Нейрокомпьютеры и их применение

Рецензенты:  
академик РАН Ю.В. Гуляев;  
докт. техн. наук Э. Д. Аведьян.

Галушкин А.И.  
Г15 Теория нейронных сетей. Кн. 1: Учеб. пособие для вузов / Общая ред. А. И. Галушкина. – М.: ИПРЖР, 2000.–416 с.: ил. (Нейрокомпьютеры и их применение).

ISBN 5-93108-05-8

Изложена методика синтеза многослойных нейросетей различной структуры: с полными и неполными последовательными связями, перекрестными и обратными связями, функционирующими в режимах обучения, самообучения, обучения с учителями, обладающим конечной квалификацией. Приведены этапы исследования надежности и диагностики нейронных сетей.

Для студентов по направлению подготовки бакалавров и магистров «Прикладные математика и физика», а также для научных работников, аспирантов и студентов, занимающихся разработкой и применением сверхвысокопроизводительной вычислительной техники.

УДК 621  
ББК 32.818

Научное издание

НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Александр Иванович Галушкин

ТЕОРИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ. Кн. 1

Зав. редакцией И. Е. Якушина  
Редактор-оператор Г.Н. Алексева  
Корректор Р. М. Ваничкина

Изд. № 59. Сдано в набор 13.01.2000. Подписано в печать 29.06.2000. Формат 60 x 90 1/16.  
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.  
Печ. л. 26. Тираж 2000 экз. Зак. № 353.

ЛР № 065229 от 20.06.97.

Издательское предприятие редакции журнала "Радиотехника".

103031, Москва, К-31, Кузнецкий мост, д. 20/6, ИПРЖР.

Тел./факс: 921-48-37; 925-78-72; 925-92-41.

E-mail: [zaoiprzhr@glasnet.ru](mailto:zaoiprzhr@glasnet.ru)

<http://www.glasnet.ru/~zaoiprzhr/>

Отпечатано в ППП Типография "Наука"  
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

ISBN 5-93108-005-8

© Центр интеграции, 2000,

© А. И. Галушкин, 2000.

*Посвящая своим учителям – российским классикам в области теории управления, дискретных и адаптивных систем Владимиру Викторовичу Солодовникову, Льву Тимофеевичу Кузину, Якову Залмановичу Цыпкину*

## ВВЕДЕНИЕ

### 1. Нейронные ЭВМ

Нейрокомпьютеры – вычислители нового класса, появление которых, обусловлено объективными причинами, связанными, с одной стороны, с принципиальными этапами развития современной технологии элементной базы, в основном определяющей развитие архитектуры ЭВМ, с другой – практическими требованиями все быстрее и дешевле решать конкретные задачи.

Основной причиной развития нейронных ЭВМ еще в 50-е годы явилось развитие пороговой логики, которая постоянно противопоставлялась классическому развитию элементной базы в базисе И, ИЛИ, НЕ и т.п., что привело к созданию в 60-е и 70-е годы ряда конкретных специализированных и экспериментальных универсальных нейронных ЭВМ. Термин «нейронные ЭВМ» – «нейрокомпьютер» никак не связан с какими бы то ни было свойствами и характеристиками нервной системы человека и животных. Он связан только с условным наименованием порогового элемента с настраиваемыми или фиксированными весами, который реализует простейшую передаточную функцию нейрона-клетки. Резкий скачок развития технологии БИС в начале 70-х годов и реализация в первую очередь микропроцессорных БИС с классической архитектурой вычислителя с элементной базой в логическом базисе И, ИЛИ, НЕ и т.п. затормозило, но не прекратило развитие вычислительных средств на элементах пороговой логики. Очередной скачок в начале 80-х годов позволил по-новому взглянуть на проблему нейронных ЭВМ, так как технология уже не БИС, а СБИС позволила реализовать или эмулировать в одном или нескольких кристаллах не только множество обрабатывающих элементов-нейронов, но и все множество связей между ними, что ранее было невозможно. Такую возможность в середине 80-х годов предоставили не только электронные, но и оптические методы реализации.

Основной идеей создания нейронной ЭВМ – специализированной или универсальной является идея построения ЭВМ как аналого-цифровой, где «быстрая» – аналоговая часть выполняет многомерные операции в пороговом базисе. Алгоритмы настройки коэффициентов нейронных сетей реализуются либо «быстро» в аналоговом виде, либо «медленнее» в виде специализированных цифровых схем, эмулирующих нейронные алгоритмы, либо «медленно» в цифровом виде, например, на универсальной персональной ЭВМ.

Создание нейронных ЭВМ требует построения принципиально новых алгоритмов решения многомерных задач, в которых время решения конкретной задачи, с одной стороны, всего лишь линейно зависит от размерности задачи, с другой стороны определяется временем сходимости итерационного процесса решения задачи в конкретной нейронной сети.

Основным формальным аппаратом построения нейронных алгоритмов является теория нейронных сетей [В1–7]. Назовем логическим базисом задачи основной набор операций, реализуемых в процессе детализации алгоритма. Таким базисом для большинства задач является базис  $\{\sum \bar{a} \bar{x}\}$ , к таким задачам относятся: задачи векторной алгебры; преобразование Фурье; задачи оптимизации.

К подобным задачам сводится класс задач решения обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений Пуассона, Эйлера, Навье–Стокса, эллиптических уравнений и пр.

Логическим базисом вычислительной системы является основная группа операций, реализуемых элементами основного операционного устройства. В случае классических машин это базис И, ИЛИ, НЕ, из которого формируется во-первых, уровень несколько более сложного базиса (штрих Шеффера, многократные И, ИЛИ, НЕ и т.п.), и макроуровень – уровень микроустройств. В данном случае логический базис вычислительной системы никак не определяется логическим базисом решаемых задач, а требует наложения на него достаточно сложной системы программирования.

В случае нейронных ЭВМ логическим базисом вычислительной системы в простейшем случае является базис  $\{\sum \bar{a} \bar{x}, \text{sign}\}$ , который максимально соответствует логическому базису основных решаемых задач.

При решении задач с логическим базисом, описанным выше, на нейронных ЭВМ, базис задачи соответствует базису вычислительной системы и нет искусственных сдвигов в ту или иную сторону:

- ту, когда задачи с пороговым базисом, а базис системы И, ИЛИ, НЕ;
- или ту, когда задача с базисом иным, нежели пороговый, а вычислительная система нейронная.

Предполагается, что соответствие базиса вычислительной системы и задачи обеспечивает максимальную производительность. Это заявление тривиально для специализированных ЭВМ, которые предназначены для решения данной конкретной задачи и не тривиально для таких машин, как нейронные, которые в настоящее время претендуют на звание универсальных.

При решении конкретных задач итерационными методами на нейронных ЭВМ все трудности многоэкстремального поиска конечно остаются, только здесь они как бы перекладываются с программной реализации (машины фон-Неймана, ЭВМ с архитектурой SIMD и MIMD) на аппаратную или программно-аппаратную реализацию. Короче говоря, в нейронных ЭВМ выделяется алгоритмическое ядро основного массива прикладных задач, которые удается реализовать аппаратно или программно-аппаратно с максимально возможным быстродействием. Для данного алгоритмического ядра нейронная ЭВМ – это максимально распараллеленная система. Количество циклов ее работы в процессе решения задачи (в рамках указанного алгоритмического ядра) – циклов настройки на оптимум функционала вторичной оптимизации в ней (нейронной ЭВМ) определяется не субъективной интуицией схемотехника, который раскладывает обработку по слоям схемы из булевских элементов, и не субъективными воззрениями программиста, который организует их взаимодействие, а физической сущностью и трудностью задачи.

Однородные нейронные сети обладают свойствами постепенной деградации при выходе из строя элементов. Это было отмечено еще Ф. Розенблаттом при построении трехслойного перцептрона со случайными связями в первом слое, когда число элементов первого слоя было взято избыточным. При этом функция, реализуемая сетью нейронов, как бы определяется по структуре.

Нейронные ЭВМ являются первым примером того, когда структура вычислительной машины может рассчитываться аналитически, а не строиться эмпирически исходя из неких субъективных представлений о задачах и элементной базе.

Способы реализации нейронных ЭВМ делятся в основном на три класса:

1. Программная эмуляция нейронных алгоритмов на вычислительных машинах с архитектурами ОКОД (один поток команд, один поток данных) (например, на классических ПЭВМ), ОКМД (например, Connection Machine) или МКМД (например, на транспьютерных сетях).

2. Программно-аппаратная эмуляция нейронных блоков на цифровой элементной базе, обеспечивающая ускоренное выполнение массива операций порогового базиса, в первую очередь таких, как умножение и сложение (процессоры фирмы Weitek, сигнальные процессоры типа TMS32020 и т.п.);

3. Аппаратная реализация нейронного блока на элементной базе, характерной для нейронных алгоритмов (КМОП – нейрочипа, оптические управляемые транспаранты, голография и т.п.);

Эффективность реализации нейронных алгоритмов решения конкретных задач возрастает при переходе от варианта 1 к 2 и далее к 3.

В случае аппаратной реализации нейронного блока или программно-аппаратной эмуляции нейронная ЭВМ представляет собой классическую структуру специализированной ЭВМ с ОКМД-архитектурой, а в более сложных случаях, смешанную МОКМД-архитектуру, когда ЭВМ представляет собой сеть асинхронно работающих вычислительных узлов, к каждому из которых подсоединен блок синхронно работающих элементов, реализующих фрагмент нейронного алгоритма.

СуперЭВМ, такие, как GRAY XMP, GYBER 205 обладали громадной вычислительной мощностью, но они чрезвычайно дороги и их архитектура не соответствовала принципам нейронной обработки. Высоких скоростей обработки им позволяли достичь векторные процессоры, конвейерные спецпроцессоры и сжатое время цикла. Как правило, они были построены на основе современной технологии и достигали в своем развитии такой точки, где дальнейшее увеличение быстродействия

сдерживалось физическими ограничениями скорости распространения сигналов в схемах ЭВМ. Выход из этого «технологического» тупика предлагала «мелкозернистая» обработка, реализованная на ЭВМ с архитектурой ОКМД и МКМД типа Connection Machine, Intel Hypercube, Ncube, Meiko Computing Surface и др., в частности «нейронная» обработка.

Существуют различные подходы к выявлению параллелизма в решаемой задаче и реализации ее на параллельных процессорах:

- параллелизм подзадач или событий;
- явный алгоритмический параллелизм;
- геометрический параллелизм.

Первый тип параллелизма эффективен для программы, которая многократно выполняется с различными параметрами. В этом случае желательно представить ее множеством независимых подзадач (каждая со своими параметрами) и выполнять подзадачи параллельно на различных процессорах.

Примером реализации алгоритмического параллелизма может служить векторный процессор умножения с плавающей точкой. Здесь организация параллельной обработки заключается в назначении различных подзадач конвейеру процессоров, каждый из которых осуществляет некоторую операцию над данными и передает результат дальше. В этом случае для обеспечения эффективности работы конвейера необходимо сбалансировать загрузку и доступ к процессорам, учесть время, требуемое для перемещения данных от одной стадии обработки к другой.

Геометрический параллелизм заключается в декомпозиции данных среди процессоров таким образом, чтобы все требуемые процессору данные располагались в его оперативной памяти или в оперативной памяти процессоров непосредственного окружения. Геометрический параллелизм является стандартным подходом, используемым для ЭВМ архитектуры ОКМД. Как показывает практика, многие вычисления при моделировании нейронных сетей являются локальными, что делает подход, связанный с геометрическим параллелизмом, реальным при реализации нейронных ЭВМ. Именно поэтому нейронные ЭВМ с аппаратной и программно-аппаратной реализацией нейронного блока относятся к классам архитектур ОКМД и МОКМД, как отмечено выше.

Ярким примером математической операции, параллельная реализация которой соответствует процессам, протекающим в нейронных сетях, является умножение матрицы на вектор. Здесь вектор является входным сигналом однослойной нейронной сети, матрица представляет собой значения коэффициентов нейронов слоя, а значения выходных сигналов нейронной сети являются результатом перемножения и нелинейного преобразования.

Нейрокомпьютеры являются междисциплинарным предметом исследований. Поэтому определение нейрокомпьютера можно дать только на фоне еще нескольких определенных, адекватных различным направлениям науки.

*Математическая статистика.* Нейрокомпьютеры – это системы, позволяющие сформировать описания характеристик случайных процессов и их совокупности, имеющих в отличие от общепринятых сложные, зачастую многомодальные или вообще априори неизвестные функции распределения.

*Математическая логика и теория автоматов.* Нейрокомпьютеры – это системы, в которых алгоритм решения задачи представлен логической сетью элементов частного вида – нейронов с полным отказом от булевских элементов типа И, ИЛИ, НЕ. Как следствие этого введены специфические связи между элементами, являющиеся предметом отдельного рассмотрения.

*Пороговая логика* (50-е и 60-е годы ЭВМ на пороговой логике). Нейрокомпьютеры – это системы, в которых алгоритм решения задачи представлен в виде сети пороговых элементов с динамически перестраиваемыми коэффициентами и алгоритмами настройки, независимыми как от размерности сети так и от входного пространства пороговых элементов.

Практически все подходы, связанные с пороговой логикой, обладая внешними признаками нейронных сетей, имели ограничения, аналогичные булевским элементам и связанные с размерностью входного пространства элементов и размерностью сетей.

*Теория управления.* Общеизвестны трудности синтеза нелинейных динамических систем управления. В случае нейрокомпьютеров эти трудности частично обходятся тем, что в качестве объекта управления выбирается частный случай, хорошо формализуемый объект, т.е. многослойная нейронная сеть, а динамический процесс ее настройки представляет собой процесс решения задачи. При этом практически весь

аппарат синтеза адаптивных систем управления переносится на нейронные сети как частный вид объекта управления.

*Вычислительная математика.* В отличие от классических методов решения задач нейрокомпьютеры реализуют алгоритмы решения задач, представленные в виде нейронных сетей. Это ограничение позволяет разрабатывать алгоритмы, потенциально более параллельные, чем любая мыслимая их физическая реализация. Множество нейросетевых алгоритмов решения задач составляет новый перспективный раздел вычислительной математики, условно называемый нейроматематикой.

*Вычислительная техника.* С точки зрения вычислительной техники нейрокомпьютер – это вычислительная система с архитектурой MSIMD, в которой реализованы три принципиальных технических решения:

- упрощен до уровня нейрона процессорный элемент однородной структуры;
- резко усложнены связи между элементами;
- программирование вычислительной структуры перенесено на изменение весовых связей между процессорными элементами.

*Общее определение нейрокомпьютера.* Нейрокомпьютер – это вычислительная система с архитектурой аппаратного и программного обеспечения, адекватной выполнению алгоритмов, представленных в нейросетевом логическом базисе.

## 2. Место нейронных ЭВМ в ряду высокопроизводительных вычислительных средств

Если высокопроизводительные вычислительные средства можно условно разделить на два класса: «крупнозернистые» (с небольшим числом процессоров) и «мелкозернистые» (с большим – сотни, тысячи процессоров), то нейронные ЭВМ относятся к классу мелкозернистых ЭВМ.

Под новым классом вычислительных машин можно понимать класс машин, решающих достаточно широкий круг универсальных задач и требующих для своего решения по сравнению с прежними типами вычислительных машин новой реализации технических средств, системы программирования и алгоритмов решения задачи.

С точки зрения данного определения ЭВМ крупнозернистой обработки типа GRAY, «Эльбрус» являются новым классом вычислительных машин по сравнению с машинами фон-Неймана, ЭВМ мелкозернистой обработки с архитектурой ОКМД (один поток команд, много потоков данных) являются новым классом по сравнению с ЭВМ крупнозернистой обработки.

Каждый из перечисленных ниже классов ЭВМ является новым по отношению к предыдущему:

- машины с архитектурой фон-Неймана;
- машины крупнозернистой обработки типа GRAY, «Эльбрус»;
- машины мелкозернистой обработки с архитектурой ОКМД;
- машины мелкозернистой обработки с архитектурой МКМД (много потоков команд, много потоков данных);
- машины мелкозернистой обработки со смешанной архитектурой типа МОКМД (множественный вариант ОКМД);
- нейронные ЭВМ.

Из четырех типов мелкозернистых ЭВМ, приведенных на рис. В-1 в своем эволюционном развитии, ЭВМ с архитектурой ОКМД являются первыми, появившимися еще в середине 70-х годов. Процессор представляет собой в этом случае однобитовый процессор с некоторой локальной памятью, что делало необходимым организацию синхронной работы множества таких образований при решении достаточно сложных задач.

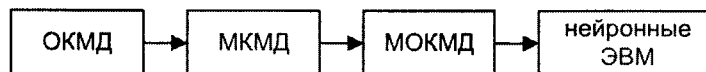


Рис. В-1. Эволюция развития мелкозернистых ЭВМ: ОКМД – один поток команд, много потоков данных; МКМД – много потоков команд, много потоков данных; МОКМД – множественный вариант ОКМД

Развитие технологии СБИС в начале 80-х годов послужило первопричиной появления первых промышленных образцов мелкозернистых ЭВМ с архитектурой МКМД (много потоков команд – много потоков данных), как асинхронно действующих сетей 16 и 32 разрядных микроЭВМ, в том числе транспьютерных сетей.

В 1985 – 1988 гг. появилось несколько проектов ЭВМ со смешанной архитектурой, в которых при наличии ядра в виде сети асинхронно работающих процессоров каждый процессор такого ядра управляет синхронно работающей сетью простых процессоров с локальной памятью (иногда такую архитектуру называют множественным вариантом ОКМД – МОКМД).

Архитектура МОКМД – это повторение на новом качественном уровне (МКМД) попытки распараллеливания алгоритма на сети синхронно действующих процессоров, которая уже была реализована в структурах ОКМД.

В целом нейронные ЭВМ можно трактовать, как частный случай (или развитие) ЭВМ с архитектурой МОКМД, в котором синхронное образование при каждом «мелком зерне», работающем асинхронно, представляет собой не просто «вульгарную», с точки зрения алгоритмиста, сеть однобитовых процессоров с памятью, а осмысленное, с точки зрения алгоритмиста, синхронное образование, производящее программно-аппаратную, а лучше аппаратную эмуляцию нейронного алгоритма, в простейшем случае представляющего собой операцию перемножения векторов большой размерности или матрицы на вектор, но только в простейшем случае. Нейронные ЭВМ при этом являются частным случаем структуры МОКМД, где синхронно работающая «гроздь» однобитовых процессоров имеет специальную организацию, приближенную к программно-аппаратной реализации основной части алгоритма, а в данном нейронном случае реализующая программно-аппаратно «нейронное» ядро ряда алгоритмов.

Программно-аппаратная реализация нейронных алгоритмов в синхронных образованиях нейронных ЭВМ позволяет по всей вероятности кроме всего прочего решить две дополнительные задачи:

- 1) минимизировать, а иногда и сделать нулевым обмен информацией в процессе решения задач между узлами асинхронного ядра нейронной ЭВМ, что практически невозможно для большинства задач в транспьютерных сетях или подобных им системах.
- 2) решать так называемые плохо формализуемые задачи, такие, как обучение с целью оптимального распознавания, самообучение (кластеризация) и т.п.

Необходимо отметить, что из всех применений нейрокомпьютеров в настоящее время наиболее важным является уровень супервычислений, т.е. уровень, где имеется нехватка производительности вычислительных средств при существующих ограничениях. При этом объективную необходимость появления архитектуры нейроЭВМ, как естественного развития архитектуры МКМД, можно объяснить также тем, что архитектура МКМД при естественном желании разработчика увеличить производительность узла и число узлов имеет «область тупика» в своем развитии (рис. В-2) по критерию отношения производительности к стоимости по двум причинам:

- объективное наличие межузловых обменов и увеличение общих потерь на обмены при увеличении числа узлов,
- увеличение стоимости узла при стремлении увеличить его производительность.



Рис. В-2. К иллюстрации ограничения развития МКМД-архитектуры при увеличении числа узлов и производительности узлов

Тупиковость прямого варианта повышения производительности ЭВМ с архитектурой МКМД, а именно варианта, связанного с повышением производительности узла и увеличением числа узлов, определяется тем, что при этом производительность растет медленнее (или значительно медленнее) стоимости системы, что недопустимо. Причины этого заключаются в том, что стоимость узла растет быстрее производительности и за счет того, что при увеличении числа узлов растут потери на обмены информацией между узлами в процессе решения задачи.

Именно это, с нашей точки зрения, и является основной объективной причиной введения в каждом узле МКМД архитектуры некоторого синхронно функционирующего нейрооб-

разования, программно-аппаратно, а в будущем аппаратно реализующего нейронную сеть, реализующую в свою очередь заданную функцию.

Экономический фактор играет и будет играть существенную роль при построении мелкозернистых суперЭВМ, особенно в части ЭВМ с очень большим числом узлов. Рост цены на заказную транспьютероподобную БИС, связанный с ее усложнением и повышением производительности, будет определять ее место в основном не в качестве базового элемента большой решетки, а в качестве базового элемента коммутационной решетки «среднего» размера, к каждому узлу которой присоединено некоторое образование из более «однородных», т.е. дешевых БИС, образующих некоторый сопроцессор, специализированный либо по структуре – сеть однокитовых процессоров с памятью, либо по функции – например, нейровычислитель.

Отсюда следует, что роль заказных БИС транспьютеров и транспьютероподобных элементов, у которых имеется тенденция к усложнению структуры и увеличению числа транзисторов, будет, с нашей точки зрения, уменьшаться в диапазоне развития вычислительной техники, соответствующем суперЭВМ мелкозернистой структуры. Основной упор будет на массовое применение этих элементов в классе персональных ЭВМ (платы ПЭВМ – ускорители), суперперсональных ЭВМ (блоки из нескольких плат при ПЭВМ), и в меньшей степени в классе суперминиЭВМ (стойка в несколько десятков плат с несколькими ПЭВМ типа Meiko и Megaframe). Появление систем на несколько тысяч транспьютеров или транспьютероподобных элементов является объективным, но временным явлением в классе суперЭВМ, да и только в разделе применений суперЭВМ, требующих единичных образцов.

Это означает, что для перспективы развития суперЭВМ мелкозернистой структуры транспьютерного типа более 10 000 узлов в настоящем понимании является крайним направлением, развитие которого нужно искать в архитектуре периферийной части каждого узла коммутационной решетки транспьютерных элементов будущей системы. Нейронные ЭВМ являются эффективным путем развития архитектур перспективных суперЭВМ с учетом вышеприведенных замечаний.

### 3. Понятие универсальности ЭВМ

Каждая ЭВМ в какой-то степени является специализированной в том смысле, что решает различные задачи с различной эффективностью. Однако со временем освоения каждого класса ЭВМ эта специализированность уменьшается хотя бы за счет расширения сферы применения. На каждый текущий момент можно представить себе качественную картину степени универсальности различных классов ЭВМ в виде, представленном на рис. В-3. В настоящее время нейронные ЭВМ являются «более специализированными», чем транспьютероподобные, также, как транспьютероподобные — более специализированные,

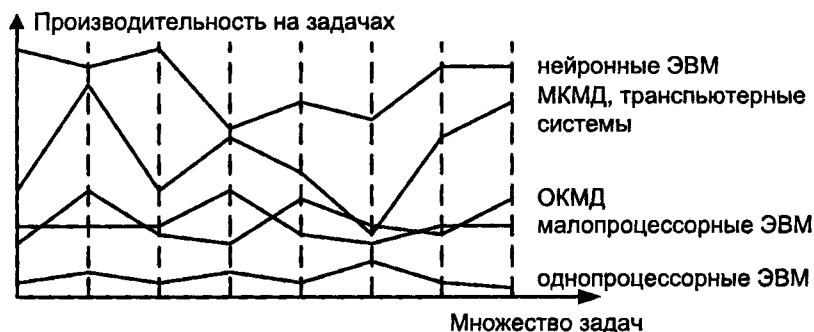


Рис. В-3. Качественная картина оценки степени универсальности ЭВМ различных классов



Рис. В-4. Иллюстрация качественных возможностей распараллеливания, представляемых вычислительными средствами различного класса

чем однопроцессорные. Но это вопрос времени или ресурсов, выделенных по необходимости на данное направление. На рис. В-4 представлена столь же качественная иллюстрация потенциальных возможностей распараллеливания алгоритмов, представляемых каждым классом вычислительных средств из рассматриваемых при решении некоторой конкретной задачи. За счет увеличения потенциальной возможности распараллеливания растет соответственно количество операций, выполняемых в одном цикле работы вычислительного устройства, и как следствие, сокращается время решения задачи.

### 4. Модульность нейронных ЭВМ

Модульность (модульная наращиваемость) в нейронных ЭВМ определяется объективной необходимостью наличия в них транспьютерного или транспьютероподобного ядра.

Конкретные примеры разработок показывают, что стремление к увеличению производительности нейронных ЭВМ с учетом реальных конструктивных характеристик требует наличия в них транспьютерного или транспьютероподобного ядра для организации асинхронного процесса передачи информации между отдельными нейронными образованиями как при подготовке решения задачи, так и в процессе ее решения. Структура такого транспьютерного или транспьютероподобного ядра может быть различной, причем при достаточно большом числе асинхронно работающих узлов (несколько сот или тысяч) возможно потребуется переход от структуры ядра типа «решетка» или «тор» к структуре типа «гиперкуб» с целью увеличения эквивалентного трафика передачи информации в ядре.

В отличие от вычислительных машин с архитектурой МКМД (см. рис. В-2) производительность нейронных машин не критична к производительности узловых ЭВМ асинхронно работающего ядра, и нет потребности доказывать необходимость увеличения производительности обязательным ужесточением технологических норм.

Необходимо отметить характеристики асинхронного ядра нейронных ЭВМ. При построении такого ядра на базе транспьютеров сохраняется аппаратная и программная совместимость нейронных ЭВМ с транспьютерами или другими транспьютероподобными элементами. При этом нейронные ЭВМ (см. рис. В-1) не являются чем-то экзотическим, как они воспринимались в

60-е годы, а являются закономерным следствием эволюционного развития архитектуры мелкозернистых ЭВМ.

Так же, как и транспьютерные системы, нейронные ЭВМ могут применяться на различных уровнях реализации:

- встроенные в ПЭВМ платы;
- блоки из нескольких плат при ПЭВМ;
- стойки с управляющими ПЭВМ;
- совокупность стоек с управляющими ПЭВМ (уровень суперЭВМ).

Подобно транспьютерным системам, основной целью построения нейронных ЭВМ является уровень суперЭВМ и супервычислений. Именно поэтому к построению различных нейроплат к ПЭВМ в настоящее время нужно относиться как к чисто технологическому, инструментальному этапу или этапу реализации некоторых социально-незначительных задач, а главной стратегической задачей считать разработку нейронных суперЭВМ, как это наблюдается в линии развития нейронных ЭВМ фирмы TRW (MARK I, II, III, IV, V и т.д.).

Асинхронное ядро в нейронных ЭВМ будет в основном выполнять две функции:

- подготовка, передача исходных данных и прием результатов расчетов из отдельных нейронных образований при каждом узле асинхронного ядра до начала решения задачи;
- передача сообщений в процессе решения задачи, недостаточно корректно подготовленной для решения на нейронной ЭВМ, причем необходимо стремиться к тому, чтобы степень такой некорректности была минимальной и трафик передачи сообщений в асинхронном ядре был бы также минимальным.

### 5. Класс задач, адекватных нейронным ЭВМ

Задачи, решаемые на вычислительных системах, можно условно разделить на три класса:

- 1) формализуемые;
- 2) трудноформализуемые;
- 3) неформализуемые.

К формализуемым задачам относятся задачи с ясно очерченным алгоритмом решения, из которого прямо следует, какому классу ЭВМ он соответствует и на каких классах

машин (ОКОД, ОКМД, МКМД или других) задача с данным алгоритмом лучше всего решается.

К трудноформализуемым задачам относятся задачи, для которых алгоритм решения либо не является единственным, либо он таков, что трудно оценить качество решения задачи или достижимость решения. К данному классу задач можно отнести задачи большой размерности, в которых из-за так называемого «проклятия размерности» вводятся для их решения итерационные процедуры, сходимость и точность достижения результата у которых оценить трудно. К итерационным процедурам, адекватным трудноформализуемым задачам, стали прибегать даже для формализуемых задач в том случае, когда формальный алгоритм становился трудоемким (например, для решения системы линейных уравнений при достаточно большой размерности).

К неформализуемым задачам относятся задачи, в которых в алгоритме решения задачи присутствуют параметры или функции, заданные неявно в виде описания некоторого класса входных сигналов. Это задачи распознавания образов, кластеризации или самообучения, нахождения информативных признаков и т.п.

Отметим, что в принципе есть связь между представленными выше классами задач и типом архитектуры ЭВМ, но она не прямая. Конечно формализуемые задачи, для которых алгоритм является существенно последовательным, адекватны архитектуре ОКОД. Однако среди хорошо формализуемых есть много задач, в которых специальными приемами распараллеливания можно добиться повышения эффективности их решения. И это достаточно большой раздел современной математики, связанный с разработкой параллельных алгоритмов. Причем, как правило, поиск параллельного алгоритма для формализуемых задач проводится под конкретную архитектуру ЭВМ (ОКМД, МКМД или другую). Трудноформализуемые задачи, отмеченные выше, можно конечно решать и на последовательных машинах, но они более адекватны ЭВМ с архитектурой ОКМД и МКМД, более того, они послужили в какой-то мере причиной появления этих машин.

Можно сказать, что ЭВМ с архитектурой ОКМД и МКМД условно адекватны формализуемым задачам с хорошо рас-



параллеливаемым алгоритмом решения и трудноформализуемым задачам.

Именно неформализуемые задачи были еще 30 лет назад причиной появления нейронных ЭВМ, хотя в принципе нейронные задачи решались на ЭВМ с архитектурой ОКОД, и есть попытки решать их на ЭВМ с архитектурами ОКМД и МКМД.

Одними из основных задач, которые необходимо решить при построении нейронных ЭВМ, являются:

- разработка алгоритма решения задачи, адекватного структуре нейронной ЭВМ. Выделение в структуре алгоритма решения задачи ядра, адекватного по структуре нейронной сети с наибольшим параллелизмом (числом нейронов в слоях, размерностью пространства признаков);
- разработка структур и методов реализации нейронных сетей, адекватных заданному классу задач;
- разработка алгоритмов настройки нейронных сетей при решении заданных задач и исследование их сходимости;
- развитие теории нейронных сетей в сторону универсализации нейронного ядра в более широком классе алгоритмов.

Структура однородной нейронной сети выбрана для выделения в качестве ядра алгоритма решаемых задач по следующим причинам:

1. Она представляет возможность массового параллельного синхронного выполнения большого числа операций, состоящих в свою очередь из простейших операций сложения, умножения и нелинейных преобразований.
2. Реализует достаточно сложное и гибкое функциональное преобразование входного пространства состояний в выходное пространство.
3. Допускает аналитическое описание преобразования входного пространства состояний в выходное.
4. Позволяет организовать контролируемый процесс настройки коэффициентов сети в адаптивном режиме.
5. В будущем с использованием аппарата линейных последовательностных машин Гилла позволит подойти к решению проблемы аналитического описания, а следовательно, и синтеза алгоритмов адаптации в многослойных нейронных сетях [В-8].

## 6. О способах перестройки коэффициентов

Способы перестройки весовых коэффициентов нейронных сетей в нейронных ЭВМ можно классифицировать следующим образом:

- технологические (на этапе производства), как это например делается для разработанных японских GaAs-оптических нейрочипов.
- схемотехнические (у пользователя до начала эксплуатации);
- системотехнические (в процессе работы), которые в свою очередь в зависимости от класса задач можно разделить на несколько подклассов, например, условно на медленные, как при решении систем линейных неравенств, или быстрые, как при адаптивной обработке входного сигнала нейронной сети.

## 7. Классификация нейронных ЭВМ

По общему признанию многих авторов, нейронные идеи имеют более широкий спектр реализации, чем другие известные идеи параллелизма за счет того, что в них заложено внутреннее свойство большего массивованного параллелизма.

На рис. В-5 представлена структура основных типов нейронных ЭВМ. Данная структура представлена с целью определения основных перспектив развития архитектур высоко-

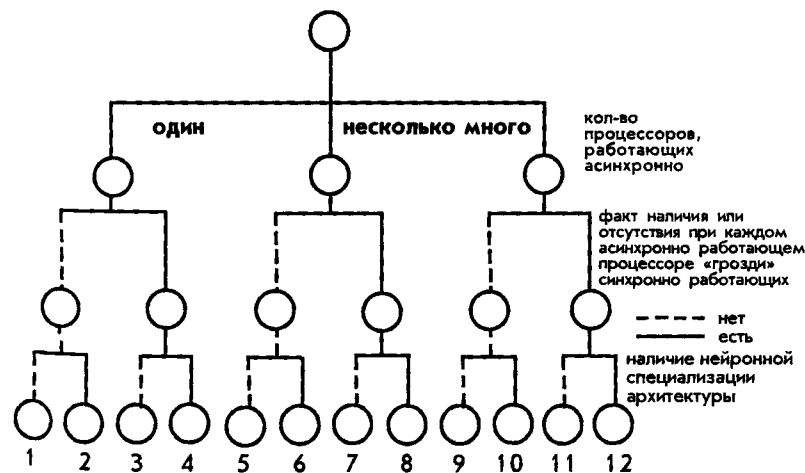


Рис. В-5. Структура основных типов нейронных ЭВМ

производительных ЭВМ, в частности ЭВМ нейронного типа. Ниже дана краткая характеристика различных видов нейронных ЭВМ. Предполагается, что производительность нейронных ЭВМ растет с ростом номера типа.

*Тип 1.* Вычислительные машины данного типа представляются известными образцами ЕС ЭВМ, СМ ЭВМ и персональных ЭВМ.

*Тип 2.* Это нейронные ЭВМ самого простого вида, в которых на ЭВМ типа 1 программно эмулируется нейронный алгоритм и за счет этого достигается эквивалентное увеличение производительности на задачах.

*Тип 3.* К данному типу ЭВМ относятся однопроцессорные ЭВМ (большие, миниЭВМ или персональные ЭВМ), оснащенные матричными процессорами. Это ЭВМ типа DAP, IBM с FPS, STARAN и пр.

*Тип 4.* Это нейронные ЭВМ с программно-аппаратной эмуляцией нейронных алгоритмов на ЭВМ типа 3.

*Тип 5.* ЭВМ различного класса от суперЭВМ до многомикропроцессорных, имеющие несколько процессоров (2,4,8,16, но, как правило, не более). Это ЭВМ типа Эльбрус, WARP, Alliant и т.п.

*Тип 6.* Это нейронные ЭВМ с программной эмуляцией нейронных алгоритмов на ЭВМ типа 5.

*Тип 7.* Это ЭВМ с архитектурой ОКМД, имеющие несколько, как правило немного, (2, 4, 8) командных процессоров.

*Тип 8* представляет собой ЭВМ типа 7 с программно-аппаратной реализацией на них нейронных алгоритмов решения задач.

*Тип 9.* Это ЭВМ транспьютерного типа с числом процессоров – десятки, сотни и тысячи.

*Тип 10* представляет реализацию на этих ЭВМ (ЭВМ тип 9) нейронных алгоритмов решения задач.

*Тип 11.* ЭВМ с архитектурой МОКМД, в которой при наличии достаточно мощного транспьютерного или транспьютероподобного ядра увеличение производительности достигается за счет добавления к каждому процессору этого ядра сопроцессора, представляющего собой некоторое образование с архитектурой ОКМД.

*Тип 12.* Это тип ЭВМ, аналогичный типу 11, в котором синхронно функционирующие грозди процессорных элементов реализуют нейронные алгоритмы.

Необходимо отметить, что ЭВМ типа 4,8,12 включают в себя программно-аппаратную реализацию «нейронных гроздей», существенно специализированную по элементной базе, архитектуре и системам программирования именно на нейронные алгоритмы решения задач.

Необходимо отметить также, что, с нашей точки зрения, наиболее перспективными в настоящее время являются вычислительные системы типов 9,11,12.

В ЭВМ типа 11 частично устраняются недостатки, связанные со свойством 1, а в ЭВМ типа 12 также и недостатки, связанные со свойством 2.

## **8. Об элементной базе нейронных ЭВМ**

Этот вопрос определяет в основном какие нейронные ЭВМ будут созданы в ближайшем будущем. Наряду с новыми, собственными только нейронным ЭВМ, технологиями создания элементной базы должны развиваться классические направления, но с ориентацией на нейронные структуры. Предложения по развитию перспективной элементной базы нейронных ЭВМ формируются исходя из широкого круга задач. В будущем более детальная проработка эффективности решения задач с применением той или иной технологии позволит более четко рассматривать приоритеты и выбрать первоочередные варианты реализации элементной базы нейронных ЭВМ.

*К элементной базе первой очереди для нейронных ЭВМ можно отнести:*

– Транспьютероподобный заказной 32-разрядный микропроцессор, разработка которого позволит сохранить в будущих системах опыт технических разработок транспьютерных и транспьютероподобных систем, а также задел в области их программного обеспечения.

– Каскадируемые сигнальные процессоры типа IMS A100, IMS A110.

– Комплекты СБИС и микросборок памяти с высокими быстродействием и разрядностью выборки.

– Программируемые логические интегральные схемы для реализации элементов нейронной обработки.

*К элементной базе второй очереди для нейронных ЭВМ можно отнести:*

– Заказные цифровые КМОП нейрочипы.

- Оптоэлектронный арсенид-галлиевый нейрочип.
- Аналоговые КМОП нейрочипы.

*К элементной базе третьей очереди для нейронных ЭВМ можно отнести:*

- Систему нейрообразований на пластине.
- Нейроблоки на базе молекулярной электроники.
- Квантовые нейрокомпьютеры.

Большинство разработок новых перспективных средств обработки информации в России и за рубежом связывают непременно с уменьшением технологических норм и увеличением степени интеграции элементов на кристалле. Идеология нейронных ЭВМ позволяет, с одной стороны, добиться увеличения отношения производительности к стоимости на задачах на базе существующих технологических норм, с другой стороны, использовать для создания высокопроизводительных систем принципиально новые технологии (аналоговую, оптическую, ПЗС и т.д.) наряду со стандартной цифровой. Это, на наш взгляд, позволит в значительной степени обойти трудности, связанные со стремлением уменьшить технологические нормы при изготовлении цифровых СВИС.

Роль технологий микроэлектроники в развитии архитектуры ЭВМ является очевидной. Более того, с нашей точки зрения именно развитие технологии порождает новые архитектуры вычислительных машин. Так было в середине 70-х годов, когда появление СИС породило ЭВМ с архитектурой SIMD, и в начале 80-х годов, когда развитие БИС породило транспьютер и ЭВМ с архитектурой MIMD.

Именно развитие технологии микроэлектроники сделало реальным активное развитие тематики нейрокомпьютеров во второй половине 80-х годов. Подобно тому как транспьютер объективно мог появиться только тогда, когда реальным технологически стало изготовить в одном кристалле 32-разрядный микропроцессор, внутрикристалльную память и каналные адаптеры, нейрокомпьютеры стали активно развиваться после того, как в одном кристалле стала возможным аппаратная реализация каскадируемого фрагмента нейронной сети с настраиваемыми или фиксированными коэффициентами.

Важно отметить, что в случае нейронной технологии представления алгоритмов решения задач отсутствует то пато-

логическое, с нашей точки зрения, стремление к «гонке» в сторону субмикронной технологии, характерное для вычислительных систем на базе i860, Power PC, Альфа, Mersed и подобных процессоров. Это стремление к «гонке» в сторону субмикронных технологий:

- дает кратковременный, локальный, зачастую призрачный результат в развитии отечественной вычислительной техники на базе импортных микропроцессоров;
- практически ничего не дает развитию отечественной микроэлектроники, являющейся основой будущей отечественной вычислительной техники.

Разработки нейрокомпьютеров будут эффективны даже при использовании имеющейся в России технологии 1,0 микрона по критерию отношения производительности к стоимости и позволят эффективно и приоритетно развивать отечественную сверхвысокопроизводительную вычислительную технику.

Те, кто развивают линию высокопараллельных систем с увеличением производительности узла, должны помнить о том, что скорость распространения информации в мозге человека чрезвычайно низка и думать нужно не столько о частоте работы узлового элемента, сколько о перспективных высокопараллельных алгоритмах решения задач и архитектурах, в том числе и о нейронных. Нужно помнить также о том, что человечество подошло к тому рубежу, когда возможно изготовление технической системы из 3–4 миллиардов нейронов (столько их в мозге человека), однако неизвестно как их соединить.

Разработка нейрочипов является кардинальным направлением развития разработок нейрокомпьютеров. Структура нейрочипов следует из результатов разработки структур и алгоритмов настройки многослойных нейронных сетей (для нейрокомпьютеров общего пользования) и из нейросетевых алгоритмов решения задач (для проблемно-ориентированных и специализированных нейрокомпьютеров).

Однако становление этой тематики потребует некоторого времени, в течение которого для некоторых объектов будет экономически выгодной эффективная эмуляция нейросетевых алгоритмов решения задач на высокопроизводительных ЭВМ.

Причем необходимо отметить неэффективность однопроцессорных ЭВМ типа рабочих станций для решения сложных задач в нейросетевом логическом базисе с точки зрения отношения производительности к стоимости.

Кроме этого необходимо отметить, что для эмуляции нейросетевых алгоритмов с использованием универсальных микропроцессорных средств эффективнее создать архитектуры, ориентированные на выполнение нейросетевых операций, чем использовать стандартные, ориентированные на модификацию однопроцессорных алгоритмов решения задач.

Из всех направлений вычислительной техники, перечисленных ниже, по нашему мнению, приоритет российской вычислительной науки и техники может быть отдан направлению нейрокомпьютеров.

- однопроцессорные ЭВМ (персональные ЭВМ, ЭВМ среднего класса и т.п.);
- микропроцессорные ЭВМ;
- многопроцессорные ЭВМ (ЭВМ с массовым параллелизмом, транспьютерная ЭВМ, псевдотранспьютерные ЭВМ, ЭВМ с транспьютерным ядром и периферийными процессорами типа i860, Альфа, Power PC и т.д.);
- нейрокомпьютеры.

На современном этапе развития технологии микроэлектроники и других смежных областей нейронная технология стала адекватна не только различным типам микроэлектронной полупроводниковой технологии, но и оптической и оптоэлектронной технологии, молекулярной, квантовой технологии и некоторым другим.

Необходимо отметить, что рождение технологии систем на пластине и нанотехнологии аналогично предыдущим этапам приведет к рождению новых сверхпараллельных архитектур. Уже сейчас ясна адекватность нейросетевых архитектур технологии на пластине (американская и японская разработки). Поэтому попытки на уровне наноэлементов делать функциональные блоки со старой архитектурой адекватной однопроцессорным машинам, можно считать ту-

пиковыми. Начиная с нанонейроэлементов мы придем, возможно, к другим принципиально новым архитектурным элементам. Ясно только, что это будут элементы сверхпараллельных высокопроизводительных вычислительных средств.

На наш взгляд, изучение реальной структуры биологических нейронных сетей с целью выявления особенностей их построения для использования в перспективных нейронных ЭВМ практически бессмысленно без наличия высокоавтоматизированных программных средств обработки цитологических изображений со специализированными программными средствами, позволяющими не только быстро и качественно вводить реальные изображения срезов нейронных тканей, но и оперативную обработку их изображений.

В настоящее время разработчики нейрокомпьютеров не чувствуют реальных ограничений конкретных используемых нейронных структур вследствие их относительной простоты или простоты решаемых задач. Увеличение требований к сложности используемых нейронных структур потребует развития нейрофизиологического направления их исследований, и в первую очередь это произойдет для различного рода сенсорных применений, связанных с обработкой зрительной и слуховой информации.

Каждая новая технология рождает новый класс архитектур вычислительных средств. Так было с архитектурой ОКМД в конце 70-х - начале 80-х годов, с архитектурой МКМД в начале - середине 80-х годов. Сейчас это происходит с нейрокомпьютерами в современном их представлении инженерами.

Проведение весьма важных для будущих нейрокомпьютеров работ по изучению структуры реальных нейронных сетей и по молекулярным ЭВМ в каждой из этих областей приведет к появлению своеобразных архитектурных прототипов, потому что технологические принципы реализации и эволюции появления реальных, биологических нейронных сетей и молекулярных принципов реализации отличаются от применяемых в настоящее время при реализации нейронных ЭВМ на СБИС и оптических принципах.

## 9. Нейроматематика. Методы и алгоритмы решения задач на нейрокомпьютерах

Всегда стоит вопрос: для какого класса задач наиболее эффективно применение того или иного вычислительного устройства, построенного по новым признакам. По отношению к нейрокомпьютерам мнение по этому вопросу постоянно развивается. Длительное время считалось, что нейрокомпьютеры эффективны для решения так называемых неформализуемых и плохо формализуемых задач, связанных с необходимостью включения в алгоритм решения задач процесса обучения на реальном экспериментальном материале.

В настоящее время к этому классу задач добавляется второй класс задач, не требующий обучения на экспериментальном материале, но хорошо представимый в нейросетевом логическом базисе. К ним относятся в первую очередь задачи с ярко выраженным естественным параллелизмом:

- обработка сигналов;
- обработка изображений и др.

Эффективным будет также применение нейросетевых алгоритмов в задачах, где пространство входной информации, входных данных в пространстве аргументов может быть эффективно сформировано не аналитическим путем, а методом Монте-Карло.

С нашей точки зрения *любые задачи* должны более эффективно решаться на нейрокомпьютерах, так как в принципе алгоритм любой задачи может быть представлен в нейросетевом логическом базисе с контролируемым числом слоев нейронов [В-9]. Это означает, что нейросетевой алгоритм решения любой задачи на логическом уровне более параллелен, чем любая мыслимая физическая его реализация. Отметим, что в случае транспьютерных и псевдотранспьютерных систем исходный менее параллельный, чем физическая реализация, алгоритм решения задачи приспособливается более параллельной физической реализации. Это в принципе отличает нейрокомпьютеры от таких систем, как транспьютерные или системы с транспьютерным ядром и периферийными процессорами типа i860, Альфа, Power PC подобными, в которых разработчики прикладного программного обеспечения как правило модифицируют алгоритмы

решения задач на однопроцессорных ЭВМ, стремясь минимизировать потери на обмен информацией между процессорами в процессе решения задачи.

Подтверждением той точки зрения, что нейрокомпьютеры будут более эффективными, чем прочие архитектуры, может, в частности, служить резкое расширение в последние годы класса задач, решаемых в нейросетевом логическом базисе. К ним, кроме перечисленных выше, можно отнести:

- решение линейных и нелинейных задач алгебраических уравнений большой размерности;
- решение систем нелинейных дифференциальных уравнений;
- решение уравнений в частных производных;
- экспертные системы;
- решение задач оптимизации (линейное и нелинейное программирование) и другие задачи.

Для этих задач, как правило, переход к нейросетевому логическому базису характерен для случаев резкого увеличения размерности пространства решения или необходимости резкого уменьшения времени решения.

В целом формируется два раздела нейроматематики: общая нейроматематика и прикладная нейроматематика.

Нейроматематика – это раздел вычислительной математики, связанный с решением задач с помощью алгоритмов, представимых в нейросетевом логическом базисе. Целью создания нейроматематики является создание алгоритмов с высокой степенью параллельности как для формализуемых, так и для трудноформализуемых и неформализуемых задач.

Критерием эффективности нейронных алгоритмов будет ускорение решения задач по сравнению с традиционными методами. Сравнение алгоритмов по эффективности для различных способов реализации нейрокомпьютеров является предметом самостоятельного рассмотрения и отдельной работы.

*Нейронным алгоритмом* будем называть вычислительную процедуру, основная часть которой может быть реализована на нейронной сети. Пусть имеется  $P$  – формальная постановка задачи.  $P$  включает множество исходных данных  $D$  и множество объектов, подлежащих определению  $R$ . Основой раз-

работки нейронного алгоритма решения задачи является системный подход, при котором процесс решения задачи представляется как функционирование во времени некоторой динамической системы, на вход которой подается множество  $D$ , а на выходе снимается множество  $R$  (объекты, подлежащие определению и получившие свои значения).

Для построения нейросетевой динамической системы, решающей задачу, необходимо:

1. Определить объект, выступающий в роли входного сигнала нейросети. Это может быть элемент исходных данных, начальное значение определяемых величин и т.д.

2. Определить объект, выступающий в роли выходного сигнала нейросети. Это может быть само решение или некоторая его характеристика.

3. Определить желаемый (требуемый) выходной сигнал нейросети.

4. Определить структуру нейросети:

- а) число слоев;
- б) связи между слоями;
- в) объекты, являющиеся весовыми коэффициентами.

5. Определить функцию ошибки системы, т. е. функцию, характеризующую отклонение желаемого выходного сигнала нейросети от реального выходного сигнала.

6. Определить критерий качества системы и функционал ее оптимизации, зависящий от ошибки.

7. Определить значения весовых коэффициентов – в зависимости от задачи это можно сделать различными способами:

- а) аналитически, непосредственно из постановки задачи;
- б) с помощью некоторых численных методов;
- в) применив процедуру настройки коэффициентов нейронной сети.

Решение задачи с помощью нейронного алгоритма заключается в применении (функционировании в некотором режиме) построенной вычислительной процедуры с конкретными значениями числовых данных. Процесс решения включает:

- 1) получение конкретной структуры нейросети, соответствующей применяемому алгоритму;
- 2) нахождение значений весовых коэффициентов, либо выбор их из памяти если они были найдены ранее;

3) генерацию начальных приближений параметров, если это необходимо;

4) передачу всех численных значений в нейросеть и ее запуск;

5) функционирование сети в соответствии с режимом:

- а) за один шаг или фиксированное число шагов;
- б) за переменное число шагов, зависящее от требуемой точности и/или конкретных числовых значений параметров. В этом случае, происходит процесс настройки входного сигнала;
- б) получение решения.

При многократном использовании п.1) и 2) могут быть выполнены однократно.

Таким образом, *нейрокомпьютером* будем называть вычислительную систему с архитектурой, обеспечивающей процесс функционирования в соответствии с шагами 1-6, приведенными выше.

Нейроматематика является новым разделом вычислительной математики, ориентированным на создание алгоритмов решения широкого класса задач на нейрокомпьютерах. Предлагаемый подход к построению алгоритмов использует как широко известные численные методы, так и уже накопленные знания в области нейронных вычислений. Однако он имеет серьезные отличия и от первых, и от вторых.

Традиционные численные методы используются в нейроматематике только в том случае, если их удастся эффективно распараллелить и выразить через нейросетевые операции, при этом они могут быть существенно переработаны.

Практически все известные подходы к проектированию нейронных сетей связаны в основном с выбором и анализом некоторых частных видов структур с известными свойствами (сети Хопфилда, Гроссберга, Кохонена) и некоторых режимов их работы. Использование нейросетей сводится к применению этих структур для решения классов адекватных им задач, при изменении или выборе параметров структур.

В нейроматематике исходной точкой является формулировка задачи. По ней из широкого класса выбирается структура нейронной сети, адекватная поставленной задаче. Если требуется настройка, то используются свойства того класса структур сетей, к которому принадлежит полученная структура.

При этом при рассмотрении множества задач класс структур нейронных сетей выбирается достаточно общим (многослойные сети с последовательными, перекрестными и обратными связями).

Нейрокомпьютер, как правило, должен ориентироваться на быстрое выполнение всех нейросетевых операций, а также параллельных алгоритмов настройки нейронных сетей.

Разработка нейрокомпьютера включает в себя три параллельных направления:

- 1) разработку алгоритмов решения задач на нейрокомпьютерах (нейроматематику);
- 2) развитие теории нейронных сетей – классов структур методов их настройки;
- 3) разработку нейрокомпьютера, как совокупности технических средств и системного программного обеспечения, ориентированного на решение задач нейроматематики.

Эти три уровня работ находятся между собой во взаимосвязи. С одной стороны, структура нейронной сети для каждой задачи определяется самой задачей, с другой – развитие теории нейронных сетей побуждает применять для решения задачи все более сложные структуры нейронных сетей. С одной стороны, уровень совершенства технических устройств определяет диапазон возможностей для построения сетей и алгоритмов, с другой – развитие нейроматематики подталкивает теорию сетей, а та, в свою очередь, направляет развитие технического исполнения.

В настоящее время направление исследования нейронных сетей связано с направлением разработки нейрокомпьютеров, пожалуй, лишь программными средствами реализации конкретных задач и связанных с ними структур. В будущем и программная, и аппаратная часть нейрокомпьютера будут в значительной степени определяться решаемыми задачами и структурами реализуемых нейронных сетей.

Решение задачи на нейронной ЭВМ связано с процедурой настройки, требующей выбора начальных значений параметров, величин шага итерационных методов и т.п.

Так как не все подобные процессы выбора формализуемы и во многом зависят от области применения задачи, то все они, как правило, происходят с участием человека.

Отметим, что при решении задачи на нейрокомпьютере имеет место диалог двух видов:

1. *Диалог в процессе подготовки нейрокомпьютера к решению конкретной задачи с заранее известными ограничениями на исходные данные и результаты.* Основную часть его составляет диалог, сопровождающий настройку весовых коэффициентов. После настройки, при сохранении параметров задачи и сети, задачу можно решать многократно с различными исходными данными. Если настройки весовых коэффициентов нейросети нет, то этот тип диалога сокращается до выбора из памяти необходимых значений.

2. *Диалог в процессе решения.* Он предполагает генерацию начальных значений параметров, однако наиболее трудоемкую его часть составляет диалог в процессе настройки входного сигнала, при котором расчетчик может анализировать динамику изменения функционала качества системы и выбирать величины шага в методе настройки.

Такой диалог находится на критическом пути в решении. Поэтому для задач, где минимизация времени выполнения является важнейшим критерием эффективности нейронных алгоритмов, этот вид диалога должен быть минимизирован (путем его сокращения или автоматизации) либо исключен (например, путем полной автоматизации выбора шага, может быть ценой усложнения алгоритма). Если этого сделать не удастся, следует попытаться построить алгоритм без настройки входного сигнала, используя настройку весовых коэффициентов.

## 10.0 нейронных сетях

Нейронная сеть представляет собой высокопараллельную динамическую систему с топологией направленного графа, которая может получать выходную информацию посредством реакции ее состояния на входные воздействия. Узлами в нейронной сети называются процессорные элементы и направленные каналы.

Нейронные сети по сути дела являются формальным аппаратом описания основной части алгоритма решения задачи на нейронных ЭВМ. Основой данной книги, как и книги [В-6], является системный подход к синтезу нейронных сетей, т.е. подход к построению самих нейронных сетей и их

алгоритмов адаптации, аналогичный классическим адаптивным системам управления.

Возможны, с нашей точки зрения, четыре подхода к исследованию нейронных сетей:

1. *Психологический подход*, когда нужно смоделировать некую психологическую парадигму, для чего строится и исследуется нейронная сеть некоторой структуры.

2. *Нейрофизиологический подход*, когда, исходя из знаний о структуре некоторого раздела мозга, строится и исследуется нейронная сеть, моделирующая функции данного раздела мозга.

3. *Алгоритмический подход*, когда ставится математическая задача и, исходя из этой постановки, строятся адекватная нейронная сеть и ее алгоритм настройки для решения этой задачи.

4. *Системный подход*, объединяющий вышеизложенные и являющийся основой данной книги. На рис. В-6 представлена общая структура синтеза нейронных сетей, которая является основным предметом изложения в данной книге.

### 10.1. Структуры нейронных сетей

В 40-, 50- и 60-е годы теория автоматов из булевских элементов была основой построения архитектуры и отдельных блоков однопроцессорных ЭВМ. Та же теория автоматов из булевских элементов продолжает быть логической основой малопроцессорных, транспьютерных и подобных им ЭВМ, а также ЭВМ с архитектурой SIMD, где периферийным процессором является сеть однобитовых процессоров (STARAN и др.).

Подобно этому теория нейронных сетей является логической основой нейрокомпьютеров, причем не только на сегодняшний день. Это было в 50-, 60- и 70-е годы. Сейчас этот факт стал более очевидным вследствие революционного развития тематики нейрокомпьютеров.

Нейронная сеть – это сеть с конечным числом слоев и одиночных элементов – аналогов нейронов с различными типами связей между слоями нейронов. При этом количество нейронов в слоях выбирается необходимым для обеспечения заданного качества решения задачи, а число слоев нейронов как можно меньшим для уменьшения времени решения задачи.

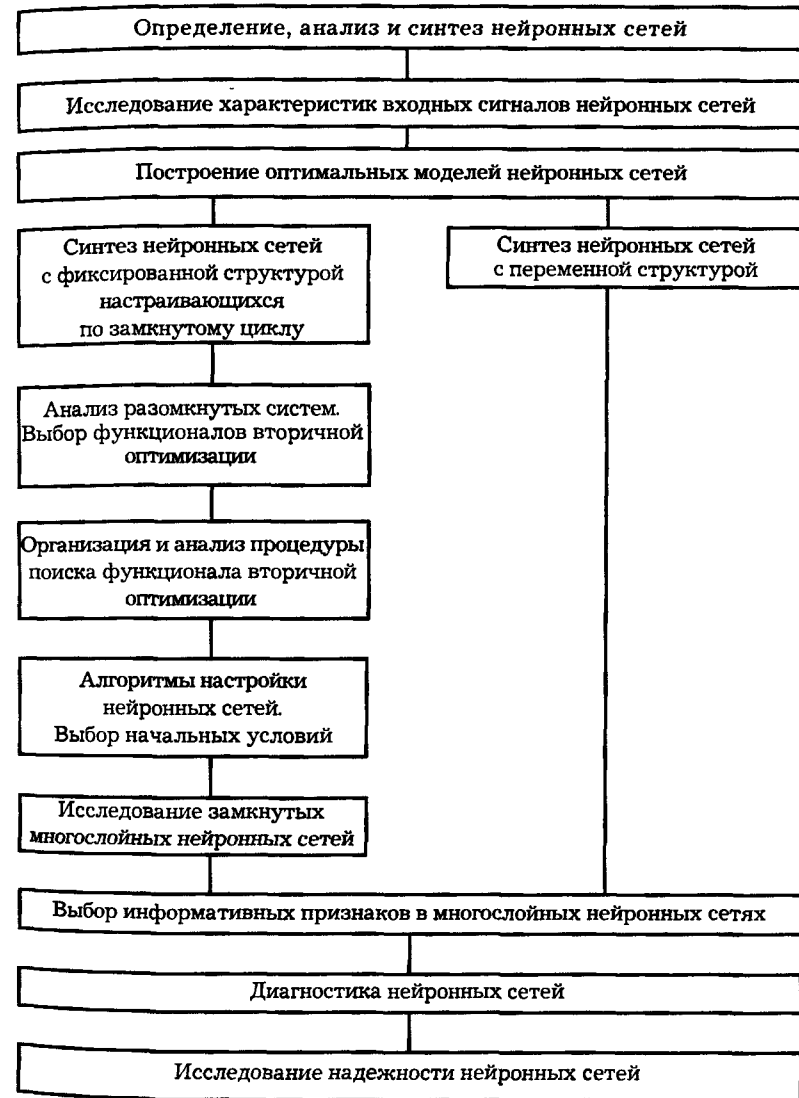


Рис. В-6. Системный подход к синтезу многослойных нейронных сетей

Книга посвящена описанию нейронных сетей различной структуры. Приводятся объективные предпосылки перехода от булевского к пороговому базису в вычислительной



технике. Описываются основные типы пороговых элементов – аналогов нейронов. Анализируются причины рассмотрения многослойных нейронных сетей, интерес к которым начал проявляться еще в 60-е годы с появлением классической работы Ф. Розенблатта [В-1]. Многослойность понимается как особое свойство структуры преобразования, осуществляемого разомкнутой системой при топологическом, а не символическом его представлении.

Ф. Розенблаттом [В-1] были рассмотрены многослойные системы, где элементы в каждом слое находятся в равноправном топологическом отношении к элементам других слоев. Слои образуют сенсорные элементы, являющиеся источником сигналов для ассоциативных элементов трехслойного перцептрона. Ассоциативные элементы также образуют слой элементов, входом которых являются выходные сигналы сенсорных элементов следующего слоя. Многослойной системой называется система элементов с объединением их в отдельные слои с топологически равными свойствами и различным характером связей между слоями элементов. Рассматриваются различные типы многослойных нейронных сетей, т.е. нейронных сетей с последовательными, перекрестными, обратными связями, континуальные нейронные сети. Приводятся примеры многослойных нейронных сетей, предложенных отдельными авторами.

Основными преимуществами нейронных сетей, как логического базиса алгоритмов решения сложных задач, являются следующие:

- инвариантность методов синтеза нейронных сетей от размерности пространства признаков;
- адекватность современным перспективным технологиям;
- отказоустойчивость в смысле монотонного, а не катастрофического изменения качества решения задачи в зависимости от числа вышедших из строя элементов.

Основной целью данного раздела книги является выяснить почему система для решения определенной задачи должна строиться именно как нейронная сеть, как выбрать топологию этой сети (число слоев, число элементов в слое, характер связей, характер структуры).

## 10.2. Исследование характеристик входного сигнала нейронных сетей

В гл.1 работы [В-6] при исследовании характеристик входного сигнала нейронных сетей для весьма распространенной задачи распознавания образов вводится характеристика квалификации учителя, позволяющая получить выражение для функций распределения входного сигнала, включающих в себя как частный случай известные режимы обучения и самообучения. В общем случае квалификация учителя вводится различной для образов, принадлежащих объективно различным классам. Показывается возможность введения более тонких характеристик входного сигнала, например «собственного мнения учителя о своих способностях».

Формальная постановка задачи обучения нейронных сетей заключается в аппроксимации заданной выборочно функции указаний учителя некоторым автоматом, свойства которого заданы. Формальная постановка задачи самообучения рассматривается как выделение в пространстве входного сигнала областей мод функции распределения совокупности образов на входе. Формальная постановка обучения нейронных сетей учителем, имеющим конечную квалификацию, в некотором смысле обобщает эти постановки.

Существующие разработки в области распознавания образов в основном относятся к стационарным образам, когда распределение входного сигнала нейронных сетей не зависит от времени. В данной книге рассматриваются нестационарные образы, когда распределение входного сигнала нейронных сетей зависит от времени.

## 10.3. О выборе критериев первичной оптимизации нейронных сетей

В качестве критериев первичной оптимизации многослойных нейронных сетей в режиме обучения распознаванию образов рассматривается в основном класс критериев теории статистических решений, таких, как критерий максимума апостериорной вероятности, критерий минимума средней функции риска, критерий минимума средней функции риска при условии равенства между составляющими средней функции риска для образов различных классов, критерий минимума средней функции риска при условии задания зна-

чения составляющей средней функции риска для одного из классов.

В режиме самообучения предпосылкой формирования критерия и функционала первичной оптимизации нейронных сетей служит представление плотности распределения входного сигнала в виде многомодальной функции, где каждой моде с некоторой вероятностью соответствует класс. В качестве критериев первичной оптимизации нейронных сетей в режиме самообучения на первом этапе исследований используются модификации средней функции риска. Данный критерий потребовал естественного обобщения при переходе к континууму классов и решений. Отдельным вопросом, рассматриваемым в книге, является вопрос формирования функционала первичной оптимизации в случае произвольной квалификации учителя.

#### *10.4. Анализ разомкнутых нейронных сетей*

Формальным аппаратом, используемым при анализе разомкнутых систем, является аппарат, основанный на точных методах вероятностного анализа многомерных нелинейных систем. Переход в основном к анализу распределений и моментов распределений ошибок обуславливается тем, что результаты данного анализа формально не зависят от сложности и вида нейронных сетей, за исключением характеристик пространства признаков и пространства решений. Этот существенный момент в дальнейшем широко используется на этапах выбора или формирования функционала вторичной оптимизации, а также построения замкнутых нейронных сетей.

Под функционалом вторичной оптимизации понимается функционал, выражаемый через параметры распределения текущих сигналов в нейронных сетях и непосредственно минимизируемый в многослойных системах при настройке разомкнутого цикла. На данном этапе синтеза рассматриваются в основном два вопроса.

Первый вопрос связан с исследованием соответствия используемых в известных работах функционалов вторичной оптимизации некоторым критериям первичной оптимизации. Предметом рассмотрения здесь являются известные адаптивные системы, такие, как Адалин, матрица Штайнбуха, трехслойный перцептрон Розенблатта (вернее, его настраиваемый выходной блок). В качестве основного недостатка таких

подходов отмечается, что в большинстве случаев не рассматривается соответствие выбираемых функционалов вторичной оптимизации конкретным критериям первичной оптимизации. Это приводит к практическому отсутствию работоспособности некоторых систем при многомодальных распределениях входного сигнала.

Вторым, основным на данном этапе синтеза вопросом, является формирование функционала вторичной оптимизации, соответствующего заданному критерию первичной оптимизации. Соответствие здесь понимается в смысле совпадения параметров нейронной сети при обеспечении минимума функционалов первичной и вторичной оптимизации. В книге изложена общая методика формирования функционала вторичной оптимизации, соответствующего заданному критерию первичной оптимизации. Приведены результаты применения данной методики для многослойных нейронных сетей различной структуры и критериев первичной оптимизации.

#### *10.5. Алгоритмы поиска экстремума функций многих переменных и построение алгоритмов адаптации в нейронных сетях*

В главах 6, 7 работы [В-6] рассмотрены алгоритмы поиска экстремума функций многих переменных и их применение для построения алгоритмов адаптации в нейронных сетях.

Вопросу организации процедуры поиска экстремума функционала вторичной оптимизации в литературе уделяется значительное внимание. Нам в основном будут интересовать вопросы правомочности и целесообразности применения той или иной градиентной процедуры (Ньютона, релаксационной, наискорейшего пуска, стохастической аппроксимации и т.д.) поиска локального экстремума.

Применение итерационных методов при разработке алгоритмов поиска экстремума функций многих переменных имеет свои особенности при построении адаптивных систем [В-10]. Они связаны в основном с тем, что при неизвестных характеристиках входного сигнала в условиях так называемой априорной недостаточности даже при фиксированной структуре нейронных сетей ничего нельзя сказать о виде функционала вторичной оптимизации кроме того, что он имеет несколько локальных экстремумов, все или по крайней мере некото-

рые из которых должны быть найдены в процессе настройки по замкнутому циклу. Именно этот факт делает необходимым введение элементов случайности в процедуру поиска, связанных с выбором множества случайных начальных условий для некоторой градиентной процедуры. Основным вопросом исследования при этом является вероятность нахождения некоторого числа локальных экстремумов функционала вторичной оптимизации в зависимости от числа выборов случайных начальных условий градиентной процедуры поиска локального экстремума. Одна из задач, которую нужно решать на этапе построения замкнутых систем, заключается в том, чтобы оценить вектор градиентов функционала вторичной оптимизации в нейронных сетях. Это можно сделать двумя путями:

- 1) введением поисковых колебаний и детектированием;
- 2) нахождением оценки вектора градиентов в виде выражения через сигналы в нейронных сетях (выходные и промежуточные).

В первом случае имеем дело с поисковой адаптивной системой, во втором – с аналитической. Естественно, предпочтительнее построение нейронных сетей в виде аналитических систем, настраивающихся по замкнутому циклу, так как введение поисковых колебаний вводит дополнительные шумы в систему. Однако построение замкнутых нейронных сетей аналитическими средствами не всегда возможно. Ограничения аналитического подхода показаны в данной книге при рассмотрении этапа построения замкнутых нейронных сетей. Основное внимание на этапе построения замкнутых нейронных сетей уделяется реализации заданных критериев первичной оптимизации в сетях различной структуры.

Важным является вопрос построения алгоритмов настройки нейронных сетей в режимах самообучения и произвольной квалификации учителя. Методология построения замкнутых систем здесь та же, что и в режиме обучения. В этом заключается принцип единого подхода к обучению и самообучению, лежащий в основе методики синтеза многослойных нейронных сетей, излагаемой в [В-6] и данной книге.

В [В-6] представлен анализ известных эвристических алгоритмов настройки нейронных сетей с позиций единого подхода к синтезу алгоритмов адаптации в нейронных сетях. Отдельно

изложен материал, посвященный алгоритмам адаптации в континуальных нейронных сетях и выбору из них алгоритмов адаптации, адекватных физической реализуемости.

Рассматриваются особенности выбора начальных условий в алгоритмах адаптации нейронных сетей.

#### 10.6. Исследование алгоритмов адаптации в нейронных сетях

Исследование замкнутых нейронных сетей является заключительным для многослойных нейронных сетей с фиксированной структурой, настраивающихся по замкнутому циклу. На данном этапе синтеза решается ряд вопросов, связанных с оценкой качества работы разомкнутых многослойных нейронных сетей. Первым таким вопросом является выбор начальных условий для настройки коэффициентов многослойных сетей. Выше было отмечено свойство многоэкстремальности функционала вторичной оптимизации. Ввиду этого рассматриваются два способа выбора начальных условий: случайный, когда нужно найти все локальные и глобальные экстремумы, и детерминированный, когда многослойная нейронная сеть вводится в область глобального экстремума функционала вторичной оптимизации. Вторым вопросом является выбор класса типовых входных сигналов многослойных нейронных сетей, достаточно полного для того, чтобы при данных сигналах можно было в дальнейшем исследовать и сравнивать их качество работы. Для систем автоматического управления подобная задача решена, в частности, выбором в качестве типовых сигналов класса полиномиальных сигналов, где сложность входного сигнала определяется порядком полинома. В случае многослойных нейронных сетей ввиду специфики данных систем сложность входного сигнала определяется, в частности, модальностью условных распределений входных сигналов для задач распознавания образов. Третьим вопросом является выбор оптимальных параметров контура настройки многослойных нейронных сетей, в частности параметрической матрицы системы поиска экстремума функционала вторичной оптимизации. Особое внимание здесь уделяется вопросу выбора оптимальных параметров контура настройки нейронных сетей по оценке текущего значения функционала первичной оптимизации. В [В-1, В-6] приводятся результаты исследова-

ния большого числа многослойных нейронных сетей, полученные моделированием на ЭВМ.

В целом по данному этапу синтеза многослойных нейронных сетей необходимо отметить следующее. Рассмотрение класса неформальных задач, в частности задач распознавания образов при неизвестных, достаточно сложных функциях условных плотностей распределения, создает определенные трудности не только при построении самих систем, способных решать подобные задачи, но и при попытке теоретически оценить качество решения данных задач. Поэтому в основном приходится прибегать к методам, связанным со статистическим моделированием. Приведены результаты статистического моделирования для отдельных нейронов при многомодальном распределении входных сигналов, исследование динамики настройки трехслойных нейронных сетей с последовательными связями, исследование динамики настройки многослойных нейронных сетей при нестационарных входных сигналах, а также в режиме самообучения и в режиме обучения с учителем, имеющим конечную квалификацию.

Конкретная нейронная сеть, как массив процессоров, связанных между собой специфической сетью связи с обратными связями, реализующими алгоритмы адаптации, является динамической системой, поведение которой в процессе решения задачи описывается некоторой системой дифференциальных или разностных уравнений [В-8, В-11]. Представление нейронных сетей с замкнутым контуром адаптации линейной последовательностной машиной позволяет описать ее поведение в терминах классического  $z$ -преобразования и применить к анализу поведения нейронных сетей в процессе решения задачи не только известные методы анализа поведения автоматов, как линейных последовательностных машин, но и классические методы статистической динамики непрерывных и дискретных систем автоматического управления. Необходимо отметить, что это практически единственный эффективный путь количественного анализа динамики поведения массива процессоров в процессе решения задачи, и этот путь обеспечивает именно концепция нейронных ЭВМ. Этот путь открывает в будущем возможность анализа и синтеза структур распределенных ЭВМ в виде массива процессоров в классе нейронных ЭВМ.

### *10.7. Многослойные нейронные сети с переменной структурой*

Выше было отмечено, что многослойные нейронные сети с фиксированной структурой, настраивающиеся по замкнутому циклу, обеспечивают оптимум функционала оптимизации при условных плотностях распределения вероятностей входного сигнала произвольного, не заданного заранее вида. Однако потенциальное качество таких нейронных сетей ограничено априорной информацией о структуре разомкнутой системы. В гл.9 книги [В-6] и в данной книге рассматриваются методы синтеза нейронных сетей, структура разомкнутой части которых априори не фиксируется и является результатом настройки наряду со значениями настраиваемых коэффициентов. При этом в процессе настройки выбираются число слоев и число нейронов в слое. В данной книге рассматриваются некоторые варианты построения нейронных сетей с переменной структурой, особенности исследования динамики процесса настройки на уровне исследования зависимости значения функционала оптимизации от числа нейронов в слоях и числа слоев. В конечном итоге нейронная сеть с переменной структурой реализуется в виде однородной многослойной нейронной сети.

### *10.8. Выбор информативных признаков в многослойных нейронных сетях*

Еще в работе [В-6] была сделана попытка с единой точки зрения взглянуть на разрозненные достаточно многочисленные работы по вопросу выбора информативных признаков и дать начало так называемым структурным методам, имеющим объективной предпосылкой своего рассмотрения методы синтеза многослойных нейронных сетей.

Необходимо отметить, что зачастую бытующее представление о возможности так называемого предварительного выбора признаков, по мнению автора, является неверным, так как при любой процедуре выбора признаков косвенно или прямо должна быть использована конкретная нейронная сеть. Именно поэтому с этой точки зрения всякая процедура выбора признаков является субъективной, где субъектом является нейронная сеть конкретного типа.

Второй тезис, выдвигаемый автором для утверждения предлагаемого подхода, заключается в «абсолютности» фун-

ционала первичной оптимизации как показателя информативности признаков. Именно поэтому оценки, связанные дивергенцией, средней условной энтропией и т.п., являются приближенными и частными.

Вышесказанное делает необходимым рассмотрение вопроса выбора информативных признаков после окончания процедуры синтеза и исследования динамики нейронных сетей. По мнению автора, многослойные нейронные сети с фиксированной и переменной структурой обладают наименьшей степенью субъективизма по отношению к входному сигналу (предмету исследования с помощью нейронных сетей), так как синтезируются, в частности для задач распознавания образов, исходя из условия отсутствия информации об условных плотностях распределения образов внутри классов. Именно поэтому в основном рассматривается применение многослойных нейронных сетей для выбора наиболее информативных признаков исходного пространства признаков.

Применение и исследование многослойных нейронных сетей позволяет поставить задачу выбора наиболее информативных признаков не исходного, а промежуточных пространств формируемых выходными сигналами нейронов первого, второго и т.д. выходного слоев нейронных сетей. Данная задача может трактоваться как задача минимизации структуры (числа нейронов в каждом слое) многослойной нейронной сети после окончания настройки ее коэффициентов.

#### *10.9. Исследование надежности нейронных сетей*

Проблема исследования надежности нейронных сетей находится еще в самом начале своего развития. Ее решение наверняка окажет революционное воздействие на реализацию нейрокомпьютеров на принципиально новых технологиях, в частности на системах на пластине. Еще в трехслойном персептроне Ф. Розенблатта [В-1] отмечалось свойство структуры персептрона сохранять работоспособность при выходе из строя определенного количества элементов (нейронов). При отсутствии явного резервирования это свойство неприсуще современным вычислительным машинам. Это не касается, пожалуй, лишь вычислительных машин с архитектурой МКМД (много потоков команд – много потоков данных), где асинхронный принцип функционирования массива процессо-

ров обеспечивает так называемую постепенную деградацию системы при выходе из строя отдельных элементов. Подобное свойство существует и в нейронных ЭВМ, что является их большим преимуществом. Ниже изложены методы исследования функциональной надежности нейронных сетей, в частности методы исследования функциональной надежности экспериментальным путем, а также параметрической надежности и функциональной при наличии катастрофических отказов. Отдельно рассматриваются методы построения и исследования восстанавливающих органов в нейронных сетях.

#### *10.10. Диагностика нейронных сетей*

Структура нейронных ЭВМ является специфической в классе ЭВМ, которая строится в виде массива процессоров. Это предъявляет особые требования к процедуре диагностики по крайней мере той части нейронных ЭВМ, которая представляет сеть нейронов. Основы методов диагностики таких сетей были заложены еще в работах [В-12, В-13]. В данной книге изложены методы формирования понятия отказа в нейронных сетях, представлены алгоритмы локализации отказов в нейронных сетях, методы построения минимальных тестов, а также методы адаптивной диагностики отказов в нейронных сетях. Изложенные методы в принципе могут быть основой разработки разделов операционных систем нейрокомпьютеров, связанных с их тестированием.

#### **Выводы**

В результате работ 60-, 70- и 80-х годов в России сформировалось направление работ в области теории нейронных сетей, обладающее приоритетом по отношению к зарубежным работам.

Разработаны методы адаптивной настройки нейронных сетей:

- с произвольным видом нейрона;
- с произвольным числом слоев;
- с различными видами связей между слоями (прямые, перекрестные, обратные);
- с различными видами критериев оптимизации;
- с различными ограничениями на весовые коэффициенты нейронных сетей.

Исходной позицией автора в данной книге является использование нейронных сетей некоторой заданной структуры, интересной какому-либо автору с точки зрения известных ему задач (стандартные нейросетевые парадигмы), определение структуры нейронной сети и метода ее настройки, адекватных выбранной для решения задачи.

Материал книги является изложением результатов очередного этапа работ автора в области нейронных сетей. Основным направлением перспективных работ в этой области является развитие теории нейронных сетей, структура и алгоритмы адаптации которых адекватны наиболее актуальным задачам.

В целом нейрокомпьютеры являются перспективным направлением развития современной сверхвысокопроизводительной вычислительной техники. Теория нейронных сетей и нейроматематика являются приоритетными направлениями развития российской вычислительной науки, которые требуют поддержки. Основой развития этих направлений могут быть только прикладные вычислительные системы на базе нейрокомпьютеров, создание которых необходимо инициировать в ближайшем будущем.

Разработки трех направлений: нейросетевых алгоритмов решения задач, теории нейронных сетей и нейрокомпьютеров находятся в тесной взаимосвязи:

- с одной стороны структура нейронной сети для каждой задачи определяется самой задачей, с другой - развитие теории нейронных сетей побуждает применять для решения задач более сложные структуры нейронных сетей;

- с одной стороны, уровень совершенства технических устройств определяет диапазон возможностей для построения нейронных сетей и нейросетевых алгоритмов, с другой - развитие нейроматематики подталкивает теорию сетей, а та в свою очередь направляет развитие технического исполнения;

- в настоящее время направление исследования нейронных сетей связано с направлением разработки нейрокомпьютеров пожалуй лишь программными средствами реализации конкретных задач и связанных с ними структур. В будущем программная и аппаратная части нейрокомпьютера будут в значительной степени определяться решаемыми задачами структурами реализуемых нейронных сетей.

Нейрокомпьютеры являются эффективным симбиозом вычислительной науки, теории адаптивных систем автоматического управления и нейродинамики.

В Приложении к данному разделу представлен список дополнительной отечественной литературы по нейрокомпьютерам.

## Литература

- В-1. F. Rosenblatt. Principles of neurodynamics. Spartan Books, Washington, 1962. Русский перевод: Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. -М., Мир, 1964.
- В-2. Minsky M., Papert S. Perceptrons. An introduction to computational geometry, MIT Press, 1969. Русский перевод: Минский М., Папперт С. Перцептроны. -М., Мир, 1971.
- В-3. Nilsson N.J. Learning Machines. McGraw-Nill Book Company, 1965. Русский перевод: Нильсон Н. Обучающиеся машины. -М., Мир, 1967.
- В-4. Grossberg S. The Adaptive Brain, T.1,2, Advances in psychology, 1987.
- В-5. M.Dertouzos. Threshold logic. A synthesis Approach. MIT Press 1965. Русский перевод: М.Дертоузо. Пороговая логика. -М., Мир, 1967.
- В-6. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. -М., Энергия, 1974.
- В-7. Ивахненко А.Г. Перцептрон - система распознавания образов. - Киев, Наукова Думка, 1975.
- В-8. Галушкин А.И., Фомин Ю.И. Нейронные сети, как линейные последовательностные машины. МАИ, 1991.
- В-9. Галушкин А.И., Судариков В.В., Шабанов Е.В. Нейроматематика: методы решения задач на нейрокомпьютерах. //Математическое моделирование, № 8, 1991.
- В-10. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. -М., Наука, 1968.
- В-11. A.Gill. Linear sequential circuits. Analysis, synthesis and applications. McGraw-Hill Book Company. Русский перевод: А.Гилл. Линейные последовательностные машины. Анализ, синтез и применение. -М., Наука, 1974.
- В-12. Фомин Ю.И., Галушкин А.И. Методы технической диагностики сетей пороговых элементов. // «Техника средств связи», Сер. «Системы связи», -№ 2, -1980.
- В-13. Фомин Ю.И., Галушкин А.И. О методе параллельной диагностики отказов в сетях пороговых элементов. //«Электронное моделирование», -№3, -1981.

## Приложение

### Теория многослойных нейронных сетей

1. Колмогоров А. Н. Представление непрерывных функций многих переменных суперпозицией функций одной переменной и сложением. // Докл. АН СССР, т.114, №5, с. 953-956.
2. Глушков В.М. Теория обучения одного класса дискретных перцептронов. // Журнал вычислительной математики и математической физики. -№2. -1962, с. 317-335.
3. Ивахненко А.Г. Может ли познающая самообучающаяся система выделить моменты преобразования на ретине лягушки? // Автоматика. -№2. -1963, с. 31-40.
4. Ивахненко А.Г., Клещев В.В., Отхмезури Г.Л., Шлезингер М.И. Фундаментальная монография по теории перцептронов. Обзор книги Ф.Розенблатта «Принципы нейродинамики». // Автоматика. -№3, -1963, с. 84-90.
5. Глушков В.М. Введение в кибернетику. -М., Наука, 1964.
6. Стаффорд Т. Многослойные обучающиеся схемы. //Зарубежная радиоэлектроника, №8, 1965, с. 58-64.
7. Гелиг А.Х. Опознающие системы с неограниченной плоской региной. // Вычислительная техника и вопросы кибернетики 1988, с. 80-94.
8. Галушкин А. И. Многослойные системы распознавания образов, М., 1970.
9. Галушкин А. И., Юмашев С.Г. О применении кусочно-линейных разделяющих поверхностей в задаче распознавания образов. // Труды МИЭМ. -Вып.6. -1970, с. 238-254.
10. Юмашев С.Г. Применение методов линейного программирования для построения кусочно-линейных разделяющих поверхностей в задаче распознавания образов. //Труды МИЭМ. -Вып.6. -1970.
11. Ивахненко А.Г. Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. -Киев, Техника, 1971.
12. Ivachnenko I. G. Polynomial theory of complex systems. IEEE Trans on System, Man and Cybernetics v. SMC-1,1971, v.4.13.
13. Галушкин А. И. Реализация критериев первичной оптимизации в системах распознавания образов, настраивающихся по замкнутому циклу в режиме обучения. //Труды МИЭМ. -Вып.23. -1971.
14. Галушкин А.И., Василькова Т.А., Слободенюк В.А., Тюхов Б.П. Анализ динамики систем распознавания нестационарных образов. // Труды МИЭМ. - Вып.23. -1971.
15. Агабабян К.Г. Об алгебре нейронных матриц /Докл. АН СССР, 199, №5, 1971, с. 991-993 (представлено акад. В.М. Глушковым).
16. Мкртчян С.О. Нейроны и нейронные сети. -М., Энергия, 1971, 232 с.
17. Ванюшин В.А., Галушкин А.И., Тюхов Б.П. Построение и исследование многослойных систем распознавания образов. /Сб.

«Некоторые проблемы биологической кибернетики». Под общ. ред. акад. А.И. Берга. -Л., Наука, 1972.

18. Агабабян К.Г. О нейронных матрицах. Кибернетика, т.1, 1972, с. 211-214.
19. Корелов И.В. Об одном классе сетей из элементов непрерывного и дискретного действия. Изв. АН СССР. Сер. «Техническая кибернетика», - №1, 1972, с. 109-114.
20. Галушкин А.И. Об алгоритмах адаптации в многослойных системах распознавания образов. /Докл. АН Укр. ССР, А, 91, №1, 1973, с. 15-20 (представлено акад. В.М. Глушковым).
21. Ивахненко А.Г. Перцептроны - система распознавания образов. -Киев, Наукова Думка, 1975.
22. Галушкин А.И., Кудрявцев А.М. Обращение матрицы с помощью многослойной системы из пороговых элементов. //Кибернетика и вычислительная техника». -Киев, Наукова Думка, вып.33, 1976.
23. Агабабян К. Восприятие размера угла в нейронных структурах. Кибернетика, т.5, 1976, с. 173-176.
24. Галушкин А.И. Континуальные модели многослойных систем распознавания образов. // Автоматика и вычислительная техника. -№2, -1977, с. 43-48.

### Реализация нейрокомпьютеров

25. Пупков К.А., Нариманов В.К., Галушкин А.И. Специализированное распознающее устройство. //Труды МИЭМ, вып. 23, 1971, с.156-165.
26. Пупков К.А., Нариманов В.К., Галушкин А.И. Выходной каскад многослойной сети пороговых элементов. //Труды МИЭМ, вып. 23, 1971, с. 166-178.
27. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. -М., Энергия, 1974.
28. Галушкин А.И. Основные направления разработок специализированных многослойных систем автоматизированной медицинской диагностики. //Медицинские информационные системы на базе ЭВМ, т. II. М., 1977, с. 191-198.
29. Зайцев С.Г. Системы автоматизированной диагностики по табличным данным и тенденции их применения в медицинских информационных системах на базе ЭВМ. //Медицинские информационные системы на базе ЭВМ, т. II. М., 1979, с.187-191.

### Элементарная база нейрокомпьютеров

30. Трейер В.В., Елизаров А.Б. Электрические интегрирующие элементы и аналоговые запоминающие элементы. -М., Энергия, 1971.
31. Боярченко М.А. и др. Аналоговые запоминающие и адаптивные элементы. -М., Энергия, 1973.

## РАЗДЕЛ 1. СТРУКТУРА НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Структура нейронных сетей является исходной аксиоматической посылкой как самой теории нейронных сетей, так и в значительной степени нейросетевых алгоритмов решения задач, архитектуры нейрочипов и нейрокомпьютеров.

Ниже представлены основные предпосылки перехода от логического базиса булевских элементов к пороговому логическому базису, описаны основные типы пороговых элементов, связь пороговой логики с многозначной и непрерывной логикой. Описываются основные типы нейронных сетей, предложенных различными авторами ранее, в 60-е годы (Ф. Розенблаттом, Б. Уидроу и др.) и в настоящее время. Представлены материалы по континуальным нейронным сетям (континуум признаков, нейронов и т.д.). Отдельно рассматриваются объективные предпосылки введения перекрестных связей в многослойных нейронных сетях, а также методы формального описания таких сетей.

### Глава 1. От логического базиса булевских элементов И, ИЛИ, НЕ к пороговому логическому базису

Принципиальным моментом появления нейрокомпьютеров является отказ от булевского логического базиса на уровне элементов вычислительных машин с переходом на базис пороговой логики, который в простейшем варианте моделирует функции нервной клетки. При этом изменяется не только элементная база, но и архитектура ЭВМ.

#### 1.1. Линейный пороговый элемент (нейрон)

Работы по пороговой логике известны еще с 60–70-х годов [1.1–1.8]. В них предлагается использовать для построения отдельных узлов и блоков ЭВМ нейроны, осуществляющие следующее логическое преобразование входных сигналов в выходной:

$$y = \text{sign} \sum_{i=0}^N a_i x_i. \quad (1.1)$$

Это простейшая интерпретация передаточной функции нейрона, где  $y$  – значение выхода нейрона;  $a_i$  – весовые коэффициенты;  $a_0$  – порог;  $x_i$  – входные значения нейрона ( $x_i \in \{0,1\}$ );

$N$  – размерность входного сигнала нейрона. Нелинейное преобразование, осуществляемое в данном случае в нейроне:

$$\text{sign}(g) = \begin{cases} 0, & g < 0 \\ 1, & g \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

На рис. 1.1 представлена функциональная схема нейрона. При этом в частном случае при  $a_i = 1$  ( $i=1, \dots, n$ ) нейрон является мажоритарным элементом, порог в этом случае принимает значение  $a_0 = N/2$ .

Необходимо отметить, что пороговая функция в выражении для передаточной функции (1.1) может принимать любые значения, а не только указанные в (1.2). Это определенным образом меняет значения коэффициентов  $a_i$  и  $a_0$ . Для удобства, как правило, используют форму пороговой функции (1.2) или следующую:

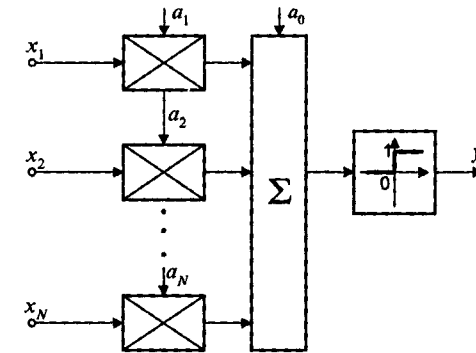


Рис. 1.1. Функциональная схема нейрона

$$\text{sign}(g) = \begin{cases} -1, & g < 0 \\ 1, & g \geq 0 \end{cases}$$

в зависимости от удобств физической реализации этой функции в аналоговом или цифровом виде.

Отмечаются следующие преимущества нейрона перед элементами И, ИЛИ, НЕ и т.п.:

1. Нейрон выполняет более сложные логические функции, что обеспечивает реализацию заданной логической функции меньшим числом элементов. Отсюда отмечаемая и исследованная многими авторами возможность сокращения объема оборудования при построении некоторых узлов вычислительных машин.

2. Сети из нейронов имеют повышенную устойчивость к выходу из строя отдельных элементов. В [В-1] было отмечено



но, что в трехслойном персептроне выход из строя некоторого количества нейронов 1-го слоя со случайными связями не приводил к резкому, катастрофическому падению качества решения задачи при отсутствии процедур диагностики и реконфигурации структуры. Подобным свойством в настоящее время обладают лишь многомикропроцессорные ЭВМ с расширенным параллелизмом с архитектурами ОКМД (один поток команд, много потоков данных) и МКМД (много потоков команд, много потоков данных) при реализованных на этих структурах процедурах диагностики и реконфигурации.

При этом свойством таких структур является свойство так называемой постоянной деградации, когда основное качество работы системы (такое, как вероятность правильного распознавания или производительность) будет максимальным при полностью исправных элементах и падало бы не катастрофически, а монотонно при выходе из строя отдельных элементов.

3. Сети из нейронов имеют повышенную устойчивость к изменению параметров схем, их реализующих. Это можно пояснить на примере реализации с помощью нейрона простой логической функции двух переменных (рис.1. 2), где весьма значительные изменения весов и порога не приводят к ошибкам в реализации заданной логической функции.

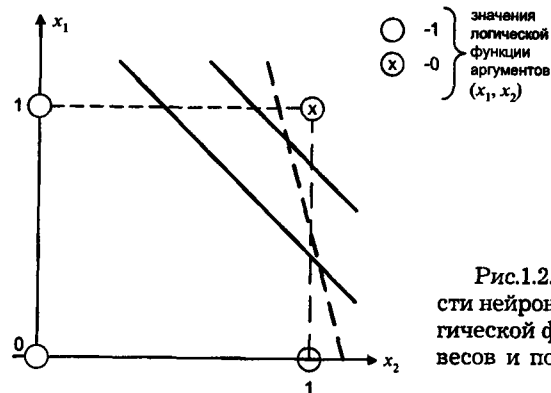


Рис.1.2. К нечувствительности нейрона при реализации логической функции к изменению весов и порога

4. Реализация в виде СБИС или оптических систем функциональных устройств, алгоритмы которых адекватны нейронным сетям, производится в аналоговом виде с присущим ему большим быстродействием по сравнению с цифровой реализацией.

При аппаратной реализации нейронными сетями достаточно «крупных» математических операций большой размерности производится максимальное распараллеливание информации на аппаратном уровне.

5. Для нейронных сетей существует возможность формального описания их как динамических дискретных систем с использованием аппарата линейных последовательностных машин. Это дает возможность не только исследовать поведение таких систем с помощью методов теории управления, но и синтезировать структуры нейронных сетей по заданным критериям.

6. Для однородных нейронных сетей существует возможность минимизации типажа СБИС, их реализующих, что позволяет проследить тенденцию упрощения САПР СБИС. При этом существующая относительная независимость алгоритмов логического проектирования нейро СБИС от размерности входного и выходного пространства, создает предпосылки для унификации этой процедуры в более широком классе функциональных схем, реализуемых нейронными сетями.

## 1.2. Многопороговая логика

Многопороговую логику можно рассматривать как обобщение пороговой. Логическая полнота многопорогового элемента (МПЭ), являющегося функциональной ячейкой логического устройства, выполненного в базисе многопороговой логики, обусловлена наличием группы порогов, реализуемых данным МПЭ. Под МПЭ здесь и далее будем понимать элемент, функционирующий согласно выражению

$$y = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^K \{\text{sign}[g(n) - a_k] + 1\}, \quad (1.3)$$

приведенному в работе [1.6]. Функциональная схема МПЭ приведена на рис.1.3.

Методы синтеза сетей из МПЭ являлись предметом исследований многие годы [1.7, 1.9, 1.10] и не привели к практически ощутимым результатам. Наиболее перспективными для сетей из МПЭ все же можно считать лишь адаптивные методы [В.6, В.10] как слабо зависимые, по сравнению с остальными, от размерности входного пространства и сложности сети.

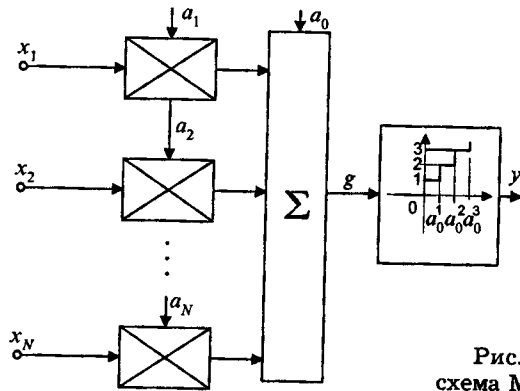


Рис.1.3. Функциональная схема МПЭ

### 1.3. Непрерывная логика

Данный раздел логики как науки, являющейся естественным развитием двухзначной логики через  $K$ -значную, имеет важное значение для построения теории нейронных ЭВМ, прямо связанных с аналоговой реализацией частей алгоритмов, требующих большого быстродействия вычислителя.

Непрерывная нейронная логика рассматривает схемы, позволяющие выполнять логические операции с непрерывными величинами [1.11–1.13]. На рис.1.4 представлена общая структурная схема нейрона с континуумом решений, являющихся основой построения схем непрерывной нейронной логики. Вид функции  $f$ , называемой функцией активации, рассматривается ниже либо исходя из представления о модели нейрона, либо исходя из класса решаемых задач и удобства построения алгоритма адаптации сети из таких нейронов.

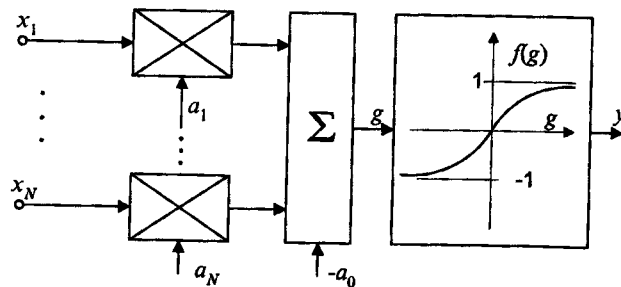


Рис.1.4. Структурная схема нейрона с континуумом решений

Преобразование, осуществляемое схемой (рис.1.4), имеет вид

$$y(n) = f[g(n)] = f \left[ \sum_{i=0}^N a_i x_i(n) \right].$$

Функция  $f(g)$  является непрерывной, монотонно возрастающей, дифференцируемой и формирует непрерывный выходной сигнал элемента нейронной сети. В этом случае понятие разделяющей поверхности, реализуемой сетью в исходном пространстве признаков (в интерпретации систем распознавания образов), вырождается. Параметры функции  $f(g)$  могут быть как фиксированными, так и настраиваемыми.

### 1.4. Частные виды функций активации

Кроме рассмотренных выше можно рассмотреть несколько других видов функции активации.

Функция активации  $R$  представлена на рис. 1.5. Наличие линейной зоны позволяет реализовывать на сетях из элементов с подобной функцией активации непрерывные функции. Функция активации  $R$  достаточно просто реализуется.

Функция активации  $S$  (сигмоидная). Графически данная функция активации представлена на рис. 1.6. Здесь  $y = (1 + e^{-g})^{-1}$ .

Эта функция в отличие от функции  $R$  обладает свойствами обратимости и непрерывной дифференцируемости, однако более трудно реализуема. Недостатком ее, зачастую отмечаемым, является наличие только положительных значений. Однако, на наш взгляд, этот недостаток несущественен, так как может быть устранен на уровне структуры сети изменением порогов элементов.

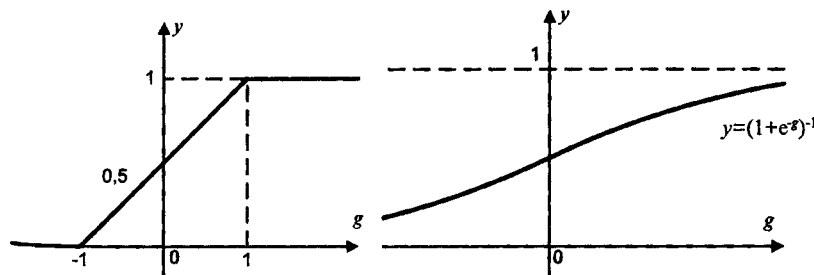


Рис. 1.5. Функция активации  $R$  Рис. 1.6. Функция активации  $S$

Функция активации типа  $\tanh g(n)$  и  $2/\pi \arctg g(n)$  (рис. 1.7 1.8)

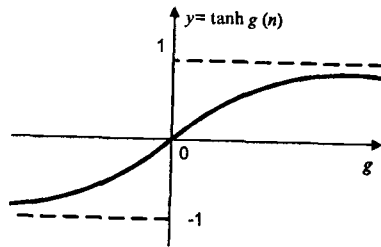


Рис.1.7. Функция активации  $\tanh g(n)$

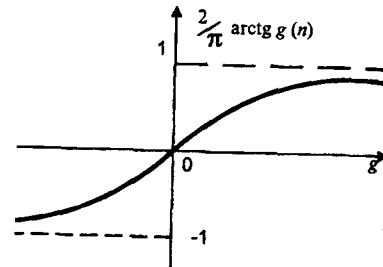


Рис.1.8. Функция активации  $2/\pi \arctg g(n)$

Эти функции по свойствам аналогичны сигмоидной функции. Преимущества применения той или иной функции активации определяются сложностью реализации нейронной сети и ее алгоритма адаптации на выбранном классе задач.

### Литература

- 1.1. Dertouzos M. Threshold Logic: A synthesis approach, MIT Press, 1965. Русск. перев.: М. Дертоузо. Пороговая логика. - М., Мир, 1967.
- 1.2. Пирс У. Построение надежных вычислительных машин. - М., Мир, 1968.
- 1.3. Shigeo Oyagi, Ryoichi Mori, Noriaki Sanechika. Realization of a Boolean Function using an extended threshold logic. Bulletin of the Electrotechnical Laboratory, vol 42, 1978, pp. 9-74.
- 1.4. Лупанов О.Б. О схемах из пороговых элементов. / Докл. АН СССР, 1972, т.202, № 6.
- 1.5. Бутаков Е.А. Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. - М., Сов. радио, 1970.
- 1.6. Гутчин И.Б., Кузичев А.С. Бионика и надежность. - М., Наука, 1967.
- 1.7. Вавилов Е.Н. и др. Синтез схем на пороговых элементах. - М., Сов. радио, 1970.
- 1.8. Степанян А.А., Архангельский С.В. Построение логических схем на пороговых элементах. Куйбышевское кн. изд-во, 1967.
- 1.9. Minsky M. Finite and infinite Machines. Prentice-Hall, Inc, 1967. Русск. перев.: Марвин Минский. «Вычисления и автоматы». - М., Мир, 1971.

- 1.10. Специализированный выпуск по многозначной логике. Computer, v.21, № 4, 1988.
- 1.11. Айзенберг Н.Н., Иваськив Ю.Л. Многозначная пороговая логика. - Киев, 1977, 148 с.
- 1.12. King J. Fuzzy logic provides new way to deal with uncertainty, Electronics, Pk 12, pp.40,41,1985. Русск. перев.: Д. Кинг. Непрерывная логика: альтернатива вероятностному подходу. // Электроника, № 12, 1985.
- 1.13. Позин Н.В. Нейронные схемы непрерывной логики и классификации ансамблей непрерывных сигналов. Proc. Inst. Stosowane, PAN, Z.II, Warszawa, 1972.
- 1.14. Позин Н.В. Моделирование нейронных структур. - М., Наука, 1970.
- 1.15. Уиндер Р. Логические схемы на пороговых элементах. // «Электроника», № 11, 1968, с. 3-25.
- 1.16. Бутаков В.А. Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. - М., Сов. радио, 1970.
- 1.17. Вавилов Е.Н., Егоров Б.М., Ланцев В.С., Тоценко В.Г. Синтез схем на пороговых элементах. - М., Сов. радио, 1970.
- 1.18. Варшавский В.И. Функциональные возможности и синтез пороговых элементов. / Докл. АН СССР, 1961, - т.139. - № 5.
- 1.19. Coatec C.L., Lewis B.M. DONUT - a threshold gate computer, IEEE Trans. on Electronic Computer, 1964, v. EC - 13, № 3.
- 1.20. Гутчин И.Б., Кузичев А.С. Бионика и надежность: элементы теории формальных нейронов. - М., Наука, 1967.
- 1.21. Степанян А.А., Архангельский С.В. Построение логических схем на пороговых элементах. Куйбышевское кн. изд-во, 1967.
- 1.22. Лебедев В.С. О возможности реализации узлов цифровых устройств на пороговых элементах. // «Автоматика и телемеханика», №3, 1971, с. 91-100.
- 1.23. Мкртчян С.О. Нейроны и нейронные сети. - М., Энергия, 1971, 231 с.
- 1.24. Овчинников В.В. Способ построения арифметических устройств ЦВМ на пороговых элементах. // «Автоматика», вып.б. Киев, Наукова Думка, 1971, с. 70 - 77.
- 1.25. Мкртчян С.О. Комплекс пороговых элементов для проектирования ЦВМ. // «Вопросы радиоэлектроники». - Сер. ЭВТ. - 1972. - Вып.2, с.133 - 139.
- 1.26. Пакулов Н.И., Уханов В.Ф., Чернышев П.Н. Мажоритарный принцип построения надежных узлов и устройств ЦВМ. - М., Сов. радио, 1974.
- 1.27. Добронравов О.Е., Овчинников В.В. Проектирование схем и узлов ЭВМ на пороговых элементах. - М., Энергия, 1976.
- 1.28. Мкртчян С.О. Проектирование логических устройств ЭВМ на нейронных элементах. - М., Энергия, 1977.

- 1.29. Пальянов И.А., Потапов В.И. Диагностика неисправностей и синтез цифровых структур из пороговых логических модулей. Новосибирск, 1977.
- 1.30. Потапов В.И. Анализ и синтез логических высоконадежных цифровых вычислительных и логических структур из пороговых модулей. – Новосибирск, 1977.
- 1.31. Галушкин А.И., Фомин Ю.И. Об оптимальности восстанавливающих органов, реализующих мажоритарное голосование. // *Техника средств связи*. – Сер. «Вычислительная техника» – Вып.3, 1979, с. 56 – 61.
- 1.32. Кирсанов Э.Ю. О построении систем сверхоперативной памяти на элементах пороговой логики.// *Техника средств связи*. Сер. «Системы связи» – Вып.4. – 1980, с. 28 – 37.
- 1.33. Кирсанов Э.Ю. К вопросу о построении односторонней памяти на элементах пороговой логики.// *Техника средств связи*. Сер. «Системы связи» – Вып.2. – 1981, с. 44 – 52.
- 1.34. Кирсанов Э.Ю. К задаче классификации и анализа путем построения памяти в базе пороговой логики.// *Техника средств связи*. – Сер. «Системы связи» – Вып.2. – 1981, с. 36 – 48.
- 1.35. Кирсанов Э.Ю. К вопросу о выборе структуры одного класса запоминающих устройств на пороговых элементах. // «Элементарное моделирование». – Киев, 1981, № 6, с. 88 – 89.

## Глава 2. Качественные характеристики архитектур нейронных сетей

Основными качественными характеристиками архитектур нейронных сетей являются [2.1 – 2.5]:

1. Типы входных сигналов (размерность, дискретность и т. д.).
2. Тип операций, реализуемых в разомкнутой нейронной сети (дискретные или непрерывные).
3. Топология связей (прямые, перекрестные, латеральные, обратные и т.д.).
4. Наличие или отсутствие желания симитировать в структуре конкретную биологическую систему (зрительный или слуховой анализатор, мозжечок, таламус и т.д.).
5. Наличие желания максимально повысить скорость вычислительных операций на нейронной сети.
6. Ограничения архитектуры, связанные с удобством (простотой) или ограничениями принятого способа технической реализации.
7. Способ объединения в группы процессорных элементов.
8. Способ функционирования во времени (дискретный или непрерывный).
9. Способ изменения весов связей (случайный или упорядоченный).
10. Способ соединения независимо настроенных (или настраиваемых) нейронных сетей вместе.

### 2.1. Частные типы архитектур нейронных сетей

Ниже описаны некоторые частные структуры нейронных сетей, являющиеся предметом интересов при решении различных задач в нейросетевом базисе. На рис. 2.1 представлена

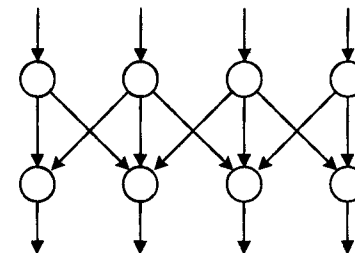


Рис.2.1. Сети с прямыми связями

структура, условно называемая нейронной сетью с прямыми связями. Характерной особенностью такой сети является равенство числа входов, выходов и нейронов в каждом из двух слоев сети, а также наличие так называемых латеральных связей между нейронами 1-го и 2-го слоя. При этом на рис. 2.2 латеральные связи имеют ограниченную структуру (глубина распространения). На рис. 2.2 представлена частная структура

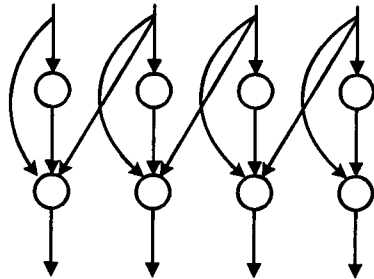


Рис. 2.2. Нейронные сети с перекрестными связями

ра двухслойной нейронной сети, в которой настраиваемые веса связей 2-го слоя определяются выходными сигналами 1-го слоя. Рис. 2.3 иллюстрирует пример структуры нейронной сети с упорядоченными обратными связями, а рис. 2.4 с аморфными

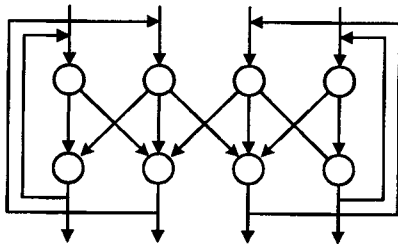


Рис. 2.3. Сети с упорядоченными обратными связями

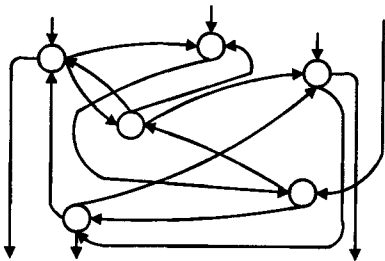


Рис. 2.4. Сети с аморфными обратными связями

обратными связями. На рис. 2.5 представлены частные структуры нейронных сетей с латеральными связями, наиболее часто применяемые в системах обработки сигналов и изображений.

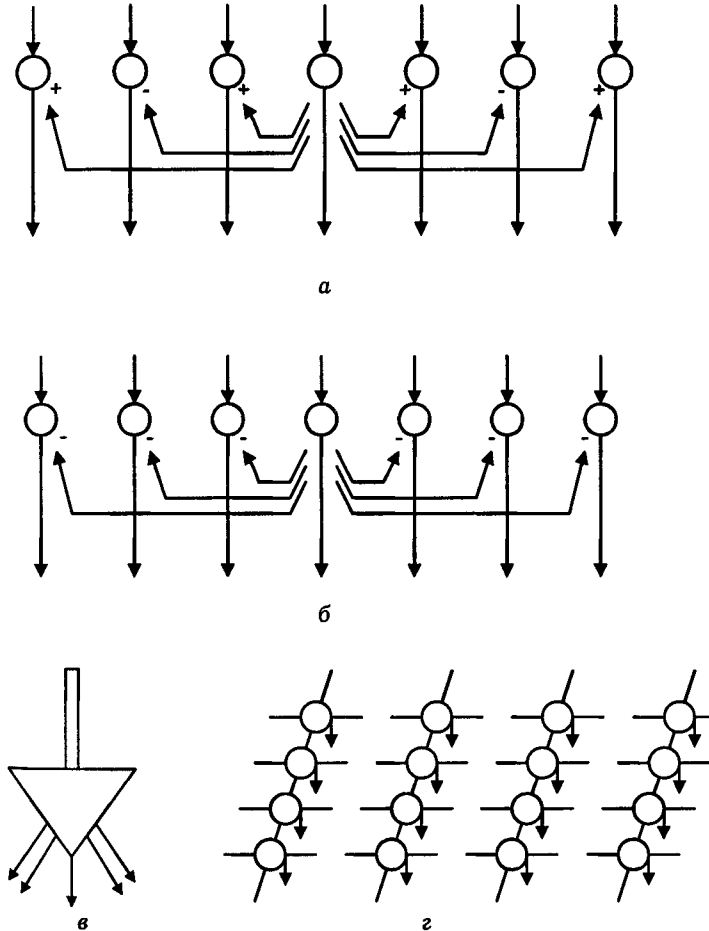


Рис. 2.5. Основные типы нейронных сетей с латеральными связями: а - латеральные связи, повторяющиеся на каждом процессорном элементе; б - латеральные связи, повторяющиеся на каждом процессорном элементе; в - каждый вход имеет специфическое распределение над полем процессорных элементов; г - латеральные связи могут быть любых типов

## 2.2. Многослойные нейронные сети с последовательными связями

Исторически многослойные нейронные сети в теории распознавания образов появились вследствие следующих причин.

1. Линейная разделяющая поверхность (линейный пороговый элемент) не обеспечивает достаточной вероятности правильного распознавания для распределений, отличных от нормальных с равными ковариационными матрицами.

2. В  $N$ -мерном пространстве двоичных переменных гиперплоскость не может реализовать любую булевскую функцию от  $N$  двоичных переменных при  $N \geq 2$ .

3. Чтобы повысить вероятность правильного распознавания в случае, когда совокупности векторов двух классов образуются по закону более сложному, чем нормальным с равными ковариационными матрицами, строятся системы распознавания образов, реализующие нелинейную разделяющую поверхность, которая, в частности, может быть задана выражением:

$$\sum_{l_1=1}^L \dots \sum_{l_r=1}^L a_{l_1 \dots l_r} x_{l_1 \dots l_r} + \dots + \sum_{l_1=1}^L \sum_{l_2=1}^L a_{l_1 l_2} x_{l_1} x_{l_2} + \sum_{l_1=1}^L a_{l_1} x_{l_1} + a_0 = 0$$

Реализация систем распознавания образов с нелинейной разделяющей поверхностью является сложной практической задачей, связанной с необходимостью настройки большого числа коэффициентов порядка  $(N+r)!/N!r!$ , где  $N$  – размерность пространства признака;  $r$  – порядок разделяющей поверхности.

Например, при  $N$  порядка нескольких сот и  $r$  порядка числа настраиваемых коэффициентов составляет несколько миллиардов. Трудности решения задачи построения нелинейной разделяющей гиперповерхности преодолеваются путем использования кусочно-линейной аппроксимации этой поверхности гиперплоскости. Если при этом поверхность  $r$ -го порядка аппроксимирована достаточно хорошо с точки зрения вероятности правильного распознавания, то порядок числа настраиваемых коэффициентов равен  $N \cdot r$ , т. е. в случае, указанном выше, составляет несколько сот.

Для задач распознавания образов и других, допускающих применение в первом слое нейронной сети нейронов с конечным количеством решений, необходимо решить задачу от-

сечения различных областей исходного многомерного пространства признаков к тому или иному классу (рис. 2.6).



Рис. 2.6. Структурная схема нейронной сети, реализующей кусочно-линейную разделяющую поверхность

Указанные области образуются при взаимном пересечении гиперплоскостей, реализуемых нейронами первого слоя. Каждая из областей определена в виде набора  $H_1$  двоичных сигналов ( $H_1$  – число нейронов первого слоя), принимающих значения (0,1) или (+1,-1) на выходе нейронов первого слоя, и соответствующего значения выходного сигнала всей системы. Блок отнесения областей к тому или иному классу должен реализовать в данном конкретном случае некоторую функцию  $\bar{y}^*(y)$  от  $H_1$  двоичных переменных.

Указанная логическая функция в свою очередь должна реализоваться нейронной сетью вследствие известных преимуществ пороговой логики, а также вследствие необходимости функциональной однородности всей системы. Граф многослойной нейронной сети с последовательными связями показан на рис. 2.7. В работе [2.6] дана подробная классификация типов

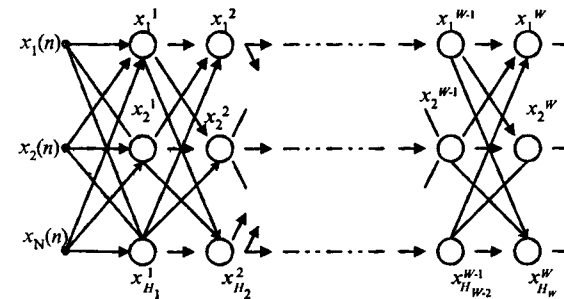


Рис. 2.7. Граф многослойной нейронной сети с последовательными связями

структур многослойных нейронных сетей с последовательными связями по следующим признакам:

- число слоев нейронов с настраиваемыми коэффициентами;
- число слоев нейронов с фиксированными коэффициентами;
- метод фиксации коэффициентов.

Рассмотрены, в частности, следующие структуры: двухслойная сеть с настраиваемыми коэффициентами первого слоя и фиксированными (или настраиваемыми) коэффициентами нейронов второго слоя; трехслойная нейронная сеть с различными вариантами слоев с настраиваемыми и фиксированными коэффициентами.

Двухслойная нейронная сеть с настраиваемыми коэффициентами имеет ограниченные возможности в смысле реализации различных конфигураций разделяющей поверхности, так как нейрон не может реализовать произвольную булевскую функцию от  $N \geq 2$  двоичных переменных (в данном случае нейрон второго слоя нейронной сети). Если не задано ограничение на число нейронов во втором слое, то для реализации кусочно-линейной поверхности произвольной конфигурации достаточно иметь в нейронной сети количество слоев  $W=3$ .

Задача синтеза трехслойной нейронной сети при заданном числе нейронов в первом и третьем слое сводится к минимизации числа нейронов второго слоя и настройке коэффициентов нейронной сети. Проведенные исследования многослойных нейронных сетей с последовательными связями позволяют сделать вывод, что качество их работы монотонно возрастает при увеличении числа слоев и числа нейронов в каждом слое.

### 2.3. Структурное и символическое описание многослойных нейронных сетей

В последнее время можно отметить резкое возрастание роли структурных методов в исследовании различного рода систем по сравнению с символическими методами. Основными причинами данного подхода являются такие свойства исследуемых систем, как многослойность, многоконтурность и многомерность. Именно этими свойствами обладают и современные нейронные сети. Настоящая работа ставит своей целью развитие структурного подхода, когда относительный вес раз-

работок блока обучения уменьшается, а увеличивается соответственно вес разработок при выборе структуры разомкнутой системы. Именно по этим причинам кроме символических описаний разомкнутых систем возникает необходимость в структурном представлении преобразований. Ниже представлено формальное описание основных типов многослойных нейронных сетей.

а) Двухслойная нейронная сеть:

$$y(n) = f[g(n)] = f\left[\sum_{h_1=0}^{H_1} a_{h_1} y_{h_1}(n)\right] = f\left[\sum_{h_1=0}^{H_1} a_{h_1} f[g_{h_1}(n)]\right] = f\left[\sum_{h_1=0}^{H_1} a_{h_1} f\left[\sum_{i=0}^N a_i x_i(n)\right]\right]; \quad (2.1)$$

б) Многослойная нейронная сеть из нейронов с непрерывным решением:

$$y(n) = f\left[\sum_{h_{W-1}=0}^{H_{W-1}} a_{h_{W-1}, h_{W-1}} f\left[\sum_{h_{W-2}=0}^{H_{W-2}} a_{h_{W-1}, h_{W-2}} f\left[\sum_{h_{W-3}=0}^{H_{W-3}} a_{h_{W-2}, h_{W-3}} x_{h_{W-2}}^{W-2}(n)\right]\right]\right] \dots a_{h_{W-j+2}, h_{W-j+1}} f\left[\sum_{h_{W-j+1}=0}^{H_{W-j+1}} a_{h_{W-j+1}, h_{W-j}} \dots \right] \dots a_{h_2, h_1} f\left[\sum_{h_0=0}^{H_0} a_{h_1, h_0} x_{h_0}^0(n)\right] \dots \right]; \quad (2.2)$$

Здесь  $N=N_0$  – размерность исходного пространства признаков.

Стрелкой и символом указаны обозначения сигнала, описываемого в формуле выражением справа от стрелки;  $x^{w-j+1}(n)$  и  $g_{h_{w-j+1}}^{w-j+1}(n)$  – соответственно входной и аналоговый выходные сигналы  $h_{w-j+1}$ -го нейрона ( $w-j+1$ -го слоя рассматриваемой многослойной нейронной сети).

Многослойная нейронная сеть с  $K$  решениями получается заменой в (2.2) в выходном слое нелинейного преобразования  $f$  на определяемое выражением (1.3).

в) Многослойная нейронная сеть с  $H_w$  выходными каналами. Символическое описание подобной системы достаточно просто получить из (2.2) и граф-схемы нейронной сети, представленной на рис.2.7. В частности, можно рассмотреть случай сигналов  $\varepsilon(n)$  и  $y(n)$  одинаковой размерности.

г) Многослойные нейронные сети с перекрестными связями. В многослойных нейронных сетях с полными перекрестными связями [В.6] множество признаков  $j$ -го слоя ( $j=1, \dots, W$ ) состоит из признаков исходного пространства и выходных сигналов всех слоев с номерами от 1 до  $(j-1)$ .

Анализ частных структур с полными перекрестными связями показывает, что они значительно проще (по числу нейронов) структур с полными последовательными связями при условии, что обе структуры реализуют одну и ту же конфигурацию разделяющих поверхностей в пространстве признаков. В частности для двухслойной нейронной сети с перекрестными связями:

$$y(n) = f \left[ \sum_{h_1=0}^{I_1} a_{h_1} f \left[ \sum_{i=0}^N a_{ih_1} x_i(n) \right] + \sum_{j=0}^N a_j x_j(n) \right].$$

Граф-схема данной нейронной сети представлена на рис. 2.8.

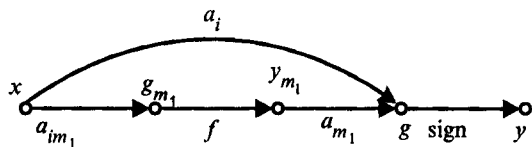


Рис. 2.8. Граф-схема нейронной сети с перекрестными связями

В принципе возможно рассмотрение многослойных нейронных сетей произвольной структуры с перекрестными связями.

д) Многослойные нейронные сети с обратными связями. Для нейрона с обратной связью (рис. 2.9):

$$y(n) = f \left[ \sum_{i=0}^N a_i x_i(n) + a' y(n-1) \right].$$

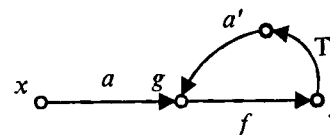


Рис. 2.9. Граф-схема нейрона с обратной связью

В случае двухслойной нейронной сети с обратными связями (рис. 2.10):

$$y(n) = f [g(n)]; \quad g(n) = \sum_{h_1=0}^{H_1} a_{h_1} y_{h_1}(n) + a_k y(n-1);$$

$$y_{h_1}(n) = f [g_{h_1}(n)]; \quad g_{h_1}(n) = \sum_{i=0}^N a_{ih_1} x_i(n) + a'' y(n) + a'_{h_1} y_{h_1}(n-1).$$

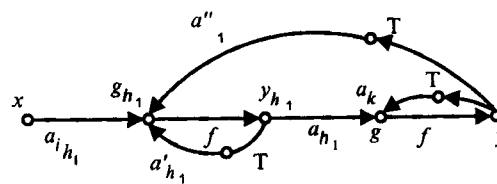


Рис. 2.10. Граф-схема двухслойной нейронной сети с обратными связями

В принципе возможно рассмотрение многослойных нейронных сетей произвольной заданной структуры с обратными и перекрестными связями. Объективная необходимость введения перекрестных связей в многослойных нейронных сетях обосновывается ниже в главе 3, а обратных связей в данной книге при исследовании замкнутых нейронных сетей для распознавания нестационарных образов.

е) Нейронные сети с  $k$ -значными и двоичными весовыми коэффициентами. Известны трудности физической реали-



зации настраиваемых переменных весовых коэффициентов многослойных нейронных сетей. Эти трудности появились в частности, при реализации в 60-е годы систем на мемторах, когда их авторы пытались реализовать в аналоговом виде и разомкнутую систему и блок настройки нейронной сети [2.12].

На современном этапе развития технологии СБИС эти трудности сохранились. Однако резкое увеличение степени интеграции позволяет реализовать нейронные сети с нейронами имеющими  $k$ -значные значения весовых коэффициентов, реализуемые, например, на резисторных сетях, или в простом случае двоичные (0,1) значения весовых коэффициентов, реализуемые на управляемых ключах. При этом упрощается физическая реализация процедуры настройки многослойной нейронной сети, имеющей подобные настраиваемые коэффициенты. При рассмотрении каждого нейрона  $k$ -значными или двоичными коэффициентами реализуется геометрическая функция в пространстве входных переменных путем изменения наклона разделяющих гиперплоскостей на фиксированный угол (рис.2.11) или путем использования в совокупности разделяющей гиперповерхности «кусков» гиперплоскостей трех типов (рис.2.12). При этом, естественно, чем меньше

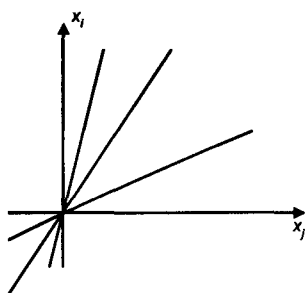


Рис.2.11. Гиперплоскости, реализуемые в пространстве входных признаков нейроном с  $k$ -значными весовыми коэффициентами

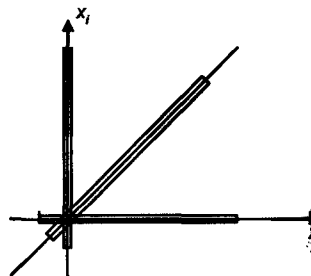


Рис.2.12. Гиперплоскости, реализуемые в пространстве входных признаков нейроном с двоичными (0,1) значениями весовых коэффициентов

даций имеют весовые коэффициенты нейронов в нейронной сети, тем большее количество нейронов потребуется в нейронной сети для решения некоторой задачи.

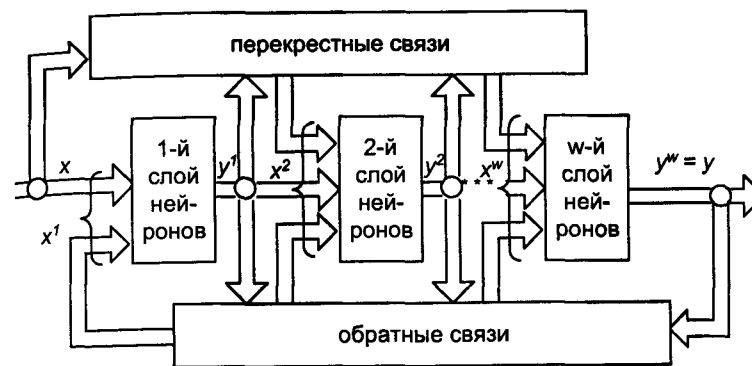


Рис. 2.13. Многослойная нейронная сеть

Настоящий уровень развития технологии вполне приемлет общую структуру нейронной сети, представленную на рис. 2.13. Методика синтеза алгоритмов настройки подобных нейронных сетей является основным предметом рассмотрения в данной книге.

### Литература

1. Стаффорд. Многослойные обучающиеся схемы. // Зарубежная радиоэлектроника, № 8, 1965, с. 58-64.
2. Гавронски Р. Сравнение некоторых свойств симметричных слоистых сетей с прямыми и обратными локальными связями. / Сб. «Биологическая кибернетика», 1968, с. 209-223.
3. Нильсен Н. Обучающиеся машины. -М., Мир, 1967.
4. Гелиг А.Х. Опознающие системы с неограниченной плоской ретиной. // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. 1968, с. 80-94.
5. Айзерман М.А., Браверман Э.М., Розоноэр Л.И. Метод потенциальных функций в теории обучения машин. -М., Наука, 1970.
6. Галушкин А.И. Многослойные системы распознавания образов. М., МИЭМ, 1970.
7. Галушкин А.И., Юмашев С.Г. О применении кусочно-линейных разделяющих поверхностей в задаче распознавания образов. //Труды МИЭМ, 1970, вып.6, с. 238 - 254.
8. Минский М. Вычисления и автоматы. -М., Мир, 1971. Перев. М. Minsky. Computation: Machines, Prentice - Hall, 1969. Finite and Infinite.
9. Минский М., Пейперт С. Перцептроны. -М., Мир, 1971.

- 2.10. Ивахненко А. Г. Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. – Киев, «Техника», 1971.
- 2.11. Ивахненко А.Г. Polynomial theory of complex systems. In: Trans. on System, Man and Cybernetics, v.SMC-1, 1971, v.1, p.1-10.
- 2.12. Трейер В.В., Елизаров А.Б. Электрические интегрирующие элементы и аналоговые запоминающие элементы. – М., Энергия, 1971.
- 2.13. Ивахненко А.Г. Перцептроны – система распознавания образов. – Киев, Наукова Думка, 1975.
- 2.14. Юмашев С. Г. Применение методов линейного программирования для построения кусочно-линейных разделяющих поверхностей в задаче распознавания образов. //Труды МИЭМ, 1978, вып. 6, с. 255–260.
- 2.15. Кожонен Т. Ассоциативная память. – М., Мир, 1980.
- 2.16. Amari S. Topographic organization of nerve fields. Bull. of Mathematical Biology, 1980, т.42 № 3 (339–364).
- 2.17. Fukushima K. Neocognitron: A Self – Organizing Neural Network Model for a Mechanism of Pattern Recognition Unaffected by Shift in Position. Biological Cybernetics, 1980, т.36, № 1 (193–202).

### Глава 3. Оптимизация структуры многослойных нейронных сетей с перекрестными связями

Вопрос выбора структуры разомкнутой многослойной нейронной сети является сложным. Структура разомкнутой нейронной сети может задаваться либо априори, либо исходя из соображений, высказанных выше при рассмотрении двухслойной и трехслойной нейронной сети, либо исходя из ограничений технического характера. Ниже рассматривается возможность выбора структуры (числа слоев и числа нейронов в слое) многослойных нейронных сетей с перекрестными связями, состоящих из нейронов с двумя решениями.

#### 3.1. О критерии сложности задачи

Необходимо остановиться на критерии сложности задачи распознавания, решаемой многослойной нейронной сетью. При использовании детерминированной модели нейронной сети таким критерием может служить количество эталонных образов, заключаемых в замкнутые области гиперплоскостями, реализуемыми нейронами первого слоя в исходном пространстве признаков. При рассмотрении вероятностной модели нейронной сети каждому эталонному образу соответствует мода функции распределения вероятностей совокупности образов на входе нейронной сети. При этом в каждой области исходного пространства признаков многослойная нейронная сеть выделяет уже не эталонный образ, а некоторое компактное множество образов. При многомодальных распределениях совокупностей образов на входе нейронной сети эти компактные множества могут характеризоваться областями в многомерном пространстве признаков, образованными линиями равных значений функции плотности распределения вероятностей (на определенном уровне). Число и сложность данных областей совместно характеризуют сложность решаемой задачи. При этом детерминированная модель нейронной сети может рассматриваться как частный случай вероятностной и реализует по сути дела систему памяти для конечного числа многомерных векторов. Принимая в данном параграфе за критерий качества многослойной нейронной сети число областей, реализуемых подобной нейронной сетью в исходном пространстве признаков, необходимо отметить, что качество многослойной нейронной сети с последовательными связями, рас-

смотренной выше, монотонно возрастает при увеличении числа слоев и числа элементов в каждом слое.

Поэтому в подобной нейронной сети задача оптимизации структуры (минимизация числа нейронов и числа слоев) может быть поставлена только либо в плане ликвидации избыточности числа нейронов, либо при наличии ограничений на число нейронов.

Основное внимание ниже уделяется многослойным нейронным сетям с полными перекрестными связями, когда множество признаков каждого  $j$ -го слоя состоит из признаков входного пространства и выходных сигналов первого, второго и  $(j-1)$ -го слоя. Для подобной нейронной сети задача оптимизации структуры, в частности выбора числа слоев и числа нейронов в каждом слое при ограничении на общее число нейронов в сети, является актуальной.

### 3.2. Одномерный вариант нейронной сети с перекрестными связями

Рассмотрим на простейшем примере одномерного варианта, когда  $N=1$  (один признак  $x$ ), принцип действия перекрестной связи. Структурная схема рассматриваемой нейронной сети представлена на рис. 3.1. Разделяющая поверхность, реализованная подобной нейронной сетью при отсутствии перекрестной связи, представлена на рис. 3.2. В областях I, II, III аналоговый выходной сигнал нейронной сети  $g$  при включенной перекрестной связи представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} g_I &= a_0 + a_n x - a_1 - a_2; \\ g_{II} &= a_0 + a_n x - a_1 - a_2; \\ g_{III} &= a_0 + a_n x - a_1 - a_2. \end{aligned}$$

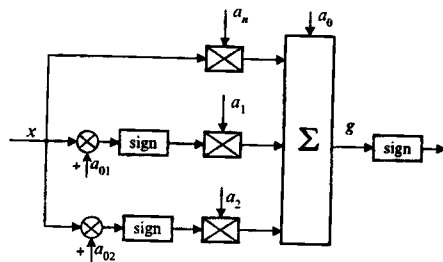


Рис. 3.1. Двухслойная нейронная сеть с перекрестной связью, одномерный вариант

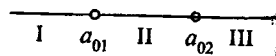


Рис. 3.2. К принципу действия перекрестной связи в многослойных нейронных сетях

Каждую из областей I, II, III нейронная сеть делит на две подобласти, где  $g \geq 0$  и  $g < 0$ . Из условия равенства нулю  $g_I$ ,  $g_{II}$ ,  $g_{III}$  следуют выражения для дополнительных порогов при включении обратной связи в пространстве  $X$ :

$$x_1 = \frac{a_1 + a_2 - a_0}{a_n}; \quad x_2 = \frac{a_2 - a_1 - a_0}{a_n}; \quad x_3 = \frac{-a_1 - a_2 - a_0}{a_n}.$$

Таким образом, рассматриваемая нейронная сеть (см. рис. 3.1) реализует максимально пять порогов, делящих ось  $x$  на шесть областей. В этом случае нейронная сеть эквивалентна (по критерию максимума количества областей, реализуемых кусочно-линейной разделяющей поверхностью в исходном пространстве признаков) многослойной нейронной сети с последовательными связями с пятью нейронами в первом слое, т.е. нейронная сеть с перекрестными связями реализуется значительно проще, чем нейронная сеть с последовательными связями.

В процессе анализа многослойной нейронной сети необходимо знать максимальное число областей, на которое пространство признаков размерности  $N$  может быть разбито  $H_1$  гиперплоскостями. Согласно результату, полученному в [3.1], максимальное количество областей  $\Psi_{NH_1}$  определяется по следующей рекуррентной формуле:

$$\Psi_{NH_1} = \Psi_{NH_1-1} + \Psi_{N-1, H_1-1} \quad (3.1)$$

или в нереккуррентном виде

$$\Psi_{NH_1} = C_{H_1-1}^N + 2 \sum_{i=0}^{H_1-1} C_{H_1-1}^i.$$

Здесь имеется в виду, что  $C_t^s = 0$  при  $t < s$ . Отметим, что из (3.1) следует:

$$\Psi_{NH_1} = 2^{H_1} \quad \text{при } H_1 \leq N \quad (3.2)$$

и

$$\Psi_{NH_1} = 2^{H_1} \quad \text{при } H_1 > N. \quad (3.3)$$

### 3.3. Вывод верхней и нижней оценки количества областей

Рассмотрим многомерный вариант ( $i = 1, \dots, N$ ) нейронной сети, структура которой представлена на рис. 3.3. Обозначим количество областей, на которое разбивает исходное пространство признаков  $(j-1)$ -слойная нейронная сеть через  $\Psi_{N, [j-1]}$

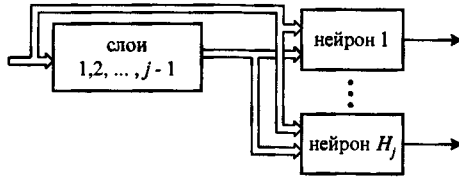


Рис. 3.3. К решению задачи оптимизации структуры разомкнутой нейронной сети с полными последовательными связями

где через  $[j-1]$  обозначено условно эквивалентное количество гиперплоскостей, реализуемых многослойной сетью с полными перекрестными связями и с  $(j-1)$ -м слоем. Данная сеть содержит  $L_{j-1} = \sum_{i=1}^{j-1} H_i$  нейронов, где через  $H_i$  обозначено количество нейронов в  $i$ -м слое нейронной сети. Как следует из структурной схемы, входные каналы каждого  $h_j$ -го нейрона  $j$ -го слоя ( $h_j = 1, \dots, H_j$ ) могут быть разделены на два множества. Первое множество составляют входные сигналы нейронной сети, второе – выходные сигналы нейронной сети с 1-го, 2-го, ...,  $(j-1)$ -го слоев. Тогда уравнение разделяющей поверхности, реализуемой одним  $h_j$ -м нейроном в  $j$ -м слое, имеет следующий вид:

$$a_{h_j 1}^T x - a_{h_j}^0 - a_{h_j 2}^T x_{k, j-1} = 0.$$

Здесь  $a_{h_j 1}$  – вектор настраиваемых весов входных сигналов нейронной сети нейрона  $h_j$ ;  $a_{h_j 2}$  – вектор настраиваемых весов входных и промежуточных сигналов  $(j-1)$ -слойной сети элемента  $h_j$ ;  $a_{h_j}^0$  – порог  $h_j$ -нейрона;  $x_{k, j-1}$  – вектор выходных сигналов нейрона  $(j-1)$ -го слоя.

Отсюда следует, что по отношению к исходному пространству признаков каждый из нейронов в  $j$ -м слое реализует столько параллельных гиперплоскостей, сколько вариантов вектора  $x_{k, j-1}$  порождает  $(j-1)$ -слойная нейронная сеть. Предполагая, что существует метод настройки нейронной сети, при котором все гиперплоскости, порождаемые вектором  $x_{h, j-1}$  в  $j$ -м слое, попадают в область исходного пространства признаков, соответствующую ему, запишем рекуррентную формулу для вычисления верхней оценки количества областей в виде:

$$\Psi_{N[j]} = \Psi_{N[j-1]} \Psi_{NH_j} \quad (3.4)$$

Это следует из того, что каждая из  $\Psi_{N[j-1]}$  областей, выделяемая  $(j-1)$ -слойной подсетью, разбивается на  $\Psi_{NH_j}$  обла-

стей. Здесь  $\Psi_{NH_j}$  определяется рекуррентным выражением (3.1). Запишем теперь нереккуррентную формулу. Из (3.4), а также из того, что первый слой нейронной сети разбивает пространство признаков на  $\Psi_{NH_1}$  областей, следует:

$$\Psi_{N[j]} = \prod_{i=1}^j \Psi_{NH_i} \quad (3.5)$$

Для вывода нижней оценки количества областей потребуем от каждой из  $\Psi_{N[j-1]}$  гиперплоскостей, порождаемых  $h_j$ -м нейроном, выполнения условия более сильного, чем попадание в область, соответствующую вектору  $x_{k, j-1}$ . Именно потребуем, чтобы некоторое количество гиперплоскостей из  $\Psi_{N[j-1]}$  могло быть проведено через любую точку исходного пространства изменением только свободного члена в уравнении гиперплоскости. Отметим, что в этом случае эти гиперплоскости, несомненно, могут попасть в любую область. Для оценки их количества составим систему линейных уравнений относительно настраиваемых весов и порога элемента  $h_j$ :

$$\Psi_{N[j-1]} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \dots 0 0 1 x^T \\ 0 \dots 0 1 1 x^T \\ 0 \dots 1 0 1 x^T \\ \dots \\ \dots \\ 1 \dots 1 1 1 x^T \end{bmatrix}}_{L_{j-1}} \times \begin{bmatrix} a_{1h_j 2} \\ a_{2h_j 2} \\ \vdots \\ a_{L_{j-1}h_j 2} \\ 0 \\ a_{h_j} \\ a_{h_j 1} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{\Psi_{N[j-1]}} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Здесь  $q_i (i=1, \dots, \Psi_{N[j-1]})$  – произвольно задаваемые числа. Отметим, что количество чисел  $q_i$ , которые можно задать произвольно, не нарушая равенства (3.6), есть искомое число гиперплоскостей из числа  $\Psi_{N[j-1]}$ , которые могут быть проведены через любую точку исходного пространства. Из (3.5) следует, что это число есть  $(L_{j-1}+1)$ , т.е. равно размерности вектора  $a_{h_j 2}$  плюс единица.

Отсюда следует рекуррентная формула для вычисления нижней оценки количества областей:

$$\Psi_{N[j]} = \Psi_{N[j-1]} - (L_{j-1}+1) + (L_{j-1}+1)\Psi_{NH_j}.$$

Здесь  $\Psi_{N[j-1]} - (L_{j-1}+1)$  – число областей, в которых не проводятся новые гиперплоскости;  $(L_{j-1}+1)\Psi_{NH_j}$  – число новых областей, которое появляется после разбиения.

Окончательно

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{N[j]} &= \Psi_{N[j-1]} + (L_{j-1} + 1)(\Psi_{NH_j} - 1) \\ L_j &= L_{j-1} + H_j \end{aligned} \right\}.$$

Выражение (3.7) есть окончательный результат вывода одномерном случае (3.7) имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{1[j]} &= \Psi_{1[j-1]} + (L_{j-1} + 1)H_j \\ L_j &= L_{j-1} + H_j \end{aligned} \right\}.$$

### 3.4. Частная задача оптимизации

Можно сформулировать несколько задач оптимизации структуры многослойных нейронных сетей с перекрестными связями.

1. Задано число слоев и число нейронов многослойной нейронной сети. Найти распределение нейронов по слоям, максимизирующее число областей  $\Psi$ , образованных кусочно-линейной разделяющей поверхностью, реализуемой данной многослойной нейронной сетью в исходном пространстве признаков.

2. Задано общее число нейронов сети. Найти число слоев и распределение нейронов по слоям, максимизирующее  $\Psi$ .

3. Задано количество областей  $\Psi$ , которое должно быть реализовано сетью, и число слоев в ней. Найти структуру, минимизирующую количество элементов в сети.

4. Найти структуру (количество слоев и распределение нейронов по слоям) при заданном  $\Psi$ , минимизирующую количество нейронов в сети. Отметим, что оптимизация структуры по числу областей представляет частный критерий оптимальности нейронной сети.

Рассмотрим синтез структуры одномерного варианта для указанных задач оптимизации.

1. Для заданного числа слоев нейронной сети  $W$  и числа нейронов во всей сети  $H$ , равного  $\sum_{j=1}^W H_j$ , найдем распределение элементов по слоям, максимизирующее  $\Psi_{1[W]}$ . Формальная задача ставится в виде соотношений, записанных с учетом (3.5) и (3.1):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^W H_j &= H; \\ \Psi_{1[W]}^{\text{opt}} &= \max_{H_1, \dots, H_W} \prod_{j=1}^W (H_j + 1). \end{aligned} \right\}$$

Метод множителей Лагранжа дает решение в виде системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \prod_{j=1}^W (H_j + 1) + \lambda &= 0, \quad i=1, \dots, W; \\ \sum_{j=1}^W H_j - H &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Решением системы (3.9) являются

$$\left. \begin{aligned} H_j &= \frac{1}{W} H \quad (j=1, \dots, W); \\ \lambda &= - \left( \frac{H}{W} + 1 \right)^{W-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Из (3.10) и (3.5) следует, что при этом

$$\Psi_{1[W]}^{\text{opt}} = - \left( \frac{H}{W} + 1 \right)^W, \quad (3.11)$$

т.е. при заданном числе слоев имеющееся число нейронов надо распределять по слоям равномерно. В связи с (3.10) возникает вопрос о целочисленности  $H_j$  ( $j=1, \dots, W$ ). Если  $H$  не делится на  $W$  нацело, то, как следует из (3.5) и (3.10), остаток элементов также следует распределить по слоям равномерно, причем не имеет значения как именно.

В этом смысле (3.11) есть верхняя оценка  $\Psi_{1[W]}^{\text{opt}}$ , которая становится точной верхней оценкой при  $H=KW$ , где  $K$  — целое число.

2. Для заранее незаданного числа слоев  $W$  и при ограничениях на количество нейронов  $H$  в сети найдем оптимальную по верхней оценке структуру. Это можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1^{\text{opt}} &= \max_{W \leq H} \Psi_{1[W]}^{\text{opt}}; \\ \sum_{j=1}^W H_j &= H. \end{aligned} \right\}$$

Из очевидного неравенства с учетом (3.11)

$$\left(\frac{H}{W} + 1\right)^W < \left(\frac{H}{W+1} + 1\right)^{W+1}$$

следует, что число областей с ростом числа слоев монотонно возрастает. Отсюда получается, что оптимальной в данном случае является  $H$ -слойная сеть с одним элементом в каждом слое, для которой из (3.11) следует, что

$$\Psi_1^{\text{opt}} = \left(\frac{H}{H} + 1\right)^H = 2^H$$

есть точная верхняя оценка.

3. Для заранее заданного числа слоев  $W$  и суммарного количества нейронов в сети найдем структуру, оптимальную по нижней оценке. С этой целью представим (3.8) в виде некуррентной формулы:

$$\Psi_{1[W]} = 1 + \sum_{j=1}^W H_j + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^W H_j \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^W H_j^2. \quad (3.12)$$

Условный экстремум (3.12) при условии  $\sum_{i=1}^W H_i = N$  согласно методу множителей Лагранжа достигается в случае, если ( $i = 1, \dots, W$ ) являются решениями системы

$$\left. \begin{aligned} H_i(\lambda - 1) + H + 1 &= 0; \\ \sum_{i=1}^W H_i - N &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда  $H_1 = H_1 = \dots = H_W = \frac{1}{W} N$  и при заранее заданном

$$\Psi_{1[W]}^{\text{opt}} = 1 + N + \frac{H^2}{2} - \frac{H^2}{2W}. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что  $\Psi_{1[W]}^{\text{opt}}$  монотонно возрастает при  $W$  и является точной при  $N = KW$ , где  $K$  — целое число. Отсюда  $\Psi_{1[W]}^{\text{opt}} = 1 + \frac{H + H^2}{2}$  для  $H$ -слойной сети с одним нейроном в слое.

ким образом, в одномерном случае ( $N=1$ ) структуры, оптимальные по верхней и нижней оценкам, совпадают.

4. Для многомерного варианта сети, оптимального по верхней оценке, на основании (3.5), так же, как в одномерном случае, можем записать:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{N[W]}^{\text{opt}} = \max_{W < H} \max_{H_1, \dots, H_N} \prod_{j=1}^W \Psi_{NH_j}; \\ \sum_{j=1}^W H_j = N. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Из (3.14), а также из (3.2) и (3.3) следует, что условиям оптимальности (3.14) отвечает целый класс структур, именно все структуры, для которых  $H_j \leq N$  ( $i = 1, \dots, W$ ):

$$\sum_{j=1}^W H_j = N. \quad (3.15)$$

Для этих структур

$$\Psi_N^{\text{opt}} = 2^{\sum_{j=1}^W H_j} = 2^N. \quad (3.16)$$

Для структур, у которых  $H_j > N$ , для любого  $j=1, \dots, W$   $\Psi_{N[W]}^{\text{opt}} < 2^N$ .

### 3.5. Оптимизация структуры по некоторым основным топологическим характеристикам

При технической реализации нейронной сети возникает естественное желание ограничить суммарное число входов в сети, вызванное тем, что число входов есть число технически трудно реализуемых блоков умножения. На этапе настройки выбранной структуры число входов равно размерности пространства настраиваемых коэффициентов, в котором производится поиск экстремума функционала качества нейронной сети. Поэтому уменьшение числа входов нейронов многослойной нейронной сети облегчает как реализацию, так и настройку.

Для нейронной сети с полными перекрестными связями суммарное количество входов нейронов в  $i$ -м слое равно

$$\gamma_j = (L_j + N) H_{ij}, \quad i_j = 1, \dots, W.$$

Отсюда следует выражение для суммарного количества входов нейронов в  $W$ -слойной сети:

$$\gamma_W = \sum_{j=1}^W \gamma_j = \sum_{j=1}^W \left[ \sum_{i=1}^i H_j + N \right] H_j = N \sum_{j=1}^W H_j + \frac{1}{2} H^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^W H_j^2. \quad (3.17)$$

На основании (3.17) задача синтеза многослойной нейронной сети с полными перекрестными связями, оптимальной верхней или нижней оценке количества областей при ограничении на суммарное число входов  $\gamma$  в сети, формулируется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{N[W]}^* &= \max_W \max_{H_1, \dots, H_W} \Psi_{N[W]}; \\ \gamma &\geq N \sum_{j=1}^W H_j + \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^W H_j \right]^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^W H_j^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Индекс \* означает экстремальное значение. С учетом (3.18) обратная задача, т.е. задача синтеза структуры многослойной нейронной сети с полными перекрестными связями, минимальной по суммарному числу входов, при ограничении на количество областей  $\Psi$ , реализуемых нейронной сетью, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_W &= \min_W \min_{H_1, \dots, H_W} \left[ N \sum_{j=1}^W H_j + \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^W H_j \right]^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^W H_j^2 \right]; \\ \Psi_{N[W]} &\geq \Psi. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

В формулах (3.18) и (3.19)  $\Psi_{N[W]}$  в зависимости от вида оценки определяется выражением (3.5) или (3.7).

Обратная постановка задачи синтеза является практически менее пригодной, чем прямая, так как задание ограничения на количество входных каналов в нейронной сети физически более оправдано, чем несколько расплывчатое ограничение на число областей.

**Пример 1.** Покажем, что структура многослойной нейронной сети, оптимальная по верхней оценке количества областей с ограничением на число элементов, будет в одномерном случае оптимальна по верхней оценке с ограничением по суммарному числу входов. Согласно методу множителей Лагранжа и (3.18) при  $N=1$  оптимальные  $H_1$  и  $H_W$  являются решениями следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \prod_{j=1}^W (H_j + 1) + \lambda \left[ 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq B_1}}^W H_j \right] &= 0, \quad j_1 = 1, \dots, W; \\ \sum_{j=1}^W H_j + \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^W H_j \right]^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^W H_j^2 - \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Здесь  $\lambda$  – множитель Лагранжа.

Решением (3.20) являются:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= 1, \quad j = 1, \dots, W; \\ \lambda &= -\frac{2^{W-1}}{W}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Здесь  $W$  – число слоев есть целая часть положительного корня уравнения  $W^2 + W - \frac{\gamma}{2} = 0$ .

Из (3.21) и следует исходное утверждение.

**Пример 2.** Рассмотрим синтез нейронной сети с учетом (3.19), где  $\Psi_{N[W]}$  определяется выражением (3.5). Отметим, что при перенесении нейрона из  $j$ -го слоя в  $j - j_2$ -слой уменьшение числа входов элемента для нейронной сети с полными перекрестными связями будет равно:

$$\Delta \gamma^- = \sum_{j_1=j-1}^{j-j_2} H_{j_1}, \quad (3.22)$$

а суммарное увеличение числа входов остальных элементов сети будет равно:

$$\Delta \gamma^+ = \sum_{j_1=j}^{j-j_2+1} H_{j_1}. \quad (3.23)$$

Из (3.22), (3.23) следует, что при перенесении нейрона из  $j$ -го в  $j - j_2$  слой число входных каналов в многослойной нейронной сети будет уменьшаться, если

$$\sum_{j_1=j-1}^{j-j_2} H_{j_1} > \sum_{j_1=j}^{j-j_2+1} H_{j_1} \quad \text{или} \quad H_{j-j_2} > H_j.$$

Из (3.15), (3.16) следует, что условиям оптимальности (3.19) отвечают две структуры с суммарным числом нейронов в сети  $N = \lceil \log_2 \Psi \rceil$ , где квадратные скобки означают округление до ближайшего целого в сторону увеличения.

$$H_1 = \Delta; H_j = N, j=2, \dots, W;$$

$$H_j = N; H_W = \Delta, j=1, \dots, W-1.$$

Здесь

$\Delta$  – остаток от деления  $N$  на  $W$ ;

$$W = \frac{N - \Delta}{N} + \delta, \text{ где } \delta = \begin{cases} 0 & \text{при } \Delta=0, \\ 1 & \text{при } \Delta \neq 0. \end{cases}$$

Обеим этим структурам отвечает одинаковое число входов, определяемое (3.17).

**Пример 3.** Рассмотрим оптимизацию структуры нейронной сети, оптимальной по длине связей.

Припишем каждой связи, идущей из  $j_1$ -го в  $j$ -й слой, некоторый вес  $U_{j_1 j}$ . Физическим смыслом такого веса наряду с длиной в обычном понимании может быть, например, величина обратная помехозащитности. Через  $U_{0j}$  обозначим длину связей входного вектора с  $j$ -м слоем.

Тогда суммарная длина связей нейронов в  $j$ -м слое будет

$$V_1 = H_1(U_{0j}N + \sum_{j_1=1}^{j-1} H_{j_1} U_{j_1 j}).$$

Суммарная длина связей в  $W$ -слойной сети будет, очевидно, равна

$$V_W = \sum_{j=1}^W H_j(U_{0j}N + \sum_{j_1=1}^{j-1} H_{j_1} U_{j_1 j}). \quad (3.25)$$

Аналогично (3.19) запишем:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{N[W]}^* &= \max_W \max_{H_1 \dots H_W} \Psi_{N[W]}, \\ V &\geq \sum_{j=1}^W H_j (U_{0j}N + \sum_{j_1=1}^{j-1} H_{j_1} U_{j_1 j}); \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

$$\left. \begin{aligned} V_W^* &= \min_W \min_{H_1 \dots H_W} \sum_{j=1}^W H_j (U_{0j}N + \sum_{j_1=1}^{j-1} H_{j_1} U_{j_1 j}); \\ \Psi_{N[W]} &\geq \Psi. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

В (3.25) и (3.26)  $\Psi$ , как и ранее, определяется выражением (3.5) или (3.7) в зависимости от вида оценки. Отметим, что  $U_{j_1 j} = 1$  ( $j_1 = 0, 1, \dots, W-1$ ;  $j = 1, \dots, W$ ) выражение (3.27)

совпадает с (3.17), а (3.25) и (3.26) соответственно с (3.18) и (3.19).

**Пример 4.** Естественно теперь рассмотреть наиболее общие ограничения на структуру нейронной сети, включающие в себя как частные случаи все остальные вышеперечисленные ограничения. С этой целью назначим цену одного нейрона  $\beta_N$ , цену одного входа  $\beta_\alpha$  и цену единицы длины связи  $\beta_u$ . Тогда на основании (3.17) и (3.24) суммарная стоимость запишется следующим образом:

$$S_W = \beta_N \sum_{j_1=1}^W H_{j_1} + \beta_\alpha [N \sum_{j_1=1}^W H_{j_1} + \frac{1}{2} (\sum_{j_1=1}^W H_{j_1})^2 - \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^W H_{j_1}^2] + \beta_u [ \sum_{j_1=1}^W H_{j_1} U_{0j} N + \sum_{j_1=1}^W H_{j_1} U_{j_1 j} ]. \quad (3.27)$$

Аналогично (3.18) и (3.19) сформулируем задачи синтеза многослойной нейронной сети с ограничением по стоимости  $S_W$  в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{N[W]}^* &= \max_W \max_{H_1 \dots H_W} \Psi_{N[W]}, \\ S &\geq S_W; \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{aligned} S_W^* &= \min_W \min_{H_1 \dots H_W} S_W, \\ \Psi_{N[W]} &\geq \Psi. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

В выражениях (3.28) и (3.29)  $S_W$  определяется выражением (3.27), а  $\Psi_{N[W]}$  – выражениями (3.32) и (3.7) в зависимости от вида оценки.

Отметим, что вариацией коэффициентов стоимости  $\beta_N$ ,  $\beta_\alpha$  и  $\beta_u$  в выражениях (3.28) и (3.29) могут быть получены все рассмотренные выше формулировки задач синтеза структуры нейронной сети.

### 3.6. Оптимизация структуры многослойных нейронных сетей с $K_p$ решениями

В данном случае многослойная нейронная сеть с полными перекрестными связями составлена из элементов, описываемых соотношением, приведенным в предыдущей главе. Каждый такой элемент реализует в своем пространстве признаков



совокупность параллельных разделяющих гиперплоскостей. Очевидно, что максимальное число областей, выделяемых исходном пространстве признаков эквивалентной разделяющей поверхностью, в данном случае не превышает  $K_p^N$ ,  $N$  – число нейронов в сети. Эта оценка достигается тогда для многослойных нейронных сетей с полными перекрестными связями.

Оценим количество областей, на которое пространство признаков размерности  $N$  может быть разбито  $H_1$  групп гиперплоскостей по  $(K_p - 1)$ -й гиперплоскости в каждой группе. Обозначим максимальное количество областей, выделяемых  $[H_1 - 1]$  группой через  $\Psi_{N[H_1-1]}^{K_p}$ . Тогда аналогично п. 3.3 и можно показать, что

$$\Psi_{N[H_1]}^{K_p} = \Psi_{N[H_1-1]}^{K_p} + z.$$

Оценим величину  $z$ . При проведении каждой из  $(K_p - 1)$  гиперплоскостей количество выделяемых областей увеличивается на число областей, образуемых на гиперплоскости линиями ее пересечения с остальными гиперплоскостями пространства, т.е. на  $\Psi_{N-1[H_1-1]}^{K_p}$ .

Отсюда

$$z = [K_p - 1] \Psi_{N-1[H_1-1]}^{K_p}$$

и окончательно

$$\Psi_{N[H_1]}^{K_p} = \Psi_{N[H_1-1]}^{K_p} + [K_p - 1] \Psi_{N-1[H_1-1]}^{K_p} \quad (3.32)$$

с начальными условиями

$$\Psi_{N[1]}^{K_p} = K_p; \Psi_{N[H_1]}^{K_p} = H_1 [K_p - 1] + 1. \quad (3.33)$$

Исходя из (3.30) и (3.31) можно показать, что

$$\Psi_{N[H_1]}^{K_p} = K_p^{H_1} \quad \text{при } H_1 \leq N; \quad (3.34)$$

$$\Psi_{N[H_1]}^{K_p} < K_p^{H_1} \quad \text{при } H_1 > N.$$

Рассмотрим  $h_j$ -й нейрон с  $K_p$  решениями, расположенный в  $j$ -м слое многослойной нейронной сети с полными перекрестными

связями. Входные сигналы  $h_j$ -го нейрона могут быть разбиты на две группы:  $x = [x_1, \dots, x_N]$  – вектор входных сигналов и  $y = [y_1, \dots, y_L]$  – вектор-строка выходных и промежуточных сигналов  $(j - 1)$ -слойной нейронной сети. Пусть  $(j - 1)$ -слойная нейронная сеть выделяет в исходном пространстве признаков  $\Psi_{N[j-1]}^{K_p}$  областей.

Тогда по каналам  $y$  на входы  $h_j$ -го нейрона может поступить  $\Psi_{N[j-1]}^{K_p}$  различных вариантов вектора  $y$ . Уравнение для выходного сигнала  $h_j$ -го нейрона с  $K_p$  решениями может быть записано в следующем виде:

$$x_{kh_j} = F_p(A_{h_j} x + A_{h_j}^1 y), \quad h_j = 1, \dots, H_j, \quad (3.33)$$

где  $A_{h_j}$  и  $A_{h_j}^1$  – векторы весовых коэффициентов соответственно для  $x$  и  $y$ .

Геометрически, как следует из (3.33), каждый из  $H_j$  нейронов с  $K_p$  решениями реализует в пространстве входных сигналов нейронной сети  $(K_p - 1) \Psi_{N[j-1]}^{K_p}$  параллельных гиперплоскостей. Допуская, что существует метод настройки коэффициентов нейронной сети, при котором для каждого  $h_j$ -го нейрона каждые  $(K_p - 1)$  гиперплоскостей, порожденных вариантом вектора  $y$ , проходят через область исходного пространства признаков, соответствующую ему, запишем выражение для верхней оценки числа областей, на которое пространство  $X$  разбивается рассматриваемой  $j$ -слойной нейронной сетью:

$$\Psi_{N[j]}^{K_p} = \Psi_{N[j-1]}^{K_p} \Psi_{NH_j}^{K_p}. \quad (3.34)$$

Здесь  $\Psi_{NH_j}^{K_p}$  определяется выражениями (3.30) и (3.31). Если считать (3.34) рекуррентным выражением и вспомнить, что первый слой нейрона с  $K_p$  решениями разбивает пространство  $X$  на  $\Psi_{NH_j}^{K_p}$  областей, то (3.34) переписывается в следующем виде:

$$\Psi_{N[j]}^{K_p} = \prod_{i=1}^j \Psi_{NH_i}^{K_p}. \quad (3.35)$$

Выражение (3.35) позволяет поставить и решить задачу синтеза структуры нейронной сети, оптимальной по верхней оценке количества областей при ограничении на суммарное число  $N$  нейронов в нейронной сети. Из (3.35) и (3.32) следует, что в  $W$ -слойной нейронной сети

$$\Psi_{N\{W\}}^{K_p} = K_p \left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^W H_j \\ \text{при } H_j \leq N; \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\Psi_{N\{W\}}^{K_p} = K_p \quad \text{при } H_j > N \quad (j=1, \dots, W).$$

Следовательно, оптимальной по верхней оценке числа слоев будет нейронная сеть с полными перекрестными связями такая, что число нейронов с  $K_p$  решениями в любом ее слое не превышает размерности исходного пространства признаков.

### Литература

- 3.1. Лупанов О.Б. О возможностях синтеза схем из произвольного числа элементов. Труды Математического института В.А. Стеклова, т. 51, 1958, с. 158–173.
- 3.2. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. – М., Энергия, 1974.
- 3.3. Галушкин А.И., Шмид А.В. Оптимизация структуры многослойных нейронных сетей с перекрестными связями. // Нейрокомпьютер, №3,4, 1992.

## Глава 4. Континуальные нейронные сети

При построении структур многослойных нейронных сетей приходится оперировать большим числом параметров, задающих входной сигнал, например, в системе распознавания образов, когда стремятся обеспечить максимальную вероятность правильного распознавания [1]. Предлагается учитывать в математических моделях и при технической реализации континуальные свойства той или иной характеристики многослойной нейронной сети.

### 4.1. Нейроны с континуумом признаков на входе

Переход к континууму признаков становится актуальным, когда размерность  $N$  некоторого вектора признаков  $x_i$ , связанная, например, с квантованием сигналов, становится большой (несколько сот или тысяч). В этом случае вектор признаков  $\{x_i, i=1, \dots, N\}$  заменяется функцией непрерывного аргумента  $\{x(i), i \in I\}$ , весовой вектор  $\{a_m, m=1, \dots, M\}$  заменяется весовой функцией  $\{a(m), m \in M\}$ . Модель нейрона с континуумом признаков по аналогии с классическим дискретным случаем [4.2] задается выражением

$$y = \text{sign} \left( \int_M a(m)x(m)dm + a_0 \right), \quad (4.1)$$

где  $y$  – выходной сигнал нейрона;  $x(m)$  – входной сигнал нейрона;  $a_0$  – пороговое значение.

Переход к континууму признаков на входе первого слоя нейронной сети зачастую исключает необходимость квантования входного сигнала (например, периодического электрического сигнала, изображения и т.п.). В зависимости от конкретного физического типа входного сигнала выбирается метод технической реализации весовой функции нейрона. Например, в случае, когда входной сигнал является электрическим сигналом, меняющимся во времени, весовую функцию также следует генерировать в виде электрического сигнала. Если же входным сигналом сети является оптическое изображение, то весовая функция может быть реализована на фотомаске. При дискретном множестве нейронов с континуальным пространством признаков

$$y_{m_2}(n) = \text{sign} \left[ \int_{M_1} x(m^1, k) a_m^2(k) dm^1 + a_0, m^2 \right]. \quad (4.2)$$

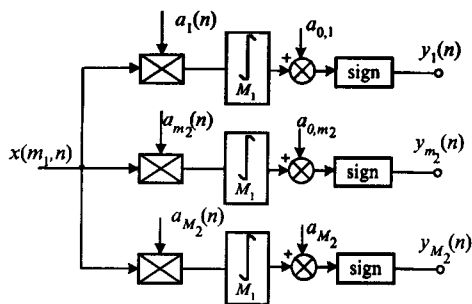


Рис. 4.1. Слой нейронов с континуумом признаков на входе

Структура слоя нейронов в соответствии с (4.2) представлена на рис. 4.1.

#### 4.2. Континуум нейронов в слое

Переход к континуальному пространству выходных сигналов слоя нейронов можно интерпретировать в некотором смысле как континуум числа нейронов в слое, что влечет собой реализацию выходного сигнала слоя нейронов не в виде конечномерного вектора, состоящего, например, из 1 и -1 как на рис. 4.1, а в виде сигнала  $y(m_2, n)$ , принимающего значение 1 и -1 на интервале  $(0, M_2)$  изменения непрерывного аргумента  $m_2$ . Отсюда следует, что при рассмотрении континуума признаков с учетом (4.2) выходной сигнал есть бесконечномерный вектор, каждая компонента которого принимает значение:

$$y(m_2, n) = \text{sign} \left[ \int_{M_1} x(m_1, n) a(m_2, m_1) dm_1 + a_0(m_2) \right]$$

Выражение (4.3) является основой для рассмотрения методов физической реализации разомкнутых систем подобного типа.

#### 4.3. Континуум нейронов слоя и дискретное множество признаков

В частном случае дискретного множества признаков и континуума нейронов в слое из (4.3) при переходе от непрерывной переменной  $m_1$  к дискретной переменной получим:

$$y(m_2, n) = \text{sign} \left[ \sum_{m_1} x_{m_1}(n) a_{m_1}(m_2) + a_0(m_2) \right]$$

Это выражение служит основой для реализации нейронной сети, частный случай которой представлен на рис. 4.2.

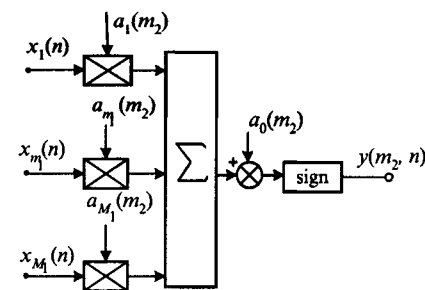


Рис. 4.2. Дискретное множество пространства признаков. Континуум нейронов в слое

Выходной сигнал слоя нейронов представляет собой электрический сигнал с признаками формы на  $n$ -м периоде своего существования. Электрические сигналы  $a_{m_1}(m_2)$  и  $a_0(m_2)$  генерируются внутри системы каждый раз на  $n$ -м шаге, причем в отличие от системы распознавания сигналов по форме, их период определяется априори. В этом случае на выходе слоя нейронов появляется электрический сигнал, принимающий два значения: (1, -1) в интервале  $(0, M_2)$  (рис. 4.3). Здесь  $M_2$  – интервал времени, на котором генерируются сигналы  $a_{m_1}(m_2)$  и  $a_0(m_2)$  и на котором существует выходной сигнал  $y(m_2, n)$ . Подобная модель слоя с континуумом нейронов адекватна нейрофизиологической модели нейрона при введении импульсно-частотной модуляции выходного сигнала слоя.

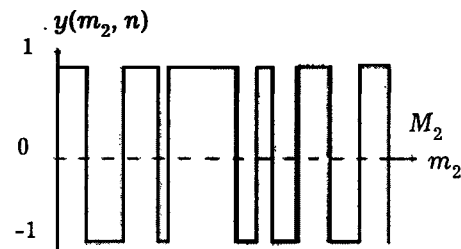


Рис. 4.3. Форма выходного сигнала слоя нейронов

#### 4.4. Классификация континуальных моделей слоя нейронов

Рассматриваемые ниже системы предназначены для распознавания одноканальных электрических сигналов типа: «всплеск» – сигнал с синхронизацией начала всплеска и периодический сигнал с синхронизацией на каждом периоде (рис. 4.4).

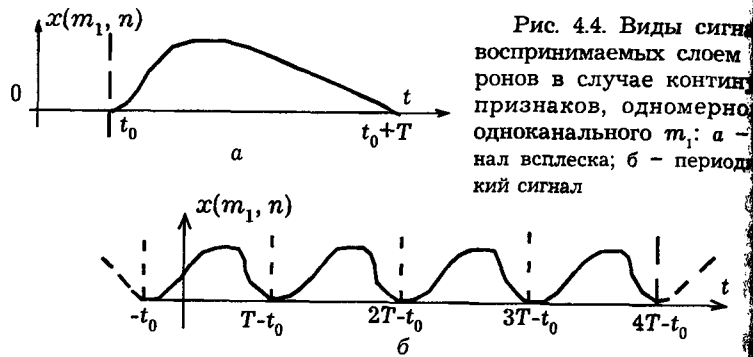


Рис. 4.4. Виды сигналов, воспринимаемых слоем нейронов в случае континуума признаков, одномерного одноканального  $m_1$ : а - сигнал всплеска; б - периодический сигнал

#### 4.4.1. Дискретное множество нейронов

В данном случае основой для реализации нейронной сети служит выражение (4.2), в котором  $y_{m_2}(n)$  принимает два значения: (1,-1);  $x(m_1, n)$  и  $a_{m_2}(n)$  - электрические сигналы  $n$ -м периоде своего существования, а  $a_{0m_2}$  - постоянный коэффициент.

#### 4.4.2. Одномерное и двумерное $m_2$ пространство признаков

Основой для реализации нейронной сети в данном случае является выражение (4.3). Трудность для реализации представляет блок перемножения непрерывной функции одной переменной на непрерывную функцию двух переменных, из которых совпадает с переменной первой функции. Требование сохранения континуальности входного пространства делает необходимой реализацию функции  $x(m_2, n)$  по типу электрического сигнала, тогда как требование континуальности выходного пространства слоя делает необходимым реализацию функции  $a(m_2, m_1)$  по типу изображения. В данном случае основную трудность представляет перемножение  $x(m_2, n)$  и  $a(m_2, m_1)$ . Можно предположить физическое существование оптического элемента  $x_{str}$ , потемнение (или посветление) которого изменяется в реальном времени по одной из координат в зависимости от формы прилагаемого напряжения, а форма выходного напряжения - в зависимости от распределения потемнения (или посветления) по координате при интегрировании интенсивности по другой. Этот элемент условно можно назвать «пространственным оптроном». Тогда реализация рассматриваемой системы имела бы вид, изображенный на рис. 4.5, где входной электрический сигнал слоя подавался бы к ве-

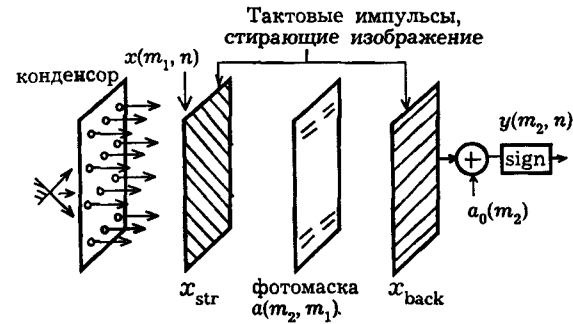


Рис. 4.5. Гипотетический вариант реализации оптической системы в случае одномерного, одноканального  $m_1$  и двумерного  $m_2$

кальной пластине элемента  $x_{str}$  на входе, а выходной сигнал снимался с горизонтальной пластины выходного элемента  $x_{back}$ . Из рассмотренного выше следует, что при существующем уровне развития техники рассматривать случай двумерного  $m_2$  затруднительно, так как это потребует физической реализации трехмерной функции  $a(m_2, m_1)$ .

#### 4.4.3. Континуум признаков. Одномерное $m_1$ для нескольких каналов

Этот случай имеет большое практическое значение, ибо зачастую необходимо распознавать не одноканальный электрический сигнал с априори информативными признаками формы, а многоканальный сигнал (например, при распознавании ЭКГ и РЭГ, когда одновременно или синхронно анализируются, например, три отведения) (рис. 4.6). Для реализации нейронной сети в этом случае можно воспользоваться выражением

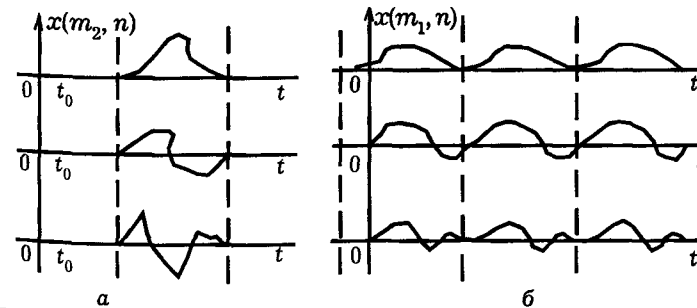


Рис. 4.6. Виды сигналов, воспринимаемых слоем нейронов в случае континуума признаков, одномерного и многоканального  $m_1$ : а - сигнал всплеск; б - периодический сигнал

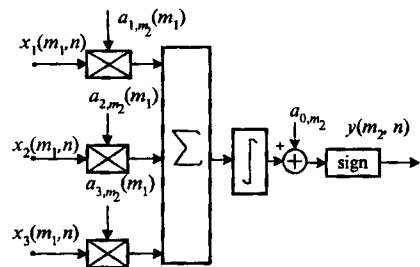


Рис. 4.7. Блок-схема физической реализации нейрона с континуумом признаков, одномерным многоканальным  $m_1$

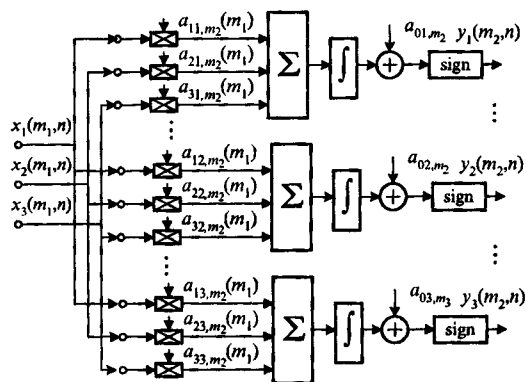


Рис. 4.8. Структура многоканального слоя нейронов с дискретным множеством нейронов в случае континуума признаков и одномерного пространства признаков

ем (4.2), где  $x(m_1, n)$   $a_{m_2}(m_1)$  – скалярное произведение векторов-функций. Структура нейрона такого варианта дана на рис. 4.7, а слой нейронов представляет собой параллельное соединение нейронов, имеющих одинаковые входы (рис. 4.8).

#### 4.4.4. Континуум признаков. Двумерное $m_1$

При дискретном множестве нейронов в слое адекватным вариантом двумерного  $m_1$  является задача распознавания изображений. При этом с учетом выражения (4.2) структура нейронов в случае континуума признаков и двумерного  $m_1$  может быть представлена в виде рис. 4.9. Система распознавания изображений может быть реализована на волоконно-оптической технике, либо с помощью голографических методов или систем зеркал.

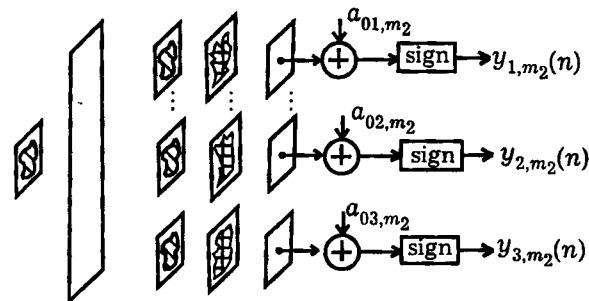


Рис. 4.9. Блок-схема физической реализации слоя нейронов с континуумом признаков, двумерным  $m_1$  и дискретным множеством элементов в слое

#### 4.4.5. Слой нейронов с континуумом выходных значений

При введении нейронов с континуумом выходных значений выходное пространство остается по существу пространством табличных признаков, принимающих непрерывное множество значений в некотором диапазоне изменения, определяемом функцией активации, т.е. нелинейным преобразованием на выходе нейронов. Сказанное относится и к системам (4.2) (рис. 4.1, 4.9).

Для систем, описываемых уравнением (4.4), выходной электрический сигнал системы в виде функции одной переменной, принимающей два значения (-1, 1) на некотором периоде своего изменения, при переходе к нейронам с континуумом решений преобразуется в электрический сигнал, непрерывно изменяющийся по амплитуде.

Многослойные нейронные сети, решающие различные задачи обработки векторов, сигналов и изображений могут быть построены как различные комбинации описанных континуальных систем. Перспективными задачами в рассматриваемой области, на наш взгляд, являются следующие:

- нахождение методов физической реализации различных типов континуальных моделей многослойных сетей;
- разработка методов синтеза структуры континуальных моделей многослойных сетей (выбора числа слоев, их последовательности т.д.) по некоторым количественным критериям;
- разработка других априори заданных типов структур континуальных моделей многослойных сетей (систем с

- использование систем «человек-машина» для синтеза континуальных моделей многослойных сетей;
- введение новых континуальных свойств многослойных сетей (континуум числа слоев и пр.).

Переход к континуальному множеству признаков и континуальному множеству нейронов в слоях обусловлен необходимостью оперирования большим количеством (несколько тысяч и десятков тысяч) признаков и нейронов в слоях.

Проблема континуума числа слоев, с этой точки зрения не является столь острой. Предварительное рассмотрение вопроса показало наличие принципиальных затруднений тематического характера при переходе к континууму числу слоев. Это следует из выражения для выходного сигнала такой слоистой системы:

$$y_3 = \text{sign} \sum_{m_3}^{M_3} a_{m_3} \text{sign} \sum_{m_2}^{M_2} a_{m_2} \text{sign} \sum_{m_1}^{M_1} a_{m_1} x_{m_1}$$

Решение задачи перехода к континууму числа слоев усложняется в первую очередь наличием нелинейных преобразователей на выходе нейронов каждого слоя, а также трудностью выбора метода физической реализации разомкнутой системы, адекватной такой модели.

## Литература

1. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. -М.: Энергия, 1974.
2. Rosenblatt F. Principles of neurodynamics. Spartan Press, Washington. 1962. Русск. пер. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. - М.: Мир, 1965.
3. Галушкин А.И. Континуальные модели многослойных систем распознавания образов. //Автоматика и вычислительная техника. - Рига -1977- №2.
4. Галушкин А.И. Континуальные нейронные сети. //Нейрокомпьютер. -1992 -№2.

## РАЗДЕЛ 2. ОПТИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

### Глава 5. Исследование характеристик входных сигналов нейронных сетей

#### 5.1. Постановка задачи

Нейронная сеть может быть представлена в виде эквивалентной системы, приспособляющейся в определенном режиме к внешним условиям. Общая структурная схема такой системы изображена на рис. 5.1, где  $x(n)$  есть многомерный случайный процесс, представляющий собой последовательность образов на входе нейронной сети,  $n$  – дискретный ар-

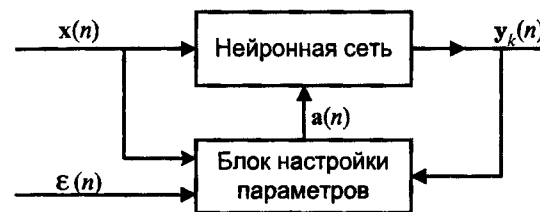


Рис. 5.1. Структурная схема нейронной сети образов

гумент. Сигнал  $\epsilon(n)$  определяется в частности как указание учителя о принадлежности текущего образа на входе нейронной сети к тому или иному классу. Каждый класс охватывает определенное множество образов, объединенных некоторым общим свойством. Многомерный выходной сигнал системы распознавания  $y(n)$  формируется в частности в виде данных нейронной сети о принадлежности текущего образа к той или иной области пространства решений. В связи с этим рассматриваются  $X, E, Y$  – соответственно пространства образов, указаний учителя и выходных сигналов нейронной сети. Блок настройки параметров нейронной сети, кроме вектора  $a(n)$  настраиваемых коэффициентов, в общем случае выдает информацию о структуре преобразования  $y(x)$ , представляющего собой зависимость выходного сигнала нейронной сети от входного;  $g(n)$  – вектор промежуточных сигналов нейронной сети.

Входным сигналом нейронной сети является сигнал  $[x(n), \epsilon(n)]$ , одной из характеристик которого является число гра-

даций сигнала  $\epsilon(n)$  по уровню, определяемое числом классов образов. При этом независимо от этого сигнал  $x(n)$ , и его размерность  $N$ , в общем случае может быть как дискретным, так и непрерывным по амплитуде. Если  $\epsilon(n)$  — одномерный сигнал, квантованный по уровню на две градаций, имеют дело соответственно с двумя или  $K$  классами образов. Если вектор  $\epsilon(n)$  имеет размерность  $N^*$  и  $K$  градаций каждой компоненты его по амплитуде равно то число классов

$$K = (K_0)^{N^*}.$$

Для сигнала  $\epsilon(n)$ , имеющего не дискретное, а непрерывное распределение, рассматривается случай континуума классов, когда задачу настройки нейронной сети при общей постановке можно трактовать как задачу оценки системой некоторого непрерывного параметра  $\epsilon$  распределения  $f(x, \epsilon)$  случайного процесса.

Конкретную задачу настройки (обучения) нейронной сети можно проиллюстрировать следующим примером. Рассмотрим формирование входного сигнала нейронной сети в случае континуума признаков в задаче прогнозирования надежности некоторого устройства. На рис. 5.2  $x_j(t_0)$  — кривые изменения во времени некоторого параметра устройства, по которому проверяется надежность испытания,  $j$  — номер испытываемого устройства,  $x_0$  — допустимое значение параметра, ниже которого устройство считается годным.

Точка пересечения кривой  $x_j(t_0)$  с уровнем  $x_0$  определяет время работы устройства. Каждой кривой соответствует вектор  $x_j(n)$ , полученный квантованием кривой по времени на интервале  $[0, T_0]$ , где  $T_0$  — время испытания устройства, выпускаемого из про-

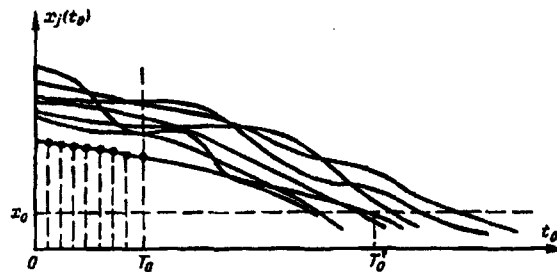


Рис. 5.2. К формированию пространства признаков и указанию учителя в задаче прогнозирования надежности приборов

ства; компоненты вектора  $x_j(n)$  соответствуют ординатам  $x_j(t_0)$  в точках квантования. Таким образом формируется пространство признаков нейронной сети в данной задаче.

Указание учителя может быть сформировано следующим образом. Априори задается ресурс времени работы устройства  $T_0'$ . При этом векторы  $x_j(n)$ , фиксируемые точкой пересечения кривой  $x_j(t_0)$  с уровнем  $x_0$ , лежащим слева от  $T_0'$ , относятся к первому классу (негодных устройств), а лежащим справа от  $T_0'$  — ко второму классу (годных устройств). Соответственно этому вводятся две градации (произвольные) сигнала  $\epsilon(n)$  по амплитуде, в частности равные  $\pm 1$ . Ось  $t_0$  априори может быть разбита на  $K$  интервалов с указанием сорта устройства, и сигнал  $\epsilon(n)$  будет иметь  $K$  градаций по амплитуде (например,  $\epsilon = 1, \dots, K$ ); каждому вектору  $x_j(n)$  будет приписано свое значение  $\epsilon$ .

В предельном случае при отсутствии процесса априорного разбиения оси  $t_0$  на отрезки системе распознавания образов для каждой кривой  $x_j(t_0)$ , как вектора  $x_j(n)$ , сообщается указание учителя о времени работы устройства до выхода из строя (пересечения  $x_j(t_0)$  уровня  $x_0$ ) в виде величины, имеющей непрерывное распределение.

Задачей исследования характеристик входного сигнала является вывод и анализ выражений для функций распределения вероятностей входных сигналов при различной априорной информации о входном сигнале и различных режимах работы системы.

Предметом исследования в каждом конкретном случае могут быть: совместное распределение  $f(x, \epsilon)$ , условное распределение  $f'(x/\epsilon)$  совокупности образов  $x$  при заданном указании  $\epsilon$  о принадлежности образов  $k$ -му классу, условное распределение  $f'(x/\epsilon)$ , собственные распределения сигналов  $f(x)$  и  $f_\epsilon(\epsilon)$ , а также смешанные моменты этих распределений.

Введением понятия квалификации учителя создается единый подход к решению задач обучения и самообучения. Совместный закон распределения входных образов и сигнала указания принадлежности образов к классам представлен на основе единого подхода.

### 5.2. Совместный закон распределения вероятностей входного сигнала для двух классов образов

В задаче обучения нейронной сети принадлежность представителей обучающей выборки к тому или иному классу известна с вероятностью, равной единице, т.е. учитель дает точ-

ное указание, к какому классу относится сигнал из обучающей выборки. При самообучении сигналы в обучающей выборке не сопровождаются указанием об их принадлежности к тому или иному классу и вероятность принадлежности предстителей обучающей выборки, в простейшем случае с двумерным распределением, к классам, соответствующим каждому, равна не единице, как в случае обучения, а 0,5. Вероятность указания учителя об объективной принадлежности образов к тому или иному классу обозначим через  $a$ .

Представляет интерес рассмотрение промежуточных режимов, режимов плавного перехода от задачи обучения самообучению и наоборот в расчетной блок - схеме алгоритма (рис. 5.3). Переход должен осуществляться изменением пределов от  $a=1$  до  $a=0,5$  (и наоборот) вероятности при

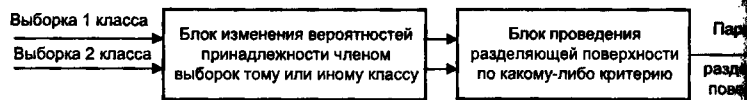


Рис. 5.3. Структура математической модели единого подхода к задачам обучения и самообучения систем распознавания образов

лежности членов обучающей выборки тому или иному классу. Рассмотрение этих режимов необходимо для:

1. Создания общего подхода к анализу и синтезу обучения и самообучения систем распознавания образов.

2. Решения некоторых практических задач, в частности обучения системы распознавания образов с учителем, имеющим ограниченную, неполную квалификацию, т.е. делающим определенное количество ошибок при обучении системы распознавания. В случае, когда учитель совсем не делает ошибок, мы имеем дело с указанным выше режимом обучения. Если учитель ничего не знает о входных образах и выдает последовательность указаний принадлежности выборок к классам совершенно произвольно, независимо от представлений обучающей выборки, мы имеем дело со случаем  $a=0,5$ , т.е. случаем самообучения.

Заметим, что при рассмотрении подобного общего подхода к задаче, включающей режимы обучения и самообучения, частные случаи, приходится в любом из рассматриваемых

режимов (обучение, самообучение и промежуточных) называть выборку на входе обучающей.

Выражение для совместного закона распределения  $f(x, \epsilon)$  сигнала  $x(n)$ , соответствующего последовательности образов, и сигнала  $\epsilon(n)$  указания учителя о принадлежности образов к классам имеет следующий вид:

$$f(x, \epsilon) = \begin{cases} p_1(1-a)f_1(x) + p_2a f_2(x) & \text{при } \epsilon=1, \\ p_1a f_1(x) + p_2(1-a)f_2(x) & \text{при } \epsilon=-1, \end{cases} \quad (5.1)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  - априорные вероятности появления первого и второго класса,  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  - законы распределения сигналов  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , представляющих в данном случае образы первого и второго класса.

Распределение (5.1) является дискретно-непрерывным из-за дискретной записи функции  $\epsilon(n)$ , хотя в принципе его можно записать в непрерывной форме, используя  $\delta$ -функцию Кронекера. Особенность дискретного представления учитывается далее заменой операции интегрирования по  $\epsilon$  операцией суммирования.

Степень квалификации учителя  $b$  вводится следующим образом [5.1, 5.2]:

$$b = 2a - 1. \quad (5.2)$$

Отсюда  $b = 1$  при  $a = 1$  - учитель имеет полную квалификацию,  $b = 0$  при  $a = 0,5$  - учитель не имеет квалификации.

При подстановке (5.2) в (5.1) получаем:

$$f(x, \epsilon) = \begin{cases} \frac{p_1(1-b)}{2} f_1(x) + \frac{p_2(1+b)}{2} f_2(x) & \text{при } \epsilon=-1, \\ \frac{p_1(1+b)}{2} f_1(x) + \frac{p_2(1-b)}{2} f_2(x) & \text{при } \epsilon=1. \end{cases} \quad (5.3)$$

На рис. 5.3. представлена структура математической модели формирования входного сигнала нейронной сети для данного случая.

Выражения (5.3) и (5.2) относятся к случаю, когда степень квалификации учителя при отнесении им образа из выборок первого или второго класса одинакова и равна  $b$ . Соответственно одинаковой для этих классов и равной  $a$  будет вероятность принадлежности текущего образа классам. Из (5.3) при  $b = 1$  следует совместный закон распределения входного сигнала в режиме обучения нейронной сети:



$$f(x, \varepsilon) = \begin{cases} p_2 f_2(x) & \text{при } \varepsilon=1, \\ p_1 f_1(x) & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases}$$

Совместный закон распределения входного сигнала в режиме самообучения нейронной сети при  $b = 0$  имеет следующие

$$f(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)}{2} & \text{при } \varepsilon=1, \\ \frac{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)}{2} & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases}$$

Здесь сигнал  $\varepsilon(n)$ , являющийся указанием учителя, не несет никакой информации о принадлежности образов к тому или другому классу, так как условные вероятности  $f'(x/\varepsilon=1)$  и  $f'(x/\varepsilon=-1)$  равны между собой.

Из (5.3) при  $b = -1$  имеем:

$$f(x, \varepsilon) = \begin{cases} p_1 f_1(x) & \text{при } \varepsilon=1, \\ p_2 f_2(x) & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases}$$

В этом случае учитель специально осуществляет невзвешенную классификацию (учитель является «вредителем»).

Составим выражение для условных законов распределения вероятностей входного сигнала. По определению условной вероятности

$$f'(x/\varepsilon) = \frac{f(x, \varepsilon)}{f_\varepsilon(\varepsilon)},$$

где  $f_\varepsilon(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \varepsilon) dx$ .

После интегрирования выражения (5.3) получим функцию распределения указаний учителя в следующем виде:

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{b}{2}(p_2 - p_1) & \text{при } \varepsilon=1, \\ \frac{1}{2} + \frac{b}{2}(p_1 - p_2) & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases}$$

Подставив (5.6) и (5.3) в формулу (5.5), получим:

$$f'(x/\varepsilon) = \begin{cases} \frac{p_1(1-b)f_1(x) + p_2(1+b)f_2(x)}{1-b(p_1-p_2)} & \text{при } \varepsilon=1, \\ \frac{p_1(1+b)f_1(x) + p_2(1-b)f_2(x)}{1-b(p_1-p_2)} & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases} \quad (5.7)$$

Условный закон распределения  $f''(\varepsilon/x)$  определяется аналогично

$$f''(x/\varepsilon) = \frac{f(x, \varepsilon)}{f(x)}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \varepsilon) d\varepsilon = \sum_{k=1}^2 p_k f_k(x),$$

где интегрирование по дискретному аргументу  $\varepsilon$  заменяется операцией суммирования. После подстановки и интегрирования имеем:

$$f''(\varepsilon/x) = \begin{cases} \frac{p_1 \frac{(1-b)}{2} f_1(x) + p_2 \frac{(1+b)}{2} f_2(x)}{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)} & \text{при } \varepsilon=1, \\ \frac{p_1 \frac{(1+b)}{2} f_1(x) + p_2 \frac{(1-b)}{2} f_2(x)}{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)} & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases} \quad (5.8)$$

При  $b=0$  из (5.7) и (5.8) следует

$$f'(x/\varepsilon) = f_x(x), \quad f''(\varepsilon/x) = f_\varepsilon(\varepsilon),$$

что указывает на статистическую независимость сигналов  $x(n)$  и  $\varepsilon(n)$  на входе нейронной сети в режиме самообучения.

Обозначим через  $\alpha_j$  смешанный момент  $j$ -го порядка многомерного случайного процесса  $x(n)$

$$\alpha_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_{i_1} \dots x_{i_j} f_x(x_1, \dots, x_N) dx_1, \dots, dx_N, \quad i_1, \dots, i_j = 1, \dots, N.$$

Тогда выражение для моментов распределения (5.3) имеет вид:

$$\overline{\varepsilon^i x^j} = p_1 \frac{1-b}{2} \alpha_{j1} + p_2 \frac{1+b}{2} \alpha_{j2} + (-1)^j p_1 \frac{1+b}{2} \alpha_{j1} + (-1)^j p_2 \frac{1-b}{2} \alpha_{j2},$$

где  $\alpha_{j1}$  и  $\alpha_{j2}$  — смешанные моменты  $j$ -го порядка совокупностей образов первого и второго класса. При четном и нечетном  $i$  соответственно

$$\overline{\varepsilon^i x^j}^n = p_2 \alpha_{j2} + p_1 \alpha_{j1}; \quad \overline{\varepsilon^i x^j}^n = b(p_2 \alpha_{j2} - p_1 \alpha_{j1}).$$

Отсюда следует, что квалификация учителя влияет на моменты распределения  $f(x, \varepsilon)$  при нечетном  $i$ .

*Неравная квалификация учителя относительно образов первого и второго класса.* В практических задачах может встретиться случай, когда квалификация учителя системы распознавания образов или вероятность принадлежности текущего образа на входе нейронной сети будет различной для первого и второго класса. Введем в рассмотрение стохастическую матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 - a_2 \\ 1 - a_1 & a_2 \end{bmatrix},$$

где  $a_{ij}$  — вероятность отнесения учителем образов  $j$ -го класса к  $i$ -му классу. В данном случае

$$f(x, \varepsilon) = \begin{cases} p_1(1 - a_1)f_1(x) + p_2 a_2 f_2(x) & \text{при } \varepsilon=1, \\ p_1 a_1 f_1(x) + p_2(1 - a_2)f_2(x) & \text{при } \varepsilon=-1, \end{cases}$$

или

$$f(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{p_1(1 - b_1)}{2} f_1(x) + \frac{p_2(1 + b_2)}{2} f_2(x) & \text{при } \varepsilon=1, \\ \frac{p_1(1 + b_1)}{2} f_1(x) + \frac{p_2(1 - b_2)}{2} f_2(x) & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases} \quad (5.9)$$

Рассмотрение различных вариантов для соотношений между величинами  $b_1$  и  $b_2$  может привести к появлению интересных и значительных для практики режимов работы нейронной сети. Например, при  $b_1=1$  и  $b_2=0$  квалификация учителя относительно первого класса равна единице, а по отношению к представителям второго класса учитель не имеет информации. При этом

$$f(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2} p_2 f_2(x) & \text{при } \varepsilon=1, \\ p_1 f_1(x) + \frac{1}{2} p_2 f_2(x) & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases}$$

Данный случай в каком-то смысле является промежуточным между режимами обучения и самообучения.

Моменты распределения, определяемые из (5.9), имеют вид:

100

$$\overline{\varepsilon^i x^j}^n = p_2 \alpha_{j2} + p_1 \alpha_{j1} \quad \text{при } i \text{ четном};$$

$$\overline{\varepsilon^i x^j}^n = b_2 p_2 \alpha_{j2} - b_1 p_1 \alpha_{j1} \quad \text{при } i \text{ нечетном.}$$

*Совместный закон распределения при наличии «собственного мнения учителя о своих способностях».* Объективно учитель делает некоторое количество ошибок при обучении системы распознавания образов. Выше рассмотрены случаи, когда учитель сам до конца самонадеян, т.е. думает, что обладает полной квалификацией. Введем понятие «собственного мнения учителя о своей квалификации», характеризуемого коэффициентом  $c$ . Тогда при  $c > b$  имеем «самоуверенность учителя», равную  $c - b$ , а при  $c < b$  «скромность учителя», равную  $b - c$ . Встает вопрос исследования влияния на работу нейронной сети указанных характеристик и определения оптимального с некоторой точки зрения соотношения истинной квалификации учителя и «собственного мнения учителя о своих способностях».

Аналогичные задачи можно ставить и в плане «вредительства» при  $-1 < b < 0$ .

Обозначим через  $\varepsilon'$  сигнал указания учителя, который до конца самонадеян. Выше было принято, что  $\varepsilon = \varepsilon'$ . Неуверенность учителя в своих способностях, определяемая через степень его квалификации, состоит в том, что появление образа первого или второго класса констатируется учителем, т.е.  $\varepsilon = -1$  или  $\varepsilon = 1$ , с вероятностью  $(1+c)/2$ . Соответственно принадлежность этих же образов ко второму или первому классу определяется с вероятностью  $(1-c)/2$ . Совместное распределение случайных величин  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  можно записать в виде

$$f'''(\varepsilon, \varepsilon') = \begin{cases} \left. \begin{matrix} p_2 \frac{1+c}{2} & \text{при } \varepsilon=1 \\ p_2 \frac{1-c}{2} & \text{при } \varepsilon=-1 \end{matrix} \right\} & \text{при } \varepsilon'=1, \\ \left. \begin{matrix} p_1 \frac{1+c}{2} & \text{при } \varepsilon=-1 \\ p_1 \frac{1-c}{2} & \text{при } \varepsilon=1 \end{matrix} \right\} & \text{при } \varepsilon'=-1. \end{cases} \quad (5.10)$$

Отсюда следует:

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \begin{cases} p_1 \frac{1-c}{2} + p_2 \frac{1+c}{2} & \text{при } \varepsilon=1, \\ p_1 \frac{1+c}{2} + p_2 \frac{1-c}{2} & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases}$$

Из совместного распределения (5.3), при замене в нем  $\varepsilon$  на  $\varepsilon'$ , и (5.10) получим распределение

$$f(\mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} p_1 \frac{1-bc}{2} f_1(\mathbf{x}) + p_2 \frac{1+bc}{2} f_2(\mathbf{x}) & \text{при } \varepsilon=1, \\ p_1 \frac{1+bc}{2} f_1(\mathbf{x}) + p_2 \frac{1-bc}{2} f_2(\mathbf{x}) & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases} \quad (5.11)$$

В [5.2] приведен вывод выражения [5.11] и анализ как частных, так и общих случаев. Там же показано, что в случае неравного для образов первого и второго класса «собственного мнения учителя о своих способностях»

$$f(\mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} p_1 f_1(\mathbf{x}) \frac{2+(c_2-c_1)-b_1(c_1+c_2)}{4} + \\ + p_2 f_2(\mathbf{x}) \frac{2+(c_2-c_1)+b_2(c_1+c_2)}{4} & \text{при } \varepsilon=1, \\ p_1 f_1(\mathbf{x}) \frac{2+(c_2-c_1)-b_1(c_1+c_2)}{4} + \\ + p_2 f_2(\mathbf{x}) \frac{2+(c_2-c_1)-b_2(c_1+c_2)}{4} & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases}$$

Отсюда можно получить выражения для условных и собственных распределений входного сигнала нейронной сети и для моментов распределений.

### 5.3. Совместный закон распределения вероятностей входного сигнала для $K$ классов образов

При числе классов, больше двух, априори вводится в рассмотрение матрица вероятностей  $a_{kk'}$  отнесения учителем образов, объективно принадлежащих  $k'$ -му классу и  $k$ -му классу:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k'} & \dots & a_{1K} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a & \dots & a_{kk'} & \dots & a_{kK} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{K1} & \dots & a_{Kk'} & \dots & a_{KK} \end{bmatrix}$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^K a_{kk'} = 1, \quad k, k' = 1, \dots, K.$$

Совместный закон распределения вероятностей сигналов  $\mathbf{x}(n)$  и  $\varepsilon(n)$  имеет вид:

$$f(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{k'=1}^K p_{k'} a_{kk'} f_{k'}(\mathbf{x}), \quad \text{при } \varepsilon=k, \quad (5.12)$$

где  $k=1, \dots, K$ .

В режиме обучения матрица  $A$  является единичной

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

В режиме самообучения вероятность отнесения образов, принадлежащих объективно  $k'$ -му классу, к любому  $k$ -му классу одинакова для всех классов и равна  $1/K$ :

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & \dots & \frac{1}{K} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{K} & \dots & \frac{1}{K} \end{bmatrix}$$

В режиме «вредительства» образы, объективно принадлежащие  $k'$ -му классу, относятся с какой-то вероятностью к любому из классов, кроме самого  $k'$ -го класса:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Введем понятие квалификации  $b_k$  учителя системы распознавания образов для  $K$  классов. Зависимость между вероятностями  $a_{kk'}$  и величиной  $b_k$  является нелинейной, так как

$$b_k = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{kk} = 1, \\ 0, & \text{если } a_{kk} = \frac{1}{K}, \\ -1, & \text{если } a_{kk} = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

При аппроксимации этой зависимости функцией второго порядка

$$a_{kk} = xb_k^2 + yb_k + z$$

после подстановки в нее значений (5.13) и решения систем уравнений относительно неизвестных  $x, y, z$  получим:

$$a_{kk} = \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{K} \right] b_k^2 + \frac{1}{2} b_k + \frac{1}{K}. \quad (5.14)$$

Аналогично получается зависимость  $b(a)$ , имеющая вид:

$$b_k = \frac{K(K-2)}{1-K} a_{kk}^2 + \frac{2-K^2}{1-K} a_{kk} - 1. \quad (5.15)$$

В конкретных расчетах можно пользоваться любой из формул (5.14) или (5.15). Из (5.12) можно вывести выражение для момента распределения, окончательное выражение которого имеет вид:

$$\frac{1}{\varepsilon^i} x^j = \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K p_{k'} a_{kk'} a_{jk'} k^i.$$

Совместное распределение вероятностей входного сигнала для  $K$  классов образов при произвольных квалификации учителя и «собственном мнении учителя о своих способностях» относительно каждого класса имеет вид:

$$f(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{k=1}^K c_{lk} \sum_{k'=1}^K a_{kk'} p_{k'} f_{k'}(\mathbf{x}), \text{ при } \varepsilon=l, l=1, \dots, K,$$

где матрица вероятностей  $C=[c_{lk}]$  характеризует «собственное мнение учителя о своих способностях» при отнесении образов  $l$ -го класса к  $k$ -му классу. Обозначив

$$\sum_{k=1}^K c_{lk} a_{kk'} = d_{lk'},$$

получим

$$f(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{k=1}^K p_{k'} f_{k'}(\mathbf{x}) d_{lk'} \text{ при } \varepsilon=l, l=1, \dots, K.$$

*Случай континуума классов образов.* Собственное распределение указаний учителя нейронной сети в режиме обучения распознаванию  $K$  классов образов имеет вид:

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = p_k \text{ при } \varepsilon=k, k=1, \dots, K.$$

Это функция дискретного аргумента  $\varepsilon$ . Случай непрерывной функции распределения имеет широкое практическое применение тогда, когда учитель нейронной сети не может четко определить принадлежность образов к тому или иному классу, а выдает лишь некоторую количественную оценку этой принадлежности. При этом, конечно, возможно (но нежелательно ввиду потери информации при квантовании) разбить шкалу  $T$  на  $K$  участков и свести задачу с континуумом классов к задаче с  $K$  классами образов. Для континуума классов образов и единичной матрицы  $A$  при непрерывной функции  $f_\varepsilon(\varepsilon)$  в режиме обучения аналогично (5.12) имеем:

$$f(\mathbf{x}, \varepsilon) = f_\varepsilon(\varepsilon) f'(\mathbf{x}/\varepsilon),$$

а в режиме самообучения

$$f(\mathbf{x}, \varepsilon) = f_\varepsilon(\varepsilon) f_x(\mathbf{x}).$$

При произвольной квалификации учителя нейронной сети вводится в рассмотрение функция  $a(\varepsilon', \varepsilon)$  вероятности отнесения учителем образов, объективно соответствующих распределению  $f(\mathbf{x}, \varepsilon')$ , к распределению  $f(\mathbf{x}, \varepsilon)$ . В данном случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon' = 1.$$

Совместное распределение вероятностей  $f(\mathbf{x}, \varepsilon)$  сигналов  $\mathbf{x}(n)$  и  $\varepsilon(n)$  на входе нейронной сети будет иметь следующий вид:

$$f(\mathbf{x}, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\varepsilon', \varepsilon) f(\mathbf{x}, \varepsilon') d\varepsilon'.$$

Для режима обучения  $a(\varepsilon', \varepsilon) = \delta(\varepsilon' - \varepsilon)$  и  $f(\mathbf{x}, \varepsilon) = f(\mathbf{x}, \varepsilon)$ .

*О нестационарных входных сигналах нейронных сетей*  
При нестационарных входных сигналах рассматриваются совокупности образов, распределенных внутри каждого класса: в соответствии с законом  $f_k(\mathbf{x}, n)$ , переменным по времени. Изменение распределения  $f(\mathbf{x}, \varepsilon)$  в зависимости от времени  $n$  может возникать из-за изменения во времени условных плотностей  $f'(\mathbf{x}/\varepsilon)$  или распределения  $f_\varepsilon(\varepsilon)$  указаний учителя нейронной сети. Общее выражение для совместного закона распределения входного сигнала нейронной сети имеет в данном случае следующий вид:

$$f(\mathbf{x}, \varepsilon, n) = \sum_{k=1}^K d_{lk'} p_{k'} f_k(\mathbf{x}, n) \text{ при } \varepsilon=l, l=1, \dots, K.$$

Принципиально можно рассматривать еще более об- случай переменных во времени значений квалификации у- теля и «собственного мнения о своих способностях». Выра- ние для моментов данного распределения в текущий мом- времени имеет вид:

$$\overline{\epsilon^i x^j}^n = \sum_{k=1}^K \sum_{k=1}^K d_{k'k}(n) \alpha_{jk}(n) k^i.$$

В данной главе представлен анализ функций распре- ния входного сигнала нейронной сети в случае произволь- квалификации учителя. В связи с этим как частные слу- рассмотрены режимы обучения, самообучения и «вредите- ства», а также промежуточные режимы работы нейрон- сети. В общем случае учитель нейронной сети может ука- вать на принадлежность текущего образа на входе нейрон- сети к тому или иному классу в виде многомерного (размер- сти  $N^*$ ) вектора  $\epsilon(n)$ ; формальная запись выражений для фу- ций распределения входного сигнала в большинстве рассм- ренных случаев при этом сохраняется. Выражения для за- нов распределения входного сигнала записываются в об- виде относительно априорных вероятностей появления кл- сов и условных распределений  $f'(x/\epsilon)$ .

### Литература

- 5.1. Галушкин А. И. Единый подход к решению задач обучения самообучения систем распознавания образов. // Труды МИЭМ, вып. 6, 1970, с. 104–120.
- 5.2. Галушкин А. И. О характеристиках входных сигналов системы распознавания образов. // Труды МИЭМ, вып. 14, 1971, с. 125–

## Глава 6. Построение оптимальных моделей нейронных сетей

### 6.1. Общая структура оптимальной модели

Под оптимальной (эталонной) моделью нейронных сетей, как и в любой другой оптимальной системе (рис. 6.1), понимается оптимальное преобразование, осуществляемое системой над входным сигналом  $[x(n), \epsilon(n)]$  для получения выходного сигнала  $y(n)$ , с точки зрения выбранного критерия первичной оптимизации. На рис. 6.1

верхний блок – управля- емая система, нижний – оптимальная модель, по которой настраивается уп- равляемая система. Общий подход к построению опти- мальных моделей систем распознавания образов в режиме обучения состоит в том, что система стро-

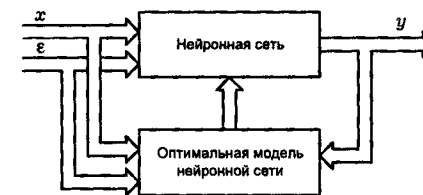


Рис. 6.1. К определению оптималь- ной модели

ится при произвольных характеристиках входного сигнала, составляющих два,  $K$  и континуум классов образов, для произвольного числа решений, осуществляемых нейронной сетью. Пространство решений имеет также две,  $K_p$  и контину- ум градаций. Характеристики указаний учителя (классов) и решений выбираются априори независимо.

Построение оптимальной модели производится по выбран- ному критерию первичной оптимизации, а описание ее осу- ществляется, в частности, в виде выражения для разделяю- щей поверхности. Разделяющая поверхность делит многомер- ное пространство признаков на непересекающиеся области с указанием принадлежности соответствующей области к тому или иному классу.

В табл. 6.1 представлена классификация нейронных сетей по характеристикам входного сигнала и пространства реше- ний для частного вида одномерных сигналов  $y(n)$  и  $\epsilon(n)$ . Оста- новимся коротко на отдельных типах систем.

*Система типа 1*, рассчитанная на два класса образов с дво- ичным выходом, наиболее широко представлена в литературе.

*Система типа 2* рассчитана на  $K$  классов образов с числом решений  $K_p$ , равным  $K$ . Исследование оптимальных моделей

Таблица 6.1

Пространство (число) решений	Входной сигнал				
	Два класса		$K$ классов		Континуум классов
Два	1		7		
$K_p$	$K_p=3$	$3a$	$K < K_p$	9	10
			$K = K_p$	2	
	$K_p = \text{const}$	$3b$	$K > K_p$	4	
Континуум	5		6		11

подобных нейронных сетей проведено в [6.1–6.3] для различных критериев первичной оптимизации нейронных сетей и различной априорной информации о характеристиках входного сигнала. Необходимо отметить, что представление о том, задача обучения при распознавании  $K$  классов образов может быть сведена к последовательному применению на каждом шаге алгоритма обучения для двух классов, является неверным. Это самостоятельная задача, для оптимального решения которой уже на первом шаге строится эквивалентная разделяющая поверхность, делящая пространство признаков на  $K$  непересекающихся областей.

Пространство решений нейронной сети характеризуется числом уровней квантования по амплитуде выходного сигнала  $y(n)$  по каждому из каналов. Нейронные сети с континуумом решений, например типа 5 или 6, имеют непрерывный выходной сигнал. Нейронные сети типов 8, 10, 11 характеризуются непрерывным распределением  $f_\epsilon(\epsilon)$  указаний учителя, когда текущему образу на входе приписывается не индекс класса из дискретного множества индексов, а некоторая количественная (континуальная) оценка принадлежности.

### 6.2. Аналитическое представление разделяющих поверхностей в типовых нейронных сетях

Методика построения оптимальных моделей нейронных сетей, предназначенных для распознавания  $K$  классов образов достаточно подробно описана в работах [6.1–6.3]. В принципе оптимальные модели некоторых нейронных сетей, предназначенных для распознавания  $K$  классов образов можно улучшить из выражений для оптимальных моделей нейронных сетей более общего типа, рассматриваемых ниже. В случае

классов образов, так же, как и в любом другом случае, получение выражений для оптимальных разделяющих поверхностей производится следующим путем: записывается выражение для минимизируемого функционала первичной оптимизации и решается задача минимизации функционала первичной оптимизации с учетом существующих ограничений.

Оптимальная модель нейронной сети, предназначенной для распознавания  $K$  классов образов, определяется системой неравенств, определяющих деление исходного пространства признаков на  $K$  областей с отнесением каждой области к тому или иному классу. Рассмотрим построение оптимальных моделей нейронных сетей, приведенных в табл. 6.1.

*Нейронная сеть типа 3.* Система распознавания образов, оптимальная по критерию максимума апостериорной вероятности (в случае двух решений), преобразует входной сигнал  $x(n)$  в выходной  $y(n)$  в соответствии со следующим соотношением:

$$y(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } f(\epsilon = 1/x) > f(\epsilon = -1/x), \\ -1 & \text{при } f(\epsilon = -1/x) > f(\epsilon = 1/x). \end{cases}$$

Разделяющая поверхность проводится по тем точкам  $x$ , для которых апостериорные вероятности принадлежности к первому и второму классу равны. Та область многомерного пространства признаков, где апостериорная вероятность принадлежности  $x$  к первому классу больше, чем апостериорная вероятность принадлежности ко второму классу, принимается за область первого класса. Однако во многих практических задачах принадлежность точек многомерного пространства признаков к тому или иному классу должна указываться с определенной уверенностью. В случае одной разделяющей поверхности, характерной для системы 1, эта уверенность уменьшается по мере приближения к разделяющей поверхности и равна нулю на ней.

Система распознавания двух классов образов типа 3а имеет две разделяющие поверхности. Эти поверхности делят пространство признаков на три части (I, II, III, рис. 6.2) с зоной нечувствительности, в которых нейронная сеть указывает принадлежность текущего образа на входе: I область – к первому классу, II область – ко второму классу, III область – ни к первому ни ко второму (либо и к первому и ко второму) классу.

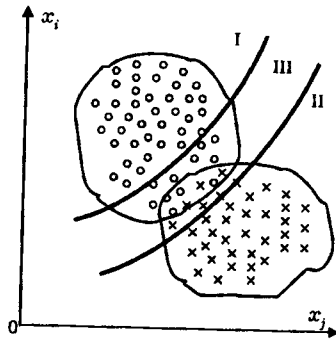


Рис. 6.2. К делению пространства признаков двумя разделяющими поверхностями

Уверенность ответа нейронной сети, как системы распознавания образов о принадлежности текущего образа  $x$  к тому или другому классу, например, к первому классу должна определяться разницей апостериорных вероятностей принадлежности к первому и ко второму классу. В этом плане многомерное пространство признаков должно делиться на три части:

- область I соответствует решению нейронной сети о принадлежности ее к первому классу

$$f''(\varepsilon = -1/x) - d_1 > f''(\varepsilon = 1/x);$$

- область II соответствует решению нейронной сети о принадлежности ее ко второму классу

$$f''(\varepsilon = -1/x) + d_2 < f''(\varepsilon = 1/x);$$

- область III, в которой нейронная сеть либо вообще может ответить на вопрос о принадлежности текущего образа к первому или второму классу, либо отвечает на этот вопрос некоторой вероятностью

$$f''(\varepsilon = -1/x) - d_1 < f''(\varepsilon = 1/x);$$

$$f''(\varepsilon = -1/x) + d_2 > f''(\varepsilon = 1/x).$$

Здесь величины  $d_1$  и  $d_2$  ( $0 \leq d_1 \leq 1$ ,  $0 \leq d_2 \leq 1$ ) определяют степень уверенности нейронной сети в отнесении образов к первому или второму классу. В частном случае возможно, что  $d_1 = d_2 = d$  или  $d_1 = d_2 = 0$ . В последнем случае вариант с двумя разделяющими поверхностями вырождается в вариант с одной разделяющей поверхностью. В случае двух разделяющих поверхностей система распознавания образов с

малыми параметрами разделяющих поверхностей преобразует входной сигнал  $x(n)$  в выходной  $y(n)$  (указание системы о принадлежности текущего образа к тому или иному классу) следующим образом:  $x(n)$  в области I -  $y(n) = -1$  (1-й класс);  $x(n)$  в области II -  $y(n) = 1$  (2-й класс);  $x(n)$  в области III -  $y(n) = 0$  (1-й и 2-й класс).

Общее выражение для разделяющих поверхностей, оптимальных по величине апостериорной вероятности, имеет вид

$$\frac{p_1 f_1(x)}{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)} - d_1 = \frac{p_2 f_2(x)}{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)};$$

$$\frac{p_1 f_1(x)}{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)} + d_2 = \frac{p_2 f_2(x)}{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)}.$$

Преобразовывая, получаем

$$\left. \begin{aligned} S''(x) &= \frac{f_2(x)}{f_1(x)} - \frac{(1-d_1)p_1}{(1+d_1)p_2}; \\ S''(x) &= \frac{f_2(x)}{f_1(x)} - \frac{(1+d_2)p_1}{(1-d_2)p_2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Это окончательное выражение для разделяющих поверхностей, когда в качестве критерия первичной оптимизации используется величина апостериорной вероятности. В [6.1, 6.2] представлена более подробная интерпретация величин  $d_1$  и  $d_2$  через условные плотности  $f'(x/\varepsilon)$  и  $f''(\varepsilon/x)$ .

Система распознавания, оптимальная по критерию минимума средней функции риска, делит многомерное пространство признаков на три части: область, относимую нейронной сетью к первому классу; область, относимую нейронной сетью ко второму классу; область, в которой нейронная сеть отказывается от принятия решения о принадлежности образов к тому или иному классу:

$$\left. \begin{aligned} S'(x) &< 0; \\ S''(x) &> 0; \\ S'''(x) &< 0 < S'(x). \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Условная функция риска есть сумма потерь при отнесении образа  $i$ -го класса к  $j$ -й области. Потери вычисляются как соответствующие вероятности, умноженные на величины коэффициентов  $l_{ij}$  ( $i=1, 2; j=1, 0, 2$ ) матрицы потерь  $L$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{10} & l_{12} \\ l_{21} & l_{20} & l_{22} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты  $l_{10}, l_{20}$  — коэффициенты потерь при отнесении системы от распознавания. Очевидно, что

$$l_{11} < l_{10} < l_{12}; \quad l_{21} > l_{20} > l_{22}.$$

Выражения для условной функции риска имеют следующий вид:

$$r_1 = \int_{S'(x) < 0} \int \dots \int l_{11} f_1(x) dx + \int_{S'(x) < 0 < S'(x)} \int \dots \int l_{10} f_1(x) dx + \int_{S''(x) > 0} \int \dots \int l_{12} f_1(x) dx;$$

$$r_2 = \int_{S'(x) < 0} \int \dots \int l_{21} f_2(x) dx + \int_{S'(x) < 0 < S'(x)} \int \dots \int l_{20} f_2(x) dx + \int_{S''(x) > 0} \int \dots \int l_{22} f_2(x) dx.$$

Усредняя условные функции риска, получаем выражение для средней функции риска

$$R = \int_{S'(x) < 0} \int \dots \int [l_{11} p_1 f_1(x) + l_{21} p_2 f_2(x)] dx + \int_{S'(x) < 0 < S'(x)} \int \dots \int [l_{10} p_1 f_1(x) + l_{20} p_2 f_2(x)] dx + \int_{S''(x) > 0} \int \dots \int [l_{12} p_1 f_1(x) + l_{22} p_2 f_2(x)] dx.$$

Учитывая, что

$$\int_{S''(x) < 0 < S'(x)} \int \dots \int = \int_{S'(x) < 0} \int \dots \int - \int_{S'(x) < 0} \int \dots \int,$$

$$\int_{S''(x) > 0} \int \dots \int = \int_{-\infty}^{\infty} \int \dots \int - \int_{S'(x) < 0} \int \dots \int,$$

а также то, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int \dots \int [l_{12} p_1 f_1(x) + l_{22} p_2 f_2(x)] dx = l_{12} p_1 + l_{22} p_2,$$

выражение для средней функции риска можно записать в следующем виде:

$$R = (l_{12} p_1 + l_{22} p_2) + \int_{S'(x) < 0} \int \dots \int [l_{11} p_1 f_1(x) + l_{21} p_2 f_2(x) - l_{10} p_1 f_1(x) - l_{20} p_2 f_2(x)] dx + \int_{S''(x) < 0} \int \dots \int [l_{10} p_1 f_1(x) + l_{20} p_2 f_2(x) - l_{12} p_1 f_1(x) - l_{22} p_2 f_2(x)] dx.$$

Отсюда следует окончательное выражение для средней функции риска:

$$R = (l_{12} p_1 + l_{22} p_2) + \int_{S'(x) < 0} \int \dots \int [(l_{11} - l_{10}) p_1 f_1(x) + (l_{21} - l_{20}) p_2 f_2(x)] dx + \int_{S''(x) < 0} \int \dots \int [(l_{10} - l_{12}) p_1 f_1(x) + (l_{20} - l_{22}) p_2 f_2(x)] dx. \quad (6.5)$$

Необходимо найти выражения для  $S'(x)$  и  $S''(x)$ , обеспечивающие минимум  $R$ . Достаточно просто показать, что минимум  $R$  обеспечивается в том случае, когда подынтегральные выражения отрицательны внутри соответствующей области интегрирования и положительны вне ее, т.е. минимум  $R$  обеспечивается при условии

$$\left. \begin{aligned} S'(x) &= (l_{11} - l_{10}) p_1 f_1(x) + (l_{21} - l_{20}) p_2 f_2(x); \\ S''(x) &= (l_{10} - l_{12}) p_1 f_1(x) + (l_{20} - l_{22}) p_2 f_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$



Выражения (6.2) и (6.6) определяют оптимальную модель нейронной сети для распознавания двух классов образов с двумя разделяющими поверхностями. Рассмотрим несколько поднее частный случай, который более физически отражает способность нейронной сети для распознавания двух классов образов с двумя разделяющими поверхностями.

Примем

$$l_{11} = l_{22} = 0, \quad l_{12} = l_{21} = 1, \quad l_{10} = l_{20} = l_0, \quad p_1 = p_2$$

при этом

$$S'(x) = (1 - l_0) f_2(x) - l_0 f_1(x),$$

$$S''(x) = l_0 f_2'(x) - (1 - l_0) f_1'(x).$$

На рис. 6.3. представлена иллюстрация (в одномерном случае) зависимостей изменения порогов  $h_1$  и  $h_2$  от  $l_0$ .

Анализ выражений для разделяющих поверхностей позволяет сделать следующие выводы:

а) при  $l_0 = 0$  зона, в которой нейронная сеть отказывается от распознавания, занимает все пространство признаков. Это естественно, так как в данном случае потери при отказе от распознавания равны нулю;

б) при  $l_0 = 1/2$  нейронная сеть с двумя разделяющими поверхностями вырождается в нейронную сеть с одной разделяющей поверхностью. Это случай, когда потери при отказе от распознавания в два раза меньше потерь при неправильном распознавании, а потери от правильного распознавания нулю;

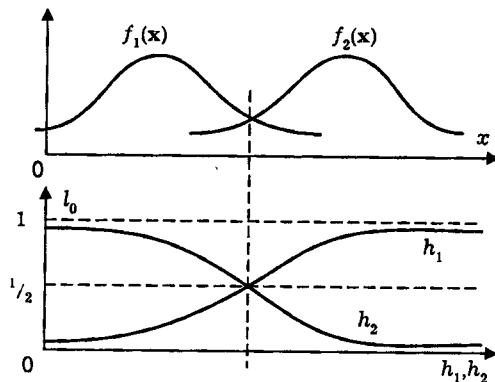


Рис. 6.3. Исследование структуры нейронной сети в зависимости от коэффициента потерь при отказе системы от распознавания

в) при конечном значении  $l_0$  в пределах  $0,5 > l_0 > 0$  существует зона нечувствительности, где нейронная сеть не относит текущий образ на входе ни к первому, ни ко второму классу.

г) при значении  $l_0$  в пределах  $1 > l_0 > 0,5$  нейронная сеть реализует две разделяющие поверхности, причем в зоне между ними нейронная сеть относит текущие образы на входе и к первому и ко второму классу. На рис. 6.3 кривые изменения порогов симметричны как относительно линии  $f_1(x) = f_2(x)$ , так и относительно уровня  $l_0 = 0,5$ . На рис. 6.3  $h_1$  — порог, которым определяется (в одномерном случае) поверхность  $S'(x)$ ,  $h_2$  — порог, которым определяется поверхность  $S''(x)$ .

д) при  $l_0 = 1$  все многомерное пространство признаков считается принадлежащим и к первому и второму классу.

Если сравнить оптимальные модели нейронной сети, построенные по критерию апостериорной вероятности (6.1) и критерию минимума средней функции риска (6.5), то видно, что при условии

$$d_1 = \frac{(l_{11} + l_{21}) - (l_{10} + l_{20})}{2}; \quad d_2 = \frac{(l_{12} + l_{22}) - (l_{10} + l_{20})}{2}$$

оптимальные решения по указанным критериям совпадают. Кроме того, данные равенства являются дополнительной интерпретацией коэффициентов  $d_1$  и  $d_2$ . Использование того или другого критерия возможно при наличии априорной информации о коэффициентах  $d_j$  или  $l_{ij}$ .

Анализ выражения для средней функции риска показывает возможность рассмотрения критериев первичной оптимизации при следующих ограничениях:

1) равенство отдельных составляющих средней функции риска

$$p_1 r_1 = p_2 r_2; \quad (6.7)$$

2) постоянная величина составляющей средней функции риска для одного из классов

$$p_2 r_2 = \alpha = \text{const}. \quad (6.8)$$

Для решения задачи минимизации с учетом первого ограничения запишем функционал Лагранжа в виде

$$I = R + \lambda (p_1 r_1 - p_2 r_2).$$

Подставив в уравнение (6.7) значения функций  $r_1$  и (6.3) и (6.4), получим:

$$p_1 l_{12} + \int_{S'(x) < 0} \dots \int_{l_{11} - l_{10}}^N (l_{11} - l_{10}) p_1 f_1(x) dx + \int_{S''(x) < 0} \dots \int_{l_{10} - l_{12}}^N (l_{10} - l_{12}) p_1 f_1(x) dx$$

$$= p_2 l_{22} + \int_{S'(x) < 0} \dots \int_{l_{21} - l_{20}}^N (l_{21} - l_{20}) p_2 f_2(x) dx + \int_{S''(x) < 0} \dots \int_{l_{20} - l_{22}}^N (l_{20} - l_{22}) p_2 f_2(x) dx$$

Уравнения для оптимальных разделяющих поверхностей имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} S'(x) &= (l_{11} - l_{10}) p_1 f_1(x)(1+\lambda) + (l_{21} - l_{20}) p_2 f_2(x)(1-\lambda); \\ S''(x) &= (l_{10} - l_{12}) p_1 f_1(x)(1+\lambda) + (l_{20} - l_{22}) p_2 f_2(x)(1-\lambda), \end{aligned} \right\}$$

это есть результат минимизации функционала  $I$ . Значение  $\lambda$ , обеспечивающее минимум  $I$ , получается из условия равенства производной  $di/d\lambda$ , т.е. при подстановке (6.10) в уравнение (6.9) для соответствующего ограничения.

Для критерия минимума составляющей средней функции риска для одного из классов при заданном значении составляющей средней функции риска для другого класса, т.е. с учетом ограничения (6.8), выражения для оптимальных разделяющих поверхностей имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} S'(x) &= (l_{11} - l_{10}) p_1 f_1(x) + \lambda(l_{21} - l_{20}) p_2 f_2(x) = 0; \\ S''(x) &= (l_{10} - l_{12}) p_1 f_1(x) + \lambda(l_{20} - l_{22}) p_2 f_2(x) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Выражение для  $\lambda$  получается подстановкой (6.11) в уравнение для соответствующего ограничения, и имеет вид

$$p_2 r_2 = p_2 l_{22} + \int_{S'(x) < 0} \dots \int_{l_{21} - l_{20}}^N (l_{21} - l_{20}) p_2 f_2(x) dx + \int_{S''(x) < 0} \dots \int_{l_{20} - l_{22}}^N (l_{20} - l_{22}) p_2 f_2(x) dx$$

**Нейронная сеть типа 3б.** Рассмотрим систему распознавания типа 3б (см. табл. 6.1) двух классов образов, имеющих  $(K_p - 1)$  разделяющую поверхность. Для заданной системы

$K_p = \text{const}$  означает, что число (целое) решений равно четырем или больше.

Определим оптимальную модель нейронной сети по критерию сравнения апостериорных вероятностей. По аналогии со случаем двух классов образов и двух разделяющих поверхностей определим деление многомерного пространства признаков на области следующим образом.

Область  $k_p$  ( $k_p = 1, \dots, K_p$ ) определяется следующей системой неравенств:

$$f(\epsilon = -1/x) - d_{k_p-1, k_p} < f(\epsilon = 1/x) < f(\epsilon = -1/x) - d_{k_p, k_p+1},$$

при  $d_{0,1} = 1, d_{K_p, K_p+1} = -1$  и следующем условии:

$$d_{k_p, k_p+1} > 0 \text{ при } f(\epsilon = -1/x) > f(\epsilon = 1/x);$$

$$d_{k_p, k_p+1} < 0 \text{ при } f(\epsilon = -1/x) < f(\epsilon = 1/x).$$

Иллюстрация такого деления пространства признаков в одномерном случае приведена на рис. 6.4. Выходной сигнал нейронной сети должен иметь  $K_p$  градаций по уровню, т.е. нейронная сеть принимает при наличии двух классов образов  $K_p$  решений. Из рис. 6.4 следует, что отнесение той или иной области многомерного пространства признаков к первому или второму классу производится с определенным запасом по апостериорной вероятности, например в области  $K_p$  с запасом, равным  $\min\{|d_{k_p-1, k_p}|, |d_{k_p, k_p+1}|\}$ .

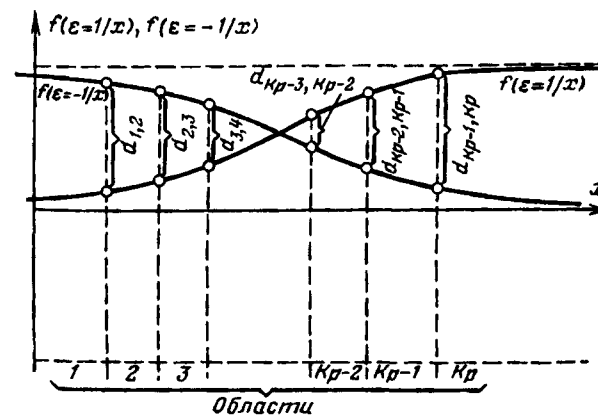


Рис. 6.4. К рассмотрению критерия первичной оптимизации нейронной сети по величине апостериорной вероятности в случае двух классов образов и  $(K_p - 1)$ -й разделяющей поверхности

Учитывая известные выражения для апостериорных вероятностей  $f(\epsilon=-1/\mathbf{x})$  и  $f(\epsilon=1/\mathbf{x})$ , можно получить выражение для области  $k_p$ -го решения нейронной сети в исходном  $m$ -мерном пространстве признаков в следующем виде:

$$\frac{1 - d_{k_p-1, k_p}}{1 + d_{k_p-1, k_p}} < \frac{p_2 f_2(\mathbf{x})}{p_1 f_1(\mathbf{x})} < \frac{1 - d_{k_p, k_p+1}}{1 + d_{k_p, k_p+1}}.$$

Определим оптимальную модель нейронной сети по критерию минимума средней функции риска. В данном случае нейронная сеть после обучения делит  $m$ -мерное пространство признаков на  $K_p$  частей, в каждом из которых существует априори потери при отнесении образов к тому или иному классу. Матрица коэффициентов потерь имеет следующий вид:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11}, & l_{12}, & \dots, & l_{1K_p} \\ l_{21}, & l_{22}, & \dots, & l_{2K_p} \end{bmatrix},$$

где  $l_{ik_p}$  ( $i=1, 2; k_p=1, \dots, K_p$ ) – коэффициенты потерь при отнесении образов  $i$ -го класса к  $k_p$ -й области. Очевидно необходимо, чтобы

$$l_{11} < l_{12} < \dots < l_{1K_p}; \quad l_{21} > l_{22} > \dots > l_{2K_p}.$$

Выражения для условных функций риска в данном случае имеют следующий вид:

$$r_1 = \sum_{k_p=1}^{K_p} \int \dots \int_{S^{k_p}(\mathbf{x}) > 0} l_{1k_p} f_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$r_2 = \sum_{k_p=1}^{K_p} \int \dots \int_{S^{k_p}(\mathbf{x}) > 0} l_{2k_p} f_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Здесь  $S^{k_p}(\mathbf{x}) > 0$  – область  $m$ -мерного пространства признаков, соответствующая  $k_p$ -му решению. Отсюда следует выражение для средней функции риска:

$$R = \sum_{k_p=1}^{K_p} \int \dots \int_{S^{k_p}(\mathbf{x}) > 0} [l_{1k_p} p_1 f_1(\mathbf{x}) + l_{2k_p} p_2 f_2(\mathbf{x})] d\mathbf{x}.$$

Найдем выражение для  $S^{k_p}(\mathbf{x})$ , минимизирующее среднюю функцию риска. Введем дополнительное обозначение следующим образом:

$$g_{k_p}(\mathbf{x}) = [l_{1k_p} p_1 f_1(\mathbf{x}) + l_{2k_p} p_2 f_2(\mathbf{x})],$$

тогда

$$R = \sum_{k_p=1}^{K_p} \int \dots \int_{S^{k_p}(\mathbf{x}) > 0} g_{k_p}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

С использованием приведенного выше материала достаточно легко показать, что минимальное значение  $R$  достигается при

$$S^{(k_p)}(\mathbf{x}) = g_{k''_p}(\mathbf{x}) - g_{k'_p}(\mathbf{x}) > 0, \quad k''_p = 1, \dots, K_p$$

или

$$S^{(k_p)}(\mathbf{x}) = l_{1k''_p} p_1 f_1(\mathbf{x}) + l_{2k''_p} p_2 f_2(\mathbf{x}) - l_{1k'_p} p_1 f_1(\mathbf{x}) - l_{2k'_p} p_2 f_2(\mathbf{x}) < 0, \quad k''_p = 1, \dots, K_p.$$

Выражения для оптимальных моделей нейронных сетей в случае других рассмотренных выше критериев первичной оптимизации могут быть получены достаточно просто на основании изложенного выше метода.

*Нейронные сети типа 4 и 9.* Это – нейронная сеть для распознавания  $K$  классов образов, имеющая  $(K_p - 1)$  разделяющую поверхность.

При использовании критерия минимума средней функции риска система неравенств, ограничивающая в  $m$ -мерном пространстве признаков область  $k_p$ -го решения, имеет следующий вид:

$$S^{(k_p)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K (l_{kk_p} - l_{kk''_p}) p_k f_k(\mathbf{x}) < 0, \quad k''_p = 1, \dots, K_p.$$

*Нейронная сеть типа 5.* При наличии на входе двух классов образов нейронная сеть имеет на выходе непрерывный (по уровню) сигнал. Естественно, что данный сигнал, как и входной сигнал нейронной сети, является дискретным по времени.

В случае использования критерия первичной оптимизации нейронной сети по величине апостериорной вероятности необходимо иметь априори функцию  $d(y)$  превышения апостериорной вероятности принадлежности этих образов на входному классу над апостериорной вероятностью принадлежности этих образов ко второму классу при конкретном значении выходного сигнала  $y$ , т.е. для каждого значения  $y$  нейронной сети априори должна быть определена «уверенность» нейронной сети в отнесении образов к тому или иному классу по апостериорной вероятности. В этом случае уравнение оптимальной модели нейронной сети для двух классов образов и континуума решений имеет следующий вид:

$$f''(\epsilon = -1/x) - d(y) = f''(\epsilon = 1/x).$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1 f_1(x)}{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)} - d(y) &= \frac{p_2 f_2(x)}{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)}; \\ p_1 f_1(x) [1 - d(y)] - [1 + d(y)] p_2 f_2(x) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Это окончательное выражение для оптимальной модели нейронной сети в рассматриваемом случае. Это уравнение разделяет связь между входным и выходным сигналами нейронной сети, которую в принципе необходимо реализовать, исходя из выбранного критерия первичной оптимизации и структуры нейронной сети.

Рассмотрим критерий минимума средней функции потерь. Иллюстрация видоизменения функции ошибок при переходе от двух к  $K_p$  и континууму решений нейронной сети, как системы распознавания двух классов образов представлена на рис. 6.5. Следовательно, в данном случае вводится в рассмотрение вместо матрицы (6.12) коэффициентов ошибок для случая  $K_p$  классов образов и  $K_p$  решений вектор-функция ошибок

$$L = \begin{bmatrix} l_1(y) \\ l_2(y) \end{bmatrix},$$

возникающих при приписывании различным образам первого и второго класса решения  $y$ .

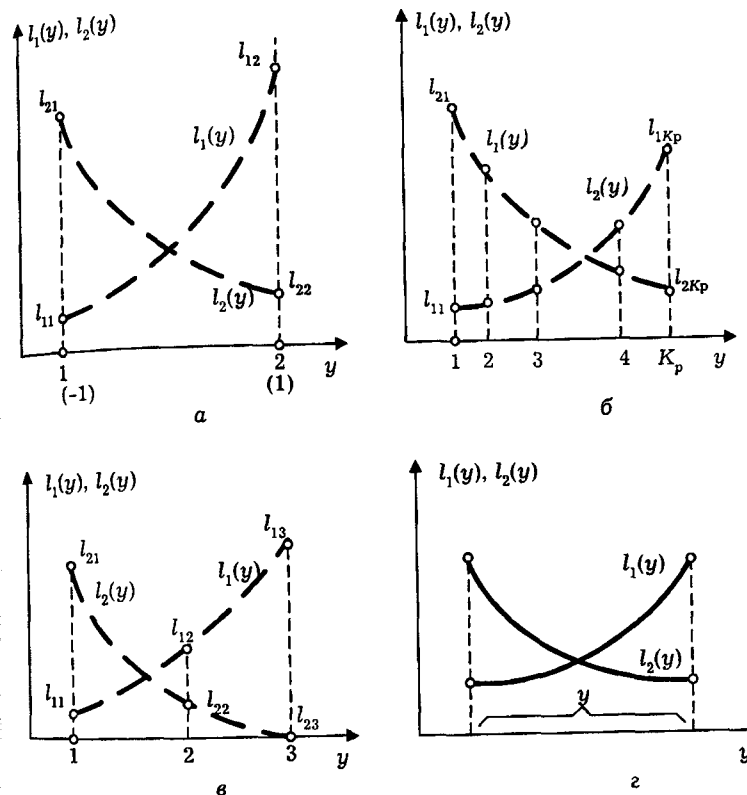


Рис. 6.5. Иллюстрация видоизменения функции ошибок при переходе от двух к  $K_p$  и континууму решений нейронной сети при распознавании двух классов образов: а - два решения; б - три решения; в -  $K_p$  - решений; г - континуум решений

В случае  $K_p$  решений нейронной сети, как системы распознавания двух классов образов выражение для условной функции риска для образов первого класса имеет следующий вид:

$$r_1 = \sum_{k_p=1}^{K_p} l_{1k_p} \int_{S^{k_p(x)>0}} \dots \int_N f_1(x) dx.$$

Здесь  $\bigcup_{k_p=1}^{K_p} S^{k_p(x)} = X$ , где  $X$  - полное многомерное пространство признаков. Введем дополнительные обозначения:

$$G(x, k_p) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in S^{k_p}(x) > 0, \\ 0 & \text{при } x \notin S^{k_p}(x) > 0. \end{cases}$$

Тогда выражение для условной функции риска  $r_1$  имеет следующий вид:

$$r_1 = \sum_{k_p=1}^{K_p} l_{1k_p} \int \dots \int_X G(x, k_p) dx.$$

В этом случае, как и в предыдущих, рассмотренных, функция  $G(x, k_p)$  является предметом синтеза. Она делит оптимальную модель нейронной сети, т.е. оптимальную связь (с точки зрения принятого критерия первичной оптимизации) выходного и входного сигналов нейронной сети.

При переходе к континууму решений выражения для этой функции принимают следующий вид:

$$r_1 = \int_Y l_1(y) \int \dots \int_X G(x, y) f_1(x) dx dy;$$

$$R = p_1 r_1 + p_2 r_2 = \int_Y \int \dots \int_X G(x, y) [p_1 l_1(y) f_1(x) + p_2 l_2(y) f_2(x)] dx dy$$

Обозначая

$$g(x, y) = [p_1 l_1(y) f_1(x) + p_2 l_2(y) f_2(x)],$$

получаем окончательное выражение для средней функции

$$R = \int_Y \int \dots \int_X G(x, y) g(x, y) dx dy.$$

Здесь функция  $g(x, y)$  задана в общем виде. Функция  $G(x, y)$ , являющаяся предметом синтеза, должна быть выражена через функцию  $g(x, y)$  таким образом, чтобы достигался минимум  $R$ . На рис. 6.6. представлена иллюстрация данной функции для случая одномерного пространства признаков и конечного числа  $K_p$  решений нейронной сети. При переходе к континууму решений нейронной сети данная функция выражается в функцию  $G(x, y)$ , общий вид которой представлен на рис. 6.7. Эта полоса с высотой, равной единице. Предметом синтеза является форма данной полосы.

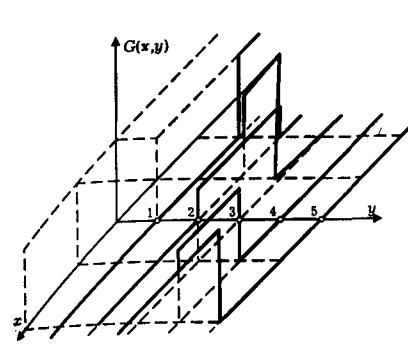


Рис.6.6. Вид функции  $G(x, y)$  для дискретного множества решений и двух классов образов

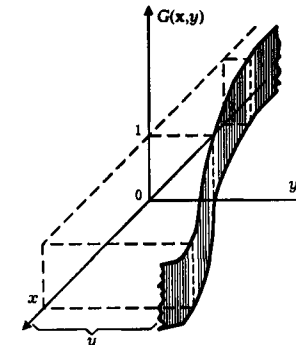


Рис.6.7. Вид функции  $G(x, y)$  для континуума решений и двух классов образов

На рис.6.8. представлена геометрическая иллюстрация функции  $G(x, y)$  в простейшем случае. Таким образом, задача минимизации средней функции риска сводится к задаче минимизации площади полосы  $G(x, y) g(x, y)$ , полученной модуляцией (профилированием) полосы  $G(x, y)$ , показанной на рис. 6.7, функцией  $g(x, y)$ .

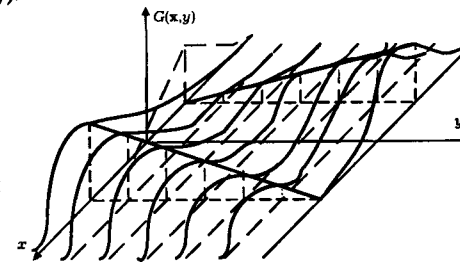


Рис.6.8. Вид функции  $G(x, y)$  для континуума решений и двух классов образов

В выражении для средней функции риска (6.14)

$$G(x, k_p) = \begin{cases} 1 & \text{при } y = p(x), \\ 0 & \text{при } y \neq p(x), \end{cases}$$

где функция  $p(x)$  есть предмет синтеза – преобразование, осуществляемое нейронной сетью над входным сигналом. Отсюда выражение для  $R(x, y)$  можно записать в следующем виде:

$$R = \int \dots \int_X g[x, P^*(x)] dx,$$

где функция  $g[\mathbf{x}, p(\mathbf{x})]$  в данном случае имеет вид

$$g[\mathbf{x}, p(\mathbf{x})] = p_1 f_1(\mathbf{x}) l_1[P^*(\mathbf{x})] + p_2 f_2(\mathbf{x}) l_2[P^*(\mathbf{x})].$$

Минимизация  $R$  является задачей вариационного исчисления. При этом минимум достигается при условии

$$\frac{\partial g[\mathbf{x}, p(\mathbf{x})]}{\partial P^*(\mathbf{x})} = 0$$

или с учетом конкретного вида функции  $g[\mathbf{x}, p(\mathbf{x})]$ :

$$p_1 f_1(\mathbf{x}) \frac{d l_1 [P^*(\mathbf{x})]}{d P^*(\mathbf{x})} + p_2 f_2(\mathbf{x}) \frac{d l_2 [P^*(\mathbf{x})]}{d P^*(\mathbf{x})} = 0.$$

Иначе можно записать:

$$p_1 f_1(\mathbf{x}) \left. \frac{d l_1 (y)}{d y} \right|_{y=P^*(\mathbf{x})} + p_2 f_2(\mathbf{x}) \left. \frac{d l_2 (y)}{d y} \right|_{y=P^*(\mathbf{x})} = 0.$$

Это уравнение определяет оптимальную модель нейронной сети двух классов образов с континуумом решений.

Рассмотрим частные случаи.

1. Функции ошибок для образов первого и второго классов имеют вид, изображенный на рис. 6.9. Этот случай соответствует одинаковому значению функции ошибок на некотором интервале изменения  $y$ . При этом

$$\left. \frac{d l_1 (y)}{d y} \right|_{y=P^*(\mathbf{x})} = \sum_{\alpha=1}^A \Delta l_{\alpha 1} \delta(y - y_{\alpha}) \Big|_{P^*(\mathbf{x})} = \sum_{\alpha=1}^A \Delta l_{\alpha 1} \delta(p(\mathbf{x}) - y_{\alpha})$$

$$\left. \frac{d l_2 (y)}{d y} \right|_{y=P^*(\mathbf{x})} = - \sum_{\alpha=1}^A \Delta l_{\alpha 2} \delta(y - y_{\alpha}) \Big|_{P^*(\mathbf{x})} = - \sum_{\alpha=1}^A \Delta l_{\alpha 2} \delta(p(\mathbf{x}) - y_{\alpha})$$

Уравнение для оптимальной модели нейронной сети имеет следующий вид:

$$p_1 f_1(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=1}^A \Delta l_{\alpha 1} \delta(P^*(\mathbf{x}) - y_{\alpha}) - p_2 f_2(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=1}^A \Delta l_{\alpha 2} \delta(P^*(\mathbf{x}) - y_{\alpha}) = 0$$

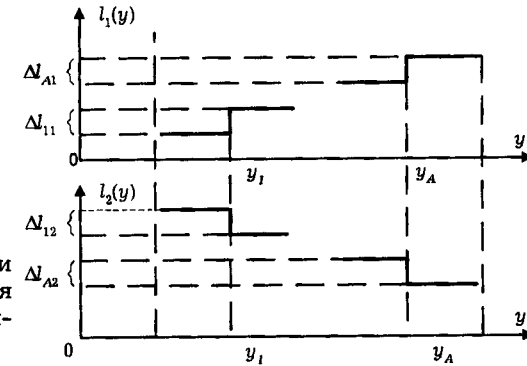


Рис. 6.9. Зависимости функции ошибок для нейронной сети с континуумом решений

Здесь  $\delta(y) - \delta$  - функция с известными свойствами.

2. Функции ошибок для образов первого и второго класса - функции второго порядка  $l_1(y) = (1+y)^{2l}$ ,  $l_2(y) = (1-y)^{2l}$ .

При этом

$$\frac{d l_1 (y)}{d y} = 2l(1+y), \quad \frac{d l_2 (y)}{d y} = 2l(y-1).$$

Подставляя данные выражения в (6.15), получаем уравнение для оптимальной модели  $P^*(\mathbf{x})$  нейронной сети с континуумом решений в случае квадратичных функций потерь:

$$P^*(\mathbf{x}) = \frac{p_2 f_2(\mathbf{x}) - p_1 f_1(\mathbf{x})}{p_2 f_2(\mathbf{x}) + p_1 f_1(\mathbf{x})}.$$

Иллюстрация функции  $y = P^*(\mathbf{x})$ , реализуемой нейронной сетью, представлена на рис. 6.10.

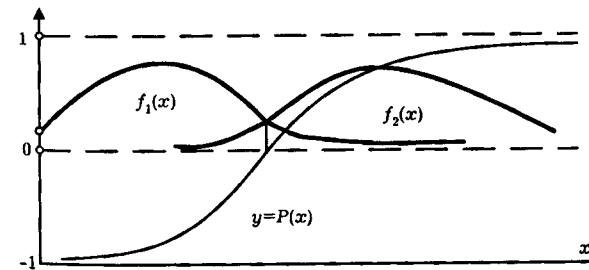


Рис. 6.10. Иллюстрация к оптимальной модели нейронной сети в случае континуума решений и квадратичных функций потерь

3. Функции ошибок для образов первого и второго порядка есть функции первого порядка  $l_1(y)=l(1+y)$ ,  $l_2(y)=l(1-y)$ . В первом случае  $dl_1(y)/dy=l$ ;  $dl_2(y)/dy=-l$ . Отсюда следует, что при линейных функциях ошибок возникают определенные трудности в формировании оптимальной модели нейронной сети. Для исследования данного вопроса рассмотрим функцию ошибки в следующем виде:

$$l_1(y)=l(1+y)^{c+1}, \quad l_2(y)=l(1-y)^{c+1},$$

из которого при  $c=1$  следует случай п. 2, а при  $c=0$  — частный случай. Тогда

$$\frac{d}{dy} l_1(y) = \frac{d}{dy} [l(1+y)^{c+1}] = \frac{1}{c+1} l(1+y)^c;$$

$$\frac{d}{dy} l_2(y) = \frac{d}{dy} [l(1-y)^{c+1}] = -\frac{1}{c+1} l(1-y)^c.$$

Общее выражение для оптимальной модели нейронной сети имеет следующий вид:

$$p_1 f_1(x)(1+y)^c - p_2 f_2(x)(1-y)^c = 0$$

или, иначе,

$$y = \frac{[p_2 f_2(x)]^{1/c} - [p_1 f_1(x)]^{1/c}}{[p_2 f_2(x)]^{1/c} + [p_1 f_1(x)]^{1/c}}.$$

При  $c=1$  получаем уже известное выражение оптимальной модели для функций потерь второго порядка. Исследуем случай  $c \rightarrow 0$ . Тогда  $y = -1$  при любом значении  $x$ , удовлетворяющем неравенству  $p_1 f_1(x) > p_2 f_2(x)$ ,  $y = 1$  при любом значении  $x$ , удовлетворяющем неравенству  $p_2 f_2(x) > p_1 f_1(x)$ .

Таким образом, в случае линейных функций ошибок пространство решений пространства решений вырождается в пространство двух решений.

При сравнении критериев первичной оптимизации нейронной сети по величине апостериорной вероятности (6.13) и минимума средней функции риска (6.15) видно, что оптимальные модели нейронной сети совпадают, если

$$1 - d(y) = \frac{dl_1(y)}{dy};$$

$$1 + d(y) = \frac{dl_2(y)}{dy}.$$

Эти выражения позволяют ввести дополнительную физическую интерпретацию функции  $d(y)$ .

Рассмотрим критерий минимума средней функции риска при ограничениях (6.7) и (6.8). Минимизация средней функции риска (6.14) при условии

$$\int_Y \int_X \dots \int_X G(x, y) g_1(x, y) dx dy = \int_X \dots \int_X g_1[xP(x)] dx = 0, \quad (6.16)$$

где

$$g_1(x, y) = p_1 f_1(x) l_1(y) - p_2 f_2(x) l_2(y),$$

приводит к уравнению для оптимальной модели нейронной сети следующего вида:

$$(1+\lambda)p_1 f_1(x) \left. \frac{dl_1(y)}{dy} \right|_{y=P(x)} + (1-\lambda)p_2 f_2(x) \left. \frac{dl_2(y)}{dy} \right|_{y=P(x)} = 0. \quad (6.17)$$

Множитель Лагранжа  $\lambda$  определяется подстановкой (6.17) в (6.16).

Ограничение в виде заданного значения составляющей средней функции риска имеет вид:

$$\int_Y \int_X \dots \int_X G(x, y) [p_1 f_1(x) l_1(y)] dx dy = \alpha. \quad (6.18)$$

Обозначая

$$\begin{aligned} g_2(x, y, \lambda) &= g_2(x, y) + \lambda p_1 f_1(x) l_1(y) = \\ &= (1+\lambda) p_1 f_1(x) l_1(y) + p_2 f_2(x) l_2(y), \end{aligned}$$

получаем выражение для оптимальной модели нейронной сети в следующем виде:

$$\frac{\partial g_2(\mathbf{x}, y, \lambda) \Big|_{y=P(\mathbf{x})}}{\partial P(\mathbf{x})}$$

или, иначе,

$$(1+\lambda)p_1 f_1(\mathbf{x}) \frac{d l_1(y)}{dy} \Big|_{y=P(\mathbf{x})} + p_2 f_2(\mathbf{x}) \frac{d l_2(y)}{dy} \Big|_{y=P(\mathbf{x})} = 0$$

Множитель  $\lambda$  определяется подстановкой (6.14) в (6.10)

Нейронная сеть типа 6. Система распознавания  $K$  классов образов с континуумом решений имеет оптимальную модель следующего вида в случае критерия минимума средней функции риска:

$$\sum_{k=1}^K p_k f_k(\mathbf{x}) \frac{d l_k(y)}{dy} \Big|_{y=P(\mathbf{x})} = 0,$$

где  $P(\mathbf{x})=y$  – оптимальная модель нейронной сети в данном случае.

Нейронная сеть типа 7. Это система распознавания  $K$  классов образов с двумя решениями. В случае критерия минимума средней функции риска вместо матрицы коэффициентов потерь, возникающих при отнесении образов  $i$ -го класса к  $j$ -му, которая для системы типа 1 имеет вид

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

необходимо ввести в рассмотрение матрицу

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \\ \dots & \dots \\ l_{k1} & l_{k2} \\ \dots & \dots \\ l_{K1} & l_{K2} \end{bmatrix}$$

Матрица  $L$  есть матрица коэффициентов потерь, возникающих при отнесении образов, относящихся к  $k$ -му классу

( $k=1, \dots, K$ ), к областям многомерного пространства признаков, соответствующим первому и второму решению. Выражение для условной функции риска имеет следующий вид:

$$r_k = l_{k1} \int_{S(\mathbf{x}) < 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) < 0} f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + l_{k2} \int_{S(\mathbf{x}) > 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) > 0} f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Средняя функция риска получается усреднением условной функции риска по всем классам:

$$R = \sum_{k=1}^K p_k r_k = \sum_{k=1}^K p_k l_{k1} \int_{S(\mathbf{x}) < 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) < 0} f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^K p_k l_{k2} \int_{S(\mathbf{x}) > 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) > 0} f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{S(\mathbf{x}) > 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) > 0} f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{S(\mathbf{x}) < 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) < 0} f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

получаем окончательное выражение для средней функции риска

$$R = \sum_{k=1}^K p_k l_{k2} + \int_{S(\mathbf{x}) < 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) < 0} \left[ \sum_{k=1}^K p_k (l_{k1} - l_{k2}) \right] f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Легко показать, что минимум  $R$  в данном случае обеспечивается при условии

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K p_k (l_{k1} - l_{k2}) f_k(\mathbf{x}).$$

Это есть уравнение для оптимальной разделяющей поверхности, определяющее оптимальную модель нейронной сети.

Нейронная сеть типа 8. При оптимизации нейронной сети с континуумом классов образов и двумя решениями по критерию минимума средней функции риска необходимо ввести в рассмотрение матрицу (вектор-строку)  $L=[l_1(\epsilon), l_2(\epsilon)]$  функций потерь, возникающих при отнесении образов, объективно подчиняющихся закону  $f'(\mathbf{x}/\epsilon)$ , к областям многомерного пространства признаков, соответствующих 1-му и 2-му решениям. Условная функция риска есть функция риска принятия решения о принадлежности образов на входе нейрон-



ной сети к совокупности образов с распределением  $f'(\mathbf{x}/\epsilon)$ . Понятные зависимости для функций потерь  $l_1(\epsilon)$  и  $l_2(\epsilon)$  ставлены на рис. 6.11. В этом случае выражение для средней функции риска имеет следующий вид:

$$r(\epsilon) = l_1(\epsilon) \int_{S(\mathbf{x}) < 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) < 0}^N f'(\mathbf{x}/\epsilon) d\mathbf{x} + l_2(\epsilon) \int_{S(\mathbf{x}) > 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) > 0}^N f'(\mathbf{x}/\epsilon) d\mathbf{x}$$

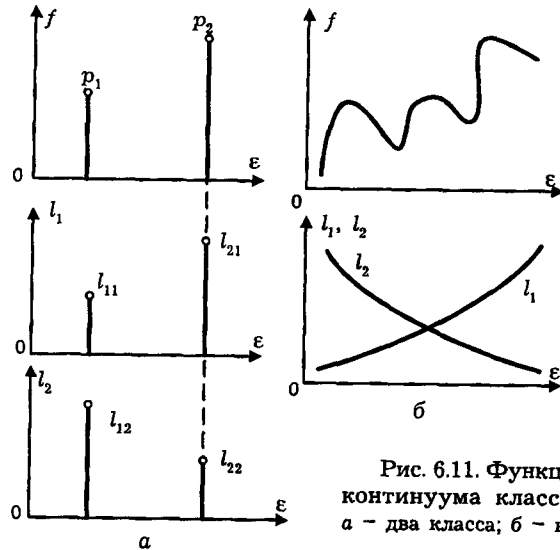


Рис. 6.11. Функции потерь для континуума классов и двух решений: а - два класса; б - континуум классов

Здесь  $S(\mathbf{x})=0$  - уравнение разделяющей поверхности в многомерном пространстве признаков.

Средняя функция риска получается усреднением по всем значениям  $\epsilon$  следующей функции риска:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} r(\epsilon) f_{\epsilon}(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon}(\epsilon) \times \left[ l_1(\epsilon) \int_{S(\mathbf{x}) < 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) < 0}^N f'(\mathbf{x}/\epsilon) d\mathbf{x} + l_2(\epsilon) \int_{S(\mathbf{x}) > 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) > 0}^N f'(\mathbf{x}/\epsilon) d\mathbf{x} \right] d\epsilon$$

Преобразовывая, получаем окончательное выражение для средней функции риска:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ l_2(\epsilon) f_{\epsilon}(\epsilon) + f_{\epsilon}(\epsilon) [l_1(\epsilon) - l_2(\epsilon)] \int_{S(\mathbf{x}) < 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) < 0}^N f'(\mathbf{x}/\epsilon) d\mathbf{x} \right\} d\epsilon$$

Для решения задачи минимизации запишем  $R$  в несколько другом виде

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} l_2(\epsilon) f_{\epsilon}(\epsilon) d\epsilon + \int_{S(\mathbf{x}) < 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) < 0}^N \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [l_1(\epsilon) - l_2(\epsilon)] f_{\epsilon}(\epsilon) f'(\mathbf{x}/\epsilon) d\epsilon \right\} d\mathbf{x}$$

Отсюда следует, что минимум  $R$  обеспечивается при условии, когда подынтегральное выражение отрицательно внутри области и положительно вне данной области. Следовательно, минимум  $R$  обеспечивается при условии

$$S(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} [l_1(\epsilon) - l_2(\epsilon)] f_{\epsilon}(\epsilon) f'(\mathbf{x}/\epsilon) d\epsilon$$

Нейронная сеть типа 10. В случае континуума классов образов и  $K_p$  решений нейронная сеть строит в многомерном пространстве признаков  $K_p-1$  разделяющую поверхность.

При оптимизации по критерию минимума средней функции риска вводится матрица (вектор-строка)

$$L = [l_1(\epsilon), \dots, l_{K_p}(\epsilon)]$$

функций потерь, возникающих при отнесении образов, объективно подчиняющихся закону  $f'(\mathbf{x}/\epsilon)$ , к областям многомерного пространства признаков, соответствующим 1, 2,  $K_p$ -му решению нейронной сети. В данном случае выражение для условной функции риска имеет следующий вид:

$$r(\epsilon) = \sum_{k_p=1}^{K_p} l_{k_p}(\epsilon) \int_{S^{k_p(\mathbf{x})} > 0} \dots \int_{S^{k_p(\mathbf{x})} > 0}^N f'(\mathbf{x}/\epsilon) d\mathbf{x}$$

Средняя функция риска получается усреднением  $r(\epsilon)$  по всем значениям  $\epsilon$ :

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} r(\epsilon) f_{\epsilon}(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon}(\epsilon) \sum_{k_p=1}^{K_p} l_{k_p}(\epsilon) \int_{S^{k_p(\mathbf{x})} > 0} \dots \int_{S^{k_p(\mathbf{x})} > 0}^N f'(\mathbf{x}/\epsilon) d\mathbf{x} d\epsilon$$

Отсюда определяется оптимальная модель с помощью неравенств:

$$S^{(k_p)}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon}(\varepsilon) [l_{k_p}(\varepsilon) - l_{k_p}(\varepsilon)] f'(\mathbf{x}/\varepsilon) d\varepsilon < 0,$$

$$k_p'' = 1, \dots, K_p.$$

Нейронная сеть типа 11. Эта система распознавания тинуума классов образов, имеющая континуум решений оптимизации по критерию минимума средней функции вместо матрицы функций

$$L = [l_1(\varepsilon), \dots, l_{k_p}(\varepsilon)],$$

введенной в случае континуума классов и  $K_p$  решений, ходимо ввести функцию потерь  $l(y, \varepsilon)$ , возникающих при принятии нейронной сетью решения при наличии на входе за, принадлежащего совокупности с распределением  $f$

Выражение для условной функции риска имеет следующий вид:

$$r(\varepsilon) = \int_Y l(y, \varepsilon) \int_X \dots \int_X G(y, \mathbf{x}) f'(\mathbf{x}/\varepsilon) dx dy.$$

Средняя функция риска

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} r(\varepsilon) f_{\varepsilon}(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon}(\varepsilon) \int_Y l(y, \varepsilon) \int_X \dots \int_X G(y, \mathbf{x}) \times \\ \times f'(\mathbf{x}/\varepsilon) dx dy d\varepsilon = \int_Y \int_X \dots \int_X G(y, \mathbf{x}) \times \\ \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon}(\varepsilon) l(y, \varepsilon) f'(\mathbf{x}/\varepsilon) d\varepsilon \right] dx dy.$$

Введем обозначение

$$g_3(\mathbf{x}, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon}(\varepsilon) l(y, \varepsilon) f'(\mathbf{x}/\varepsilon) d\varepsilon.$$

Тогда выражение для средней функции риска примет следующий вид:

$$R = \int_Y \int_X \dots \int_X G(y, \mathbf{x}) g_3(\mathbf{x}, y) dx dy.$$

Учитывая свойства функции  $G(y, \mathbf{x})$ , указанные и используемые ранее, получаем:

$$R = \int_X \dots \int_X g_3[\mathbf{x}, P(\mathbf{x})] dx,$$

где  $y = P(\mathbf{x})$  – оптимальная модель нейронной сети. Решение задачи минимизации  $R$  дает выражение для оптимальной модели нейронной сети в следующем виде:

$$\left. \frac{\partial g_3(\mathbf{x}, y)}{\partial y} \right|_{y=P(\mathbf{x})} = 0$$

или с учетом конкретного вида функций  $g_3(\mathbf{x}, y)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\varepsilon}(\varepsilon) f'(\mathbf{x}/\varepsilon) \left[ \left. \frac{\partial}{\partial y} l(y, \varepsilon) \right|_{y=P(\mathbf{x})} \right] d\varepsilon = 0.$$

Это наиболее общее выражение для оптимальной модели нейронной сети, из которого легко получить любой рассмотренный выше случай.

Для решения практических задач функция распределения  $f_{\varepsilon}(\varepsilon)$  может в простейшем случае быть представлена или аппроксимирована суммой одномерных нормальных законов с различными дисперсиями и математическими ожиданиями, а также любым из известных типовых законов распределения вероятностей.

### 6.3. Оптимальная модель нейронной сети для многомерных сигналов $\varepsilon(n)$ и $y(n)$

Выражение для условной функции риска в случае континуума решений имеет следующий вид:

$$r(\varepsilon) = \int_Y \dots \int_Y l(y, \varepsilon) \int_X \dots \int_X G(y, \mathbf{x}) f'(\mathbf{x}/\varepsilon) dx dy.$$

Отсюда имеем среднюю функцию риска

$$R = \int_E \dots \int_E \tau(\epsilon) f_\epsilon(\epsilon) d\epsilon = \int_Y \dots \int_Y \int_X \dots \int_X G(y, x) \times \\ \times \left[ \int_E \dots \int_E f_\epsilon(\epsilon) l(y, \epsilon) f'(x/\epsilon) d\epsilon \right] dx dy$$

или, иначе, при введении дополнительных обозначений

$$R = \int_Y \dots \int_Y \int_X \dots \int_X G(y, x) g(y, x) dx dy.$$

Как указывалось выше,  $E$  представляет собой пространство указаний учителя нейронной сети;  $N^*$  – размерность выходного сигнала системы. Остановимся на свойствах функции  $G(y, x)$ . Если  $N^*=1$  и нейронная сеть имеет  $K_p$  решений, функция имеет вид:

$$G(x, K_p) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in S^{K_p}(x) > 0, \\ 0 & \text{при } x \notin S^{K_p}(x) > 0, \end{cases}$$

а для континуума решений:

$$G(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y = P(x), \\ 0 & \text{при } y \neq P(x). \end{cases}$$

Для многомерных пространств  $E$  и  $Y$  преобразование, выполняемое системой, может быть записано в следующем виде:

$$y(n) = P[x(n)] \text{ или } \begin{bmatrix} y_1(n) \\ \vdots \\ y_{N^*}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(x) \\ \vdots \\ P_{N^*}(x) \end{bmatrix}.$$

Если  $N^* = \text{const}$  и нейронная сеть имеет дискретное выходное сигнала, т.е.  $K_p$  решений, функция имеет вид

$$G(x, k_{1p}, \dots, k_{N^*p}) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in S^{(k_{1p}, \dots, k_{N^*p})}(x) > 0 \\ 0 & \text{при } x \notin S^{(k_{1p}, \dots, k_{N^*p})}(x) > 0 \end{cases}$$

и соответственно для континуума решений нейронной сети:

$$G(x, y_1, \dots, y_{N^*}) = \begin{cases} 1 & \text{при } y(n) = P[x(n)], \\ 0 & \text{при } y(n) \neq P[x(n)]. \end{cases}$$

С учетом замечаний о функции  $G$  можно записать выражение для средней функции риска следующим образом:

$$R = \int_X \dots \int_X g[P(x), x] dx = \\ = \int_X \dots \int_X \int_E \dots \int_E f_\epsilon(\epsilon) l[P(x), \epsilon] f'(x/\epsilon) d\epsilon dx.$$

Оптимальная модель нейронной сети определяется выражением

$$\int_E \dots \int_E f_\epsilon(\epsilon) f'(x/\epsilon) \left[ \frac{\partial}{\partial y} l(y, \epsilon) \right]_{y=P(x)} d\epsilon = 0,$$

где производная  $\frac{\partial}{\partial y} l(x, y, \epsilon)$  – функция двух переменных:  $y$  и  $\epsilon$ .

Пусть каждый из  $N^*$  выходных каналов имеет  $K_0$  градаций по амплитуде. Тогда выражение для условной функции риска имеет следующий вид:

$$r(k_1, \dots, k_{N^*}) = \sum_{k_{1p}=1}^K \dots \sum_{k_{N^*p}=1}^K l(k_{1p}, \dots, k_{N^*p}, k_1, \dots, k_{N^*}) \times$$

$$\times \int_X \dots \int_X f'(x/\epsilon=k_1, \dots, k_{N^*}) dx_{S^{(k_{1p}, \dots, k_{N^*p})}(x) > 0}$$

Отсюда получаем среднюю функцию риска

$$R = \sum_{k_{1p}=1}^K \dots \sum_{k_{N^*p}=1}^K \tau(k_1, \dots, k_{N^*}) f_\epsilon(k_1, \dots, k_{N^*}) = \\ = \sum_{k_{1p}=1}^K \dots \sum_{k_{N^*p}=1}^K \sum_{k_1=1}^K \dots \sum_{k_{N^*}=1}^K l(k_{1p}, \dots, k_{N^*p}, k_1, \dots, k_{N^*}) \times$$

$$\times f_{\varepsilon}(k_1, \dots, k_{N^*}) \int \dots \int_{S^{(k_{1p}, \dots, k_{N^*p})}(\mathbf{x}) > 0} f'(\mathbf{x}/\varepsilon = k_1, \dots, k_{N^*}) d\mathbf{x}$$

При введении дополнительных обозначений имеем:

$$R = \sum_{k_{1p}=1}^K \dots \sum_{k_{N^*p}=1}^K \int \dots \int_{S^{(k_{1p}, \dots, k_{N^*p})}(\mathbf{x}) > 0} g(k_{1p}, \dots, k_{N^*p}, \mathbf{x})$$

где

$$g(k_{1p}, \dots, k_{N^*p}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \dots \sum_{k_{N^*}=1}^K l(k_{1p}, \dots, k_{N^*p}, k_1, \dots, k_{N^*}) \times f_{\varepsilon}(k_1, \dots, k_{N^*}) f'(\mathbf{x}/\varepsilon = k_1, \dots, k_{N^*})$$

Результат минимизации средней функции риска в данном случае

$$S^{(k_{1p}, \dots, k_{N^*p})}(\mathbf{x}) = g(k''_{1p}, \dots, k''_{N^*p}, \mathbf{x}) - g(k_{1p}, \dots, k_{N^*p}, \mathbf{x}) > 0$$

$$(k''_{1p}, \dots, k''_{N^*p}) = (\underbrace{0 \dots 0}_{N^*}, \dots, \underbrace{K, \dots, K}_{N^*})$$

т.е. всего  $K^{N^*}$  комбинаций.

Отметим, что, в частности, можно рассматривать  $K=2$  как наиболее просто реализуемый.

#### 6.4. Априорная информация о входном сигнале нейронной сети в режиме самообучения

Задача самообучения отличается от задачи обучения тем, что в режиме самообучения в нейронной сети не указывается принадлежность образов к тому или иному классу. В процессе обучения нейронная сеть получает информацию об организации образов внутри классов в виде указаний учителя. В случае самообучения эта информация должна быть заложена в нейронной сети априори. Наверное, разумно при определении класса в режиме самообучения наложить следующее ограничение. Каждому классу образов должна соответствовать мода функции плотности распределения вероятностей входного сигнала  $\mathbf{x}(n)$  нейронной сети.

От априорной информации о входном сигнале существенно зависят методы решения задачи самообучения. Указанную априорную информацию о входном сигнале можно с методической точки зрения разделить на три основные части:

1. Априорная информация о числе классов или, что тоже самое, информация о числе мод функций плотности распределения входного сигнала. На основании данной априорной информации и предположения о том, что каждый класс имеет свое собственное одномодальное распределение, распределение входного сигнала нейронной сети может быть представлено в виде

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K p_k f_k(\mathbf{x}), \quad (6.19)$$

где  $\mathbf{x}(n)$  – входной сигнал нейронной сети;  $f(\mathbf{x})$  – плотность распределения входного сигнала;  $f_k(\mathbf{x})$  – плотность распределения образов в  $k$ -м классе;  $p_k$  – вероятность появления образа из  $k$ -го класса;  $K$  – число классов.

2. Априорная информация о виде плотностей распределения образа в каждом из классов.

3. Априорная информация о величинах вероятностей появления образов из различных классов  $p_k$ .

Априорная информация о числе классов  $K$  (мод функции плотности распределения входного сигнала) может быть трех типов (по мере уменьшения априорной информации): точно известно  $K$  – число классов (т.е. мод); число  $K$  классов (мод) не более заданного  $K_{\max}$ ; число  $K$  классов (мод) неизвестно.

В первом случае необходимо создание алгоритма решения задачи самообучения для конкретного числа классов. Во втором случае необходимо создавать алгоритм самообучения, который, будучи оптимальным для максимального числа классов  $K_{\max}$ , будет оптимальным и для меньшего, каким и может оказаться действительное число классов. В третьем случае, пожалуй, единственным путем качественного решения задачи самообучения является построение алгоритма самообучения для постепенно увеличивающегося числа  $K_{\max}$ . В таком алгоритме нужно вводить критерий остановки алгоритма при увеличении максимального числа классов  $K_{\max}$ . Критерием остановки может являться либо отсутствие увеличения качества самообучения при увеличении  $K_{\max}$ , либо невозможность реализации алгоритма ввиду его сложности.

Априорная информация о виде распределения для каждого из классов может быть трех типов (по мере уменьшения): точ-

но (с точностью до конечного числа неизвестных параметров) известен вид распределения; вид распределения неизвестно может быть принята некоторая аппроксимация распределения, которая, естественно, в общем случае приводит к большим ошибкам, чем больше несоответствие реально существующих распределений; вид распределений известен.

В зависимости от количества априорной информации распределения для каждого из классов выбирается способ реализации оптимальной модели нейронной сети.

**Априорная информация о вероятностях появления образов из различных классов.** При представлении суммарного распределения вероятностей входного сигнала системы разделения образов в виде (6.19) для создания системы представляется априорная информация следующих типов о вероятностях появления образов из различных классов  $p_k$ : коэффициенты  $p_k$  равны между собой для любого  $k$ , коэффициенты априори не равны для любого  $k$ , но неизвестны.

Первый случай не накладывает практически никаких дополнительных ограничений на методы решения задачи обучения. Во втором случае введение более широких зон изменения параметров входного сигнала вследствие равенства  $p_k$  приводит к усложнению процесса обучения ввиду необходимости при настройке определять кроме параметров распределений для каждого подкласса еще и коэффициенты  $p_k$ .

### 6.5. О критериях первичной оптимизации нейронной сети в режиме самообучения

Критерий первичной оптимизации также является дополнительной информацией, закладываемой в нейронную сеть априори, наряду с априорной информацией о входном сигнале. Необходимость задания этого критерия заключается в том, что он определяет качество системы распознавания, которую она должна достигнуть в режиме самообучения.

Во всех случаях, описанных выше, когда распределения образов в классах известны, аппроксимируемы или неизвестны, в принципе возможно применение критерия первичной оптимизации самообучающихся систем распознавания образов, по которому разделяющая поверхность (в ча-

одномерном случае – порог) вычисляется в соответствии со следующим выражением:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0 \text{ при условии } \frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0.$$

Решение этого уравнения соответствует порогу  $h_1$  (рис. 6.12).

В случаях, когда распределения образов в классах могут быть определены или аппроксимированы, можно применить следующий критерий

$$p_1 f_1(x) = p_2 f_2(x), \quad (6.20)$$

которому (на рис. 6.12) отвечает порог  $h_2$ .

Применение вводимого критерия (6.20) первичной оптимизации в режиме самообучения оправдывается нашим представлением о работе человека в режиме самообучения, когда он в случае двух признаков и двух классов (рис. 6.13) делит множество образов на подмножества, проводя разделяющую поверхность по местам наименьшего сгущения образов.

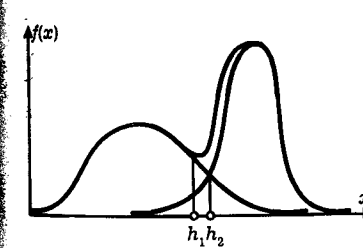


Рис. 6.12. К введению критериев первичной оптимизации самообучающихся нейронных сетей

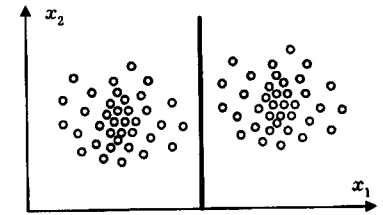


Рис. 6.13. Иллюстрация к критерию (6.23)

Легко показать, что решения, оптимальные по данным критериям первичной оптимизации нейронной сети в режиме самообучения, отличаются друг от друга. Частный случай, изображенный на рис. 6.14, иллюстрирует дополнительные свойства указанных критериев. Здесь можно выделить три возможных случая:

1) классы хорошо разделяются, т.е. пересечение невелико (условием этого является то, что или  $\sigma_1$ , или  $\sigma_2$  много меньше половины расстояния между центрами классов); оптимальные пороги  $h_1$  и  $h_2$ , соответствуют первому и второму крите-

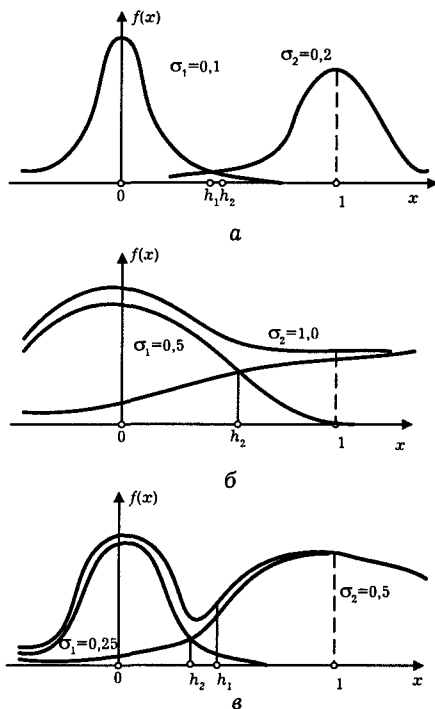


Рис. 6.14. Сравнение критериев первичной оптимизации нейронной сети в режиме самообучения

Полученные результаты имеют следующее объяснение: в случае пп.1 и 3 распределение входного сигнала  $f(x)$  является двумодальным, тогда как в случае п.2 оно одномодальное, и как раз в этом случае не ясен качественный смысл разделения одного «горба» на два класса, тогда как в случаях пп.1 и 3 пороги разделяют «горбы» двумодального распределения входного сигнала.

Последнее, по нашему мнению, является весовой причиной для введения в определение класса для задачи самообучения ограничения, связанного с модальностью функции плотности распределения входного сигнала системы познания образов. Именно представление  $f(x)$  многомодальной функцией позволяет использовать в режиме самообучения в качестве критерия первичной оптимизации специальную среднюю функцию риска.

рию первичной оптимизации, отличаются друг от друга незначительно пороги  $h_1$  и  $h_2$  при  $\sigma_1$  на рис. 6.14,а);

2) классы столь тесно пересекаются, что первому критерию не получается оптимального порога  $h_1$ . При этом из параметров берется половина расстояния между центрами классов, а второй сравним с последней величиной 6.14,б,  $\sigma_2=1>0,5$ );

3) классы сильно пересекаются, в этом случае пороги  $h_1$  и  $h_2$  сильно отличаются. Увидев этого, по-видимому является то, что  $\sigma_1$  имеют тот же порядок, что и половина расстояния между центрами классов (рис. 6.14,в).

## 6.6. Оптимальные модели нейронной сети в режиме самообучения и при произвольной квалификации учителя

Предположим, что образы сгруппированы вокруг некоторых неизвестных центров  $\mathbf{b}_{k_p}$  классов. При введении в рассмотрение функции расстояния образов от множества  $k$ -го класса  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k_p}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}_{k_p}\|^2$  условная функция риска, возникающего при отнесении образа  $\mathbf{x}$  к области  $k_p$ -го решения, может быть представлена в следующем виде:

$$r_{k_p} = \int \|\mathbf{x} - \mathbf{b}_{k_p}\|^2 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$S^{(k_p)}(\mathbf{x}) > 0$$

где  $\|\cdot\|$  означает норму вектора. Средняя функция риска равна:

$$R = \sum_{k_p=1}^{K_p} \int_{S^{(k_p)}(\mathbf{x}) > 0} \|\mathbf{x} - \mathbf{b}_{k_p}\|^2 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

В данном случае область  $k_p$ -го решения ( $k_p=1, \dots, K_p$ ), удовлетворяющая условию минимума  $R$ , определяется следующей системой неравенств:

$$S^{(k_p)}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}_{k_p}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{b}_{k'_p}\|^2 > 0, \quad (6.21)$$

$$(k'_p \neq k_p = 1, \dots, K_p).$$

Уравнение, определяющее координаты центров классов, удовлетворяющих условию минимума  $R$ , имеет следующий вид:

$$\mathbf{b}_{k_{pi}} = \frac{\int_{S^{(k_p)}(\mathbf{x}) > 0} \mathbf{x} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{S^{(k_p)}(\mathbf{x}) > 0} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}, \quad i=1, \dots, N; \quad (6.22)$$

$$k_p = 1, \dots, K_p$$

Системы (6.21), (6.22) определяют оптимальную модель нейронной сети в режиме самообучения. Отметим, что функция потерь  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k_p}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}_{k_p}\|^2$  определяет довольно грубую аппроксимацию распределения в классе. Более точная аппроксимация может быть достигнута усложнением оптимальной модели, достигаемым за счет усложнения функции потерь, например, следующим образом:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k_p}) = \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}_{k_p}}{\sigma_{k_p}} \right\|^2$$

или взятием  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k_p})$  в еще более сложной форме.

Подобно тому как в режиме обучения вектор-функции  $[l_1(\epsilon), \dots, l_{k_p}(\epsilon)]$  заменяется функцией  $l(y, \epsilon)$  двух переменных при переходе к случаю континуума решений, в режиме самообучения вводится в рассмотрение функция потерь в виде  $[\mathbf{x}, \mathbf{b}(y)]$ , где  $\mathbf{b}(y)$  является либо конечным, либо промежуточным результатом синтеза нейронной сети. В случае дискретного множества решений нейронной сети средняя функция риска имеет следующий вид:

$$R = \sum_{k_p=1}^{K_p} \int_X \rho(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k_p}) G(\mathbf{x}, k_p) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где

$$G(\mathbf{x}, k_p) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{x} \in S^{(k_p)}(\mathbf{x}) > 0, \\ 0 & \text{при } \mathbf{x} \notin S^{(k_p)}(\mathbf{x}) > 0. \end{cases}$$

Для континуума решений нейронной сети имеем аналогично

$$R = \int_Y \int_X \rho[\mathbf{x}, \mathbf{b}(y)] G(\mathbf{x}, y) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} dy,$$

где

$$G(\mathbf{x}, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y = P(\mathbf{x}), \\ 0 & \text{при } y \neq P(\mathbf{x}) \end{cases}$$

или, иначе,

$$R = \int_X \rho[\mathbf{x}, \mathbf{b}[P(\mathbf{x})]] f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Выражение для оптимальной модели нейронной сети получается отсюда дифференцированием  $R$  по  $y = P(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{b}$  аналогично тому, как это было сделано в режиме обучения

$$f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial y} \rho[\mathbf{x}, \mathbf{b}(y)] \Big|_{y=P(\mathbf{x})} = 0,$$

$$f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial b_i} \rho[\mathbf{x}, \mathbf{b}(y)] = 0, \quad i=1, \dots, N,$$

при использовании дополнительных условий Сильвестра для матрицы смешанных производных второго порядка  $R$  по компонентам вектора  $\mathbf{b}(y)$ .

Рассмотрим оптимальную модель нейронной сети с  $K_p = K$  решениями при произвольной квалификации учителя  $b$ .

Необходимо так определить функцию потерь  $l(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k_p}, b, l_{k_p k})$ , чтобы в режиме обучения при  $b=1$   $l = l_{k_p k}$ , в режиме самообучения при  $b=0$ ,  $l = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k_p})$ , а при  $b = -1$  определялся функционал первичной оптимизации с обратной экстремальностью по отношению к режиму обучения. Такая функция потерь может быть записана в следующем виде:

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k_p}, \mathbf{b}, l_{k_p k}) = b l_{k_p k} + (1-b^2) \rho(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k_p}).$$

Выражение для средней функции риска имеет вид:

$$R = \sum_{k_p=1}^K \int_{S^{(k_p)}(\mathbf{x}) > 0} \left\{ \left[ \sum_{k=1}^K p_k f_k(\mathbf{x}) l_{k_p k} \right] + (1-b^2) \|\mathbf{x} - \mathbf{b}_{k_p}\|^2 f(\mathbf{x}) \right\} d\mathbf{x}.$$

Оптимальная область  $k_p$ -го решения может быть представлена следующим образом:

$$S^{(k_p)}(\mathbf{x}) = g_{k'}(\mathbf{x}) - g_{k_p}(\mathbf{x}) > 0, \quad k' \neq k_p = 1, \dots, K_p.$$

Выражение для оптимальных значений  $b_{k_p}$  имеет вид, аналогичный (6.22).

Выше предполагалось, что квалификация учителя известна точно при построении оптимальной модели нейронной сети. Неточное знание квалификации учителя имеет место, например, при решении задач медицинской диагностики, когда известно, что классификация обучающей выборки сделана врачом, имеющим конечную, неточно известную конструктору нейронной сети квалификацию. При этом объективная квалификация  $b$  учителя определяет вид распределения входного сигнала, а субъективная квалификация учителя  $b_c$ , сообщаемая системе, определяет вид функционала оптимизации. В случае  $K=K_p$  классов и решений нейронной сети:

$$R = \sum_{k_p=1}^K \int_{S^{(k_p)}(\mathbf{x}) > 0} \left\{ \sum_{k=1}^K \left[ b_c p_k l_{k_p k} + (1-b_c^2) \rho(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k_p}) \right] f'(\mathbf{x}/\epsilon=k) \right\} d\mathbf{x}.$$

С учетом выражения для закона распределения входного сигнала оптимальная модель нейронной сети, в данном случае

определяемая системой  $K$  неравенств, запишется в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^K \left\{ b_c (p_{k'kk_p} - p_{kk'p}) + (1 - b^2) [\rho(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k_p}) - \rho(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{k'})] \right\} \times \\ \times \frac{\sum_{k'=1}^K p_{k'} f_{k'}(\mathbf{x}) a_{kk'}}{\sum_{k'=1}^K p_{k'} a_{kk'}} > 0, \quad (6.23)$$

где  $k'_p = 1, \dots, K$ .

В этом случае предполагается, что субъективная квалификация учителя, сообщаемая нейронной сетью, не зависит от номера класса.

Из (6.23) следует, что в случае  $b_c = 1$  и  $[a_{kk'}] = A_1$ , где  $A_1$  — единичная матрица, имеют дело с режимом обучения. В случае  $b_c = 0$  при произвольных значениях  $a_{k'k}$  система работает в режиме самообучения. В общем случае, когда объективная  $b$  и субъективная  $b_c$  квалификации учителя совпадают, система способна к настройке. В том случае, когда учитель имеет нулевую квалификацию, а систему принуждают работать в режиме обучения, она оказывается неспособной к настройке.

Вышеизложенный материал позволяет следующим образом классифицировать априорную информацию, необходимую для построения оптимальной модели нейронной сети: а) число классов образов (два,  $K$ , континуум); б) характер нестационарности входного сигнала; в) функция квалификации учителя нейронной сети от двух аргументов, являющихся индексами соответствующих классов; г) функция «собственного мнения учителя нейронной сети о своих способностях»; это также функция двух аргументов, являющихся индексами соответствующих классов; д) априорные вероятности появления классов; е) структура пространства решений нейронной сети (два,  $K_p$ , континуум решений); ж) класс критериев первичной оптимизации нейронной сети; з) функция потерь при отнесении нейронной сетью образов одного класса к другому.

Это указывает на значительность объема априорной информации, необходимой для построения оптимальной модели нейронной сети. Необходимо отметить, что иногда отпадает

необходимость в некотором виде априорной информации, например в априорных вероятностях появления классов при использовании минимаксного критерия или эмпирического байесовского подхода. Количество априорной информации о виде  $f'(x/\epsilon)$  определяет пути реализации оптимальных моделей нейронной сети, указанные в табл. 6.1.

## Литература

- 6.1. Галушкин А.И. Многослойные системы распознавания образов. М., МИЭМ, 1970, 167 с.
- 6.2. Галушкин А.И. Выбор критериев первичной оптимизации и построение оптимальной модели системы распознавания  $K$  классов образов в режиме обучения. / Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 10, 1972.
- 6.3. Галушкин А.И., Зотов Ю.Л., Шкунов Ю.А. Оперативная обработка экспериментальной информации. — М., Энергия, 1972, 360 с.
- 6.4. Галушкин А.И. Методы синтеза систем распознавания образов. — «Труды МИЭМ», 1969, вып. 6, с. 133–172.
- 6.5. Галушкин А.И. Единый подход к решению задач обучения и самообучения систем распознавания образов. — «Труды МИЭМ», 1970, вып. 6, с. 104–120.
- 6.6. Викторов Н.В., Галушкин А.И. Построение и исследование систем распознавания образов при произвольной «квалификации учителя». / Сб. «Медицинская радиоэлектроника», 1976, с.95–106.



## Глава 7. Анализ разомкнутых нейронных сетей

### 7.1. Законы распределения аналоговой и дискретной ошибок нейронной сети

Исходным материалом для анализа разомкнутых нейронных сетей являются заданная в общем виде плотность распределения входного сигнала и структура разомкнутой нейронной сети. Рассматриваются такие структуры разомкнутых нейронных сетей, как нейроны с двумя,  $K_p$  и континуум решений, нелинейные и многослойные нейронные сети из нейронов. Варианты характеристик входного сигнала представлены случаями двух,  $K$  и континуума классов образов при произвольной квалификации учителя.

Целью анализа разомкнутых нейронных сетей является вывод и исследование выражений для распределений и моментов распределений промежуточных и выходных сигналов нейронной сети. В данной главе в основном производится анализ распределений и моментов распределений ошибок нейронной сети. На основании результатов анализа разомкнутых нейронных сетей выбираются функционалы вторичной оптимизации.

Под функционалом вторичной оптимизации понимается функционал, выражаемый через параметры распределений текущих сигналов и ошибок нейронной сети и непосредственно минимизируемый в многослойных нейронных сетях при настройке по замкнутому циклу. При этом основной является задача формирования функционала вторичной оптимизации, соответствующего заданному критерию первичной оптимизации; соответствие понимается в смысле совпадения параметров нейронной сети при обеспечении минимума функционалов первичной и вторичной оптимизации.

#### 7.1.1. Нейрон с двумя решениями

Преобразование, осуществляемое нейроном с двумя решениями, может быть представлено в следующем виде:

$$y(n) = \text{sign} \sum_{i=0}^N a_i x_i(n) = \text{sign} g(n). \quad (7.1)$$

Выражения для аналоговой и дискретной ошибок нейрона имеют вид

$$x_a(n) = \varepsilon(n) - g(n); \quad x_g(n) = \varepsilon(n) - y(n). \quad (7.2)$$

Функция распределения входного сигнала при  $K=2$  равна (гл.5):

$$f(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{4} A_1 f_1(x) + \frac{1}{4} A_2 f_2(x) & \text{при } \varepsilon=1, \\ \frac{1}{4} B_1 f_1(x) + \frac{1}{4} B_2 f_2(x) & \text{при } \varepsilon=-1. \end{cases}$$

Здесь

$$A_1 = [2+(c_2-c_1) - b_1(c_1+c_2)]p_1;$$

$$A_2 = [2+(c_2-c_1) + b_2(c_2+c_1)]p_2;$$

$$B_1 = [2+(c_2-c_1) + b_1(c_1+c_2)]p_1;$$

$$B_2 = [2+(c_2-c_1) - b_2(c_1+c_2)]p_2.$$

Распределение аналоговой ошибки рассматриваемой нейронной сети имеет вид:

$$\begin{aligned} f_a(x) = & \frac{1}{4a_N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A_1 f_1(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{1-a_0-x_a}{a_N} - \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N}) + \right. \\ & + A_2 f_2(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{1+a_0-x_a}{a_N} - \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N}) + \\ & + B_1 f_1(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{-1+a_0-x_a}{a_N} - \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N}) + \\ & \left. + B_2 f_2(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{-1+a_0-x_a}{a_N} - \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N}) \right] dx_{N-1}, \dots, dx_1, \end{aligned} \quad (7.3)$$

а дискретной ошибки

$$f_{x_g}(x_g) = \begin{cases} \frac{1}{4} [B_1(1-\Phi_1) + B_2(1-\Phi_2)] & \text{при } x_g = -2, \\ \frac{1}{4} [A_1(1-\Phi_1) + B_1\Phi_1 + A_2(1-\Phi_2) + B_2\Phi_2] & \text{при } x_g = 0, \\ \frac{1}{4} [A_1\Phi_1 + A_2\Phi_2] & \text{при } x_g = 2. \end{cases} \quad (7.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \Phi_k\left(\frac{a_0}{a_N}, \dots, \frac{a_{N-1}}{a_N}\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x_1, \dots, x_N) dx_1, \dots, dx_N, \quad k=1,2, \\ & \quad -\frac{a_0}{a_N} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{a_i}{a_N} x_i \end{aligned}$$

Выражения для моментов  $r$ -го порядка распределения аналоговой и дискретной ошибок рассматриваемой нейронной сети можно представить в виде

$$\alpha_{ra} = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^r (-1)^{2r+m} C_r^m \sum_{i_1 \dots i_m=1}^N a_{i_1} \dots a_{i_m} \times$$

$$\times \left\{ \left[ A_1(a_0+1)^{r-m} + B_1(a_0-1)^{r-m} \right] \gamma_{i_1 \dots i_m}^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \left[ A_2(a_0+1)^{r-m} + B_2(a_0-1)^{r-m} \right] \gamma_{i_1 \dots i_m}^{(2)} \right\}; \quad (7.5)$$

$$\gamma_{i_1 \dots i_m}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_{i_1} \dots x_{i_m} f_k(\mathbf{x}) dx,$$

$$a_{rg} = 2^{r-2} [(A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_2)] + (-1)^r (B_1 + B_2 - B_1 \Phi_1 + B_2 \Phi_2). \quad (7.6)$$

В частном случае при  $c_1 = c_2 = 1$  и  $b_1 - b_2 = b$  распределение аналоговой ошибки рассматриваемой нейронной сети имеет вид (7.3) с заменой

$$A_1 = 2(1-b)p_1; \quad A_2 = 2(1+b)p_2;$$

$$B_1 = 2(1+b)p_1; \quad B_2 = 2(1-b)p_2.$$

Распределение дискретной ошибки:

$$f_{x_g}(x_g) = \begin{cases} \frac{1}{2} [p_1(1+b)(1-\Phi_1) + p_2(1-b)(1-\Phi_2)], & x_g = -2, \\ \frac{1}{2} [1+b(p_2-p_1) + 2p_1b\Phi_1 - 2p_2b\Phi_2], & x_g = 0; \\ \frac{1}{2} [(1-b)p_1\Phi_1 + (1+b)p_2\Phi_2], & x_g = 2. \end{cases}$$

Выражение для моментов распределения дискретной ошибки нейронной сети в данном случае имеет следующий вид:

$$a_{rg} = 2 \{ p_1 [1+b(1-2\Phi_1)] + p_2 [1-b(1-2\Phi_2)] \}$$

и отдельно для совокупностей образов первого и второго класса:

$$a_{r1g} = 2 [p_1(1+b)(1-\Phi_1) + p_2(1-b)(1-\Phi_2)],$$

$$a_{r2g} = 2 [p_1(1-b)\Phi_1 + p_2(1+b)\Phi_2].$$

### 7.1.2. Нейрон с континуумом решений

Преобразование, осуществляемое нейроном с континуумом решений в режиме обучения, может быть представлено в следующем виде:

$$y(n) = F \left[ \sum_{i=0}^N a_i x_i \right] = F[g(n)].$$

В случае континуума классов образов на входе нейронной сети

$$f(\mathbf{x}, \epsilon) = f'(x_1, \dots, x_N/\epsilon) f_\epsilon(\epsilon).$$

Совместное распределение для сигнала  $\epsilon(n)$  и аналогового выходного сигнала  $g(n)$  имеет следующий вид:

$$f_{g\epsilon}(g, \epsilon) = \frac{1}{a_N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f'(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{g+a_0}{a_N} -$$

$$- \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N} / \epsilon) f_\epsilon(\epsilon) dx_{N-1} \dots dx_1.$$

Распределение аналоговой ошибки нейронной сети

$$f_a(x_a) = \frac{1}{a_N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f'(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{-x_a + \epsilon + a_0}{a_N} -$$

$$- \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N} / \epsilon) f_\epsilon(\epsilon) dx_{N-1} \dots dx_1 d\epsilon.$$

Отсюда можно получить выражение для момента  $r$ -го порядка аналоговой ошибки в следующем виде:

$$\alpha_{ra} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (-\sum_{i=1}^N a_i y_i + \epsilon + a_0)^r \times f'(y/\epsilon) f_\epsilon(\epsilon) dy d\epsilon. \quad (7.7)$$

Распределение дискретной ошибки нейронной сети

$$f_{x_g}(x_g) = \frac{1}{a_N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f'(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{F^{-1}(\epsilon - x_g) + a_0}{a_N} -$$

$$- \sum_{i=1}^{N-1} \frac{a_i}{a_N} x_i / \epsilon) f_\epsilon(\epsilon) \left| \frac{dF^{-1}(\epsilon - x_g)}{d(\epsilon - x_g)} \right| dx_{N-1} \dots dx_1 d\epsilon. \quad (7.7a)$$

Отсюда

$$\alpha_{rg} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [-F(\sum_{i=1}^N a_i y_i - a_0) + \epsilon]^r f'(y/\epsilon) f_\epsilon(\epsilon) dy d\epsilon. \quad (7.8)$$

В частном случае при обучении распознаванию двух классов образов

$$f_{x_g}(x_g) = \frac{p_1}{a_N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dF^{-1}(-1-x_g)}{d(-1-x_g)} \right| \times$$

$$\times f_1(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{F^{-1}(-1-x_g) + a_0}{a_N} - \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N}) \times$$

$$\times dx_{N-1} \dots dx_1 + \frac{p_2}{a_N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dF^{-1}(1-x_g)}{d(1-x_g)} \right| \times \quad (7.8a)$$

$$\times f_2(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{F^{-1}(1-x_g) + a_0}{a_N} - \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N}) dx_{N-1} \dots dx_1;$$

$$\alpha_{rg} = p_1 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [-F(\sum_{i=1}^N y_i a_i - a_0) - 1]^r f_1(y) dy +$$

$$+ p_2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [-F(\sum_{i=1}^N a_i y_i - a_0) + 1]^r f_2(y) dy \quad (7.9)$$

и отдельно для совокупностей образов первого и второго класса

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{r1g} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [-F(\sum_{i=1}^N a_i y_i - a_0) - 1]^r f_1(y) dy; \\ \alpha_{r2g} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [-F(\sum_{i=1}^N a_i y_i - a_0) + 1]^r f_2(y) dy. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Из данных выражений достаточно просто получить соответствующие выражения для частных случаев, а именно:

$$F(g) = \text{sign } g; F(g) = \begin{cases} 1 & \text{при } g > \Delta a; \\ 0 & \text{при } -\Delta a < g < \Delta a; \\ -1 & \text{при } g < -\Delta a; \end{cases}$$

$$F(g) = \begin{cases} 1, & g > a; \\ \frac{g}{\Delta a}, & -\Delta a < g < \Delta a; \\ -1, & g < -\Delta a. \end{cases}$$

### 7.1.3. Анализ нейрона с $K_p$ решениями

Совместный закон распределения вероятностей входного сигнала системы распознавания  $K$  классов образов в режиме обучения имеет вид:

$$f(x, \epsilon) = \begin{cases} p_1 f_1(x) & \text{при } \epsilon=1, \\ \dots & \dots \\ p_K f_K(x) & \text{при } \epsilon=K. \end{cases}$$

В данном случае

$$y(n) = k_p \text{ при } a_{k_p-1, k_p} < g(n) < a_{k_p, k_p+1}$$

$$(a_{K, K+1} = \infty; a_{01} = -\infty).$$

Для совокупности образов  $K$ -го класса

$$f_{ka}(x_a) = \frac{1}{a_N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{k+a_0-x_a}{a_N} - \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N}) dx_{N-1} \dots dx_1.$$

Распределение аналоговой ошибки в данном случае будет иметь следующий вид:

$$f_a(x_a) = \sum_{k=1}^K p_k f_{ka}(x_a) = \sum_{k=1}^K \frac{p_k}{a_N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty},$$

$$f_k(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{k+a_0-x_a}{a_N} - \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N}) dx_{N-1} \dots dx_1.$$

Распределение дискретного выходного сигнала нейрона рассматриваемого типа для совокупности образов  $k$ -го класса может быть получено в следующем виде:

$$f_k(y) = \Phi_k \left( \frac{a_{k_p, k_p+1} + a_0}{a_N}; \frac{a_1}{a_N}, \dots, \frac{a_{N-1}}{a_N} \right) -$$

$$- \Phi_k \left( \frac{a_{k_p-1, k_p} + a_0}{a_N}; \frac{a_1}{a_N}, \dots, \frac{a_{N-1}}{a_N} \right) \text{ при } y = k_p. \quad (7.10a)$$

Здесь, как и ранее,

$$\Phi_k \left( \frac{a_{k_p-1}, k_p + a_0}{a_N}; \frac{a_1}{a_N}, \dots, \frac{a_{N-1}}{a_N} \right) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N$$

Отсюда распределение дискретной ошибки

$$f_{x_g}(x_g) = \sum_{k=1}^K p_k \left[ \Phi_k \left( \frac{a_{k-k''}, k-k''+1 + a_0}{a_N}, \frac{a_1}{a_N}, \dots, \frac{a_{N-1}}{a_N} \right) - \right. \\ \left. - \Phi_k \left( \frac{a_{k-k''-1}, k-k'' + a_0}{a_N}; \frac{a_1}{a_N}, \dots, \frac{a_{N-1}}{a_N} \right) \right] \text{ при } x_g = k''.$$

Выражения для моментов  $r$ -го порядка распределений аналоговой и дискретной ошибок могут быть представлены в виде:

$$\alpha_{ra} = \sum_{k=1}^K p_k \sum_{m=0}^r C_r^m (a_0 + k)^m (-1)^{r-m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^N a_i y_i \right)^{r-m} f_k(\bar{x}) d\bar{x};$$

$$\alpha_{rg} = \sum_{k''=1-k}^K (k'')^r \sum_{k=1}^K p_k \left[ \Phi_k \left( \frac{a_{k-k''}, k-k''+1 + a_0}{a_N}; \frac{a_1}{a_N}, \dots, \frac{a_{N-1}}{a_N} \right) - \right. \\ \left. - \Phi_k \left( \frac{a_{k-k''-1}, k-k'' + a_0}{a_N}; \frac{a_1}{a_N}, \dots, \frac{a_{N-1}}{a_N} \right) \right].$$

Выражение для  $r$ -го момента распределения аналоговой ошибки имеет следующий вид:

$$\alpha_{ra} = \frac{1}{a_N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_a^r \sum_{k=1}^K p_k f_k(x_1, \dots, x_{N-1}, \frac{k+a_0-x_a}{a_N} - \\ - \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N}) dx_a dx_{N-1} \dots dx_1.$$

После замены переменных  $x_1 = y_1; \dots; x_{N-1} = y_{N-1}$ ,

$$\frac{k+a_0-x_a}{a_N} - \sum_{i=1}^{N-1} x_i \frac{a_i}{a_N} = y_N$$

получаем

$$\alpha_{ra} = \sum_{k=1}^K p_k \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^N y_i a_i + (r+a_0) \right]^r f_k(y_1, \dots, y_N) dy_N \dots dy_1;$$

$$\alpha_{ra} = \sum_{k=1}^K p_k \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^r C_r^m (a_0 + k)^m (-1)^{r-m} \left( \sum_{i=1}^N a_i y_i \right)^{r-m} f_k(y) dy.$$

#### 7.1.4. Анализ системы распознавания образов с нелинейной разделяющей поверхностью

В [7.4] было указано, что система распознавания образов с нелинейной разделяющей поверхностью может быть представлена эквивалентной системой, состоящей из безынерционного слоя нелинейных преобразований и нейрона. Если слой нелинейных преобразований формирует из компонент вектора  $(x_1, \dots, x_N)$  компоненты вектора  $(x_1, \dots, x_N, \{z_{i_1, i_2}\}, \dots, \{z_{i_1, \dots, i_r}\})$ , где  $i_1, \dots, i_r = 1, \dots, N$  и  $z_{i_1, \dots, i_r} = x_{i_1} \dots x_{i_r}$ , то можно показать, что плотность распределения выходного сигнала данного слоя может быть представлена через плотность распределения  $f(\mathbf{x})$  входного сигнала следующим образом:

$$f'(x') = f'(\mathbf{x}, \{z_{i_1, i_2}\}, \dots, \{z_{i_1, \dots, i_r}\}) = \\ = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{для всех } i, k, (k=1, \dots, r), \\ & \text{при которых } z_{i_1, \dots, i_k} = x_{i_1}, \dots, x_{i_k}; \\ 0 & \text{для всех } i, k, \\ & \text{при которых } z_{i_1, \dots, i_k} \neq x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, (k=1, \dots, r). \end{cases}$$

Выражение для второго момента распределения дискретной ошибки рассматриваемой нелинейной системы имеет следующий вид:

$$\alpha_{2g} = 4[\Phi'_2 p_2 + p_1 - \Phi'_1 p_1],$$

где

$$\Phi'_i = \int_{S'(x') < 0} \dots \int_{S'(x') < 0} f'_i(x') dx' \text{ и } S'(x') = -a_0 + \sum_{i=1}^{N^*} a_i x'_i.$$

Необходимо учесть, что выражение  $S(x) = -a_0 + \sum_{i=1}^N a_i x_i = 0$  определяет линейную разделяющую поверхность в исходном пространстве признаков. Определим, как изменяется вид разделяющей поверхности в исходном пространстве признаков при увеличении порядка  $r$  нелинейного преобразования. В случае преобразования второго порядка:

$$\begin{aligned} \Phi'_i &= \int_{s'(x') < 0} \int_{\dots} \int_{\dots} \left\{ \begin{array}{l} f_i(x) \text{ при } z_{i_1 i_2} = x_{i_1 i_2} \\ 0 \text{ при } z_{i_1 i_2} \neq x_{i_1 i_2} \end{array} \right\} dx'_1 \dots dx'_{N^*} = \\ &= \int_{s'(x') < 0} \int_{\dots} \int_{\dots} f_i(x) \prod_{i_1=1}^N \prod_{i_2=1}^N \delta(z_{i_1 i_2} - x_{i_1 i_2}) dx'_1 \dots dx'_{N^*}; \\ \Phi'_i &= \int_{-a_0 + \sum_{i=1}^N a_i x_i + \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N a_{i_1 i_2} z_{i_1 i_2} < 0} \int_{\dots} \int_{\dots} f_i(x) \prod_{i_1=1}^N \prod_{i_2=1}^N \delta(z_{i_1 i_2} - x_{i_1 i_2}) \times \\ &\times dx_1 \dots dx_N \prod_{i_1=1}^N \prod_{i_2=1}^N dz_{i_1 i_2} = \int_{-a_0 + \sum_{i=1}^N a_i x_i + \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N a_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} < 0} \int_{\dots} \int_{\dots} f_i(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в случае  $r=2$  эквивалентная разделяющая поверхность в исходном пространстве признаков будет поверхностью второго порядка с коэффициентами, однозначно определяемыми по коэффициентам выходного нейрона с входным слоем нелинейных преобразований. В случае преобразования  $r$ -го порядка:

$$\alpha_{2g} = 2 \left[ p_1 + \int_{-a_0 + \sum_{k=1}^r \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N a_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} < 0} \int_{\dots} \int_{\dots} [p_2 f_2(x) - p_1 f_1(x)] dx \right].$$

Этим доказывается эквивалентность (по критерию минимума средней функции риска) представления системы распознавания образов с нелинейной разделяющей поверхностью в виде блока нелинейных преобразований и нейрона.

## 7.2. Выбор функционала вторичной оптимизации

Рассмотрим функционалы вторичной оптимизации, связанные с моментами распределения аналоговой и дискретной ошибок нейронной сети с двумя решениями (два класса образов). Общие требования к функционалу вторичной оптимизации нейронной сети были отмечены в введении. Параметры функционала, необходимые для организации итерационной процедуры поиска, должны достаточно легко измеряться и оцениваться в системе; функционал должен иметь сравнительно простой вид относительно настраиваемых коэффициентов нейронной сети и минимальное значение при тех же значениях настраиваемых параметров нейронной сети, при которых соблюдается (при заданной структуре разомкнутой нейронной сети и некоторой априорной информации) экстремум некоторого функционала первичной оптимизации.

Анализ выражений (7.5) и (7.6) для моментов распределения аналоговой и дискретной ошибок позволяет сделать следующие выводы [7.2, 7.3]:

1. Моменты нечетного порядка распределений аналоговой и дискретной ошибок нейронной сети в режиме обучения не могут быть использованы в качестве функционалов вторичной оптимизации. Возможно использование в качестве таких функционалов модулей указанных моментов.

2. Моменты четного порядка указанных распределений могут быть использованы в качестве функционалов вторичной оптимизации, причем в случае моментов распределений дискретной ошибки нет смысла в рассмотрении моментов выше второго порядка ввиду их пропорциональности  $\alpha_{2g}$ .

3. Основной целью исследования в данной главе является выяснение того, какому критерию первичной оптимизации и какой априорной информации о характеристиках входного сигнала и матрице потерь соответствует минимизация выбранного функционала вторичной оптимизации.

4. Исследование выражений для  $|\alpha_{1a}|$  и  $\alpha_{2a}$  (случай нейрона) показывает, что минимизация данных функционалов вторичной оптимизации эквивалентна минимизации средней функции риска при учете только моментов первого порядка распределений совокупностей образов того или иного класса. При этом считается, что априорные вероятности появления образов из различных классов равны и имеет место следующее ограничение на коэффициенты матрицы потерь  $(l_{22} - l_{21}) = (l_{11} - l_{12})$ .

5. Исследование выражения для модуля первого момента распределения дискретной ошибки нейронной сети в данном случае

$$|\alpha_{1g}| = 2 |p_2 \Phi_a - p_1 + p_1 \Phi_1|$$

показывает, что минимизация  $|\alpha_{1g}|$  приводит к удовлетворению критерия минимума средней функции риска при условии равенства составляющих средней функции риска для обоих классов и следующих ограничениях на коэффициенты матрицы  $L$

$$l_{22} - l_{21} = l_{11} - l_{12}$$

6. Исследование выражения для второго момента распределения дискретной ошибки нейронной сети  $\alpha_{2g} = 4 |P_2 \Phi_2 + P_1 - P_1 \Phi_1|$  показывает, что минимизация  $\alpha_{2g}$  приводит к удовлетворению критерия минимума средней функции риска при аналогичных указанным выше ограничениям на коэффициенты матрицы.

7. Дополнительные ограничения, связанные с конечным числом учитываемых моментов при рассмотрении  $|\alpha_{1a}|$  и  $\alpha_{2a}$ , а также связанные с равенством  $p_1 r_1 = p_2 r_2$  при рассмотрении  $|\alpha_{1g}|$  делают указанные функционалы одноэкстремальными при ограниченной структуре разомкнутых систем (нейрон) и многомодальных распределениях входного сигнала. Функционал  $\alpha_{2g}$  при ограниченной структуре нейронной сети может быть многоэкстремальным, т.е. его минимизация приводит к обеспечению в общем случае только локального минимума средней функции риска при  $l_{22} - l_{21} = l_{11} - l_{12}$ .

8. При произвольной структуре разомкнутой нейронной сети, т.е. при произвольном виде разделяющей поверхности, в соответствии с результатами п.7.1 для случая  $b_1 = b_2 = 1$ ,  $c_1 = c_2 = 1$ , выражение для  $\alpha_{2g}$  будет иметь следующий вид:

$$\alpha_{2g} = 4 [p_2 \Phi_2 + p_1 - p_1 \Phi_1],$$

где

$$\Phi_k = \Phi_k[S(\mathbf{x})] = \int_{S(\mathbf{x}) < 0} \dots \int_{S(\mathbf{x}) < 0}^N f_k(\mathbf{x}) dx, k=1, 2.$$

Здесь функционал  $\alpha_{2g}$  пропорционален средней функции

риска при произвольной структуре нейронной сети (два класса образов, два решения) и при известных ограничениях на коэффициенты матрицы  $L$ . Необходимость в анализе нейронной сети с конкретной структурой возникает, так же как и выше, в случае системы с нелинейной разделяющей поверхностью для определения вида разделяющей поверхности, реализуемой системой с данной структурой в исходном пространстве признаков.

9. Рассмотрение указанных выше функционалов вторичной оптимизации представляет интерес, несмотря на указанные ограничения, так как приводит к достаточно простой реализации соответствующих систем, настраивающихся по замкнутому циклу, а также может быть полезно при построении нейронной сети с переменной структурой.

### 7.3. О выборе функционала вторичной оптимизации в системе «Адалин»

Основой методов настройки нейрона по замкнутому циклу, представленных в работах Б. Уидроу (системы под названием «Адалин») [7.1], является минимизация второго момента распределения аналоговой ошибки. Ниже обсуждается утверждение Б. Уидроу, высказанное им в одной из первых работ этого цикла:

«Используя некоторые геометрические аргументы, можно показать, что средний квадрат дискретной ошибки есть монотонная функция среднего квадрата аналоговой ошибки и минимизация их обоих есть минимизация средней функции риска».

Это является неверным, хотя бы потому, что минимизация средней функции риска для нормальных распределений с различными ковариационными матрицами достигается с помощью системы с разделяющей поверхностью второго порядка. Рассмотрим случай, когда система представлена в виде нейрона. В этом случае совпадение оптимальных решений по критериям минимума  $\alpha_{2g}$  (средней функции риска при определенных ограничениях на  $p_i$  и  $l_{ij}$ ) и  $\alpha_{2a}$  достигается лишь при равных ковариационных матрицах, соответствующих образам первого и второго класса [7.2].

Проведем исследование экстремальных свойств моментов второго порядка аналоговой и дискретной ошибок одномерного нейрона с целью выяснения разницы в оптимальных решениях по критериям минимума  $\alpha_{2a}$  и  $\alpha_{2g}$ .

Исследование проводится следующим образом: а) вычисляются значения коэффициентов  $a'_0$  и  $a'_1$ , минимизирующих  $\alpha_{2a}$ ; б) вычисляются значения коэффициентов  $a''_0$  и  $a''_1$ , минимизирующих  $\alpha_{2g}$ ; в) вычисляется величина  $\Delta\alpha_{2g} = \alpha_{2g}(a'_0, a'_1) - \alpha_{2g}(a''_0, a''_1)$ , которая служит оценкой отклонения оптимальных решений по критериям минимума  $\alpha_{2a}$  и  $\alpha_{2g}$ .

На рис.7.1 построена зависимость  $\Delta R = \Delta\alpha_{2g}(\mu_2)$  для одного частного случая [7.2], когда для случая двух нормальных распределений при фиксированных математических ожиданиях меняется дисперсия  $\mu_2$  распределения одного из классов. Ограниченность критерия минимума  $\alpha_{2a}$  особенно хорошо иллюстрируется на примере многомодальных распределений (рис.7.2), где показаны в одномерном случае «пороги» нейрона  $a'_0$  и  $a''_0$ , оптимальные по критериям минимума  $\alpha_{2a}$  и  $\alpha_{2g}$  (заштрихованная площадь – приращение  $\Delta R$  при переходе от критерия минимума  $\alpha_{2g}$  к критерию минимума  $\alpha_{2a}$ ).

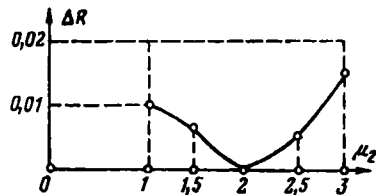


Рис. 7.1. Сравнение критериев минимума  $\alpha_{2a}$  и  $\alpha_{2g}$

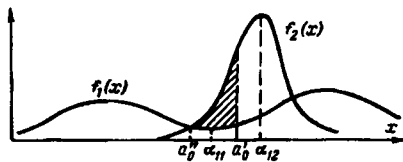


Рис. 7.2. Сравнение критериев минимума  $\alpha_{2a}$  и  $\alpha_{2g}$  для многомодальных распределений

#### 7.4. Формирование функционалов вторичной оптимизации, соответствующих заданному критерию первичной оптимизации

Ниже формирование функционалов вторичной оптимизации производится для разомкнутых нейронных сетей с произвольной структурой для случая  $K_p = K = 2$ , т.е. с разделяющей поверхностью произвольного вида.

#### 7.4.1. Критерий минимума средней функции риска

Основной вопрос здесь заключается в выборе преобразования дискретной ошибки нейронной сети  $x_g(n) = \varepsilon(n) - x_k(n)$  для получения дискретной ошибки  $x'_g(n)$ , второй момент распределения которой был бы равен средней функции риска. Будем осуществлять указанное преобразование следующим образом: умножаем  $x_g(n)$  на  $A$ , если  $\varepsilon(n) = -1$ , на  $B$  – если  $\varepsilon(n) = +1$ ; затем к результату прибавляем  $C$ . Найдем параметры данного преобразования ( $A, B, C$ ), так чтобы второй момент распределения  $f_{x'_g}(x'_g)$  был равен  $R$ :

$$f_{x'_g}(x'_g) = \begin{cases} p_1(1-\Phi_1) & \text{при } x'_g = -2A+C, \\ p_1\Phi_1 + (1-\Phi_2)p_2 & \text{при } x'_g = C, \\ p_2\Phi_2 & \text{при } x'_g = 2B+C; \end{cases} \quad (7.11)$$

$$\alpha_{2g} = p_1(2A-C)^2 + p_2C^2 + p_1\Phi_1(4AC-4A^2) + p_2\Phi_2(4BC-4B^2); \quad (7.12)$$

$$R = p_1l_{12} + p_2l_{22} + p_1(l_{11}-l_{12})\Phi_1 + p_2\Phi_2(l_{21}-l_{22}). \quad (7.12a)$$

Отсюда следуют выражения для искоемых параметров преобразования:

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{p_2l_{22} + 2p_1l_{12} - p_1l_{11}}; \\ A &= \frac{\sqrt{p_2(l_{11}+l_{22}) + l_{12}(p_1-p_2)} + \sqrt{p_2l_{22} + 2p_1l_{12} - p_1l_{11}}}{2}; \\ B &= \frac{\sqrt{l_{21} - p_1l_{22} + 2p_1l_{12} - p_1l_{11}} - \sqrt{p_2l_{22} + 2p_1l_{12} - p_1l_{11}}}{2}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Если искать параметры  $A, B, C$ , обеспечивающие совпадение  $\alpha_{2g}$  и  $R$  с точностью до постоянного слагаемого  $(p_1l_{12} + p_2l_{22})$ , то в данном случае

$$C=0; A = \frac{1}{2}\sqrt{l_{12} - l_{11}}; B = \frac{1}{2}\sqrt{l_{21} - l_{22}}. \quad (7.14)$$

Возможно применение следующего преобразования ( $Z$ ) дискретной ошибки

$$x'_g(n) = \begin{cases} z_{12} & \text{при } x_g = -2, \varepsilon = -1, \\ z_{11} & \text{при } x_g = 0, \varepsilon = -1, \\ z_{22} & \text{при } x_g = 0, \varepsilon = +1, \\ z_{21} & \text{при } x_g = 2, \varepsilon = +1. \end{cases}$$

В этом случае

$$f_{x'_g}(x'_g) = \begin{cases} p_1(1-\Phi_1) & \text{при } x'_g = Z_{12}, \\ p_1\Phi_1 & \text{при } x'_g = Z_{11}, \\ p_2(1-\Phi_2) & \text{при } x'_g = Z_{22}, \\ p_2\Phi_2 & \text{при } x'_g = Z_{21} \end{cases} \quad (7.14a)$$

и условия совпадения  $\alpha_{2g}$  и  $R$  записываются в следующем виде:

$$Z_{kp^k} = \sqrt{l_{kp^k}}. \quad (7.15)$$

#### 7.4.2. Критерий минимума $R$ при условии равенства $p_1 r_1 = p_2 r_2$

Минимизация  $R$  при условии равенства  $p_1 r_1 = p_2 r_2$ , т.е. при условии

$$p_1 l_{11} \Phi_1 + p_1 l_{12} (1 - \Phi_1) - p_2 l_{21} \Phi_2 - p_2 l_{22} (1 - \Phi_2) = 0, \quad (7.16)$$

эквивалентна минимизации функционала Лагранжа:

$$R^* = [p_1 l_{11} \Phi_1 + p_1 l_{12} (1 - \Phi_1)](1 + \lambda) + [p_2 l_{21} \Phi_2 - p_2 l_{22} (1 - \Phi_2)](1 - \lambda). \quad (7.17)$$

Совпадение  $R^*$  и  $\alpha_{2g}$  обеспечивается при следующих параметрах описанного выше преобразования ( $A, B, C$ ):

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{p_2 l_{22} (1 - \lambda) + 2p_1 l_{12} (1 + \lambda) - p_1 l_{11} (1 + \lambda)}; \\ A &= \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \lambda) [p_2 l_{11} + (p_1 - p_2) l_{12}] + p_2 l_{22} (1 - \lambda) +} \\ &\quad + \sqrt{p_2 l_{22} (1 - \lambda) + 2p_1 l_{12} (1 + \lambda) - p_1 l_{11} (1 + \lambda)}; \\ B &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(1 - \lambda) (l_{21} - p_1 l_{22})} + (1 + \lambda) (2p_1 l_{12} - p_1 l_{11}) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{p_2 l_{22} (1 - \lambda) + 2p_1 l_{12} (1 + \lambda) - p_1 l_{11} (1 + \lambda)} \right]. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Левая часть (7.16) есть градиент  $R^*$  по  $\lambda$ . В нейронной сети эту величину можно оценивать как первый момент преобразованной ( $A_1, B_1, C_1$ ) дискретной ошибки, причем параметры преобразования  $A_1, B_1, C_1$  получают следующим образом. Из (7.11) следует, что

$$\alpha_{1g} = p_1 (C_1 - 2A_1) + C_1 p_2 + p_1 \Phi_1 2A_1 + p_2 \Phi_2 2B_1. \quad (7.19)$$

Сравнение  $\alpha_{1g}$  и левой части (7.16) показывает, что

$$A_1 = \frac{l_{11} - l_{12}}{2}; \quad B_1 = \frac{l_{22} - l_{21}}{2}; \quad C_1 = p_1 l_{11} - p_2 l_{22}. \quad (7.20)$$

В случае применения описанного в предыдущем пункте преобразования  $Z$  сравнение  $\alpha_{2g}$ , полученного по (7.14a), и  $R^*$  (7.17) дает условие для их совпадения в следующем виде:

$$\begin{aligned} Z_{12} &= \sqrt{l_{12}(1+\lambda)}; \quad Z_{22} = \sqrt{l_{22}(1-\lambda)}; \quad Z_{11} = \sqrt{l_{11}(1+\lambda)}; \\ Z_{21} &= \sqrt{l_{21}(1+\lambda)}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Преобразование, необходимое для получения дискретной ошибки, первый момент распределения которой был бы равен левой части (7.16), имеет следующие параметры:

$$Z'_{12} = l_{12}; \quad Z'_{22} = -l_{22}; \quad Z'_{21} = -l_{21}; \quad Z'_{11} = l_{11}. \quad (7.22)$$

#### 7.4.3. Критерий минимума $R$ при условии $p_1 r_1 = \alpha = const$

Минимум  $R$  при условии равенства  $p_1 r_1 = \alpha$ , т.е. при условии

$$p_1 l_{11} \Phi_1 + p_1 l_{12} [1 - \Phi_1] - \alpha = 0, \quad (7.23)$$

обеспечивается при минимизации функционала Лагранжа:

$$R^* = p_1 l_{12} (1 + \lambda) + p_2 l_{22} + p_1 (l_{11} - l_{12}) (1 + \lambda) \Phi_1 + p_2 (l_{21} - l_{22}) \Phi_2 - \lambda \alpha. \quad (7.24)$$

Сравнение (7.24) и (7.12a) дает выражения для коэффициентов  $A, B, C$  данного преобразования, обеспечивающие равенство  $R^*$  и  $\alpha_{2g}$ :

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{p_2 l_{22} + 2p_1 l_{12} (1 + \lambda) - p_1 l_{11} (1 + \lambda) - \alpha \lambda}; \\ A &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(1 + \lambda) [p_2 l_{11} + (p_1 - p_2) l_{12}] + p_2 l_{22} - \alpha \lambda} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{p_2 l_{22} + 2p_1 l_{12} (1 + \lambda) - p_1 l_{11} (1 + \lambda) - \alpha \lambda} \right]; \\ B &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{l_{21} - p_1 l_{22} + (1 + \lambda) (2p_1 l_{12} - p_1 l_{11}) - \alpha \lambda} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{p_2 l_{22} + 2p_1 l_{12} (1 + \lambda) - p_1 l_{11} (1 + \lambda) - \alpha \lambda} \right]. \end{aligned} \quad (7.25)$$



Параметры  $A_1, B_1, C_1$  преобразования дискретной ошибки, делающие равными первый момент распределения (7.12) и левую часть (7.23), имеют следующий вид:

$$A_1 = \frac{l_{11} - l_{12}}{2}; B_1 = 0; C_1 = p_1 l_{11} - \alpha. \quad (7.26)$$

В случае применения к дискретной ошибке преобразования  $Z$  равенство (7.24) и второго момента распределения (7.14а) обеспечивается при условии:

$$Z_{21} = \sqrt{l_{21}}; Z_{22} = \sqrt{l_{22}}; Z_{12} = \sqrt{l_{12}(1+\lambda) - \frac{\alpha\lambda}{p_1}}; Z_{11} = \sqrt{l_{11}(1+\lambda) - \frac{\alpha\lambda}{p_1}}. \quad (7.27)$$

Определение градиента  $R^*$  по  $\lambda$  в данном случае производится в нейронной сети формированием дискретной ошибки  $x'_g(n)$ , первый момент распределения которой равен левой части (7.23). Параметры преобразования  $Z$  в этом случае получают следующими:

$$Z'_{21} = Z'_{22} = 0; Z'_{12} = l_{12} - \frac{\alpha}{p_1}; Z'_{11} = l_{11} - \frac{\alpha}{p_1}. \quad (7.28)$$

### 7.5. Континуальные модели нейронной сети

Для континуальных моделей нейронной сети рассмотрим процедуру формирования функционалов вторичной оптимизации, соответствующих критерию минимума средней функции риска, так как обобщение на другие критерии первичной оптимизации не представляет принципиальных затруднений.

Так же как и выше, вопрос формирования функционала оптимизации решается для нейронной сети с произвольной структурой и иллюстрируется на конкретных структурах.

#### 7.5.1. Нейронная сеть с континуумом решений; два класса образов

Преобразование дискретной ошибки в данном случае имеет следующий вид:

$$x'_g(n) = \begin{cases} Z_2[x_g(n)], \epsilon(n)=1, \\ Z_1[x_g(n)], \epsilon(n)=-1. \end{cases}$$

Отсюда распределение преобразованной ошибки имеет следующий вид:

$$f_{x'_g}(x'_g) = p_1 f_{1x_g}[Z_1^{-1}(x'_g)] \left| \frac{dZ_1^{-1}(x'_g)}{dx'_g} \right| + p_2 f_{2x_g}[Z_2^{-1}(x'_g)] \left| \frac{dZ_2^{-1}(x'_g)}{dx'_g} \right|,$$

а выражение для второго момента данного распределения (после соответствующей замены переменных и при условии монотонности функций  $Z_1$  и  $Z_2$ )

$$\alpha_{2g} = \int_{-\infty}^{\infty} [Z_1(x_g)]^2 p_1 f_{1x_g}(x_g) dx_g + \int_{-\infty}^{\infty} [Z_2(x_g)]^2 p_2 f_{2x_g}(x_g) dx_g.$$

При произвольной структуре разомкнутой нейронной сети имеют место соотношения  $y=P(\mathbf{x})$ ,  $x_g = \epsilon - P(\mathbf{x})$ . Отсюда

$$x_N = P'_1(x_g, P, x_1, \dots, x_{N-1}) \text{ при } \epsilon = -1;$$

$$x_N = P'_2(x_g, P, x_1, \dots, x_{N-1}) \text{ при } \epsilon = 1.$$

В данном случае распределение дискретной ошибки для образов  $k$ -го класса имеет следующий вид:

$$f_{kx_g}(x_g) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_k[x_1, \dots, x_{N-1}, P'_k(x_g, P, x_1, \dots, x_{N-1})] \times \\ \times \left| \frac{dP'_k(x_g, P, x_1, \dots, x_{N-1})}{dx_g} \right| dx_{N-1} dx_1.$$

Отсюда после соответствующих преобразований и замены переменных можно получить следующее выражение для второго момента распределения дискретной ошибки:

$$\alpha_{2g} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{Z_1[-1-P(\mathbf{x})]\}^2 p_1 f_1(\mathbf{x}) dx + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{Z_2[1-P(\mathbf{x})]\}^2 p_2 f_2(\mathbf{x}) dx. \quad (7.29)$$

В частности, для нейрона с континуумом решений с использованием (7.8а) можно получить следующее:

$$\alpha_{2g} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{Z_1[-1-F(\sum_{i=1}^N a_i x_i - a_0)]\}^2 p_1 f_1(\mathbf{x}) dx + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{Z_2[1-F(\sum_{i=1}^N a_i x_i - a_0)]\}^2 p_2 f_2(\mathbf{x}) dx.$$

В общем случае

$$\alpha_{2g} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{Z_1[x_g(\mathbf{x})]\}^2 p_1 f_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{Z_2[x_g(\mathbf{x})]\}^2 p_2 f_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Сравнение данного выражения с выражением для средней функции риска

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_1 f_1(\mathbf{x}) l_1[x_k=P(\mathbf{x})] + p_2 f_2(\mathbf{x}) l_2[x_k=P(\mathbf{x})] d\mathbf{x}$$

дает соотношения для преобразования дискретной ошибки, необходимые для равенства  $\alpha_{2g}$  и  $R$ :

$$Z_1(x_g) = \sqrt{l_1(-1-x_g)}; \quad Z_2(x_g) = \sqrt{l_2(1-x_g)}. \quad (7.30)$$

### 7.5.2. Нейронная сеть с континуумом решений; континуум классов образов

В данном случае

$$f_{x'_g}(x'_g) = f_{x_g} \left[ Z^{-1}(x'_g) \right] \left| \frac{dZ^{-1}(x'_g)}{dx'_g} \right|.$$

Отсюда при условии монотонности функции  $Z(x_g)$  следует, что

$$\alpha_{2g} = \int_{-\infty}^{\infty} [Z(x_g)]^2 f_{x_g}(x_g) dx_g. \quad (7.31)$$

Здесь

$$y = P(\mathbf{x}); \quad x_g = \varepsilon - P(\mathbf{x}); \quad x_N = P'(x_g, P, \varepsilon, x_1, \dots, x_{N-1});$$

$$f_{x_g} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[x_1, \dots, x_{N-1}, P'(x_g, P, \varepsilon, x_1, \dots, x_{N-1}) | \varepsilon] \times \\ \times f_\varepsilon(\varepsilon) \left| \frac{dP'(x_g, P, \varepsilon, x_1, \dots, x_{N-1})}{dx_g} \right| dx_{N-1} dx_1 d\varepsilon.$$

Отсюда и из (7.31) следует после соответствующей замены переменных:

$$\alpha_{2g} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{Z[\varepsilon - P(\mathbf{x})]\}^2 f(\mathbf{x}|\varepsilon) f_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon d\mathbf{x}. \quad (7.32)$$

В частности, с учетом (7.7a) для нейрона с континуумом решений

$$\alpha_{2g} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{Z[\varepsilon - F(\sum_{i=1}^N a_i x_i - a_0)]\}^2 f(\mathbf{x}|\varepsilon) f_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon d\mathbf{x}.$$

Из сравнения (7.32) с выражением для средней функции риска

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(\varepsilon) f(\mathbf{x}|\varepsilon) l[x_k=P(\mathbf{x}), \varepsilon] dx d\varepsilon$$

следует соотношение для преобразования дискретной ошибки, необходимого для равенства  $\alpha_{2g}$  и  $R$ :

$$Z(x_g) = \sqrt{l[(\varepsilon - x_g), \varepsilon]}.$$

### 7.5.3. Нейронная сеть с $K_p$ решениями; $K$ классов образов

Из выражения (7.10a) следует выражение для распределения преобразованной соответствующим образом дискретной ошибки нейрона с  $K_p$  решениями для образов  $k$ -го класса при  $x'_g = (k - k_p) A_{k_p k}$ :

$$f_{kx'_g}(x'_g) = \Phi_k \left( \frac{a_{k_p, k_p+1} + a_0}{a_N}, \frac{a_1}{a_N}, \dots, \frac{a_{N-1}}{a_N} \right) - \\ - \Phi_k \left( \frac{a_{k_p-1, k_p} + a_0}{a_N}, \frac{a_1}{a_N}, \dots, \frac{a_{N-1}}{a_N} \right).$$

Отсюда

$$\alpha_{2g} = \sum_{k=1}^K \sum_{k_p=1}^K [(k - k_p) A_{k_p k}]^2 p_k \times \\ \times \left[ \Phi_k \left( \frac{a_{k_p, k_p+1} + a_0}{a_N}, \frac{a_1}{a_N}, \dots, \frac{a_{N-1}}{a_N} \right) - \right. \\ \left. - \Phi_k \left( \frac{a_{k_p-1, k_p} + a_0}{a_N}, \frac{a_1}{a_N} \right) \right].$$

В случае нейронной сети с произвольной структурой

$$\alpha_{2g} = \sum_{k=1}^K \sum_{k_p=1}^{K_p} [(k-k_p)A_{k_p k}]^2 p_k \int_{S^{(k_p)}(x)>0} f_k(x) dx.$$

Из сравнения  $\alpha_{2g}$  и  $R$ :

$$R = \sum_{k=1}^K \sum_{k_p=1}^{K_p} l_{k_p k} P_k \int_{S^{(k_p)}(x)>0} f_k(x) dx$$

следует условие для их совпадения в следующем виде:

$$A_{k_p k} = \frac{1}{k-k_p} \sqrt{l_{k_p k}}.$$

#### 7.5.4. Нейронная сеть с $N^*$ -выходными каналами; $K_0$ градаций сигнала по каждому классу

В этом случае функция распределения дискретной ошибки для совокупности образов класса  $(k_1, \dots, k_{N^*})$ :

$$f_{(k_1, \dots, k_{N^*})}(x_{1g}, \dots, x_{N^*g}) = \int_{S^{(k_1, \dots, k_{N^*})}(x)>0} f_{(k_1, \dots, k_{N^*})}(x) dx$$

при  $(x_{1g}, \dots, x_{N^*g}) = (k_1, \dots, k_{N^*}) - (k_{1p}, \dots, k_{N^*p})$ .

Применяем к вектору  $(x_{1g}, \dots, x_{N^*g})$  следующее преобразование, необходимое для получения преобразованной дискретной ошибки  $x'_g(n)$ . Умножаем вектор  $x_g$  на скаляр  $A(k_1, \dots, k_{N^*}, k_{1p}, \dots, k_{N^*p})$  и вычисляем сумму квадратов компонент данного результирующего вектора. Результат будет преобразованной дискретной ошибкой  $x'_g(n)$ . В этом случае для совокупности образов всех классов

$$M[x_{1g}'^2 + \dots + x_{N^*g}'^2] = \sum_{k_1=1}^{K_0} \dots \sum_{k_{N^*}=1}^{K_0} \sum_{k_{1p}=1}^{K_0} \dots \sum_{k_{N^*p}=1}^{K_0} [(k_1, \dots, k_{1p})^2 + \dots + (k_{N^*} - k_{N^*p})^2] A^2(k_1, \dots, k_{N^*}, k_{1p}, \dots, k_{N^*p}) f_{\epsilon}(k_1, \dots, k_{N^*}) \times \\ \times \int_{S^{(k_1, \dots, k_{N^*})}(x)>0} f_{(k_1, \dots, k_{N^*})}(x) dx.$$

Сравнение данного выражения с  $R$  дает соотношение для параметров преобразования  $A$  в следующем виде

$$A(k_1, \dots, k_{N^*}, k_{1p}, \dots, k_{N^*p}) = \sqrt{\frac{l(k_1, \dots, k_{N^*}, k_{1p}, \dots, k_{N^*p})}{(k_1 - k_{1p})^2 + \dots + (k_{N^*} - k_{N^*p})^2}}. \quad (7.33)$$

Это преобразование дискретной ошибки делает равными величины  $M[x_{1g}'^2 + \dots + x_{N^*g}'^2]$  и  $R$ .

#### 7.5.5. Нейронные сети с $N^*$ -выходными каналами; континуум решений нейронных сетей

В данном случае  $x_g = \epsilon - P(x)$  - вектор размерности  $N^*$ . Плотность распределения суммы квадратов компонент вектора  $x_g$  имеет вид:

$$f_{x_g^2}(x_g^2) = \int_E \dots \int_E \int_X \dots \int_X f[x_1, \dots, x_{N-1}, P^*(*) | \epsilon] \times \\ \times f_{\epsilon}(\epsilon) \left| \frac{dP^*(*)}{dx_g^2} \right| dx_{N-1} \dots dx_1 d\epsilon.$$

Здесь

$$x_N = P'(x_g^2, P_1, \dots, P_{N^*}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{N^*}, x_1, \dots, x_N) = P^*(*).$$

Распределение квадрата преобразованной дискретной ошибки

$$f_{x_g'^2}(x_g'^2) = f_{x_g^2}(x_g^2) \left| \frac{dZ^{-1}(x_g'^2)}{dx_g'^2} \right|.$$

Отсюда первый момент данного распределения

$$\alpha_{1g} = \int_{-\infty}^{\infty} [Z(x_g^2)] f_{x_g^2}(x_g^2) dx_g^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [Z(x_g'^2)] \times \\ \times \int_E \dots \int_E \int_X \dots \int_X f[x_1, \dots, x_{N-1}, P^*(*) | \epsilon] \times \\ \times f_{\epsilon}(\epsilon) \left| \frac{dP^*(*)}{dx_g^2} \right| dx_{N-1} \dots dx_1 d\epsilon dx_g'^2.$$

После соответствующей замены переменных

$$\alpha_{1g} = \int \dots \int_{\mathbf{E}} \int \dots \int_{\mathbf{X}} \left\{ \sum_{i^*=1}^{N^*} [\varepsilon_{i^*} - P_{i^*}(\mathbf{x})]^2 \right\} f(\mathbf{x}|\varepsilon) f_{\varepsilon}(\varepsilon) d\varepsilon d\mathbf{x}.$$

Из сравнения  $\alpha_{1g}$  с выражением для  $R$  в нейронных сетях с  $N^*$  выходными каналами и континуумом решений следует уравнение для функций преобразования дискретной ошибки в следующем виде:

$$Z \left\{ \sum_{i^*=1}^{N^*} [\varepsilon_{i^*} - P_{i^*}(\mathbf{x})]^2 \right\} = l [P(\mathbf{x}), \varepsilon]. \quad (7.34)$$

### 7.6. Нейронная сеть в режимах самообучения и при произвольной квалификации учителя

В случае  $K_p$  решений выражение для средней функции риска в режиме самообучения имеет вид:

$$R = \sum_{k_p=1}^{K_p} \int_{S^{(k_p)}(\mathbf{x}) > 0} \rho[\mathbf{x} - \mathbf{b}_{k_p}] f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

В случае системы с  $K_p$  решениями можно показать, что преобразование выходного сигнала  $y$ , формирующее сигнал  $y'$ , первый момент распределения которого равен  $R$ , определяется следующим образом:

$$y' = \rho[\mathbf{x} - \mathbf{b}(y)], \quad (7.35)$$

а в случае с произвольной квалификацией учителя

$$y' = l(y, \varepsilon) \mathbf{b} + (1 - \mathbf{b}^2) \rho[\mathbf{x} - \mathbf{b}(y)]. \quad (7.36)$$

Выражения (7.35) и (7.36) справедливы также и для случая нейронной сети с континуумом решений.

### Литература

- 7.1. Уидроу Б. Распознавание образов и адаптивное управление // Зарубежная радиоэлектроника. - 1965, - №9, с. 87-111.
- 7.2. Галушкин А.И., Зак Л.С., Тюхов Б.П. К сравнению критериев оптимизации адаптивных систем распознавания образов. - Киев, «Кибернетика», №6, с.122-130.
- 7.3. Галушкин А.И. Реализация критериев первичной оптимизации в системах распознавания образов, настраивающихся по замкнутому циклу в режиме обучения. - Труды МИЭМ, вып.23, 1971, с. 191-203.
- 7.4. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. - М., Энергия, 1974.

## Глава 8. Разработка алгоритмов поиска экстремума функций многих переменных

### 8.1. Организация процедуры поиска экстремума функционала вторичной оптимизации в многослойных нейронных сетях

В соответствии с принятой в данной работе методикой синтеза нейронных сетей экстремум функционала вторичной оптимизации находится с помощью итерационных методов с использованием градиентной процедуры поиска в основном локального экстремума. Рассматриваются вопросы анализа устойчивости и сходимости градиентных процедур при отсутствии и наличии ограничений на переменные, а также возможность ускорения процессов поиска экстремума. В качестве ограничений на переменные (в частности настраиваемые коэффициенты) рассматриваются ограничения типа равенств и неравенств, реально присутствующие в случае реализации многослойных нейронных сетей.

Итерационные методы поиска экстремума функций многих переменных развиваются в основном в двух направлениях. Первое направление включает поиск экстремума функций многих переменных с построением стандартных программ поиска. При этом вид функции и ее свойства задаются достаточно полно. В процессе исследования изучается в основном сходимость методов, иногда их точность в установившемся состоянии; динамике переходных процессов уделяется незначительное внимание.

Второе направление включает в себя построение алгоритмов настройки адаптивных систем. Здесь функция задана в самом общем виде вследствие специфики задачи, заключающейся в необходимости работы системы в условиях малой априорной информации о входном сигнале [8.1-8.29].

Многослойные нейронные сети есть частный случай адаптивной системы. Особенности построения адаптивных систем связаны с тем, что при неизвестных характеристиках входного сигнала (в нашем случае - условной плотности  $f'(\mathbf{x}/\varepsilon)$ ) даже при фиксированной структуре разомкнутой нейронной сети ничего нельзя сказать о виде функционала вторичной оптимизации, кроме того что он имеет несколько локальных экстремумов, все или по крайней мере некоторые из кото-

рых должны быть найдены в процессе настройки по замкнутому циклу. Решить задачу оптимизации контура настройки многослойной нейронной сети в общем на этапе организации поиска экстремума функционала вторичной оптимизации нельзя. В процедуре поиска всегда остается степень субъективизма, это выражается, в частности, в выборе коэффициентов параметрической матрицы системы поиска.

В связи с этим в гл. 12 основной упор делается на оптимизацию контура настройки многослойных нейронных сетей при исследовании замкнутых систем с оценкой качества по текущему значению функционала первичной оптимизации.

### 8.2. Анализ итерационного метода поиска экстремума функций многих переменных

Общее выражение для вычисления вектора состояния системы при поиске экстремума функции  $Y(\mathbf{a})$  в момент времени  $n+1$  по вектору состояния в  $n$ -й момент имеет следующий вид (для памяти системы поиска, равной единице):

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n) + K^* \frac{\partial Y(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n)}. \quad (8.1)$$

Здесь  $Y(\mathbf{a})$  – функционал вторичной оптимизации;  $\mathbf{a}(n)$  – вектор состояния системы (текущее значение аргумента экстремальной функции);  $K^* - [N^0 \times N^0]$  – матрица коэффициентов;  $N^0$  – размерность вектора  $\mathbf{a}$ .

Выбор коэффициентов матрицы  $K^*$  определяет скорость и качество сходимости итерационного метода.

В процедуру (8.1) вписываются известные методы поиска: сканирования, наискорейшего спуска, градиента, Гаусса-Зейделя, Розенброка, Пауэлла, Саусвелла и др.

Основной задачей является выбор ограничений на параметры матрицы  $K^*$  для обеспечения определенного качества системы поиска экстремума функции. Рассмотрим частный вид функции качества нейронной сети

$$Y(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{B}^T \mathbf{a} + C. \quad (8.1a)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов функционала  $Y(\mathbf{a})$ ;  $\mathbf{B}$  – вектор коэффициентов;  $C$  – коэффициент.

Отсюда

$$\frac{dY(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} = 2\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{B}; \quad \left[ \frac{\partial^2 Y(\mathbf{a})}{\partial a_i \partial a_j} \right] = 2\mathbf{A}, \quad (8.2)$$

$$i, j = 1, \dots, N^0.$$

Из (8.1) и (8.2) следует рекуррентное выражение для вычисления вектора состояния системы поиска в  $(n+1)$ -й момент времени через вектор состояния системы в  $n$ -й момент времени в следующем виде:

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n) + K^*[2\mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}]$$

или

$$\mathbf{a}(n+1) = K^* \cdot \mathbf{B} + [Y + 2K^*A] \mathbf{a}(n). \quad (8.3)$$

Здесь  $Y$  – единичная матрица.

Определим, при каких значениях коэффициентов матрицы  $K^*$  итерационный процесс сойдется за один шаг из любого начального состояния. Значение вектора  $\mathbf{a}(1)$ , обеспечивающего в данном случае экстремальное значение, определяется следующим образом:

$$\mathbf{a}(1) = -\frac{1}{2} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}.$$

Подставляя данное выражение в (8.3), получаем выражение для искомой оптимальной матрицы  $K^*$ :

$$K_{opt}^* = -\frac{1}{2} \mathbf{A}^{-1}.$$

Система, обеспечивающая на  $n$ -м шаге переход в  $(n+1)$ -ю точку, называется устойчивой, если значение функции в  $(n+1)$ -й точке меньше, чем в  $n$ -й точке. Соответственно автоколебательной или неустойчивой называется система, у которой последующие значения функции равны или больше предыдущих:

$$1) \mathbf{a}(n+1) = K^* \mathbf{B} + [Y + 2K^*A] \mathbf{a}(n);$$

$$2) \left. \begin{aligned} &\mathbf{a}^T(n) \mathbf{A} \mathbf{a}(n) + \mathbf{B}^T \mathbf{a}(n) > \\ &= \\ &< \end{aligned} \right\} \mathbf{a}^T(n+1) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}(n+1) + \mathbf{B}^T \mathbf{a}(n+1). \quad (8.4)$$

Решение данной системы требует применения ЭВМ. При рассмотрении конкретных методов поиска экстремума, а следовательно, и конкретных видов матрицы  $K^*$  необходимо проверять условия удовлетворения данной матрицей соотношения (8.4) для обеспечения устойчивости системы поиска.

Получим нерекуррентное выражение для  $a(n)$ . Из (8.3) следует:

$$a(1) = K^* B + [Y + 2AK^*] a(0);$$

$$a(2) = K^* B + [Y + 2AK^*]K^* B + [Y + 2AK^*]^2 a(0);$$

$$a(3) = K^* B + [Y + 2AK^*]K^* B + [Y + 2AK^*]^2 K^* B + [Y + 2AK^*]^3 a(0).$$

По индукции

$$a(n) = [Y + (Y + 2K^*A) + \dots + (Y + 2K^*A)^{n-1}]K^* B + [Y + 2K^*A]^n a(0).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} Y + (Y + 2K^*A) + \dots + (Y + 2K^*A)^{n-1} &= \frac{Y - [Y + 2K^*A]^n}{Y - [Y + 2K^*A]} \\ &= - [Y - (Y + 2K^*A)^n] (2K^*A)^{-1}, \end{aligned}$$

можно записать выражение для  $a(n)$  в следующем виде:

$$a(n) = (Y + 2K^*A)^n a(0) + \frac{1}{2} [(Y + 2K^*A)^n - Y](K^*A)^{-1} K^* B.$$

Отсюда получаем окончательное нерекуррентное выражение для вектора состояния системы поиска

$$a(n) = (Y + 2K^*A)^n a(0) + \frac{1}{2} [(Y + 2K^*A)^n - Y] A^{-1} B. \quad (8.5)$$

Подставляя в (8.5) условие оптимальности по быстродействию рассматриваемой системы поиска, равное  $K = -1/2 A^{-1}$ , получаем, как и следовало ожидать:

$$a(n) = -\frac{1}{2} A^{-1} B, \quad n = 1, 2, \dots,$$

что соответствует экстремальному значению функции.

Путем анализа нерекуррентной формулы получим ограничения на параметры матрицы  $K^*$ , обеспечивающее сходимость итерационного процесса поиска.

Из (8.5) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = -\frac{1}{2} A^{-1} B,$$

т.е. не зависит от  $a(0)$  и равен экстремальному значению вектора состояния при

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Y + 2K^*A)^n = O,$$

где  $O$  — нулевая матрица ( $Y, A$ ). Это выражение можно использовать для доказательства сходимости системы поиска. В [8.12] приводится также вывод выражения для матрицы  $K^*$ , удовлетворяющей условию автоколебательности процесса поиска.

### 8.3. О методе стохастической аппроксимации

Метод стохастической аппроксимации реализуется системой поиска, аналогичной градиентной, но имеющей переменные параметры (матрицу  $K^*$ ) [8.1, 8.3, 8.6, 8.8]. Метод стохастической аппроксимации как частный градиентный метод поиска применяется при наличии случайных ошибок измерения вектора градиента минимизируемой функции. Именно наличие указанных случайных ошибок делает необходимым введение переменности параметров системы поиска с целью обеспечения нулевой случайной ошибки определения точки экстремума. Недостатки этого метода поиска совершенно справедливо отмечаются в работах А.Г. Ивахненко [8.29] в плане увеличения систематических ошибок в переходном процессе поиска точки экстремума.

В излагаемой в данной работе методике синтеза нейронной сети применение метода стохастической аппроксимации возможно наряду с другими методами поиска, в частности с постоянными параметрами. При этом построение замкнутых нейронных сетей производится в любом случае при некоторой неопределенности в задании матрицы  $K^*$ , которая ликвидируется лишь на этапе исследования замкнутых систем. Вопрос об оптимальном (по критериям первичной оптимизации) выборе параметров матрицы  $K^*$  здесь будет являться некорректно поставленным, так как вид минимизируемой функции нам заранее не известен.

### 8.4. Итерационные методы поиска экстремума функций многих переменных при наличии ограничений типа равенств на переменные

В общем виде ограничения типа равенств на настраиваемые коэффициенты нейронной сети записываются в следующем виде:

$$q_\mu(a) = 0, \quad \mu = 1, \dots, M_1, \quad M_1 < N^0 + 1.$$

В реальных нейронных сетях

$$\sum_{i=0}^N a_i = \alpha = \text{const}, \quad (8.6)$$

т.е. существуют, например, ограничения на сумму коэффициентов.

#### 8.4.1. Алгоритм поиска

В данном случае задача минимизации функции качества  $Y(\mathbf{a})$  в многослойных нейронных сетях решается путем составления функции Лагранжа

$$Y(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}) = Y(\mathbf{a}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{q}^T(\mathbf{a}),$$

где  $\boldsymbol{\lambda}^T = [\lambda_1, \dots, \lambda_{M_1}]$  - вектор множителей Лагранжа,  $\mathbf{q}^T(\mathbf{a}) = [q_1(\mathbf{a}), \dots, q_{M_1}(\mathbf{a})]$  - вектор-функция ограничений.

Решение задачи минимизации сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{dY(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})}{d\mathbf{a}} = \frac{dY(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} + Q(\mathbf{a}) \boldsymbol{\lambda} = 0; \quad \frac{dY(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})}{d\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{q}(\mathbf{a}) = 0. \quad (8.7)$$

Здесь

$$Q(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1(\mathbf{a})}{\partial a_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial q_{M_1}(\mathbf{a})}{\partial a_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1(\mathbf{a})}{\partial a_i} & \dots & \frac{\partial q_{M_1}(\mathbf{a})}{\partial a_i} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial q_1(\mathbf{a})}{\partial a_N} & \dots & \frac{\partial q_{M_1}(\mathbf{a})}{\partial a_N} \end{bmatrix}.$$

Из (8.7) следует рекуррентное соотношение, являющееся основой для алгоритма поиска

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n) + K_{aa}^*(n) \frac{\partial Y(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\substack{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n) \\ \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(n)}} + K_{a\lambda}^*(n) \frac{\partial Y(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \Big|_{\substack{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n) \\ \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(n)}};$$

$$\boldsymbol{\lambda}(n+1) = \boldsymbol{\lambda}(n) + K_{\lambda a}^*(n) \frac{\partial Y(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\substack{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n) \\ \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(n)}} + K_{\lambda\lambda}^*(n) \frac{\partial Y(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \Big|_{\substack{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n) \\ \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(n)}}.$$

В этом случае система поиска может быть представлена эквивалентной дискретной системой с параметрическими матрицами  $K_{aa}^*$ ,  $K_{a\lambda}^*$ ,  $K_{\lambda a}^*$ ,  $K_{\lambda\lambda}^*$ . Учитывая (8.7), можно записать окончательное выражение для алгоритма поиска в следующем виде:

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n) + K_{aa}^*(n) \left[ \frac{\partial Y(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} + Q(\mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\lambda} \right]_{\substack{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n) \\ \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(n)}} + K_{a\lambda}^*(n) \mathbf{q}(\mathbf{a}) \Big|_{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n)};$$

$$\boldsymbol{\lambda}(n+1) = \boldsymbol{\lambda}(n) + K_{\lambda a}^*(n) \left[ \frac{dY(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} + Q(\mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\lambda} \right]_{\substack{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n) \\ \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(n)}} + K_{\lambda\lambda}^*(n) \mathbf{q}(\mathbf{a}) \Big|_{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n)};$$

В случае ограничений типа (8.6)

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n) + K_{aa}^*(n) \left[ \frac{dY(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} \right]_{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n)} + \mathbf{1} \cdot \lambda_1(n) + K_{a\lambda}^*(n) \left[ \sum_{i=0}^{N^0} a_i(n) - \alpha \right];$$

$$\lambda_1(n+1) = \lambda_1(n) + K_{\lambda a}^*(n) \left[ \frac{dY(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} \right]_{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n)} + \mathbf{1} \cdot \lambda_1(n) + K_{\lambda\lambda}^*(n) \left[ \sum_{i=0}^{N^0} a_i(n) - \alpha \right],$$

где  $\mathbf{1}$  - вектор-столбец размерности  $N_0+1$ , состоящий из 1.

#### 8.4.2 Анализ матрицы вторых производных функции Лагранжа

Если  $Y(\mathbf{a})$  представлено выражением (8.1а) и введено обозначение  $Y^T = [a_0, \dots, a_{N^0}, \lambda_1, \dots, \lambda_{M_1}]$ , то

$$\left[ \frac{\partial^2 Y(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial y_i \partial y_j} \right] = \begin{bmatrix} \text{I} & \text{III} \\ \text{II} & \text{IV} \end{bmatrix}, \quad \text{I} \rightarrow i = 0, \dots, N^0; \quad j = 0, \dots, N^0;$$

$$\text{II} \rightarrow i = N^0+1, \dots, N^0+M_1; \quad j = 0, \dots, N^0;$$

$$\text{III} \rightarrow i = 0, \dots, N^0; \quad j = N^0+1, \dots, N^0+M_1;$$

$$\text{IV} \rightarrow i = N^0+1, \dots, N^0+M_1; \quad j = N^0+1, \dots, N^0+M_1,$$

$$i, j = 0, \dots, N^0, N^0+1, \dots, N^0+M_1.$$

Очевидно, что  $[\text{I}] = 2A$ ,  $[\text{III}] = [\text{II}]^T = Q(\mathbf{a})$ ,  $[\text{IV}] = 0$ .

Таким образом, матрица вторых производных функции Лагранжа имеет следующий вид:

$$\left[ \frac{\partial^2 Y(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial y_i \partial y_j} \right] = \begin{bmatrix} 2A & Q \\ Q^T & 0 \end{bmatrix}, \quad i, j = 0, \dots, N^0, N^0+1, \dots, N^0+M_1.$$

#### 8.4.3. Оптимальность по быстродействию итерационной процедуры поиска экстремума при ограничениях типа равенств

При использовании метода Ньютона для минимизации функции Лагранжа оптимальность по быстродействию обеспечивается при условии

$$K^*(n) = \begin{bmatrix} K_{aa}^*(n) & K_{a\lambda}^*(n) \\ K_{\lambda a}^*(n) & K_{\lambda\lambda}^*(n) \end{bmatrix} = - \left[ \frac{\partial^2 Y(\mathbf{y})}{\partial y_i \partial y_j} \right]_{\mathbf{y} = \mathbf{y}(n)}^{-1}, \quad i, j = 0, \dots, N^0, N^0+1, \dots, N^0+M_1.$$

Можно показать, что условием существования матрицы, обратной матрице входных производных функции Лагранжа, является условие равенства  $M_1$  рангу матрицы  $Q$ . Отсюда

$$\begin{bmatrix} 2A & Q \\ Q^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1} Q H^{-1} Q^T A_1^{-1} & -A_1^{-1} Q H^{-1} \\ -H^{-1} Q^T A_1^{-1} & H^{-1} \end{bmatrix},$$

$$i, j = 0, \dots, N^0, N^0+1, \dots, N^0+M_1,$$

где  $H = -Q^T A_1^{-1} Q$ ,  $A_1 = 2A$ . Отсюда следуют выражения для матриц  $K_{aa}^*(n)$ ,  $K_{\lambda a}^*(n)$ ,  $K_{\lambda \lambda}^*(n)$ , обеспечивающих оптимальность процедуры поиска по быстродействию.

#### 8.4.4. Оптимальность по быстродействию при ограничениях (8.6)

В данном случае  $K_{aa}^*(n) = -A_1^{-1}[I+L]$ , где  $I$  - единичная матрица размером  $[(N^0+1) \times (N^0+1)]$ ;  $L = Q H^{-1} Q^T A_1^{-1} = Q(-Q^T A_1^{-1} Q)^{-1} Q^T A_1^{-1}$ .

В рассматриваемом частном случае при  $Q^T = [1, \dots, 1]$

$$H^{-1} = -\frac{1}{\sigma_A}, \text{ где } \sigma_A = \sum_{i=1}^{N^0} \sum_{j=1}^{N^0} a_{ij}; \quad A_1^{-1} = [a_{ij}];$$

$$L = -\frac{1}{\sigma_A} Q Q^T A_1^{-1} = -\frac{1}{\sigma_A} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \dots & \alpha_{N^0} \\ \alpha_0 & \dots & \alpha_{N^0} \end{bmatrix};$$

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^{N^0} a_{ij}, \quad j = 0, \dots, N^0.$$

Следует отметить, что при любой априорной информации о матрице  $A$  матрица  $K_{aa}^*$  отлична от  $(-A_1^{-1})$  и даже при диагональной матрице  $A$  является недиагональной. Матрица  $K_{\lambda \lambda}^*$  имеет следующий вид:

$$K_{\lambda \lambda}^* = H^{-1} = -\frac{1}{\sigma_A},$$

т.е. при наличии одного ограничения оптимальная величина  $K_{\lambda \lambda}^*$  определяется лишь суммой элементов матрицы  $A_1^{-1}$  по строкам и столбцам. В данном случае

$$K_{\lambda \lambda}^* = A_1^{-1} Q H^{-1} = A_1^{-1} Q (-Q^T A_1^{-1} Q)^{-1} = A_1^{-1} Q \left(-\frac{1}{\sigma_A}\right) = -\frac{1}{\sigma_A} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_{N^0} \end{bmatrix}.$$

В данном случае при любой априорной информации о

матрице  $A$  матрица  $K_{\lambda \lambda}^*$  не равна нулевой матрице, т.е. перекрестные связи в алгоритме поиска присутствуют.

#### 8.4.5. Случай ограничений типа равенств, решаемых относительно переменных

При рассмотрении ограничений на переменные вида

$$Q^T a = \alpha, \text{ где } Q^T = \begin{bmatrix} Q_{01} & \dots & Q_{N^0 1} \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{0M_1} & \dots & Q_{N^0 M_1} \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

линейность ограничений позволяет решить систему равенств относительно  $M_1$  переменных, т.е. выразить коэффициенты  $a_0, \dots, a_{M_1-1}$  через остальные  $(N^0+1-M_1)$  переменные. Для этого матрица  $Q$  разбивается на два блока:

$$Q^T = [Q_1^T, Q_2^T] = \begin{bmatrix} Q_{01} & \dots & Q_{M_1 1} & | & Q_{(M_1+1)1} & \dots & Q_{N^0 1} \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ Q_{0M_1} & \dots & Q_{M_1 M_1} & | & Q_{(M_1+1)M_1} & \dots & Q_{N^0 M_1} \end{bmatrix}.$$

Тогда ограничения (8.8) принимают следующий вид:

$$Q_1^T a^{(1)} + Q_2^T a^{(2)} = \alpha,$$

где

$$a^{(1)T} = [a_0, \dots, a_{M_1-1}], \quad a^{(2)T} = [a_{M_1}, \dots, a_{N^0}].$$

Отсюда

$$a^{(1)} = (Q_1^T)^{-1} (\alpha - Q_2^T a^{(2)}). \quad (8.9)$$

Данное выражение подставляется в  $Y(a)$  и экстремум результирующей функции  $(N^0+1-M_1)$  переменных отыскивается изложенным выше методом. При этом определяются оптимальные значения  $(N^0+1-M_1)$  переменных. Оптимальные значения  $M_1$  переменных определяются по (8.9). При соблюдении условия (8.6) выражение (8.9) принимает вид:

$$a_0 = \alpha - \sum_{j=1}^{N^0} a_j.$$



#### 8.4.6. Устойчивость итерационного процесса при ограничениях типа равенств

Процесс поиска будем считать устойчивым, если на каждом шаге значение функции Лагранжа уменьшается, т.е.

$$Y[y(n)] < Y[y(n-1)]. \quad (8.10)$$

Раскладывая  $Y(y)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $y(n-1)$  и пренебрегая членами порядка выше второго, получаем:

$$Y[y(n-1)+\Delta] = Y[y(n-1)] + \Delta^T \left. \frac{dY(y)}{dy} \right|_{y=y(n-1)} + \Delta^T \left. \frac{d^2Y(y)}{2dy^2} \right|_{y=y(n-1)} \Delta.$$

Здесь через  $\Delta$  обозначен вектор-приращение переменных. Учитывая (8.10), получаем условие устойчивости

$$\Delta^T \left. \frac{dY(y)}{dy} \right|_{y=y(n-1)} + \Delta^T \left. \frac{d^2Y(y)}{2dy^2} \right|_{y=y(n-1)} \Delta < 0. \quad (8.11)$$

Итерационная процедура на каждом шаге поиска дает следующее приращение:

$$\Delta = K^*(n-1) \left. \frac{dY(y)}{dy} \right|_{y=y(n-1)}. \quad (8.12)$$

Подставляя (8.12) в (8.11) после соответствующих преобразований получаем

$$\left[ \left. \frac{dY(y)}{dy} \right|_{y=y(n-1)} \right]^T \left[ K^{*T}(n-1) + K^{*T}(n-1) \left. \frac{d^2Y(y)}{2dy^2} \right|_{y=y(n-1)} K^*(n-1) \right] \times \\ \times \left[ \left. \frac{dY(y)}{dy} \right|_{y=y(n-1)} \right] < 0.$$

Отсюда следует, что достаточным условием устойчивости является отрицательная определенность матрицы

$$G = \left[ K^{*T}(n-1) + K^{*T}(n-1) \left. \frac{d^2Y(y)}{2dy^2} \right|_{y=y(n-1)} K^*(n-1) \right].$$

Эта матрица связывает параметры функции Лагранжа и параметры матрицы  $K^*$  системы поиска.

#### 8.4.7. Сходимость итерационного метода поиска при ограничениях типа равенств

Сходимость процесса поиска будет рассмотрена для случая квадратичной функции. В этом случае  $Y(a, \lambda) = a^T A a + B^T a + C + \lambda^T Q a$ :

$$\frac{dY(a, \lambda)}{d(a, \lambda)} = \begin{bmatrix} 2Aa + B^T + Q^T \lambda \\ Qa \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Это выражение можно записать:

$$\frac{dY(a, \lambda)}{d(a, \lambda)} = \begin{bmatrix} 2A & Q^T \\ Q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} a \\ \lambda \end{bmatrix} + \hat{B}.$$

В данном случае

$$y(n) = y(n-1) + K^*(n-1) [\hat{A}y(n-1) + \hat{B}].$$

Как и ранее, можно записать нерекуррентное соотношение для обобщенной переменной состояния

$$Y(n) = [Y + K^* \hat{A}]^n y(0) + [(Y + K^* \hat{A})^n - Y] \hat{A}^{-1} \hat{B}.$$

Подстановка  $Y(n) = \hat{A}^{-1} \hat{B}$  в (8.13) показывает, что вектор-градиент функции Лагранжа обращается в нуль, т.е. точка  $Y(n) = \hat{A}^{-1} \hat{B}$  есть точка экстремума. Для сходимости итерационной процедуры к точке  $Y(n) = \hat{A}^{-1} \hat{B}$  достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [Y + K^* \hat{A}]^n = 0.$$

В случае неособенности матрицы  $[Y + K^* \hat{A}]$  это эквивалентно доказательству того, что

$$|\text{Det} [Y + K^* \hat{A}]| < 1.$$

#### 8.5. Итерационные методы поиска экстремума функций многих переменных при наличии ограничений типа неравенств на переменные

Указанные ограничения в нейронной сети возникают в частности из-за ограниченности пределов изменения настраиваемых коэффициентов и записываются в следующем виде  $q_\mu(a) \leq 0$  ( $\mu = 1, \dots, M_2$ ).

В основном в нейронных сетях имеют место ограничения частного вида

$$\left. \begin{aligned} a_i - a_{\max} &\leq 0; \\ a_{\min} - a_i &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.13a)$$

В частном случае при построении нейронных сетей на реальных физических элементах возможны следующие случаи:

$$\begin{aligned} a_{\max} &> 0; a_{\min} = 0; \\ a_{\max} &= -a_{\min} > 0. \end{aligned}$$

### 8.5.1. Условия оптимальности

Условия оптимальности в данном случае даются теоремой Куна-Такера, которая представляет собой обобщение метода Лагранжа на случай ограничений типа неравенств. В соответствии с теоремой Куна-Такера оптимальный вектор  $\mathbf{a}$ , доставляющий минимум выпуклому функционалу, является решением следующей системы уравнений и неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{dY(\mathbf{a}, \lambda)}{d\mathbf{a}} = \frac{dY(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} + Q(\mathbf{a})\lambda &= 0; \\ \left\{ \begin{aligned} \mathbf{q}(\mathbf{a}) + \delta &= 0, \lambda \geq 0, \\ \lambda^T \delta &= 0, \delta \geq 0. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Выражение для матрицы  $Q$  здесь сохраняется прежним с заменой  $M_1$  на  $M_2$ . В выражении (8.14)

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{M_2}], \quad \delta = [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_{M_2}].$$

Неравенства  $\delta \geq 0$  и  $\lambda \geq 0$  означают, что все компоненты этих векторов неотрицательны. Кроме того, предполагается, что ограничения таковы, что существует вектор  $\mathbf{a}$ , для которого соблюдается соотношение  $q_\mu(\mathbf{a}) \leq 0$ . Условия (8.14) имеют следующий физический смысл. Если для оптимального вектора  $\mathbf{a}_{\text{опт}}$  несущественно какое-то ограничение, т.е.  $q_\mu(\mathbf{a}_{\text{опт}}) < 0$  для какого-то  $\mu$ , то соответствующее  $\lambda_\mu$  равно нулю. Если  $\lambda_\mu > 0$ , то в этом случае, как следует из (8.14),  $\delta_\mu = q_\mu(\mathbf{a}_{\text{опт}}) = 0$ .

Таким образом, множители Лагранжа можно интерпретировать как некоторые оценки влияния ограничений на оптимальное значение вектора настраиваемых коэффициентов. От-

метим, что если функции  $Y(\mathbf{a})$  и  $q_\mu(\mathbf{a})$  ( $\mu=1, \dots, M_2$ ) выпуклы, то теорема Куна-Такера дает необходимые и достаточные условия оптимальности.

### 8.5.2. Алгоритм поиска экстремума при наличии ограничений типа неравенств

Из условий оптимальности (8.14) получаем систему соотношений для итерационной процедуры поиска экстремума при ограничениях типа неравенств

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n) + \left[ K_{aa}^*(n) \frac{dY(\mathbf{a}, \lambda)}{d\mathbf{a}} + K_{\lambda a}^*(n) \frac{dY(\mathbf{a}, \lambda)}{d\lambda} \right]_{\substack{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n) \\ \lambda = \lambda(n)}}$$

$$\lambda(n+1) = \max \left\{ 0, \lambda(n) + \left[ K_{\lambda a}^*(n) \frac{dY(\mathbf{a}, \lambda)}{d\mathbf{a}} + K_{\lambda \lambda}^*(n) \frac{dY(\mathbf{a}, \lambda)}{d\lambda} \right]_{\substack{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n) \\ \lambda = \lambda(n)}} \right\}.$$

Отсюда окончательно следует

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(n+1) &= \mathbf{a}(n) + K_{aa}^*(n) \left[ \frac{dY(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} + Q(\mathbf{a})\lambda \right]_{\substack{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n) \\ \lambda = \lambda(n)}} + K_{\lambda a}^*(n) \mathbf{q}(\mathbf{a}) \Big|_{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n)}; \\ \lambda(n+1) &= \max \left\{ 0, \lambda(n) + K_{\lambda a}^*(n) \left[ \frac{dY(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} + Q(\mathbf{a})\lambda \right]_{\substack{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n) \\ \lambda = \lambda(n)}} + K_{\lambda \lambda}^*(n) \mathbf{q}(\mathbf{a}) \Big|_{\mathbf{a} = \mathbf{a}(n)} \right\}. \end{aligned}$$

В частном случае ограничений типа неравенств, задаваемых соотношениями (8.13a),  $\mathbf{q}_1(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\max} \leq 0$ ;  $\mathbf{q}_2(\mathbf{a}) = \mathbf{a}_{\min} - \mathbf{a} \leq 0$ ;

$$\mathbf{q}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\max} \\ \mathbf{a}_{\min} - \mathbf{a} \end{bmatrix}.$$

$$Q(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 & -1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix}.$$

### 8.6. Алгоритм случайного поиска локальных и глобального экстремумов функций многих переменных

Пожалуй, единственной причиной введения случайности в процедуру поиска экстремума функционала вторичной оптимизации нейронной сети является многомодальность рас-

пределений входного сигнала, которая при заданной структуре разомкнутой нейронной сети приводит к многоэкстремальности функции качества нейронной сети. Наиболее полное освещение методы случайного поиска нашли в работах Л.А. Растригина, в частности в его монографиях [8.2, 8.16].

Нашей задачей является поиск локальных минимумов многоэкстремального функционала ошибки нейронной сети, и, если это необходимо, выбор из них глобального минимума. Именно поэтому применительно к нейронной сети был разработан метод случайного поиска локальных и глобального экстремумов функций многих переменных. Опишем один цикл работы данного алгоритма:

а) случайным образом выбирается значение вектора переменных функции, экстремум которой отыскивается. Само собой разумеется, что данный вектор располагается в области одного из локальных экстремумов;

б) одним из изложенных выше методов неслучайного поиска находится локальный экстремум, в области которого расположен вектор переменных, выбранный на первом этапе;

в) величина экстремума и соответствующее ему значение вектора переменных, найденных на втором этапе, сравниваются с содержимым памяти. При отсутствии в памяти указанных характеристик локального экстремума последние запоминаются;

г) производится переход к первому этапу (п.«а»).

Результаты экспериментального исследования данного алгоритма при многомодальных распределениях входного сигнала и нейронной сети типа одномерного и многомерного нейрона приводятся в гл. 12. Ниже рассматривается задача анализа сходимости данного алгоритма случайного поиска по числу экстремумов функции. В принципе можно рассмотреть алгоритм случайного поиска, исключаяющий из области случайного задания вектора начальных условий те подобласти, которые соответствуют уже найденным локальным экстремумам. Это, несомненно, ускорит сходимость алгоритма случайного поиска по числу экстремумов.

Произведем анализ сходимости алгоритма случайного поиска локальных и глобального экстремумов функций. Пусть найдено  $i$  мод ( $0 \leq i \leq U-1$ ). Вероятность того, что на следующем шаге мы попадаем в область этих  $i$  мод, равна  $i/U$  при равномерном распределении мод в пространстве поиска. Распреде-

ление случайной величины  $\xi_i$ , равной числу шагов случайной процедуры поиска от нахождения  $i$ -й моды до нахождения  $(i+1)$ -й моды включительно, имеет вид  $\xi_i = k$  с вероятностью

$$\left[ \frac{i}{U} \right]^{k-1} \left[ 1 - \frac{i}{U} \right]. \quad (8.15)$$

Процедура случайного поиска производится независимо на каждом шаге. Введем в рассмотрение новую случайную величину  $\eta_j = \sum_{i=0}^{j-1} \xi_i$  ( $1 \leq j \leq U$ ), характеризующую число шагов случайной процедуры до нахождения  $j$  мод из  $U$ . Независимые события  $\xi_i = k_1, \dots, \xi_{k-1} = k_{j-1}$ , где  $1 \leq k \leq s+1, \dots, 1 \leq k_{j-1} \leq s+1$  и  $k_1 + k_2 + \dots + k_{j-1} = s + j - 1$  в объединении дают событие такое, что  $\eta_j = \xi_0 + \dots + \xi_{j-1} = s + j$ , причем  $\xi_0 = 1$  с вероятностью, равной единице. Вероятность такого события в силу независимости  $\xi_j$  равна:

$$P(\xi_1 = k_1) \dots P(\xi_{j-1} = k_{j-1}).$$

По формуле полной вероятности

$$P(\eta_j = s + j) = \sum_{k_1 + \dots + k_{j-1} = s + j - 1} P(\xi_1 = k_1) \dots P(\xi_{j-1} = k_{j-1}) = U^{1-j-s} \frac{(U-1)!}{(U-j)!} \sum_{\substack{k_i \geq 1 \\ k_1' + \dots + k_{j-1}' = s \\ (k_i' \geq 0)}} \prod_{i=1}^{j-1} i^{k_i'}. \quad (8.16)$$

В частности, при  $j=U$

$$P(\eta_U = s + U) = U^{1-U-s} (U-1)! \sum_{\substack{k_i' + \dots + k_{U-1}' = s \\ (k_i' \geq 1, \dots, U-1)}} \prod_{i=1}^{U-1} i^{k_i'},$$

где  $P(\eta_U = s + U)$  – вероятность того, что  $U$  мод будут найдены за  $(s+U)$  шагов случайной процедуры поиска. Можно показать, что среднее значение и дисперсия числа шагов случайной процедуры поиска, необходимых для нахождения  $U$  мод, могут быть представлены следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} M\eta_U = 1 + U \sum_{r=1}^{U-1} \frac{1}{r} &\approx 1 + U [\ln(U-1) + 0,577]; \\ D\eta_U = \sum_{r=1}^{U-1} \frac{U(U-r)}{r^2} &\approx 2U^2 - U [\ln(U-1) + 0,577\dots] \end{aligned} \right\} (8.16a)$$

Анализ данных выражений показывает достаточную скорость сходимости рассматриваемой процедуры поиска. В принципе, как показано выше, процедура может быть обобщена на случай, когда область найденной моды исключается из области случайного поиска, что еще более ускорит сходимость случайной процедуры поиска. Приведенные выше соотношения верны и для многомерного случая.

### 8.7. Построение алгоритмов адаптации в многослойных нейронных сетях с использованием оценок производных второго порядка функционала вторичной оптимизации

Рассмотрим построение алгоритмов адаптации в многослойных нейронных сетях с использованием оценок производных одновременно и первого и второго порядка функционала вторичной оптимизации. Основное внимание уделяется алгоритмам поиска экстремума функционала с учетом вторых производных и выводу выражений для оценок вторых производных функционала через текущие сигналы в системе.

#### 8.7.1. Построение алгоритмов поиска

Рассмотрим задачу поиска экстремума в виде эквивалентной задачи нахождения корня следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} D_1(x_1, \dots, x_N) &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ D_N(x_1, \dots, x_N) &= 0. \end{aligned} \right\} (8.17)$$

При рассмотрении системы, заданной неявно

$$\left. \begin{aligned} y_1 - D_1(x_1, \dots, x_N) &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ y_N - D_N(x_1, \dots, x_N) &= 0 \end{aligned} \right\} (8.18)$$

и удовлетворяющей второй теореме Юнга, существуют такие

$$\left. \begin{aligned} x_1(y_1, \dots, y_N) &= F_1(y_1, \dots, y_N); \\ \dots\dots\dots \\ x_N(y_1, \dots, y_N) &= F_N(y_1, \dots, y_N), \end{aligned} \right\} (8.19)$$

что при их подстановке в (8.18) получаются тождества. Разложим функции  $F_1(y_1, \dots, y_N), \dots, F_N(y_1, \dots, y_N)$  в ряд Тейлора, ограничившись двумя членами

$$\left. \begin{aligned} F_1(0) &= F_1(y) - \sum_{i=1}^N F'_1(y) y_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 F_1(y)}{\partial y_i \partial y_j} y_i y_j + R_{31}; \\ \dots\dots\dots \\ F_N(0) &= F_N(y) - \sum_{i=1}^N F'_N(y) y_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 F_N(y)}{\partial y_i \partial y_j} y_i y_j + R_{3N} \end{aligned} \right\} (8.20)$$

Дифференцированием (8.18) с учетом (8.19) получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial D_1}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} &= 0; \quad \sum_{i=1}^N \frac{\partial D_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = 1; \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial D_N}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} &= 0; \end{aligned} \right\} (8.21)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_N}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial y_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial D_1}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial D_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial D_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}^{-1}$$

После дифференцирования (8.21) получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial D_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 D_1}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} &= 0; \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial D_N}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 D_N}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} &= 0; \end{aligned}$$

Умножая обе части уравнений на  $y_k y_l$  и суммируя по  $k$  и  $l$ , получаем

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial D_1}{\partial x_i} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_k \partial y_l} y_k y_l = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 D_1}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial y_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} y_l y_k = C_1;$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial D_N}{\partial x_i} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_k \partial y_l} y_k y_l = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 D_N}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial y_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} y_l y_k = C_N$$

Иначе эту систему уравнений можно переписать:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 x_1}{\partial y_k \partial y_l} y_k y_l \\ \dots \\ \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 x_N}{\partial y_k \partial y_l} y_k y_l \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial D_1}{\partial x_N} \\ \dots \\ \frac{\partial D_N}{\partial x_1} \dots \frac{\partial D_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}^{-1} C.$$

С учетом того, что вектор

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(0) \\ \vdots \\ F_N(0) \end{bmatrix}$$

есть корень системы (8.17),

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial D_1}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial D_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial D_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}; \quad y_k = D_k(x);$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 D_1}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial y_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} y_k y_l \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 D_N}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial y_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} y_k y_l \end{bmatrix}.$$

Из (8.20) следует:

$$\alpha = x - W^{-1}D + \frac{1}{2!} W^{-1}C.$$

Отсюда следует общее выражение для алгоритма поиска экстремума функции многих переменных при наличии матрицы производных второго порядка

$$x(n+1) = x(n) - W^{-1}[x(n)] D[x(n)] + \frac{1}{2!} W^{-1}[x(n)] C[x(n)]. \quad (8.22)$$

### 8.7.2. Одномерный случай

В этом случае  $D(x)=0$ ;  $F(y)=D^{-1}(x)$ ;  $x \equiv F[D(x)]$ , ( $x \in [a, b]$ );  $y \equiv D[F(y)]$ . Если  $\alpha$  - корень уравнения, то  $\alpha = F(0)$ . Разложим  $F(y)$  в ряд

$$F(0) - F(y) = \sum_{k=1}^r (-1)^k \frac{F^{(k)}(y)}{k!} y^k + R_{r+1}$$

или, иначе,

$$\alpha = x + \sum_{k=1}^r (-1)^k \frac{F^{(k)}[D(x)]}{k!} [D(x)]^k + R_{r+1}.$$

Из исходных уравнений дифференцированием получаем:

$$F'[D(x)]D'(x) = 1;$$

$$F''[D(x)]D'^2(x) + F'[D(x)]D''(x) = 0;$$

$$F'''[D(x)]D'^3(x) + 3F''[D(x)]D'(x)D''(x) + F'[D(x)]D'''(x) = 0;$$

В случае  $r=2$  получаем окончательно

$$x(n+1) = x(n) - \frac{D'(x_n)}{D''(x_n)} + \frac{D'^2(x_n)}{2D'''(x_n)} D'''(x_n), \quad (8.23)$$

где  $D'''(x_n) = K^*(n)$ .

### Литература

- 8.1. Цыпкин Я.З. Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах. // «Автоматика и телемеханика». - 1966, - № 1, - с. 23 - 62.

- 8.2. Растринг Л.А. Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем. - Рига, Зинатне, 1965.
- 8.3. Цыпкин Я.З. Применение метода стохастической аппроксимации к оценке неизвестной плотности распределения по наблюдениям. // «Автоматика и телемеханика». - 1966, - № 3, - с. 94 - 96.
- 8.4. Девятчиков И.П., Пропой А.И., Цыпкин Я.З. О рекуррентных алгоритмах обучения распознаванию образов. // «Автоматика и телемеханика». - 1967, - № 1, - с. 122 - 132.
- 8.5. Цыпкин Я.З., Кельманс Г.К. Рекуррентные алгоритмы самообучения. // «Автоматика и телемеханика». - 1967, - № 5, - с. 78 - 87.
- 8.6. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. - М., Наука, 1968.
- 8.7. Цыпкин Я.З. Оптимальные гибридные алгоритмы адаптации и обучения. // «Автоматика и телемеханика». - 1968, - № 9, - с. 96.
- 8.8. Цыпкин Я.З. Основы теории обучающихся систем. - М., Наука, 1970, 251 с.
- 8.9. Цыпкин Я.З. Обобщенные алгоритмы обучения. // «Автоматика и телемеханика». - 1970, - № 1, с. 97 - 104.
- 8.10. Цыпкин Я.З. Обучающиеся автоматические системы. // «Автоматика и телемеханика». - 1970, - № 4, с. 55 - 71.
- 8.11. Забрейко П.П., Красносельский М.А., Цыпкин Я.З. Об оптимальных и субоптимальных алгоритмах обучения. // «Автоматика и телемеханика». - 1970, - № 10, с. 91 - 98.
- 8.12. Галушкин А.И. Анализ одного итерационного метода поиска экстремума, // «Автоматика и вычислительная техника». АН Латв. ССР. - 1970, - № 2, с. 38 - 40.
- 8.13. Цыпкин Я.З. Сглаженные рандомизированные функционалы и алгоритмы в теории адаптации и обучения. // «Автоматика и телемеханика». - 1971, - № 8, с. 29 - 50.
- 8.14. Галушкин А.И., Тюхов Б.П., Чигринов В.Г. О сходимости одного метода случайного поиска при отыскании локальных и глобальных экстремумов многоэкстремальной функции. // Труды МИЭМ. - 1971. - Вып. 23. - С. 205 - 209.
- 8.15. Галушкин А.И., Шмид А.В. Итерационные методы поиска экстремума функций многих переменных при ограничениях типа равенств. // «Автоматика и вычислительная техника». АН Латв. ССР. - 1971. - № 4. С. 88 - 91.
- 8.16. Растринг Л.А. Случайный поиск с линейной тактикой. - Рига, Зинатне, 1971.
- 8.17. Цыпкин Я.З. Алгоритмы динамической адаптации. // «Автоматика и телемеханика». - 1972, - № 1, с. 68 - 76.
- 8.18. Цыпкин Я.З. Алгоритмы обучения распознаванию в нестационарных условиях. // «Проблемы передачи информации». - 1972. - Вып. 3. - С. 94 - 102.
- 8.19. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Псевдоградиентные алгоритмы адап-

- тации и обучения. // «Автоматика и телемеханика». - 1973. - № 3, - с. 45 - 68.
- 8.20. Цыпкин Я.З., Каплинский А.И., Красненкер А.С. Методы локального улучшения в задачах стохастической оптимизации. Изв. АН СССР. Сер. «Техническая кибернетика», - № 6, - 1973. С. 3 - 11.
- 8.21. Цыпкин Я.З. Адаптивные методы выбора решений в условиях неопределенности. // «Автоматика и телемеханика». - 1976, - № 3, - с. 78 - 91.
- 8.22. Цыпкин Я.З. Оптимизация в условиях неопределенности. Докл. АН СССР. Т. 228, № 6, 1976. С. 1306 - 1309.
- 8.23. Цыпкин Я.З. Стабилизация и регуляризация оценок оптимальных решений при наличии неопределенности. Докл. АН СССР, Т. 236, № 2, 1977. С. 304 - 306.
- 8.24. Цыпкин Я.З. О некоторых свойствах случайного поиска. // «Автоматика и телемеханика». - 1977, - № 11, - с. 89 - 94.
- 8.25. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы стохастической оптимизации. Докл. АН СССР. Т. 250, № 5, 1980. С. 1084 - 1087.
- 8.26. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы адаптации. // «Автоматика и телемеханика». - 1980. - № 8. - С. 74 - 84.
- 8.27. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации. // «Автоматика и телемеханика», - 1980, - № 10, - с. 91 - 97.
- 8.28. Цыпкин Я.З., Позняк А.С. Оптимальные поисковые алгоритмы стохастической оптимизации. Докл. АН СССР. Т. 260, № 3, 1981. С. 550 - 553.
- 8.29. Ивахненко А.Г. Самообучающиеся системы распознавания и автоматического управления. - Киев, «Техника», 1969, 392 с.

### РАЗДЕЛ 3. АДАПТИВНЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

#### Глава 9. Алгоритмы настройки нейронных сетей

##### 9.1. Постановка задачи

Как указывалось в гл.7, выбор функционала вторичной оптимизации производится на основании заданных в общем виде характеристик входного сигнала, критерия первичной оптимизации и структуры разомкнутой нейронной сети. В процессе выбора функционала в системе распознавания были сформированы сигналы, моменты распределения которых соответствуют или равны некоторым функционалам первичной оптимизации.

Замкнутая нейронная сеть представляет собой разомкнутую нейронную сеть с включенным блоком настройки. Построение замкнутых нейронных сетей производится на основании выбранного критерия вторичной оптимизации и метода поиска экстремума данного функционала [9.1–9.4]. В качестве функционалов вторичной оптимизации были рассмотрены функционалы, связанные с моментами аналоговой и дискретной ошибок нейронной сети. В процессе построения замкнутых систем производится синтез блока вычисления параметров функционала качества нейронной сети, необходимых для организации процесса итерационного поиска. При этом основная задача заключается в том, чтобы оценить вектор градиентов функционала вторичной оптимизации. Решить эту задачу можно двумя путями: поисковым, когда для организации итерационного процесса движения к экстремуму функционала качества знания или знаки производных определяются в результате воздействия на систему и обработки результатов воздействия поисковых колебаний; нахождением оценки вектора градиентов в виде аналитического выражения через промежуточные и выходные сигналы нейронной сети.

В первом случае имеют дело с поисковой нейронной сетью, во-втором – с аналитической. Естественно, предпочтительнее построение нейронной сети в виде аналитических систем, настраивающихся по замкнутому циклу, так как введение поисковых колебаний вносит дополнительные шумы в систему. Однако построение нейронной сети в виде аналитической системы не всегда возможно. Если в системе нельзя выделить сигнал, характеризующий градиент функционала оптимизации, то необходимо использование поисковых колебаний.

Ниже рассматриваются системы распознавания различных типов: нейрон с двумя решениями на два класса образов, нейрон с  $K_p$  решениями на  $K$  классов образов, нейрон с континуумом решений и континуумом классов образов, многослойные нейронные сети из нейронов с континуумом решений при наличии и отсутствии ограничения на настраиваемые коэффициенты, многослойные нейронные сети с  $N^*$ -мерными сигналами  $\varepsilon(n)$  и  $y(n)$ , многослойные нейронные сети с перекрестными и обратными связями.

Методика построения методологически просто обобщается на случай нестационарных образов, когда функционал вторичной оптимизации зависит от времени, а реализация вектора градиентов есть реализация нестационарного многомерного случайного процесса. Это свойство градиента определяет методику построения многомерного фильтра в блоке настройки нейронной сети.

Отдельного внимания требует вопрос построения многослойных нейронных сетей в режимах самообучения и произвольной квалификации учителя. Методология построения замкнутых нейронных сетей здесь та же, что и в режиме обучения.

Построение алгоритма настройки нейронных сетей по замкнутому циклу производится подстановкой выражения для оценки вектора градиента функционала в соответствующую формулу для поисковой процедуры.

##### 9.2. Нейрон с двумя и континуумом решений

Для нейрона с двумя решениями ниже рассматриваются четыре функционала вторичной оптимизации  $|\alpha_{1a}|$ ,  $\alpha_{2a}$ ,  $|\alpha_{1g}|$ ,  $\alpha_{2g}$ . Выражение для модуля оценки первого момента аналоговой ошибки имеет следующий вид:

$$|\overline{x_a(n)}^{m_n}| = |\overline{\varepsilon(n)}^{m_n} - \sum_{i=0}^N a_i \overline{x_i(n)}^{m_n}|, (x_0 = -1).$$

Отсюда

$$\frac{\partial |\overline{x_a(n)}^{m_n}|}{\partial a_i} = - \text{sign} [\overline{x_a(n)}^{m_n}] \overline{x_i(n)}^{m_n}, i=0, \dots, N.$$

Рекуррентное выражение, являющееся основой построения нейрона, настраивающегося по замкнутому циклу, имеет следующий вид:

$$a(n+1) = a(n) - K^* \text{sign} [\overline{x_a(n)}^{m_n}] \overline{x(n)}^{m_n}. \quad (9.1)$$

Выбор параметров матрицы  $K^*$  является в конечном итоге задачей анализа и синтеза замкнутых нейронных сетей. Однако уже на данном этапе можно наложить на ее вид определенные ограничения. Эти ограничения могут определяться, исходя из задания конкретного вида градиентной итерационной процедуры (Ньютона, Гаусса-Зейделя, Саусвелла и др.). В [9.5, 9.6] эти ограничения определяются для метода стохастической аппроксимации. Можно потребовать сходимости итерационной процедуры к экстремуму  $|\alpha_{1a}|$  на каждом шаге, т.е. соблюдения следующего условия (в одномерном случае):

$$\overline{\varepsilon(n)}^{m_n} - \overline{x(n)}^{m_n} a_1(n+1) + a_0(n+1) = 0.$$

В данном случае одними из возможных значений элементов матрицы  $K^*$  будут:  $K_{11}^* = -|\overline{x_a(n)}|^{m_n}$ ,  $K_{21}^* = K_{12}^* = K_{22}^* = 0$ .

Выбор величины  $m_n$  в выражении

$$\overline{x_a(n)}^{m_n} = \frac{1}{m_n} \sum_{i=n-m_n}^n x_a(i)$$

также является задачей анализа и синтеза замкнутых нейронных сетей. Здесь необходимо отметить следующее. Уменьшение  $m_n$ , с одной стороны, приводит к повышению уровня шумов измерения градиента функционала вторичной оптимизации, с другой стороны, уменьшает запаздывание в контуре настройки по замкнутому циклу.

В случае минимизации второго момента аналоговой ошибки

$$\overline{x_a^2(n)}^{m_n} = 1 + \left[ \overline{\sum_{i=0}^N a_i x_i(n)}^{m_{n_2}} \right] - 2\varepsilon(n) \overline{\sum_{i=0}^N a_i x_i(n)}^{m_n}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \overline{x_a^2(n)}^{m_n}}{\partial a_i} = -2 \overline{x_a(n)}^{m_n} \cdot \overline{x_i(n)}^{m_n}, \quad i = 0, \dots, N.$$

$$a(n+1) = a(n) - 2K^* \overline{x_a(n)}^{m_n} \overline{x(n)}^{m_n}.$$

При минимизации модуля первого момента дискретной ошибки нейронной сети

$$\left| \overline{x_g(n)}^{m_n} \right| = \left| \overline{\varepsilon(n)}^{m_n} - \text{sign} \left[ \overline{\sum_{i=0}^N a_i x_i(n)}^{m_n} \right] \right|;$$

$$\frac{\partial \left| \overline{x_g(n)}^{m_n} \right|}{\partial a_i} = -\text{sign} \left[ \overline{x_g(n)}^{m_n} \right] \frac{\partial \overline{\sum_{i=0}^N a_i x_i(n)}^{m_n}}{\partial a_i} \text{sign} g(n).$$

Для поиска экстремума можно использовать информацию о знаке первой производной, о величине первой производ-

ной, о величине первой производной и знаке второй, о величинах первой и второй производной и т.д.

В данном случае величину первой производной определить нельзя и необходимо использовать информацию о ее знаке; так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} \text{sign} \sum_{i=0}^N a_i x_i(n) &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial a_i} \arctg B \sum_{i=0}^N a_i x_i(n) = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \frac{B x_i(n)}{1 + B^2 g^2(n)}, \end{aligned}$$

то

$$\text{sign} \left[ \frac{\partial}{\partial a_i} \text{sign} g(n) \right] \text{sign} \left[ \frac{2}{\pi} x_i(n) \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{B}{1 + B^2 g^2(n)} \right] = \text{sign} x_i(n).$$

Отсюда

$$\frac{\partial \left| \overline{x_g(n)} \right|}{\partial a_i} = \text{sign} \left[ \overline{x_g(n)} \right] \text{sign} x_i(n), \quad i = 0, \dots, N. \quad (9.2)$$

Здесь и в дальнейшем при рассмотрении функционалов, связанных со вторым моментом распределения дискретной ошибки, эта величина также условно называется оценкой вектора градиента, хотя в принципе представляет собой псевдоградиент, полученный заменой производной  $\partial y / \partial a_i$  на знак производной.

В данном случае нет возможности построения алгоритма настройки по замкнутому циклу с удовлетворением критерия минимума  $|\alpha_{1g}|$  при произвольном значении памяти  $m_n$  фильтра оценки градиента. Чтобы показать это, представим измеренные значения градиента функционала вторичной оптимизации в виде некоторого случайного процесса. В общем случае (включающем и критерий минимума  $\alpha_{2g}$ ) измеренное в текущий момент времени значение градиента может быть условно представлено в виде произведения двух сомножителей, а именно  $x_1(n)x_2(n)$ . Величину одного из сомножителей, например  $\partial[\text{sign} g(n)]/\partial a_i$ , нельзя вычислить непосредственно через сигналы в нейронной сети. Можно определить таким образом только знак этого сомножителя. Замена в выражении для градиента при произвольном значении  $m_n$  при этом приводит к невозможности определения знака оценки градиента, так как в общем случае



$$\text{sign } \overline{x_1(n)x_2(n)^{m_n}} \neq \text{sign} [ \overline{x_1(n) \text{sign } x_2(n)^{m_n}} ] .$$

Отсюда следует, что построение аналитических алгоритмов настройки нейронной сети с двумя решениями по замкнутому циклу при рассмотрении функционалов вторичной оптимизации, связанных с дискретной ошибкой, возможно только при  $m_n=1$ . При  $m_n>1$  и прочих равных условиях необходимо построение поисковой процедуры настройки. Необходимо отметить, что в любом случае поисковая процедура настройки должна быть введена для оценки одного из множителей в выражении для реализации градиента вторичной оптимизации, а именно  $\partial y/\partial a$ .

Выражение (9.2) служит основой для построения соответствующей замкнутой нейронной сети. Для нейронной сети с минимизацией  $\alpha_{2g}$

$$\frac{\partial \overline{x_g^2(n)^{m_n}}}{\partial a_i} = -2 \overline{x_g(n) \text{sign } x_i(n)^{m_n}} .$$

Достаточно очевидной является идентичность алгоритмов настройки по критериям минимума  $|\alpha_{1g}|$  и  $\alpha_{2g}$  в случае  $m_n=1$ .

В случае нейрона с континуумом решений

$$y(n) = F [g(n)] = F \left[ \sum_{i=0}^N a_i x_i(n) \right] ,$$

$$x_g(n) = \epsilon(n) F \left[ \sum_{i=0}^N a_i x_i(n) \right] .$$

В случае минимизации  $|\alpha_{1g}|$  и  $\alpha_{2g}$  соответственно

$$\frac{\partial |\overline{x_g(n)^{m_n}}|}{\partial a_i} = \text{sign} [ \overline{x_g(n)^{m_n}} ] \frac{dF(g)}{dg} \overline{x_i(n)^{m_n}} ;$$

$$\frac{\partial \overline{x_g^2(n)^{m_n}}}{\partial a_i} = -2 \overline{x_g(n) \frac{dF(g)}{dg} x_i(n)^{m_n}} .$$

Рекуррентные алгоритмы, являющиеся основой для построения замкнутой нейронной сети, в рассматриваемых случаях будут иметь вид:

$$a(n+1) = a(n) + K^* \text{sign} [ \overline{x_g(n)^{m_n}} ] \frac{dF(g)}{dg} \overline{x(n)^{m_n}} ;$$

$$a(n+1) = a(n) + 2K_1^* \overline{x_g(n) \frac{dF(g)}{dg} x(n)^{m_n}} .$$

В частном случае при  $F(g) = \frac{2}{\pi} \arctg Bg$

$$a(n+1) = a(n) + K^* \text{sign} [ \overline{x_g(n)^{m_n}} ] \frac{2B}{\pi} \left[ \frac{x(n)}{1+B^2g^2(n)} \right] ;$$

$$a(n+1) = a(n) + K_1^* \frac{4B}{\pi} \left[ \frac{x(n) \overline{x_g(n)^{m_n}}}{1+B^2g^2(n)} \right] .$$

### 9.3. Двухслойные нейронные сети

Рассмотрим построение нейронных сетей, настраивающихся по замкнутому циклу и представляющих собой двухслойную сеть из нейрона с полными связями. В данном случае

$$\begin{aligned} y(n) &= F [g(n)] = F \left[ \sum_{j=0}^{H_1} a_j y(n) \right] = F \left[ \sum_{j=0}^{H_1} a_j F [g_j(n)](n) \right] = \\ &= F \left[ \sum_{j=0}^{H_1} a_j F \left[ \sum_{i=0}^H a_{ij} x_i(n) \right] \right] . \end{aligned}$$

Здесь

$$x_a(n) = \epsilon(n) - g(n); \quad x_g(n) = \epsilon(n) - y(n).$$

Основной задачей в данном случае является вывод выражений для оценок градиента функционала вторичной оптимизации через выходные и промежуточные сигналы нейронной сети. В табл. 9.1 приведены указанные выражения соответственно для настраиваемых коэффициентов нейрона первого и второго слоя.

Таблица 9.1

Функционал вторичной оптимизации	$\frac{\partial(\cdot)}{\partial a_j}$	$\frac{\partial(\cdot)}{\partial a_{ij}}$
$ \alpha_{1a} $	$-\text{sign}[x_a(n)] \overline{y(n)^{m_n}}$	$-\text{sign}[x_a(n)] \overline{a_j \frac{dF(g_j)}{dg_j} x_i(n)^{m_n}}$
$ \alpha_{2a} $	$-2x_a(n) \overline{y(n)^{m_n}}$	$-2a_j x_a(n) \overline{\frac{dF(g_j)}{dg_j} x_i(n)^{m_n}}$
$ \alpha_{1g} $	$-\text{sign}[x_g(n)] \times \overline{\frac{dF(g)}{dg} y(n)^{m_n}}$	$-\text{sign}[x_g(n)] \overline{a_j \times \frac{dF(g)}{dg} \frac{dF(g_j)}{dg_j} x_i(n)^{m_n}}$
$ \alpha_{2g} $	$-2x_g(n) \overline{\frac{dF(g)}{dg} y(n)^{m_n}}$	$-2a_j x_g(n) \overline{\frac{dF(g)}{dg} \frac{dF(g_j)}{dg_j} x_i(n)^{m_n}}$

В табл.9.2 и 9.3 приведены выражения для градиентов функционалов вторичной оптимизации для случаев  $F(g)=\text{sign}(g)$  и  $F(g)=\frac{2}{\pi} \arctg Bg$ .

Таблица 9.2

Функционал вторичной оптимизации	$\frac{\partial(\cdot)}{\partial a}$	$\frac{\partial(\cdot)}{\partial a_{ij}}$
$ \alpha_{1a} ,  x_a(n) ^{m_n}$	$-\text{sign}[x_a(n)] \frac{m_n}{y(n)}$	$-a_j \text{sign}[x_a(n)] \text{sign} x_i(n)$
$\alpha_{2a}, x_a^2(n)^{m_n}$	$-2x_a(n) y(n)^{m_n}$	$-2a_j x_a(n) \text{sign} x_i(n)^{m_n}$
$ \alpha_{1g} ,  x_g(n) $	$-\text{sign}[x_g(n)] y(n)$	$-\text{sign}[x_g(n)] \text{sign} a_j \text{sign} x_i(n)$
$\alpha_{2g}, x_g^2(n)$	$-2x_g(n) y(n)$	$-2 \text{sign} a_j x_g(n) \text{sign} x_i(n)$

Таблица 9.3

Функционал вторичной оптимизации	$\frac{\partial(\cdot)}{\partial a_j}$	$\frac{\partial(\cdot)}{\partial a_{ij}}$
$ \alpha_{1a} ,  x_a(n) ^{m_n}$	$-\text{sign}[x_a(n)] \frac{m_n}{y(n)}$	$-\text{sign}[x_a(n)] a_j \frac{2}{\pi} \left[ \frac{Bx_i(n)^{m_n}}{1-B^2g^2(n)} \right]$
$\alpha_{2a}, x_a^2(n)^{m_n}$	$-2x_a(n) y(n)^{m_n}$	$-2a_j \frac{2}{\pi} x_a(n) \left[ \frac{Bx_i(n)^{m_n}}{1+B^2g^2(n)} \right]$
$ \alpha_{1g} ,  x_g(n) ^{m_n}$	$-\text{sign}[x_g(n)] \frac{2}{\pi} \times \frac{By(n)^{m_n}}{[1+B^2g^2(n)]}$	$-\text{sign}[x_g(n)] \frac{4}{\pi^2} a_j \times \left[ \frac{B^2x_i(n)^{m_n}}{[1+B^2g^2(n)][1+B^2g^2_j(n)]} \right]$
$ \alpha_{2g} , x_g^2(n)^{m_n}$	$-2x_g(n) \frac{2}{\pi} \left[ \frac{By(n)^{m_n}}{1+B^2g^2(n)} \right]$	$-\frac{8}{\pi^2} a_j \left[ \frac{B^2x_i(n) x_g(n)^{m_n}}{[1+B^2g^2(n)][1+B^2g^2_j(n)]} \right]$

Несколько слов о методах обучения двухслойной нейронной сети со слоем нелинейно-случайных связей. Структура подобной нейронной сети, которая Розенблаттом была названа трехслойным персептроном (первый слой – элементы ретины), описана в гл.2. Это своеобразная структура, в которой за счет резкого уменьшения числа входов нейронов первого слоя и за счет введения случайности связей этих нейронов с входным пространством нейронной сети возникает необходимость в увеличении числа нейронов первого слоя.

В данном случае

$$y(n) = F \left[ \sum_{j=0}^{H_1} a_j F \left[ \sum_{i_j=0}^{N_1} a_{ij} x_{ij}(n) \right] \right].$$

Случайные связи являются неизменными на этапе настройки. Настраиваться должны лишь коэффициенты связей. Алгоритм настройки коэффициентов нейрона первого слоя получается в следующем виде (например, для критерия минимума  $\alpha_{2g}$ ):

$$\frac{\partial x_g^2(n)^{m_n}}{\partial a_{ij}} = -2a_j x_g(n) \frac{dF(g)}{dg} \frac{dF(g_j)}{dg_j} x_{ij}(n).$$

#### 9.4. Многослойные нейронные сети из нейронов с континуумом решений

В данном случае рассматриваемая многослойная нейронная сеть имеет по  $H_j$  нейронов в каждом  $j$ -м ( $j=1, \dots, W$ ) слое. Выражение для выходного сигнала подобной нейронной сети имеет вид (2.2). Предварительно найдем значения частных производных  $x_k(n)$  и  $g(n)$  по коэффициентам  $a_{h_{W-j+1}, W-j}$ :

$$\frac{\partial y(n)}{\partial a_{h_{W-j+1}, h_{W-j}}} = \sum_{h_{W-1}=1}^{H_{W-1}} \dots \sum_{h_{W-j+3}=1}^{H_{W-j+3}} \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{W-\eta}, h_{W-\eta-1}} \times \prod_{v=0}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{W-v}}^{W-v}(n)]}{dg_{h_{W-v}}} x_{h_{W-j}}^{W-j}(n); \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial g(n)}{\partial a_{h_{W-j+1}, h_{W-j}}} = \sum_{h_{W-1}=1}^{H_{W-1}} \dots \sum_{h_{W-j+3}=1}^{H_{W-j+3}} \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{W-\eta}, h_{W-\eta-1}} \times \prod_{v=1}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{W-v}}^{W-v}(n)]}{dg_{h_{W-v}}} x_{h_{W-j}}^{W-j}(n). \quad (9.4)$$

В табл. 9.4 и 9.5 приведены выражения для оценок градиентов функционалов вторичной оптимизации соответственно для произвольной  $F$  и  $F=\text{sign}(g)$ .

Таблица 9.4

$ \alpha_{1a} $	$-\text{sign}[x_a(n)] \sum_{h_{w-1}=1}^{H_{w-1}} \dots \sum_{h_{w-j+3}=1}^{H_{w-j+3}} \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{w-\eta}, h_{w-\eta-1}} \times$ $\times \prod_{v=1}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{w-v}}^{W-v}(n)]}{dg_{h_{w-v}}^{W-v}} x_{h_{w-j}}^{W-j}(n)$
$\alpha_{2a}$	$-2 \sum_{h_{w-1}=1}^{H_{w-1}} \dots \sum_{h_{w-j+3}=1}^{H_{w-j+3}} \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{w-\eta}, h_{w-\eta-1}} x_a(n) \times$ $\times \prod_{v=1}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{w-v}}^{W-v}(n)]}{dg_{h_{w-v}}^{W-v}} x_{h_{w-j}}^{W-j}(n)$
$ \alpha_{1g} $	$-\text{sign}[x_g(n)] \sum_{h_{w-1}=1}^{H_{w-1}} \dots \sum_{h_{w-j+3}=1}^{H_{w-j+3}} \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{w-\eta}, h_{w-\eta-1}} \times$ $\times \prod_{v=0}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{w-v}}^{W-v}(n)]}{dg_{h_{w-v}}^{W-v}} x_{h_{w-j}}^{W-j}(n)$
$\alpha_{2g}$	$-2 \sum_{h_{w-1}=1}^{H_{w-1}} \dots \sum_{h_{w-j+3}=1}^{H_{w-j+3}} \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{w-\eta}, h_{w-\eta-1}} x_g(n) \times$ $\times \prod_{v=0}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{w-v}}^{W-v}(n)]}{dg_{h_{w-v}}^{W-v}} x_{h_{w-j}}^{W-j}(n)$

Таблица 9.5

$ \alpha_{1a} $	$-\text{sign}[x_a(n)] \sum_{h_{w-1}=1}^{H_{w-1}} a_{h_w, h_{w-1}} \text{sign} \left[ \prod_{\eta=2}^{j-1} \sum_{h_{w-\eta}=1}^{H_{w-\eta}} a_{h_{w-\eta+1}, h_{w-\eta}} x_{h_{w-j}}^{W-j}(n) \right]$
$\alpha_{2a}$	$-2 \sum_{h_{w-1}=1}^{H_{w-1}} a_{h_w, h_{w-1}} x_a(n) \text{sign} \left[ \prod_{\eta=2}^{j-1} \sum_{h_{w-\eta}=1}^{H_{w-\eta}} a_{h_{w-\eta+1}, h_{w-\eta}} x_{h_{w-j}}^{W-j}(n) \right]$
$ \alpha_{1g} $	$-\text{sign}[x_g(n)] \text{sign} \left[ \prod_{\eta=1}^{j-1} \sum_{h_{w-\eta}=1}^{H_{w-\eta}} a_{h_{w-\eta+1}, h_{w-\eta}} x_{h_{w-j}}^{W-j}(n) \right]$
$\alpha_{2g}$	$-2 x_g(n) \text{sign} \left[ \prod_{\eta=1}^{j-1} \sum_{h_{w-\eta}=1}^{H_{w-\eta}} a_{h_{w-\eta+1}, h_{w-\eta}} x_{h_{w-j}}^{W-j}(n) \right]$

В этом случае  $F(g)=\text{sign}(g)$ ,  $\text{sign} x_{h_{w-j}}^{W-j}(n) = x_{h_{w-j}}^{W-j}(n)$  для всех  $j \neq W$ , что значительно упрощает запись выражений для градиентов.

### 9.5. Построение нейронных сетей, настраивающихся по замкнутому циклу при ограничениях на переменные

Рассмотрим ограничения на настраиваемые коэффициенты многослойных нейронных сетей типа равенств и неравенств, представленные в гл.8. Для многослойных нейронных сетей характерны в свою очередь ограничения на совокупность коэффициентов всех нейронных сетей, ограничения на совокупности коэффициентов каждого слоя в отдельности, ограничения на совокупности каждого нейрона нейронной сети в отдельности.

Соответственно данным типам ограничений для двухслойной нейронной сети имеем:

$$\sum_{j=0}^{H_1} (a_j + \sum_{i=0}^N a_{ij}) = \alpha; \quad (9.5a)$$

$$\sum_{j=0}^{H_1} \sum_{i=0}^N a_{ij} = \alpha_1; \quad \sum_{j=0}^{H_1} a_j = \alpha_2; \quad (9.5b)$$

$$\sum_{i=0}^N a_{ij} - \alpha_j = 0; \quad \sum_{j=0}^{H_1} a_j - \alpha = 0; \quad j=0, \dots, H_1. \quad (9.5c)$$

Ограничения типа неравенств на настраиваемые коэффициенты многослойных нейронных сетей в основном имеют вид, представленный в п. 8.5.

*Нейронная сеть в виде нейрона.* В случае критерия минимума  $|\alpha_{1a}|$  при наличии ограничения типа равенств (9.5a) система соотношений (9.1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} a(n+1) \\ \lambda(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(n) \\ \lambda(n) \end{bmatrix} + K^* \begin{bmatrix} -\text{sign}[x_a(n)] \overline{x(n)}^{m_n} + 1\lambda(n) \\ \sum_{j=0}^N a_j(n) - \alpha \end{bmatrix}$$

Для критерия минимума  $|\alpha_{1g}|$  рекуррентное соотношение, являющееся основой для построения замкнутой нейронной сети, в случае ограничений типа неравенств (см.гл.8) на настраиваемые коэффициенты будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
a(n+1) &= a(n) + K_{aa}^*(n) \left\{ -\text{sign}[x_a(n)] \text{sign } \mathbf{x}(n) + \begin{bmatrix} \lambda_0 - \lambda_{N+1} \\ \vdots \\ \lambda_N - \lambda_{2(N+1)} \end{bmatrix} \right\} + \\
&\quad + K_{a\lambda}^*(n) \begin{bmatrix} a(n) - a_{\text{макс}} \\ a_{\text{мин}} - a(n) \end{bmatrix}; \\
\lambda(n+1) &= \max \left\{ 0, \lambda(n) + K_{\lambda a}^*(n) \left\{ -\text{sign}[x_g(n)] \text{sign } \mathbf{x}(n) + \begin{bmatrix} \lambda_0 - \lambda_{N+1} \\ \vdots \\ \lambda_N - \lambda_{2(N+1)} \end{bmatrix} \right\} + \right. \\
&\quad \left. + K_{\lambda\lambda}^*(n) \begin{bmatrix} a(n) - a_{\text{макс}} \\ a_{\text{мин}} - a(n) \end{bmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

*Двухслойная нейронная сеть.* Рассмотрим случай ограничений на коэффициенты нейрона многослойной нейронной сети. Ниже представлены рекуррентные соотношения, являющиеся основой для построения замкнутых нейронных сетей в данном случае.

Ограничения типа равенств а) – второй слой, б) – первый слой:

$$\begin{aligned}
\text{а) } a'(n+1) &= a'(n) + K_{a'a'}^-(n) \left[ x_g(n) \frac{dF(g)}{dg} \Big|_{g=g(n)} x_k(n) + 1\lambda'(n) \right] + \\
&\quad + K_{a'\lambda}^-(n) \left[ \sum_{j=0}^{H_1} a_j(n) - \alpha \right]; \\
\lambda'(n+1) &= \lambda'(n) + K_{\lambda'a'}^-(n) \left[ x_g(n) \frac{dF(g)}{dg} \Big|_{g=g(n)} x_k(n) + 1\lambda'(n) \right] + \\
&\quad + K_{\lambda'\lambda}^-(n) \left[ \sum_{j=0}^{H_1} a_j(n) - \alpha \right]; \\
\text{б) } a_j(n+1) &= a_j(n) + K_{a_j a_j}^-(n) \left[ -2a_j(n)x_g(n) \frac{dF(g)}{dg} \Big|_{g=g(n)} \frac{dF(g_j)}{dg_j} \Big|_{g_j=g_j(n)} x(n) + \right. \\
&\quad \left. + \lambda_j(n) \mathbf{1} \right] + K_{a_j \lambda_j}^-(n) \left[ \sum_{i=0}^N a_{ij}(n) - \alpha \right] + 1\lambda_j(n); \\
\lambda_j(n+1) &= \lambda_j(n) + K_{\lambda_j a_j}^-(n) \left[ -2a_j(n)x_g(n) \frac{dF(g)}{dg} \Big|_{g=g(n)} x(n) + \right. \\
&\quad \left. + \lambda_j(n) \mathbf{1} \right] + K_{\lambda_j \lambda_j}^-(n) \left[ \sum_{i=0}^N a_{ij}(n) - \alpha \right].
\end{aligned}$$

Ограничения типа неравенств а) – второй слой, б) – первый слой:

$$\begin{aligned}
\text{а) } a'(n+1) &= a'(n) + K_{a'a'}^-(n) \left[ x_g(n) \frac{dF(g)}{dg} \Big|_{g=g(n)} x_k(n) + Q\lambda(n) \right] + \\
&\quad + K_{a'\lambda}^-(n) q[a'(n)]; \\
\lambda(n+1) &= \max \left\{ 0, \lambda(n) + K_{\lambda'a'}^-(n) \left[ x_g(n) \frac{dF(g)}{dg} \Big|_{g=g(n)} x_k(n) + Q\lambda(n) \right] + \right. \\
&\quad \left. + K_{\lambda'\lambda}^-(n) q[a'(n)] \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь  $Q$  и  $q$  определяются так же, как в гл.8:

$$\begin{aligned}
\text{б) } a_j(n+1) &= a_j(n) + K_{a_j a_j}^-(n) \left[ -2a_j(n)x_g(n) \frac{dF(g)}{dg} \Big|_{g=g(n)} \frac{dF(g_j)}{dg_j} \Big|_{g_j=g_j(n)} x(n) + \right. \\
&\quad \left. + Q\lambda_j(n) \right] + K_{a_j \lambda_j}^-(n) q[a_j(n)]; \\
\lambda_j(n+1) &= \max \left\{ 0, \lambda_j(n) + K_{\lambda_j a_j}^-(n) \left[ -2a_j(n)x_g(n) \frac{dF(g)}{dg} \Big|_{g=g(n)} \frac{dF(g_j)}{dg_j} \Big|_{g_j=g_j(n)} x(n) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Q\lambda_j(n) \right] + K_{\lambda_j \lambda_j}^-(n) q[a_j(n)] \right\}.
\end{aligned}$$

Представленные алгоритмы достаточно просто могут быть обобщены на произвольное число слоев и для случаев ограничений произвольного частного вида.

### 9.6. Реализация критериев первичной оптимизации в нейронах с двумя решениями

Рассмотрим критерий минимума средней функции риска. Выражение для преобразованной дискретной ошибки может быть представлено

$$x'_g = (\varepsilon - x_k) \left[ (-2A+C)(\varepsilon-1) + (2B+C)(\varepsilon+1) \right] \frac{1}{4} + \frac{1}{2} (\varepsilon + x_k) \varepsilon.$$

Необходимая для построения замкнутой нейронной сети величина градиента в данном случае

$$\frac{\partial x'_g}{\partial a_i} = 2x'_g(n) \frac{\partial x'_g}{\partial a_i}$$

или, иначе,

$$\frac{\partial x'_g{}^2}{\partial a_i} = \{(\varepsilon - y)[(-2A + C)(\varepsilon - 1) + (2B + C)(\varepsilon + 1)] \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\varepsilon + y)l\varepsilon\} 2\text{sign } x_i \left\{ \frac{1}{2} l\varepsilon - \frac{1}{4} [(-2A + l)(\varepsilon - 1) + (2B + C)(\varepsilon + 1)] \right\}. \quad (9.6)$$

Величины  $A, B, C$  здесь определяются выражениями (7.13) и (7.14). В случае (7.14)

$$\frac{\partial x'_g{}^2}{\partial a_i} = -2x_g \text{sign } x_i \left\{ \frac{1}{8} [(l_{12} - l_{11})(\varepsilon - 1) + (l_{21} - l_{22})(\varepsilon + 1)] \right\}. \quad (9.6a)$$

При использовании выражения (7.14a) для формирования преобразованной дискретной ошибки имеем:

$$x'_g = (\varepsilon + y)[Z_{11}(\varepsilon - 1) + Z_{22}(\varepsilon + 1)] \frac{1}{4} + (\varepsilon - y)[Z_{12}(\varepsilon - 1) + Z_{21}(\varepsilon + 1)]. \quad (9.7)$$

После соответствующих преобразований получаем:

$$\frac{\partial x'_g{}^2}{\partial a_i} = \frac{1}{4} \text{sign } x_i \left\{ (1 - \varepsilon) [(Z_{12}^2 - Z_{11}^2) x_g + y(Z_{11} - Z_{12}) 2Z_{11}] + (1 + \varepsilon) [(Z_{21}^2 - Z_{22}^2) x_g + y(Z_{22} - Z_{21}) 2Z_{22}] \right\}, \quad (9.8)$$

что совпадает с полученным выше результатом при использовании  $ABC$ -преобразования при  $Z_{11} = Z_{22} = 0$ . Оценку градиента второго момента распределения преобразованной дискретной ошибки можно получить, используя иное, нежели (9.7), выражение для  $x'_g$ :

$$4x'_g = (1 + y)[(1 + \varepsilon)Z_{22} + (1 - \varepsilon)Z_{21}] + (1 - y)[(1 + \varepsilon)Z_{12} + (1 - \varepsilon)Z_{11}].$$

В приведенных выше выражениях  $Z_{kpk} = \sqrt{l_{kpk}}$  для обеспечения равенства  $R = x'_g{}^{2mn}$ .

Критерий минимума  $R$  при условии  $p_1 r_1 = p_2 r_2$  определяется следующим образом. Оценка градиента  $R^*$  (7.17) по настраиваемым коэффициентам выражается в виде (9.6), где коэффициенты  $A, B, C$  определяются выражением (7.18). Оценка градиента  $R^*$  по  $\lambda$  определяется в виде оценки первого момента распределения преобразованной дискретной ошибки, записываемой в соответствии с (7.19) и (7.20)

$$\frac{\partial x''_g}{\partial \lambda} = (\varepsilon - y)[(-2A_1 + C_1)(\varepsilon - 1) + (2B_1 + C_1)(\varepsilon + 1)] \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\varepsilon + y)C_1\varepsilon. \quad (9.8a)$$

Выражения (9.6), (7.18), (7.20) и (9.8a) служат в данном случае основой для построения соответствующей замкнутой нейронной сети.

При использовании для формирования преобразованной дискретной ошибки нейронной сети преобразования  $Z$ , описанного выше, выражение для оценки градиента  $R^*$  по  $a_i$  определяется (9.8) и (7.21), а выражение для оценки градиента  $R^*$  по  $\lambda$ :

$$\frac{\partial x''_g}{\partial \lambda} = (\varepsilon + y)[Z'_{11}(\varepsilon - 1) + Z'_{12}(\varepsilon + 1)] \frac{1}{4} + (\varepsilon - y)[Z'_{22}(\varepsilon - 1) + Z'_{21}(\varepsilon + 1)] \frac{1}{4}. \quad (9.9)$$

где  $Z'_{kpk}$  определяется (7.22).

Определим критерий минимума  $R$  при условии  $p_1 r_1 = \text{const}$ . В данном случае оценка градиента  $R^*$  (7.24) по настраиваемым коэффициентам выражается в виде (9.6), где коэффициенты  $A, B, C$  определяются выражением (7.25). Оценка градиента  $R^*$  по  $\lambda$  определяется в виде оценки первого момента распределения преобразованной дискретной ошибки, записываемой в виде (9.8a) с коэффициентами  $A_1, B_1, C_1$ , определяемыми (7.26). При использовании преобразования  $Z_1$  выражения для оценок градиентов  $R^*$  по  $a_i$  и  $\lambda$  определяются соответственно (9.8), (7.27), (9.9) и (9.28).

### 9.7. Реализация критерия минимума средней функции риска в нейронах с континуумом и $K_p$ решениями

Для нейрона с континуумом решений (два класса образов) в соответствии с (7.30) имеем:

$$x'_g = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)Z_{12}(x_g) + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)Z_{11}(x'_g) = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)\sqrt{l_2(y)} + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)\sqrt{l_1(y)}. \quad (9.9a)$$

Здесь

$$y = \varepsilon - x_g = F(g) = F\left(\sum_{i=0}^N a_i x_i\right).$$

После некоторых преобразований получаем необходимое выражение для оценки градиента средней функции риска через текущие сигналы в нейронной сети в следующем виде:

$$\frac{\partial x'_g{}^2}{\partial a_i} = \frac{1}{2} \frac{dF(g)}{dg} x_i \left[ (1+\varepsilon) \frac{dl_2(y)}{dy} + (1-\varepsilon) \frac{dl_1(y)}{dy} \right]^{m_n} \quad (9.10)$$

В частном случае

$$\begin{aligned} l_1(y) &= (1+y)^2; \quad l_2(x_k) = (1-y)^2; \\ l_1(-1-x_g) &= (1-1-x_g)^2 = x_g^2; \\ l_2(1-x_g) &= (1-1+x_g)^2 = x_g^2; \\ x'_g &= \frac{1}{2}(1+\varepsilon)x_g + \frac{1}{2}(1-\varepsilon)x_g = x_g. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial x'_g{}^2}{\partial a_i} = -2 \frac{dF(g)}{dg} x_i x_g^{m_n},$$

что соответствует нейрону с минимизацией  $\alpha_{2g}$ , рассмотренному в п. 9.2. Из (9.10) следует известное выражение для оценки градиента  $R$  в случае двух классов образов и нейрона с двумя решениями в виде (9.6a).

В случае континуума классов образов

$$\begin{aligned} x'_g &= Z_1(x_g) = \sqrt{|(\varepsilon - x_g)\varepsilon|}; \\ \frac{\partial x'_g{}^2}{\partial a_i} &= \frac{\partial l(y, \varepsilon)}{\partial y} \frac{dF(g)}{dg} x_i^{m_n}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Отсюда как частный случай следует соответствующее выражение (9.10) для двух классов образов. В (9.11) функция  $\frac{\partial l(y, \varepsilon)}{\partial y}$  должна быть задана априори.

Для нейрона с  $K_p$  решениями ( $K$  классов образов) выходной сигнал описывается выражением:

$$\begin{aligned} y = F_p(g) &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k_p=1}^{K_p-1} [\text{sign}(g - a_{k_p k_{p+1}}) + 1]; \\ g &= \sum_{i=0}^N a_i x_i. \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее,

$$\frac{\partial x'_g{}^2}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial y} l(y, \varepsilon) \frac{\partial y}{\partial a_i}, \quad (9.12)$$

где  $l(y, \varepsilon)$  —  $(K \times K)$ -матрица, элементы которой представляют собой первую разность соответствующей дискретной функции  $l(x_{k_p}, \varepsilon)$ . В частности, эта матрица может иметь следующий вид:

$$\left[ \frac{\partial l(y, \varepsilon)}{\partial y} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \dots 1 \\ -1 & 0 & 1 \dots 1 \\ -1 & -1 & 0 \dots 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -1 & -1 & -1 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

В формуле (9.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial a_i} &= \frac{1}{2} \sum_{k_p=1}^{K-1} \frac{\partial}{\partial a_i} \text{sign} [g - a_{k_p k_{p+1}}] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k_p=1}^{K-1} \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \frac{B x_i}{1 + B^2 (g - a_{k_p k_{p+1}})}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\text{sign} \frac{\partial y}{\partial a_i} = \text{sign} x_i$$

и окончательно

$$\frac{\partial x_g}{\partial a_i} = \frac{\partial l(y, \varepsilon)}{\partial y} = \text{sign} x_i.$$

### 9.8. Реализация критерия минимума средней функции риска в нейронных сетях с $N^*$ выходными каналами (слой нейронов)

Ниже рассмотрено построение замкнутых нейронных сетей с  $N^*$  выходными каналами. Построение оптимальных моделей таких нейронных сетей и выбор для них функционалов вторичной оптимизации рассмотрены в глб 6 и 7. Здесь рассматривается случай одинаковой размерности сигналов  $\varepsilon$  и  $x_k$ , хотя в принципе эти сигналы могут иметь различную размерность.

При вычислении преобразований дискретной ошибки, когда выходной сигнал имеет по каждому каналу  $K_0$  градаций, измеренный вектор дискретной ошибки, имеющий вид:

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N^*}) - (y_1, \dots, y_{N^*}) = (k_1, \dots, k_{N^*}) - (k_{1p}, \dots, k_{N^*p}) = (x_{1g}, \dots, x_{N^*g}),$$

умножается на скаляр (7.33) и далее вычисляется норма результирующего вектора. Отсюда

$$x'_g = \sqrt{x'_{1g}{}^2 + \dots + x'_{N^*g}{}^2} = \sqrt{l(k_1, \dots, k_{N^*}, k_{1p}, \dots, k_{N^*p})},$$

если

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N^*}) = (k_1, \dots, k_{N^*}) \text{ и} \\ (y_1, \dots, y_{N^*}) = (k_{1p}, \dots, k_{N^*p}).$$

Рассмотрение общего случая  $K_0$  градаций выходного сигнала нейронной сети по каждому каналу, имеющего вид:

$$y_{i^*} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k_p=1}^{K_p-1} [\text{sign}(g_{i^*} - a_{k_p}^{i^*}) + 1], \\ g_{i^*} = \sum_{i=0}^N a_{ii^*} x_i, \quad i^*=1, \dots, N^*,$$

не является принципиальным. Поэтому остановимся на случае  $K_0=2$ :

$$y_{i^*} = \text{sign } g_{i^*}.$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial x_g'^2}{\partial a_{ii^*}} = \frac{\partial}{\partial y_{i^*}} l(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N^*}, y_1, \dots, y_{N^*}) \frac{\partial y_{i^*}}{\partial a_{ii^*}} \quad (9.14)$$

Здесь  $l(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N^*}, y_1, \dots, y_{N^*}) - (2^{N^*} \times 2^{N^*})$  матрица. Градиент вычисляется как соответствующая первая разность по  $y_{i^*}$  дискретной функции. В частности, эта матрица может иметь вид, аналогичный (9.13). Величина  $\partial y_{i^*} / \partial a_{ij}$  определяется только своим знаком следующим образом:

$$\text{sign } \frac{\partial y_{i^*}}{\partial a_{ii^*}} = \text{sign } x_i.$$

Пусть система распознавания имеет континуум решений по каждому из  $N^*$  каналов. Предполагается, что функции  $F$  идентичны для каждого выходного канала. Преобразованная дискретная ошибка, первый начальный момент распределения которой равен средней функции риска  $R$ , получается как сумма квадратов компонент вектора измеренной дискретной ошибки, преобразованной в соответствии с (7.34):

$$x_g'^2 = Z_1 \left\{ \sum_{i^*=1}^{N^*} [\varepsilon_{i^*} - P_{i^*}(x)]^2 \right\} = l[\mathbf{P}(x), \varepsilon].$$

В данном случае

$$x_{i^*k} = F(g_{i^*}) = F\left(\sum_{i=0}^N a_{ii^*} x_i\right)$$

и окончательно

$$\frac{\partial x_g'^2}{\partial a_{ii^*}} = \frac{\partial}{\partial x_{i^*k}} l(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N^*}, x_{1k}, \dots, x_{N^*k}) \frac{\partial F(g_{i^*})}{\partial g_{i^*}} x_i(n).$$

Это выражение служит основой для построения соответствующей нейронной сети, настраивающейся по замкнутому циклу.

### 9.9. Реализация критерия минимума средней функции риска в многослойных нейронных сетях

Ниже для трех типов многослойных нейронных сетей представлены алгоритмы настройки по замкнутому циклу, реализующие критерий минимума средней функции риска. Обобщение результатов на другие критерии, рассмотренные выше для нейрона, не представляет принципиальных трудностей.

Для нейронной сети двух классов образов, имеющей один выходной канал ( $N^*=1$ ), при произвольной структуре разомкнутой системы справедливо соотношение (9.9a). Оценка градиента средней функции риска имеет в общем случае следующий вид:

$$\frac{\partial x_g'^2 m_n}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}} = 2x_g' \frac{\partial x_g'^{m_n}}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}}.$$

Здесь

$$\frac{\partial x_g'(n)}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}} = \frac{1}{2} (1+\varepsilon) \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{l_2(y)}} \frac{dl_2(y)}{dy} \frac{dF(g)}{dg} \frac{\partial g(n)}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}} \right] + \\ + \frac{1}{2} (1-\varepsilon) \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{l_1(y)}} \frac{dl_1(y)}{dy} \frac{dF(g)}{dg} \frac{\partial g(n)}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}} \right],$$

где  $\frac{\partial g(n)}{\partial \dots}$  определяется соотношением (9.4). Окончательно

$$\frac{\partial x_g'^2 m_n}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}} = \frac{1}{2} \frac{dF(g)}{dg} \frac{\partial g}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}} \left[ (1+\varepsilon) \frac{dl_2(y)}{dy} + (1-\varepsilon) \frac{dl_1(y)}{dy} \right] m_n.$$

В частности, в случае многослойной нейронной сети с полными связями между слоями имеем:

$$\frac{\partial x_g'^2 m_n}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}} = \frac{1}{2} \left[ (1+\varepsilon) \frac{dl_2(y)}{dy} + (1-\varepsilon) \frac{dl_1(y)}{dy} \right] \times$$

$$\times \frac{dF(g)}{dg} \sum_{h_{w-1}=1}^{H_{w-1}} \sum_{h_{w-j+3}=1}^{H_{w-j+3}} \prod_{v=1}^{j+1} \left. \frac{dF(g_{h_{w-v}}^{w-v})}{dg_{h_{w-v}}} \right|_{g=g(n)} x_{h_{w-j}}^{w-j}(n) \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{w-\eta}, h_{w-\eta-1}} m_n.$$

Для многослойных нейронных сетей из нейронов с двумя решениями:

$$\frac{\partial x_g'^2 m_n}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}} = \frac{1}{2} \left[ (1+\varepsilon) \frac{dl_2(y)}{dy} + (1-\varepsilon) \frac{dl_1(y)}{dy} \right] \text{sign } x_{h_{w-j}}^{w-j} \times \prod_{\eta=0}^{j+2} \text{sign } a_{h_{w-\eta}, h_{w-\eta-1}} \quad (9.15)$$

Рассмотрение многослойных нейронных сетей с континуумом классов образов и решений не представляет принципиальной трудности. Поэтому рассмотрим нейронную сеть с  $K$  градациями по уровню сигналов  $\varepsilon(n)$  и  $y(n)$ , т.е. число классов образов и число решений нейронной сети равны  $K$ . Разомкнутая нейронная сеть при  $N^*=1$  описывается следующим выражением:

$$y = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k_p=1}^{K_p-1} [\text{sign}(g_{hw}^w - a_{k_p, k_{p+1}}) + 1],$$

где  $g_{hw}^w$  определяется выражением (2.7) в случае сети из нейронов с континуумом решений. Выражение для градиента функционала оптимизации

$$\frac{\partial x_g'^2}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}} = \frac{\partial}{\partial y} l(\varepsilon, y) \frac{\partial y}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}}.$$

Матрица  $\frac{\partial}{\partial y} l(\varepsilon, y)$  здесь определяется так же, как в п. 9.7. Далее, так как

$$\frac{\partial y}{\partial a_{h_w, h_{w-1}}} = \text{sign } x_{h_{w-1}}^{w-1},$$

то выражение для оценки градиента средней функции риска для сети из нейронов с двумя решениями будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial x_g'^2}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-j}}} = \frac{\partial}{\partial y} l(\varepsilon, y) \text{sign} \times \left[ \prod_{\eta=1}^{j-1} \sum_{h_{w-\eta}=1}^{H_{w-\eta}} a_{h_{w-\eta+1}, h_{w-\eta}} x_{h_{w-j}}^{w-j}(n) \right]. \quad (9.16)$$

Это выражение служит основой для построения соответствующей замкнутой нейронной сети.

Рассмотрим нейронную сеть с  $N^*$  выходными каналами и двумя градациями выходного сигнала по амплитуде в каждом из каналов. Здесь

$$y_{i^*} = \text{sign } g_{i^*} = \text{sign } g_{hw}^w; \quad h_w = 1, \dots, N^*.$$

Отсюда следует, что при наличии  $(2^{N^*} \times 2^{N^*})$ -матрицы

$$\frac{\partial}{\partial y_{i^*}} l(l_1, \dots, \varepsilon_{N^*}, y_1, \dots, y_{N^*})$$

алгоритм настройки подобной многослойной сети аналогичен изложенному в п. 9.7 для нейрона последнего слоя и в п. 9.8 для нейронов слоев кроме последнего.

### 9.10. Построение замкнутых нейронных сетей нестационарных образов

Ниже отмечаются основные принципиальные моменты, возникающие при построении настраивающихся по замкнутому циклу нейронных сетей нестационарных образов. Основная особенность по сравнению со случаем стационарных образов здесь возникает при построении алгоритма настройки коэффициентов нейронной сети. Рассмотрим одномерный вариант нейронной сети с минимизацией  $\alpha_{2a}$  по замкнутому циклу.

В данном случае

$$\overline{x_a^2(n\Delta T)}^{m_n} = \overline{\varepsilon^2(n\Delta T)}^{m_n} + \overline{x^2(n\Delta T)}^{m_n} + \overline{a_0^2(n\Delta T)}^{m_n} - \overline{2\varepsilon(n\Delta T) x(n\Delta T)}^{m_n} + \overline{2a_0(n\Delta T) \varepsilon(n\Delta T)}^{m_n} - \overline{2a_0(n\Delta T) x(n\Delta T)}^{m_n}.$$

Усреднение здесь должно производиться по множеству реализаций нестационарного случайного процесса в момент времени  $n\Delta T$ . Однако на практике при настройке нейронной сети имеется лишь одна реализация нестационарного случайного процесса. При этом значение  $\overline{x_a^2(n\Delta T)}$  вместо усреднения по множеству получается усреднением по времени на интервале памяти  $m_n$  с дополнительным заданием свойства приводимости процесса к стационарному и априорной информации о характере изменения параметров распределения нестационарного случайного сигнала, т.е. на интервале памяти. При этом наиболее удобным для реализации и достаточным для практических целей является представление нестационарного случайного процесса в нейронной сети на интервале памяти в виде аддитивной суммы стационарного сигнала и детерминированного сигнала с известным в общем функциональном виде характером изменения. Для того чтобы оценка градиента функционала вторичной оптимизации выражалась в алгебраической форме, необходимо предположить, что за интервал усреднения  $m_n$  параметры нейронной сети (настраиваемый коэффициент  $a_0$ ) не изменяют своего значения. В данном случае



$$\frac{dx_a^2(n\Delta T)}{da_0} = \overline{2x_a(n\Delta T)^{m_n}}$$

Алгоритм обучения в нестационарном случае определяется следующим соотношением:

$$a_0 \left[ \left( \frac{n}{m} + m \right) \Delta T \right] = a_0 \left[ \frac{n}{m} \Delta T \right] + K^* \overline{x_a(n\Delta T)^{m_n}}$$

Для построения замкнутой нейронной сети необходима информация о характере изменения (на интервале памяти блока настройки нейронной сети) параметров распределения сигнала  $x_a(n\Delta T)$ . Эта информация в рассмотренном случае может быть однозначно получена по информации о характере изменения на интервале памяти блока настройки нейронной сети параметров распределения входного сигнала и структуре нейронной сети. Если предположить, что совокупности образов распределены по нормальному закону с переменными во времени математическими ожиданиями, то при статистической независимости детерминированной и случайной составляющих на интервале памяти нейронной сети для случайного сигнала  $x_a(n\Delta T)$  справедлива та же гипотеза изменения математического ожидания, что и для сигнала  $x(n\Delta T)$ . Следовательно, в нейронной сети нестационарных образов данного типа фильтр в блоке настройки, предназначенный для оценки градиента функционала вторичной оптимизации, должен быть предназначен для оптимальной фильтрации нестационарного сигнала с гипотезой изменения первого момента распределения, эквивалентной соответствующей гипотезе для совокупностей нестационарных образов. Синтез подобных фильтров рассмотрен в [9.7]. При необходимости упреждения решения данный фильтр должен быть синтезирован как упреждающий. Исходя из физических соображений, необходимо отметить, что гипотезы о характере изменения на интервале памяти нейронной сети первых моментов распределений являются одинаковыми для совокупностей образов первого и второго классов. В случае различных гипотез для синтеза фильтра оценки  $\overline{x_a(n\Delta T)^{m_n}}$  необходимо выбирать гипотезу высшего порядка.

В случае нестационарных образов, как показывает анализ соответствующих выражений, оценка градиента функционала вторичной оптимизации есть задача фильтрации нестационарных случайных сигналов. Выше, задаваясь некоторой априорной информацией о характере нестационарности обра-

зов на входе, определялись характеристики нестационарности реализаций градиента функционала вторичной оптимизации. Для многомерных и многослойных нейронных сетей и функционалов вторичной оптимизации, связанных с дискретной ошибкой, этот путь построения замкнутых нейронных сетей является сложным. В этом случае мы отступаем от основного принципа построения нейронных сетей, настраивающихся по замкнутому циклу, а именно вносим в процедуру синтеза априорную информацию о входном сигнале нейронной сети. Поэтому методологически будет правильнее задаваться некоторой априорной информацией о нестационарном характере изменения градиента на интервале памяти нейронной сети, а именно такой информацией, которая значительно облегчила бы синтез фильтра оценки вектора градиента. По этой априорной информации о структуре разомкнутой нейронной сети можно на нестрогом, даже семантическом, уровне показать класс нестационарных характеристик совокупностей образов, для которого априорная информация о характере изменения во времени параметров распределения градиента является достаточной. Этот подход, с одной стороны, облегчит процедуру синтеза фильтра в блоке настройки, с другой стороны, создаст возможность построения алгоритмов настройки по замкнутому циклу с поправкой коэффициентов не через  $m_n$  тактов поступления входных образов, как было выше принято, а в каждый момент времени  $n$ .

Результаты синтеза многомерных фильтров, представленные в [9.8], применимы как при построении нейронных сетей, настраивающихся по разомкнутому циклу (при оценке векторов математических ожиданий нестационарных совокупностей образов), так и при построении нейронных сетей, настраивающихся по замкнутому циклу (при оценке векторов градиентов функционалов вторичной оптимизации нейронной сети нестационарных образов).

### 9.11. Построение нейронных сетей с перекрестными и обратными связями, настраивающихся по замкнутому циклу

Ниже рассматривается в качестве функционала вторичной оптимизации только второй момент распределения дискретной ошибки.

В случае системы распознавания с перекрестными связями разомкнутая нейронная сеть, в частности двухслойная, описывается следующим выражением (см.гл.2):

$$y = F \left[ \sum_{j=1}^{H_1} a_j F \left[ \sum_{i=0}^N a_{ij} x_i \right] + \sum_{i=0}^N a_i x_i \right].$$

Здесь, как и ранее,

$$\frac{\partial x_g^{2m_n}}{\partial a} = -2x_g \frac{\partial}{\partial a} y^{m_n}. \quad (9.17)$$

В данном случае

$$\frac{\partial y}{\partial a_i} = \frac{dF(g)}{dg} y_j; \quad \frac{\partial y}{\partial a_{ij}} = \frac{dF(g)}{dg} a_j \frac{dF(g_j)}{dg_j} x_i; \quad \frac{\partial y}{\partial a_i} = \frac{dF(g)}{dg} x_i.$$

Эти выражения являются основой для построения соответствующей замкнутой нейронной сети.

Разомкнутая нейронная сеть в виде нейронов с обратной связью описывается следующим выражением (гл.2):

$$y(n) = F \left[ \sum_{i=0}^N a_i x_i(n) + a_k y(n-1) \right]. \quad (9.18)$$

Рассмотрим вариант с  $m_n=1$ . При  $m_n=\text{const}$  важно лишь удовлетворить условие независимости  $y(n-1)$  от  $a_i$ . Из (9.18) следует:

$$\frac{\partial y(n)}{\partial a_i} = \frac{dF(g)}{dg} x_i(n); \quad \frac{\partial y(n)}{\partial a_k} = \frac{dF(g)}{dg} y(n-1).$$

Отсюда с учетом (9.17) следует рекуррентное соотношение, являющееся основой для построения соответствующей замкнутой нейронной сети:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}(n+1) \\ a_k(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(n) \\ a_k(n) \end{bmatrix} + K^* \frac{dF(g)}{dg} x_g(n) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ y(n-1) \end{bmatrix}^{m_n}. \quad (9.18a)$$

Рассмотрим двухслойную нейронную сеть с обратными связями. Описание разомкнутой нейронной сети следующее:

$$y(n) = F[g(n)]; \quad g(n) = \sum_{j=1}^{H_1} a_j y(n) + a_k y(n-1); \quad (9.18б)$$

$$y(n) = F[g_j(n)]; \quad g_j(n) = \sum_{i=0}^N a_{ij} x_i(n) + a_{kj} y(n-1) + a_{kj} y(n-1).$$

Используя преобразование (9.17), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(n)}{\partial a_j} &= \frac{dF(g)}{dg} y(n); \quad \frac{\partial y(n)}{\partial a_k} = \frac{dF(g)}{dg} y(n-1) \frac{\partial y(n)}{\partial a_{ij}} = \\ &= \frac{dF(g)}{dg} a_j \frac{dF(g_j)}{dg_j} x_i(n); \end{aligned} \quad (9.18в)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(n)}{\partial a_{kj}} &= \frac{dF(g)}{dg} a_j; \quad \frac{dF(g_j)}{dg_j} y(n-1); \quad \frac{\partial y(n)}{\partial a'_{kj}} = \\ &= \frac{dF(g)}{dg} a_j \frac{dF(g_j)}{dg_j} y(n-1). \end{aligned}$$

Эти выражения являются основой для построения соответствующей замкнутой нейронной сети. Не представляет принципиальных затруднений обобщение данных результатов на нейронной сети с наличием одновременно перекрестных и обратных связей, нейронной сети с произвольным числом слоев нейронов, нейронной сети с перекрестными и обратными связями различной «логической глубины».

### 9.12. Построение замкнутых нейронных сетей в режимах самообучения и произвольной квалификации учителя

В [9.5] рассмотрены алгоритмы самообучения, аналогичные по своему качеству алгоритмам восстановления плотностей распределения вероятностей, так как в режиме настройки по замкнутому циклу определяют координаты мод функции  $f(\mathbf{x})$ . Ниже рассмотрены алгоритмы настройки по замкнутому циклу нейронной сети с произвольной фиксированной структурой в режиме самообучения. Данные алгоритмы могут быть получены из приведенного расчета на каждом шаге настройки параметров многослойной нейронной сети с фиксированной структурой по координатам векторов, соответствующих модам  $f(\mathbf{x})$ . Возможен и другой подход, аналогичный тому, который использовался выше на этапе рассмотрения режима обучения. Средний риск есть в данном случае первый момент распределения сигнала  $x'_k$ , определяемого выражением (7.35). Отсюда

$$\frac{\partial y'}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \rho[\mathbf{x} - \mathbf{b}(y)] = - \frac{\partial \rho}{\partial [\mathbf{x} - \mathbf{b}(y)]} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a}. \quad (9.19)$$

В частности, при  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = 2[\mathbf{x} - \mathbf{b}(y)]^T \frac{\partial \mathbf{b}(y)}{\partial y}.$$

Уравнение для неизвестных функций  $\mathbf{b}(y)$  записывается в виде некоторого рекуррентного соотношения ( $m_n=1$ )

$$\mathbf{b}(y, n) = \mathbf{b}(y, n-1) + K^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} [\mathbf{x} - \mathbf{b}(y, n-1)]. \quad (9.20)$$

Уравнения (9.19) и (9.20) служат основой для построения нейронных сетей, настраивающихся по замкнутому циклу, в режиме самообучения. В выражении (9.19)  $\partial y / \partial a$  определяется, как и ранее, в режиме обучения для нейронной сети с любой структурой. В случае  $K_p$  решений  $\frac{\partial \mathbf{b}(y)}{\partial y}$  есть  $(K_p \times N)$ -матрица, получаемая по результатам решения уравнения (9.20) в текущий момент времени.

Более подробно построение замкнутых многослойных нейронных сетей с  $K_p$  решениями и  $N^*$  выходными каналами в режиме самообучения рассмотрено в гл.12.

Итак, алгоритм настройки многослойной нейронной сети в данном случае заключается в следующем:

1. При наличии некоторых начальных значений настраиваемых коэффициентов нейронной сети по текущему входному сигналу  $\mathbf{x}(0)$  рассчитывается  $y(0)$ .

2. Выбирается соответствующий  $y(0)$  столбец матрицы  $\mathbf{b}(y, 0)$ , полученной как указывалось выше.

3. Производится настройка коэффициентов нейронной сети в соответствии с (9.19) и т.д., начиная с п.1.

Необходимо отметить, что значения  $\mathbf{b}(y)$  на каждом шаге настройки можно определить расчетом по параметрам и структуре многослойной нейронной сети. При произвольной квалификации учителя:

$$x'_g = l(y, \varepsilon) b + (1-b^2) \rho [\mathbf{x} - \mathbf{b}(y)]. \quad (9.20a)$$

Отсюда

$$\frac{\partial x'_g m_n}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial a} \left\{ b \frac{\partial l(y, \varepsilon)}{\partial y} (1-b^2) \frac{\partial \rho}{\partial [\mathbf{x} - \mathbf{b}(y)]} \frac{\partial \mathbf{b}(y)}{\partial y} \right\} m_n; \quad (9.20б)$$

$$\frac{\partial x'_g m_n}{\partial \mathbf{b}(y)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}(y)} \rho [\mathbf{x} - \mathbf{b}(y)] m_n. \quad (9.20в)$$

Данные два выражения служат основой для построения замкнутой нейронной сети с произвольной структурой при

произвольной квалификации учителя. Необходимо отметить, что алгоритм настройки делится на две самостоятельные части, одна из которых, определяемая членом  $\partial y / \partial a$ , зависит от структуры разомкнутой нейронной сети и определяет потенциальное качество решения задачи распознавания.

Разработанные методы настройки многослойных нейронных сетей пригодны и для случая, когда нейронная сеть имеет несколько слоев нейронов с фиксированными коэффициентами.

Отметим, что процедура настройки многослойных нейронных сетей, связанная с выражением (8.1), обеспечивает лишь локальный экстремум функционала оптимизации, причем начальные значения настраиваемых параметров должны задаваться случайно в диапазоне их изменения, определяемом из физических соображений. Поэтому полностью алгоритм настройки многослойной сети должен содержать множество (объемом  $\eta^0$ ) этапов выброса случайных начальных условий для настройки, следующие за каждым выбросом этапы настройки в соответствии с (8.1) и этап усреднения результатов настройки по  $\eta^0$  (см. гл.8 и 12).

### 9.13. Вывод выражений для оценок производных второго порядка функционала вторичной оптимизации

Ниже для многослойных нейронных сетей различных типов найдены выражения для оценок производных второго порядка второго момента распределения дискретной ошибки, являющегося функционалом вторичной оптимизации. В случае нейронов с континуумом решений:

$$\frac{\partial x_g^2 m_n}{\partial a_i} = -2 x_g \frac{\partial F}{\partial g} x_i; \quad (9.21)$$

$$\frac{\partial x_g^2 m_n}{\partial a_i \partial a_j} = 2 x_i x_j \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial g} \right)^2 - x_g \frac{\partial^2 F}{\partial g^2} \right] m_n.$$

В случае многослойной нейронной сети с последовательными связями:

$$\frac{\partial x_g^2 m_n}{\partial a_{h_{w-j+1}, h_{w-1}}} = -2 \sum_{h_{w-1}=1}^{H_{w-1}} \dots \sum_{h_{w-j+3}=1}^{H_{w-j+3}} \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{w-\eta}, h_{w-\eta-1}} \times$$

$$\begin{aligned} & \overline{x_g(n)} \prod_{\eta=0}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{W-\eta}}^{W-\nu}(n)]}{dg_{h_{W-\eta}}^{W-\nu}} x_{h_{W-j}}^{W-j}(n) \frac{\partial^2 x_g^2}{\partial a_{h_{W-j+1}, h_{W-j}} \partial a_{h_{W-j+1}, h_{W-i}}} = \\ & = -2 \sum_{h_{W-1}=1}^{H_{W-1}} \dots \sum_{h_{W-j+3}}^{H_{W-j+3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial a_{h_{W-i+1}, h_{W-i}}} \left[ \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{W-\eta}, h_{W-\eta-1}} \right] x_g(n) \prod_{\nu=0}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{W-\nu}}^{W-\nu}(n)]}{dg_{h_{W-\nu}}^{W-\nu}} \times \right. \\ & \times x_{h_{W-j}}^{W-j}(n) + \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{W-\eta}, h_{W-\eta-1}} \frac{\partial x_g(n)}{\partial a_{h_{W-j+1}, h_{W-i}}} \prod_{\nu=0}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{W-\nu}}^{W-\nu}(n)]}{dg_{h_{W-\nu}}^{W-\nu}} x_{h_{W-j}}^{W-j}(n) + \\ & + \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{W-\eta}, h_{W-\eta-1}} x_g(n) \sum_{i=0}^{j+1} \frac{\partial}{\partial a_{h_{W-i+1}, h_{W-i}}} \left[ \frac{dF[g_{h_{W-i}}^{W-i}(n)]}{dg_{h_{W-i}}^{W-i}} \right] \prod_{\nu=0}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{W-\nu}}^{W-\nu}(n)]}{dg_{h_{W-\nu}}^{W-\nu}} \times \\ & \left. \times x_{h_{W-j}}^{W-j}(n) + \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{W-\eta}, h_{W-\eta-1}} x_g(n) \prod_{\nu=0}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{W-\nu}}^{W-\nu}(n)]}{dg_{h_{W-\nu}}^{W-\nu}} \frac{\partial x_{h_{W-j}}^{W-j}(n)}{\partial a_{h_{W-i+1}, h_{W-i}}} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{\partial \left[ \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{W-\eta}, h_{W-\eta-1}} \right]}{\partial a_{h_{W-i+1}, h_{W-i}}} = \begin{cases} 0 & \text{при } i > j+3; \\ \prod_{\substack{\eta=0 \\ \eta \neq i+1}}^{j+2} a_{h_{W-\eta}, h_{W-\eta-1}} & \text{при } i < j+3; \end{cases}$$

$$\frac{\partial x_g(n)}{\partial a_{h_{W-i+1}, h_{W-i}}} = - \frac{\partial y}{\partial a_{h_{W-i+1}, h_{W-i}}} = - \sum_{h_{W-1}=1}^{H_{W-1}} \dots \sum_{h_{W-j+3}=1}^{H_{W-j+3}} \prod_{\eta=0}^{j+2} a_{h_{W-\eta}, h_{W-\eta-1}} \times$$

$$\times \prod_{\nu=0}^{j+1} \frac{dF[g_{h_{W-\nu}}^{W-\nu}(n)]}{dg_{h_{W-\nu}}^{W-\nu}} x_{h_{W-i}}^{W-i}(n);$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{h_{W-i+1}, h_{W-i}}} \left[ \frac{dF[g_{h_{W-i}}^{W-i}(n)]}{dg_{h_{W-i}}^{W-i}} \right] = \frac{d^2 F[g_{h_{W-i}}^{W-i}(n)]}{dg_{h_{W-i}}^{2W-i}} \frac{\partial g_{h_{W-i}}^{W-i}}{\partial a_{h_{W-i+1}, h_{W-i}}}.$$

Использование данных выражений для построения соответствующих алгоритмов в многослойных нейронных сетях достаточно сложной структуры затруднительно. Однако методология многослойных нейронных сетей определяет уменьшение необходимости учета производных второго порядка функционала вторичной оптимизации при усложнении структуры разомкнутой нейронной сети. Для двухслойной системы с перекрестными связями

$$y = F \left[ \sum_{j=1}^{H_1} a_j F \left[ \sum_{i=0}^N a_{ij} x_i \right] + \sum_{i=0}^N a'_i x_i \right];$$

$$\frac{\partial x_g^2}{\partial a} = -2 x_g \frac{\partial y}{\partial a} \quad ; \quad \frac{\partial^2 x_g^2}{\partial a_{(1)} \partial a_{(2)}} = 2 \frac{\partial y}{\partial a_{(1)}} \frac{\partial y}{\partial a_{(2)}} - 2 x_g \frac{\partial^2 y}{\partial a_{(1)} \partial a_{(2)}} \quad ;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{d^2 F(g)}{dg^2} y_i y_j \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial a'_i \partial a'_j} = \frac{d^2 F(g)}{dg^2} x_i x_j \quad ;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a'_i \partial a_j} = \frac{d^2 F(g)}{dg^2} x_i y_j \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial a_{ij} \partial a_{ml}} = a_j \frac{dF(g_j)}{dg_j} x_i \frac{d^2 F(g)}{dg^2} \times$$

$$\times a_l \frac{dF(g_l)}{dg_l} x_m + \frac{dF(g)}{dg} a_j x_i \frac{d^2 F(g_j)}{dg_j} \frac{dg_j}{dg_l} x_m \quad ;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a_j \partial a_{ml}} = y_j \frac{d^2 F(g)}{dg^2} a_l \frac{dF(g_l)}{dg_l} x_m + \frac{dF(g)}{dg} \frac{dF(g_j)}{dg_j} \frac{dg_j}{dg_l} x_m \quad ;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a'_i \partial a_{ml}} = x_i \frac{d^2 F(g)}{dg^2} a_l \frac{dF(g_l)}{dg_l} x_m.$$

В случае нейронов с обратной связью

$$\frac{\partial^2 y(n)}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{d^2 F(g)}{dg^2} \Big|_{g=g(n)} x_i(n) x_j(n); \quad \frac{\partial^2 y(n)}{\partial a_k^2} = \frac{d^2 F(g)}{dg^2} [y(n-1)]^2. \quad (9.22)$$

Полученные выражения служат основой для построения алгоритмов настройки многослойных нейронных сетей с использованием производной второго порядка функционала вторичной оптимизации.

## Литература

1. Галушкин А.И. Об алгоритмах адаптации в многослойных системах распознавания образов. Докл. АН УССР, № 1, 1973, с. 15-20 - (представлено акад. В.М. Глушковым).
2. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. - М., Энергия, 1974.
3. Викторов Н.В., Галушкин А.И. Построение и исследование систем распознавания образов при произвольной «квалификации учителя». // Сб. «Медицинская радиоэлектроника» ВНИИ медицинской техники. - 1976. - С. 95-106.
4. Галушкин А.И., Точенов В.А. Системы «человек-машина» в теории распознавания образов. - Труды семинара «Искусственный интеллект. Итоги и перспективы». - 1974, с.1-7.

95. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. – М., Наука, 1968, 399 с.
96. Цыпкин Я.З. Основы теории обучающихся систем. – М., Наука, 1970, 251 с.
97. Галушкин А.И. Зотов Ю.Я. Шикунов Ю.А. Оперативная обработка экспериментальной информации. – М., Энергия, 1972, 360 с.
98. Галушкин А.И. Расчет и реализация оптимальных дискретных фильтров. – В сб. Автоматическое управление и вычислительная техника. – М., 1968, вып. 9, с. 72–128.

## Глава 10. Настройка непрерывных нейронных сетей\*

В данной главе рассматривается непрерывная модель двухслойной нейронной сети с континуумом нейронов в первом слое и нейроном с континуумом признаков на входе во втором слое.

Структура модели данной нейронной сети описывается выражением:

$$y(n) = \text{sign} \left[ \int_I a_{2l}(i, n) \text{sign} \left( \sum_{l=1}^L a_{1l}(i, n) x_{1l}(n) + a_{10}(i, n) \right) di \right]. \quad (10.1)$$

Здесь:  $x_{1l}(n)$  –  $l$ -я компонента вектора признаков;  $y$  – выходной сигнал нейронной сети;  $a_{1l}(i, n)$  –  $l$ -я компонента весовой вектор-функции первого слоя;  $a_{2l}(i, n)$  – весовая функция второго слоя.

Целью данной главы является вывод выражений рекуррентных процедур настройки весовых коэффициентов двухслойной непрерывной нейронной сети и рассмотрение особенностей этих процедур.

За исходное выражение принято выражение рекуррентной процедуры для нейрона с конечным числом признаков:

$$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n) - K^* \left. \frac{\partial Y(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(n)}. \quad (10.1a)$$

Здесь  $Y(\mathbf{a})$  – функционал вторичной оптимизации;  $\mathbf{a}(n)$  – вектор состояния системы (текущее значение аргумента экстремальной функции;  $K^*[L^0 L^0]$  – матрица коэффициентов;  $L^0$  – размерность вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ M \\ a_i \\ M \\ a_n \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & \Lambda & \Lambda & \Lambda & K_{1L^0} \\ M & & & & M \\ K_{i1} & \Lambda & K_{ij} & \Lambda & K_{iL^0} \\ M & & & & M \\ K_{L^0 1} & \Lambda & \Lambda & \Lambda & K_{L^0 L^0} \end{bmatrix}$$

\* Материал данной главы написан совместно с Тарковым М.А.

### 10.1. Настройка нейрона с континуумом признаков

Соотношение (10.1a) в скалярном виде может быть записано следующим образом:

$$a_i(n+1) = a_i(n) - \sum_{j=1}^{L^0} K_{ij} \frac{\partial Y(\mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{a_j = a_j(n)} \quad (10.2)$$

При  $L \rightarrow \infty$  номера  $i$  и  $j$  компонент вектора  $\mathbf{a}$  заменяются параметрами  $i$  и  $j$ , непрерывно меняющимися в некоторой области  $I$ . Соответственно, в выражении (10.2) сумма по  $j$  заменяется на интеграл по параметру  $j$ . Таким образом, получаем выражение рекуррентной процедуры настройки весов нейрона с континуумом признаков, имеющее вид:

$$a(i, n+1) = a(i, n) - \int_j K^*(i, j) \frac{\partial Y(a(j))}{\partial a(j)} \Big|_{a_j = a(j, n)} d_j \quad (10.3)$$

Здесь  $K^*(i, j)$  – функция двух переменных  $i$  и  $j$ .

### 10.2. Настройка слоя, состоящего из континуума нейронов

Каждому нейрону из непрерывного множества в этом слое соответствует некоторое значение параметра  $i$ , непрерывно меняющегося в некоторой области  $J'$ , в частности, можно рассматривать некоторый интервал  $(c, d)$ .

В соответствии с этим рекуррентная процедура настройки континуального слоя нейронов будет иметь вид:

$$\mathbf{a}(i, n+1) = \mathbf{a}(i, n) - K^*(i) \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial \mathbf{a}(i)} \Big|_{\mathbf{a}(i) = \mathbf{a}(i, n)} \quad (10.4)$$

Здесь  $K^*(i) - [L^0 \times L^0]$  матрица функций параметра  $i$ , где  $L^0$  – размерность вектора признаков (или вектор-функции  $\mathbf{a}(i)$ ).

### 10.3. Выбор параметрической матрицы для процедуры обучения континуального слоя нейронов на основе данных случайных выборок

Структура континуального слоя нейронной сети, используемого, как самостоятельная система (случай  $a_2(i) \equiv 1$ ), описывается выражением:

$$y = \text{sign} \left[ \int \text{sign} \left( \sum_{l=1}^{L^0} a_l(i) x_l + a_0(i) \right) di \right],$$

где  $L^0$  – размерность пространства признаков.

Рекуррентная процедура обучения слоя нейронов имеет, как уже указывалось, следующий вид:

$$\mathbf{a}(i, n+1) = \mathbf{a}(i, n) - K^*(i) \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial \mathbf{a}(i)} \Big|_{\mathbf{a}(i) = \mathbf{a}(i, n)} \quad (10.5)$$

До сих пор не рассматривался вопрос о выборе матрицы функций  $K^*(i)$ . Между тем ясно, что  $K^*(i) = K^*(i, n)$ , так как зависит от номера шага процедуры настройки. Цель данного пункта – выяснить зависимость матрицы функций от номера шага  $n$  и от параметра  $i$  при условии, что  $a_2(i) \equiv 1$  и не зависит от  $n$  (данное условие принято для упрощения анализа зависимости  $K^*(i)$ ).

Рассмотрим частный случай матрицы функций – диагональная матрица:

$$K^*(i) = \begin{Bmatrix} K_{00}(i) & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & K_{11}(i) & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & \Lambda & \Lambda & K_{LL}(i) \end{Bmatrix}$$

Континуум нейронов реализует в пространстве признаков континуум гиперплоскостей. Каждому значению параметра  $i$  соответствует нейрон, дискриминантная функция которого имеет вид:

$$g(y, i) = \sum_{l=1}^L a_l(i) y_l + a_0(i). \quad (10.6)$$

В точках  $i$ -й гиперплоскости  $g(y, i) = 0$ . Известно, что расстояние от некоторой точки  $y$  до гиперплоскости пропорционально  $g(y, i)$ . Назовем  $R(i) = g(y, i)$  расстоянием от точки  $y$  до гиперплоскости, соответствующей параметру  $i$ . Условимся, что если  $y$  принадлежит первому классу, то для  $i$ -й гиперплоскости правильной ориентацией будет такая, при которой  $R(i) > 0$ .

Пусть на  $n$ -м шаге процедуры  $R(i) = R(n, i)$ , где

$$R(n, i) = \sum_{l=1}^L a_l(n, i) y_l + a_0(n, i). \quad (10.7)$$

Здесь в скалярном виде:

$$a_l(n+1, i) = a_l(n, i) - K_l^*(n, i) \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial a_l(i)} \Big|_{\mathbf{a}(i) = \mathbf{a}(i, n)}. \quad (10.8)$$

Тогда

$$R(n+1, i) = \sum_{l=1}^L a_l(n+1, i) y_l + a_0(n+1, i) \quad (10.9)$$

записывается в виде

$$R(n+1, i) = \sum_{l=1}^L \left[ a_l(n, i) - K_l^*(n, i) \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial a_l(i)} \right]_{a_l(i)=a_l(n, i)} y_l + \left[ a_0(n, i) - K_0^*(n, i) \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial a_0(i)} \right]_{a_0(i)=a_0(n, i)}$$

С учетом (10.9) получаем

$$R(n+1, i) = R(n, i) - \sum_{l=1}^L K_l^*(n, i) \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial a_l(i)} \Big|_{a_l(i)=a_l(n, i)} y_l - K_0^*(n, i) \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial a_0(i)} \Big|_{a_0(i)=a_0(n, i)} \quad (10.10)$$

Так как для классификации точек пространства признаков используется сумма (в данном случае интеграл) выходных сигналов нейронов слоя, то на  $n+1$ -м шаге точка  $y$  будет классифицироваться заведомо правильно, если  $R(n+1, i)$  выбрать следующим образом:

$$R(n+1, i) = \begin{cases} -\varepsilon_0 R(n, i), & \text{если } R(n, i) \leq 0, \\ R(n, i), & \text{если } R(n, i) > 0 \end{cases} \quad (10.11)$$

(подразумевается, что  $y$  принадлежит первому классу). Здесь  $\varepsilon_0 > 0$ . Чтобы из (10.10) определить  $K_l^*(n, i)$ ,  $l = 0, 1, \dots, L$ , необходимо взять  $(L+1)$ -ю точку и для каждой посчитать  $R(n+1, i)$  по формуле (10.11). Получим систему  $L+1$  линейных уравнений относительно функции  $K_l^*(i)$ ,  $l = 0, 1, \dots, L$ . Перепишем (10.10) в векторном виде:

$$R(n+1, i) - R(n, i) = -K(n, i) A_{YX}. \quad (10.12)$$

Здесь  $K(n, i) = (K_{00}(n, i) \dots K_{LL}(n, i))$  диагональ матрицы  $K^*(i)$ .

Матрица

$$A_{YX} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial a_0(i)} & \dots & \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial a_0(i)} \\ y_{11} \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial a_1(i)} & \dots & y_{1L} \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial a_1(i)} \\ y_{L1} \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial a_L(i)} & \dots & y_{LL} \frac{\partial Y(\mathbf{a}(i))}{\partial a_L(i)} \end{pmatrix}$$

Из (10.12) следует

$$K^*(n, i) = -(R(n+1, i) - R(n, i)) A_{YX}^{-1}. \quad (10.13)$$

Это окончательное выражение для параметрической матрицы функций на  $n$ -м шаге процедуры.

Для усреднения берем  $m_n$  выборок по  $L+1$  векторов в каждой и затем выбираем матрицу

$$K^*(i, n)_{\text{рез}} = \frac{1}{m_n} \sum_{m_n} K_{m_n}^*(i, n). \quad (10.14)$$

Диагональ матрицы  $K_{m_n}^*(i, n)$  вычисляется по формуле (10.13) для каждой выборки.

К трудностям данного метода следует отнести вопрос о выборе оптимального  $\varepsilon_0 > 0$ .

#### 10.4. Выбор параметрической функции $K^*(i, j)$ на основе данных случайных выборок для процедуры обучения нейрона с континуумом признаков

Метод оценки расстояний, изложенный в предыдущем пункте для вычисления матрицы функций  $K^*(i)$ , применим для оценки параметрической матрицы для нейронов с континуумом признаков. Как было показано, рекуррентные процедуры обучения нейрона с континуумом признаков имеют вид:

$$\begin{cases} a(i, n+1) = a(i, n) - \int_c^{\alpha} K_n(i, j) \frac{\partial Y}{\partial a(j)} \Big|_{a(j)=a(j, n)} d_j \\ a_0(n+1) = a_0(n) - K_n \frac{\partial Y}{\partial a_0} \Big|_{a_0=a_0(n)} \end{cases} \quad (10.15)$$

Расстояние от точки  $x(n, i)$  до гиперплоскости  $S(x(i)) = \int a(i) x(i) di + a_0 = 0$  равно

$$R_n(x(n, i)) = \int_{a(i)=a(i, n)} a(i) \left| x(n, i) di + a_0(n) \right. \quad (10.16)$$

$$R_{n+1} = \int a(n+1, i) x(n, i) di + a_0(n+1).$$

С учетом (10.15) и (10.16) получаем

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x(n, i)) &= \int_I a(n, i) x(n, i) di - \iint_{IJ} K_n(i, j) \frac{\partial Y}{\partial a(j)} \left| didj + \right. \\ &\quad \left. + a_0(n) - K_n \frac{\partial Y}{\partial a_0} \right|_{a_0=a_0(n)} \Rightarrow \\ \Rightarrow R_{n+1}(x(n, i)) - R_n(x(n, i)) &= \iint_{IJ} K_n(i, j) \frac{\partial Y}{\partial a(j)} \left| x(n, i) didj - \right. \\ &\quad \left. - K_n \frac{\partial Y}{\partial a_0} \right|_{a_0=a_0(n)}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Если  $x(n, i)$  принадлежит первому классу и  $R_n(x(n, i)) < 0$ , то выбираем  $R_{n+1}(x(n, i)) = -\epsilon_0 R_n(x(n, i))$ ,  $\epsilon_0 > 0$ .

Функцию  $K_n(i, j)$  и коэффициент  $K_n$  невозможно определить из интегрального уравнения (10.17) однозначно. Наложим некоторые ограничения на функцию  $K_n(i, j)$ , а именно введем функцию

$$K_n(i, j) = \frac{1}{K_0^*} \frac{1}{\frac{\partial Y}{\partial a(j)} \left|_{a(j)=a(j, n)} \right.} \frac{\partial Y}{\partial a(i)} \left|_{a(i)=a(i, n)} \right. \quad (10.18)$$

где  $K_0^* = d - c$ .

В этом случае формула (10.15) приобретает следующий вид:

$$a(i, n+1) = a(i, n) - \frac{\partial Y}{\partial a(i)} \left|_{a(i)=a(i, n)} \right. \quad (10.19)$$

так как с учетом (10.18)

$$\int K_n(i, j) \frac{\partial Y}{\partial a(j)} \left|_{a(j)=a(j, n)} \right. dj = \frac{\partial Y}{\partial a(i)} \left|_{a(i)=a(i, n)} \right.$$

Из (10.19) следует, что функция (10.18) является континуальным аналогом единичной параметрической матрицы  $K^*$ . С учетом (10.18) формула (10.17) примет следующий вид:

$$R_{n+1}(x(n, i)) - R_n(x(n, i)) = - \int \frac{\partial Y}{\partial a(j)} \left|_{a(i)=a(i, n)} \right. x(n, i) di - K_n \frac{\partial Y}{\partial a_0} \left|_{a_0=a_0(n)} \right. \quad (10.20)$$

Отсюда

$$K_n = \frac{1}{\frac{\partial Y}{\partial a_0} \left|_{a_0=a_0(n)} \right.} \left[ R_n(x(n, i)) - R_{n+1}(x(n, i)) - \int \frac{\partial Y}{\partial a(i)} \left|_{a(i)=a(i, n)} \right. x(n, i) di \right].$$

В случае неверной классификации

$$K_n = \frac{1}{\frac{\partial Y}{\partial a_0} \left|_{a_0(a_0)=a_0(n)} \right.} \left[ (1+\epsilon_0) R_n(x(n, i)) - \int \frac{\partial Y}{\partial a(i)} \left|_{a(i)=a(i, n)} \right. x(n, i) di \right]. \quad (10.21)$$

Таким образом, одним из возможных решений вопроса о выборе параметрических коэффициентов в случае нейрона с континуумом признаков является решение, определяемое формулами (10.18) и (10.21). В любом случае описанный подход сводится к нахождению  $K_n(i, j)$  и  $K_n$  из уравнения (10.17) с учетом каких-либо дополнительных ограничений. Аналогично случаю континуума нейронов здесь можно усреднять вычисленные значения  $K_n$  и  $K_n(i, j)$  по  $m_n$  точкам пространства функций.

Также, как и в предыдущем пункте, возникает вопрос оптимального выбора  $\epsilon_0$ .

### 10.5. Особенности алгоритма настройки континуальной двухслойной нейронной сети

Особенности алгоритма настройки описываемой нейронной сети связаны с заменой структурной матрицы коэффициентов  $K^*$  на матрицу функций  $K^*(i)$  при переходе к континууму нейронов в первом слое и на функции двух переменных  $K(i, j)$  при переходе от нейрона с конечным числом признаков к нейрону с континуумом признаков во втором слое. Алгоритм выбора  $K^*(i)$  связан с решением системы  $(L+1)$ -уравнений (если  $K^*(i)$  – диагональная матрица функций) относительно функций параметра  $i$  в то время, как в случае конечного числа гиперплоскостей необходимо найти диагональную матрицу коэффициентов для каждой гиперплоскости, т.е. решить  $H$  систем из  $(L+1)$ -го уравнения, где  $H$  – число нейронов в слое.

Алгоритм выбора  $K(i, j)$  состоит в решении интегрального уравнения относительно  $K(i, j)$  и коэффициента  $K_n$ . На рис. 10.1 и 10.2 представлены разомкнутая структура континуальной нейронной сети и структурная схема алгоритма ее обучения.



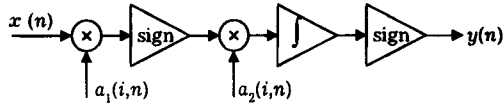


Рис. 10.1. Разомкнутая структура континуальной двухслойной нейронной сети

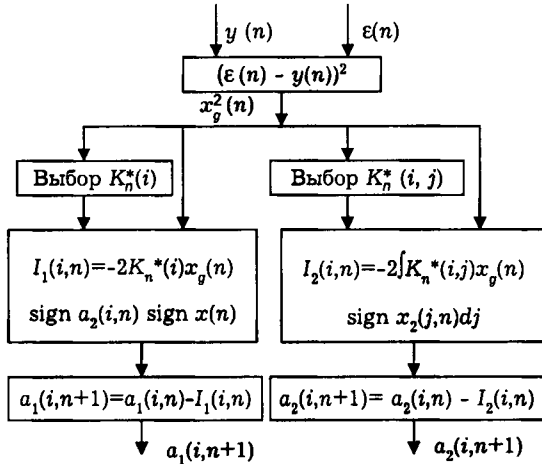


Рис.10.2 Структурная схема алгоритма обучения двухслойной континуальной нейронной сети (n+1-й шаг)

**10.6. Три варианта реализации весовых функций континуального слоя нейронов и соответствующие им процедуры обучения**

В данном параграфе рассматривается разомкнутая структура континуального слоя нейронов и процедуры настройки слоя в зависимости от выбора способа реализации весовых функций слоя.

Разомкнутая структура континуального слоя нейронов описывается формулой

$$x_2(i) = \text{sign} \sum_{l=1}^L a_l(i) x_l + a_0(i), \quad (10.22)$$

где  $x_2(i)$  – выходной сигнал слоя;  $x_l$  – вектор входных сигналов (в частности вектор табличных признаков);  $a(i)$  – вектор весовых функций континуального слоя из класса кусочно-дифференцируемых функций с разрывами первого рода и конечным числом нулей ( $l=1 \dots L$ ).

Из (10.22) следует, что  $x_2(i)$  – функция, имеющая вид (рис.10.3), представляет собой последовательность прямоугольников разной длительности и единичной амплитуды. Стоящая под знаком сигнума функция

$$f(i) = \sum_{l=1}^L a_l(i) x_l + a_0(i)$$

может иметь сложную форму. Тем не менее вид функции  $x_2(i)$  определяется лишь числом и положением нулей функции  $f(i)$  и не зависит от ее поведения на интервалах знакопостоянства, т.е. между нулями. Следовательно, весовые функции  $a(i)$  можно аппроксимировать достаточно грубо, например, кусочно-постоянной функцией (рис.10.4) с конечным числом ступенек или, более точно, кусочно-линейной функцией вида (рис.10.5).

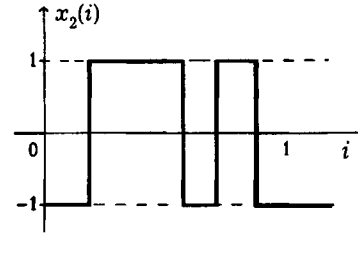


Рис.10.3. Выходной сигнал континуального слоя нейронов

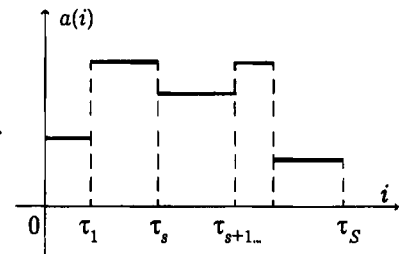


Рис.10.4. Кусочно-постоянная аппроксимация весовой функции континуального слоя нейронов

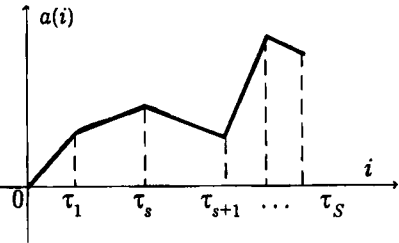


Рис. 10.5. Кусочно-линейная аппроксимация весовой функции континуального слоя нейронов

Таким образом весовые функции могут быть описаны конечным и достаточно малым числом параметров.

Процедура настройки организуется следующим образом. Интервал аппроксимации весовых функций разбивается на S отрезков. Строим кусочно-постоянные весовые функции (каждый

дая задана  $S$  коэффициентами) или кусочно-линейные функции (каждая задана  $2S$  коэффициентами). Производим настройку коэффициентов, задающих весовые функции, используя градиентный метод.

В качестве критерия качества нейронной сети используем величину вероятности правильного распознавания, которую вычисляем, используя тестовую выборку векторов. Если при заданном числе шагов процедуры обучения вероятность правильного распознавания ниже заданной величины, удваиваем число  $S$  отрезков разбиения и снова производим настройку коэффициентов.

Таким образом находим достаточное с точки зрения заданного критерия распознавания число отрезков аппроксимации и величины весовых функций на этих отрезках. При этом достигается решение следующей важной задачи. Слой, состоящий из большого числа нейронов заменен непрерывным слоем нейронов, т.е.  $N$  весовых коэффициентов (по каждому признаку) заменены кривой весовой функции. Эта весовая функция аппроксимируется с достаточной для распознавания степенью точности кусочно-постоянной или кусочно-линейной функцией, описываемой достаточно малым, по крайней мере значительно меньшим, чем в случае дискретного слоя нейронов, числом параметров (рис. 10.6). Здесь веса нейронов расположены вдоль некоторой кривой, которая аппроксимируется кусочно-постоянной функцией.

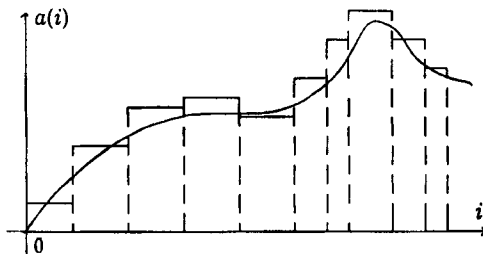


Рис.10.6. Весовая функция непрерывного слоя нейронов

С точки зрения минимизации числа отрезков аппроксимации весовых функций необходимо достигнуть максимально возможной степени их монотонности, т.е. минимума числа «колебаний» (перемен знака производной) на интервале аппроксимации путем перенумерации (ранжировки) нейронов слоя.

### 10.7. Алгоритм обучения двухслойной непрерывной нейронной сети с функционалом вторичной оптимизации $\alpha_{2g}$ (в пространстве пяти признаков)

Структура рассматриваемой нейронной сети описывается следующим выражением:

$$y = \text{sign} \left[ \int a_2(i) \text{sign} \sum_{l=1}^5 a_{1l}(i) x_{1l} + a_{10}(i) di \right]. \quad (10.23)$$

Рассмотрим случай функционала вторичной оптимизации  $\alpha_{2g}$ . Квадрат модуля дискретной ошибки:

$$\left| \overline{x_g(i, n)}^{m_n} \right|^2 = \left| \overline{\varepsilon(n)}^{m_n} - \overline{\text{sign } g(n)}^{m_n} \right|^2, \quad (10.24)$$

где  $g(n) = \int a_2(i, n) \text{sign} \left( \sum_{l=1}^5 a_{1l}(i, n) x_{1l}(n) + a_{10}(i, n) \right) di$ .

#### 10.7.1 Алгоритм обучения второго слоя (нейрон с континуумом признаков)

Вычислим производную  $\frac{\partial |\overline{x_g(i, n)}^{m_n}|^2}{\partial a_2(i, n)}$

$$\frac{\partial |\overline{x_g(i, n)}^{m_n}|^2}{\partial a_2(i, n)} = -2 \overline{x_g(n)}^{m_n} \frac{\partial (\text{sign } g(n))^{m_n}}{\partial a_2(i, n)}.$$

Обозначим

$$\text{sign} \left( \sum_{l=1}^5 a_{1l}(i, n) x_{1l}(n) + a_{10}(i, n) \right) = x_2(i, n). \quad (10.25)$$

Тогда  $\frac{\partial (\text{sign } g(n))}{\partial a_2(i, n)} = \frac{\partial (\text{sign} \int a_2(i, n) x_2(i, n) di)}{\partial a_2(i, n)}$ .

В данном случае величину первой производной определить нельзя и необходимо использовать информацию об ее знаке:

$$\text{sign} \left[ \frac{\partial (\text{sign } g(n))}{\partial a_2(i, n)} \right] = \text{sign} \left[ \frac{2}{\pi} \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{B x_2(i, n)}{1 + B^2 g^2(n)} \right] = \text{sign } x_2(i, n),$$

так как  $\frac{\partial \left( \int a_2(i, n) x_2(i, n) di \right)}{\partial a_2(i, n)} = x_2(i, n)$ .

(Здесь, как и далее везде, кроме окончательных результатов, знак усреднения по  $m_n$  опущен). С учетом этого, получаем

$$\frac{\partial (x_g(n))^2}{\partial a_2(i, n)} = -2 x_g(n) \text{sign } x_2(i, n). \quad (10.26)$$

Подставляя (10.26) в (10.3), получаем выражение для рекуррентной процедуры настройки весовой функции нейрона второго слоя:

$$a(i, n+1) = a(i, n) + 2 \int \overline{K(i, j) x_g(j, n) \text{sign } x_2(j, n)^{m_n}} dj, \quad (10.27)$$

где  $x_g(n)$  определяется из (10.24),  $x_2(j, n)$  - из (10.25).

### 10.7.2 Алгоритм обучения первого слоя (континуальный слой нейронов)

Вычислим производную  $\frac{\partial (x_g(n))^2}{\partial a_{11}(i, n)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (x_g(i, n))^2}{\partial a_{11}(i, n)} &= -2 x_g(n) \frac{\partial (\text{sign } g(i, n))}{\partial a_{11}(i, n)}; \\ \frac{\partial (\text{sign } g(n))}{\partial a_{11}(i, n)} &= \frac{\partial (\text{sign } g(i, n))}{\partial x_2(i, n)} \frac{\partial (x_2(i, n))}{\partial a_{11}(i, n)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{sign} \left[ \frac{\partial (\text{sign } g(n))}{\partial a_{11}(i, n)} \right] &= \text{sign } a_2(i, n) \text{sign } x_{11}(n). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial (x_g(n))^2}{\partial a_{11}(i, n)} = -2 x_g(n) \text{sign } a_2(i, n) \text{sign } x_{11}(n). \quad (10.28)$$

Получаем выражение для рекуррентной процедуры настройки весовой вектор-функции первого слоя:

$$\begin{aligned} a(i, n+1) &= a(i, n) + 2K^*(i) x_g(n) \text{sign } x_g(n) \times \\ &\times \text{sign } a_2(i, n) \text{sign } x(n)^{m_n}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Здесь  $K^*(i) - [L^0 \times L^0]$  - матрица функций параметра  $i$ , где  $L^0$  - размерность вектора признаков  $x(n)$ .

## 10.8. Континуальный слой нейронов с кусочно-постоянными весовыми функциями

### 10.8.1 Разомкнутая структура слоя

Отрезок, на котором генерируется весовая функция, разбивается на равные отрезки длины  $t$ . Разбиение фиксировано, а амплитуда прямоугольников  $a_s$  ( $s$  - номер отрезка разбиения) изменяется в процессе обучения (рис. 10.7)

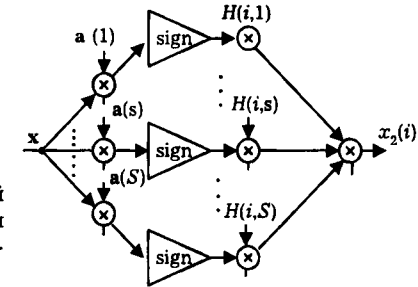


Рис. 10.7. Схема разомкнутой структуры континуального слоя нейронной сети с кусочно-постоянными весовыми функциями

Используя функции

$$h(i) = \begin{cases} 1, & i > 0 \\ 0, & i < 0 \end{cases}$$

представим  $a(i)$  в следующем виде:

$$a(i) = \sum_{s=1}^S a_s (h(i-(s-1)t) - h(i-st)).$$

Введем обозначение

$$H(i, s) = h(i-(s-1)t) - h(i-st).$$

Тогда

$$a(i) = \sum_{s=1}^S a_s H(i, s). \quad (10.30)$$

Континуум нейронов описывается выражением

$$x(i) = \text{sign} \left( \sum_{l=1}^L a_l(i) x_l + a_0(i) \right). \quad (10.31)$$

В (10.31)

$$a_l(i) = \sum_{s=1}^S a_{ls} H(i, s).$$

Тогда

$$x(i) = \text{sign} \left[ \sum_{s=1}^S H(i, s) \left( \sum_{l=1}^L a_{ls}(i) x_l + a_{0s}(i) \right) \right]. \quad (10.32)$$

Используя определение функции  $H(i, s)$ , получаем

$$x(i) = \sum_{s=1}^S H(i, s) \operatorname{sign} \left( \sum_{l=1}^L a_{ls} x_l + a_{0s} \right). \quad (10.32a)$$

Из (10.32) следует, что данная структура представляет собой слой нейронов вида

$$x^{(s)} = \operatorname{sign} \left( \sum_{l=1}^L a_{ls} x_l + a_{0s} \right); (s-1)\tau \leq i \leq s\tau, \quad (10.33)$$

причем выходы нейронов в течение равных отрезков времени  $i$  по очереди подключаются ко входу следующего слоя нейронов. Функция  $H(i, s)$  играет роль коммутатора (переключателя) выходов слоя нейронов. Структура, соответствующая (10.33), изображена на рис.10.7.

### 10.8.2 Рекуррентная процедура настройки кусочно- постоянных весовых функций

Рекуррентная процедура настройки континуального слоя нейронов в случае двухслойной нейронной сети имеет следующий вид:

$$a(i, n+1) = a(i, n) + 2 K^*(i) x_y(n) \operatorname{sign} a_2(i, n) \operatorname{sign} x_1(n)^{m_n}. \quad (10.34)$$

Рассмотрим частный случай процедуры обучения, когда матрица функций  $K^*(i)$  является диагональной.

Пусть весовая функция нейрона второго слоя кусочно- постоянна. Тогда на каждом  $s$ -м отрезке имеем

$$a_2(i, n) = a_{2s}(n) = \operatorname{const}. \quad (10.34a)$$

Так как

$$a_1(i) = \sum_{s=1}^S a_s H(i, s), \quad (10.35)$$

$$K^*(i) = \sum_{s=1}^S K_s H(i, s), \quad (10.36)$$

где  $K_s$  - диагональная числовая матрица на  $s$ -м отрезке. Тогда для  $s$ -го отрезка аппроксимации процедура настройки будет иметь вид

$$a_s(n+1) = a_s(n) + 2 K_s(n) x_y(n) \operatorname{sign} a_{2s}(n) \operatorname{sign} x_1(n)^{m_n}. \quad (10.37)$$

### 10.8.3 К вопросу об оценке матрицы $K^*(i)$

Выше получено выражение для компонент диагонали матрицы  $K^*(i)$  в случае двухслойной континуальной нейронной сети:

$$K^*(i) = -(R_{n+1}(i) - R_n(i)) A_{YX}^{-1}. \quad (10.38)$$

Здесь  $A_{YX}^{-1} = C_{YX} \operatorname{sign} a_2(i)$ , где  $C_{YX}$  - численная матрица (не зависит от  $i$ );  $a_2(i)$  в данном случае кусочно- постоянная весовая функция нейрона второго слоя, т.е. постоянная на  $s$ -м отрезке.

С учетом (10.35)

$$\begin{cases} R(n) = \sum_{s=1}^S R_s(n) H(i, s), \\ R(n+1) = \sum_{s=1}^S R_s(n+1) H(i, s). \end{cases} \quad (10.39)$$

Из (10.36) и (10.39) следует, что на  $s$ -м отрезке

$$K_s(n) = -(R_s(n+1) - R_s(n)) A_{YX}^{-1}. \quad (10.40)$$

### 10.9. Континуальный слой нейронов с кусочно- линейными весовыми функциями

#### 10.9.1 Разомкнутая структура слоя нейронов

Рассмотрим континуальный слой нейронов с весовыми функциями вида, представленного на рис.10.8:

$$a_l(i) = \sum_{s=1}^S (a_{s,1,l} i + a_{s,0,l}) H(i, s). \quad (10.41)$$

В этом случае выходной сигнал слоя имеет следующий вид:

$$x(i) = \operatorname{sign} \left[ \sum_{l=1}^L \sum_{s=1}^S (a_{s,1,l} i + a_{s,0,l}) H(i, s) x_l + \sum_{s=1}^S (a_{s,1,0} i + a_{s,0,0}) H(i, s) \right].$$

Отсюда

$$x(i) = \sum_{s=1}^S H(i, s) \operatorname{sign} \left[ \sum_{l=1}^L (a_{s,1,l} i + a_{s,0,l}) x_l + (a_{s,1,0} i + a_{s,0,0}) \right]. \quad (10.42)$$

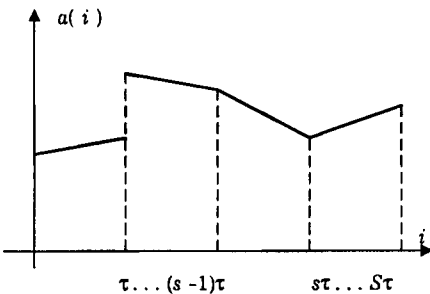


Рис. 10.8. Весовые функции с кусочно-линейной аппроксимацией для континуальной нейронной сети

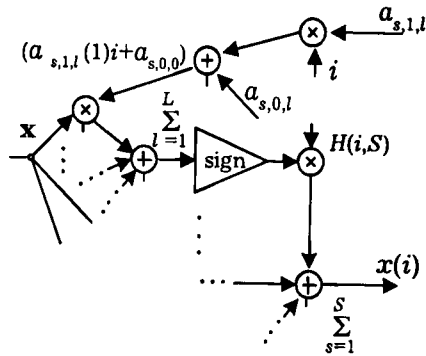


Рис. 10.9. Схема разомкнутой структуры континуального слоя нейронной сети с кусочно-линейными весовыми функциями ( $s$ -й канал)

Структуру (10.42) можно рассматривать как слой из  $S$  пороговых элементов, весовые коэффициенты которых линейно зависят от  $i$ , причем при изменении  $i$  выходы нейронов поочередно подключаются ко входу следующего слоя функциями  $H(i, s)$ . Структура слоя изображена на рис.10.9. (Для простоты показан лишь один канал преобразования, соответствующий  $s$ -му отрезку изменения параметра  $i$ ).

### 10.9.2. Рекуррентная процедура настройки кусочно-линейных весовых функций

Рассуждая как в предыдущем пункте, приходим к выводу, что матрица  $K^*(i)$  имеет в данном случае следующий вид (при условии, что весовая функция нейронов второго слоя кусочно-постоянна):

$$K^*(i) = \sum_{s=1}^S (K_{1s} i + K_{0s}) H(i, s). \quad (10.43)$$

Следовательно, процедура обучения слоя на  $s$ -м отрезке имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{1s}(n+1) &= a_{1s}(n) + 2 K_{1s}(n) x_g(n) \text{sign } a_{2s}(n) \text{sign } x_1(n)^{m_n}, \\ a_{0s}(n+1) &= a_{0s}(n) + 2 K_{0s}(n) x_g(n) \text{sign } a_{2s}(n) \text{sign } x_1(n)^{m_n}. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Здесь подразумевается, что

$$a(i) = \sum_{s=1}^S (a_{1s} i + a_{0s}) H(i, s).$$

Выражение (10.44) имеет место лишь для указанного выше

ограничения на весовую функцию нейрона второго слоя. В общем случае процедура обучения имеет вид

$$\begin{aligned} a_{1s}(n+1) i + a_{0s}(n+1) &= a_{1s}(n) i + a_{0s}(n) + \\ &+ 2 K_{1s}^*(n, i) x_g(n) \text{sign } x_1(n) F_s(i, n)^{m_n}, \end{aligned} \quad (10.45)$$

где функция  $F_s(i, n)$  зависит от выходных сигналов слоев нейронов, следующих за рассматриваемым. Отсюда, обозначив линейную функцию

$$f_s(n, i) = 2 K_{1s}^*(n, i) x_g(n) \text{sign } x_1(n) F_s(i, n)^{m_n},$$

получаем для  $S$ -го отрезка

$$\begin{cases} a_{1s}(n+1) = a_{1s}(n) + \frac{d}{di}(f_s(n, i)), \\ a_{0s}(n+1) = a_{0s}(n) + f_s(n, i) - \frac{d}{di}(f_s(n, i)). \end{cases} \quad (10.46)$$

Выражения (10.45), (10.46) – общие алгоритмы настройки кусочно-линейных функций континуального слоя нейронов.

Вид матрицы (10.43) следует из выражения (10.38) при ограничениях вида (10.34a) на весовую функцию нейрона второго слоя, определения векторов-функций  $R_{n+1}(i)$ ,  $R_n(i)$  и условия линейности весовых функций на  $s$ -м отрезке.

Действительно, из условия линейности весовых функций на  $s$ -м отрезке и определения  $R_{n+1}(i)$ ,  $R_n(i)$  следует

$$\begin{aligned} R_s(n, i) &= R_{1s}(n) i + R_{0s}(n) \\ R_s(n+1, i) &= R_{1s}(n+1) i + R_{0s}(n+1). \end{aligned} \quad (10.47)$$

Из (10.38) и (10.47) следует (10.43).

## 10.10. Континуальный слой нейронной сети с кусочно-постоянными весовыми функциями (случай фиксированных величин «ступенек»)

### 10.10.1 Разомкнутая структура слоя

Пусть весовые коэффициенты слоя нейронов имеют вид рис.10.4 при условии, что точки разбиения  $\tau_s$  не фиксированы (т.е. меняются длины отрезков разбиения). Пусть при этом амплитуды

литуды прямоугольников фиксированы и имеют величины  $U_{sl} \cdot \Delta a$ , где  $U_{sl}$  — целое число;  $\Delta a$  — постоянная величина. При этом  $l$ -я весовая функция слоя запишется следующим образом:

$$a_l(i) = \sum_{s=1}^S U_{sl} \Delta a H(i, s), \quad (10.48)$$

где

$$H(i, s) = h(i - \tau_{s-1}) - h(i - \tau_s).$$

Выходной сигнал слоя

$$x(i) = \text{sign} \left[ \Delta a \left( \sum_{l=1}^L \sum_{s=1}^S U_{sl} H(i, s) x_l + \sum_{s=1}^S U_{s0} H(i, s) \right) \right].$$

Отсюда

$$x(i) = \sum_{s=1}^S H(i, s) \text{sign} \left[ \Delta a \left( \sum_{l=1}^L U_{sl} x_l + U_{s0} \right) \right]. \quad (10.49)$$

Структура (10.49) аналогична структуре (10.32a) при условии, что временные интервалы  $\tau_s$ , в течение которых соответствующие нейроны подключены ко входу следующего слоя, являются переменными, и, кроме того, амплитуды весов на  $i$ -м отрезке фиксированы. Таким образом имеем  $s$ -мерный вектор изменяемых параметров  $\tau_s$ .

#### 10.10.2. Рекуррентная процедура настройки кусочно-постоянных весовых функций с изменяемыми длинами отрезков $t_s$

Рекуррентная процедура настройки вектора  $\tau$  имеет следующий вид

$$\tau(n+1) = \tau(n) - K^* \frac{\partial Y(n)}{\partial \tau} \Big|_{\tau = \tau(n)}, \quad (10.50)$$

где  $Y(n)$  — функционал вторичной оптимизации. Если

$$Y(n) = (\varepsilon(n) - y(n))^2 = x_g^2,$$

где  $y(n)$  — выходной сигнал нейронной сети;  $\varepsilon(n)$  — указание усилителя, то

$$y(n) = F[x(i)],$$

где  $x(i)$  — выходной сигнал рассматриваемого слоя,  $F$  — преобразование, осуществляемое последующими слоями нейронной сети над  $x(i)$ :

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau_s} = -2 x_g \frac{\partial y}{\partial x(i)} \frac{\partial x(i)}{\partial \tau_s}.$$

С учетом вида  $x(i)$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \tau_s} &= -2 x_g \frac{\partial F}{\partial x(i)} \frac{\partial x(i)}{\partial H(i, s)} \frac{\partial H(i, s)}{\partial \tau_s}, \\ \frac{\partial x(i)}{\partial H(i, s)} &= \text{sign} \left[ \Delta a \left( \sum_{l=1}^L U_{sl} x_l + U_{s0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Из определения функции  $H(i, s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(i, s)}{\partial \tau_s} &= \frac{\partial}{\partial \tau_s} [h(t - \tau_{s-1}) - h(t - \tau_s)] \Rightarrow \frac{\partial H(i, s)}{\partial \tau_s} = -\frac{\partial h(t - \tau_s)}{\partial \tau_s} \\ &\Rightarrow \frac{\partial H(i, s)}{\partial \tau_s} = -\frac{\partial(\text{sign}(t - \tau_s))}{\partial(t - \tau_s)} \frac{\partial(t - \tau_s)}{\partial \tau_s}; \\ \frac{\partial(t - \tau_s)}{\partial \tau_s} &= -1; \\ \frac{\partial H(i, s)}{\partial \tau_s} &= \delta(i - \tau_s). \end{aligned}$$

Необходимо использовать информацию о знаке производной  $\frac{\partial H(i, s)}{\partial \tau_s}$ :

$$\text{sign} \left( \frac{\partial H(i, s)}{\partial \tau_s} \right) = 1 \text{ при } i \geq \tau_s.$$

Окончательно

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau_s} = -2 x_g \frac{\partial F}{\partial x(i)} \text{sign} \left[ \Delta a \left( \sum_{l=1}^L U_{sl} x_l + U_{s0} \right) \right]. \quad (10.52)$$

#### Литература

- 10.1. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. — М., Энергия, 1974.
- 10.2. Галушкин А.И. Континуальные модели многослойных систем распознавания образов. // Автоматика и вычислительная техника. — №2 — 1977.
- 10.3. Галушкин А.И. Континуальные нейронные сети. // «Нейрокомпьютер» — №2 — 1992, с.9–14.

## Глава 11. Выбор начальных условий при настройке нейронных сетей. Типовые входные сигналы многослойных нейронных сетей

### 11.1. О методах выбора начальных условий

Однородная нейронная сеть, настраиваемая на решение конкретной задачи, является динамической системой, поведение которой описывается разностным или дифференциальным (линейным или нелинейным) уравнением. Именно поэтому задача выбора начальных условий для настройки системы (или, иначе, для решения дифференциального или разностного уравнения) и, как следствие, для решения конкретной задачи является важным разделом теории нейронных сетей. Качество выбора начальных условий в некоторых случаях в значительной степени определяет качество решения задачи. Этот вопрос практически всегда опускается в известных алгоритмах настройки или его решение считается тривиальным.

Данного вопроса, пожалуй, касался лишь Розенблатт Ф. в своем основополагающем труде [1]. Однако во всех экспериментах он полагал начальные значения коэффициентов равными нулю. Это не гарантирует того, что система окажется в глобальном экстремуме или в локальном с достаточным экстремальным значением функционала оптимизации.

Важность выбора начальных условий обнаруживается в задачах с многоэкстремальными функционалами оптимизации. Очевидно, что в этих задачах можно подобрать такие начальные условия, при которых в процессе настройки нейронная сеть не достигнет требуемого качества решения задачи, т.е. мы не найдем глобального или «хорошего» (в смысле качества решения задачи) локального экстремума функционала [2].

Можно рассматривать два метода выбора указанных начальных условий: выбор случайных начальных условий и выбор детерминированных начальных условий. Случайный выбор начальных условий производится ввиду многоэкстремальности функционала вторичной оптимизации, связанной с многомодальностью распределений  $f(\mathbf{x})$  входного сигнала и ограниченностью структуры разомкнутой нейронной сети. Случайные элементы в процедуру поиска экстремума функционала вторичной оптимизации вводятся в связи с необходимостью поиска локальных и глобального экстре-

мумов указанного функционала. Необходимость поиска локальных экстремумов обусловлена необходимостью решения задачи минимизации структуры многослойной нейронной сети при анализе результатов настройки. На первом этапе использования случайных начальных условий (и следующего за ним этапа усреднения результатов настройки по множеству этапов выброса случайных начальных условий) создается впечатление о большом числе локальных экстремумов функционала вторичной оптимизации в пространстве настраиваемых коэффициентов. Однако в связи с этим необходимо отметить, что при усложнении структуры разомкнутой нейронной сети увеличивается множественность состояний многослойной нейронной сети, оцениваемая по величине функционала вторичной оптимизации. Иначе говоря, большинство локальных экстремумов функционала в пространстве настраиваемых коэффициентов обеспечивают одно и то же качество распознавания. Это замечание необходимо связывать с описываемыми ниже методами оценки качества многослойных нейронных сетей по оценке значения функционала вторичной оптимизации по текущим сигналам в нейронной сети. С учетом вышесказанного и результатов данной главы, полученных экспериментально, можно отметить правомерность подхода к настройке с использованием случайных начальных условий, хотя этот подход, очевидно, вводит избыточность во времени настройки нейронной сети с целью полного изучения входного сигнала (в частности, нахождения глобального экстремума функционала).

Целью введения детерминированных начальных условий является априорное введение нейронной сети в область одного из локальных экстремумов функционала вторичной оптимизации в пространстве настраиваемых коэффициентов. На уровне геометрии первого, второго слоя и т.д. многослойная нейронная сеть должна быть максимально аморфна, рассредоточена, т.е. подготовлена к решению наиболее сложной (с точки зрения модальности  $f(\mathbf{x})$ ) задачи распознавания. Мыслимая конфигурация разделяющей поверхности в этом случае при обучении распознаванию двух классов образов представлена на рис. 11.1, хотя это предварительный вариант. Окончательный вариант может быть опреде-

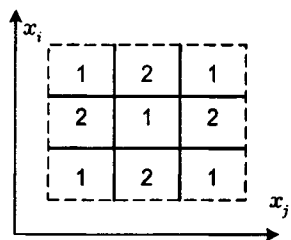


Рис. 11.1. Разделяющая поверхность при выборе начальных условий: 1 – первый класс; 2 – второй класс

лен только при введении критерия аморфности, рассредоточенности. Очевидно, что минимально аморфной и рассредоточенной является многослойная нейронная сеть, в которой все коэффициенты нейронов первого слоя одинаковы и соответствующие разделяющие поверхности смещены к «краю» пространства признаков. На рис. 11.1 пунктиром обозначена физически реализуемая в нейронной сети область пространства признаков. Это распространяется и на режим самообучения, если не указывалась заранее принадлежность клеток рис. 11.1 к тому или иному классу. Начальные условия на настраиваемые коэффициенты второго слоя и т.д. рассчитываются по геометрии разделяющей поверхности, реализуемой нейронами первого слоя с указанием принадлежности областей исходного пространства признаков к тому или иному классу.

Начальные условия выбираются исходя из априорной информации о входных распределениях при уже известной структуре разомкнутой нейронной сети и выбранном функционале оптимизации. Выбор начальных условий связан не только с выбором вектора  $a(0)$ , но и с выбором метода определения элементов параметрической матрицы  $K$  на каждом шаге. Эта формальная связь обусловлена тем, что вторая задача решается на этапе выбора начальных условий и обе они входят в задачу выбора параметров итерационной процедуры. Методы, используемые при выборе начальных условий, можно упорядочить по виду используемой информации:

- выбор случайных начальных условий без использования обучающей выборки;
- выбор детерминированных начальных условий без использования обучающей выборки;
- выбор начальных условий с использованием выборки.

## 11.2. Алгоритм детерминированного выбора начальных условий в алгоритмах настройки многослойных нейронных сетей

В данном параграфе предлагается алгоритм, с помощью которого выбираются начальные условия для слоя многослойной нейронной сети. В этом алгоритме используется априорная информация о взаиморасположении мод в пространстве признаков, их числе и дисперсиях мод.

Пусть пространство признаков отнормировано в единичный гиперкуб

$$K = \{ \mathbf{x}: 0 \leq x_i \leq 1, \quad i=1, \dots, N \}, \quad \mathbf{x}_j \in K, \quad (j=1, \dots, M), \quad (11.1)$$

где  $\mathbf{x}_j$  – вектор признаков  $j$ -го образа обучающей выборки;  $N$  – размерность пространства;  $M$  – длина обучающей выборки. Без потери общности рассмотрим случай двух классов с  $K_1$  и  $K_2$  модами, соответственно в первом и втором классе. Обозначим их

$$\mathbf{r}_{1i} \quad (i = 1, \dots, K_1), \quad \mathbf{r}_{2i} \quad (i = 1, \dots, K_2).$$

Организуем теперь для проекций мод на каждую координатную ось монотонные последовательности:

$$0 \leq r_{s_1 i_1}^j \leq r_{s_2 i_2}^j \leq \dots \leq 1, \quad (s_{1,2}=1,2; \quad j = 1, \dots, N), \quad (11.2)$$

где  $i_{1,2}$  – номера мод первого и второго классов.

Рассмотрим разности вида

$$|r_{1i_1}^j - r_{2i_2}^j|, \quad j=1, \dots, N. \quad (11.3)$$

Пусть  $\sigma_{ij}$  – есть оценка дисперсии  $j$ -й моды  $i$ -го класса, тогда при выполнении условия

$$|r_{1i_1}^j - r_{2i_2}^j| < (\sigma_{1i_1}^j + \sigma_{2i_2}^j) \quad j=1, \dots, N \quad (11.4)$$

гиперплоскость проводится через середину отрезка

$$[r_{1i_1}^j, r_{2i_2}^j] \quad (11.5)$$

перпендикулярно  $j$ -й координатной оси. Если проведенная гиперплоскость разделяет и проекции других мод, то она проводится через точку, полученную усреднением средин соответствующих отрезков вида (11.5), концы которых она



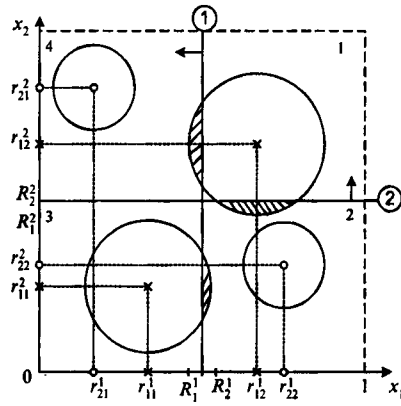


Рис. 11.2. Пример использования алгоритма детерминированного выбора начальных условий

разделяет. Если условие (11.4) не выполняется для данной пары мод, то гиперплоскость не проводится.

Для наглядности рассмотрим пример на рис.11.2. Взаиморасположение мод имеет вид:

$$0 < r_{21}^1 < r_{11}^1 < r_{12}^1 < r_{22}^1 < 1,$$

$$0 < r_{11}^2 < r_{22}^2 < r_{12}^2 < r_{21}^2 < 1.$$

Проверяем выполнение условий (11.4) для  $x_1$ . В результате проводим гиперплоскость 1 через середину отрезка  $[R_1^1, R_2^1]$ , где

$$R_1^1 = \frac{r_{12}^1 - r_{21}^1}{2}, \quad R_2^1 = \frac{r_{22}^1 - r_{11}^1}{2}.$$

Аналогично, проверяя для  $x_2$ , проводим гиперплоскость 2 через середину отрезка  $[R_1^2, R_2^2]$ , где:

$$R_1^2 = \frac{r_{21}^2 - r_{11}^2}{2}, \quad R_2^2 = \frac{r_{12}^2 - r_{22}^2}{2}.$$

С ошибкой, определяемой заштрихованными областями, можно отнести первый и третий отсеки к первому классу, второй и четвертый ко второму классу.

Блок-схема программы, реализующей данный алгоритм, и описание параметров даны на рис. 11.3 и в табл. 11.1.

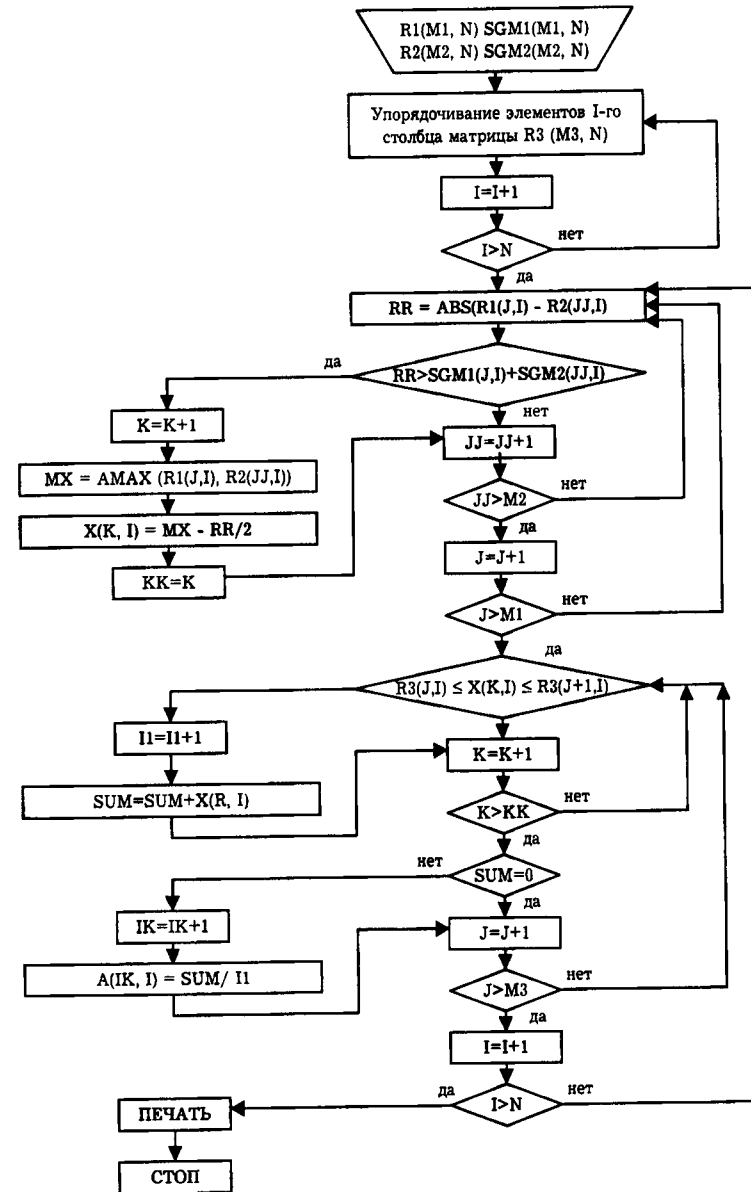


Рис. 11.3. Блок-схема программы, реализующей алгоритм детерминированного выбора начальных условий

Таблица 11.1

R1	матрица оценок координат центров мод 1-го класса
R2	матрица оценок координат центров мод 2-го класса (проекции центров мод на $i$ -ю координатную ось расположены в $i$ -м столбце)
SGM1	матрица проекций оценок дисперсий мод 1-го класса
SGM2	матрица проекций оценок дисперсий мод 2-го класса
M1	число мод 1-го класса
M2	число мод 2-го класса
N	размерность пространства признаков
R3	матрица, получающаяся объединением матриц R1 и R2 по столбцам ( $M3 = M1 + M2$ )
X	матрица точек на координатных осях, через которые проводятся гиперплоскости
K	номер точки на данной координатной оси
I	номер координатной оси
A	матрица коэффициентов проводимых гиперплоскостей
IK	номер гиперплоскости

### 11.3. Выбор начальных условий в многослойных нейронных сетях

Задача выбора начальных условий в многослойных нейронных сетях разбивается на поэтапный выбор начальных условий для первого, второго и т.д. слоев. Методы определения начальных условий на нейронах первого слоя были рассмотрены выше. Пусть, например, в результате детерминированного выбора определены коэффициенты нейронов первого слоя, тем самым получен набор отсеков, каждому из которых соответствует номер, состоящий из чисел +1 и -1 (их число определяется числом нейронов). При предположении, что такой выбор обеспечивает положение разделяющей поверхности, близкое к оптимальному (даже за счет избыточности структуры первого слоя, которая может быть устранена в процессе обучения многослойной нейронной сети), т.е. при предположении о малости ошибки распознавания, получаемой при этом положении, вероятность изменения конфигурации отсеков будет мала. Оценки этой вероятности даны ниже. С этой вероятностью будут сохраняться обучающие последовательности для второго и т.д. слоев. Если выбрать коэффициенты нейронов этих слоев

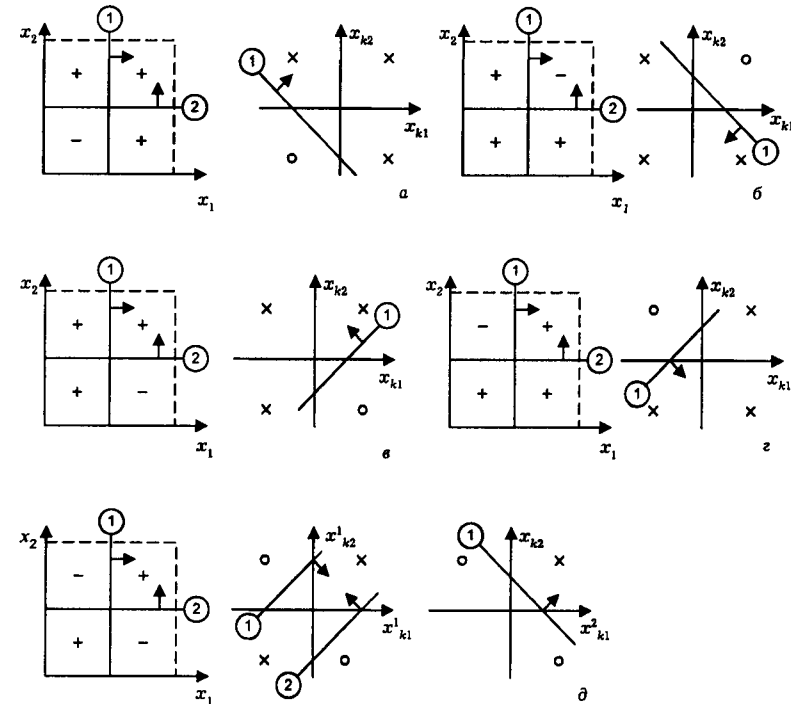


Рис. 11.4. Пример зависимости коэффициентов нейронов второго и третьего слоя от распределения номеров классов по отсекам

так, чтобы они правильно производили разделение в пространстве выходов предыдущего слоя, то в процессе обучения многослойной нейронной сети эти коэффициенты могут оставаться фиксированными. На рис. 11.4 показана зависимость коэффициентов нейронов второго и третьего слоев от распределения номеров классов по отсекам при одинаковой конфигурации. Заведомо опущены случаи линейно разделимых классов и случаи, получающиеся из данных заменой «+» на «-». В случаях  $a - z$  логическая функция реализуется на одном нейроне второго слоя, в случае  $d$  - реализуется трехслойная нейронная сеть.

Рассмотрим вопрос фиксации коэффициентов более подробно. Пусть в пространстве признаков реализуется некоторая кусочно-линейная поверхность. Для формирования обучающей выборки для второго слоя нужно поставить в соответствие каждому отсеку номер класса.

Это делаем следующим образом. Сначала получаем соответствие между каждым элементом обучающей выборки и номером отсека, а затем из всех образов, попавших в один отсек, выбираем максимальное число образов с одинаковым номером класса. Этот номер будет соответствовать данному отсеку. Далее следует выбрать оптимальные коэффициенты нейронов второго слоя. Методы, применявшиеся для первого слоя, оказываются малоприменимыми, так как это ведет к избыточности структуры последующих слоев, что может препятствовать физической реализуемости многослойной нейронной сети. Поскольку в большинстве задач диагностики кусочно-линейная поверхность не очень сложна, то для типовых конфигураций отсеков можно экспериментально получить таблицы соответствия коэффициентов нейронов второго слоя данной конфигурации. Хотя эта задача является сложной и трудоемкой, ее решение позволило бы свести выбор начальных условий в многослойной нейронной сети к детерминированному выбору начальных условий для первого слоя и фиксации по таблицам коэффициентов последующих слоев. Ниже приводится оценка вероятности сохранения конфигурации в пространстве признаков.

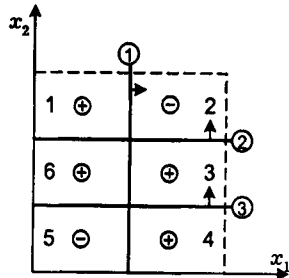
Рассмотрим детерминированный выбор начальных условий для многослойной нейронной сети с тремя нейронами в первом слое, показанный на рис. 11.5. Значения логической функции  $Y$  на отсеках, аргументами которой являются выходы нейронов первого слоя, при данной конфигурации даны в табл. 11.2, где  $y_i (i=1,2,3)$  – выходы нейронов первого слоя. Такая функция реализуется двумя нейронами второго слоя, например с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \{1, 1, 1, -2\}; \\ a_2^2 &= \{-1, -1, -1, 2\}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Таблица 11.2

№	1	2	3	4	5	6
$y_1$	-1	+1	+1	+1	-1	-1
$y_2$	+1	+1	-1	-1	-1	-1
$y_3$	+1	+1	+1	-1	-1	+1
$y$	+1	-1	+1	+1	-1	+1

Рис. 11.5. Пример детерминированного выбора начальных условий для многослойной нейронной сети с тремя нейронами в первом слое



В процессе дальнейшего обучения отсеки из табл. 11.2 могут исчезнуть, а также могут появиться новые, их число равно  $2^{H_1} - m$ , где  $H_1$  – количество нейронов в первом слое;  $m$  – число отсеков, полученных при выборе начальных условий. В нашем примере могут появиться отсеки (+1+1-1) и (-1+1-1). При фиксированных коэффициентах второго слоя (11.6) получаем, что оба новых отсека относятся к первому классу. Как видно из рис. 11.4 первый отсек увеличит ошибку распознавания, так как в него попадут элементы второго класса, а второй – нет. Увеличение ошибки классификации за счет фиксации коэффициентов слоев выше первого может произойти: во-первых, если новые отсеки (при наличии в них образов) будут отнесены к другому классу образов, во-вторых, если в старый отсек, который изменит при обучении составляющих его гиперплоскостей свою конфигурацию, попадет больше образов другого класса, чем было.

Рассмотрим отсек  $\epsilon^i = \{\epsilon_1^i, \dots, \epsilon_k^i\}$ ,  $\epsilon_j^i = \pm 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Пусть номеру отсека  $\epsilon^i$  соответствует первый класс (рассмотрим задачу 2 классов) и пусть в данный отсек при выборе начальных условий попали  $S_i$  элементов второго класса, тогда вероятность ошибочной классификации, даваемой поверхностью, образующей данный отсек, есть  $S_i/M_i$ , где  $M_i$  – число образов в отсеке  $\epsilon^i$ . Очевидно, что дальнейшему обучению по замкнутому циклу будут подлежать те гиперплоскости, изменения положения которых будет уменьшать вероятность ошибки  $S_i/M_i$ . Если  $p_i$  есть вероятность деформации отсека в процессе обучения, то можно определить ее как:

$$p_i = p(S_i/M_i). \quad (11.7)$$

Предположим, что зависимость вероятности деформации отсека от вероятности  $S_i/M_i$  линейна, т.е.:

$$p_i \approx \frac{S_i}{M_i} \quad (11.8)$$

и что образы равномерно распределены по отсеку с плотностью  $S_p^i$ , тогда:

$$p_i = \frac{S_p^i V_i}{M_i} \quad (11.9)$$

Очевидно, что  $p_i \rightarrow 0$  при  $V_i \rightarrow 0$ ,  $S_p^i = \text{const}$ , а также  $p_i \rightarrow 0$  при  $S_p^i \rightarrow 0$ ,  $V_i = \text{const}$ . Физически это означает, что вероят-

ность деформации отсека, который не дает вклад в ошибку распознавания, равна нулю и что при постоянной плотности распределения  $S_p$ , уменьшая объем отсека, мы уменьшаем число попавших в него элементов  $S_i$ , а следовательно и вероятность (11.9). При рассмотрении предела  $V_i \rightarrow V_0$  оказывается, что  $p_i \rightarrow 1/2$  (при предположении, что в выборке находятся по  $M/2$  элементов каждого класса). Усредняя величину (11.9) для всех  $m$  отсеков, имеем

$$p_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{M_i},$$

учитывая, что для любого  $p_i$ :  $S_i \leq \frac{M_i}{2}$  получаем оценку средней вероятности деформации отсеков данной конфигурации:

$$p_m \leq \frac{1}{2}.$$

В результате проведенных рассуждений видно, что на этапе выбора начальных условий для нейронов первого слоя можно оценить вероятность деформации имеющихся отсеков в процессе обучения, т.е. оценить правомерность использования фиксированных коэффициентов последующих слоев. Проведенная оценка опиралась на ряд упрощений, так как исследование увеличения ошибки распознавания в общем виде при фиксировании коэффициентов нейронов слоев выше первого представляется сложной.

С учетом рассмотренного выше можно изложить методику выбора начальных условий в многослойных нейронных сетях.

1. Проводится кусочно-линейная поверхность в пространстве признаков с помощью алгоритма детерминированного выбора начальных условий на нейронах первого слоя.

2. Находится соответствие между  $i$ -м образом обучающей выборки и номером отсека ( $\epsilon^j=1, \dots, m$ ) с помощью экзамена первого слоя на всей обучающей выборке.

3. Номеру отсека  $\epsilon^j$  ставится в соответствие указание учителя  $E_i (i=1, \dots, K)$ , где  $K$ -число классов образов. Для этого вычисляются числа  $Y_{ij} (i=1, \dots, p)$  - для каждого отсека ( $Y_{ij}$  - число образов  $i$ -го класса, попавших в  $j$ -й отсек;  $p$  - число классов, образы которых попали в  $j$ -й отсек) и находится  $\max Y_{ij}$ . Соответствующее  $E_i$  и будет искомым указанием учителя.

4. Вычисляется вероятность, с которой происходит отнесение  $j$ -го отсека к  $i$ -му классу образов:

$$P_j = 1 - \frac{S_j}{M_j},$$

где

$$S_j = M_j - \max_i Y_{ij}, \quad M_j = \sum_{i=1}^p Y_{ij}.$$

5. Проверяется реализация логической функции на одном нейроне второго слоя. Если функция реализуема, то обучением нейрона второго слоя кончается выбор начальных условий.

6. В противном случае выбираются начальные условия на нейронах второго слоя, либо аналогично п.1 (с тем отличием, что для любого отсека  $\epsilon^j$  должно быть  $S_j=0$ ), либо с помощью таблиц соответствия коэффициентов нейронов второго слоя конкретным конфигурациям отсеков. Выбранные таким образом коэффициенты фиксируются.

7. Аналогично поступаем с последующими слоями.

8. Формируются подвыборки для обучения нейронов первого слоя: для каждого отсека  $\epsilon^j$  проверяем поочередно, какие гиперплоскости из образующих отсек дают вклад в ошибку  $S_j$ . Сдвигаем каждую гиперплоскость на  $\pm r_j (r_j > r_j^0)$ , где  $r_j^0$  - среднее расстояние между ближайшими образами, попавшими в данный отсек, и контролируем изменение числа  $S_j$ . Найденные таким образом гиперплоскости будут подлежать дальнейшему обучению по замкнутому циклу. Подвыборка, по которой будет обучаться каждая гиперплоскость, формируется из образов, попавших в отсеки, прилегающие к ней.

Частичное обучение нейронов первого слоя позволит: во-первых, не обучать гиперплоскости, занимающие оптимальное положение, во-вторых, получить экономию во времени обучения.

После выполнения всех пунктов данной методики можно переходить к обучению многослойной нейронной сети, которое сведется к обучению нейронов первого слоя.

#### 11.4. Типовые входные сигналы многослойных нейронных сетей

Выбор определенного класса типовых входных сигналов должен производиться с точки зрения решения задачи более или менее объективного сравнения качества многослойных нейронных сетей в режиме настройки и в установившемся состоянии. Основу для рассмотрения здесь дает системный

подход к синтезу многослойных нейронных сетей. Методологически данная задача достаточно полно решена для линейных систем автоматического управления при детерминированных и случайных входных сигналах. Так, достаточно полным классом детерминированных входных сигналов, для которых производится как оценка, так и сравнение качества систем управления, является класс полиномиальных входных сигналов. В этом случае основной характеристикой сложности сигнала является соответствующая степень полинома. Для многослойных нейронных сетей основной характеристикой сложности входного сигнала является модальность распределения  $f_x(\mathbf{x})$  совместно с некоторыми характеристиками пространства указаний учителя. Рассмотрим некоторые частные случаи выбора типовых сигналов в многослойных нейронных сетях. В случае самообучения, по нашему мнению, логично распределение типового стационарного входного сигнала многослойной нейронной сети считать многомодальным с более или менее равномерным расположением мод распределения  $f_x(\mathbf{x})$  в физически реализуемом пространстве признаков.

На рис.11.6 представлен полный класс типовых входных сигналов многослойной нейронной сети в режиме самообуче-

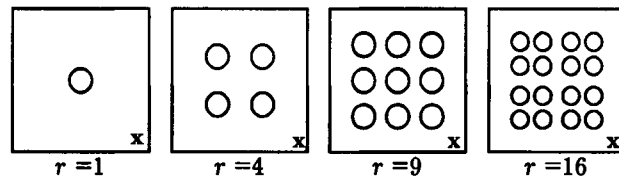


Рис. 11.6. Условное представление класса типовых входных сигналов нейронной сети в режиме самообучения по степени сложности, иллюстрируемый линиями равных значений  $f_x(\mathbf{x})$  на физически реализуемом пространстве признаков (изображение в двумерном пространстве  $X$  является условным). Здесь  $r$  – сложность типового входного сигнала многослойной нейронной сети. При исследовании динамики нейронной сети величина  $r$  типового входного сигнала должна достигать максимальной сложности, на которую в принципе проектировалась многослойная нейронная сеть. Дисперсия для каждой моды  $f_x(\mathbf{x})$  должна выбираться так, чтобы моды были достаточно ярко выраженными. В случае обучения многослойной

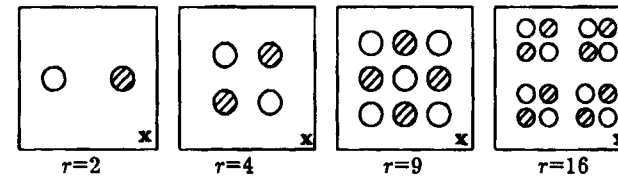


Рис. 11.7. Условное представление двух классов входных сигналов нейронной сети в режиме обучения по степени сложности

нейронной сети распознаванию двух классов образов на рис.11.7 представлены линии равных значений  $f_1(\mathbf{x})$  и  $f_2(\mathbf{x})$  для типовых входных сигналов ( $f_1$  – светлые,  $f_2$  – заштрихованные кружки).

Необходимо отметить, что для каждой конкретной задачи, решаемой нейронной сетью, типовые входные сигналы выбираются своим образом.

### Литература

- 11.1. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. – М., Мир, 1964.
- 11.2. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. – М., Энергия, 1974.

## Глава 12. Исследование замкнутых многослойных нейронных сетей

### 12.1. Постановка задачи синтеза контура настройки многослойных нейронных сетей по замкнутому циклу

Настоящая глава является заключительным этапом синтеза многослойных нейронных сетей с фиксированной структурой, настраивающихся по замкнутому циклу. При этом заданными являются структура разомкнутой нейронной сети, характеристики сигнала в общем виде, алгоритм настройки коэффициентов многослойной нейронной сети, удовлетворяющий некоторому критерию первичной оптимизации. Для оценки качества работы замкнутых многослойных нейронных сетей нужно решить ряд задач.

Первой является задача выбора начальных условий для настройки коэффициентов многослойной нейронной сети. Ввиду многоэкстремальности функционала вторичной оптимизации нейронной сети рассматриваются два способа выбора начальных условий: случайный выбор с усреднением результатов по числу случайных выбросов, когда нужно найти все локальные и глобальный экстремумы, и детерминированный выбор, когда многослойная нейронная сеть вводится в область глобального экстремума функционала вторичной оптимизации путем определенного задания кусочно-линейной разделяющей поверхности в начальный момент времени.

Второй является задача выбора класса типовых входных сигналов многослойных нейронных сетей для оценки качества их работы в переходном и установившемся режимах аналогично тому, как это делается в системах автоматического управления. Сложность входного сигнала будет определяться, в частности, модальностью условного распределения  $f'(x/\epsilon)$ .

Третьей является задача выбора параметрической матрицы  $K^*$  в алгоритме поиска экстремума функционала вторичной оптимизации. Решение данной задачи возможно аналитическим методом и путем использования методов статистического моделирования. Общая методика аналитического исследования замкнутых нейронных сетей состоит из следующих этапов:

- 1) определение плотности распределения вероятностей для оценки вектора градиента функционала вторичной оптимизации;
- 2) вывод стохастического дифференциального уравнения для изменения в процессе настройки плотности распределения настраиваемых коэффициентов нейронной сети;
- 3) решение данного уравнения;
- 4) нахождение параметров распределения функционала первичной оптимизации интегрированием по пространству признаков и по пространству состояний нейронной сети как системы со случайным входным сигналом и случайными параметрами.

В результате данного исследования можно решить задачу синтеза контура настройки нейронной сети, исходя из условия обеспечения заданного качества по значению функционала первичной оптимизации. Необходимо отметить, что решение третьей задачи аналитическим методом является трудным с математической точки зрения. Поэтому методика аналитического исследования замкнутых нейронных сетей иллюстрируется в книге частными примерами. Основным остается метод статистических испытаний, при этом выбор оптимальных параметров контура настройки нейронной сети производится по оценке текущего значения оценки функционала вторичной оптимизации.

### 12.2. Исследование нейрона при многомодальном распределении входного сигнала

#### 12.2.1. Одномерный случай; поисковый алгоритм настройки

Моделировался нейрон с двумя решениями и минимизацией  $\alpha_{2g}$ . Структурная схема моделируемой системы представлена на рис.12.1 Исследовалась возможность построения замкнутых систем с поисковой процедурой адаптации ввиду невозможности аналитической оценки величины градиента  $\alpha_{2g}$  в данной системе. Совокупности образов первого и второго класса подчинены многомодальным распределениям. В этом случае имеем дело со структурной недостаточностью, когда сложность структуры системы меньше, чем сложность решаемой задачи, и потенциальное качество распознавания в принципе не достигается. Исследование подобной системы позволяет выяснить возможность обучения нейронов первого слоя многослойной нейронной сети при введении элементов слу-

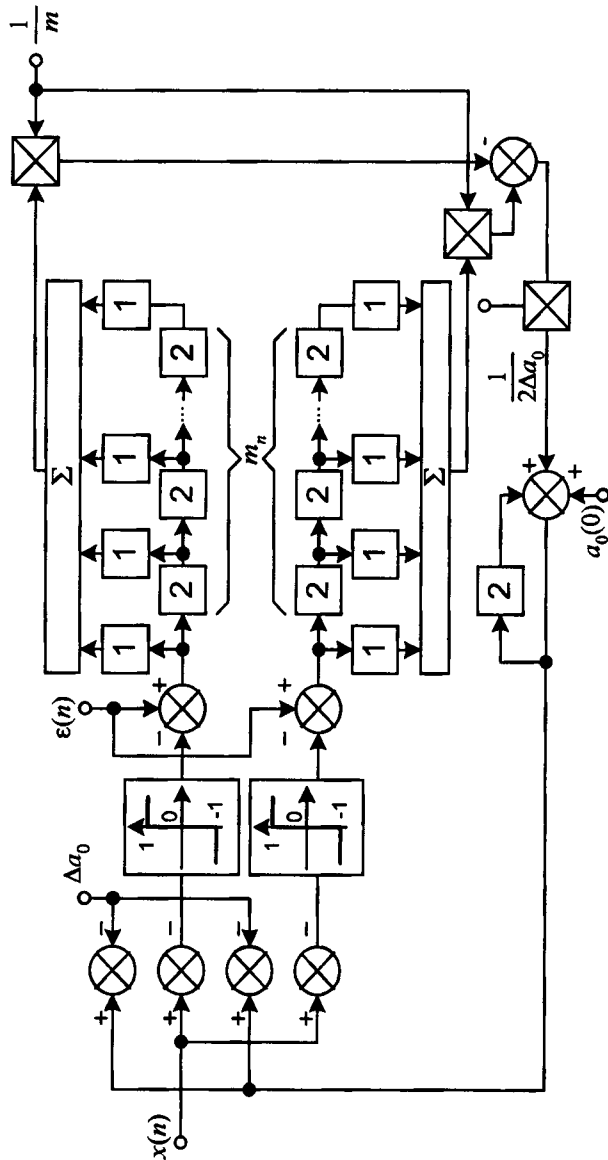


Рис.12.1. Функциональная схема поисковой нейронной сети, настраивающейся по замкнутому циклу с минимизацией второго момента дискретной ошибки. 1 – квадрат; 2 – блок задержки на такт T

чайности в поисковую процедуру (гл.8) нахождения локальных и глобального экстремумов функционала оптимизации. На рис.12.2 представлены плотности распределения совокупностей образов первого и второго класса, а также зависимости для данного случая средней функции риска, точнее,  $\alpha_{2g}$  от порога  $a_0$ , если нейрон слева указывает область первого класса, а справа второго. Градиент  $\alpha_{2g}$  при поисковой процедуре адаптации вычислялся в соответствии с выражением

$$\frac{d\hat{\alpha}_{2g}}{da_0} = \frac{\alpha_{2g}(a_0 + \Delta a_0) - \alpha_{2g}(a_0 - \Delta a_0)}{2\Delta a_0},$$

где  $\Delta a_0$  - амплитуда поисковых колебаний. Оценка  $d\alpha_{2g}/da_0$  производилась усреднением по  $m_n$  реализациям входного сигнала системы. Основной целью моделирования являлась оценка влияния  $\Delta a_0$ ,  $K^*$ ,  $m_n$ ,  $a_0(0)$  на динамику контура настройки коэффициента  $a_0$  системы. Результаты моделирования позволили сделать следующие выводы:

- 1) поисковые колебания вполне применимы для построения блока настройки нейронной сети по замкнутому циклу. Чем больше  $\Delta a_0$  (в рассматриваемых пределах), тем больше точность работы контура настройки в установившемся состоянии (рис.12.3);
- 2) чем больше  $K^*$ , тем меньше систематическая ошибка итерационной процедуры поиска оптимального решения, но тем больше случайная ошибка указанной процедуры (рис.12.4);
- 3) чем больше  $m_n$ , тем меньше случайные и больше динамические ошибки контура настройки системы из-за введения дополнительного запаздывания в контур обратной связи нейронной сети как экстремальной системы (рис.12.5);

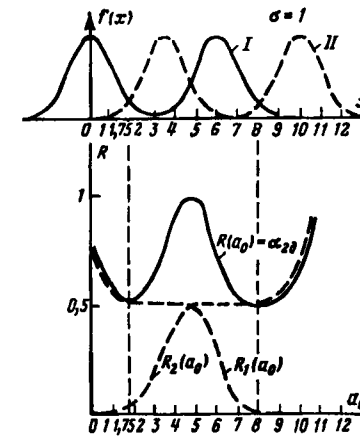


Рис. 12.2. Характеристики входного сигнала и функционала оптимизации: I - первый класс; II - второй класс

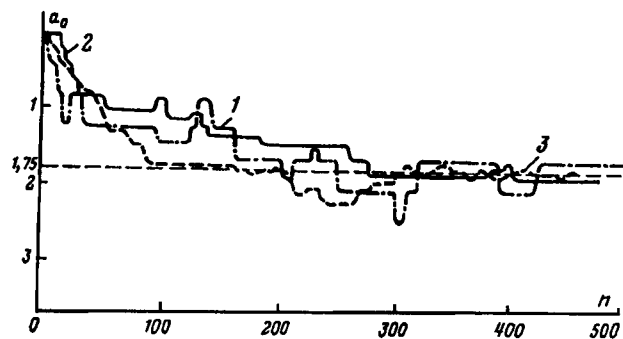


Рис. 12.3. Исследование влияния шага на динамику настройки системы при  $K=0,5$ ;  $m_n=20$ ;  $a_0(0)=0$ : 1 -  $\Delta a_0=0,25$ ; 2 -  $\Delta a_0=0,5$ ; 3 -  $\Delta a_0=1$

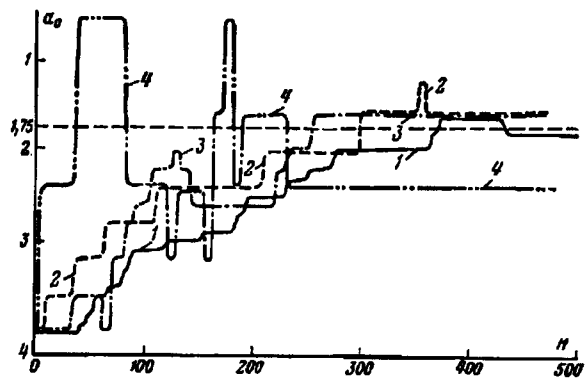


Рис. 12.4. Исследование влияния  $K^*$  на динамику настройки системы при  $\Delta a_0=0,25$ ;  $m_n=20$ ;  $a_0(0)=4$ : 1 -  $K^*=0,25$ ; 2 -  $K^*=0,5$ ; 3 -  $K^*=1$ ; 4 -  $K^*=2$

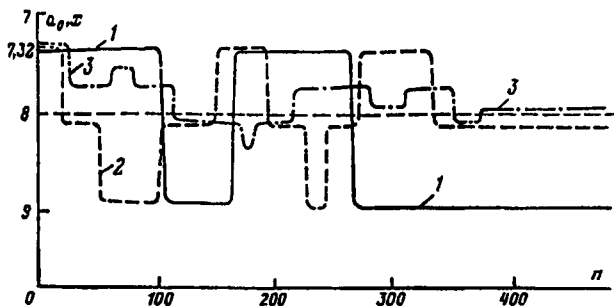


Рис. 12.5. Исследование влияния памяти  $m_n$  блока настройки системы при  $\Delta a_0=0,25$ ;  $K=0,5$ ;  $a_0(0)=7,32$ : 1 -  $m_n=5$ ; 2 -  $m_n=10$ ; 3 -  $m_n=20$

4) при любых начальных условиях  $a_0(0)$  (рис.12.6) итерационная процедура поиска оптимального решения сходится к одному из локальных экстремумов. Результат работы алгоритма поиска всех локальных экстремумов с введением элементов случайности в процедуру поиска представлен на рис.12.7.

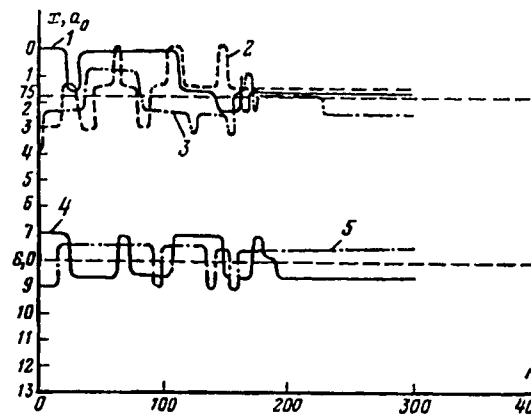


Рис.12.6. Исследование влияния начальных условий на динамику настройки системы при  $\Delta a_0=0,25$ ;  $K=10$ ;  $m_n=10$ : 1 -  $a_0(0)=0$ ; 2 -  $a_0(0)=3$ ; 3 -  $a_0(0)=4$ ; 4 -  $a_0(0)=7$ ; 5 -  $a_0(0)=9$

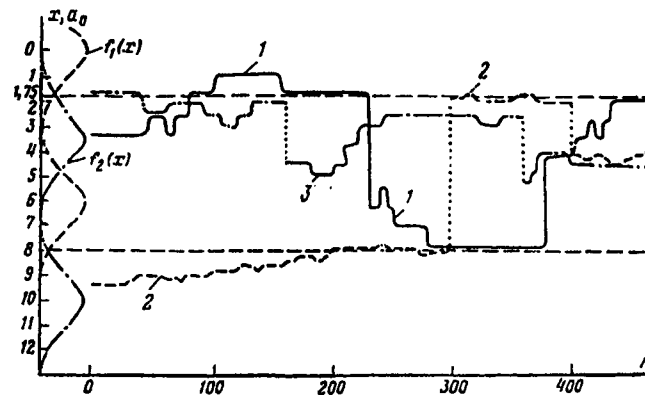


Рис.12.7. Настройка при множестве случайных начальных условий: 1 -  $\Delta a_0=0,25$ ;  $K=0,5$ ;  $m_n=10$ ; 2 -  $\Delta a_0=0,25$ ;  $K=0,25$ ;  $m_n=20$ ; 3 -  $\Delta a_0=2$ ;  $K=2$ ,  $m_n=10$



### 12.2.2. Многомерный случай. Аналитический алгоритм настройки

Аналитическая процедура настройки при многомодальных распределениях входного сигнала исследовалась на примере минимизации  $\alpha_{2g}$  в нейроне с континуумом решений (гл.1) и арктангенсной функцией активации ( $B=10$ ).

В ходе эксперимента были изучены следующие вопросы:

1. Влияние начальных условий на сходимость итерационной процедуры при отыскании одного локального экстремума.

2. Зависимость скорости сходимости итеративной процедуры от величины шага и размерности пространства признаков  $N$ . Вопрос устойчивости градиентной процедуры. Влияние величины дисперсии на качество сходимости итерационного процесса.

3. Влияние способа вычисления градиента оптимизируемого функционала на скорость сходимости и качество процесса поиска.

4. Влияние памяти ( $m_n$ ) системы настройки на качество итерационного процесса.

Заметим, что исследования проводились с помощью датчика случайных векторов  $x$  и указаний учителя  $\epsilon$ . Многомодальное распределение случайных векторов  $x$  в достаточно общем случае проиллюстрировано на рис.12.8, где окружности обозначают уровни равных значений плотностей вероятности для каждой моды. Модальность распределения случайных векторов может быть задана любой, соответствующей плану экспериментов.

На рис. 12.8 в виде окружностей сплошной линией обозначены линии равных значений плотности распределения для образов первого класса, пунктиром – второго. Общее число  $Z$  мод распределений для первого и второго класса равнялось 10; среднеквадратичное значение  $\sigma$ , определенное для одной моды, равно 2.

Установить факт наличия устойчивости вектора коэффициентов нейрона в оптимальном состоянии – цель первого эксперимента. Для этого вектор коэффициентов нейрона получал оптимальные начальные условия, соответствующие одному из локальных экстремумов (рис. 12.9 – положения 1 и 1а), и начинался процесс обучения. Начальные 1 и 1а и конеч-

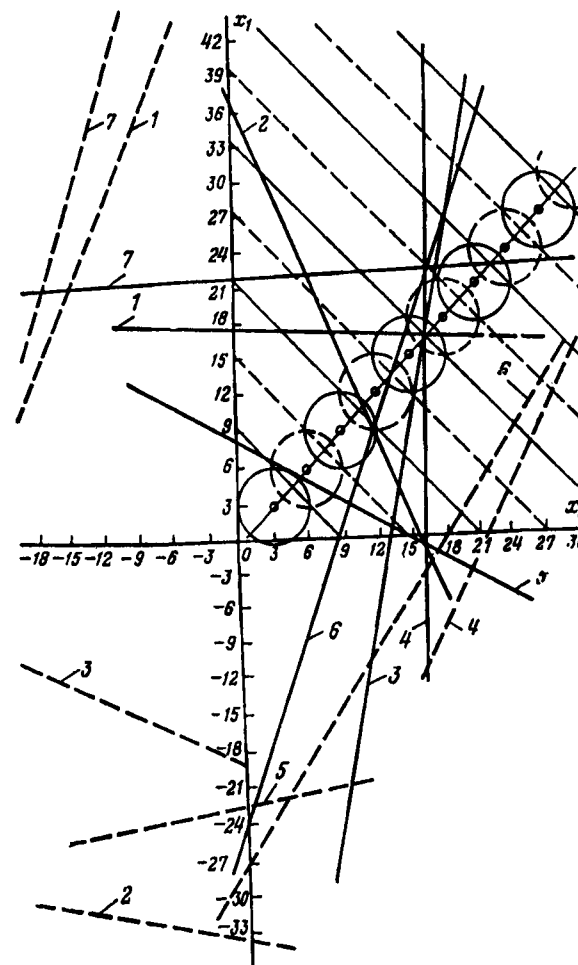


Рис.12.8. Иллюстрация работоспособности нейрона при многомодальном распределении входного сигнала: - - - начальное положение гиперплоскости; — — — промежуточное (после 500 итераций) положение гиперплоскости; 1-7 – номера экспериментов

ные 1' и 1а' положения гиперплоскостей говорят об устойчивости ее экстремального положения, соответствующего одному из минимумов средней функции риска. Колебания относительно устойчивого положения обусловлены стохастичностью минимизируемого функционала качества нейронной сети. Плавность этих колебаний тем больше, чем больше память

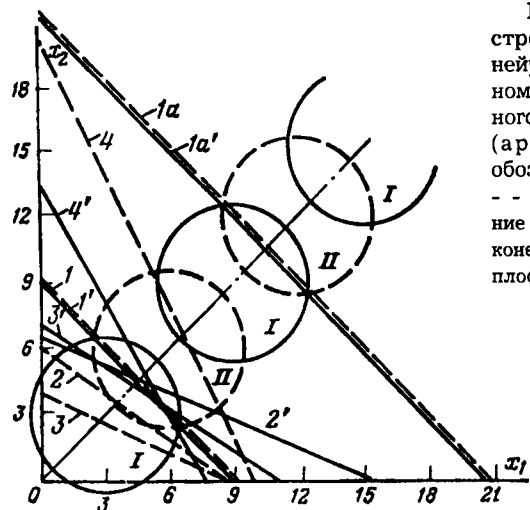


Рис.12.9. Динамика настройки коэффициентов нейрона при многомодальном распределении входного сигнала при  $m_n=30$  (арабскими цифрами обозначен номер опыта): - - - начальное положение гиперплоскостей; — конечное положение гиперплоскостей

системы и чем меньше модальность (число мод) распределений входного сигнала, используемого при обучении. При отклонении от оптимальности положения с поворотом 3 и без поворота 2 гиперплоскость приходит в ближайший локальный минимум 2' и 3', поворачиваясь, и уменьшая при перемещении ошибку. На рис.12.9 показаны начальные 1, 2, 3, 4 и конечные 1', 2', 3', 4' положения разделяющих плоскостей для различных начальных условий. Динамика настройки коэффициентов этих прямых проиллюстрирована на рис.12.10. Здесь оказалось удобным воспользоваться уравнением прямой (гиперплоскости в общем случае) в отрезках и следить (рис.12.10) за изменением этих отрезков в процессе настройки. На рис.12.10 видно, что при оптимальных начальных условиях (1, 2) система испытывает незначительные колебания около положения оптимума. Градиент начинает часто менять знак, и система останавливается. Большие колебания кривой 3 обусловлены значительными величинами градиента функционала, что характерно для изображающей точки вблизи от локального экстремума. При больших отклонениях от экстремумов изображающая точка попадает в область с малыми значениями градиента, что приводит к движению с очень малой скоростью. Отсюда следует определенное требование к априорной информации о функционале качества (ограни-

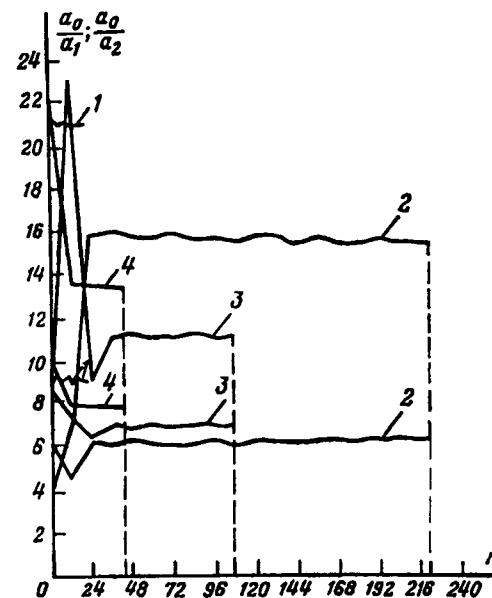


Рис.12.10. Динамика настройки коэффициентов нейрона при многомодальном распределении входного сигнала: 1-4 - номера экспериментов

ченность пространства поиска локальных экстремумов, предполагаемый характер их расположения и т.п.), позволяющее сделать вывод о зоне поиска и выбрать начальные величины шагов градиентной процедуры.

Интересные результаты получены при исследовании влияния величины дисперсии (степени пересечения классов) на процесс настройки. Если брать дисперсии малыми по сравнению с расстояниями между модами, то оптимальное положение разделяющей гиперплоскости может быть довольно безразличным, так как это соответствует случаю непересекающихся классов и локальные экстремумы в зоне оптимума не являются острыми. Был произведен также эксперимент, когда при условии пересечения классов дисперсия первого класса в несколько раз превосходила дисперсию при модах второго класса. Как и следовало ожидать, для системы распознавания, настраиваемой по средней функции риска, оптимальное состояние разделяющей гиперплоскости сместилось в сторону моды с меньшей дисперсией.

Обеспечение устойчивости градиентной процедуры достигнуто экспериментальным выбором величины шага и приме-

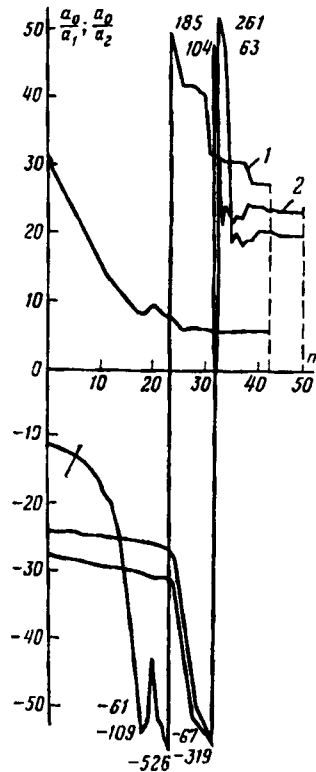


Рис.12.11. Динамика настройки коэффициентов нейрона при числе мод распределения входного сигнала, равном 4: 1 – первый минимум; 2 – второй минимум

коэффициентов, а при поиске второго минимума – из третьего в первый.

На рис.12.8 представлены различные начальные и соответствующие промежуточные (по окончании 200 итераций) положения гиперплоскостей. Данные промежуточные положения гиперплоскостей можно считать установившимися, так как экстремальная характеристика в этом диапазоне настраиваемых параметров нейрона является практически «плоской».

нением ограничения на величину приращения компонент вектора. Ограничение выбирается по априорной информации о характере функционала так, что приращения, получаемые коэффициентами нейрона, не могут быть больше четверти минимального расстояния между локальными экстремумами. Такая мера обеспечивает плавность процедуры обучения.

Две пары кривых, характеризующих динамику поиска двух минимумов при четырехмодальном распределении входного сигнала (рис.12.11), оптимальном начальном значении шага градиентной процедуры, равном четырем, и ограничении на  $\Delta a_i$ , равном 0,03, интересны тем, что в процессе настройки коэффициенты нейрона меняют знак. При этом следует помнить, что скачки в этих графиках соответствуют малым и плавным изменениям коэффициентов нейрона. Изображающая точка при поиске первого минимума переходит из второго в первый квадрант пространства настраиваемых ко-

### 12.3. Исследование динамики частного вида нейронных сетей для распознавания нестационарных образов

В данном параграфе исследуется одномерная нейронная сеть с минимизацией  $\alpha_{2g}$  (гл. 9). Основной целью исследования является оценка влияния различных характеристик системы и характеристик нестационарных образов на динамику работы контура настройки системы по замкнутому циклу.

Выражение для аналоговой ошибки системы в данном случае имеет следующий вид:

$$x_a(n\Delta T) = \varepsilon(n\Delta T) - x(n\Delta T) + a_0(n\Delta T). \quad (12.1)$$

$$\text{Тогда } \overline{x_a^2(n\Delta T)} = \overline{\varepsilon^2(n\Delta T)} - \overline{x^2(n\Delta T)} + \overline{a_0^2(n\Delta T)} - 2\overline{\varepsilon(n\Delta T)x(n\Delta T)} + 2\overline{a_0(n\Delta T)\varepsilon(n\Delta T)} - 2\overline{a_0(n\Delta T)x(n\Delta T)}.$$

Черта сверху означает усреднение по множеству реализаций нестационарного случайного процесса, проведенное в момент времени  $n\Delta T$ . Так как на практике мы имеем одну реализацию нестационарного случайного процесса  $x_a(n\Delta T)$ , то заменяем операцию усреднения по множеству операций усреднения по времени на интервале памяти величиной  $m_n$  с дополнительным заданием априорной информации о характере изменения параметров распределения нестационарного случайного процесса на интервале памяти. Как отмечено в [12. 1], наиболее удобным в данном случае является представление нестационарного случайного процесса на интервале памяти в виде аддитивной суммы стационарного случайного процесса и детерминированного с известным в общем функциональном виде характером изменения.

Ввиду того что производная  $\overline{dx_a^2(n\Delta T)/da_0(n\Delta T)}$  не выражается в алгебраической форме, предполагаем, что за интервал усреднения  $m_n$  величина  $a_0(n\Delta T)$  не меняет своего значения. При этом изменение  $a_0(n\Delta T)$  происходит в режиме адаптации с тактом, равным памяти  $m_n$  блока настройки системы. Отсюда

$$\overline{\frac{dx_a^2(n\Delta T)}{da_0(n\Delta T)}} = \overline{2x_a(n\Delta T)}.$$

Алгоритм настройки системы по замкнутому циклу в данном случае имеет вид:

$$a_0\left[\left(\frac{n}{m_n} + m_n\right) \Delta T\right] = a_0\left[\frac{n}{m_n} \Delta T\right] + K^* \overline{x_a(n\Delta T)}. \quad (12.2)$$

В случае нестационарных образов процесс  $x_a(n\Delta T)$  является нестационарным с характеристиками, определяемыми характеристиками нестационарности входных сигналов системы (см. гл.9). Задача получения  $\overline{x_a(n\Delta T)}$  является классической задачей фильтрации нестационарных дискретных случайных процессов, в частности процессов, приводимых к стационарным, и достаточно подробно была рассмотрена в [12.3-12.7]. При моделировании данной нейронной сети были использованы методы рекуррентной реализации оптимальных дискретных фильтров, разработанные в [12.6].

В данном случае при  $m_n = m = \text{const}$  для любого  $n$  и  $\Delta T = 1$

$$a_0\left(\frac{n}{m} + m\right) = a_0\left(\frac{n}{m}\right) + K^* \sum_{i=0}^m W(i, n) x_a(ni),$$

где  $W(i, n)$  — оптимальная импульсная переходная функция фильтра оценки  $\overline{x_a(n\Delta T)}$ . Для всех рассмотренных ниже вариантов использовались выражения для  $W(i, n)$ , приведенные в [12.6, 12.7].

Конкретная цель исследований в данном случае заключалась в оценке влияния на динамику системы, настраиваемой по замкнутому циклу, следующих ниже характеристик входного сигнала и системы:

- 1) гипотезы о характере изменения во времени на интервале памяти математического ожидания совокупности образов (одинаковой для образов первого и второго класса);
- 2) степени пересечения классов, задаваемой дисперсией, одинаковой для совокупностей образов первого и второго класса (разница между математическими ожиданиями совокупностей образов первого и второго класса остается постоянной);
- 3) степени нестационарности, определяемой, например, скоростью изменения во времени координат центров классов;
- 4) памяти  $m_n = m$  в блоке настройки системы по замкнутому циклу;
- 5) времени упреждения  $\alpha$  в блоке настройки системы по замкнутому циклу при оценке градиента функционала вторичной оптимизации;

6) коэффициента усиления  $K^*$  в блоке настройки системы по замкнутому циклу.

Ниже представлены результаты моделирования. Исходные данные для моделирования указаны отдельно на каждом рисунке.

На рис.12.12-12.19 представлены кривые изменения порога нейрона во времени при линейных законах изменения координат центров классов. Использованы два вида законов: первый  $(2t+3)$ , второй  $[(1/2)t+3]$ .

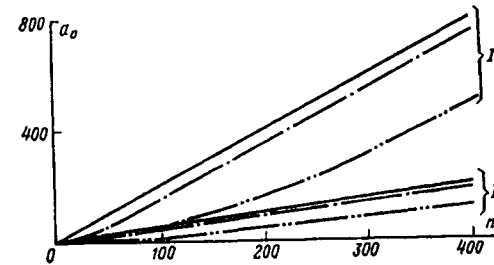


Рис. 12.12. Исследование динамики настройки по замкнутому циклу системы распознавания нестационарных образов при  $\sigma=3$ ;  $\alpha=0$ ;  $K^*=-0,1$ : — · — · —  $m=20$ ; — · — —  $m=3$ ; — — идеальное значение порога

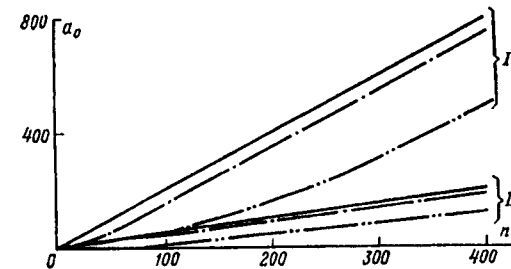


Рис. 12.13. Исследование динамики настройки по замкнутому циклу системы распознавания нестационарных образов при  $\sigma=10$ ;  $\alpha=0$ ;  $K^*=-0,1$ : — · — · —  $m=20$ ; — · — —  $m=3$ ; — — идеальное значение порога

Группы кривых I и II представляют собой случаи с различной скоростью изменения указанных координат. Расстояния между центрами классов в данном эксперименте и других остается во времени неизменным. Анализ данных кривых позволяет сделать следующие выводы:

1. Чем больше память системы распознавания  $m_n$ , тем менее влияет на случайную ошибку настройки степень пересечения классов, определяемая величиной дисперсии распределения совокупностей образов  $\sigma$  внутри каждого класса.

2. Чем больше  $m_n$ , тем больше систематическая ошибка настройки коэффициентов системы (рис.12.14, 12.15).

3. При малых значениях  $m_n$  ( $m_n=5$ ) и  $K^*=-2$  процесс на-

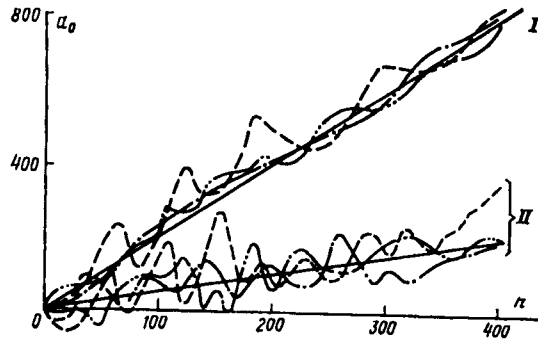


Рис. 12.14. Исследование динамики настройки по замкнутому циклу системы распознавания нестационарных образов при  $K^*=-0,5$ ;  $m=3$ : — — — —  $\alpha=2$ ,  $\sigma=1$  (идеальное значение порога); — — — —  $\alpha=10$ ,  $\sigma=5$ ; — · — · —  $\alpha=20$ ,  $\sigma=5$ ; — — — —  $\alpha=40$ ,  $\sigma=5$

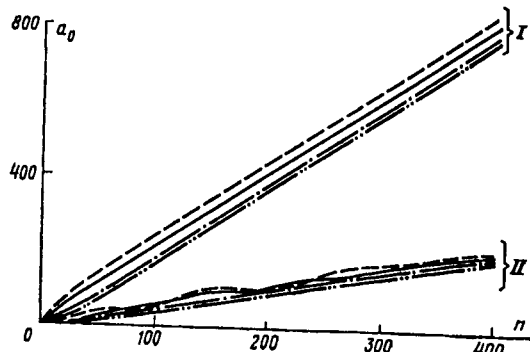


Рис. 12.15. Исследование динамики настройки по замкнутому циклу системы распознавания нестационарных образов при  $K^*=-0,5$ ;  $m=20$ : — · — · —  $\sigma=1$ ,  $\alpha=2$ ; — — — —  $\sigma=5$ ,  $\alpha=10$ ; — — — —  $\sigma=5$ ,  $\alpha=20$ ; — — — —  $\sigma=5$ ,  $\alpha=40$

стройке коэффициентов нейронной сети является неустойчивым, а при увеличении  $m_n$  до 20 делается устойчивым. Отсюда следует естественная необходимость при рассмотрении системы распознавания нестационарных образов иметь дело с алгоритмами с наличием памяти в блоке настройки. В большинстве случаев распознавания нестационарных образов алгоритмы с  $m_n=1$  неприменимы. Увеличение  $m_n$  в какой-то степени компенсирует априорную недостаточность в знании  $K^*$ .

4. Скорость изменения во времени координат центров классов практически не влияет на ошибки работы контура настройки.

5. Область изменения  $K^*<-1$  является областью необходимых условий устойчивости контура настройки системы.

6. Обращает на себя внимание характерная модуляция огибающей изменения порога системы при неустойчивом режиме работы.

7. Проведенные расчеты с квадратичной зависимостью изменения во времени координат центров классов показали, что выводы пп. 1-6 подтверждаются, однако в этом случае имеет место более характерное, чем в случае линейной зависимости, увеличение систематической ошибки работы контура настройки системы во времени. При достаточно больших значениях  $m_n$  выявляется закономерность изменения знака систематической ошибки контура настройки системы (отрицательный при  $K^*>-1$ , положительный при  $K^*<-1$ ).

Эксперимент по оценке влияния степени пересечения классов на динамику контура настройки системы (рис.12.17-12.19) показал, что при  $K^*=-2$ , когда процесс настройки является

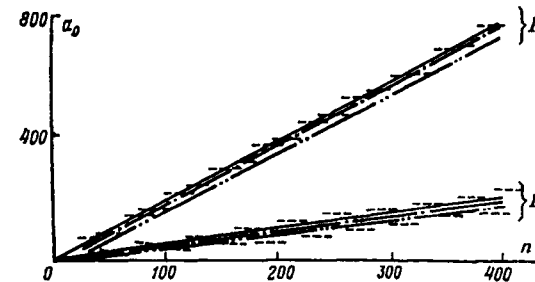


Рис.12.16. Исследование динамики настройки по замкнутому циклу системы распознавания нестационарных образов при  $\sigma=5$ ;  $\alpha=0$ ;  $m=20$ : — · — · —  $K^*=-0,5$ ; — · — · —  $K^*=-0,75$ ; — — — —  $K^*=-1$  (идеальное значение порога); — — — —  $K^*=-2$

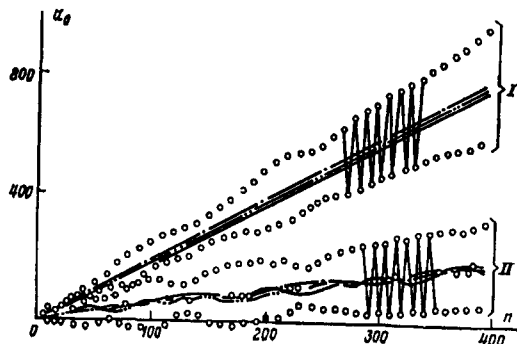


Рис. 12.17. Исследование динамики настройки по замкнутому циклу системы распознавания нестационарных образов при  $\sigma=5$ ;  $\alpha=0$ ;  $m=5$ : — — — — —  $K^*=-0,5$ ; — — — — —  $K^*=-0,75$ ; — — — — —  $K^*=-1$  (идеальное значение порога); о о о —  $K^*=-2$

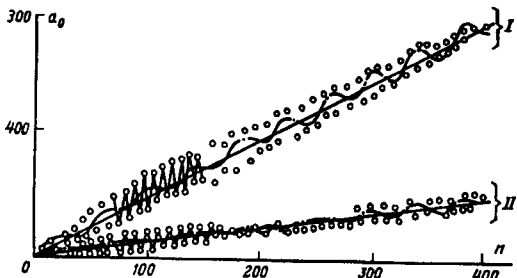


Рис. 12.18. Исследование динамики настройки по замкнутому циклу системы распознавания нестационарных образов при  $\sigma=3$ ;  $\alpha=0$ ;  $K^*=-2$ : — — — — —  $m=20$ ; — — — — — идеальное значение порога; о о о —  $m=5$

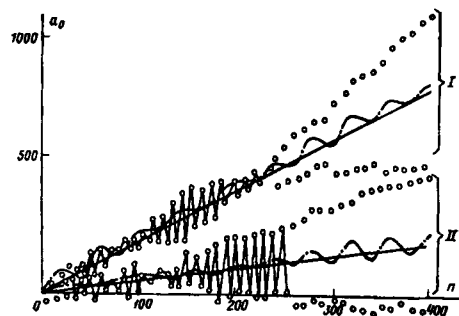


Рис. 12.19. Исследование динамики настройки по замкнутому циклу системы распознавания нестационарных образов при  $\sigma=10$ ;  $\alpha=0$ ;  $K^*=-2$ : — — — — —  $m=20$ ; — — — — — идеальное значение порога; о о о —  $m=5$

автоколебательным, степень пересечения классов играет значительную роль в формировании процесса настройки. При значительных  $\sigma$  процесс настройки расходится. При незначительных  $\sigma$  колебательный процесс настройки периодически изменяет свою амплитуду относительно идеального значения порога, в некоторые моменты времени принимая достаточно точные значения.

Необходимо отметить, что процессы (рис.12.18) имеют место в основном в существенно нелинейных системах, каковыми и являются нейросетевые системы распознавания образов, настраивающихся по замкнутому циклу.

Эксперимент с системами с упреждением решения на время  $\alpha$  позволил сделать следующие выводы (рис.12.14,12.15):

1. Чем больше  $\alpha$ , тем больше случайные ошибки контура настройки системы по замкнутому циклу.

2. Чем больше  $\sigma$  и меньше  $m$ , тем при постоянном  $\alpha$  больше случайные ошибки контура настройки системы по замкнутому циклу.

3. Расчеты с линейной и квадратичной гипотезой изменения во времени координат центров классов показали, что при прочих равных условиях увеличение порядка гипотезы приводит к увеличению случайных ошибок контура настройки системы по замкнутому циклу.

#### 12.4. Исследование динамики трехслойной нейронной сети в режиме обучения

Предметом исследования в данном случае являлась трехслойная нейронная сеть из нейронов с континуумом решений. Первый, второй и третий слои нейронной сети содержали соответственно три, два и один нейрон. Пространство признаков было в общем случае многомерным; в частном случае — двумерным. Разомкнутая нейронная сеть описывалась следующим выражением:

$$x^3 = \frac{2}{h_3} \arctg B \sum_{h_2=1}^{H_2} a_{h_3, h_2} \frac{2}{\pi} \arctg B \sum_{h_1=1}^{H_1} a_{h_2, h_1} x^0 \quad (12.3)$$

$$\times \frac{2}{\pi} \arctg B \sum_{h_0=0}^{H_0} a_{h_1, h_0} x^0;$$

Выражения для оценок градиентов  $\alpha_{2g}$ :

$$\frac{\partial x_g^2}{\partial a_{h_1 h_0}} = \frac{16}{\pi^3} \frac{B^3}{m_n} \sum_{i=1}^{m_n} x_g(i) \times$$

$$\times \sum_{h_2=1}^{H_2} \frac{a_{h_3 h_2} a_{h_2 h_1} x_{h_0}(i)}{[1+[g_{h_3}^3(i)]^2] [1+[g_{h_2}^2(i)]^2] [1+[g_{h_1}^1(i)]^2]};$$

$$\frac{\partial x_g^2}{\partial a_{h_2 h_1}} = \frac{8}{\pi^2} \frac{B^2}{m_n} \sum_{i=1}^{m_n} x_g(i) \frac{a_{h_3 h_2} x_{h_1}^1(i)}{[1+[g_{h_3}^3(i)]^2][1+[g_{h_2}^2(i)]^2]};$$

$$\frac{\partial x_g^2}{\partial a_{h_3 h_2}} = \frac{4}{\pi} \frac{B}{m_n} \sum_{i=1}^{m_n} x_g(i) \frac{x_{h_2}^2(i)}{[1+[g_{h_3}^3(i)]^2]}.$$

Для распределений образов 1 и 2 классов, линии равных значений которых представлены на рис. 12.20, оптимальное состояние рассматриваемой многослойной нейронной сети определяется следующим образом. Для первого слоя первый, второй и третий нейроны имеют соответственно коэффициенты:  $a_{10}=-12$ ,  $a_{11}=1$ ,  $a_{12}=1$ ,  $a_{20}=24$ ,  $a_{21}=-1$ ,  $a_{22}=-1$ ,  $a_{30}=-36$ ,  $a_{31}=1$ ,  $a_{32}=1$ . Нейроны второго слоя имеют коэффициенты:  $a'_{10}=0$ ,  $a'_{11}=1$ ,  $a'_{12}=1$ ,  $a'_{13}=1$ ,  $a'_{20}=0$ ,  $a'_{21}=1$ ,  $a'_{22}=1$ ,  $a'_{23}=1$ , нейроны третьего слоя имеют следующие коэффициенты:  $a''_{10}=0$ ,  $a''_{11}=1$ ,  $a''_{12}=1$ .

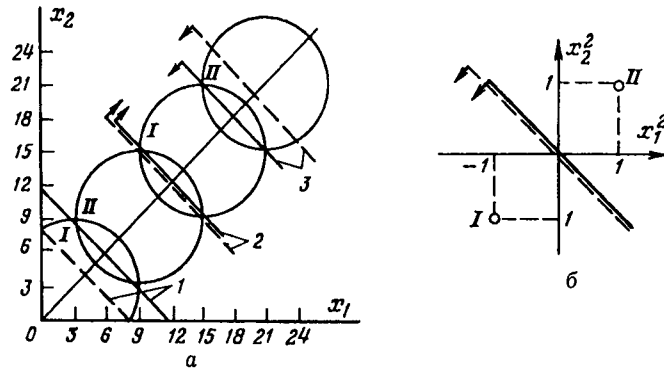


Рис. 12.20. Начальные и конечные положения разделяющих поверхностей, реализуемых нейронами в эксперименте 1-3: а - первый слой; б - третий слой

Эксперименты проводились со следующими параметрами датчика образов на входе нейронной сети: размерность входного пространства признаков  $N=2$ , число мод  $f(x)$  равно 4.

Эксперименты с первым слоем нейронов (второй и третий слой оптимальны). Каждый из перечисленных ниже экспериментов определялся своими условиями.

1-1. Приведенные выше коэффициенты гиперплоскостей, реализуемых нейронами, оптимальны.

1-2. Параллельный сдвиг гиперплоскостей, реализуемых нейронами первого слоя нейронной сети (начальные коэффициенты: +1, +1, -8, -1, -1,20; 1,1, -32).

1-3. Параллельный сдвиг двух гиперплоскостей, реализуемых нейронами первого слоя нейронной сети, в разные стороны (начальные коэффициенты: 1,1; -8; -1; -1,24; 1,1; -40).

1-4. Поворот двух гиперплоскостей, реализуемых нейронами первого слоя нейронной сети, на угол  $\alpha=\pi$  (начальные коэффициенты: -1; -1,12; 1,1; -24; 1,1; -36).

Эксперименты со вторым слоем нейронов (первый и третий слой оптимальны).

2-1. Поворот одной гиперплоскости, реализуемой нейронами второго слоя нейронной сети, на угол  $\alpha=\pi$  (начальные коэффициенты -1; -1; -1; 1,1; 1).

2-2. Поворот двух гиперплоскостей, реализуемых нейронами второго слоя нейронной сети, на угол  $\alpha=\pi$ .

Эксперименты с третьим слоем нейронов нейронной сети (первый и второй слой оптимальны).

3-1. Поворот гиперплоскости, реализуемой нейроном третьего слоя нейронной сети, на угол  $\alpha=\pi$ .

Ниже приведены результаты экспериментов.

На рис. 12.21-12.23 приведена иллюстрация процессов настройки коэффициентов нейронов. По вертикальной оси отложены значения коэффициентов, а по горизонтальной - количество итераций. Уровень осей координат соответствует оптимальному отношению коэффициентов. Эксперимент 1-1 подтверждает предположение об устойчивости значений коэффициентов нейронов в оптимальном состоянии, так как при достаточно большом количестве итераций отклонения этих значений от оптимальных были незначительны. Эксперименты 1-2 и 1-3 показали, что градиентная процедура обеспечивает настройку таким образом, что разделяю-

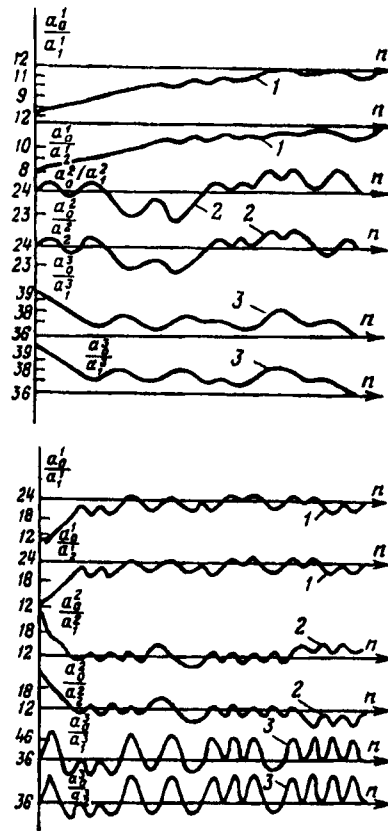


Рис. 12.21. Динамика настройки коэффициентов в эксперименте 1-2 (количество итераций равно 50) при  $m_n=50$ ;  $K^*=0,1$ ;  $K_1=0,01$ ;  $K_2=0,1$ ;  $K_3=0,1$ ;  $K_1, K_2, K_3$  - весовые коэффициенты к  $K^*$  для нейронов первого, второго, третьего слоев: 1 - первый нейрон; 2 - второй нейрон; 3 - третий нейрон

Рис. 12.22. Динамика настройки коэффициентов нейронов в эксперименте 1-4 (количество итераций 32) при  $m_n=50$ ;  $K^*=1$ ;  $K_1=0,05$ ;  $K_2=0,05$ ;  $K_3=0,05$ : 1 - первый нейрон; 2 - второй нейрон; 3 - третий нейрон

щие плоскости приходят за 25-30 итераций в оптимальное положение.

Довольно интересен результат эксперимента 1-4. Начальные условия эксперимента таковы, что поверхности, реализуемые первым и вторым нейронами второго слоя, занимая оптимальные положения, относили векторы первого класса ко второму, а второго к первому (т.е. осуществляли классификацию «наоборот»). В результате настройки разделяющие плоскости пришли в оптимальные положения, перемещаясь параллельно самим себе, хотя принципиально возможен поворот плоскостей на  $180^\circ$ . Разделяющие плоскости, реализуемые нейронами второго и третьего слоя, проходят через начало координат, т.е. при настройке возможен только поворот

этих плоскостей вокруг начала координат. Поэтому эксперименты с нейронами второго и третьего слоя предусматривали настройку коэффициентов плоскостей, повернутых на  $180^\circ$ . В результате настройки в эксперименте 2-1 плоскость, реализуемая нейронами третьего слоя, развернулась в оптимальное положение. На рис.12.23 представлена динамика настройки коэффициентов нейронов для эксперимента 2-2 и 3-1.

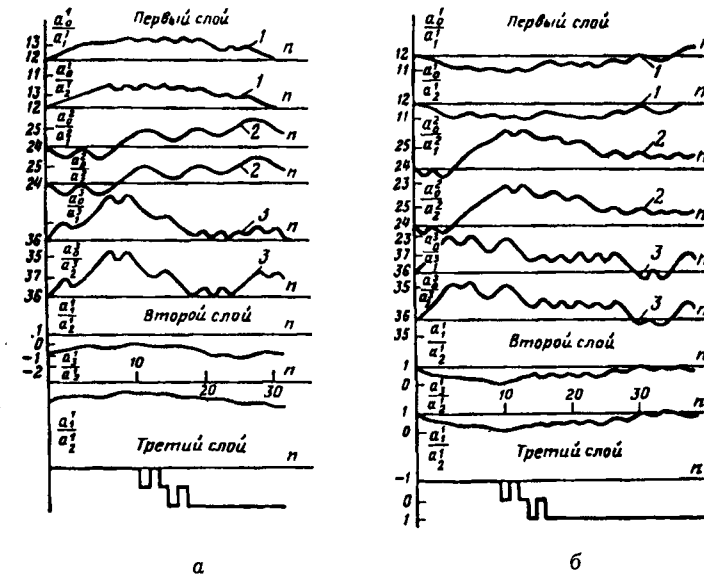


Рис.12.23. Динамика настройки коэффициентов нейронов в эксперименте: а - эксперимент 2-2; б - эксперимент 3-1; 1 - первый нейрон; 2 - второй нейрон; 3 - третий нейрон

В результате обучения системы гиперплоскость, реализуемая нейронами третьего слоя, развернувшись на  $180^\circ$ , пришла в оптимальное состояние. Вполне закономерно поведение коэффициентов нейронов первого слоя, так как до момента, когда коэффициенты нейрона третьего слоя не оптимальные, коэффициенты нейронов первого слоя значительно отклоняются от оптимальных. Но после настройки нейрона третьего слоя они приходят в оптимальное состояние.

Данная работа является начальным исследованием многослойных нейронных сетей, настраивающихся по замкнутому цик-



лу в режиме обучения. Результаты проведенных экспериментов подтвердили теоретическое обоснование исследуемого алгоритма настройки, а также показали высокую его эффективность. Остается довольно широкий круг вопросов, которые необходимо исследовать. К ним в первую очередь относятся:

1) выбор оптимальных коэффициентов  $K$  в градиентной процедуре и их соотношения между слоями многослойной нейронной сети;

2) изучение влияния избыточности структуры многослойной нейронной сети на эффективность и качество настройки.

### 12.5. Исследование нейронной сети частного вида с обратными связями

Объектом исследования в данном пункте является одномерный нейрон с обратной связью, описываемый следующими соотношениями:

$$y(n\Delta T) = \text{sign}[g(n\Delta T)]; \quad g(n\Delta T) = x(n\Delta T) - a_0(n\Delta T) + a_k(n\Delta T) x_k[(n-1)\Delta T], \quad (12.4)$$

где  $\Delta T$  — интервал времени между моментами поступления образов на вход системы. В качестве критерия вторичной оптимизации выбирается критерий минимума  $\alpha_{2a}$ . Предполагается, что при настройке по замкнутому циклу коэффициенты  $a_0$  и  $a_k$  не меняют своего значения на интервале усреднения  $m_n$ . Выражения для оценок градиента  $\alpha_{2a}$  имеют в данном случае вид:

$$\frac{\partial x_a^2(n\Delta T)^{m_n}}{\partial a_0} = 2 x_a(n\Delta T)^{m_n};$$

$$\frac{\partial x_a^2(n\Delta T)}{\partial a_k} = -2 x_a y[(n-1)\Delta T]^{m_n}. \quad (12.5)$$

Выражения (12.4), (12.5) служат основой для построения соответствующей замкнутой системы. Усреднение измеренных значений градиента производилось оптимальным дискретным фильтром с памятью  $m_n$ , синтезированным исходя из априори заданной гипотезы об изменении на интервале  $m_n$  математического ожидания входного сигнала (стационарный, линейный, квадратичный сигнал и т.д.). Анализ результатов экспериментального исследования нейрона с обратной связью, частично представленных на рис. 12.24 — 12.29, позволил сделать следующие выводы:

1. Введение положительной или отрицательной обратной связи в разомкнутой системе ( $K^* > 0$  или  $K^* < 0$  в контуре настройки коэффициента  $a_k$ ) приводит к одинаковым результатам настройки системы по величине  $a_0$  и суммарному порогу  $a_{\Sigma} = a_0(n) + a_k(n) x_k(n-1)$ , но различным по знаку и одинаковым по модулю коэффициентам  $a_k$ .

Рис. 12.24. Исследование динамики настройки нейрона с обратной связью ( $m=20$ ;  $K^*=-0,5$ ):  
 — идеальный случай ( $a_0=2t+3$ );  
 - - - без обратной связи;  
 - · - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$  и отрицательной обратной связью при  $K_1^*=0,5$ ; - x - с положительной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - - - идеальный случай ( $a_0=0,5t+3$ );  
 - · - без обратной связи и с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$ ; - · - с отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - x x - с положительной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$

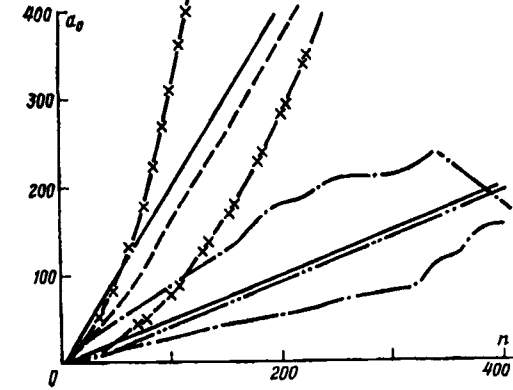
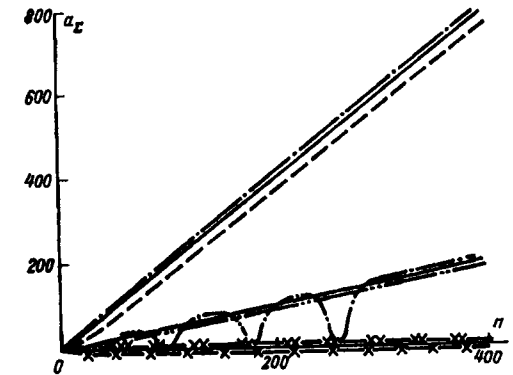


Рис. 12.25. Исследование динамики настройки нейрона с обратной связью:  
 — идеальный случай ( $a_0=2t+3$ );  
 - - - без обратной связи;  
 - · - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$  и отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - x - с положительной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ;  
 - - - идеальный случай ( $a_0=0,5t+3$ );  
 - · - без обратной связи;  
 - · - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$  и отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - x x - с положительной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$



2. При достаточно большой памяти системы в блоке настройки (порядка  $m_n=20$ ) характер изменения  $a_0$  и  $a_k$  является колебательным. При уменьшении памяти (до  $m_n=5$ ) колебательность процесса настройки коэффициента  $a_k$  резко возрастает, а коэффициента  $a_0$  — падает.

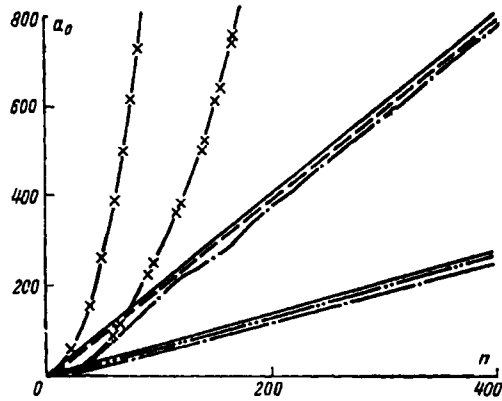


Рис. 12.26. Исследование динамики настройки нейрона с обратной связью при  $m=5$ ;  $K^*=-0,5$ . — идеальное решение ( $a_0=2t+3$ ); — — — без обратной связи; - - - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$  и отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - x - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$ ; - - - с отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - - - с отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$  и с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$ ; - xx - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$ ; — — — идеальное решение ( $a_0=0,5t+3$ )

без обратной связи; - - - с отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$  и с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$ ; - xx - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$ ; — — — идеальное решение ( $a_0=0,5t+3$ )

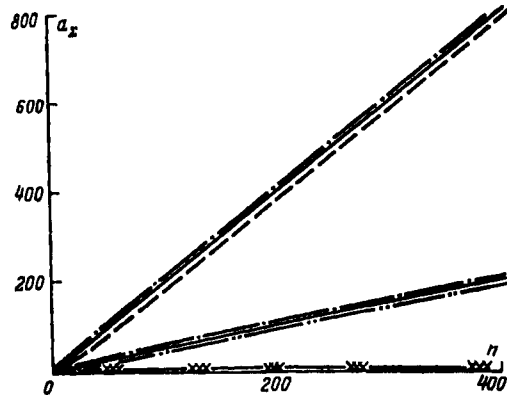


Рис. 12.27. Исследование динамики настройки нейрона с обратной связью. — идеальное решение ( $a_0=2t+3$ ); — — — без обратной связи; - - - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$  и отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; — — — идеальное решение ( $a_0=0,5t+3$ ); - - - без обратной связи; - - - с положи-

тельной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$  и с отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - xxx - с положительной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$

3. Систематическая ошибка настройки коэффициента  $a_0$  увеличивается при увеличении памяти системы, а также при введении обратной связи в структуру разомкнутой системы. Систематическая ошибка настройки суммарного порога нейрона практически равна нулю. Это — положительное свойство нейронной сети с обратной связью по сравнению с нейронной сетью без обратной связи.

Рис. 12.28. Исследование динамики настройки нейрона с обратной связью при  $m=20$ ;  $K^*=-0,5$  ( $K^*$  — коэффициент настройки порога  $a_0$ ,  $K_1^*$  — коэффициент настройки порога  $a_k$ ).

Для идеального случая ( $a_0=2t+3$ ): - x - с положительной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - - - с отрицательной обратной связью при  $K_1^*=0,5$ ; - - - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$ ;

Для идеального случая ( $a_0=0,5t+3$ ): - xx - с положительной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - - - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$ ; - - - с отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$

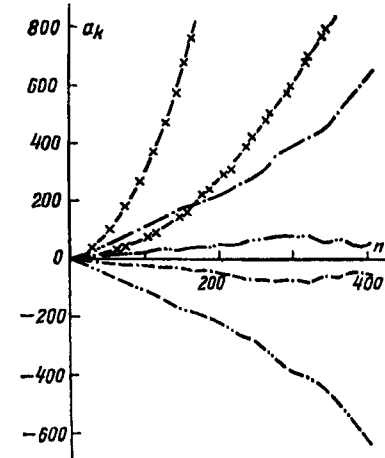
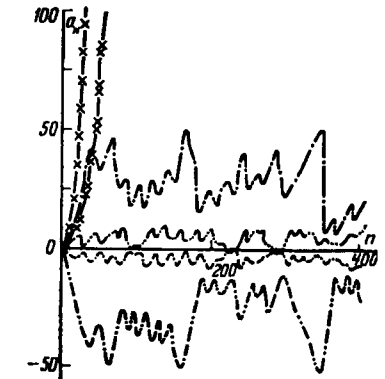


Рис. 12.29. Исследование динамики настройки нейрона с обратной связью при  $m=5$ ;  $K^*=-0,5$ .

Для идеального случая ( $a_0=2t+3$ ): - x - с положительной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - - - с отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - - - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$ .

Для идеального случая ( $a_0=0,5t+3$ ): - xx - с положительной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - - - с отрицательной обратной связью при  $K_1^*=-0,5$ ; - - - с положительной обратной связью при  $K_1^*=0,5$



4. Уменьшение  $K^*_1$  – коэффициента в итерационной процедуре настройки коэффициента обратной связи – приводит, естественно, к тому, что нейрон с обратной связью по своим характеристикам приближается к нейрону без обратной связи.

### 12.6. Исследование динамики однослойных нейронных сетей в режиме самообучения

Ниже представлены результаты моделирования трех типов нейронных сетей в режиме самообучения: нейронная сеть с поиском центров мод распределения  $f(x)$ ; нейронная сеть в виде слоя нейронов с двумя решениями; нейронная сеть в виде нейрона с  $K_p$  решениями.

Основной задачей исследования является оценка качества разработанных алгоритмов при наличии на входе сигнала  $x(n)$  с распределением произвольной модальности. Качество определяется числом найденных и выделенных алгоритмом мод распределения  $f(x)$  при заданной точности получения величин настраиваемых коэффициентов нейронной сети.

#### 12.6.1. Нейронная сеть с поиском центров мод распределения $f(x)$

В соответствии с результатами гл. 9 рассматривается алгоритм самообучения, реализующий следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathbf{b}(x_k, n+1) = \mathbf{b}(x_k, n) + K^*[x(n) - \mathbf{b}(x_k, n)] \quad (12.6)$$

и включающий в себя следующие этапы.

1. В заданном интервале изменения  $x$  случайным образом выбираются координаты  $K_p$ -мерного вектора  $\mathbf{b}(x_k, 0)$ .

2. На вход поступает очередной образ  $x$ . Вычисляется ближайший к данному  $x$  центр  $\mathbf{b}$ .

3. В соответствии с выражением (12.6) данная координата вектора  $\mathbf{b}(x_k)$  изменяется.

4. Замыкается внутренний цикл на п.2, затем внешний цикл на п.1. Распределение случайного входного сигнала  $x(n)$  представляет собой сумму нормальных законов с заданной дисперсией и математическими ожиданиями, равными 2, 4, ..., 16. Число мод распределения  $f(x)$  в процессе эксперимента устанавливалось фиксированным от двух до восьми. На рис. 12.30 представлена типовая зависимость  $\mathbf{b}(x_k, n)$  в режиме

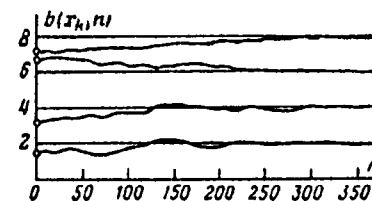


Рис. 12.30. Изменение координат центров классов в процессе настройки при  $K^*=0,02$ ;  $\sigma=0,5$

настройки, для одного из вариантов случайных начальных условий. Результаты работы алгоритма представлены в табл. 12.1 и 12.2. В таблицах  $i$  – номера мод распределения  $f(x)$ , участвующие в эксперименте (считая слева по оси  $x$  моды с координатами 2, 4 ...),  $Z$  – модальность распределения  $f(x)$ ,  $j$  – номер цикла выбрасывания случайных начальных условий  $\mathbf{b}(x_k, 0)$ , поиска экстремума  $R$ . Таблица 12.1 просчитана для случая  $K_p=5$ ,  $M=300$  (число итераций по  $n$ ),  $K^*=0,02$ . В ней для каждого  $\sigma$  в правой колонке представлено число мод распределения  $f(x)$ , найденных алгоритмом на данном  $j$ -м шаге выброса случайных начальных условий. В левой колонке представлено соответственно число мод, найденных за все

Таблица 12.1

$i$	$Z$	$j$	$\sigma=0,1$	$\sigma=0,3$	$\sigma=0,5$	$\sigma=0,7$	$\sigma=0,9$					
1	2	1	2	2	2	2	2					
		2	2	2	2	2	1	2	1	0	0	
		3	2	2	2	0	2	1	2	0	0	0
		4	2	1	2	2	2	2	0	0	0	
		5	2	0	2	0	2	0	2	0	1	1
1	3	1	3	3	1	1	1	1	1	1	1	
		2	3	2	3	3	1	0	1	0	1	0
		3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1
		4	3	3	3	3	3	3	2	1	2	2
		5	3	2	3	2	3	1	2	2	2	1
1	4	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2
		2	4	4	3	3	2	1	2	1	2	1
		3	4	2	3	1	2	1	2	1	2	2
		4	4	2	4	3	3	1	3	1	2	0
		5	4	4	4	4	4	3	3	2	2	1
1	5	1	3	3	2	2	0	0	0	0	0	0
		2	4	2	3	1	1	1	1	1	2	2
		3	5	3	5	3	2	2	3	2	4	3
		4	5	2	5	1	4	1	4	2	5	2
		5	5	1	5	1	5	1	4	1	5	1

Таблица 12.2

j	i=1,2,3,4,5,6		i=1,2,3,4,5,6,7		i=1,2,3,4,5,6,7,8	
	Z=K <sub>p</sub> =6		Z=K <sub>p</sub> =7		Z=K <sub>p</sub> =8	
1	0	0	3	3	2	2
2	2	2	4	1	4	3
3	2	1	6	2	4	1
4	4	2	6	2	5	1
5	4	0	7	3	6	2
6	4	1	7	0	6	1
7	4	0	7	0	6	2
8	4	2	7	2	7	4
9	5	1	7	1	8	3
10	5	3	7	3	8	2
11	5	1	7	0	8	2
12	5	1	7	0	8	2
13	5	2	7	0	8	0
14	5	0	7	1	8	3
15	6	2	7	2	8	2
16	6	2	7	5	8	1
17	6	0	7	1	8	1
18	6	1	7	2	8	3
19	6	2	7	0	8	0
20	6	1	7	2	8	2

предыдущие циклы, включая  $j$ -й. Такого же рода данные представлены в табл. 12.2 для случая  $Z=K_p$ ,  $K^*=0,01$ ,  $M=100$ ,  $\sigma=0,5$ . Анализ результатов работы рассматриваемого алгоритма самообучения, представленных в табл. 12.1, 12.2, позволяет сделать выводы:

1) рассматриваемый алгоритм достаточно работоспособен при значительной сложности ( $Z$ ) задачи самообучения;

2) экспериментальные результаты подтверждают теоретические выводы, сделанные в гл.9 относительно предлагаемого алгоритма поиска локальных и глобального экстремумов функций;

3) чем больше  $\sigma$  (степень пересечения классов), тем ниже качество работы алгоритма при фиксированных  $Z$ ,  $K_p$ ,  $K^*$ ,  $i$ ,  $j$ .

Данный алгоритм был несколько видоизменен, так как очевидно, что задание начальных условий для поиска экстремума функционала вторичной оптимизации (начальных значений координат центров классов) лучше производить в виде

координат первых  $Z$  образов, поступивших на вход нейронной сети в режиме самообучения. Повышение качества работы алгоритма самообучения в данном случае по сравнению с равновероятным заданием начальных условий на некотором интервале иллюстрируется табл. 12.3, в которой для данных двух способов задания начальных условий и описанного выше алгоритма самообучения представлено число мод распределения, найденных на  $A$ -м шаге выброса начальных условий и за  $A$  шагов. В данном эксперименте  $K^*=0,02$ ,  $\sigma=0,5$ , коэффициенты  $f(x)$   $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8$  соответственно равны  $-9,1; -7, -3, -5, -1; 3,13$ . Пространство  $X$  ограничено интервалом  $[-11,5]$ .

Таблица 12.3

Моды $i$	Число мод $z$	Номер эксперимента $j$	Выбор начальных условий			
			Равновероятно		по $(x_1) \dots x(z)$	
1-4	4	1	0	0	3	3
		2	1	1	3	3
		3	2	2	3	4
		4	0	2	3	4
		5	1	2	2	4
1-5	5	1	2	2	1	1
		2	1	2	5	5
		3	1	2	1	5
		4	1	3	1	5
		5	1	3	3	5
1-6	5	1	1	1	4	4
		2	3	4	0	4
		3	0	4	2	5
		4	2	5	3	6
		5	0	5	1	6
1-7	7	1	1	1	4	4
		2	3	3	1	4
		3	2	4	1	5
		4	1	4	1	6
		5	4	5	3	6
1-8	8	1	4	4	2	2
		2	1	4	4	6
		3	3	4	2	7
		4	3	4	2	8
		5	3	5	2	8

### 12.6.2. Нейронная сеть с $N^*$ выходными каналами

В данном случае рассматривалась нейронная сеть в виде слоя нейронов с характеристиками  $N=1, N^*=3$ . Структурная схема данной системы представлена на рис. 12.31. В данном случае

$$y' = \{x - b[y_1(a_{01}), y_2(a_{02}), y_3(a_{03})]\}^2, \quad (12.7)$$

причем величина  $b(y)$  однозначно определяется по известным в текущий момент времени величинам  $a_{01}, a_{02}, a_{03}$  в соответствии с рис. 12.32, табл. 12.4 и следующими выражениями:

$$b_1 = a_{01} - \frac{a_{02} - a_{01}}{2};$$

$$b_i = a_{0,i-1} + \frac{a_{0i} - a_{0,i-1}}{2}; \quad i=2,3;$$

$$b_4 = a_{03} + \frac{a_{03} - a_{02}}{2}.$$

Из (12.7) следует, что

$$\frac{\partial y'}{\partial a_{0i}} = -2[x(n) - b(x, n)] \frac{\partial b}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial a_{0i}}. \quad (12.8)$$

Здесь согласно рис. 12.31  $\partial y_i / \partial a_{0i} = -1$ . Вектор  $\partial b / \partial y_i$  вычисляется следующим образом. Табл. 12.4 может быть представлена иначе, а именно в виде табл. 12.5.

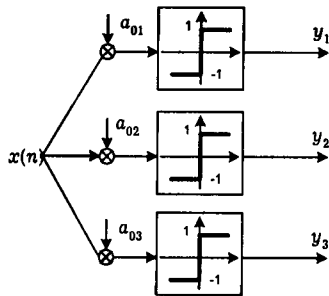


Рис. 12.31. Структурная схема слоя нейронов ( $N=1$ )

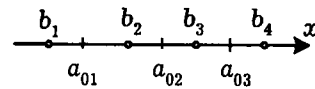


Рис.12.32. К расчету координат центров классов

Таблица 12.4

y	b(y)			
	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>
y <sub>1</sub>	-1	+1	+1	+1
y <sub>2</sub>	-1	-1	+1	+1
y <sub>3</sub>	-1	-1	-1	+1

Таблица 12.5

y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub> , y <sub>3</sub>			
	-1,-1	-1,1	1,-1	1,1
-1	b <sub>1</sub>	-	-	-
1	b <sub>2</sub>	-	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>

y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub> , y <sub>3</sub>			
	-1,-1	-1,1	1,-1	1,1
-1	b <sub>1</sub>	-	b <sub>2</sub>	-
1	-	-	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>

y <sub>3</sub>	y <sub>1</sub> , y <sub>2</sub>			
	-1,-1	-1,1	1,-1	1,1
-1	b <sub>1</sub>	-	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>
1	-	-	-	b <sub>4</sub>

Отсюда следует, что

$$\left[ \frac{\partial b(y)}{\partial y_1}, \frac{\partial b(y)}{\partial y_2}, \frac{\partial b(y)}{\partial y_3} \right] = [b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3].$$

Окончательный алгоритм настройки коэффициентов системы в данном случае выглядит следующим образом:

$$a_{0i}(n+1) = a_{0i}(n) + K^*_{0i} [x(n) - b(y, n)] \frac{\partial b(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=y(n)}. \quad (12.9)$$

Вектор  $b(y, n)$  вычисляется либо так, как указано выше, либо (для системы с более сложной структурой) по рекуррентной формуле, аналогичной рассмотренной в предыдущем пункте. Экспериментально исследованный алгоритм содержит следующие этапы работы:

1. На вход системы поступает образ  $x(n)$ .
2. Случайным образом на интервале изменения  $x$  задаются начальные значения настраиваемых параметров  $a_{0i}$  ( $i=1,2,3$ ).
3. По значениям  $a_{0i}$  вычисляются значения  $b_1, \dots, b_4$ .
4. Выбирается компонента вектора  $b(y)$ , ближайшая к  $x(n)$ .
5. Для данной компоненты выбирается соответствующая величина в векторе  $\partial b / \partial y_i$ .
6. Пользуясь данными пп. 1,2,4,5 и выражением (12.9), производят настройку коэффициентов системы.
7. На вход системы поступает образ  $x(n+1)$  и далее продолжается процесс настройки, начиная с п.3.

Исследовалось качество работы алгоритма как при определенном образом задаваемых начальных условиях, так и при случайно задаваемых с усреднением результатов по множеству случайных выбросов начальных условий настройки.

На рис. 12.33 представлена иллюстрация динамики настройки системы при определенных начальных условиях (координаты мод равны 3, 5, 7; сплошная линия – один вариант, пунктирная – другой).

На рис. 12.34, 12.35 представлены некоторые результаты работы алгоритма при случайных начальных условиях и конечной последовательности образов, а также заданных начальных условиях и различной длине последовательности образов. Жирные линии соединяют коэффициенты центров классов начальные ( $n=0$ ) и конечные ( $n=M$ ) моменты настройки.

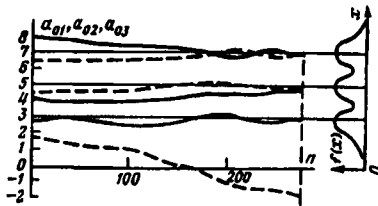


Рис.12.33. Динамика настройки коэффициентов системы, представленной на рис. 12.31

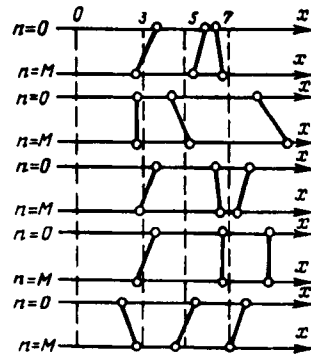


Рис.12.34. Результаты исследования при различных начальных условиях и одинаковой длине выборки  $M$  на входе

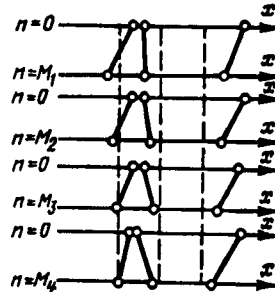


Рис.12.35. Результаты исследования при одинаковых начальных условиях и различной длине выборки  $M$  на входе:  $M_1=150$ ;  $M_2=300$ ;  $M_3=450$ ;  $M_4=600$

### 12.6.3. Нейрон с $K_p$ решениями

В данном случае

$$y = 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K_p-1} [\text{sign}(g - a_{j,j+1}) + 1],$$

$$g(n) = a_1(n) x(n) - a_0(n).$$

Как и ранее,

$$y' = [x - b(y)]^2, \quad \frac{\partial y'}{\partial a} = -2[x - b(y)] \frac{\partial b(y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a}.$$

Используя полученные в гл.9 значения  $\partial y / \partial a$ , для данного случая можно записать рекуррентные выражения, являющиеся основой для построения соответствующего алгоритма настройки системы в режиме самообучения:

$$a_0(n+1) = a_0(n) - K^*_0 [x(n) - b(y)] \frac{\partial b(y)}{\partial y}, \quad K^*_0 > 0;$$

$$a_1(n+1) = a_1(n) + K^*_1 [x(n) - b(y)] \frac{\partial b(y)}{\partial y} \text{sign } x.$$

Алгоритм настройки системы содержит в данном случае следующие этапы:

1. На некотором заданном интервале случайным образом выбираются значения коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$ .
2. В соответствии со структурой разомкнутой системы и значениями коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$  вычисляются текущие значения порогов

$$x_{j,j+1}(n) = \frac{a_{j,j+1} + a_0(n)}{a_1(n)}.$$

3. Вычисляются значения  $b(y)$  в соответствии с выражениями

$$b_1 = x_{1,2} - \frac{x_{2,3} - x_{1,2}}{2};$$

$$b_j = (x_{j-1,j} + x_{j,j+1}) \frac{1}{2}, \quad j=2, 3, \dots, K_p-1;$$

$$b_{K_p} = x_{K_p-1, K_p} + \frac{x_{K_p-1, K_p} - x_{K_p-2, K_p-1}}{2}.$$

4. На вход системы в момент времени  $n$  поступает образ  $x(n)$  и вычисляется величина  $y$ .

5. По величине  $y$  выбираются соответствующие значения  $b(y)$  и  $db(y)/dy$ .

6. Производится коррекция настраиваемых коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$  в соответствии с приведенными выше выражениями.

7. Процедура повторяется начиная с п.2.

8. Процедура повторяется начиная с п.1, и результаты усредняются по множеству выбросов начальных условий.

### 12.7. Двухслойная нейронная сеть в режиме самообучения

Вначале предметом исследования являлась двухслойная нейронная сеть, в которой в первом слое было четыре нейрона с двумя решениями, во втором – нейрон с  $K_p = 5$  решениями. Здесь

$$y = F(g) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k_p=1}^{K_p} \left[ \text{sign} \left\{ \sum_{j=1}^{H_1} a_j \text{sign} \left( \sum_{i=0}^{N-2} a_{ij} x_i \right) - k_p \right\} + 1 \right].$$

С использованием материалов гл.9 были получены выражения, являющиеся основой для построения замкнутой двухслойной нейронной сети в режиме самообучения, в следующем виде:

$$a_j(n+1) = a_j(n) + K^* [x(n) - b(y,n)]^T \frac{\partial b(y,n)}{\partial y} \text{sign} \left[ \sum_{i=0}^N a_{ij}(n) x_i(n) \right]^{m_n},$$

$$j=1, \dots, 5;$$

$$a_{ij}(n+1) = a_{ij}(n) + K^{**} [x(n) - b(y,n)]^T \frac{\partial b(y,n)}{\partial y} \text{sign} [a_j(n) x_i(n)]^{m_n},$$

$$i=1, \dots, N; j=1, \dots, 5;$$

$$b(y, n+1) = b(y, n) + K^{***} [x(n) - b(y, n)].$$

Экспериментальное исследование данного алгоритма показало, что скорость сходимости при нахождении некоторой локальной моды мала и причиной этого является применение в многослойной системе нейронов с двумя решениями, которые в значительной степени «загрубляют» информацию о градиенте функционала вторичной оптимизации при квантовании выходящего сигнала. В связи с этим основным предметом исследования являлась двухслойная нейронная сеть, по струк-

туре подобная описанной выше, но состоящая из нейронов с континуумом решений. Для данной системы:

$$y = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k_p=1}^{K_p=5} \left[ \frac{2}{\pi} \arctg B \left\{ \sum_{j=1}^{H_1=4} a_j \frac{2}{\pi} \arctg B \left( \sum_{i=0}^N a_{ij} x_i \right) - k_p \right\} + 1 \right];$$

$$a_j(n+1) = a_j(n) + K^* [x - b(y,n)]^T \frac{\partial b(y,n)}{\partial y} \times$$

$$\times \frac{2}{\pi} \sum_{k_p=1}^{K_p} \frac{B}{1 + \sum_{j=1}^{H_1} a_j(n) \frac{2}{\pi} \arctg B \left[ \sum_{i=0}^N a_{ij}(n) x_i(n) - k_p \right]^2} \times$$

$$\times \arctg B \left[ \sum_{i=0}^N a_{ij}(n) x_i(n) \right]^{m_n}; \quad (12.10)$$

$$a_{ij}(n+1) = a_{ij}(n) + K^{**} [x - b(y,n)]^T \frac{\partial b(y,n)}{\partial y} \times$$

$$\times \frac{2}{\pi} \sum_{k_p=1}^{K_p} \frac{B^2 a_j(n) x_i(n)}{1 + \sum_{j=1}^{H_1} a_j(n) \frac{2}{\pi} \arctg B \left[ \sum_{i=0}^N a_{ij}(n) x_i(n) - k_p \right]^2} \times$$

$$\times \frac{1}{1 + \left( B \sum_{i=0}^N a_{ij}(n) x_i(n) \right)^2}^{m_n}; \quad (12.11)$$

$$b(y, n+1) = b(y, n) + K^{***} [x - b(y, n)]^{m_n}. \quad (12.12)$$

Реализованный алгоритм представляет собой последовательность следующих этапов:

- 1) в память вводятся случайные или определенные начальные значения координат центров классов и настраиваемых коэффициентов данной двухслойной нейронной сети;
- 2) производится подсчет векторов  $db(y)/dy$ ;
- 3) на вход нейронной сети поступает образ  $x$ ;
- 4) по данному  $x$  и состоянию многослойной нейронной сети в данный момент времени вычисляется значение  $y$ ;

5) выбираются векторы  $\mathbf{b}(y)$  и  $\partial \mathbf{b}(y)/\partial y$ , соответствующие данному  $y$ ;

6) с использованием результатов пп.3, 5 вычисляются новые значения настраиваемых коэффициентов нейронной сети и центров классов;

7) при подаче на вход следующего образа повторяется алгоритм по пп.4-6;

8) после нахождения локального экстремума алгоритм повторяется по пп. 1-7.

На рис. 12.36 представлены линии равного значения плотности распределения  $f(x)$ , используемой при исследовании данного алгоритма. Оптимальные значения настраиваемых коэффициентов нейронов первого слоя данной нейронной сети:  $a_{11}=9$ ;  $a_{12}=15$ ;  $a_{13}=21$ ;  $a_{14}=27$ ;  $a_{21}=1$ ;  $a_{22}=1$ ;  $a_{23}=1$ ;  $a_{24}=1$ ;  $a_{31}=1$ ;  $a_{32}=1$ ;  $a_{33}=1$ ;  $a_{34}=1$ .

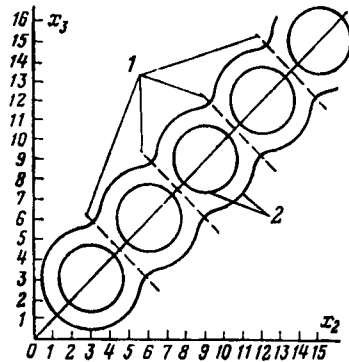


Рис.12.36. Линии равных значений плотности распределения  $f(x)$ : 1-оптимальное положение разделяющих гиперплоскостей; 2-линии равного значения плотности распределения входного сигнала для различных дисперсий распределений, представляющих моды  $f(x)$

Нейрон второго слоя с  $K_p=5$  решениям должен реализовать логическую функцию, представленную в табл. 12.6. Условием формирования правильного решения  $y$  является формирование соответствующего промежуточного значения аналогового выходного сигнала  $g(n)=y-0,5$ . На основании этого

Таблица 12.6

$y$	1	2	3	4	5
$y_1$	-1	1	1	1	1
$y_2$	-1	-1	1	1	1
$y_3$	-1	-1	-1	1	1
$y_4$	-1	-1	-1	-1	1

может быть составлена система алгебраических уравнений для определения оптимальных коэффициентов нейрона второго слоя:

$$-a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + 2,5 = 0,5;$$

$$a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + 2,5 = 1,5;$$

$$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + 2,5 = 2,5;$$

$$a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + 2,5 = 3,5;$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2,5 = 4,5.$$

Отсюда

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,5.$$

Эксперименты с рассматриваемой двухслойной нейронной сетью проводились в соответствии со следующим планом:

1. Эксперимент с различными дисперсиями распределений, составляющих моды  $f(x)$  (рис. 12.36).

2. Коэффициенты нейрона второго слоя оптимальны, значения центров классов оптимальны. Для коэффициентов нейронов первого слоя задавались следующие различные условия:

а) коэффициенты нейронов первого слоя оптимальны;

б) начальные значения коэффициентов нейронов первого слоя задавались с равным отклонением от оптимальных;

в) начальные значения коэффициентов нейронов первого слоя задавались с различными по величине и по знаку отклонениями от оптимальных.

3. Коэффициенты нейронов второго слоя оптимальны; при неоптимальных начальных значениях центров классов проводились эксперименты, аналогичные пп. 2а и 2б.

4. Коэффициенты нейронов первого слоя и значения центров классов оптимальны. Начальные значения коэффициентов нейрона второго слоя не оптимальны.

5. Эксперименты, аналогичные п. 3, но с неоптимальными начальными значениями центров классов.

6. Коэффициенты нейронов первого и второго слоя и значения центров классов не оптимальны.

7. Все перечисленные выше эксперименты проводились при различных, но детерминированных начальных условиях. Завершающим явился эксперимент со случайными начальными условиями на коэффициенты нейронов и центры классов.

Эксперимент п. 1а показал устойчивость двухслойной нейронной сети в глобальном экстремуме специальной средней



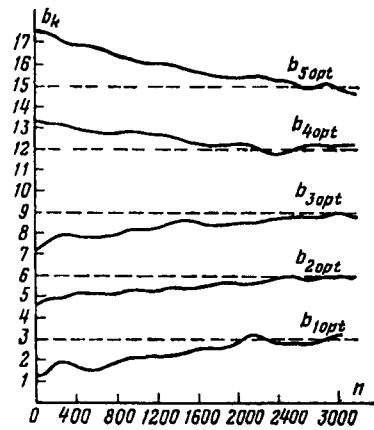


Рис.12.37. Динамика настройки по координатам центров классов

эксперимента, выбранное расположение мод плотности распределения входного сигнала делает гиперплоскости (I, II, III, IV) мало чувствительными к повороту. Здесь при сравнительно большом диапазоне угла поворота плоскостей величина функционала качества не изменяется (при условии неизменного по-

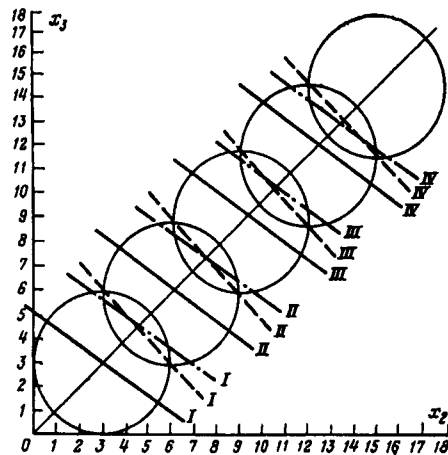


Рис. 12.38. Результаты исследования двухслойной нейронной сети в режиме самообучения: ———— — начальное положение гиперплоскостей; - - - - - оптимальное положение гиперплоскостей; — · — · — положение гиперплоскостей через 3 000 итераций

функции риска. Для случая, когда начальные значения коэффициентов нейронов обоих слоев оптимальны, а центры классов не оптимальны, результаты эксперимента приведены на рис. 12.37. Для случая, когда начальные значения коэффициентов нейронов первого слоя были не оптимальны, а начальные значения коэффициентов нейронов второго слоя и значения центров классов оптимальны, результаты эксперимента приведены на рис. 12.38. Как видно из результатов данного эк-

сперимента, эксперимент, выбранное расположение мод плотности распределения входного сигнала делает гиперплоскости (I, II, III, IV) мало чувствительными к повороту. Здесь при сравнительно большом диапазоне угла поворота плоскостей величина функционала качества не изменяется (при условии неизменного по-

рога  $a_{1j}$ ). Этот факт, очевидный из физических соображений, подтверждается экспериментом. Приведенные рассуждения позволяют считать целесообразным в дальнейшем при заданном расположении мод  $f(x)$  исследование лишь динамики настройки порогов  $a_{ij}(j=1, 2, 3, 4)$  и только в отдельных исключительных случаях исследовать также и динамику настройки коэффициентов наклона гиперплоскостей.

Для случая, когда начальные значения коэффициентов нейрона второго слоя оптимальны, а начальные значения коэффициентов нейронов первого слоя и значения центров классов брались с одинаковыми по величине отклонениями в одну сторону (отклонения отрицательны), результаты эксперимента приведены на рис.12.39. Динамика настройки порогов приведена на рис.12.40 (сплошная линия). В случае положительных отклонений динамика настройки также проиллюстрирована на рис.12.40 (штрих-пунктирная линия). Для случая, когда начальные значения коэффициентов нейрона второго слоя оптимальны, а начальные значения коэффициентов нейрона первого слоя и центров классов брались с различными по величине и знаку отклонениями от оптимальных, результаты эксперимента приведены на рис. 12.40 (пунктир) и 12.41.

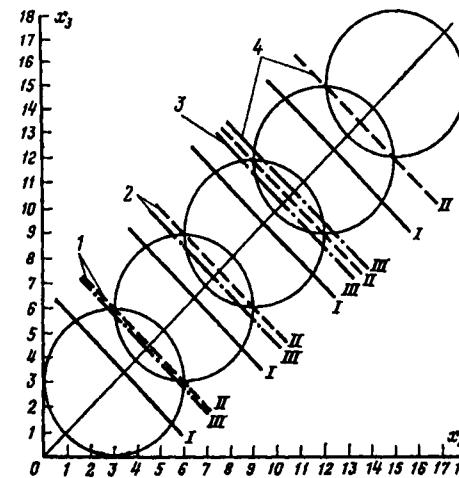


Рис. 12.39. Результаты исследования двухслойной нейронной сети в режиме самообучения: I — начальное положение гиперплоскостей; II — оптимальное положение гиперплоскостей; III — положение гиперплоскостей через 3 000 итераций

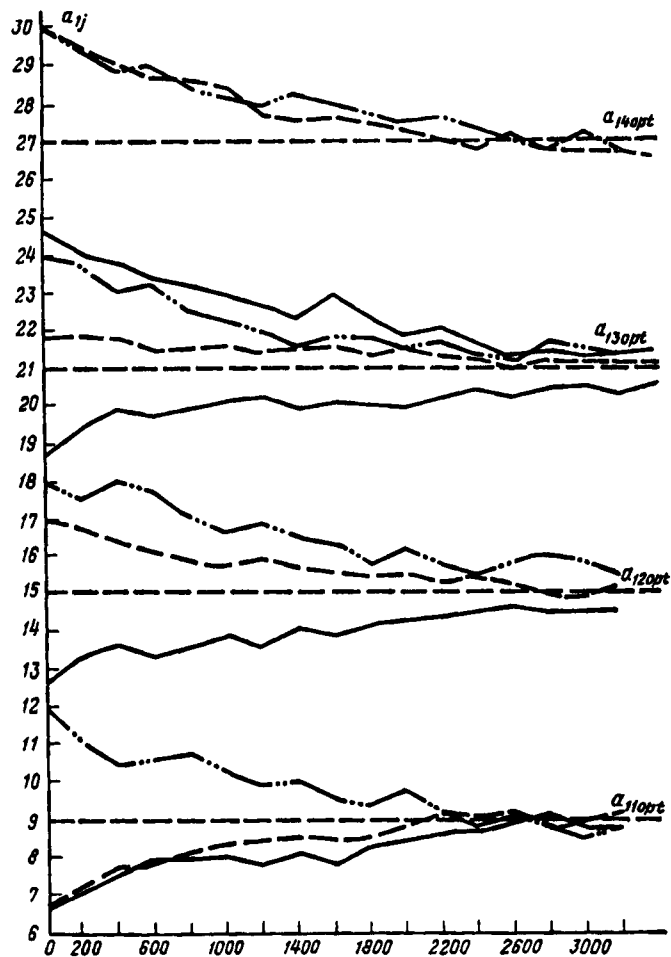


Рис. 12.40. Результаты исследования двухслойной нейронной сети в режиме самообучения: 1-4 - конечные положения гиперплоскостей, реализуемых нейронами 1-4 первого слоя соответственно

Цель эксперимента п.6 состояла в выяснении влияния дисперсии распределений, представляющих моды  $f_x(x)$ , на качество распознавания. Эксперименты этой группы проводились при одних и тех же начальных условиях (типа начальных условий эксперимента, представленного на рис. 12.39) и различных дисперсиях  $\sigma^2$  (рис. 12.42).

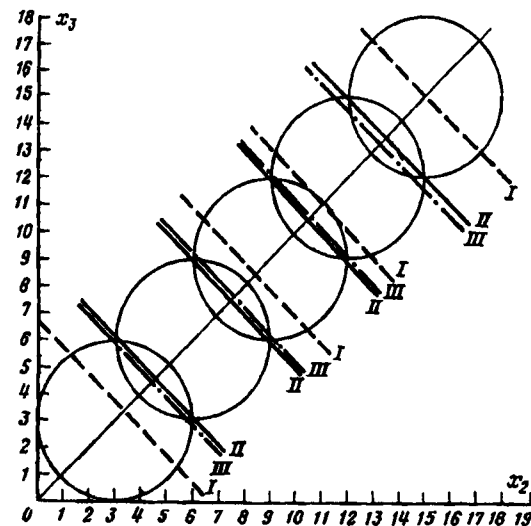


Рис. 12.41. Результаты исследования двухслойной нейронной сети в режиме самообучения: I - начальное положение гиперплоскостей; II - оптимальное положение гиперплоскостей; III - положение гиперплоскостей через 3 000 итераций

Сравнивая результаты экспериментов этой группы, можно сделать вывод о том, что для данного расстояния между модами плотности распределения входного сигнала задача самообучения может быть решена для  $\sigma_{\text{макс}}^2 = 1,5$ . Этот экспериментальный факт имеет ясное физическое обоснование, так как при большом  $\sigma^2$  (сильно пересекающиеся классы) невозможно выделить группы локально сосредоточенных объектов и, следовательно, методы самообучения (на данном этапе своего развития), основанные на выделении таких групп, оказываются неработоспособными.

Для случая, когда начальные значения коэффициентов нейрона первого слоя и начальные значения центров классов оптимальны, а начальные значения коэффициентов нейрона второго слоя не оптимальны, динамика процесса настройки коэффициентов нейрона второго слоя и результаты эксперимента представлены на рис. 12.43. Все эксперименты были проведены при памяти системы  $m_n = 1$ . В этом смысле следует учесть тот факт, что увеличение памяти, вообще говоря, уменьшает случайную ошибку измерения.

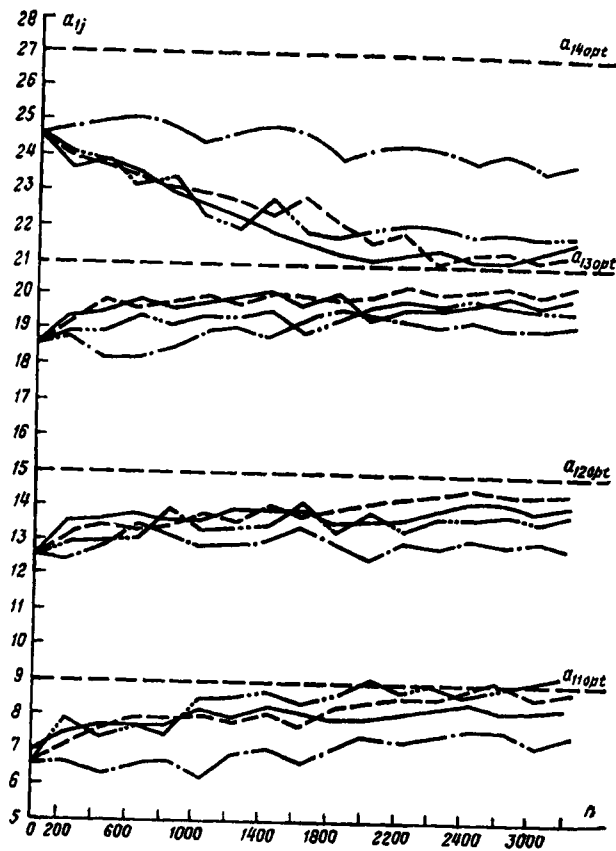


Рис. 12.42. Результаты исследования двухслойной нейронной сети в режиме самообучения: - - -  $\sigma^2=1$ , - - - -  $\sigma^2=1,5$ ; - - - -  $\sigma^2=2$ ; - - - -  $\sigma^2=2,5$

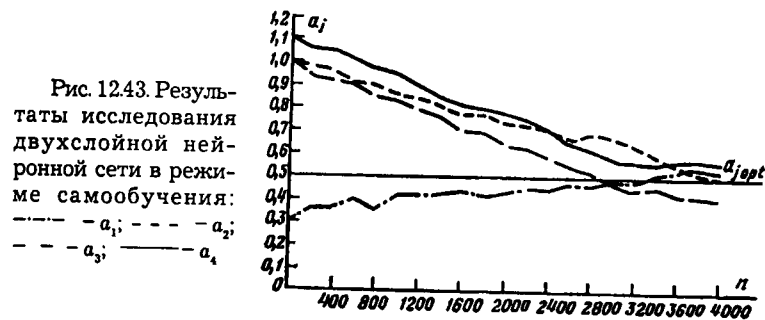


Рис. 12.43. Результаты исследования двухслойной нейронной сети в режиме самообучения: - - -  $a_1$ ; - - -  $a_2$ ; - - -  $a_3$ ; - - -  $a_4$

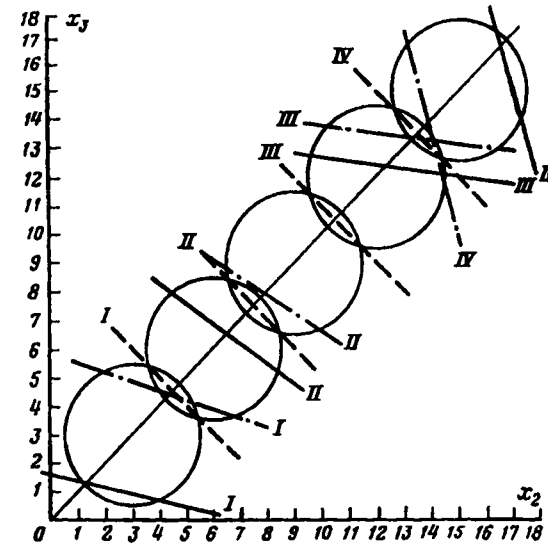


Рис. 12.44. Результаты исследования двухслойной нейронной сети в режиме самообучения: I, II, III, IV - номера соответствующих нейронов первого слоя; - - - - оптимальное положение гиперплоскостей; - - - - начальное положение; - - - - положение гиперплоскостей после 5 000 итераций

Следует добавить, что критерием останова процесса являлось вхождение кривых в «трубку» диаметром 0,2 (см. 12.43) и длиной 500 итераций. Эксперимент иллюстрируется рис. 12.44.

На рис. 12.45 представлены результаты работы двухслойной нейронной сети в режиме самообучения с несколько другим видом типовой плотности  $f_x(x)$ .

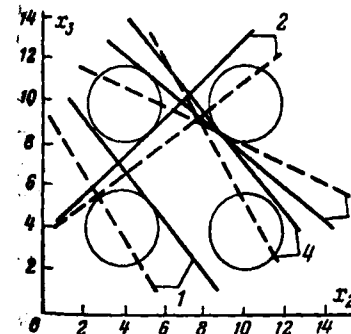


Рис. 12.45. Результаты исследования двухслойной нейронной сети в режиме самообучения: 1-4 - номера соответствующих нейронов первого слоя

### 12.8. О некоторых инженерных методах выбора параметров матриц в алгоритмах настройки многослойных нейронных сетей по замкнутому циклу

При построении алгоритмов настройки многослойных нейронных сетей по замкнутому циклу с оценкой только первой производной функционала оптимизации вряд ли будем иметь информацию для того, чтобы сделать матрицу  $K^*$  недиагональной. В простейшем случае это единичная матрица, умноженная на постоянный или переменный во времени, как в методе стохастической аппроксимации, коэффициент. Правда уже сейчас, как показано выше в экспериментах, есть основания этот коэффициент делать различным для настройки коэффициентов различных слоев многослойной нейронной сети. Как указывалось в гл. 9 основная цель применения методов стохастической аппроксимации заключается в обеспечении нулевой случайной и динамической ошибки определения вектора настраиваемых коэффициентов в установившемся состоянии. Однако применение данных методов приводит к увеличению соответствующих динамических ошибок в переходном процессе, т.е. в режиме настройки. В реальных инженерных задачах вряд ли есть необходимость в обеспечении нулевой случайной ошибки настройки многослойных нейронных сетей в установившемся состоянии. Некоторая конечная, достаточно малая дисперсия распределения настраиваемых коэффициентов допустима ввиду относительной гладкости функционала вторичной оптимизации в экстремальной точке. Эта конечная дисперсия распределения  $f_a(a)$  не приводит к значительному увеличению функционала вторичной оптимизации и может быть обеспечена не переменной (как в методе стохастической аппроксимации), а постоянной во времени матрицей  $K^*$ . В случае постоянной во времени матрицы  $K^*$  возможно два инженерных подхода к выбору значений ее коэффициентов, по крайней мере для настройки нейронов первого слоя. Первый подход основан на анализе априори задаваемой для многослойной нейронной сети сложности задачи, определяемой модальностью  $f_x(x)$ , при фиксированных размерах пространства признаков.

Второй подход, также основанный на анализе экспериментов, показывает, что в реальном случае возникает объективная необходимость в процессе настройки многослойной

нейронной сети производить оценку функционала вторичной оптимизации и по его скалярной величине судить о качестве работы контура настройки многослойной нейронной сети. Эта идея была реализована в конкретных многослойных нейронных сетях. Если кривая зависимости функционала вторичной оптимизации от  $n$  сильно колеблется, нужно уменьшить  $K^*$ , если она достаточно гладкая, то нужно увеличить  $K^*$ , чтобы уменьшить систематическую ошибку настройки (увеличить быстродействие) до появления колебательности (достаточно малой) в данной зависимости. При этом первый подход к выбору  $K^*$  можно использовать для выбора начального значения  $K^*$  при втором подходе.

### 12.9. Построение многослойной нейронной сети для решения задачи обращения матрицы

В качестве примера рассмотрим построение многослойной нейронной сети и алгоритма ее настройки по замкнутому циклу для решения задачи обращения матрицы размером  $2 \times 2$ . Результатом обращения должна быть также матрицы размером  $2 \times 2$ , поэтому на выходе многослойной нейронной сети должны быть четыре нейрона с континуумом решений. Минимальный вариант структуры разомкнутой трехслойной нейронной сети определяется в виде, изображенном граф-схемой на рис. 12.46. При недостаточной точности обращения матрицы в оптимальном режиме структура разомкнутой многослойной нейронной сети должна рассматриваться в сторону увеличения числа нейронов сначала первого, а затем второго слоя.

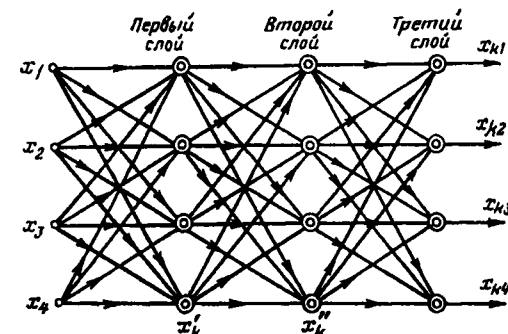


Рис. 12.46. Графы многослойной нейронной сети для обращения матрицы

Начальные условия на настраиваемые коэффициенты нейронов первого слоя здесь необходимо выбрать так, чтобы при условии  $B=\infty$  четыре гиперплоскости делили исходное четырехмерное пространство признаков на области равного гиперобъема. Выбор начальных условий на настраиваемые коэффициенты нейронов второго и третьего слоя данной системы должен производиться аналогично тому, как это делается для нейронов первого слоя, так как и в данном случае система строится из нейронов с континуумом решений.

Отдельным вопросом является формирование обучающей выборки для рассматриваемой многослойной системы. В данном случае

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}; \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x_4}{D} & -\frac{x_2}{D} \\ -\frac{x_3}{D} & \frac{x_1}{D} \end{bmatrix}; D = x_1x_4 - x_2x_3.$$

В то время как на амплитуду изменения входного сигнала многослойной нейронной сети практически не накладывается ограничений, амплитуда выходного сигнала нейронной сети ограничена по каждому каналу диапазоном  $[-1, +1]$  ввиду специфики выходных нейронов. Эта особенность требует определенной нормировки входного сигнала таким образом, чтобы ни одна из компонент выходного сигнала не превышала пределов  $[-1, +1]$ . Данная нормировка входного сигнала должна производиться следующим образом. Пусть  $\mathbf{X}$  - исходная матрица и  $x = \max\{x_i\}$ . Разделив  $\mathbf{X}$  на  $x$ , получим матрицу  $\mathbf{X}_1$ , элементы которой лежат в пределах  $[-1, +1]$ . Обозначим:

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x} & \frac{x_2}{x} \\ \frac{x_3}{x} & \frac{x_4}{x} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}^{-1} = \left( xD_1 \begin{bmatrix} \frac{x_1}{xD_1} & \frac{x_2}{xD_1} \\ \frac{x_3}{xD_1} & \frac{x_4}{xD_1} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{xD_1} \left( D_1 \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x} & \frac{x_2}{x} \\ \frac{x_3}{x} & \frac{x_4}{x} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{xD_1} \begin{bmatrix} \frac{x_4}{x} & -\frac{x_2}{x} \\ -\frac{x_3}{x} & \frac{x_1}{x} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, умножая элементы матрицы  $\mathbf{X}$  на входе на величину  $1/xD_1$  и подавая ее на систему обращения, на выходе получим матрицу,

$$\begin{bmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{bmatrix} \frac{1}{x},$$

элементы которой лежат в диапазоне  $[-1, 1]$  и которую достаточно умножить на величину  $1/xD_1$ , чтобы получить окончательный результат, т.е. матрицу  $\mathbf{X}^{-1}$ .

Структура разомкнутой многослойной нейронной сети описывается следующими соотношениями:

$$y'_{h_1} = \frac{2}{\pi} \arctg B \left( \sum_{h_0=1}^4 a_{h_1 h_0} x_{h_0} + a_{0h_1} \right), h_1=1, 2, 3, 4;$$

$$y''_{h_2} = \frac{2}{\pi} \arctg B \left( \sum_{h_1=1}^4 a_{h_2 h_1} x_{h_1} + a_{0h_2} \right), h_2=1, 2, 3, 4;$$

$$y'''_{h_3} = \frac{2}{\pi} \arctg B \left( \sum_{h_2=1}^4 a_{h_3 h_2} x_{h_2} + a_{0h_3} \right), h_3=1, 2, 3, 4.$$

Указание учителя  $\epsilon_{h_3}$  многослойной системы должно выработываться алгоритмическим путем с использованием одного из известных алгоритмов обращения матрицы и контролем точности обращения. Выражения для оценок градиентов среднеквадратичной ошибки обращения элементов матрицы

$$\hat{a}_{2g} = \frac{m_n}{x^2_g} = \frac{1}{4} \sum_{h_3=1}^4 \frac{m_n}{(y'''_{h_3} - \epsilon_{h_3})^2} = \frac{1}{4} \sum_{h_3=1}^4 \frac{m_n}{(x_{gh_3})^2}$$

имеют следующий вид:

$$\frac{\partial x^2_g}{\partial a_{h_1 h_0}} = \frac{m_n}{\pi^3} \frac{4B^3}{1+(g^1_{h_1})^2} \frac{x_{h_0}}{h_3=1} \sum_{h_3=1}^4 \frac{x_{gh_3}}{1+(g^3_{h_3})^2} \sum_{h_2=1}^4 \frac{a_{h_3 h_2} a_{h_2 h_1}}{1+(g^2_{h_2})^2};$$

$$\frac{\partial x^2_g}{\partial a_{h_2 h_1}} = \frac{m_n}{\pi^2} \frac{y'_{h_1}}{1+(g^2_{h_2})^2} \sum_{h_3=1}^4 \frac{x_{gh_3} a_{h_3 h_2}}{1+(g^3_{h_3})^2};$$

$$\frac{\partial x_g^2}{\partial a_{h_3 h_2}} = \frac{B}{\pi} \frac{y''_{2h_2 x_{gh_3}}}{1 + (g^3_{h_3})^2}$$

Здесь

$$g^1_{h_1} = \sum_{h_0=1}^4 a_{h_1 h_0} x_{h_0} + a_{0h_1};$$

$$g^2_{h_2} = \sum_{h_1=1}^4 a_{h_2 h_1} y'_{h_1} + a_{0h_2};$$

$$g^3_{h_3} = \sum_{h_2=1}^4 a_{h_3 h_2} y''_{h_2} + a_{0h_3};$$

Эти выражения служат основой для построения алгоритма адаптации многослойной системы, предназначенной для выполнения операции обращения 2x2 матрицы.

#### 12.10. Построение многослойной нейронной сети для решения задачи перевода чисел из двоичной системы исчисления в десятичную

В качестве примера подобной сети рассмотрена система перевода в десятичную систему четырехразрядного двоичного числа. После окончания режима настройки по замкнутому циклу в режиме обучения система должна в качестве желаемого соотношения «вход-выход» реализовать функцию  $\epsilon(x)$  многозначной логики, приведенную в табл. 12.7.

Табл. 12.7 позволяет сформировать обучающую выборку на входе системы вместе с указанием учителя  $\epsilon$ , выбирая представителей обучающей выборки (столбцы) из таблицы случайным образом.

Таблица 12.7

$\epsilon$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{h_0}$	$x_{h_0}^1$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
	$x_{h_0}^2$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
	$x_{h_0}^3$	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	$x_{h_0}^4$	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

Разомкнутая нейронная сеть в данном случае описывается следующим соотношением:

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k_p=1}^{K_p-1} \left[ \text{sign} \left( \sum_{h_2=1}^3 a_{h_3 h_2} \frac{2}{\pi} \arctg B \sum_{h_1=1}^4 a_{h_2 h_1} x_{h_1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{2}{\pi} \arctg B \sum_{h_0=0}^4 a_{h_1 h_0} x_{h_0} - a_{k_p, k_p+1} \right) + 1 \right];$$

$$a_{k_p, k_p+1} = k_p - 1; K_p = 10.$$

Отсюда

$$\text{sign} \frac{\partial}{\partial a_{h_3 h_2}} x_3 = \text{sign} \left[ \sum_{h_1=1}^4 a_{h_2 h_1} \sum_{h_0=0}^4 a_{h_1 h_0} x_{h_0} \right];$$

$$\text{sign} \frac{\partial}{\partial a_{h_2 h_1}} x_3 = \text{sign} \left[ a_{h_3 h_2} \sum_{h_0=0}^4 a_{h_1 h_0} x_{h_0} \right];$$

$$\text{sign} \frac{\partial}{\partial a_{h_1 h_0}} x_3 = \text{sign} \left[ a_{h_3 h_2} a_{h_2 h_1} x_{h_0} \right].$$

Данные выражения служат основой для построения алгоритма настройки многослойной системы, предназначенной для решения задачи перевода чисел из двоичной системы исчисления в десятичную.

#### 12.11. Исследование многослойной нейронной сети при произвольной квалификации учителя

Построение оптимальной модели нейронной сети в случае произвольных объективной и субъективной квалификации учителя было проведено в гл.5. В описанном ниже эксперименте рассматривался случай  $K=2$  и произвольной объективной квалификации учителя  $b_0$ .

Система распознавания образов представляла собой двухслойную нейронную сеть на нейронах с арктангенсной характеристикой и  $B=5$ . Моделировался алгоритм настройки такой нейронной сети в режимах обучения ( $b_c=1$ ) и самообучения ( $b_c=0$ ). Структурная схема алгоритма представлена на рис.12.47. Основной задачей экспериментального исследования была проверка работоспособности системы. В соответствии с этим план экспериментов предусматривал два основных пункта:

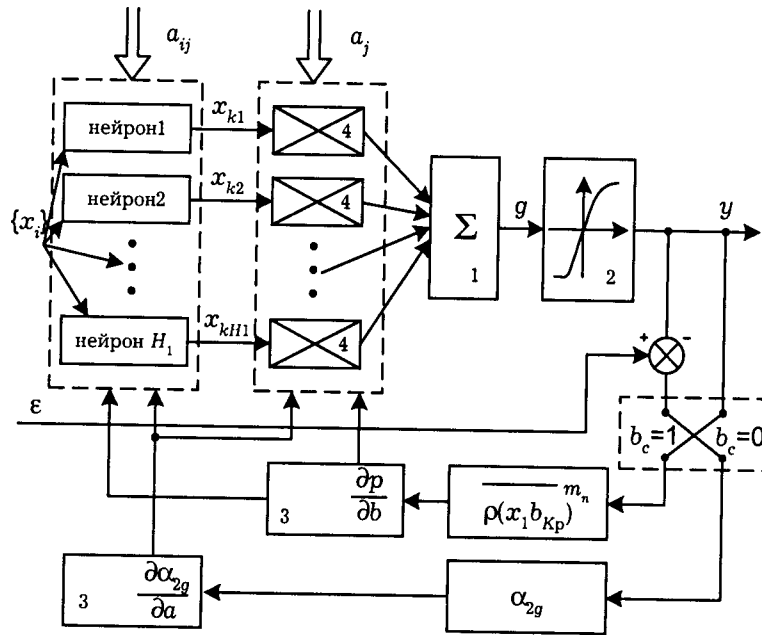


Рис.12.47. Структурная схема нейронной сети с субъективной квалификацией учителя: 1 – сумматор; 2 – нелинейный преобразователь; 3 – блоки вычисления градиента; 4 – блок перемножения

1. Исследование поведения системы при оптимальных значениях коэффициентов и различных соотношениях величин  $b_0$  и  $b_c$ .

2. Исследование динамики системы для различных  $b_0$  и  $b_c$  и неоптимальных нейронах.

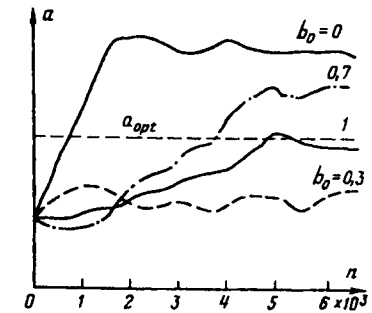
В качестве генератора входных сигналов системы использовался датчик псевдослучайных чисел с распределением, близким к нормальному и равными ковариационными матрицами для обоих классов. Экспериментальные исследования позволили сделать по п.1 следующие выводы:

1) в случае  $b_0=b_c$  наблюдается колебание коэффициентов системы около оптимального положения;

2) при  $b_c=1$  происходит постепенная расстройка системы тем сильнее, чем более  $b_0$  отличается от 1 и чем менее от 0;

3) при  $b_c=0$  вне зависимости от величины  $b_0$  система остается в оптимальном положении.

Рис.12.48. Динамика изменения коэффициента системы при  $b_c=1$  для различных  $b_0$ .



Исследования при начальных значениях коэффициентов нейронной сети, не равных оптимальным, показали, что при  $b_c=b_0$  система в результате настройки приходит к оптимальному состоянию. При  $b_c=1$  и  $b_c \neq b_0$  система не настраивается, несмотря на длительное время настройки (рис.12.48).

## 12.12. Аналитические методы исследования нейронных сетей, настраивающихся по замкнутому циклу

Ниже излагается общая методика анализа нейронных сетей, настраивающихся по замкнутому циклу. Данная методика иллюстрируется частными примерами. Отмечаются трудности использования данной методики и возможные пути решения задачи в менее частных постановках.

Общая методика анализа замкнутых нейронных сетей, настраивающихся по замкнутому циклу, по структуре аналогична методике анализа замкнутых нейронных сетей, настраивающихся по разомкнутому циклу, и состоит из следующих этапов:

1) определение плотности распределения вероятностей для вектора оценки градиента функционала вторичной оптимизации;

2) вывод стохастического дифференциального уравнения для изменения в процессе настройки плотности распределения настраиваемых коэффициентов нейронной сети;

3) решение данного уравнения;

4) нахождение распределения вероятности правильного распознавания интегрированием по пространству признаков и пространству состояний нейронной сети (пространству настраиваемых коэффициентов).

В принципе задачу выбора параметрической матрицы  $K^*$ , обеспечивающей заданное качество настройки, нужно про-

изводить, исходя из результатов п.3 методики. Однако, как будет показано ниже, это довольно трудная задача. Ее приходится решать, зачастую исходя из косвенных критериев, непосредственно не связанных с функционалом вторичной оптимизации. Ниже данные этапы исследования замкнутых нейронных сетей иллюстрируются на некоторых частных примерах, не претендующих на законченность решения для конкретных систем. В данном параграфе рассматривается линейный пороговый элемент, оптимизация которого осуществляется по критерию минимума модуля первого момента дискретной ошибки.

Для нейрона с минимизацией  $|\alpha_{1g}|$  в случае  $N = m_n = 1$  было получено рекуррентное соотношение, являющееся основой для построения блока настройки, в следующем виде:

$$a_0(n+1) = a_0(n) - K^* x_g(n).$$

*Первый этап анализа.* В данном случае имеем дело с задачей случайного блуждания по одномерной решетке. Это блуждание описывается марковской цепью с бесконечным числом состояний. Вероятности переходов системы из состояния  $mK^*$  в состояние  $(m+1)K^*$ ,  $(m-1)K^*$  и  $mK^*$  соответственно равны:

$$P[mK^*|(m+1)K^*] = \frac{1}{2} [1 - \Phi_1(mK^*)],$$

$$P[mK^*|(m-1)K^*] = \frac{1}{2} \Phi_2(mK^*);$$

$$P[mK^*|mK^*] = \frac{1}{2} [1 + \Phi_1(mK^*) - \Phi_2(mK^*)].$$

Здесь  $\Phi$  - интегральный закон распределения.

*Второй этап.* Стохастическое разностное уравнение, описывающее изменение во времени плотности распределения вероятностей порога  $a_0$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} W_{n+1}(mK^*) &= W_n[(m-1)K^*] \frac{1}{2} \{1 - \Phi_1[(m-1)K^*]\} + \\ &+ W_n(mK^*) \frac{1}{2} [\Phi_1(mK^*) + 1 - \Phi_2(mK^*)] + \\ &+ W_n[(m+1)K^*] \frac{1}{2} \Phi_2[(m+1)K^*]. \end{aligned}$$

*Третий этап.* Решение данного стохастического разностного уравнения является достаточно сложной задачей. Поэтому остановимся на решении данного уравнения для установившегося состояния ( $n \rightarrow \infty$ ).

Полагая  $a_0(0) = 0$  и переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , что соответствует системе в установившемся состоянии, получаем:

$$\begin{aligned} &W[(m-1)K^*] \frac{1}{2} \{1 - \Phi_1[(m-1)K^*]\} + \\ &+ W[(m+1)K^*] \frac{1}{2} \Phi_2[(m+1)K^*] - \\ &- W(mK^*) \frac{1}{2} [1 - \Phi_1(mK^*) + \Phi_2(mK^*)] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &W[(m-1)K^*] \frac{1}{2} \{1 - \Phi_1[(m-1)K^*]\} - \\ &- W(mK^*) \frac{1}{2} \Phi_2(mK^*) = W(mK^*) \frac{1}{2} [1 - \Phi_1(mK^*)] - \\ &- W[(m+1)K^*] \frac{1}{2} \Phi_2[(m+1)K^*] = C. \end{aligned}$$

Из условия нормировки плотности распределения настраиваемого коэффициента  $a_0$  по  $m$  следует, что  $W(mK^*) = 0$ . Поэтому  $C = 0$  и

$$\begin{aligned} &W[(m-1)K^*] \frac{1}{2} \{1 - \Phi_1[(m-1)K^*]\} = \\ &= W(mK^*) \frac{1}{2} \Phi_2(mK^*). \end{aligned}$$

Полагая  $W(0) = A$ , получаем:

$$\begin{aligned} W(K^*) &= A \frac{1 - \Phi_1(0)}{\Phi_2(K^*)}; \quad W(2K^*) = W(\Delta) \frac{1 - \Phi_1(K^*)}{\Phi_2(2K^*)}; \\ W(-K^*) &= A \frac{\Phi_2(0)}{1 - \Phi_1(K^*)}; \\ W(-2K^*) &= W(-K^*) \frac{\Phi_2(-K^*)}{1 - \Phi_1(-2K^*)}. \end{aligned}$$



В общем случае

$$W(mK^*) = A \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1 - \Phi_1[(k-1)K^*]}{\Phi_2[kK^*]},$$

$$W(-mK^*) = A \prod_{k=1}^m \frac{\Phi_2[(k+1)K^*]}{\Phi_2[kK^*]}. \quad (12.13)$$

Величина  $A=W(0)$  определяется из условия нормировки плотности  $W$  по  $m$ . Функция  $W(\cdot)$  представляет собой плотность распределения для настраиваемого коэффициента  $a_0$  сети в установившемся состоянии. Функция  $1/2 [1 - \Phi_1(mK^*)]$  монотонно убывает от  $1/2$  до нуля в интервале  $-\infty < m\Delta < \infty$ . Функция  $1/2 \Phi_2(mK^*)$  монотонно возрастает от нуля до  $1/2$  в интервале  $-\infty < m\Delta < \infty$ . Функция  $1/2 [1 - \Phi_1(mK^*) + \Phi_2(mK^*)]$  имеет максимум в точке корня уравнения

$$1 - \Phi_1(mK^*) = \Phi_2(mK^*). \quad (12.14)$$

Пусть корень уравнения (12.14) равен  $mK^* = \hat{\theta}$ . Тогда при  $m\Delta \geq \hat{\theta}$

$$1 - \Phi_1(mK^*) \leq \Phi_2(mK^*) < \Phi_2((m+1)K^*),$$

т.е.

$$\frac{\Phi_2(mK^*)}{1 - \Phi_1((m-1)K^*)} > 1.$$

Соответственно при  $mK^* \leq \hat{\theta}$  имеем:

$$\Phi_2(mK^*) \leq 1 - \Phi_1(mK^*) < 1 - \Phi_1((m-1)K^*);$$

$$\frac{\Phi_2(mK^*)}{1 - \Phi_1((m-1)K^*)} < 1.$$

Поэтому, если  $\hat{\theta}/K^*$  - целое число, то

$$W(\hat{\theta} - \Delta) = W(\hat{\theta}) \frac{\Phi_2(\hat{\theta})}{1 - \Phi_1(\hat{\theta} - \Delta)} < W(\hat{\theta});$$

$$W(\hat{\theta} + \Delta) = W(\hat{\theta}) \frac{1 - \Phi_1(\hat{\theta})}{\Phi_2(\hat{\theta} + \Delta)} < W(\hat{\theta}).$$

Отсюда видно, что  $\hat{\theta}$  есть мода распределения значения порога как случайной величины и обеспечивает в свою очередь равенство условных функций риска для совокупностей образов первого и второго класса.

Из (12.13) вытекает, что математическое ожидание и дисперсия распределения значения порога конечны.

Для нейрона с произвольной памятью  $m_n$  в блоке настройки ( $m_n = \text{const}$ ,  $N=1$ ):

$$a_0(n+1) = \begin{cases} a_0(n) & \text{при } n+1 \neq im_n, \quad i=1, 2, 3 \dots, \\ a_0(n) + \frac{K_n^*}{m_n} \sum_{l=(i-1)m_n+1}^{im_n} \{\epsilon(l) - \text{sign} \times \\ \times [x(l) - a_0(l)]\} & \text{при } n=im_n. \end{cases} \quad (12.15)$$

Здесь, несмотря на сделанное в гл. 9 замечание о невозможности в общем случае для критерия минимума  $|\alpha_{10}|$  и системы с двумя решениями построения аналитических алгоритмов настройки с произвольными значениями  $m_n$ , выражение (12.15) справедливо, так как рассматривается частный, одномерный ( $N=1$ ) вариант, в котором  $x_0 = -1 = \text{const}$ . В (12.15) поправка коэффициентов происходит через каждые  $m_n$  тактов поступления образов на вход системы.

Получим выражение для вероятностей перехода в данной марковской цепи. Как и в случае  $m_n=1$ , здесь

$$P[x_g(n) = -2] = \frac{1}{2} [1 - \Phi_1(mK^*)];$$

$$P[x_g(n) = 2] = \frac{1}{2} \Phi_2(mK^*);$$

$$P[x_g(n) = 0] = \frac{1}{2} [1 - \Phi_2(mK^*) + \Phi_1(mK^*)],$$

где  $mK^*$  - текущее значение настраиваемого коэффициента  $a_0$ . Величина

$$\frac{K_n^*}{m_n} x''_g = x'_g(n=im_n) = \frac{K_n^*}{m_n} \sum_{l=(i-1)m_n+1}^{im_n} \{\epsilon(l) - \text{sign}[x(l) - a_0(l)]\}$$

принимает значения  $-K_n^*$ ,  $-K_n^* + \frac{K_n^*}{m_n}$ , ..., 0, ...,  $K_n^* - \frac{K_n^*}{m_n}$ ,  $K_n^*$ .

В данном случае имеем дело с задачей о полиномиальном распределении

$$P[x''_g(n=im_n) = 2(l-t)] = P_{m_n}[l, t, (m_n - l - t)] = \frac{m_n!}{l!t!(m_n - l - t)!} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} \Phi_2(mK^*) \right\}^l \left\{ \frac{1}{2} [1 - \Phi_1(mK^*)] \right\}^t \left\{ \frac{1}{2} [1 - \Phi_2(mK^*) + \Phi_1(mK^*)] \right\}^{m_n - l - t}.$$

Здесь  $l, t, m_n - l - t$  — соответственно число раз, которое в  $x_g$  выпадают  $+1, -1, 0$ . При замене переменных  $\xi = l - t$  можно получить ограничения на пределы изменения переменных в следующем виде:

$$\xi \geq 0 \text{ при } \frac{m_n - \xi}{2} \geq t \geq 0; \quad \xi < 0 \text{ при } \frac{m_n - \xi}{2} \geq t \geq -\xi.$$

Выражение для переходных вероятностей при  $\xi > 0$  имеет следующий вид:

$$P[m_n K^* | (m_n + \xi) K^*] = \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{m_n - \xi}{2} \rfloor} \frac{m_n!}{(t + \xi)! t! (m_n - 2t - \xi)!} \times \\ \times 2^{-m_n} [1 - \Phi_1(mK^*)]^t \Phi_2(m_n K^*)^{t + \xi} \times \\ \times [1 + \Phi_1(m_n K^*) - \Phi_2(m_n K^*)]^{m_n - 2t + \xi}.$$

При  $\xi < 0$  выражение для переходной вероятности сохраняется с заменой нижнего предела на  $(-\xi)$ . Выражение для переходной вероятности будет единым, если нижний предел сделать равным  $\{\max [0, -\xi]\}$ .

Соответствующее второму этапу стохастическое разностное уравнение для плотности распределения вероятностей настраиваемого коэффициента  $a_0$  системы имеет вид:

$$W_{im_n}(mK^*) = \sum_{k=-m_n}^{m_n} W_{(i-1)m_n} [(m-k)K^*] P[(m-k)K^* | mK^*],$$

где  $P[ ]$  определяется приведенным выше выражением для переходной вероятности.

В многомерном случае рекуррентное соотношение, являющееся основой для построения замкнутой системы, при  $m_n = 1$  может быть записано:

$$a(n+1) = a(n) + K^* x_g(n) \text{ sign } x(n).$$

В данном случае имеем дело с задачей блуждания по  $(N+1)$ -мерной решетке. Это блуждание описывается многомерной марковской цепью. Здесь, как и выше, задача анализа замкнутой системы состоит из следующих этапов: запись выражений для переходных вероятностей; получение стохастического уравнения, описывающего динамику поведения марковской цепи; исследование решения данного уравнения.

Решение данных вопросов является чрезвычайно сложным даже для рассматриваемой относительно простой системы, не говоря уже о таких, как многослойные нейронные сети.

Нейрон с *континуумом решений* и *континуумом классов образов*. Рассматривается случай  $N = m_n = 1$ . При использовании критерия минимума второго момента дискретной ошибки  $\alpha_{2g}$  имеем:

$$a_0(n+1) = a_0(n) - 2K^* \left\{ \epsilon(n) - F[x(n) - a_0(n)] \frac{dF(g)}{dg} \right\}. \quad [12.16]$$

Здесь  $x_g(n) = \epsilon(n) - F[x(n) - a_0(n)]$ ;  $\frac{dF(g)}{dg} = \varphi(g)$ . Введем в рассмотрение случайные величины  $A_0(n), Z[n], L[n], X[n], E[n], G[n], Y[n]$ . Их возможные значения соответственно равны  $a_0[n], z[n], l[n], x[n], \epsilon[n], g[n], y[n]$ .

Величина  $G[n]$  является функцией случайных величин  $A_0[n]$  и  $X[n]$ :

$$G[n] = X[n] - A_0[n],$$

а  $Y[n]$  является функцией случайной величины  $G[n]$ :

$$Y[n] = \varphi(G[n]).$$

Величина  $Z[n]$  определяется:

$$Z[n] = \{E[n] - F(G[n])\} \varphi(G[n]);$$

$$L[n] = \{E[n] - F(G[n])\}; \quad l[n] = x_g[n].$$

Плотность распределения величины  $A_0(n+1)$  будем искать в виде

$$f[a_0(n+1)] = \int_{-\infty}^{\infty} f[a_0(n+1), x(n)] dx(n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f[a_0(n+1)/x(n)] f[x(n)] dx(n). \quad (12.17)$$

Для определения  $f[a_0(n+1)/x(n)]$  нам понадобится  $\Phi\{z(n)/a_0(n), x(n)\}$ :

$$\Phi\{z(n)/a_0(n), x(n)\} = \int_{x_g(n)} \int_{y(n) < z(n)} f[x_g(n), y(n)/a_0(n), x(n)] \times \\ \times dx_g(n) dy(n);$$

$$f_1[x_g(n), y(n)/x(n), a_0(n)] = f_2[x_g(n)/y(n), x(n), a_0(n)] f_3[y(n)/x(n), a_0(n);$$

$$f_3[y(n)/x(n), a_0(n)] = \delta \{y(n) - \varphi[x(n) - a_0(n)]\};$$

$$f_2[x_g(n)/y(n), x(n), a_0(n)] = f_2[x_g(n)/x(n), a_0(n)],$$

так как случайная величина  $\varphi$  является определенной функцией случайной величины  $X$  и  $A_0$ :

$$f_2[x_g(n)/x(n), a_0(n)] = f_4\{x_g(n) + F[x(n) - a_0(n)]/x(n)\};$$

$$f_4[\varepsilon(n)/x(n), a_0(n)] = f_4[\varepsilon(n)/x(n)].$$

Отсюда

$$f_2[x_g(n)/x(n), a_0(n)] = f_4\{x_g(n) + F[x(n) - a_0(n)]/x(n)\},$$

где  $f_4^*$  — новая функция, в которой  $a_0(n)$  — фиксированная величина.

В результате получаем:

$$f_1[x_g(n), y(n)/x(n), a_0(n)] = f_4^*\{x_g(n) + F[x(n) - a_0(n)]/x(n)\} \delta \{y(n) - \varphi(g(n))\}.$$

Определим:

$$\Phi[z(n)/a_0(n), x(n)] = \int_{x_g(n)} \int_{y(n) < z(n)} f[x_g(n), y(n)/a_0(n), x(n)] da_0 dx.$$

Можно показать, что

$$\Phi[z(n)/a_0(n), x(n)] = \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{z(n)}{y(n)}}^{\infty} f_4^*\{x_g(n) + F[x(n) - a_0(n)]/x(n)\} \times$$

$$\times \delta \{y(n) - \varphi[x(n) - a_0(n)]\} dy(n) dx_g(n) +$$

$$+ \int_0^{\frac{z(n)}{y(n)}} \int_{-\infty}^{\infty} f_4^*\{x_g(n) + F[x(n) - a_0(n)]/x(n)\} \times$$

$$\times \delta \{y(n) - \varphi[x(n) - a_0(n)]\} dy(n) dx_g(n).$$

Отсюда плотность вероятности величины  $L(n)$  относительно величин  $X(n)$  и  $A_0(n)$

$$f[z(n)/a_0(n), x(n)] = \frac{\partial}{\partial z} \Phi[z(n)/a_0(n), x(n)] =$$

$$= - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y(n)} f_4^*\left\{\frac{z(n)}{y(n)} + F[g(n)/x(n)]\right\} \delta \{y(n) - \varphi(g(n))\} dy(n) +$$

$$+ \int_0^{\frac{z(n)}{y(n)}} \frac{1}{y(n)} f_4^*\left\{\frac{z(n)}{y(n)} + F[x(n) - a_0(n)]/x(n)\right\} \delta \{y(n) - \varphi[x(n) - a_0(n)]\} dy(n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{z(n)}{y(n)}} \frac{1}{|y(n)|} f_4^*\left\{\frac{z(n)}{y(n)} + F[x(n) - a_0(n)]/x(n)\right\} \delta \{y(n) - \varphi[x(n) - a_0(n)]\} \times$$

$$\times dy(n) = \frac{1}{|\varphi[x(n) - a_0(n)]|} f_4^*\left\{\frac{z(n)}{\varphi[x(n) - a_0(n)]} + F[x(n) - a_0(n)]/x(n)\right\}.$$

Интегральный закон распределения случайной величины  $A_0(n+1)$  относительно  $X(\cdot)$  имеет вид:

$$\Phi[a_0(n+1)/x(n)] = \iint \Phi[z(n)/a_0(n), x(n)] f[a_0(n)/x(n) da_0 dz(n)].$$

Так как  $f[a_0(n)/x(n)] = f[a_0(n)]$ , то  $\Phi[a_0(n+1)/x(n)] =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{a_0(n+1) - a_0(n)}{2K^*}}^{\infty} f_n[a_0(n)] \frac{1}{|\varphi[x(n) - a_0(n)]|} f_4 \times$$

$$\times \left\{ \frac{z(n)}{y(n)} + F[x(n) - a_0(n)]/x(n) \right\} da_0(n) dz(n).$$

Отсюда

$$f_{n+1}[a_0(n+1)/x(n)] = \frac{\partial}{\partial a_0(n+1)} \Phi[a_0(n+1)/x(n)] = \frac{1}{2K^*} \int_{-\infty}^{\infty} f_n[a_0(n)] \times$$

$$\times \frac{1}{|\varphi[x(n) - a_0(n)]|} f_4 \left\{ \frac{a_0(n+1) - a_0(n)}{-2K^* \varphi[x(n) a_0(n)]} + F[x(n) - a_0(n)]/x(n) \right\} da_0(n).$$

Окончательно имеем:

$$f_{n+1}[a_0(n+1)] = \frac{1}{2K^*} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\varphi[x(n) - a_0(n)]|} f_n[a_0(n)] f_4 \left\{ \frac{a_0(n+1) - a_0(n)}{-2K^* \varphi[x(n) - a_0(n)]} + \right.$$

$$\left. + F[x(n) - a_0(n), x(n)] \right\} da_0(n) dx(n). \quad (12.18)$$

В предельном случае при  $n \rightarrow \infty$

$$f_1(a_0) = \frac{1}{2K^*} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\xi)}{|\varphi(x - \xi)|} f \left[ \frac{a_0 - \xi}{-2K^* \varphi(x - \xi)} + F(x - \xi), x \right] dx d\xi.$$

Это однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Оно решается в общем случае численными методами.

ми. В выражении для  $f_{n+1}[a_0(n+1)]$  интегрируется неотрицательная функция. Следовательно,  $f_{n+1}[a_0(n+1)] \geq 0$ . При  $n=0$  очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0[a_0(0)] da_0(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta [a_0(0) - \hat{a}_0] da_0(0) = 1,$$

где  $\hat{a}_0$  - заданное начальное значение порога.

Предположим, что для  $f_n[a_0(n)]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n[a_0(n)] da_0(n) = 1.$$

Покажем, что тогда  $\int_{-\infty}^{\infty} f_{n+1}[a_0(n+1)] da_0(n+1) = 1$ ;

$$Y^0 = \int_R f_{n+1}[a_0(n+1)] da_0(n+1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2K^*|\varphi[x(n) - a_0(n)]|} f_n[a_0(n)] \times \\ \times f \left\{ \frac{a_0(n+1) - a_0(n)}{-2K^*\varphi[x(n) - a_0(n)]} + F[x(n) - a_0(n)], x(n) \right\} dx(n) da_0(n) da_0(n+1).$$

Сделаем замену переменных

$$\varepsilon(n) = \frac{a_0(n+1) - a_0(n)}{-2K^*\varphi[x(n) - a_0(n)]} + F[x(n) - a_0(n)];$$

$$d\varepsilon(n) = \frac{da_0(n+1)}{2K^*|\varphi[x(n) - a_0(n)]|}.$$

Отсюда

$$Y^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n[a_0(n)] f[\varepsilon(n), x(n)] d\varepsilon(n) da_0(n) dx(n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f_n[a_0(n)] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[\varepsilon(n), x(n)] d\varepsilon(n) dx(n) \right] da_0(n).$$

По свойству плотности вероятности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[\varepsilon(n), x(n)] d\varepsilon(n) dx(n) = 1,$$

по предположению

$$a \int_{-\infty}^{\infty} f_n[a_0(n)] da_0(n) = 1.$$

Следовательно,

$$Y^0 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{n+1}[a_0(n+1)] da_0(n+1) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Аналогичные выражения можно получить для случаев  $m_n = \text{const}$  и  $N \neq 1$ , а также для более сложных структур многослойных нейронных сетей. Однако при этом резко возрастает сложность полученных выражений. Анализ данных выражений в явном виде, т.е. анализ качества настройки нейронных сетей в пространстве настраиваемых коэффициентов, вряд ли имеет смысл, особенно для случая многослойных систем. В данном случае необходимо переходить к распределению вероятности правильного распознавания интегрированием по пространству настраиваемых коэффициентов. На наш взгляд, эта задача, достаточно сложная с математической точки зрения, может служить предметом самостоятельного рассмотрения. В данном случае можно записать, пожалуй, только общие выражения для математического ожидания и дисперсии средней функции риска:

$$MR = \int_A f^{**}(a) \left[ \int_E \int_X f_\varepsilon(\varepsilon) f(x/\varepsilon) l[x_k = P(x), \varepsilon] d\varepsilon dx \right] da,$$

$$DR = \int_A f^{**}(a) [R - MR]^2 da.$$

Указанная выше сложность аналитического исследования замкнутых систем с фиксированной структурой, настраивающихся по замкнутому циклу, приводит к необходимости применения для исследования указанных систем, в основном многослойных, методов статистического моделирования.

## Литература

- 12.1. Галушкин А.И. Методика синтеза обучающихся по разомкнутому циклу систем распознавания нестационарных образов. Тез. докл. III Укр. респ. конф. по бионике. Киев, ИК АН УССР, 1969.
- 12.2. Галушкин А.И., Василькова Т.А., Слободенюк В.А., Тюхов Б.П. Анализ динамики систем распознавания нестационарных образов // Труды МИЭМ, вып.23, 1971.
- 12.3. Ванюшин В.А., Галушкин А.И., Тюхов Б.П. Построение и исследование многослойных систем распознавания образов. Сб.

- Некоторые проблемы биологической кибернетики/ Под общ. ред. акад. А.И. Берга. – М., Наука, 1972, с. 315–323.
- 12.4. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. – М., Энергия. 1974.
  - 12.5. Галушкин А.И., Кудрявцев А.М. Обращение матрицы с помощью многослойной системы из пороговых элементов. Кибернетика и вычислительная техника, вып. 33. Киев, Наукова Думка, 1976.
  - 12.6. Галушкин А.И. Расчет и реализация оптимальных дискретных фильтров. В сб.: Автоматическое управление и вычислительная техника, вып. 9. М., 1968, с. 72–128.
  - 12.7. Галушкин А.И., Зотов Ю.Я., Шикинов Ю.А. Оперативная обработка экспериментальной информации. – М., Энергия. 1972, 360 с.
  - 12.8. Steriti R., Coleman J., Fiddy M.A. A neural network based matrix inversion algorithm. IJCNN, Jnt Jt. Conf. Neural Networks, San Diego, Calif., vol 1, 1990, с. 467–470.
  - 12.9. Steriti R., Coleman J., Fiddy M.A. Regularized matrix inversion on a neural network architecture. IJCNN – 91, Seattle, Wash, July 8 – 12, vol 2, 1991, с. 938.
  - 12.10. Викторов Н.В., Галушкин А.И. Построение и исследование систем распознавания образов при произвольной квалификации учителя. // Медицинская радиоэлектроника. ВНИИМеждународной техники, 1976, с.95–106.

### Глава 13. Синтез многослойных нейронных сетей с переменной структурой

Несмотря на то что при построении многослойных нейронных сетей с фиксированной структурой, настраивающихся по замкнутому циклу, необходимость в некоторой априорной информации о характеристиках входного сигнала отпадает по сравнению с разомкнутым циклом, все же потенциально достижимая величина вероятности правильного распознавания здесь ограничена за счет фиксации структуры нейронной сети. В данной главе рассмотрен синтез многослойных нейронных сетей с переменной структурой (рис. 13.1), выбираемой в процессе настройки исходя из обеспечения заданной вероятности правильного распознавания. На рис. 13.1  $y(x)$  – структура преобразования разомкнутой части нейронной сети. Методы настройки многослойных нейронных сетей с переменной структурой, выбираемой исходя из обеспечения заданной вероятности правильного распознавания, основаны на последовательном обучении слоев нейронов, причем методы обучения каждого слоя могут быть идентичными.

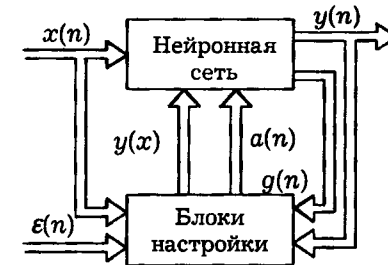


Рис. 13.1. Структурная схема нейронной сети с переменной структурой, настраивающейся по замкнутому циклу

#### 13.1. Последовательный алгоритм обучения нейронов первого слоя многослойной нейронной сети

Последовательные алгоритмы обучения первого слоя нейронов многослойной нейронной сети основаны на постепенном увеличении числа гиперплоскостей, составляющих результирующую кусочно-линейную гиперповерхность, до тех пор пока не будет достигнуто нужное качество распознавания или выполнено какое-либо другое условие окончания процесса обучения. Процесс обучения сводится к формированию логического дерева. В геометрической интерпретации это выглядит следующим образом. Пространство признаков оптимально делится некоторой нейронной сетью с фиксированной структурой (например, нейроном) на две части, затем полученные подпрос-

транства делятся еще раз и т.д. На рис. 13.2-13.4 представлены соответственно общая структурная схема алгоритма, иллюстрация к построению кусочно-линейной разделяющей поверхности, реализуемой нейронной сетью с переменной структурой, и логическое дерево, описывающее процесс построения разделяющей поверхности. На рис. 13.2: I – блок определения параметров нейронной сети с фиксированной структурой; II – блок разделения входной обучающей последовательности; VI – блок управления; III (пунктир) – алгоритм многослойной нейронной сети с переменной структурой на первом шаге, аналогично которому строятся блоки III. На рис. 13.3 двойной линией изображена результирующая граница между классами. Первая гиперплоскость  $\varphi_0(x)$  разбивает пространство признаков  $\Phi_0$  на две подобласти  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , причем  $\Phi_1$  считается собственной областью образов первого класса,  $\Phi_2$  – второго. Обучающую выборку  $L_0$  делим на две:  $L_1$  и  $L_2$ , состоящие из векторов, попавших в  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  соответственно. Подсчитывается число неправильно классифицированных образов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в каждой из подобластей. Выбирается максимальный элемент из множества  $\{\theta_1, \theta_2\}$  и дальнейшему делению подвергается соответствующая подобласть. Пусть  $\theta_1 > \theta_2$ . После деления  $\Phi_1$  гиперплоскостью получаем области  $\Phi_{11}$  и  $\Phi_{12}$ . Вычисляем  $\theta_{11}$  и  $\theta_{12}$  и сравниваем ошибки распознавания. Если  $\theta_1 > \theta_{11} + \theta_{12}$ , то введение новой гиперплоскости улучшает качество распознавания. В этом случае выборку  $L_1$  разбиваем на подвыборки  $L_{11}$  и  $L_{12}$ .

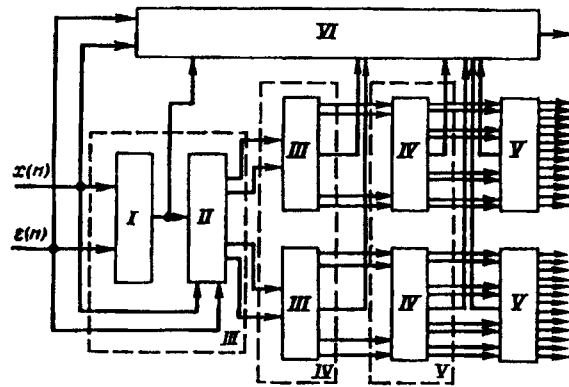


Рис. 13.2. Структурная схема алгоритма последовательного построения кусочно-линейной разделяющей поверхности

Рис. 13.3. Построение кусочно-линейной разделяющей поверхности

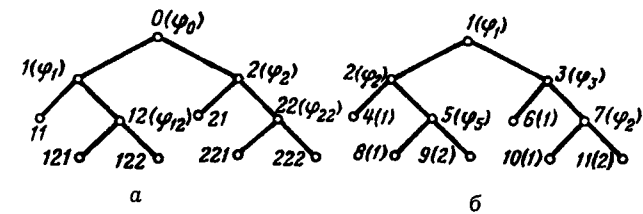
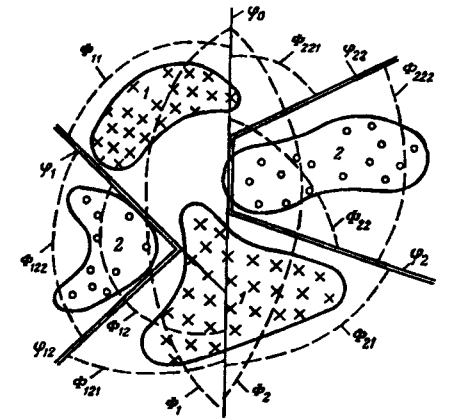


Рис. 13.4. Логическое дерево: а – схема построения кусочно-линейной разделяющей поверхности рис.13-2; б – последовательная нумерация вершин дерева

Снова выбираем подпространство с наибольшим числом неправильно классифицированных образов, строим новую гиперплоскость и т.д. В результате получается набор областей  $\Phi_i, \Phi_{ij}, \dots, \Phi_{i,j,k,\dots,t}$ , где индексы  $i, j, k, \dots, t$  принимают значение 1 и 2. Если проведение гиперплоскости в подпространстве  $\Phi_{i,j,k,\dots,t}$  не приводит к уменьшению ошибки распознавания, то следует продолжить деление вновь полученных областей. При обучающей выборке конечной длины алгоритм всегда сходится к  $\theta=0$ , однако сходимость может быть и немонотонной. При построении подобных алгоритмов [13.1] необходимо ограничивать число шагов, при которых ошибка увеличивается. Если при заданном числе шагов ошибка не уменьшится, данная исходная область  $\Phi_{i,j,k,\dots,t}$  исключается из числа подпространств, которые подвергаются делению, т.е. величина  $\theta_{i,j,k,\dots,t}$  исключается из набора  $\theta_i, \theta_{ij}, \dots, \theta_{i,j,k,\dots,t}$ , среди которых отыскивается наибольшая величина ошибки. В [13.1] рассматриваются следующие правила остановки алгоритма:

1) остановка при достижении заданного значения вероятности ошибки; 2) остановка при достижении заданного числа гиперплоскостей (числа нейронов первого слоя многослойной нейронной сети). Структурная схема программы, реализующей алгоритм построения кусочно-линейной разделяющей поверхности, приведена на рис.13.5. Назначение большинства операторов понятно из вышеизложенного, поясним лишь три из них.

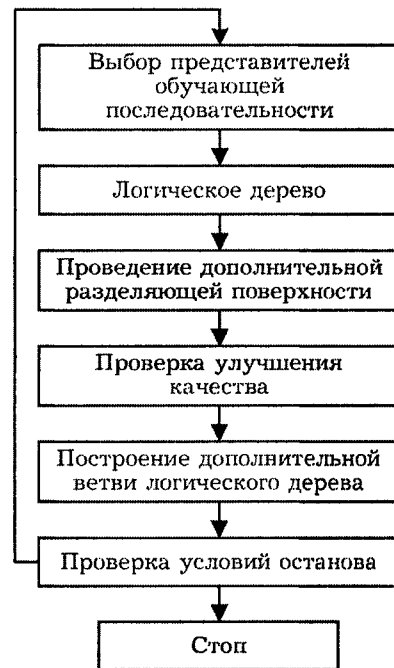


Рис. 13.5. Структурная схема программы, реализующей процесс последовательного построения кусочно-линейной разделяющей поверхности

Для принятия решения о направлении дальнейшего движения из вершины  $i, j, k, \dots, t$  используется функция  $\phi_{i,j,k,\dots,t}(x)$ . Если  $\text{sign } \phi_{i,j,k,\dots,t}(x) \geq 0$ , то дальнейшее движение происходит по правой ветви, в противном случае – по левой ветви. Вершины логического дерева удобно пронумеровать последовательно, так как индексация переменной длины очень наглядна при объяснении работы алго-

ритма, но не удобна при программировании. Логическое дерево рис. 13-4,а при последовательной нумерации вершин принимает вид, изображенный на рис.13.4,б. Логическое дерево удобно описывать матрицей, имеющей три столбца:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 11 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Каждой вершине логического дерева с номером  $s$  соответствует  $s$ -я строка матрицы  $C$ . Поясним смысл строк матрицы, которые, как и вершины, могут быть двух видов. Строка вида  $(0 \ s \ s+1)$  описывает промежуточную вершину дерева. Берется разделяющая поверхность  $\phi_s=0$ , соответствующая этой вершине, и в зависимости от  $\text{sign } \phi_s(x)$  происходит переход к вершине  $s$ , если  $\text{sign } \phi_s=-1$ , или к вершине  $s+1$ , если  $\text{sign } \phi_s=1$ . Если же строка имеет вид  $(k \ 0 \ 0)$ , где  $k=1, 2$ , то она описывает один из концов логического дерева. Если после последовательного использования нескольких разделяющих поверхностей точка  $x_j$  попала в вершину, описываемую подобным образом, то ее следует отнести к классу  $A_k$ . Проведение новой гиперплоскости  $\phi_i(x)$  вызывает построение двух новых ветвей дерева, отходящих от вершины  $i$ . При этом матрица, имеющая  $U$  строк, получает две новые строки с номером  $(U+1)$  и  $(U+2)$  следующего вида:

$$\begin{aligned} U+1 &: 1 \ 0 \ 0 \\ U+2 &: 2 \ 0 \ 0, \end{aligned}$$

а в  $i$ -ю строку заносится запись

$$0 \ U + 1 \ U + 2,$$

т.е. теперь  $i$ -я вершина является промежуточной вершиной логического дерева.

Оператор «Проведение дополнительной разделяющей поверхности» может использовать практически любой алгоритм настройки нейрона, описанный в гл.9. Более того, данный оператор может реализовать любую нейронную сеть с фиксированной структурой, описанную в гл. 9 и 10.

Оператор «Проверка улучшения качества» предназначен для проверки улучшения качества распознавания. Результаты работы этого оператора используются для процесса построения логического дерева: если качество улучшилось, то дальнейшему делению подвергается область, например, с наибольшим значением средней функции риска; в противном случае делению подвергаются области, полученные при последнем делении.

### 13.2. Алгоритм обучения нейронов первого слоя многослойной нейронной сети с применением метода случайного поиска локальных и глобального экстремумов функций

На основе метода случайного поиска локальных и глобально экстремумов функций многих переменных, изложенного в гл.8, разработан алгоритм обучения нейронов первого слоя многослойной нейронной сети. В данном случае можно отказаться от построения древообразной структуры и в первый слой включаются все нейроны, обеспечивающие локальные экстремумы средней функции риска (рис.13.6, 13.7). на рис.13.6 четыре гиперплоскости в двумерном пространстве признаков определяют четыре локальных экстремума средней функции риска. Цифрами в кружочке обозначены номера аргумента логической функции, соответствующие каждой области многомерного пространства признаков. В табл.13.1 даны значения логической функции (для примера рис.13.6), реализуемой в многослойной нейронной сети слоями нейронов, кроме первого. Звездочкой в таблице обозначены значения логической функции, которые не являются определенными при данном значении аргументов (при данной на рис.13.6 конфигурации разделяющей поверхности). Индексом нуль

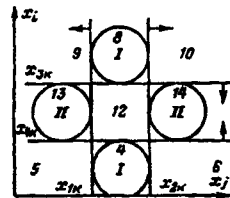


Рис. 13.6. Иллюстрация к методу обучения нейронов первого слоя многослойной нейронной сети с применением алгоритмов случайного поиска

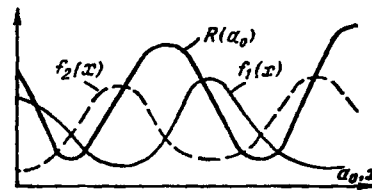


Рис.13.7. Свойство многоэкстремальности средней функции риска при многомодальных распределениях  $f(x/\epsilon)$

обозначены области пространства признаков, в которых нет ооразов ни первого, ни второго класса.

Таблица 13.1

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y <sub>1</sub>	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
y <sub>2</sub>	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
y <sub>3</sub>	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
y <sub>4</sub>	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
ε	*	*	*	*	-1	0	0	*	-1	0	0	*	0	1	1	*

Совершенно очевидно, что детерминированные методы поиска не позволяют выйти за пределы локального экстремума и, пожалуй, единственным выходом из этого положения является введение элемента случайности в процедуру поиска.

Основные этапы работы алгоритма в каждом цикле состоят в следующем:

а) случайным образом выбираются компоненты вектора настраиваемых коэффициентов очередного нейрона;

б) применяя один из методов обучения нейронов, находим очередной локальный экстремум средней функции риска;

в) величина экстремального значения средней функции риска и соответствующие компоненты вектора весовых коэффициентов нейрона сравниваются с содержимым памяти и запоминаются, если ранее этот локальный минимум найден не был.

На первом цикле по числу нейронов первого слоя производится сравнение с нулем и запись в память. Если ставится цель – определение только глобального, а не всех локальных экстремумов, то необходимо сравнение величины очередного экстремального значения минимизируемого функционала с ранее полученным, выбор и запись только минимального значения функционала.

По окончании третьего этапа происходит переход к первому этапу и определяется вектор настраиваемых коэффициентов следующего нейрона первого слоя, обеспечивающий очередной локальный экстремум средней функции риска.

Экспериментальное исследование одного цикла работы данного алгоритма обучения нейрона первого слоя многослойной нейронной сети было приведено ранее в гл.12. На рис.13.8 представлена структурная схема программы, реализующей



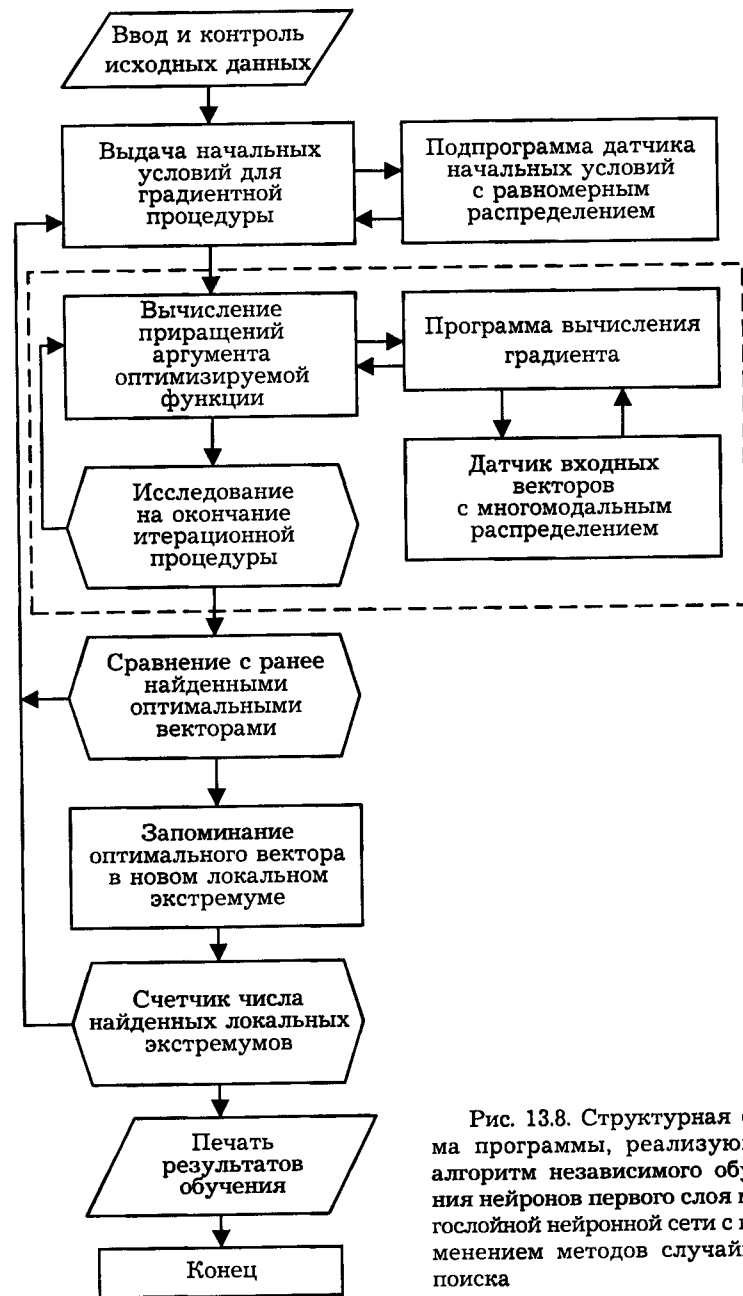


Рис. 13.8. Структурная схема программы, реализующей алгоритм независимого обучения нейронов первого слоя многослойной нейронной сети с применением методов случайного поиска

описанный выше алгоритм. План экспериментов с программой ставил своей задачей выявление свойств процессов обучения слоя нейронов. Характеристики входного сигнала и алгоритм настройки нейронов аналогичны рассмотренным в 12.2. При анализе работы программы по схеме, представленной на рис.13.8, необходимо исследовать следующее:

1. Получение экспериментальной оценки сходимости случайной процедуры, т.е. зависимости количества случайных выбросов начальных условий от  $N$  и  $Z$ .

2. Зависимость общего времени счета от размерности пространства признаков  $N$ , количества искомых экстремумов  $U$ , величины шага  $\Delta$ . Эксперимент был поставлен таким образом, что обучение новых нейронов формируемого слоя нейронной сети проводилось до тех пор, пока последовательный выброс случайных начальных условий (именно здесь проявляются основные качества случайного поиска), не обеспечивал нахождения всех локальных экстремумов функционала качества при заданной модальности функций распределения входного сигнала. Количество шагов случайного поиска, потребовавшееся для нахождения всех локальных минимумов, приведено в табл. 13.2, где  $U$  – количество искомых минимумов,  $\eta_U$  – количество шагов случайной процедуры для нахождения всех  $U$  экстремумов. Приближенные оценки математического ожидания и дисперсии числа шагов, необходимого для нахождения  $U$  минимумов, имеют вид (8.16а).

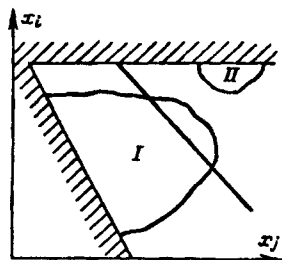
Данные табл. 13.2 и п. 8.6 дают возможность достаточно просто определить общее время обучения слоя нейронов многослойной нейронной сети, затраченное при определенной модальности входного сигнала. Отметим, что увеличение размерности пространства признаков ведет, естественно, к увеличению времени обучения, причем это время увеличивается пропорционально росту размерности.

Таблица 13.2

$U$	$\eta_U$	$M_{\eta_U}$	$D_{\eta_U}$
1	1	1	–
2	4	3	2
3	8	6	3
5	8	10	6
7	23	14	8
10	33	22	12

### 13.3. Анализ сходимости алгоритмов при увеличении числа гиперплоскостей

Сходимость алгоритмов по вероятности ошибки при усложнении структуры нейронной сети зависит от правила выбора очередной подобласти для деления и от алгоритма обучения нейронов на каждом шаге деления. Метод выбора очередной подобласти для деления, описанный выше и состоящий в том, что на каждом шаге проведения гиперплоскости выбиралась для деления та область, в которой оценка вероятности ошибки является максимальной, является оптимальным с точки зрения скорости сходимости алгоритма. В большинстве используемых на практике алгоритмов с последовательным делением пространства признаков авторами применялись простейшие методы проведения гиперплоскости на каждом шаге, состоящие в настройке нейрона по разомкнутому циклу с использованием первых моментов обучающих выборок. Это зачастую приводит к увеличению вероятности ошибки на некотором шаге работы алгоритма (рис. 13.9). На рис. 13.9 в очередной области (незаштрихованная часть) разделяющая поверхность проведена перпендикулярно линии, соединяющей центры двух классов. На данном шаге деления ошибка увеличилась, так как часть образов первого класса попала к образам второго класса. Для обеспечения монотонности изменения вероятности ошибки при увеличении числа гиперплоскостей необходимо применять на каждом шаге алгоритма обучения нейрона, который приводил бы к минимуму вероятности ошибки на каждом шаге (настройка по замкнутому циклу с минимизацией второго момента дискретной ошибки  $\alpha_{2g}$ ). Обеспечение монотонности изменения вероятности ошибки позволяет сделать минимальным число нейронов первого слоя многослойной нейронной сети. Однако в некоторых случаях необходимо идти сознательно на увеличение числа нейронов



первого слоя при немонотонном изменении вероятности за счет резкого упрощения алгоритма обучения нейронов.

Рис. 13.9. Иллюстрация процесса увеличения вероятности ошибки на некотором шаге работы последовательного алгоритма: I - первый класс; II - второй класс

Отметим, что при увеличении числа гиперплоскостей в самом неблагоприятном случае оценка вероятности ошибки стремится к нулю из-за конечности длины выборки, данной для обучения. В связи с этим необходимо указать на два этапа в создании нейронной сети: этап обучения алгоритма и этап оценки его точности. Совершенно естественно, что при наличии в качестве исходного материала выборки длиной  $M$  только часть ее  $M_1$  (причем несомненно меньшую) нужно использовать для обучения алгоритма. На выборке длиной  $M_1$  алгоритм при увеличении числа гиперплоскостей обеспечит нулевую ошибку. Проводя распознавание обученным алгоритмом по элементам выборки  $M_2$ , равной  $M - M_1$ , оцениваем действительную точность алгоритма по вероятности ошибки распознавания  $P_p(H_1)$ . Функция  $\Delta P(H_1) = P_p(H_1) - P_0(H_1)$ , график которой приведен на рис. 13.10, должна быть в принципе монотонно возрастающей при увеличении числа гиперплоскостей из-за уменьшения способности алгоритма к обобщению. Здесь  $P_0(H_1)$  - функция изменения вероятности ошибки на этапе обучения нейронной сети. Необходимо отметить, что зачастую кривая  $P_p(H_1)$  имеет локальный минимум при конечном определенном значении  $H_1$ , равном, например  $H'_1$ . В этом случае может быть выдана рекомендация на выбор именно этого числа гиперплоскостей  $H'_1$ , если  $P_p(H'_1)$  удовлетворяет исходным условиям. В некотором смысле описанный выше алгоритм обучения с применением случайного поиска является оптимальным с точки зрения минимизации числа нейронов первого слоя многослойной нейронной сети, так как определяет все локальные моды средней функции риска в пространстве настраиваемых параметров.

Результатом обучения нейронов первого слоя многослойной нейронной сети с двумя решениями, в частности, является логическая функция, определяющая последовательность деления многомерного пространства признаков. Данная логическая функция иногда не определена не только на некоторых полных наборах аргументов, но и на некоторых отдельных аргументах. Простейшая иллюстрация недоопределенности логической функции подобного рода представлена на рис.13.11 и в табл.13.3. Здесь арабскими цифрами отмечены области исходного пространства признаков, являющихся исходными для формирования некоторого набора аргументов логической фун-

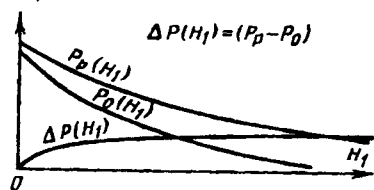


Рис. 13.10. К анализу сходимости алгоритма при увеличении числа гиперплоскостей на этапах обучения и распознавания

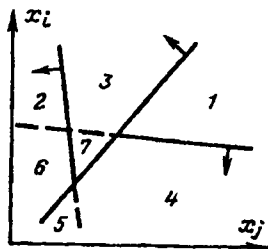


Рис. 13.11. Формирование обучающей выборки на выходе нейронов первого слоя

Таблица 13.3

Номер области		1	2	3	4	5	6	7	8
ε		-1	1	-1	1	1	1	-1	*
у	Первый нейрон	-1	1	1	-1	-1	1	1	*
	Второй нейрон	⊕	1	-1	⊕	⊕	1	-1	*
	Третий нейрон	-1	⊕	⊕	1	1	⊕	⊕	*

кции  $\epsilon(y)$  Клетки, помеченные звездочками, означают набор переменных, который никогда не появляется на выходе нейронов первого слоя. Клетки, помеченные знаком  $\oplus$ , означают значения переменных из полного набора, равного  $2^{H_1}$ , которые также отсутствуют на выходе нейронов первого слоя. Процедура последовательного деления, показанная на рис. 13.11, может быть проиллюстрирована деревом и матрицей вида, изображенного на рис. 13.12. Здесь I-VI – области, полученные в результате последовательного деления.

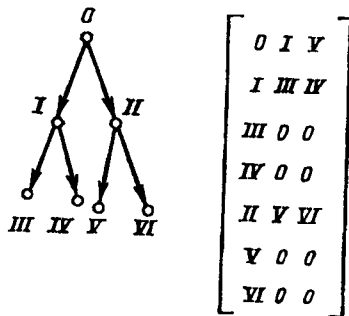


Рис. 13.12. Логическое дерево и матрица переходов для примера рис.13.11

Проблема доопределения логической функции  $\epsilon(y)$ , полученной на этапе последовательной настройки нейронов первого слоя, возникает в связи с необходимостью формирования массивов обучающих векторов на выходе нейронов первого слоя для настройки последующих слоев нейронов. Основная задача здесь заключается в доопределении логической функции на

частично заданных наборах своих аргументов. Доопределение же логической функции на наборе 8 (рис. 13.11, табл. 13.3) может вообще не производиться, так как этот набор никогда не появляется ввиду специфики задачи построения кусочно-линейной разделяющей поверхности. Доопределение при неполных наборах производится следующим образом. В обучающий массив для нейронов второго слоя многослойной нейронной сети, представленных в табл. 13.4, записываются векторы с присутствующими координатами, исходным указанием учителя и полным перебором по отсутствующим значениям переменных.

Таблица 13.4

Номер области		1'	1''	2'	2''	3'	3''	4'	4''	5'	5''	6'	6''	7'	7''
ε		-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
у	Первый нейрон	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
	Второй нейрон	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1
	Третий нейрон	-1	-1	-1	1	-	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1

В табл. 13.4 сформирована логическая функция, по которой производится настройка нейронов слоев, кроме первого.

### 13.4. Алгоритмы обучения нейронов второго слоя двухслойной нейронной сети

#### 13.4.1. Условие реализуемости логической функции $\epsilon(y)$ на одном нейроне

Целью данного параграфа является проверка реализуемости логической функции на одном нейроне второго слоя системы распознавания образов. Если результат проверки будет положительным, то многослойная нейронная сеть будет двухслойной с одним нейроном во втором слое. Если же результат проверки будет отрицательным, необходимо перейти к синтезу трехслойной нейронной сети, в которой логическая функция реализуется на двух выходных слоях нейронов с некоторым (выбираемым в процессе синтеза сети) числом нейронов первого слоя и одним нейроном второго слоя.

На рис. 13.13 представлена иллюстрация реализуемости логической функции на одном нейроне, когда величина выход-

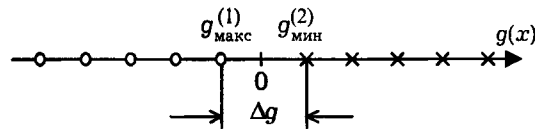


Рис.13.13. К определению физической реализуемости логических функций на одном нейроне: (1) -  $\sum_{z=1}^Z |c^T y(z)|$ , (2) -  $(c^T b)_1$

ного аналогового сигнала  $g(n)$  нейрона меньше нуля на всех наборах входных двоичных переменных  $y(z)$  ( $z$  - номер набора) первого класса и больше нуля на всех входных двоичных переменных второго класса. Величина  $\Delta g = g_{\text{мин}}^{(2)} - g_{\text{макс}}^{(1)}$  называется промежутком [13.5]. Необходимое и достаточное условие реализуемости логической функции на одном нейроне можно записать в следующем виде:

$$\text{или, иначе, } \left. \begin{aligned} \varepsilon(z) &= \text{sign } g(z) \\ g(z) \varepsilon(z) &= |g(z)| \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Суммирование правых и левых частей (13.1) дает условия реализуемости логической функции на одном нейроне в следующей форме:

$$\sum_{z=1}^Z g(z) \varepsilon(z) = \sum_{z=1}^Z |g(z)| \quad (13.2)$$

или, иначе,

$$\sum_{j=1}^{H_1} a_j \sum_{z=1}^Z y_j(z) \varepsilon(z) + a_0 \sum_{z=1}^Z \varepsilon(z) = \sum_{z=1}^Z \left| \sum_{j=1}^{H_1} a_j y_j(z) + a_0 \right| \quad (13.3)$$

Величины

$$\sum_{z=1}^Z y_j(z) \varepsilon(z), \quad \sum_{z=1}^Z \varepsilon(z)$$

однозначно определяются данной логической функцией и могут быть вычислены до решения задачи синтеза нейрона, реализующего данную логическую функцию. Так же как в [13.5], введем в рассмотрение величину

$$b_j = \sum_{z=1}^Z y_j(z) \varepsilon(z), \quad j = 0, \dots, H_1. \quad (13.4)$$

Отметим, что

$$b_0 = \sum_{z=1}^Z \varepsilon(z), \quad \text{так как } x_{0k}(z) = 1; \quad z = 1, \dots, Z.$$

Из (13.3) и (13.4) следует:

$$a^T b = \sum_{j=1}^{H_1} a_j b_j = \sum_{z=1}^Z \left| \sum_{j=1}^{H_1} a_j y_j(z) + a_0 \right|$$

или

$$a^T b = \sum_{z=1}^Z |g(z)|. \quad (13.5)$$

Выражение (13.5) дает необходимое и достаточное условие реализуемости логической функции  $\varepsilon(y)$ .

В случае, если логическая функция  $\varepsilon(z)$ , существующая в  $Z$  точках  $H_1$ -мерного двоичного аргумента  $y(z)$ , не реализуема на одном нейроне с вектором  $a$  весовых коэффициентов, скалярное произведение вектора  $a$  и характеристического вектора логической функции меньше, чем сумма модулей значений выходного аналогового сигнала нейрона по всем  $z=1, \dots, Z$ . Отсюда следует, что вектор весовых коэффициентов нейрона, реализующего данную логическую функцию с характеристическим вектором  $b$ , должен минимизировать (до нуля) значение следующего функционала:

$$I(a) = \sum_{z=1}^Z |g(z)| - a^T b. \quad (13.6)$$

Необходимо отметить, что вектор  $b$  в некотором смысле близок к вектору весовых коэффициентов  $a$  нейрона, реализующего соответствующую  $b$  логическую функцию. Если понимать под ошибкой реализации логической функции разность

$$\varepsilon(z) - \frac{1}{2^{N_1}} c^T x_k(z),$$

то [13.5] среднеквадратичная ошибка будет минимальна при  $c = b$ . Следовательно, в качестве вектора весовых коэффициентов  $a$  иногда (например, в качестве начальных условий итерационной процедуры поиска вектора  $a$ , реализующего данную логическую функцию) можно принимать соответствующий вектор  $b$ . Однако, естественно, вектор  $b$  не будет всегда

вектором весовых коэффициентов, реализующих данную логическую функцию.

Таким образом, соотношение (13.5) является необходимым и достаточным условием реализуемости логической функции на одном нейроне. Соотношение (13.5) полностью аналогично (13.2). Соотношение (13.2) можно представить как систему линейных неравенств, а (13.5) – нелинейное уравнение. В этом основное отличие данных двух методов представления условия физической реализуемости логических функций на одном нейроне. Использование соотношения (13.5) несколько упрощается вследствие того, что исходная логическая функция  $\epsilon(y)$ , существующая максимально в  $2^{H_1}$  точках  $H_1$ -мерного пространства двоичных  $(-1, 1)$  переменных, в (13.5) представляется  $H_1$ -мерным аналоговым вектором, а в (13.2)  $2^{H_1}$  двоичными числами.

#### 13.4.2. Синтез нейрона методом минимизации функционала

Указанное соответствие между соотношениями (13.2) и (13.5) показывает на преимущество (13.5). Однако здесь возникает трудность выражения в явном виде нелинейного члена  $\sum_{z=1}^Z |g(z)|$ , которую можно обойти путем соответствующей аппроксимации. Естественно, чем точнее аппроксимация, тем ближе найденное значение вектора весовых коэффициентов (при аппроксимации) к искомому. Согласно (13.6) минимизируемый функционал представляется в следующем виде:

$$I(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \sum_{z=1}^Z |\mathbf{c}^T \mathbf{y}(z)| - \mathbf{c}^T \mathbf{b}. \quad (13.7)$$

Здесь  $\mathbf{c}$  – произвольный вектор весовых коэффициентов, для которого значение аналоговой ошибки нейрона не равно нулю,  $\mathbf{b}$  – характеристический вектор данной логической функции. При определении вектора, обеспечивающего минимум (13.7), устанавливается, что: либо  $\mathbf{a}$ , равное  $\mathbf{c}$ , является вектором весовых коэффициентов, реализующих данную логическую функцию, либо данная логическая функция не реализуема на одном нейроне.

На рис.13.14 представлены условно зависимости слагаемых формулы (13.7) от  $c_i$  для логических функций, реализуемых и нереализуемых на одном нейроне. На рис. 13.14 цифра 1 соот-

ветствует физически реализуемой, цифра 2 – нереализуемой логической функции.

Излагаемый метод синтеза нейронов второго слоя многослойной нейронной сети основан на представлении:

$$q |g(z)| \approx \xi_2 [q^2 g^2(z)] + \xi_4 [q^4 g^4(z)] + \dots,$$

где  $q$  – нормирующий множитель, ограничивающий область аппроксимации следующим образом:  $1 \leq q |g(z)| < 0$ . Аппроксимация  $q |g(z)|$   $k$ -членами называется аппроксимацией  $k$ -го порядка.

В случае  $k=1$

$$|g(z)| \approx \xi_2 [q g^2(z)].$$

Отсюда

$$\sum_{z=1}^Z |g(z)| \approx \xi_2 q \sum_{z=1}^Z g^2(z)$$

или

$$\sum_{z=1}^Z |g(z)| = \xi_2 q \sum_{z=1}^Z \sum_{i=0}^{H_1} \sum_{j=0}^{H_1} c_i c_j y_i(z) y_j(z);$$

$$\sum_{z=1}^Z |g(z)| = \xi_2 q \sum_{i=0}^{H_1} \sum_{j=0}^{H_1} c_i c_j \sum_{z=1}^Z y_i(z) y_j(z).$$

Сумма

$$\sum_{z=1}^Z y_i(z) y_j(z) = d_{ij}$$

целиком определяется данной логической функцией (одними значениями своих аргументов) и может быть вычислена до решения задачи синтеза нейронов, так же как и характеристический вектор. Для полного набора аргументов логической функции, существующей на  $2^{H_1}$  точках  $H_1$ -мерного пространства двоичных  $(1, -1)$  переменных, справедливо следующее:

$$\sum_{z=1}^Z y_i(z) y_j(z) = 2^{H_1} \delta_{ij}, \quad (13.8)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. В общем случае это свойство не

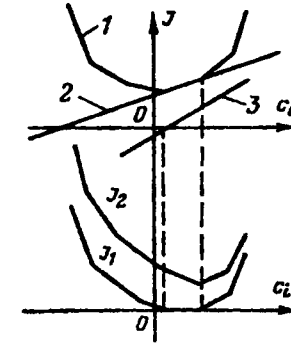


Рис. 13.14. Общий вид функционалов качества физически реализуемой и нереализуемой на нейроне логической функции

соблюдается при синтезе многослойных нейронных сетей. Однако если это соблюдается, то

$$\sum_{z=1}^Z |g(z)| = \xi_2 q 2^{H_1} \sum_{i=0}^{H_1} c_i^2. \quad (13.9)$$

В общем случае

$$\sum_{z=1}^Z |g(z)| = \xi_2 q (c^T D c); \quad D = [d_{ij}]. \quad (13.10)$$

При соблюдении условия (13.9)

$$I(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \xi_2 q 2^{H_1} \sum_{i=0}^{H_1} c_i^2 - \sum_{j=0}^{H_1} c_j b_j.$$

Выражение для оптимального, обеспечивающего минимум  $I(0)$  вектора  $\mathbf{c}$  имеет следующий вид:

$$c_i \approx P_i b_i,$$

где

$$P_i = (\xi_2 q 2^{H_1+1})^{-1}.$$

Необходимо отметить, что свойство реализуемости логической функции на одном нейроне инвариантно относительно умножения  $a_i$  на постоянный коэффициент. Поэтому выражение для искомого вектора весовых коэффициентов нейрона, реализующего логическую функцию с характеристическим вектором  $\mathbf{b}$ , при соблюдении условия (13.8) имеет следующий вид:

$$a_i \approx b_i, \quad i = 0, \dots, H_1, \quad (13.11)$$

Таким образом, при аппроксимации первого порядка и соблюдении (13.8) вектор весовых коэффициентов равен характеристическому вектору логической функции. В этом случае, если аппроксимация первого порядка оказывается непригодной, принимают:

$$a_i = b_i \text{ лишь для } i = 1, \dots, H_1,$$

а величину  $a_0$  варьируют для обеспечения возможной реализуемости логической функции на нейроне (см. пример ниже).

В общем случае, когда соотношение (13.8) не соблюдается

$$I(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \xi_2 q (c^T D c) - \sum_{i=0}^{H_1} c_i b_i,$$

искомый вектор весовых коэффициентов нейрона вычисляется по формуле

$$\mathbf{a} = D^{-1} \mathbf{b}.$$

Это выражение является основным для синтеза нейронов методом минимизации функционала при аппроксимации первого порядка. Матрица  $D^{-1}$  и вектор  $\mathbf{b}$  вычисляются по исходным значениям реализуемой логической функции. Операция с вариацией порога  $a_0$  здесь полностью аналогична соответствующей операции в случае соблюдения условия (13.8).

**Пример.** Пусть дана следующая конфигурация разделяющей поверхности, полученная (рис. 13.15) пересечением четырех гиперплоскостей. В табл. 13.5 представлены значения логической функции четырех переменных. Звездочкой отмечены те значения аргумента, которые не присутствуют при формировании исходной кусочно-линейной разделяющей поверхности. Множество всех возможных наборов значений входных двоичных переменных нейронов упорядочивается таким обра-

Рис. 13.15. Иллюстрация к синтезу нейронов второго слоя двухслойной нейронной сети методом минимизации функционала

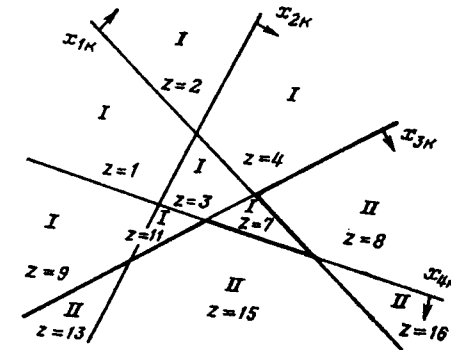


Таблица 13.5

z	0	1	2	3	4*	5*	6	7	8	9*	10	11*	12	13*	14	15
$y_1$	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$y_2$	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
$y_3$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
$y_4$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\epsilon$	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1

зом, чтобы десятичные числа  $z$ , соответствующие двоичным кодам, составленным из значений переменных, образовывали возрастающую последовательность. Полный набор значений логической функции реализует следующее преобразование:  $\epsilon = x_1 x_3 + x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4$ .

Определяем характеристический вектор логической функции

$$b_i = \sum_{z=2}^{H_1} \varepsilon(z) x_i(z), \quad i = 0, \dots, H_1; \quad x_0 = 1.$$

Для рассматриваемого примера  $b_0 = -2, b_1 = 6, b_2 = -2, b_3 = 10, b_4 = 6$ . Легко проверить, что данные коэффициенты нейрона позволяют реализовать на нем исходную логическую функцию. Однако, если аппроксимации первого порядка не хватает для обеспечения реализуемости логической функции, необходима вариация коэффициента  $b_0$ . Для вычисленных коэффициентов  $b_i$  и условия (13.11) для  $i = 1, \dots, H_1$  вычисляем величину (табл.13.6)

$$B(z) = \sum_{i=1}^n a_i y_i(z).$$

Таблица 13.6

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$B(z)$	-20	-8	-24	-12	0	12	-4	8	-8	4	-12	0	12	24	8	20

Перебор значений  $b_0 = a_0$  (порога нейрона) производится в пределах  $[B(z)_{\max} - 0,5] + [B(z)_{\min} + 0,5]$  через единицу.

Аналогично можно проиллюстрировать метод синтеза нейрона методом минимизации функционала с применением аппроксимации первого порядка на неполном наборе переменных, определяемых видом разделяющей поверхности, показанной на рис.13.16 (табл.13.7).

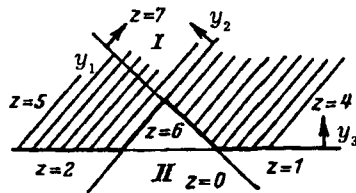


Рис.13.16. Иллюстрация к синтезу нейрона второго слоя двухслойной нейронной сети при неполноте определенной логической функции  $\varepsilon(y)$

Таким образом, общая схема синтеза нейрона методом минимизации функционала заключается в следующем (переход к каждому следующему пункту обусловлен нереализуемостью логической функции): 1) определение характеристического

вектора  $b$ ; 2) определение порога  $b_0$ ; 3) применение аппроксимации второго порядка и т.д.

Вполне очевидно, что изложенный метод синтеза нейрона эквивалентен обычным методам синтеза нейронных сетей, настраивающихся по разомкнутому циклу, при учете высших моментов входного сигнала нейронной сети. Особенность его заключается в том, что здесь гиперплоскость, реализуемая нейроном, проводится с учетом высших моментов (по разомкнутому циклу), а раньше, при учете высших моментов, проводилась соответствующая нелинейная гиперповерхность. В данном случае видно, что при аппроксимации первого порядка характеристический вектор есть вектор разделяющей поверхности проведенной посреди центров двух классов (это вектор есть полусумма векторов математических ожиданий первого и второго класса).

### 13.4.3. Синтез нейрона по таблицам пороговых функций

Достаточно большое внимание, которое выше было уделено синтезу нейрона второго слоя многослойной нейронной сети из нейронов с двумя решениями, объясняется характерными особенностями, возникающими при оперировании в двоичном пространстве выходными сигналами нейронов первого слоя. В принципе для синтеза нейрона второго слоя может быть применен любой из итерационных методов настройки по замкнутому циклу, разработанный в гл.9.

Синтез нейрона по таблицам пороговых функций [13.5] основан на использовании таблиц характеристических векторов логических функций. Как указано в [13.5], в тех случаях, когда реализация логической функции на одном нейроне возможна, использование таблиц позволяет получить оптимальные (в смысле минимума суммы весов и порога) параметры нейрона. Метод синтеза нейронов по таблицам пороговых функций применим в том случае, когда число нейронов в первом слое нейронной сети не превышает семи. Необходимо отметить, что для большинства инженерных задач это вполне приемлемо, так как гиперповерхность, составленная из кусков семи гиперплоскостей, является достаточно гибкой даже в двухслойной нейронной сети. Процесс получения таблиц характеристических векторов и соответствующих векторов весовых коэффициентов нейрона второго слоя нейронной сети подробно описан в [13.5]. Про-

Таблица 13.7

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7
$y_1$	1	1	1	1	1	-1	-1	1
$y_2$	-1	1	1	1	-1	1	-1	1
$y_3$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
$\varepsilon$	1	1	1	-	-1	-1	1	-1

цедура синтеза нейрона, имеющего до семи входов, состоит в следующем:

1. Определяем характеристический вектор  $\mathbf{b}$ .
2. Образует убывающую последовательность абсолютных величин  $|b_i|$  ( $i = 0, \dots, N_1$ ) коэффициентов характеристического вектора логической функции (слева направо) и проверяем ее наличие в соответствующей таблице. Если такой последовательности в таблице нет, то данная логическая функция не реализуется на одном нейроне и процедура синтеза заканчивается.
3. Если последовательность найдена в таблице, то данная логическая функция реализуема на одном нейроне. Вектор весовых коэффициентов  $\mathbf{a}$  нейрона второго слоя нейронной сети находим следующим образом. Выписываем последовательность  $|a_i|$ , смежную с последовательностью  $|b_i|$  в таблице. Затем делаем перестановки и изменения знаков  $a_i$  в этих последовательностях в точном соответствии с теми перестановками и изменениями знаков, которые делались в векторе  $\mathbf{b}$  для нахождения его канонического представления в таблице. В результате получаем  $N_1+1$  элементов  $a_i = (i_0, \dots, N_1)$ , которые представляют собой весовые коэффициенты нейрона второго слоя нейронной сети.

### 13.5. Алгоритм обучения второго и третьего слоев нейронов трехслойной нейронной сети

Задача обучения второго и третьего слоя трехслойной нейронной сети, если первый слой является обучаемым, является самостоятельной задачей обучения двухслойной нейронной сети при двоичных входных сигналах. В данном параграфе рассматриваются два метода построения двух выходных слоев трехслойной нейронной сети: построение в виде порогово-дизъюнктивной сети [13.5] и построение в виде двух слоев нейронов с настраиваемыми коэффициентами.

Исходными данными для синтеза порогово-дизъюнктивной сети является полностью определенная логическая функция  $\epsilon(\mathbf{y})$ . Синтез порогово-дизъюнктивной сети проводится в следующем порядке:

1. Выполнение процедуры Квайна-Мак-Класки над функцией  $\epsilon(\mathbf{y})$ , пока не получим всех ее простых импликантов.
2. Находим все общие пересечения (центры тяжести двух или более простых импликантов и объединяем в звезды те

простые импликанты, которые имеют общий центр тяжести. Таким образом, звездой является объединение нескольких простых импликантов, имеющих общий центр тяжести.

3. Находим характеристические векторы каждой звезды, полученной на предыдущем этапе, и проверяем эти звезды на реализуемость на одном нейроне (любым из методов, изложенных в предыдущей главе).

4. Для каждой звезды, нереализуемой на одном нейроне, находим всевозможные подзвезды. При этом подзвезда определяется как реализуемое на одном нейроне подмножество звезды, которое не является подмножеством любой другой звезды.

5. Дополняем перечень простых импликантов реализуемыми на одном нейроне звездами и подзвездами, найденными в пп. 3, 4, и отмечаем наборы, покрываемые каждой записью этого списка.

6. Выбираем наименьшее число записей, покрывающих все единицы функции  $\epsilon(\mathbf{y})$ . Линейные пороговые элементы, реализующие эти записи, составляют либо первый слой порогово-дизъюнктивной сети, либо каскадную сеть [13.5], эквивалентную данной порогово-дизъюнктивной сети.

Метод нахождения подзвезд заключается в следующем:

1. Определяем все импликанты, которые имеют пересечением центр тяжести рассматриваемой звезды.
2. Эти импликанты вместе с простыми импликантами звезды рассматриваются затем во всех возможных комбинациях, вычисляются их характеристические векторы и затем осуществляется их проверка на реализуемость на одном нейроне. Такая процедура должна осуществляться при начальном рассмотрении групп, покрывающих наибольшее число единиц, а затем необходимо переходить к группам, покрывающим меньшее число единиц.

Этот метод является достаточно громоздким в том случае, когда число простых импликантов звезды велико. Поэтому можно использовать другой метод нахождения подзвезд.

1. Если звезда, нереализуемая на одном нейроне, состоит из простых импликантов, то необходимо рассмотреть все группы этих простых импликантов, взятых по  $(G-1)$  в группе, и проверить каждую такую группу на реализуемость на одном нейроне.



2. Если по крайней мере одна из таких групп реализуема на одном нейроне, то нет необходимости рассматривать другие разбиения данной звезды, так как она может быть реализована на двух нейронах.

3. Если ни одна из этих групп не реализуема на одном нейроне, то повторяем проверку реализуемости на одном нейроне групп простых импликантов, взятых по (G-2).

4. Эта процедура выполняется до тех пор, пока не будут исчерпаны все простые импликанты. Группы, полученные на этом этапе и реализуемые на одном нейроне, будут подзвездами. Отметим, что этот метод определения подзвезд не обязательно приводит к минимальной порогово-дизъюнктивной сети нейронов.

В случае не полностью определенной логической функции  $\epsilon(y)$  неопределенность задания значений логической функции на некоторых наборах переменных можно использовать для минимизации общего числа нейронов порогово-дизъюнктивной сети. Процедура синтеза в данном случае заключается в следующем:

1. Доопределяем функцию  $\epsilon(y)$  на всех наборах переменных, где она принимает произвольные значения.

2. Выполняем процесс синтеза порогово-дизъюнктивной сети, изложенный для случая полностью определенной логической функции до тех пор, пока не будет установлено, что все звезды и подзвезды реализуемы на одном нейроне.

3. Составляем импликатную таблицу, число строк которой равно числу звезд, позвезд и простых импликантов, полученных на втором шаге процедуры синтеза, а число столбцов - числу наборов функции  $\epsilon(y)$ . При составлении такой таблицы все произвольные значения функции  $\epsilon(y)$  принимаются равными (-1).

4. Выбирается наименьшее подмножество записей в таблице, которое покрывает все единицы функции  $\epsilon(y)$ . При этом автоматически доопределяются все ее произвольные значения. На этом процесс синтеза заканчивается.

Построение двух выходных слоев нейронной сети в виде сети из нейронов с настраиваемыми коэффициентами может быть осуществлено на основании следующих соображений.

Выше было показано, что два выходных слоя нейронов трехслойной нейронной сети являются сами по себе самостоя-

тельной системой распознавания принадлежности областей исходного пространства признаков, образованных пересечением гиперплоскостей, к первому или второму классу. В данном случае признаки являются двоичными, а мерность пространства признаков равна числу нейронов первого слоя многослойной нейронной сети. Именно поэтому для обучения нейронов второго слоя трехслойной нейронной сети можно применить любой из методов, изложенных выше в п. 13.1 и 13.2. При этом выбирается число нейронов второго слоя для обеспечения заданной вероятности распознавания принадлежности областей исходного пространства признаков тому или иному классу. Эта вероятность довольно просто связывается общей вероятностью правильного распознавания при наличии результатов обучения нейронов первого слоя трехслойной нейронной сети. После обучения нейронов второго слоя в данном случае деревообразная логическая структура третьего слоя может быть проверена на реализуемость на одном нейроне третьего слоя.

### 13.6. Общая методика последовательного синтеза многослойных нейронных сетей

Изложенная выше методика последовательной настройки трехслойной нейронной сети приводит к обобщению на многослойные нейронные сети следующим образом:

1. По исходным выборкам настраивается первый слой нейронов многослойной нейронной сети. При этом выбираются число нейронов и настраиваемые коэффициенты.

2. Получающаяся в результате настройки первого слоя нейронов логическая функция проверяется на реализуемость на одном нейроне. Если данная функция реализуема на одном нейроне, то на этом процесс синтеза сети заканчивается.

3. В случае отсутствия реализуемости логической функции на одном нейроне аналогично п.1 производится обучение нейронов второго слоя. При этом выбирается число нейронов и настраиваются коэффициенты.

4. Получающаяся в результате настройки второго слоя нейронов... (продолжение аналогично п.2).

Данная методика легко обобщается на случай многослойной сети из нейронов с континуумом решений. При этом необходимо отметить следующее. В случае сети из нейронов с континуумом решений число образов первого и второго класса

сохраняется при переходе от слоя к слою. При этом в обученной нейронной сети в каждом слое происходит как бы деформация распределений классов в смысле их разнесения. При этом критерием качества многослойной нейронной сети является уже не только вероятность правильного распознавания на выходе нейронной сети, а функция изменения данной вероятности от слоя к слою.

Таким образом, результатом применения предлагаемой методики синтеза многослойных нейронных сетей является число слоев нейронной сети, число нейронов в каждом слое и величины настраиваемых коэффициентов. Данная методика позволяет, следовательно, выбрать на этапе настройки оптимальную или близкую к оптимальной структуру разомкнутой сети в виде многослойной нейронной сети. Отметим, что в рассмотренной методике обучения многослойной нейронной сети на каждом шаге обучения вместо нейрона может быть любая из структур, рассмотренных в гл.9.

Последовательная процедура настройки достаточно просто обобщается на режим самообучения. В этом случае критерий оптимальности при проведении очередной гиперплоскости есть критерий минимума специальной средней функции риска.

### **13.7. Метод обучения нейронов первого слоя многослойной нейронной сети с непрерывным признаком**

В данном параграфе кратко рассмотрен алгоритм обучения первого слоя многослойной нейронной сети с непрерывным признаком, а также пути его физической реализации. Методы обучения подобных нейронных сетей строятся по аналогии с рассмотренными выше методами обучения многослойных нейронных сетей с дискретным множеством признаков. Особенность обучения многослойных нейронных сетей с непрерывным признаком проявляется при обучении нейронов первого слоя. В простейшем случае выражения для функций  $a(i)$  и коэффициентов  $a_0$  имеют следующий вид:

$$a(i) = m_1(i) - m_2(i);$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \left[ \int_J m_1^2(i) di - \int_J m_2^2(i) di \right].$$

При наличии набора изображений  $x_1(i,n)$  и  $x_2(i,n)$  первого и второго класса функции  $m_1(i)$  и  $m_2(i)$  получаются

$$m_k(i) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M x_k(i,n), \quad k = 1, 2.$$

Реализация функциональных преобразований, указанных выше, может быть осуществлена фотографическими методами в случае двумерного  $i$ . Результатом обучения в данном случае должны явиться фотомаски, реализующие функции  $a_n(i)$ , моделирующие световой поток  $x(i,n)$  перед интегрированием по  $i$  (см. гл.4), и коэффициенты  $a_0$ .

В случае одномерного  $i$  при распознавании кривых или электрических сигналов на фиксированном интервале наблюдаемые функции  $a_n(i)$  и коэффициенты  $a_0$  достаточно просто технически получают на аналоговых средствах.

Методика последовательного обучения слоя нейронов с непрерывным признаком остается той же, что и для дискретного множества признаков.

### **13.8. Использование алгоритма настройки многослойных нейронных сетей с переменной структурой для решения задачи выбора начальных условий**

На рис.13.17 показана структурная схема программы, реализующей процесс последовательного построения кусочно-линейной разделяющей поверхности при выборе начальных условий. Ниже обсуждается идея использования его для выбора начальных условий при обучении многослойных нейронных сетей с фиксированной структурой по замкнутому циклу. Поскольку мы имеем дело с фиксированной структурой многослойной нейронной сети, в выше указанном алгоритме появляются ограничения на число нейронов, по крайней мере, первого слоя. При этих ограничениях и при конечном объеме выборки алгоритм может не сойтись (в смысле получения нулевой ошибки в подобластях). Такое условие сходимости алгоритма не является строгим, если его рассматривать без оценки правдоподобия получения нулевой ошибки на данной выборке, т.е. без статистических методов вычисления вероятности ошибочного распознавания, но при выборе начальных условий мы можем этим пренебречь. После применения алгоритма остается возможность

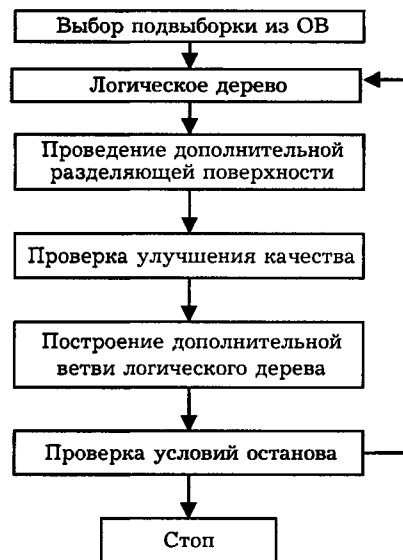


Рис.13.17. Структурная схема программы, реализующей алгоритм с переменной структурой

Одним из методов построения такой подвыборки является детерминированный выбор, например,  $K$  (либо  $2K$ ,  $3K$  и т.д.) образов, каждый из которых принадлежит одному из  $K$  классов образов. Выбор образов одного класса можно производить случайно, либо в качестве представителя класса брать его характерный образ (например, математическое ожидание). В случае предельного уменьшения объема предвыборки в зависимости от наличия либо отсутствия априорной информации переходим к детерминированному либо случайному выбору начальных условий, соответственно.

### 13.9. Об алгоритме самообучения многослойных нейронных сетей с переменной структурой

Изложенные методы настройки многослойных нейронных сетей с переменной структурой применимы к решению задачи самообучения (кластеризации), когда на входе нейронной сети имеется случайная выборка с многомодальным распределением без указания отнесения образов к тому или иному клас-

су. В этом случае многослойная нейронная сеть настраивается на распознавание двух классов образов:  
 – первый класс представляет собой исходную выборку;  
 – второй класс является искусственно генерируемой случайной выборкой с равномерной функцией распределения вероятностей в диапазоне изменения признаков. Размерность пространства признаков выборок первого и второго класса совпадает.

улучшить положение разделяющей поверхности, настраивая последовательно каждый нейрон по замкнутому циклу с проверкой качества обучения для всей кусочно-линейной поверхности. Ввиду неэкономичности использования этого алгоритма на полном объеме выборки при выборе начальных условий (в худшем случае придется проводить настройку по замкнутому циклу  $2N_1$  раз, т.е.  $2N_1 \times M$  итераций, где  $N_1$  – число нейронов первого слоя;  $M$  – объем всей выборки) имеет смысл уменьшать объем подвыборки, используемой при выборе начальных условий, до некоторого оптимального.

су. В этом случае многослойная нейронная сеть настраивается на распознавание двух классов образов:

- первый класс представляет собой исходную выборку;
- второй класс является искусственно генерируемой случайной выборкой с равномерной функцией распределения вероятностей в диапазоне изменения признаков. Размерность пространства признаков выборок первого и второго класса совпадает.

### Литература

- 13.1. Галушкин А.И. Многослойные системы распознавания образов. – М., МИЭМ, 1970.
- 13.2. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. – М., Энергия, 1974.
- 13.3. Грачев Л.В., Симоров С.Н. Статистические исследования многослойных нейронных сетей с переменной структурой. // Нейрокомпьютер – № 2, 1992, с. 5-8.
- 13.4. Герасимова А.В., Грачев Л.В. К вопросу о представительности обучающей выборки для парадигмы нейронных сетей с переменной структурой. // Нейрокомпьютер – №3,4, –1992, с. 3-6.
- 13.5. Дертоузос М. Пороговая логика. – М., Мир, 1967, 343 с.

## Глава 14. Выбор информативных признаков в многослойных нейронных сетях

### 14.1. Постановка задачи выбора информативных признаков в режиме обучения

Проблема выбора информативных признаков является самостоятельной в теории распознавания образов и в настоящее время не решена до конца. В данной книге кратко изложены существующие подходы к проблеме выбора информативных признаков, а также вводятся так называемые структурные методы, основанные на методах синтеза многослойных систем распознавания образов [14.1, 14.2].

Основой предлагаемого подхода к проблеме выбора информативных признаков являются изложенные ниже три тезиса:

1. Бытующее представление о возможности предварительного выбора информативных признаков до этапа настройки многослойных нейронных сетей является неверным, так как в любой из известных процедур выбора прямо или косвенно присутствует настроенная многослойная нейронная сеть. С этой точки зрения всякая процедура выбора информативных признаков является субъективной, где субъект — это многослойная нейронная сеть в том или ином формальном или неформальном представлении.

2. Критерием информативности признаков может служить только критерий первичной оптимизации, принятый для данной системы. Применение вместо критериев первичной оптимизации аппроксимирующих критериев, таких как экстремум дивергенции или средней условной энтропии, вносит дополнительные ошибки, сужает границы их применимости и должно быть обосновано количественно.

3. Необходимо выбирать такие типы многослойных нейронных сетей, которые в процедуре выбора информативных признаков являются наименее субъективными, т.е. те, которые обеспечивают оптимальные решения в достаточно широких пределах изменения характеристик входного сигнала многослойных нейронных сетей (число классов, сложность распределений внутри классов).

Первоначально задача выбора информативных признаков в режиме обучения ставилась и ставится во многих работах как задача выбора из  $N$  исходных признаков  $N_1 = \text{const}$  призна-

ков, обеспечивающих максимальную вероятность правильного распознавания. Эта постановка может быть интерпретирована в другой форме. Из  $N$  исходных признаков выбрать то минимальное число  $N_1$  признаков, которые обеспечивают заданную вероятность правильного распознавания. Определим в данном случае критерий информативности признаков. Предположим, что  $НС_0$ ,  $НС_1$ ,  $НС_2$  (нейронная сеть) соответственно с  $N = N_1 + N_2$ ,  $N_1$  и  $N_2$  признаками (рис.14.1) по некоторой выборке обеспечивают вероятности правильного распознавания соответственно  $P$ ,  $P_1$  и  $P_2$ . Если  $P_1 > P_2$ , то группа из  $N_1$  признаков будет более информативной по сравнению с группой из  $N_2$  признаков. В этом случае использование группы из  $N_2$  признаков будет целесообразным, если приращение вероятности правильного распознавания  $\Delta P = P - P_1$  оправдано для конструктора тем усложнением многослойных нейронных сетей, которое имеет место при прибавлении группы из  $N_2$  признаков. Таким образом, в данном случае определяется основной критерий выбора информативных признаков. Данная постановка задачи выбора информативных признаков оправдана большим кругом практических задач, в которых отдельные группы признаков формируются различными (зачастую, независимыми) измерителями, и перед разработчиком многослойных нейронных сетей встает задача минимизации числа измерителей — сжатие исходного описания с целью упрощения как измерительного устройства, так и самой многослойной нейронной сети. В частности, при решении задачи сравнительной оценки информативности признаков принимаются путем анализа вероятности правильного распознавания  $P_{\text{прав}}$ , полученные для четырех групп признаков:  $(x_1, \dots, x_N)$ ,  $((x_1, \dots, x_N) \cap x_i)$ ,  $((x_1, \dots, x_N) \cap x_j)$ ,  $((x_1, \dots, x_N) \cap (x_i, x_j))$ . Такая постановка задачи, как выбор  $N_1^*$  признаков из  $N$ , обеспечивающих, в частности, максимальную вероятность правильного распознава-

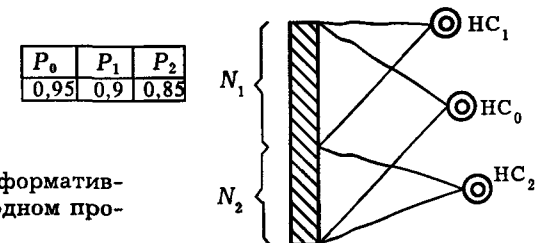


Рис. 14.1. Выбор информативных признаков в исходном пространстве признаков

ния, по нашему мнению, не может быть решена без решения задач в указанных выше постановках.

Рассмотрение многослойных нейронных сетей и общее представление о работе человека на этапе распознавания приводят к несколько иной постановке задачи выбора информативных признаков, которая заключается не в минимизации исходного описания, а в минимизации промежуточных описаний, т.е. «сжатий» самой многослойной нейронной сети, в то время как исходное описание фиксировано. В частном случае в многослойных нейронных сетях с полными связями задача заключается в минимизации числа линейных пороговых элементов в каждом слое, причем описанный выше критерий минимизации остается в силе. Обе указанные выше постановки задачи выбора информативных признаков объединяются в общем структурном подходе к проблеме выбора информативных признаков, когда первый слой связей считается априори организованным так, как показано на рис.14.1.

В связи с рассмотренными выше постановками задачи и критериями выбора информативных признаков на рис.14.2



Рис. 14.2. Классификация методов выбора информативных признаков

представлена схема, отражающая пути решения задачи выбора информативных признаков. Данная схема отражает лишь основные пути, не претендует на полноту и ставит своей целью введение структурных методов выбора информативных признаков. На уровне решения задачи выбора информативных признаков исходного пространства основное развитие получили подходы, связанные с дивергенцией и условной энтропией, а также с некоторыми упрощенными их оценками. К ним относятся также подходы с применением факторного и дисперсионного анализа.

Основной задачей данной главы является рассмотрение структурных методов выбора информативных признаков, сущность которых заключается в оценке информативности признаков по результатам настройки многослойных нейронных сетей (структуре, коэффициентам и значению функционала качества). При решении задачи минимизации структуры настроенной многослойной нейронной сети метод минимизации соответственно будет зависеть от способа настройки многослойных нейронных сетей.

#### 14.2. О структурных методах выбора информативных признаков в многослойных нейронных сетях с фиксированной структурой

Структурные методы выбора информативных признаков предполагают оценку информативности признаков исходного пространства по параметрам и структуре оптимально настроенной многослойной нейронной сети. В данном пункте структурные методы оценки информативности иллюстрируются на примере нейрона. Показывается возможность оценки информативности признаков по соответствующим оптимальным коэффициентам нейрона. Естественно, что нейрон является практически простейшей многослойной нейронной сетью; поэтому в соответствии с тезисом 1, изложенным в п.14.1, данная процедура выбора информативных признаков имеет и свои ограничения в плане субъективизма оценки информативности признаков. Ниже будут указаны и другие ограничения, присущие нейрону в рассматриваемой процедуре.

Остановимся на многослойных нейронных сетях типа нейрона и нейрона со слоем нелинейных или нелинейно-случайных преобразований (гл.1, 2). Многослойная нейронная сеть в виде нейрона

является оптимальной для совокупностей образов, распределенных по многомерным нормальным законам с равными ковариационными матрицами. Для случая единичных (с точностью до постоянного множителя) ковариационных матриц степень пересечения классов по каждому из признаков определяется соответствующим углом наклона оптимальной линейной разделяющей поверхности (рис. 14.3). На рис. 14.3 круги — линии равных значений плотностей  $f_1(\mathbf{x})$  и  $f_2(\mathbf{x})$ . Если считать, как и выше, вероятность правильного распознавания основным критерием информативности признаков, то в данном случае легко показать, что  $i$ -й коэффициент оптимальной линейной разделяющей поверхности может служить относительной оценкой информативности  $i$ -го признака.

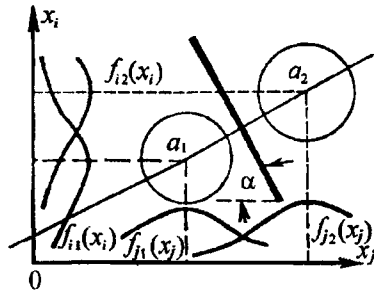


Рис. 14.3. К доказательству возможности использования коэффициентов нейронов в качестве оценок информативности признаков

Доказательство проводится двумя этапами. Сначала доказывается монотонность в некотором интервале изменения вероятности правильного распознавания в зависимости от угла наклона гиперплоскости к оси, соответствующей выбранному признаку, затем монотонность изменения дан

ного угла в зависимости от величины соответствующего коэффициента линейной разделяющей поверхности.

В случае ненормальных распределений коэффициенты оптимального нейрона также могут служить оценкой информативности признаков, но лишь на уровне такой структуры разомкнутой многослойной нейронной сети, как нейрон. В случае ненормальных распределений и нелинейной многослойной нейронной сети, представляемой в виде последовательного соединения слоя нелинейных преобразований с фиксированными коэффициентами и нейрона, коэффициенты нейрона в оптимальной нелинейной многослойной нейронной сети являются оценками информативности сложных признаков, определяемых слоем нелинейных преобразований. Аналогичный вывод можно сделать также относительно трехслойного персептрона Розенблатта.

Минимизация структуры при рассмотрении алгоритмов настройки многослойных нейронных сетей с фиксированной структурой и множество этапов настройки с заданием случайных начальных условий является самостоятельной задачей. При этом возникает необходимость усреднения результатов настройки по множеству этапов выброса случайных начальных условий для поиска локально оптимальных значений настраиваемых коэффициентов. При этом, несмотря на то что настройка многослойных нейронных сетей производится при фиксированной структуре, на каждом этапе выброса случайных начальных условий возможно проведение минимизации числа нейронов в слоях путем выбрасывания нейронов с одинаковыми (приблизительно с точки зрения реакции на входные образы) величинами коэффициентов, получающихся из-за избыточности фиксированной структуры многослойной нейронной сети при обеспечении ею локального экстремума средней функции риска. Сравнение указанных минимизированных структур и локально оптимальных значений средней функции риска дает непосредственное правило минимизации числа нейронов в многослойной нейронной сети, настраиваемых по замкнутому циклу при фиксированной структуре.

Отдельно необходимо остановиться на вопросе минимизации числа нейронов в слое при независимом обучении нейронов с выбором для каждого нейрона случайных начальных условий. После получения результатов независимого обучения  $N_1$  нейронов первого слоя, обеспечивающих локальный экстремум функционала оптимизации, задача выбора по результатам настройки одного из  $N_1$  нейронов, обеспечивающего экстремальное значение функционала оптимизации, является тривиальной. Задача выбора  $N_1^0 < N_1$  из  $N_1$  нейронов, обеспечивающих экстремальное значение функционала оптимизации, является трудной задачей, возможно неразрешимой в такой постановке (за исключением пути, связанного с очевидной процедурой полного перебора). Это достаточно легко иллюстрируется на примере рис. 14.4, в котором для каждого варианта выбора порогов (параметров и структуры первого слоя нейронов) указана в процентах величина

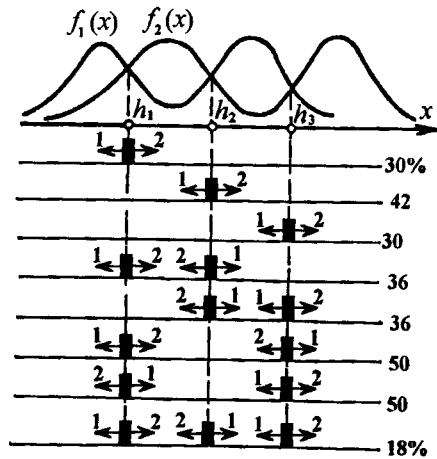


Рис. 14.4. Пример минимизации числа нейронов первого слоя многослойной нейронной сети: 1 – первый класс; 2 – второй класс

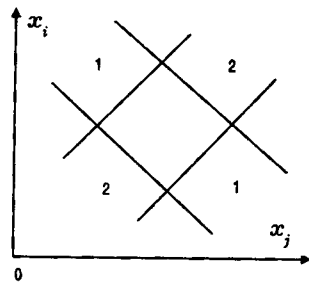


Рис. 14.5. Иллюстрация к свойству локальной оптимальности процедуры выбора информативных признаков: 1 – первый класс; 2 – второй класс

локальной, так как настроенная многослойная нейронная сеть с фиксированной структурой обеспечивает лишь локальный экстремум функционала оптимизации. Эти рассуждения справедливы и для режима самообучения.

вероятности ошибки. На рис. 14.4 цифры около стрелок указывают номер класса. При обобщении на случай сложных и не известных в общем виде распределений  $f'(x/\epsilon)$  этот подход также демонстрирует в некоторой степени свою ограниченность, однако эта ограниченность полностью объясняется с позиций тезиса о невозможности выбора информативных признаков до окончания этапа настройки. Поясним это на конкретном примере. На рис. 14.5 представлены линии равных значений  $f'(x/\epsilon)$  в многомодальном случае и показаны четыре положения линейно разделяющей поверхности, обеспечивающие локальный экстремум  $P_{\text{прав}}$ . Отсюда следует, что при фиксированной структуре разомкнутой многослойной нейронной сети любая оценка информативности будет не только субъективной, но и

### 14.3. Выбор информативных признаков исходного пространства с помощью многослойных нейронных сетей с последовательными алгоритмами настройки нейронов первого слоя

Основной вопрос состоит в том, как можно оценить относительную величину вероятности правильного распознавания по структуре обученной многослойной нейронной сети и результатам обучения. Сравниваются в плане информативности две группы признаков. В данном случае можно привести несколько методов оценки информативности признаков.

1. При использовании многослойных нейронных сетей с последовательными алгоритмами обучения нейронов первого слоя на некоторой конечной обучающей выборке обеспечивается заданная величина  $P_{\text{прав}} = \text{const}$ , в частности  $P_{\text{прав}} = 1$ . Тогда, если первая многослойная нейронная сеть с характеристиками  $N_1$ ,  $P_{1\text{прав}}$  имеет больше нейронов в первом слое, чем вторая многослойная нейронная сеть с характеристиками  $N_2$ ,  $P_{2\text{прав}} = P_{1\text{прав}}$ , группа из  $N_1$  признаков менее информативна, чем группа из  $N_2$  признаков. Это следует из объективной необходимости большего числа нейронов в первом слое многослойной нейронной сети при большем пересечении классов. Подобный способ оценки информативности признаков исходного пространства верен только при определенных ограничениях, рассмотренных ниже.

2. Предположим, что на каждом шаге обучения первого слоя обеспечивается минимальное значение ошибки распознавания. В результате настройки многослойной нейронной сети имеем кривые изменения  $P_{\text{прав}}$  от  $H_1$  (числа нейронов первого слоя) на совокупностях признаков  $N_1$  ( $НС_1$ ) и  $N_2$  ( $НС_2$ ) (рис. 14.6, а). Рассмотрение кривых показывает, что в данном случае группа признаков  $N_1$  менее информативна, чем группа признаков  $N_2$ . Здесь рассматривается случай, когда превышение информативности для  $N_2$  по сравнению с  $N_1$  наблюдается при любой структуре ( $H_1$ ) многослойной нейронной сети. Данная методика выбора информативных признаков включает в себя изложенную в п.1 как частную.

3. При наличии достаточно большой обучающей выборки зависимость  $P_{\text{прав}}(H_1)$  имеет характер, изображенный на рис. 14.6, б. Достаточное приближение кривой  $P_{\text{прав}}(H_1)$  к асимптоте (точки 1 и 2) на рис. 14.6, б означает переход от статистического режима обучения к детерминированному, когда многослойная нейронная сеть заключает в отдельные подобласти совокупности

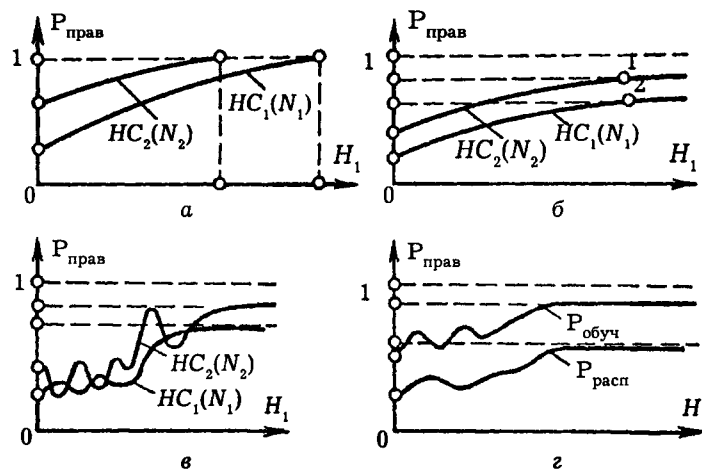


Рис. 14.6. Выбор информативных признаков с помощью многослойной нейронной сети с переменной структурой

образов с малым числом членов. В данном случае оценка информативности групп признаков должна производиться путем сравнения установившихся значений зависимостей  $P_{\text{прав}}(H_1)$ .

4. В случае неоптимального алгоритма настройки на каждом шаге первого слоя многослойной нейронной сети в общем случае имеет место картина, изображенная на рис.14.6, в. В данном случае (более общем, чем предыдущие) оценка информативности производится либо как ранее в п.3, либо при любом  $H_1$  с оговоркой, что оценка информативности производится при данном алгоритме настройки и данном числе нейронов в первом слое.

5. Выше принималось, что вся исходная выборка используется на этапе обучения и оценки информативности, и не учитывалась возможная непредставительность обучающей выборки. Для учета представительности обучающей выборки необходимо произвести обучение на части  $\Delta M_1$  всей исходной выборки. Зачастую для проверки представительности необходимо выбирать несколько интервалов  $\Delta M_i$  и помещать их в различных участках исходной выборки. Распознавание обученной многослойной нейронной сети производится на полном объеме обучающей выборки. Анализ результатов обучения  $P_{\text{обуч}}(H_1, \Delta M_i)$  и распознавания  $P_{\text{расп}}(H_1)$  (рис. 14.6, г) позволяет оценить стационарность и представительность обучающей выборки, а также информативность отдельных групп признаков.

#### 14.4. Минимизация числа нейронов

Процесс последовательности настройки (гл.13) нейронов первого слоя многослойной нейронной сети характеризуется графом, являющимся прадеревом, каждой вершине которого соответствует нейрон с некоторой величиной приращения  $P_{\text{прав}}$ , имеющей место при введении данного нейрона. Данный граф является исходной информацией для указанной выше процедуры минимизации. Граф может быть минимизирован в одной из следующих постановок: при заданной величине  $P_{\text{прав}}$  минимизировать число вершин графа, при заданном числе вершин с ветвлениями выбором структуры прадерева обеспечить максимальную величину  $P_{\text{прав}}$ .

На рис. 14.7 представлена иллюстрация исходной информации для минимизации прадерева. Слева в кружке указывается номер вершины нейрона в исходном графе. Справа в кружке указан номер вершины нейрона в результирующем оптимизированном графе. Номер каждого ребра графа совпадает с номером делимой области, причем нумерация областей производится следующим образом (гл.13). Область с номером  $y$  делится на две подобласти с номерами  $2y$  и  $2y+1$ , где подобласть с номером  $2y$  относится к первому классу, а подобласть с номером  $2y+1$  – ко второму. В качестве правила выбора очередной подобласти для деления зачастую наиболее целесообразно взять правило выбора той подобласти, которая содержит наибольшее

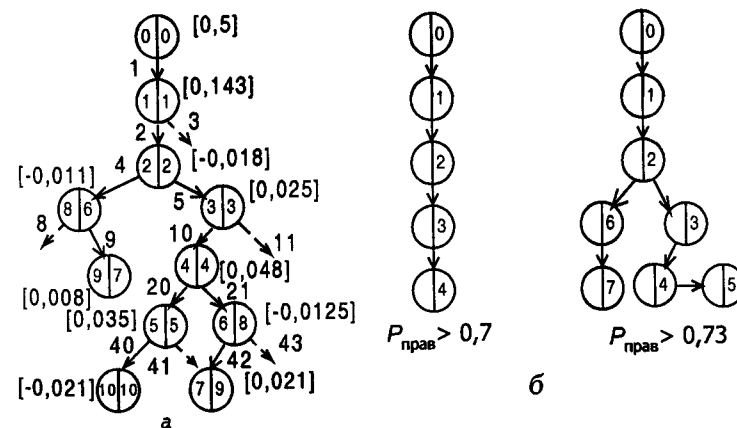


Рис. 14.7. Минимизация числа нейронов первого слоя многослойной нейронной сети с переменной структурой



шее число векторов первого и второго класса. Пунктиром графе показаны те подобласти, в которых имеется сравнительно незначительное число векторов. Около каждой вершины графа в квадратных скобках указывается приращение  $P_{\text{прав}}$ , обеспечиваемое введением соответствующего нейрона. Это приращение может быть и отрицательным из-за неоптимальности ( $P_{\text{прав}}$ ) метода настройки отдельного нейрона.

Оптимизация прадерева происходит следующим образом:

1) в случае первого ветвления (нейрон 3 и нейрон 8 в исходном графе) сравниваются приращения  $P_{\text{прав}}$ . К оптимизированному графу относится нейрон с максимальным приращением  $P_{\text{прав}}$  (на графе нейрон 3);

2) далее сравниваются по величине  $\Delta P_{\text{прав}}$  нейроны данного и последующих ветвлений (нейрон 8 и нейрон 4) и так выбирается нейрон с максимальным значением  $\Delta P_{\text{прав}}$  и включается в оптимизированный граф;

3) данный процесс продолжается до тех пор, пока сумма приращений вероятностей правильного распознавания не достигнет заданной величины  $P_{\text{прав}}$  или пока число вершин графа не достигнет заданной величины.

На рис. 14.7, а данная процедура приводит к оптимальному обходу вершин графа так, как обозначено в кружках (вершинах) справа. На рис. 14.7, б представлен результат оптимизации графа рис. 14.7, а для двух критериев:  $P_{\text{прав}} > 0,7$  и  $P_{\text{прав}} > 0,73$ . В оптимальном графе порядок обхода вершин не совпадает с обходом вершин на этапе обучения. Исходными данными для обучения нейрона второго слоя многослойной нейронной сети, как указывалось в гл.13, являются логическая функция, дополненная определенным образом и составляющая обучающую выборку и значение вероятности ошибки, соответствующее каждой подобласти (т.е. каждой реализации логической функции).

Идея применения последовательных алгоритмов для обучения нейронов второго слоя заключается в использовании последовательных алгоритмов с учетом для каждого обучающего вектора веса, определяемого  $P_{\text{ош}}$  в подобласти, соответствующей данному вектору. При обучении ошибка в подобласти подсчитывается как сумма ошибок для всех векторов, неправильно отнесенных к тому или иному классу. Идея минимизации числа нейронов второго слоя и последующих слоев многослойной нейронной сети в данном случае остается той же, что и для нейронов первого слоя. Необходимо лишь отм

тить, что чем больше номер слоя, тем менее актуальной становится задача минимизации числа нейронов в слое ввиду специфики структуры разомкнутой многослойной нейронной сети, связанной с уменьшением числа нейронов от первого слоя к выходу вследствие сжатия информации.

#### 14.5. О выборе информативных признаков в многослойных нейронных сетях в режиме самообучения

В режиме самообучения справедливы все постановки задачи выбора информативных признаков, описанные в п.14.1. Меняются лишь критерий выбора информативных признаков. Если в режиме обучения таким критерием является значение средней функции риска (в частном случае, вероятности правильного распознавания), то в режиме самообучения критерием информативности признаков является значение специальной средней функции риска. С данной точки зрения в режиме самообучения роль структурных подходов к выбору информативных признаков возрастает по сравнению с режимом обучения, так как, с одной стороны, эта задача, как нам известно, еще не была ранее поставлена, с другой стороны, хотя в принципе и возможна, является трудной задачей обобщения на случай самообучения подходов к выбору информативных признаков, связанных с дивергенцией, средней условной энтропией, а также упрощенными оценками. Достаточно просто методологически обобщаются на режим самообучения методы выбора информативных признаков, описанные в п.14.3 для режима обучения и систем распознавания с переменной структурой, а также соответствующие методы минимизации структуры многослойных систем. Минимизация структуры систем распознавания, имеющих при настройке фиксированную структуру, должна производиться путем анализа структуры настроенной многослойной нейронной сети и полученного в результате настройки значения специальной средней функции риска.

#### Литература

- 14.1. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. - М., Энергия, 1974, с.367.
- 14.2. Галушкин А.И. Итоги развития теории многослойных нейронных сетей (1965-1995 гг.) в работах Научного центра нейрокомпьютеров и ее перспективы. М., 1996.

## РАЗДЕЛ 4. НАДЕЖНОСТЬ И ДИАГНОСТИКА НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ\*

### Глава 15. Надежность нейронных сетей

#### 15.1. Методы исследования функциональной надежности нейронных сетей

Первые попытки оценки функциональной надежности нейронных сетей были экспериментальными [15.1], либо качественными [15.2]. Качественные оценки показали, что сети нейронных элементов обладают логической избыточностью [15.3], т.е. отказы некоторых элементов не вызывают появления ошибки на выходе всей сети.

Попытки аналитического исследования надежности нейронных сетей сталкиваются с математическими сложностями. В ряде работ, например, в [15.4–15.6], говорится о невозможности (по крайней мере, общепринятыми методами) полного аналитического исследования нейронных сетей. В этих работах для частного вида нейронных сетей для простейших случаев на основе теории марковских процессов строился граф переходов сети при отказах отдельных нейронов, записывалась и решалась соответствующая система дифференциальных уравнений. Недостатком такого подхода является то, что даже для простых графов оказывается затруднительным явно разрешить данную систему дифференциальных уравнений.

В работе [15.7] рассматривается надежность нейронной сети в смысле ее логической устойчивости. Логическая устойчивость исследуется с помощью карт устойчивости, которые можно расписать в явном виде лишь для простейших сетей, например, триплета порогового элемента (ПЭ). Для практического исследования более сложных сетей этот метод не пригоден.

В работе [15.8] для специфических нейронных сетей выведены эмпирические выражения для надежности такой сети при ограничениях на ее сложность (под сложностью понималась суммарная нагруженность нейронов сети по входам). Полученные вспомогательные эмпирические выражения и численный расчет по ним не могут претендовать на объективную оценку функциональной надежности рассматриваемой сети ПЭ.

\* Материал данного раздела написан совместно с Фоминым Ю.И.

В работах [15.9] – [15.12] делается попытка исследовать надежность одного нейрона с учетом того, что весовые коэффициенты, порог и значения входов – суть случайные величины. Даже в таком простом случае при принятых в работах допущениях авторам не удалось получить точный аналитический результат. Можно перечислить несколько недостатков методики упомянутого исследования: все аналитические выкладки основывались на экспериментально полученной (для конкретной реализации нейрона на согласованной паре туннельных диодов) и затем аппроксимированной вероятностной релейной функции нейрона (ВРФ); ряд промежуточных результатов, например, математическое ожидание ВРФ в [15.11] был получен путем дополнительных упрощений ввиду математических сложностей; в конце концов полученное выражение может быть проинтегрировано лишь с помощью численных методов. Тем не менее, данное исследование, с нашей точки зрения, является наиболее успешным аналитическим исследованием надежности нейрона, так как учитывает как функциональную структуру нейрона, так и вероятностную модель его функционирования. Попытка провести аналогичное исследование надежности для многослойной нейронной сети для более простой вероятностной модели показывает невозможность разрешения поставленной задачи даже приближенно.

Ввиду вышеизложенного можно сделать вывод либо о необходимости принципиально нового подхода в аналитическом исследовании надежности многослойных нейронных сетей, либо о необходимости экспериментального исследования таких сетей с помощью методов Монте-Карло.

Используя подход к многослойной нейронной сети как линейной последовательностной машине в [15.13] аналитически исследуется надежность так называемого обобщенного порогового элемента. Новизна такого подхода заключается в том, что, любая комбинационная сеть нейронов (многослойная нейронная сеть с последовательными или перекрестными [15.14] связями) может быть реализована в виде слоя нейронов, а поскольку функциональная надежность слоя нейронов иногда сводится к надежности одного нейрона, то аналитическое ее исследование приобретает принципиальное значение.

Экспериментальное исследование надежности может быть проведено на трех различных уровнях: схемотехническом, функ-

циональном и логическом. В исследовании, проведенном в пп. 15.4, 15.5, рассмотрены функциональный и логический уровни. Экспериментальное исследование надежности делится на ряд этапов, по числу классов отказов нейронов, существующих в рассматриваемых многослойных нейронных сетях, или тех их типов, которые наиболее часто встречаются в конкретной реализации многослойной нейронной сети. Отказы нейронов делятся обычно [15.15] на два класса: параметрические и катастрофические. Параметрический отказ нейрона определяется как неисправность, вызванная постепенными изменениями весовых коэффициентов и порога под действием внешних факторов (изменение напряжения питания, изменение температуры, старение элементной базы и т.д.). Катастрофические отказы - это неисправности типа «обрыв» или «короткое замыкание».

Методика экспериментального исследования параметрической надежности многослойных нейронных сетей, т. е. надежности при наличии параметрических отказов нейронов, заключается в следующем. Предполагается, что весовые коэффициенты всех нейронов и их пороги являются случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения вероятностей с известными параметрами, которые моделируются с помощью метода Монте-Карло. Далее исследуется зависимость вероятности безотказной работы многослойной нейронной сети, вычисленной на множестве всех возможных наборов входных значений при условии, что появления различных наборов равновероятны от параметров нормального распределения. Положительным моментом такой методики исследования является тот факт, что она позволяет не только исследовать широкий класс многослойных нейронных сетей и сделать обобщающие выводы, но и является инструментом оценки параметрической надежности конкретных реализаций.

Если в каждом конкретном случае возможно соотнести конкретные физические параметры с параметрами случайного распределения, то такое исследование на этапе синтеза многослойных нейронных сетей даст ответ: соответствует ли данная реализация предъявляемым требованиям или нет.

Очевидно, что без исследования функциональной надежности многослойных нейронных сетей при наличии катастрофических отказов экспериментальное исследование будет неполным. Ввиду этого была разработана методика исследова-

ния надежности для отказов типа логических констант на входах-выходах нейрона (константные неисправности). Исследование основывается на последовательном моделировании для каждого нейрона всех типов отказов константного типа и вычислении вероятности безотказной работы на множество всех наборов входных значений (при условии, что появление различных наборов равновероятно). Такое исследование (для достаточно больших сетей провести его без автоматизации исследования невозможно) позволяет выявить «потенциально опасные» отказы, т.е. отказы, которые ведут к сильному (по отношению к другим отказам) уменьшению вероятности безотказной работы, а также выявить логическую избыточность исследуемой сети на классе константных неисправностей. Полученные результаты позволяют предусмотреть на этапе проектирования какие-то меры, устраняющие возможность «потенциально опасных» отказов и учитывающие логическую избыточность сети.

Разработанная методика экспериментального исследования функциональной надежности позволяет получить некоторые количественные характеристики надежности многослойных нейронных сетей и практическую возможность исследования надежности конкретных реализаций многослойных нейронных сетей.

### **15.2. Исследование функциональной надежности восстанавливающих органов, выполненных в виде многослойных нейронных сетей**

Проблема обеспечения надежности цифровых устройств на любой логической основе, в том числе и на основе многослойных нейронных сетей, является в настоящее время актуальной, ввиду усложнения структуры самих ЭВМ и увеличения сложности выполняемых ими функций. Особенно остро проблема повышения надежности стоит для ЭВМ, работающих в невозстанавливаемом режиме (например, бортовые ЭВМ), т.е. с отсутствием возможности доступа к ЭВМ с целью ремонта. Первый отказ такой ЭВМ обычно бывает и последним, так как ведет к невыполнению задачи.

Для подобных систем вопрос обеспечения требуемой надежности является одним из важнейших. В этом случае надежность целиком определяется теми усилиями, которые приложены на этапе проектирования системы.

После основополагающей работы фон Неймана [15.16] синтезом надежных цифровых устройств из ненадежных компонентов занимался ряд исследователей. Особо стоит отметить работы [15.17 – 15.21], заложившие основы построения надежных систем из ненадежных компонент. Методы, предлагаемые в этих работах, основаны на введении некоторой избыточности в цифровые устройства. Согласно [15.22], избыточность можно разделить на три вида: аппаратную (структурную [15.23]), временную и информационную. Такого рода разделение является условным, поскольку аппаратная избыточность влечет за собой информационную избыточность в большинстве случаев временную. Информационная избыточность требует дополнительной аппаратуры и дополнительного времени, а временная избыточность приводит к информационной и аппаратурной избыточности. Приведенная на рис. 15.1 классификация типов введения избыточности проведена не по тому признаку как избыточность реализована, а по тому, какой вид избыточности повышает надежность системы.

Аппаратурная избыточность может использоваться на различных функциональных уровнях: от компонентов до всей системы. В зависимости от активности основных и резервных элементов можно реализовать три вида аппаратурной избыточности [15.24]: статическую (пассивное резервирование [15.25]), динамическую [15.4] и гибридную [15.2], [15.26], [15.27].

В случае статической избыточности, которая получила наибольшее распространение в невосстанавливаемых ЭВМ, все компоненты и основные, и резервные участвуют в работе. Все элементы такой системы равноправны. Преодоление последствий отказов в таких системах происходит путем автоматической

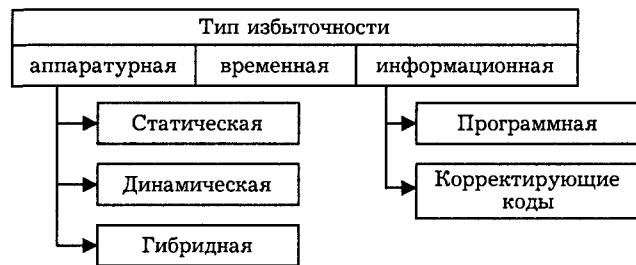


Рис. 15.1. Классификация методов введения избыточности

ческой коррекции ошибки за счет избыточности в компонентах системы.

В случае динамической избыточности резервная аппаратура включается в работу лишь при необходимости замены неисправных модулей. Если на выходе модуля появляется ошибка, то она обнаруживается и затем или исправляется (использование корректирующих кодов, повторный счет), или устраняется неисправность (замена неисправного модуля, реконфигурация системы). Динамическая избыточность обеспечивает самовосстановление системы. Такой тип избыточности требует наличия методов контроля и диагностики с целью обнаружения отказов.

Гибридная избыточность является комбинацией статической и динамической избыточностей. Постоянно в работе находятся несколько дублированных устройств: при возникновении отказа одного из устройств неисправное заменяется резервным.

Каждый вид аппаратурной избыточности имеет свои преимущества и недостатки, и эффективное использование того или иного метода определяется конкретной задачей.

В литературе достаточно полно изложены теоретические аспекты методов статической избыточности, однако при практической реализации возникает ряд специфических проблем, которые требуют специальных исследований.

Обычно выделяются следующие основные особенности статической избыточности [15.25], определяющие ее применимость (аэрокосмические системы, системы защиты, ЭВМ в контурах управления ответственными процессами):

- коррекция ошибок без перерыва в функционировании;
- коррекция ошибок, возникающих как вследствие устойчивых отказов, так и сбоев;
- существенное увеличение вероятности безотказной работы устройств с низкой надежностью за счет малого уровня резервирования;
- важными достоинствами статической избыточности являются их универсальность и отсутствие необходимости разработки специального программного обеспечения для обнаружения, локализации и исправления ошибок.

Часто используемой схемой при введении статической избыточности является схема мажоритарного резервирования [15.17], [15.28]. Она подразумевает  $n$ -кратное дублирование

какого-то блока или компоненты цифрового устройства ( $n$ -но-четно), причем выходы дублированных блоков нагружены восстанавливающий орган [15.17], [15.29], который реализует некоторое решающее правило, которое в случае мажоритарного голосования имеет вид: выход восстанавливающего органа равен значению, которое принимает большинство входных восстанавливающих органов.

Исследуется зависимость вероятности безотказной работы восстанавливающего органа от типа решающего правила, которое он реализует. На основе исследования свойств функции вероятности безотказной работы восстанавливающего органа находится оптимальное решающее правило, реализующее восстанавливающий орган. По критерию максимума параметрической надежности находится оптимальная реализация мажоритарного восстанавливающего органа. Рассматриваются различные схемы восстанавливающего органа, реализованные в виде многослойных нейронных сетей и находятся допустимые области изменения параметров, в которых применение тех или иных схем восстанавливающих органов оптимально.

### **15.3. Исследование функциональной надежности многослойных нейронных сетей**

Методы исследования функциональной надежности многослойных нейронных сетей можно разделить на аналитические и экспериментальные. Аналитическое исследование функциональной надежности нейронных сетей общепринятыми методами на уровне нейрона сталкивается с математическими сложностями. В связи с этим основной упор делается на экспериментальное исследование надежности многослойных нейронных сетей, методика которого рассматривается в п. 15.4, там же приведены план и результаты проведенного эксперимента. Возможно обобщить разработанную методику на случай любой комбинационной сети нейронов. На основе подхода к многослойным нейронным сетям как к линейным последовательностным машинам показывается возможность аналитического исследования функциональной надежности частных видов многослойных нейронных сетей при случайных весовых коэффициентах и значениях входных сигналов. Основные результаты, полученные ниже, изложены в работах [15.33–15.36].

Рассматривается класс многослойных нейронных сетей с двучными входами. Многослойность структуры понимается как особое свойство структуры преобразования, осуществляемого многослойной нейронной сетью при топологическом, а не символическом его представлении.

Исследование функциональной надежности многослойных нейронных сетей основано на задании:

- а) критерия функциональной надежности;
- б) вероятностной модели функционирования сети;
- в) множества входных значений.

В качестве критерия функциональной надежности ниже рассматривается вероятность правильного функционирования многослойной нейронной сети, вычисляемая на полном множестве входных значений, и функция распределения вероятностей выходного сигнала сети.

Вероятностная модель функционирования сети зависит от физической сути рассматриваемых типов отказов (параметрических, катастрофических). В п.15.4, например, при исследовании надежности нейронной сети при наличии параметрических отказов нейронов предполагается случайность весовых коэффициентов и порогов всех элементов сети.

Экспериментальное исследование надежности может быть проведено на трех различных уровнях: схмотехническом, функциональном и логическом. В нашем исследовании будут рассматриваться функциональный и логический уровни. Экспериментальное исследование целесообразно разделить на ряд этапов по числу классов отказов нейронов, которые вообще существуют или тех типов, которые наиболее часто встречаются в конкретной реализации нейронных сетей. Отказы нейронов обычно [15.15, 15.37] делятся на два класса: параметрические и катастрофические, поэтому экспериментальное исследование функциональной надежности нейронных сетей разбивается на два этапа: исследование надежности при наличии параметрических отказов (параметрическая надежность) и исследование надежности при наличии катастрофических отказов (катастрофическая надежность).

Методика экспериментального исследования была разработана для класса нейронных сетей с последовательными связями и позволяет исследовать сети с произвольным числом входов, числом нейронов в слоях и числом слоев.

Под параметрическими отказами нейронов [15.15] понимаются ошибки на выходах нейронов, появляющиеся в результате постепенного изменения их параметров (весовых коэффициентов и порога) под действием внешних физических факторов: изменения температуры, напряжения питания и т.д.

При исследовании параметрической надежности нейронных сетей с помощью метода Монте-Карло моделируются случайные нормальные распределения, элементами которых в процессе исследования являются весовые коэффициенты и пороги. Выясняется зависимость вероятности правильной реализации заданной логической функции на полном множестве значений ее аргумента от параметров случайных распределений при условии, что появления различных значений равновероятны.

Под катастрофическим отказом нейрона понимается отказ типа обрыва или короткого замыкания на входах или выходах нейрона. Отказы такого типа можно свести к отказам типа логических констант ( $\text{const}=0$  и  $\text{const}=1$ ) на входах и выходах нейрона [15.37]. Предполагается, что отказы нейронов случайны, независимы и равновероятны. При исследовании катастрофической надежности проводился детерминированный выбор типа отказа и номера отказавшего нейрона. Ранее предполагалось, что в нейронной сети могут появляться лишь однократные отказы нейронов. Такое исследование позволяет выявить все «потенциально опасные» отказы, т.е. отказы, которые ведут к сильному (по отношению к некоторому априорно заданному значению) уменьшению вероятности правильного распознавания, а также выявить логическую избыточность исследуемой сети на заданном классе отказов.

Полученные таким образом конкретные значения вероятности правильного распознавания для различных отказов позволяют на этапе проектирования предусмотреть меры устраняющие возможность появления «потенциально опасных» отказов и учитывающие логическую избыточность сети. Положительным моментом данной методики исследования надежности является тот факт, что она позволяет не только исследовать широкий класс нейронных сетей и делать обобщающие выводы, но и дает возможность оценить надежность конкретных реализаций.

#### 15.4. Исследование параметрической надежности нейронных сетей

При исследовании параметрической надежности нейронных сетей рассмотрено несколько реализаций логической функции на одном нейроне, а также группы двухслойных и трехслойных сетей с различным числом нейронов в первом слое. В процессе экспериментального исследования ставились следующие цели:

1. Исследовать зависимость вероятности правильного распознавания от дисперсии  $D[a]$  изменения весовых коэффициентов и порога при различных, но фиксированных сдвигах математического ожидания (МО)  $-\Delta a$  (при  $\Delta a = 0$  МО равняется истинному значению весового коэффициента или порога) для различных реализаций некоторой логической функции на одном нейроне; на основе данных исследований найти оптимальную реализацию.

2. Выяснить, как изменяется зависимость вероятности правильного распознавания от дисперсии изменения весовых коэффициентов и порога при:

- а) увеличении числа нейронов в первом слое в двухслойных сетях;
- б) увеличении нейронов в первом слое в трехслойных сетях;
- в) переходе от двухслойной к трехслойной сети, реализующей ту же логическую функцию при фиксированном числе нейронов в первом слое;
- г) переходе от двухслойной к трехслойной сети с одинаковым суммарным (по всем слоям) числом нейронов.

Зависимость вероятности правильного распознавания от дисперсии весовых коэффициентов и порога назовем параметрической надежностью. Ниже представлены этапы данного исследования.

**Этап 1.** На данном этапе на примере трех различных реализаций мажоритарного голосования на одном нейроне по критерию максимальной параметрической надежности показан выбор оптимальной реализации. Каждый рассматриваемый нейрон реализует некоторую гиперплоскость, пересекающую единичный гиперкуб размерности  $N$  ( $N$  – число входов нейрона) и разделяющую два класса вершин: 1) – вершины, у которых число единичных компонент меньше  $\frac{N}{2}$  и 2) – вер-

шины, у которых число единичных компонент больше  $\frac{N}{2}$  (число нулевых компонент меньше  $\frac{N}{2}$ ). С целью упрощения из всего множества нейронов, реализующих мажоритарное решающее правило, выберем нейрон с единичными весовыми коэффициентами. Соответствующие им гиперплоскости будут проходить параллельно друг другу, пересекая оси координат под углом в  $45^\circ$ . Обычно в качестве элемента, реализующего мажоритарное решающее правило, используется мажоритарный элемент, т.е. элемент, определяемый следующим выражением:

$$y = \text{sign} \left( \sum_{i=1}^N x_i - a_0 \right), \quad (15.1)$$

где  $x_i \in \{0,1\}$  – входные значения,  $a_0 = \frac{N-1}{2}$  – порог мажоритарного элемента

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (15.2)$$

Эта реализация является крайним случаем в сторону уменьшения порога, так как при  $a'_0 = \frac{N-1}{2} - \epsilon$ , где  $\epsilon$  – сколь угодно малая величина, нарушается выполнение условия (15.2). Гиперплоскость, соответствующая мажоритарному элементу для случая  $n=3$ , показана на рис.15.2. Крестиками здесь и далее обозначены входные и промежуточные значения, для которых на выходе должна быть единица, кружочками – нуль. Реализацией, ограничивающей рассматриваемое семейство нейронов в сторону увеличения порога, является нейрон с порогом  $\frac{N+1}{2}$ , описываемый выражением (15.1) и (15.2).

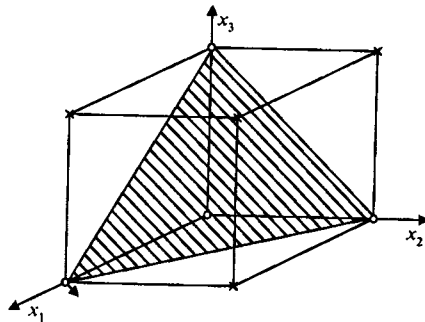


Рис. 15.2 Гиперплоскость, реализуемая мажоритарным элементом в пространстве входов ( $a'_0 = \frac{N-1}{2}$ )

Гиперплоскость, соответствующая такой реализации для  $N=3$ , показана на рис.15.3.

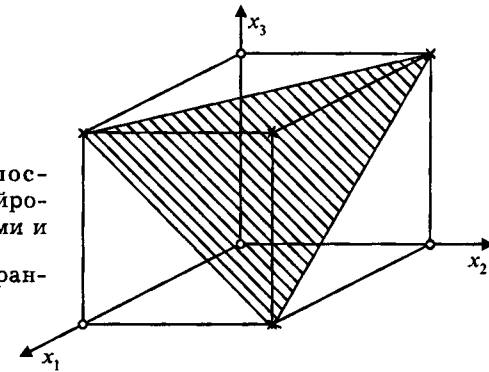


Рис. 15.3. Гиперплоскость, реализуемая нейроном с единичными весами и порогом  $\frac{N+1}{2}$  в пространстве входов

Таким образом, будем исследовать нейроны с единичными весами, у которых пороги лежат на отрезке  $[\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}]$ . Для экспериментального исследования были взяты три нейрона с порогами:  $\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}, \frac{N}{2}$ .

Поскольку изменение сдвига математического ожидания весовых коэффициентов  $-\Delta a$  означает некоторый сдвиг и поворот гиперплоскости, то, исследовав три вышеприведенные реализации для различных  $\Delta a$ , найдем оптимальную реализацию для произвольного  $\Delta a$ . Эксперимент проводился для каждой из реализаций для трех значений сдвигов математического ожидания:  $\Delta a = 0,15; 0; -0,15$ . На рис. 15.4, а, б, в приведены усредненные экспериментальные кривые. Дисперсия  $D[a]$  измеряется в тех же единицах, что и весовые коэффициенты. Экспериментальные точки вычислялись с шагом 0,05 по дисперсии, а затем для каждых трех соседних точек находилось среднее значение. Из приведенных кривых видно, что вероятность правильного распознавания с ростом дисперсии уменьшается. Некоторое увеличение вероятности правильного распознавания на отрезке  $[0; 0,6]$  для нейрона с  $a_0 = \frac{n-1}{2}$  (рис.15.4, в) объясняется тем, что для данной реализации сдвиг математического ожидания, равный  $-0,15$ , вносит большую, чем для других реализаций детерминированную ошибку, которая частично компенсируется с ростом дисперсии на отрезке  $[0; 0,6]$ . Из рис.15.4, а видно, что при  $\Delta a=0$  оптимальной является реализация нейрона с порогом  $a_0=1,5$ ; при  $\Delta a=0,15$  (рис. 15.4, б) нейрона с порогом



Рис. 15.4. Усредненные кривые зависимости вероятности правильного распознавания от дисперсии весовых коэффициентов для трех реализаций одного нейрона: а - при  $\Delta a = 0$ ; б - при  $\Delta a = 0,15$ ; в - при  $\Delta a = -0,15$

$a_0 = 2,0$ ; при  $\Delta a = -0,15$  (рис. 15.4,в) нейрона с порогом  $a_0 = 1,0$ . Усредняя все соответствующие значения вероятности правильного распознавания по реализациям для трех значений  $\Delta a$ , делаем вывод, что для произвольных  $\Delta a$ , оптимальной реализацией является нейрон с порогом 1,5. Отсюда можно сделать обобщающий вывод на случай  $a_0 = \frac{N}{2}$ . Как следствие этого, можно сделать выводы об оптимальности нейрона с порогом  $\frac{N+1}{2}$  при  $\Delta a > 0$ , и об оптимальности нейрона с порогом  $\frac{N-1}{2}$  при  $\Delta a < 0$ .

Для реальных нейронов  $\Delta a$  может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Полученная в этом случае оптимальная реализация нейрона соответствует положению гиперплоскости, равноудаленной от симметричных точек обоих классов, т.е. проведенной через середины соответствующих ребер гиперкуба. Положение этой гиперплоскости для  $N=3$  показано на рис. 15.5.

Из полученных результатов можно сделать следующий вывод. При синтезе многослойной нейронной сети на множестве двоичных входных сигналов каждую гиперплоскость следует проводить через середины соответствующих ребер гиперкуба, при этом нейроны будут обладать максимальной параметрической надежностью по отношению ко всем возможным реализациям. Нейронная сеть, синтезированная таким образом, будет обладать максимальной параметрической надежностью по отношению ко всем возможным реализациям при том же числе нейронов в слоях и тех же связях. Увеличить параметрическую надежность можно лишь путем изменения структуры нейронной сети. На всех последующих этапах исследования рассматриваются нейронные сети с оптимальными (в смысле максимума параметрической надежности) нейронами, поэтому не име-

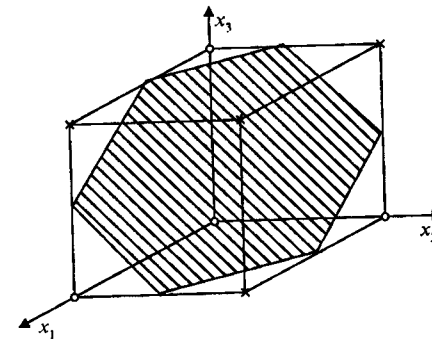


Рис. 15.5. Гиперплоскость, реализуемая оптимальным нейроном



ет смысла проводить дальнейшие эксперименты при ненулевых  $\Delta a$ , так как это будет соответствовать априорному смещению гиперплоскостей из оптимальных положений.

**Этап 2.** Рассмотрим шесть различных двухслойных нейронных сетей с 2,3,...,7 нейронами в первом слое: причем все нейроны, согласно результатам исследования этапа 1, реализуют оптимальные гиперплоскости. Одна из реализаций (сеть с двумя нейронами в первом слое  $H_1=2$ ) показана на рис. 15.6, где  $x_i^j$  — значение выхода  $i$ -го нейрона  $j$ -го слоя. Экспериментальные кривые зависимости вероятности правильного распознавания от дисперсии для  $\Delta a = 0$  представлены на рис. 15.7,а,б (кривые для  $H_1=2,4,6$  и  $H_1=3,5,7$  расположены на разных рисунках для большей наглядности). Полученные результаты позволяют сделать вывод, что с ростом  $H_1$  при малых дисперсиях:  $0 \leq D[a] \leq D^*[a]$  ( $D^*[a] \approx 0,6$ ) параметрическая надежность рассматриваемых сетей в пределах точности эксперимента остается неизменной, а при  $D^*[a] \leq D[a] \leq 2$  наблюдается увеличение надежности с ростом  $H_1$ , особенно это заметно для  $H_1=6,7$ . Таким образом, можно сделать вывод, что у двухслойных сетей с ростом  $H_1$  наблюдается улучшение положения кривых зависимости вероятности правильного распознавания от дисперсии, т.е. повышение параметрической надежности.

**Этап 3.** Рассмотрим пять различных трехслойных сетей с 3,4,...,7 нейронами в первом слое, двумя нейронами — во втором и одним нейроном в третьем слое. Положения, занимаемые гиперплоскостями, реализуемыми всеми нейронами, оптимальные. Кривые параметрической надежности для  $H_1=3,5,7$

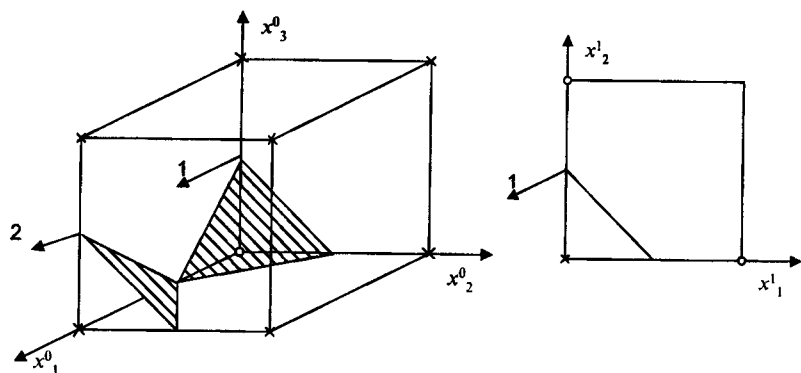


Рис. 15.6. Гиперплоскости, реализуемые нейронами двухслойной сети



Рис. 15.7. Усредненные кривые зависимости вероятности правильного распознавания от дисперсии весовых коэффициентов для двухслойных сетей с различным числом нейронов в первом слое

представлены на рис. 15.8. Вывод, который можно сделать из исследования полученных кривых, полностью аналогичен выводам этапа 2: с ростом  $H_1$  параметрическая надежность трехслойных сетей возрастает.

**Этап 4.** На данном этапе исследования выясняется вопрос, как изменится параметрическая надежность при переходе от двухслойной к трехслойной сети, реализующей ту же логическую функцию при фиксированной величине  $H_1$ . Для этого можно воспользоваться экспериментальными результатами, полученными на этапах 2, 3. Соответствующие сравнительные ха-



Рис. 15.8. Усредненные кривые зависимости вероятности правильного распознавания от дисперсии весовых коэффициентов для трехслойных сетей с различным числом нейронов в первом слое

характеристики для двухслойных и трехслойных сетей с  $H_1=3,5,7$  приведены на рис. 15.9–15.11. Видно, что при переходе от двухслойной к трехслойной сети параметрическая надежность уменьшается. На рис. 15.9 для наглядности, кроме вышеназванных кривых, приведена кривая для нейрона, реализующего ту же логическую функцию. Отсюда можно сделать качественный вывод об уменьшении параметрической надежности с ростом числа слоев.



Рис. 15.9. Усредненные кривые зависимости вероятности правильного распознавания от дисперсии весовых коэффициентов для нейронов двухслойной и трехслойной сети, реализующих одинаковую логическую функцию



Рис. 15.10. Усредненные кривые зависимости вероятности правильного распознавания от дисперсии весовых коэффициентов для двухслойной и трехслойной сети с одинаковым числом нейронов в первом слое ( $H_1=5$ )



Рис. 15.11. Усредненные кривые зависимости вероятности правильного распознавания от дисперсии весовых коэффициентов для двухслойной и трехслойной сети с одинаковым числом нейронов в первом слое ( $H_1=7$ )

**Этап 5.** Рассмотрим все возможные двух- и трехслойные сети из имеющейся совокупности, у которых суммарное число нейронов одинаково. Таких пар всего три: с шестью нейронами (3+2+1 и 5+1), семью нейронами (4+2+1 и 6+1) и восемью нейронами (5+2+1 и 7+1). Соответствующие кривые приведены на рис.15.12, а,б,в. Отсюда можно сделать вывод, что двухслойная сеть обладает большей параметрической надежностью.

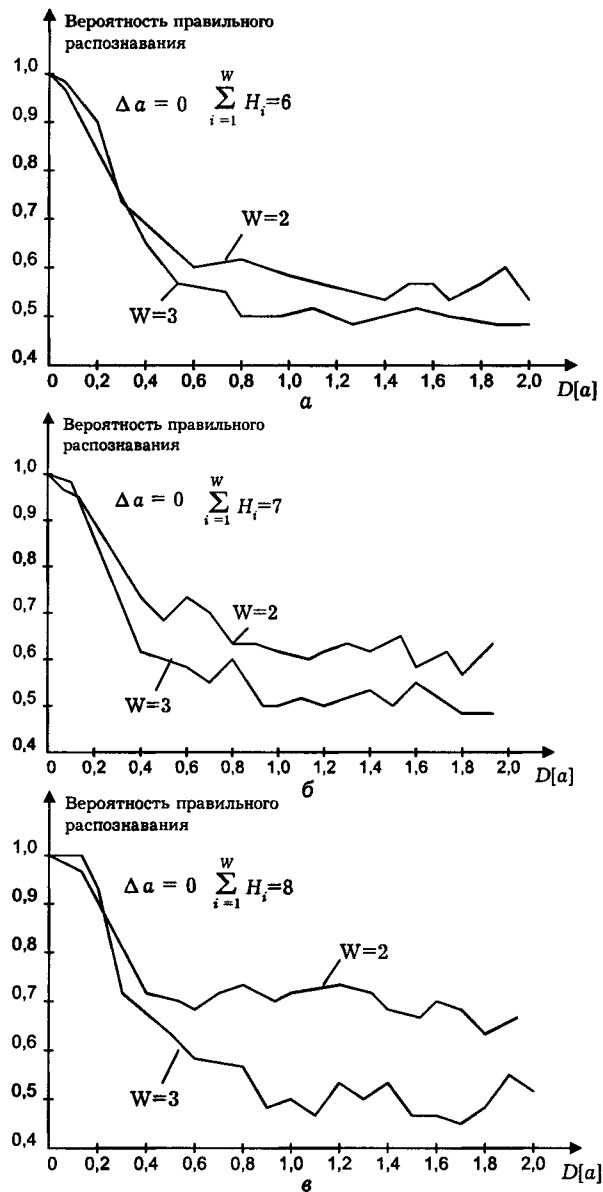


Рис. 15.12. Усредненные кривые зависимости вероятности правильного распознавания от дисперсии весовых коэффициентов для двухслойной и трехслойной сети с одинаковым суммарным числом нейронов: а -  $H_i = 6$ ; б -  $H_i = 7$ ; в -  $H_i = 8$

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. Вероятность правильного распознавания уменьшается с ростом дисперсии весовых коэффициентов и порога при фиксированном сдвиге математического ожидания.
2. Нейрон обладает максимальной параметрической надежностью, когда гиперплоскость, им реализуемая, проходит через середины соответствующих ребер гиперкуба.
3. Параметрическая надежность нейронной сети повышается с ростом числа нейронов в первом слое как у двухслойных, так и у трехслойных сетей.
4. При переходе от двухслойной к трехслойной сети, реализующей ту же логическую функцию с одинаковым числом нейронов в первом слое, параметрическая надежность уменьшается.
5. Сравнение двухслойных и трехслойных сетей с одинаковым суммарным (по всем слоям) числом нейронов показывает, что двухслойная сеть обладает большей параметрической надежностью.

Стоит отметить, что более детальное экспериментальное исследование параметрической надежности может быть проведено лишь при наличии множества требуемых реализаций нейронных сетей: с большим числом нейронов в слоях, большим числом слоев и т.д.

Ниже представлен проект плана эксперимента, который можно было бы провести в дополнение к описанному выше при наличии достаточного числа требуемых реализаций многослойных нейронных сетей.

Исследовать зависимость параметрической надежности нейронной сети от :

- 1) числа слоев при фиксированных величинах  $H_1, H_2, \dots$ ;
- 2) размерности входного сигнала нейронной сети  $H_1, W$ ;
- 3) числа нейронов в слоях при фиксированном числе входов нейронной сети.

### 15.5. Исследование функциональной надежности многослойных нейронных сетей при наличии катастрофических отказов

Методика экспериментального исследования функциональной надежности многослойных нейронных сетей при наличии катастрофических отказов, как это отмечалось выше, заключается в последовательном моделировании однократных отка-

Результаты исследования надежности сети

Номер слоя		Тип отказа	ВРП	Номер слоя		Тип отказа	ВРП	
слоя	нейрона			слоя	нейрона			
1	1	входы	1	0	1	0	0,875	
			1	1		0,875		
			2	0		0,875		
		1	1	0,875				
		3	0	0,875				
		1	1	0,875				
	выход		0	0,875	0	0,375	1	0,375
	2	входы	1	0	2	0	0,875	
			1	1		0,875		
			2	0		0,875		
		1	1	0,875				
		3	0	0,875				
		1	1	0,875				
	выход		0	0,875	0	0,375	1	0,375
	3	входы	1	1	3	0	0,875	
2			0	0,875				
1			1	0,875				
3		0	0,875					
1		1	0,875					
0		0,875	0	0,875				
выход		1	0,375	1	0,375	1	0,375	

зов типа логических констант на входах и выходах нейронов и вычислении значения вероятности правильного распознавания для каждого отказа.

На основе исследования катастрофической надежности сети, покажем, как находятся «потенциально опасные» отказы и определяется ее логическая избыточность.

Результаты исследования сведены в таблицу, из которой видно, что исследуемая сеть на классе отказов типа логических констант на входах-выходе нейронов при условии равновероятности отказов обладает коэффициентом логической избыточности, равным  $\frac{6}{46}$ , т.е. при 6 отказах из 46 возможных вероятность правильного распознавания равна единице. Можно также выделить «потенциально опасные» отказы, задавшись минимально допустимым значением вероятности правильного распознавания. Пусть оно равно 0,750, тогда всего имеется 11 «потенциально опасных» отказов с вероятностью правильного распознавания, равной 0,375, например: const=1 на выходе 1 нейронов 1 слоя, const=1 на входе 1 нейронов 2 слоя и т.д.

Таким образом, экспериментальное исследование катастрофической надежности нейронной сети позволяет на этапе проектирования учесть и использовать логическую избыточность сети и принять меры по предотвращению «потенциально опасных» отказов. Такие меры могут существенно повысить надежность проектируемых логических устройств.

### Литература

- Coates C.L., Lewis P.M. DONUT-a threshold gate computer. IEEE Trans. EL. Comp., №3, vol. EC-13,1964.
- Аббакумов И.С., Чернышев И.А. Мажоритарные избыточные системы с перестраиваемой структурой. – Автоматика и вычислительная техника, №3, 1979, с.31–36.
- Блюм М., Онесто М., Вербик Л. Допустимые ошибки нейронов для безотказной работы сетей. – В кн.: Методы введения избыточности для вычислительных систем. /Под ред. Пугачева В.С. –М.: Сов. радио, 1966, с.84-87.
- Потапов В.И., Пальянов И.А. К оценке функциональной надежности избыточной перестраиваемой однородной вычислительной структуры. – В сб.: Вычислительная техника в системах управления летательными аппаратами, ч.II, вып. 23. М., 1972.
- Потапов В.И. Анализ и синтез высоконадежных цифровых вычислительных и логических структур из пороговых модулей. – Новосибирск, 1977, с.80.
- Потапов В.И. Функциональная надежность сетей из формальных нейронов. – Автоматика и вычислительная техника, №1, 1968, с.37–43.
- Майтра К.К. Синтез надежных автоматов и устойчивость нейронных цепей. – Бионика, ч.II и III. Киев: КВИИТРУ, 1966, с.98–147.
- Лопин В.Н. О надежности управляемой сети на пороговых элементах при ограничении на ее сложность. – В кн.: Адаптивные системы управления. Киев, 1975, с.91–97.
- Серапинас К.Л., Жукаускас К.П. Надежность пороговых элементов (1. Вероятностная оценка релейной части порогового элемента). – Труды АН ЛитССР, сер. Б, т.2(57), 1969, с.159–162.
- Жукаускас К.П., Серапинас К.Л. Надежность пороговых элементов (2. Влияние внешних помех). – Труды АН ЛитССР, сер. Б, т.4(59), 1969, с.213-216.
- Жукаускас К.П., Серапинас К.Л. Надежность пороговых элементов (3. Обобщенная ВРФ для группы пороговых элементов). Труды АН ЛитССР, сер. Б, т.3(62), 1970, с.153–157.
- Жукаускас К.П., Серапинас К.Л. Надежность пороговых элементов (5. Определение среднего значения ошибки пороговых

- элементов с учетом разброса параметров входных сигналов и весовых входов). – Труды АН ЛитССР, сер. Б, т.1(64), 1971, с.231–236.
- 15.13. Гилл А. Линейные последовательностные машины. – М.: Мир, 1974, с.287.
  - 15.14. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. – М.: Энергия, 1974, с.367.
  - 15.15. Пальянов И.А., Потапов В.И. Диагностика неисправностей и синтез цифровых структур из пороговых логических модулей. – Новосибирск, 1977, с.78.
  - 15.16. Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент. – В кн.: Автоматы, М.: Иностранная литература, 1955, с.68–138.
  - 15.17. Пирс У. Построение надежных вычислительных машин. – М.: Мир, 1968, с.270.
  - 15.18. Мур Э., Шеннон К. Надежные схемы ненадежных реле. – В кн.: Кибернетический сборник. – М.: Иностранная литература, 1960, вып.1, с.109–149.
  - 15.19. Трайон Дж. Учетверенная логика. – В кн.: Методы введения избыточности для вычислительных систем. – М.: Сов. радио, 1966.
  - 15.20. Elais P. IBM Journal of Research and Development, №3, 1958, pp.346–353.
  - 15.21. Winograd S., Cowan J.D. Reliable Computation in the Presence of Noise, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1963.
  - 15.22. Зрелова Т.И. Обзор методов повышения надежности вычислительных систем. – Сб. Вычислительные машины и системы с перестраиваемой структурой. Сер. Вопросы кибернетики, 1978, с.152–163.
  - 15.23. Малев В.А. Структурная избыточность в логических устройствах. – М.: Связь, 1978, с. 192.
  - 15.24. Bennetts R.G. Designing rekeiable computer systems. The Fault-tolerant approach-I. Electron and Power, 1978, pp.846–851.
  - 15.25. Чернышев Ю.А., Аббакумов И.С. Расчет и проектирование устройств ЭВМ с пассивным резервированием. – М.: Энергия, 1979, с.119.
  - 15.26. Mathur F.P. and de Sousa P.T. Reliability modeling and analysis of general modular redundant systems. IEEE Trans. Reliability, vol. R-24, Dec. 1975, pp.296–299.
  - 15.27. Mathur F.P. and Avizienis A. Reliability analysis and architecture of a highly redundant digital system. Generalized triple modular redundancy with self repair, Proc. SJCC, vol.26, 1970, pp.375–383.
  - 15.28. Пакулев Н.И., Уханов В.М., Чернышев П.Н. Мажоритарный принцип построения узлов и устройств ЦВМ. – М.: Сов. радио, 1974, с.183.
  - 15.29. Лосев В.В. Восстанавливающие органы на основе мажоритарных элементов. – Изв. АН СССР, Техн. киберн., №2, 1971, с.116–122.
  - 15.30. Фомин Ю.И. О восстанавливающих органах, реализующих мажоритарное голосование. – Электронное моделирование, №2, 1980, с.53–60.
  - 15.31. Фомин Ю.И. Программа локализации параметрических отказов. – Аннотированный перечень новых поступлений. МосФАИ АСУ, №2, 1980, с.10.
  - 15.32. Фомин Ю.И. Программа генерации минимального проверяющего теста. – Там же, с.11.
  - 15.33. Фомин Ю.И. Программа исследования катастрофической надежности. – Там же, с.11–12.
  - 15.34. Фомин Ю.И. Программа исследования параметрической надежности. – Там же, с.12.
  - 15.35. Фомин Ю.И. Программа расчета таблицы вероятностей отказа логического устройства, состоящего из дублированных идентичных блоков, когда на их выходе стоит сеть мажоритарных элементов. – Там же, с.13–14.
  - 15.36. Фомин Ю.И. Программа расчета таблицы вероятностей отказа логического устройства, состоящего из дублированных идентичных блоков, когда на их выходе стоит мажоритарный элемент. Там же, с.13.
  - 15.37. Потапов В.И., Пальянов И.А. Построение проверяющих тестов для пороговых элементов. – Изв. АН СССР, Техн. киберн., №4, 1973, с.140–146.
  - 15.38. Фомин Ю.И., Галушкин А.И. Мажоритарное голосование и восстанавливающие органы, его реализующие. Кибернетика и вычислительная техника. Вып.55, Киев, Наукова Думка, 1982, с. 91–97.
  - 15.39. Мкртчян С.О. Проектирование логических устройств ЭВМ на нейронных элементах. – М.: Энергия, 1977, с.199.
  - 15.40. Галушкин А.И., Фомин Ю.И. Об оптимальности восстанавливающих органов, реализующих мажоритарное голосование. Техника средств связи, сер. АСУ, №3, 1979, с.56–61.

## Глава 16. Диагностика нейронных сетей

Введение динамической избыточности с целью повышения надежности в структуру цифровых устройств требует разработки методов технической диагностики отказов в структурах, на которых реализовано данное устройство. Одной из важнейших проблем технической диагностики является разработка методов и алгоритмов построения проверяющих и диагностирующих тестов для цифровых устройств, которые позволили бы в короткий срок обнаружить и локализовать неисправность с точностью до определенного функционального элемента, задаваемого глубиной тестирования.

Методы, предлагаемые в ряде работ, посвященных диагностике нейронных сетей, можно разделить на две группы: методы контроля и диагностики отдельных нейронов на уровне отдельных составляющих функциональных узлов (умножитель, сумматор) и методы диагностики нейронных сетей на уровне отдельных нейронов. Алгоритмы первой группы детально разработаны в работах [15.15], [15.37], [16.1 – 16.4]. Авторами проведена полная классификация видов неисправностей, появляющихся в нейронах, и на основе ее разработаны алгоритмы синтеза тестов, проверяющих и локализирующих неисправности в нейронах с точностью до входа-выхода. В [15.15] разработаны алгоритмы синтеза нейрона, не имеющего логически неразличимых неисправностей с точностью до входа-выхода. Предложенные алгоритмы являются достаточно эффективными для диагностики отдельных нейронов, но для нейронных сетей с большим числом нейронов тестирование методом перебора является практически непригодным.

Алгоритмы второй группы представлены в работах [16.5], [16.6]. В этих работах разработаны методы тестирования схем нейронов специального вида (связка из двух нейронов, каскадная схема, схема с ветвлением, пирамидальная схема и т.п.). Основным недостатком предложенных в данных работах диагностических процедур является их практическая малоприспособность, так как для тестирования схемы произвольного вида ее необходимо разбивать на «стандартные» подсети и тестировать каждую из них. Причем при тестировании такой подсети не исключается возможность появления некоторого подмножества логически неотличимых неисправностей нейронов. Это подмножество в зависимости от структуры схемы

может включать в себя как всю последовательность подозреваемых в отказе нейронов, выделенную проверяющим тестом, так и один нейрон.

Ниже представлены алгоритмы технической диагностики отказов в нейронных сетях, которые проверяют их функционирование и локализуют возникающие в них отказы с точностью до нейрона. Алгоритм локализации отказов нейронов в нейронных сетях основывается на исследовании графа состояний сети, понятие которого вводится ниже в п.16.1. Данный алгоритм можно отнести к программным методам технической диагностики, так как он требует запоминания графа состояний исправной нейронной сети, а также хранения текущей информации о графе состояния сети с отказом. На основе анализа графа состояния для класса отказов типа логических констант на выходах нейронов разработан алгоритм построения минимального проверяющего теста для этого класса. Метод адаптивной диагностики, рассматриваемый в п.16.4, основан на синтезе адаптивной диагностической сети в виде нейронной сети, которая локализует любой отказ в нейронной сети типа логических констант на входах-выходах нейронов за время, равное одному такту работы нейронной сети. Адаптивная диагностическая сеть синтезируется с помощью адаптивного алгоритма на основе моделирования всех отказов заданного класса конкретной нейронной сети и построения обучающей выборки.

Диагностические алгоритмы, рассматриваемые в данной главе, можно разделить по способу их реализации на две группы: программные и аппаратные.

К первой группе алгоритмов относятся: алгоритм локализации отказов в нейронных сетях (п.16.2) и алгоритм построения минимального проверяющего теста для класса отказов типа логических констант на выходах нейронов. Алгоритм локализации отказов в нейронной сети основан на построении и исследовании графа состояний сети с отказами и позволяет локализовывать с точностью до нейрона отказы любой кратности. Алгоритм построения минимального проверяющего теста основан на построении минимального графа состояния сети, соответствующего минимальному проверяющему тесту для класса отказов типа логических констант на выходах нейронов.

Во вторую группу входит метод адаптивной диагностики отказов типа логических констант на входах-выходах нейронов, основанный на моделировании всех возможных отказов заданного типа, построении обучающей выборки и синтезе адаптивной диагностической сети.

### 16.1. Граф состояний нейронной сети.

#### Основные понятия и определения

Существует несколько различных способов описания функционирования нейронной сети: аналитический, структурный, геометрический и т.д. Каждый из этих способов хотя и полностью описывает конкретную сеть, но отражает какую-то одну сторону функционирования сети. Например, структурный метод дает описание структуры нейронной сети, расположение нейронов по слоям, связи и их веса, а геометрический показывает расположение гиперплоскостей, реализуемых нейронами слоев в пространствах выходов нейронов предыдущего слоя. Ниже вводится понятие графа состояний нейронной сети, который описывает логику функционирования сети.

**Определение 1.** Величину  $a_{ij}$ , представляющую собой значение выходов всех нейронов  $i$ -го слоя и удовлетворяющую условию

$$a_{ij} = \{a_{ij}^1, a_{ij}^2, \dots, a_{ij}^{N_i}\}, a_{ij}^l = \{0, 1\},$$

где  $N_i$  – число нейронов в  $i$ -м слое;  $a_{ij}^l$  – значение выхода  $j$ -го нейрона  $i$ -го слоя, назовем  $j$ -м узлом  $i$ -го уровня графа состояний.

**Определение 2.** Ветвь графа состояний – это направленная прямая, соединяющая два узла графа состояний, обозначаемая

$$a_{ij} \rightarrow a_{lk}, l = i + 1.$$

**Определение 3.** Узлы графа состояний нулевого уровня, которые представляют собой значения входной переменной, называются вершинами графа состояний.

**Определение 4.** Узлы графа состояний  $W$ -го уровня ( $W$  – число слоев нейронной сети) называются корнями графа состояний.

**Определение 5.** Путь в графе состояний – это любая цепочка из узлов, связанных между собой ветвями согласно функционированию данной нейронной сети, в которой есть вершина и корень.

**Определение 6.** Граф состояний представляет собой древовидный направленный несвязный граф, составленный из путей, причем все их узлы расположены по соответствующим уровням.

**Утверждение 1.** Покажем, что граф состояний полностью описывает функционирование нейронной сети для всех значений входной переменной. Рассмотрим все узлы графа состояний, входящие в произвольный путь:

$$a_{0j_0} \rightarrow a_{1j_1} \rightarrow \dots \rightarrow a_{Wj_W}.$$

Поскольку узел  $a_{0j_0}$  представляет собой значение входной переменной, а узлы  $a_{ij_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, W$ ) – значения выходов всех нейронов всех слоев в порядке возрастания номера, включая последний, то функционирование сети, т.е. ее полная реакция на данное входное воздействие  $a_{0j_0}$  полностью определено. Поскольку граф состояний – это совокупность всех возможных путей, то он определяет реакцию нейронной сети на все входные воздействия.

**Определение 7.** Критичный отказ нейрона – это есть неисправность, влекущая за собой появление ошибки на его выходе на одном или нескольких входных значениях из заданного множества, причем эта ошибка вызывает ошибку на выходе всей нейронной сети. Если ошибка на выходе нейрона не вызывает ошибку на выходе всей нейронной сети на всех входных значениях из множества допустимых, то отказ нейрона не критичный.

**Определение 8.** Ошибочным путем в графе состояний называется путь, соответствующий нейронной сети с критичным отказом, проявляющимся на данном значении входа нейронной сети, т.е. путь, имеющий корень, соответствующий ошибочному значению логической функции, реализуемой нейронной сетью.

**Определение 9.** Путь, имеющий требуемый корень, т.е. путь соответствующий нейронной сети без отказов или при наличии некритичных отказов или при наличии критичных отказов, но не проявляющихся на данном значении входа нейронной сети, называется безошибочным.

**Определение 10.** Полный граф состояний – это граф, имеющий  $2^n$  вершин, где  $n$  – размерность входа нейронной сети.

**Определение 11.** Отсеком гиперкуба называется замкнутая область, образованная гиперплоскостями, реализуемыми нейронами в данном пространстве и гранями гиперкуба. Очевидно,

но, что каждый отсек имеет свой номер, определяемый упорядоченными по номерам выходами нейронов, т.е. номер отсека — это узел графа состояний.

### 16.2. Алгоритм локализации отказов в нейронных сетях

На основе нескольких конкретных примеров поясним сущность предлагаемого алгоритма. Сначала проведем все рассуждения для случая однократных отказов, а затем обобщим полученные результаты на случай отказов многократных.

Пусть задана трехслойная сеть с тремя нейронами в первом слое, двумя во втором и одним — в третьем. Расположение гиперплоскостей, реализуемых нейронами первого, второго и третьего слоев, показано на рис. 16.1, а, б, в соответственно, где  $x_i^j$  — значение выхода  $i$ -го нейрона  $j$ -го слоя (для  $j=0$  это значение входной переменной). Крестиками обозначены значения, которым на выходе нейронной сети соответствует единица, а кружочками — значения, которым на выходе нейронной сети соответствует нуль. Цифра, стоящая у каждой гиперплоскости, обозначает номер нейрона в слое. Соответствующий данной реализации нейронной сети полный граф состояний приведен на рис. 16.2.

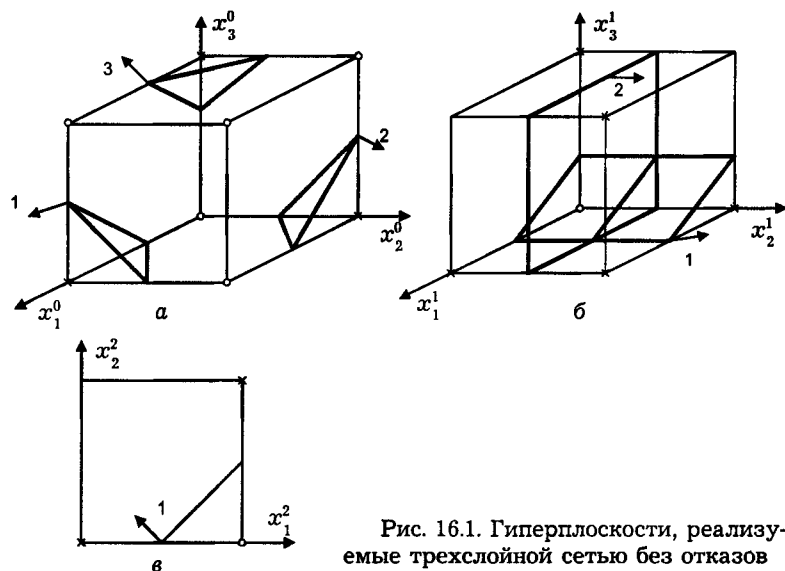


Рис. 16.1. Гиперплоскости, реализуемые трехслойной сетью без отказов

Пусть имеется, например, параметрический критичный отказ первого нейрона первого слоя. Положение гиперплоскостей, соответствующее этому случаю, показано на рис. 16.3, а, б, в.

В результате изменения весовых коэффициентов отказавшего нейрона вершина гиперкуба 110 оказалась в другом отсеке — с номером 100 (была в отсеке с номером 000), и это привело к ошибке на выходе нейронной сети: на рис. 16.3в не все крестики и кружочки лежат в разных отсеках. На рис. 16.4 показан полный граф состояний, соответствующий данному отказу. Штриховой линией выделены однозначные ветви ошибочного пути, т.е. ветви, не совпадающие с ветвями безошибочных путей.

Каждому значению на входе нейронной сети соответствует один путь в графе состояний, следовательно, «перемеще-

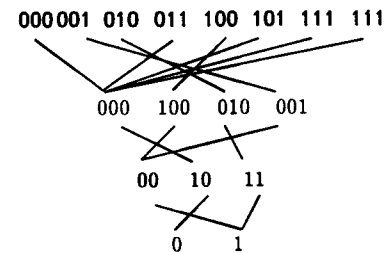


Рис. 16.2. Граф состояний трехслойной сети без отказа (рис. 16.1).

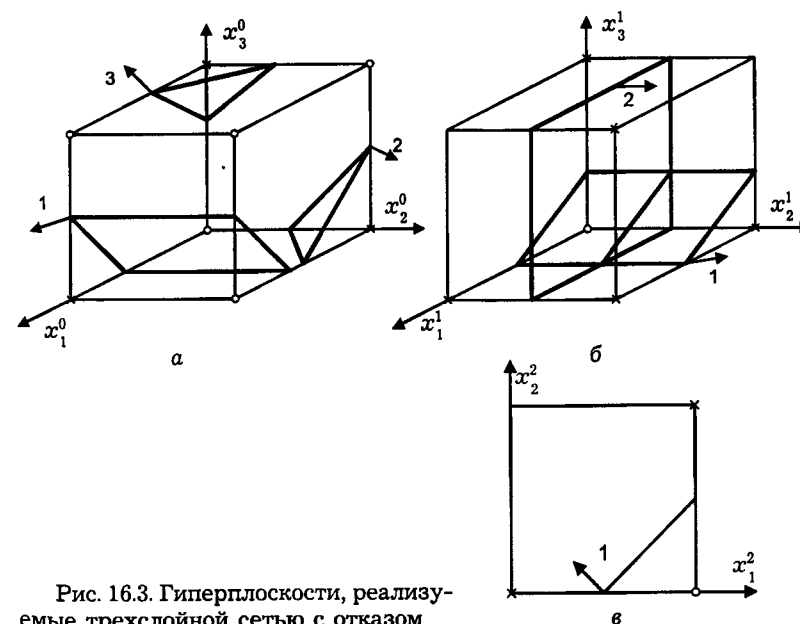


Рис. 16.3. Гиперплоскости, реализуемые трехслойной сетью с отказом



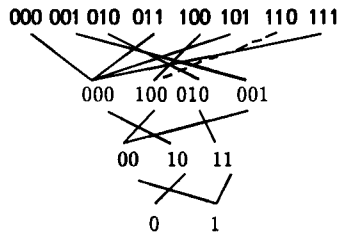


Рис. 16.4. Граф состояний трехслойной сети с отказом (рис. 16.3).

го отказа того же нейрона. В результате вершины единичного гиперкуба 100 и 110 оказались в других отсеках с номерами 000 и 100, соответственно. В графе состояний, показанном на рис. 16.6, это соответствует появлению двух ошибочных путей.

Задача поиска отказавшего нейрона по графу состояний заключается в поиске преобразования одного или нескольких ошибочных путей в безошибочные, при котором не до-

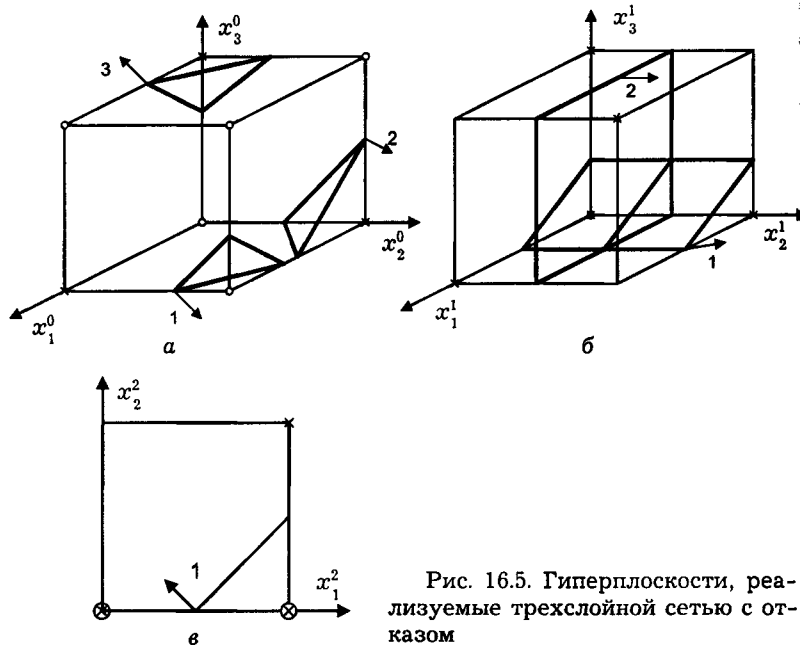


Рис. 16.5. Гиперплоскости, реализуемые трехслойной сетью с отказом

бавлялись бы новые ошибочные пути. Такое преобразование заключается в переходе какой-то ветви ошибочного пути в другую, которая ведет к требуемому корню. Вид этого преобразования (номера позиций в узлах графа состояний, сменивших свое значение) должен указать номер отказавшего нейрона. В примере, представленном графом состояний на рис.16.4, единственный ошибочный путь

$$110 \rightarrow 100 \rightarrow 00 \rightarrow 1 \quad (16.1)$$

должен быть преобразован в другой путь:

$$110 \rightarrow 000 \rightarrow 10 \rightarrow 0. \quad (16.2)$$

Сравнивая пути (16.1) и (16.2), видим, что некоторые позиции, начиная с первой, узла первого уровня поменяли свое значение. Если взять первую несовпавшую позицию, то можно сделать предположение об отказе первого нейрона первого слоя. В данном примере мы сделали предположение об отказе, так как при этом преобразовывалась однозначная ошибочная ветвь (110 → 100), которая в получившемся ошибочном пути единственная. Правомерность такого предположения можно показать, доказав справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 2.** При поиске отказа нейрона в нейронной сети с помощью графа состояний преобразовывать можно лишь однозначные ветви ошибочных путей. Попробуем доказать это. Всем вершинам графа состояний, соответствующего нейронной сети без отказа, безошибочно и однозначно поставлены в соответствие значения логической функции (корни графа состояний). При возникновении отказа в нейронной сети какая-то из ветвей изменяется — появляется ошибочный путь. Каждый ошибочный путь соответствует одной ошибке на выходе нейронной сети. Искомое преобразование пути есть преобразование, обратное отказу, т.е. такое преобразование, которое устраняет отказ, не добавляя новых. Допустим, что мы преобразуем неоднозначную ветвь ошибочного пути. Это означает, что у всех остальных путей, имеющих данный узел, появится дру-

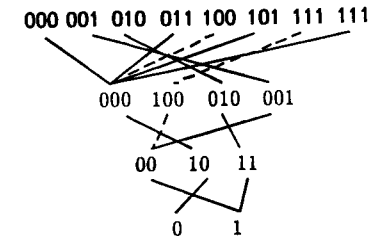


Рис. 16.6. Граф состояний трехслойной сети с отказом (рис. 16.5).

гой корень, а поскольку по предположению они были безошибочные, то все они преобразуются в ошибочные. Это противоречит допустимости преобразования. Утверждение доказано.

Для другого отказа в графе состояний на рис.16.6 уже два ошибочных пути с вершинами 100 и 110. Первый путь имеет единственную однозначную ветвь на нулевом уровне. Рассмотрим все возможные преобразования этой ветви в ветви соответствующих участков безошибочных путей:  $(\rightarrow 100 \rightarrow 00 \rightarrow 1)$  и  $(\rightarrow 010 \rightarrow 11 \rightarrow 1)$ . В результате преобразования имеют вид

$$100 \rightarrow (0 \rightarrow 1) 00 \rightarrow 00 \rightarrow 1, \quad (16.3)$$

$$100 \rightarrow 0(0 \rightarrow 1) 0 \rightarrow 11 \rightarrow 1, \quad (16.4)$$

где два значения в скобках означают смену значений в данной позиции при преобразовании. Из (16.3) делаем предположение, что отказал первый нейрон первого слоя, а из (16.4) — второй нейрон первого слоя. Для ветви нулевого уровня второго ошибочного пути аналогично запишем

$$110 \rightarrow (1 \rightarrow 0) 00 \rightarrow 10 \rightarrow 0, \quad (16.5)$$

т.е. подозревается первый нейрон первого слоя. Вторым путем однозначен также на первом уровне, следовательно, возможно такое преобразование:

$$110 \rightarrow 100 \rightarrow (0 \rightarrow 1) 0 \rightarrow 0. \quad (16.6)$$

Из этого следует предположение об отказе первого нейрона второго слоя. Чтобы выявить из всей совокупности подозреваемых нейронов требуемый, покажем справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 3.** Предположим, что в нейронной сети существует один критичный отказ нейрона, а в графе состояний более одного ошибочного пути. Если получена совокупность номеров нейронов, подозреваемых в отказе, тогда в этой совокупности имеется номер, встречающийся максимальное число раз, и он является номером отказавшего нейрона. Предположим, что в графе состояний имеем  $N$  ошибочных путей при одном критичном отказе нейрона. Из сущности любого отказа следует, что всегда существует преобразование, обратное отказу, т.е. преобразование, которое переводит  $N$  ошибочных путей в безошибочные. Допустим, что это преобразование соответ-

ствует не максимальному номеру нейрона из всех подозреваемых. Тогда это означает, что преобразуются не все ошибочные пути (что следует из процедуры поиска подозреваемого в отказе нейрона), а это противоречит вышеизложенному.

Выделим одно очевидное следствие, вытекающее из приведенного выше утверждения. Максимальное число повторяющихся номеров нейронов во множестве подозреваемых равно числу однозначных ветвей ошибочных путей в графе состояний. На основе приведенных утверждений в вышерассмотренном примере получаем, что отказал первый нейрон первого слоя, так как его номер встречается дважды среди номеров подозреваемых нейронов.

Нижеприведенное утверждение позволяет упростить процесс поиска номера отказавшего нейрона.

**Утверждение 4.** При последовательном сравнении от вершины к корню ошибочного пути в графе состояний и соответствующего ему безошибочного пути первая несовпадающая позиция укажет номер отказавшего нейрона. Покажем справедливость данного утверждения. Согласно приведенному выше утверждению 2 при наличии нескольких однозначных ветвей в рассматриваемом ошибочном пути необходимо для каждой из них искать свое преобразование. Мы же хотим доказать, что достаточно найти преобразование одной безошибочной ветви, лежащей на самом высоком уровне.

Допустим в нейронной сети имеется один отказ. Последовательно сравниваем узлы ошибочного пути в графе состояний. Пусть не совпадает узел  $a_{ij}$  и ветви  $j$ -го и  $(j+1)$ -го уровней ошибочного пути однозначны. Несовпадение узла  $a_{ij}$  говорит о том, что на выходе  $i$ -го нейрона  $j$ -го слоя появилась ошибка. Поскольку узлы предыдущих уровней совпадали, то отказал именно  $i$ -й нейрон  $j$ -го слоя.

По предположению не совпал также и узел  $a_{kj+1}$ , но по условию в нейронной сети имеется лишь один отказ, следовательно  $k$ -й нейрон  $(j+1)$ -го слоя отказать не мог, а несовпадение узлов вызвано влиянием ошибки предыдущего слоя.

Учитывая результаты, полученные выше, перечислим последовательность основных действий, составляющих алгоритм локализации отказов нейронов в нейронных сетях в случае однократных отказов. Граф состояний правильно функционирующей нейронной сети будем считать заданным.

1. На вход нейронной сети последовательно подаются значения входной переменной.

2. Для каждого входного значения запоминаются выходы всех нейронов (строим путь в графе состояний).

3. Сравниваем полученное выходное значение с корнем заданного графа состояний соответствующего пути (пути с той же вершиной), если корни совпали, переходим к п.1, иначе к п.4.

4. Сравниваем (от вершины к корню) позиции обоих путей графа состояний.

5. Первая несовпавшая позиция укажет номер отказавшего нейрона. Поскольку отказы однократные, то процесс заканчивается.

Обобщим предложенный алгоритм на случай отказов произвольной кратности. В случае отказов нейронов одного слоя происходит изменение различных позиций в узлах графа состояний одного уровня, т.е. нет влияния одного отказа на другой. В этом случае алгоритм, описанный выше, справедлив, если при нахождении одного отказа не заканчивать его работу, а переходить к п.1 до тех пор, пока на вход не будут поданы все входные значения. Рассмотрим теперь случай отказов нейронов различных слоев. В этом случае, применяя вышеизложенный алгоритм, мы не выявим отказы нейронов, проявляющиеся на том же пути, что и первый, но лежащие на последующих слоях. Рассмотрим возможность модификации алгоритма, т.е. сравнения позиций не до первого несовпадения, а всех, от вершины до корня.

Из примера, приведенного на рис.16.5 и 16.6, становится ясно, что отказ нейронов может проявляться в последующих слоях (это вызывает несовпадение узлов последующих уровней), поэтому одновременное сравнение и выявление всех несовпавших узлов одного пути может привести к тому, что мы примем за отказ его последствия. В утверждении 3 при допущении существования одного отказа от такой ситуации мы избавлялись нахождением номера нейрона, встречающегося максимальное число раз. В случае же нескольких отказов это теряет смысл, поэтому приходим к следующему алгоритму:

1) на вход нейронной сети последовательно подаются значения входной переменной;

2) для каждого входного значения запоминаются выходы всех нейронов (строится путь на графе состояний);

3) сравнивается полученное выходное значение с корнем соответствующего пути (пути с той же вершиной) заданного графа состояний, если корни совпали и подано не последнее выходное значение, переходим к п.1, иначе к п.4;

4) сравниваем от вершины к корню узлы обоих путей графа состояний;

5) первая несовпавшая позиция укажет номер отказавшего нейрона. Если подавалось не последнее входное значение, переходим к п.1, иначе к п.6;

6) производим коррекцию отказов и переходим к п.1.

Процесс происходит до тех пор, пока не избавимся от всех ошибочных путей. Если имеем наилучший вариант, т.е. отказавшие нейроны расположены в  $W$  слоях, то процесс повторится  $W$  раз.

Для оценки быстродействия разработанного алгоритма сравним его с методом перебора, при котором тестируется каждый нейрон сети для случая однократных отказов. Для этого представим последовательность действий при работе алгоритма локализации отказов. Пусть задан граф состояний, соответствующий нейронной сети без отказов. Строим граф состояний, соответствующий нейронной сети с отказами.

А. Последовательно подаем на вход нейронной сети значения из полного множества значений входной переменной и для каждого значения получаем путь в графе состояний и значение выхода всей нейронной сети. Сравниваем полученный выход нейронной сети с соответствующим выходом нейронной сети без отказов. Если значения совпадают, на вход нейронной сети подается следующее значение, в противном случае переходим к п. Б. Таким образом, после подачи на вход нейронной сети полного множества значений, произведено  $2^{N_0}$  операций элементарного сравнения бит с битом.

Б. В графе состояний обнаружен ошибочный путь. Проводим его сравнение с соответствующим путем графа состояний нейронной сети без отказов. Первая несовпавшая позиция в графе состояний указывает номер отказавшего нейрона. Если имеется один отказ нейрона, то после подачи на вход нейронной сети полного множества входных значений производится  $\sum_{i=1}^W N_i$  элементарных сравнений. Таким образом, для максимального числа операций сравнения в случае алгоритма локализации отказов можно записать:

$$N_{1\max} = 2^{H_0} + \sum_{i=1}^w H_i. \quad (16.7)$$

Величина  $N_1$  достигает максимального значения (16.7), так как предположительно отказавший нейрон имеет последний номер в последнем слое и ошибочный путь – последний.

Рассмотрим теперь тестирование нейронной сети методом перебора. Если длина полного проверяющего теста для одного нейрона есть  $2^{N_i}$  и проверять приходится все нейроны ( $N_i$  – число входов нейронов  $i$ -го слоя;  $N_i = H_{i-1}$ ), то в случае перебора для числа элементарных сравнений можно записать:

$$N_{2\max} = \sum_{i=1}^w 2^{H_{i-1}} H_i. \quad (16.8)$$

Величина  $N_2$  примет здесь максимальное значение в том смысле, что длина теста для одного нейрона оценена величиной  $2^{N_i}$ .

Покажем, что справедливо неравенство

$$N_{1\max} < N_{2\max}. \quad (16.9)$$

Подставляя в неравенство (16.9) значения из (16.7) и (16.8), имеем:

$$2^{H_0} + \sum_{i=1}^w H_i < \sum_{i=1}^w 2^{H_{i-1}} H_i.$$

Раскрывая знаки сумм, имеем:

$$2^{H_0} + H_1 + \dots + H_w < H_1 2^{H_0} + H_2 2^{H_1} + \dots + H_w 2^{H_{w-1}}. \quad (16.10)$$

Учитывая очевидные неравенства:

$$\left. \begin{array}{l} H_2 < H_2 2^{H_1} \\ \vdots \\ H_w < H_w 2^{H_{w-1}} \end{array} \right\} \text{при } H_i \geq 1, i = 2, \dots, w,$$

перепишем неравенство (16.10) в виде

$$2^{H_0} + H_1 < H_1 2^{H_0}. \quad (16.11)$$

Практически интересны случаи, когда  $H_0 \geq 3$ , а  $H_{1\max} = 2^{H_0}$ .

В этом случае (16.11) имеет вид

$$2^{H_0+1} < 2^{2H_0}. \quad (16.12)$$

Логарифмируя (16.12) получаем  $H_0 > 1$ , что всегда выполняется. Неравенство (16.9) доказано.

Таким образом, получили, что при наихудших расположениях отказавшего нейрона алгоритм локализации отказов всегда быстрее, чем метод перебора.

Проведем аналогичные оценки для случая отказов произвольной кратности. Пусть в нейронной сети имеется  $m$  отказов, появившихся в  $k$  слоях. Рассмотрим наихудший случай расположения отказавших нейронов:  $k = k_{\max} = W$ , тогда неравенство (16.9) принимает вид:

$$W(2^{H_0} + \sum_{i=1}^w H_i) < \sum_{i=1}^w 2^{H_{i-1}} H_i. \quad (16.13)$$

Поскольку  $W \leq H_1$ , то неравенство (16.13) перепишется в виде

$$W \sum_{i=1}^w H_i < \sum_{i=2}^w 2^{H_{i-1}} H_i. \quad (16.14)$$

При  $H_1 \geq H_2 > 1$ ,  $W \leq H_1$  имеем

$$W(H_1 + H_2) < 2^{H_1} H_2,$$

тогда неравенство (16.14) имеет вид

$$W \sum_{i=3}^w H_i < \sum_{i=3}^w H_i 2^{H_{i-1}}. \quad (16.15)$$

Рассматривая неравенство (16.15) для случаев  $H_1 > H_2 \geq \dots > H_w$  и  $H_1 = \dots = H_w$ , делаем вывод, что оно выполняется, следовательно, выполняется и неравенство (16.13).

Оценим теперь относительный выигрыш в быстройдействии по нижним оценкам при переходе к алгоритму локализации отказов от метода последовательного тестирования в случае многократных отказов:

$$\frac{N_{1\max}^*}{N_{2\max}} = \frac{W(2^{H_0} + \sum_{i=1}^w H_i)}{\sum_{i=1}^w 2^{H_{i-1}} H_i}, \quad (16.16)$$

где  $N_{1\max}^*$  – нижняя оценка быстродействия алгоритма локализации отказов для многократных отказов. Неравенство (16.16) в случае  $H_1 = H_2 = \dots = H_W = H$  принимает вид

$$\frac{N_{1\max}^*}{N_{2\max}} = \frac{1}{H} + \frac{W}{2^H}. \quad (16.17)$$

При  $H_1 > \dots > H_W$  вместо величины  $H$  в оценку (16.17) можно подставить некоторую среднюю величину  $\bar{H}$ , например  $\bar{H} = \frac{H_1 + H_W}{2}$  или  $\bar{H} = \frac{H_1 + H_2 + \dots + H_W}{W}$ .

Очевидно, что при достаточно больших  $H$  вторым слагаемым в сумме (16.17) можно пренебречь. Таким образом, выигрыш в быстродействии при применении алгоритма локализации отказов по сравнению с методом последовательного тестирования, согласно нижним оценкам, растет линейно с ростом числа нейронов в слоях.

### 16.3. Алгоритм построения минимального теста для отказов типа логических констант на выходах нейронов

Предлагаемый алгоритм построения минимального проверяющего теста имеет ограниченную область применения ввиду того, что получаемый тест проверяет наличие не всех константных неисправностей, а лишь отказов типа логических констант на выходах нейронов. Он может применяться в случаях, если допустимо предположение о безотказности входов нейронов.

Рассмотрим пространство входов нейронной сети – единичный гиперкуб, который разбит на отсеки гиперплоскостями реализуемыми нейронами первого слоя. Пусть во всех отсеках кроме одного находится по одной вершине гиперкуба, а в выделенном отсеке  $n$  вершин. Пусть номер отсека есть  $a_{ij|j=1}$

$$a_{i1} = \{a_{i1}^1, a_{i1}^2, \dots, a_{i1}^{H_1}\}, a_{i1}^l = \{0, 1\}.$$

Предположим, что отказ некоторого нейрона вызывает изменение некоторого значения  $a_{i1}^l$ , а поскольку рассматриваются только отказы типа логических констант на выходе нейрона, то изменится номер отсека для всех  $n$  вершин, лежащих в нем. Отсюда следует, что данный отказ оказывается

индицируемым сразу на  $n$  входных значениях. Поскольку при построении теста необходимо, чтобы один отказ индицировался не более чем на одном входном значении, то процедура минимизации полного теста (тест, состоящий из  $2^n$  входных значений) будет состоять в поиске отсеков, в которых находится более одной вершины, и выбрасывании любых лишних вершин из данного отсека, чтобы там оставалось лишь одна.

Поскольку вершины гиперкуба являются одновременно и вершинами графа состояний, то процесс минимизации полного теста, описанный выше, аналогичен процессу минимизации полного графа состояний. Поясним это на примере нейронной сети, показанной на рис. 16.1 и графа состояний на рис. 16.2. Тот факт, что несколько вершин гиперкуба лежат в одном отсеке, в графе состояний соответствует тому, что все пути с этими вершинами имеют общие ветви начиная с первого уровня. Начнем выбрасывать такие вершины, в нашем примере их пять:

$$\{000, 011, 101, 110, 111\}. \quad (16.18)$$

Из совокупности (16.18) оставляем одну вершину, например, 000. Тогда граф состояний принимает вид, показанный на рис. 16.7. Вершины этого минимизированного графа состояний и являются входными значениями минимизированного теста

$$\{000, 001, 010, 100\}. \quad (16.19)$$

Докажем, что полученный тест минимальный на заданном выше множестве отказов.

*Утверждение 5.* Для отказов типа логических констант на выходе нейрона число вершин минимизированного графа состояний сети равно длине минимального теста, выявляющего все отказы заданного класса.

Покажем справедливость этого утверждения. Тот факт, что число вершин определяет длину соответствующего теста, следует из определения графа состояний. Докажем теперь, что в случае минимизированного графа соответствующий тест будет минимальным для заданного класса отказов.

Минимизация графа состояний заключалась в последовательном переборе непустых отсеков, образуемых нейронами первого слоя и выбрасывании вторых, третьих и т. д. вершин гиперкуба входного пространства, попавших в один отсек. В результате

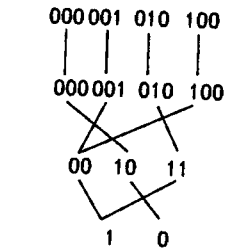


Рис. 16.7. Минимизированный граф состояний

проведения такой процедуры получается минимизированный граф состояний, который соответствует случаю, когда в каждом непустом отсеке будет находиться по одному значению аргумента.

Предположим, что полученный тест минимальный. Выбросим любую из вершин полученной совокупности. В этом случае появляется новый пустой отсек, и значение логической функции на этом отсеке становится неопределенным. Это означает, что при тестировании нейронной

сети с помощью уменьшенного теста не может появиться ошибочный путь, соответствующий выброшенной вершине, а ввиду однозначного соответствия любого пути в минимизированном графе некоторой группе отказов получается, что эта группа отказов становится неиндицируемой на данном тесте (а это противоречит определению теста, т.е. выявляемости всех отказов заданного класса). Поскольку была выброшена произвольная вершина, то отсюда следует, что тест, соответствующий минимизированному графу состояний, минимальный. Утверждение доказано.

На основании вышеизложенного, представим процедуру построения минимального теста, выявляющего отказы типа логических констант на выходе нейрона:

1) для правильно функционирующей нейронной сети строим два уровня полного графа состояний (нулевой и первый). Для этого каждому входному значению ставится в соответствие узел графа состояний первого уровня;

2) число неповторяющихся узлов графа даст длину минимального теста, а соответствующие им вершины (любая из вершин, соединяющаяся с данным узлом) – входные значения минимального теста.

#### 16.4. Метод адаптивной диагностики отказов в нейронных сетях

В некоторых случаях, когда нейронная сеть должна быть высоконадежной и работать в непрерывном режиме, нет возможности прервать ее работу и начать тестирование. В таких случаях любой отказ нейрона должен быть локализован на пер-

вом же значении входной переменной, на котором он проявляется. Такой цели и служит метод адаптивной диагностики отказов в нейронных сетях. В основе предлагаемого алгоритма лежит моделирование всех отказов заданного типа и на его основе генерация обучающей выборки для синтеза адаптивной диагностической сети. Адаптивная диагностическая сеть синтезируется в виде нейронной сети с полными последовательными связями таким образом, что локализует любой отказ типа логических констант на входах-выходе нейрона на первом же значении входной переменной, на котором он проявляется. Это позволяет осуществлять диагностику нейронной сети «параллельно» его функционированию, поэтому метод адаптивной диагностики можно назвать методом параллельной диагностики.

Рассмотрим процесс генерации обучающей выборки для синтеза адаптивной диагностической сети на примере двухслойной сети с двумя нейронами в первом слое и одним нейроном во втором (рис. 16.8). Здесь и далее предполагается наличие в нейронной сети лишь одного отказа, а вероятность появления второго отказа за время тестирования пренебрежимо мала, так как

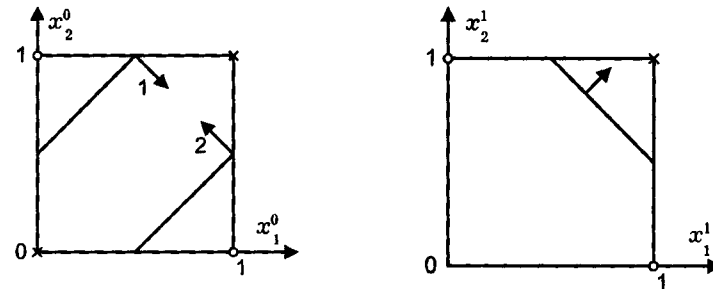


Рис. 16.8. Гиперплоскости, реализуемые двухслойной сетью

тестирование происходит за один такт работы нейронной сети. На рис. 16.9 представлен полный граф состояний рассматриваемой нейронной сети без отказов, а на рис. 16.10–16.12 графы состояний для всех возможных отказов заданного класса, где  $x_{ij}^l$  – значение  $j$ -го входа  $i$ -го нейрона  $l$ -го слоя, а  $x_{ki}^l$  – значение выхода  $i$ -го нейрона  $l$ -го слоя.

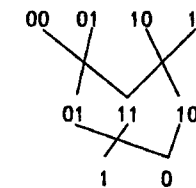


Рис. 16.9. Граф состояний двухслойной сети (рис. 16.8)

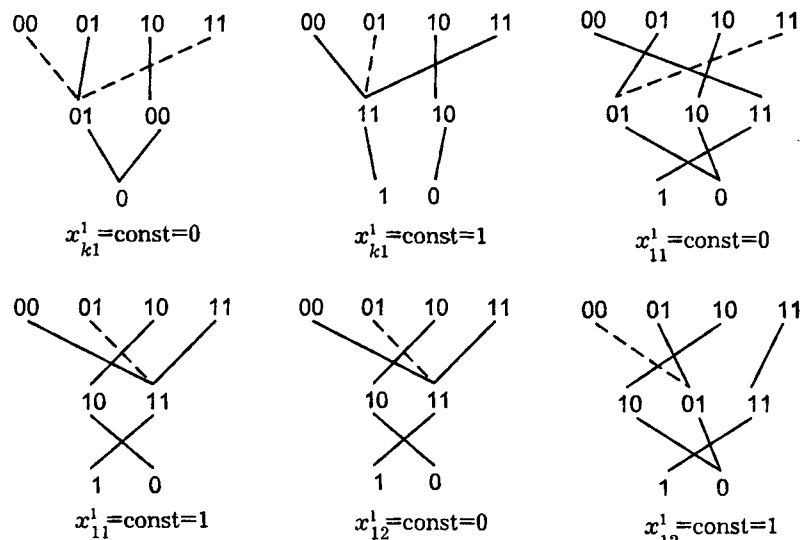


Рис. 16.10. Графы состояний двухслойной сети (рис. 16.8) для всех константных отказов первого нейрона первого слоя

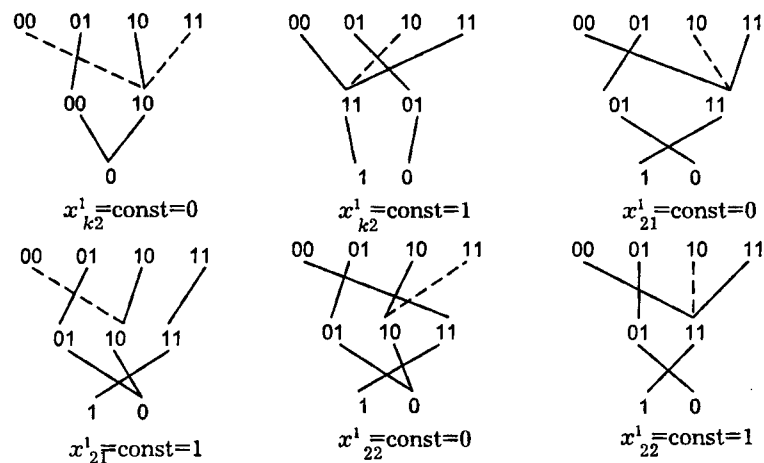


Рис. 16.11. Графы состояний двухслойной сети (рис. 16.8) для всех константных отказов второго нейрона первого слоя

Разобьем все отказы на классы, соответствующие своим нейронам. Число классов равно числу нейронов плюс один (класс безошибочной нейронной сети). На рис. 16.10–16.12 представле-

ны графы состояний для всех отказов первого нейрона первого слоя, второго нейрона первого слоя и выходного нейрона, соответственно. Внутри каждого класса составим совокупности ошибочных путей графов состояний (в случае класса отказов) и всех безошибочных путей графов состояний (в случае класса, соответствующего отсутствию отказов), при этом все повторяющиеся пути внутри каждого класса выбрасываются. Каждый ошибочный путь идентифицирует один отказ. Вся совокупность неповторяющихся внутри классов ошибочных путей будет частью обучающей выборки, представляющей классы отказов. Для нашего примера она имеет вид:

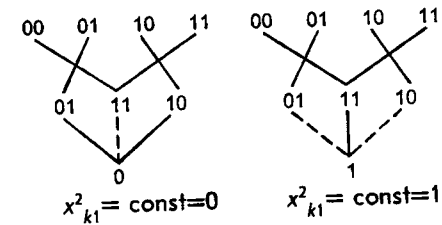


Рис. 16.12. Графы состояний двухслойной сети (рис. 16.8) для константных отказов выхода нейрона второго слоя

$$\left. \begin{array}{l} 00 \quad 010 \\ 01 \quad 111 \\ 11 \quad 010 \end{array} \right\} 1 \quad \left. \begin{array}{l} 00 \quad 100 \\ 10 \quad 111 \\ 11 \quad 100 \end{array} \right\} 2 \quad \left. \begin{array}{l} 00 \quad 110 \\ 11 \quad 110 \\ 01 \quad 011 \\ 10 \quad 101 \end{array} \right\} 3. \quad (16.20)$$

Берем теперь все безошибочные пути из графа состояний на рис.16.9. Они будут представлять вторую часть обучающей выборки, соответствующей классу нейронных сетей без отказов:

$$\left. \begin{array}{l} 00 \quad 111 \\ 01 \quad 010 \\ 11 \quad 111 \\ 10 \quad 100 \end{array} \right\} 4. \quad (16.21)$$

Цифрами, стоящими у фигурных скобок, обозначены номера классов.

Очевидно, что все пути в графе состояний из полученной совокупности (16.20), (16.21), представляют собой вершины единичного гиперкуба размерности

$$N = \sum_{i=0}^w H_i.$$

В нашем примере  $N=5$ . Задача синтеза адаптивной диагностической сети решается как обычная задача распознавания

образов. С помощью некоторого адаптивного алгоритма на основе обучающих выборок (16.20), (16.21) синтезируется нейронная сеть, разбивающая единичный гиперкуб размерности  $N$  на ряд отсеков, в каждом из которых лежат элементы одного класса, и ставящая в соответствие отсекам однозначно их определяющие сигналы на своем выходе. Такое разбиение, а следовательно и синтез нейронной сети, возможно с вероятностью единица (имеем случай дискретных входных сигналов), если в различных классах нет одинаковых элементов, т.е. если ошибочные пути, соответствующие отказам различных нейронов различны. В связи с этим покажем, что справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 6.** Два любых ошибочных пути в графе состояний нейронной сети, соответствующие любым отказам двух различных нейронов, различны.

Пусть даны два ошибочных пути в графе состояний

$$\{a_{0j_0}, a_{1j_1}, \dots, a_{Wj_W}\}, \{b_{0j_0}, b_{1j_1}, \dots, b_{Wj_W}\}. \quad (16.22)$$

Для их совпадения необходимо выполнение условия

$$a_{ij_i} = b_{ij_i}, \quad i = 1, 2, \dots, W, \quad j_i = 1, \dots, H_i.$$

Отсюда можно сделать вывод, что одинаковые пути в графе состояний имеют одинаковые вершины:

$$a_{0j_0} = b_{0j_0}, \quad j_0 = 1, \dots, H_0.$$

Таким образом, для доказательства утверждения достаточно показать, что соответствующий безошибочный путь при отказах различных нейронов переходит в различные ошибочные пути. Пусть этот безошибочный путь имеет вид

$$\{c_{0j_0}, c_{1j_1}, \dots, c_{Wj_W}\}. \quad (16.23)$$

Существуют два различных варианта отказов: 1) отказы нейронов различных слоев и 2) отказы нейронов одного слоя. Рассмотрим сначала первый случай. Пусть отказали нейроны в  $l$ -м и  $k$ -м слоях, тогда, очевидно, что:  $c_{ij_l} \rightarrow a_{ij_l}$ ,  $c_{kj_k} \rightarrow b_{kj_k}$ , где стрелки означают переход одного узла в другой при отказе нейронов. Таким образом, в безошибочном пути (16.23) при отказе нейрона в  $l$ -м слое узлы  $c_{ij_i}$  с номерами  $l, l+1, \dots, W$  превращаются в узлы  $b_{ij_i}$  с номерами  $l, l+1, \dots, W$  соответственно. При отказе нейрона в  $k$ -м слое узлы  $c_{ij_i}$  превращаются в

узлы  $b_{ij_i}$  с номерами  $k, k+1, \dots, W$  соответственно. Следовательно, можем записать:

$$\begin{aligned} c_{ij_i} &= a_{ij_i}, \quad i = 1, \dots, l-1, \\ c_{ij_i} &= b_{ij_i}, \quad i = 1, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (16.24)$$

Пусть  $l < k$ , тогда согласно (16.24), выполняется условие  $a_{ij_i} \neq b_{ij_i}$ ,  $i = l, l+1, \dots, k-1, k$ , т.е. пути  $a$  и  $b$  различны.

Рассмотрим второй случай: отказы нейронов одного слоя. Пусть отказали  $l$ -й и  $s$ -й нейроны в  $i$ -м слое, тогда

$$\begin{aligned} c_{ij_i}^k &= a_{ij_i}^k, \quad k = 1, \dots, H_i, \quad k \neq l, \\ c_{ij_i}^k &= b_{ij_i}^k, \quad k = 1, \dots, H_i, \quad k \neq s, \end{aligned}$$

следовательно, получаем, что  $a_{ij_i}^k \neq b_{ij_i}^k$ ,  $k = l, s$ , т.е. пути  $a$  и  $b$  различны.

Поскольку кроме двух рассмотренных выше вариантов отказов других отказов в нейронной сети быть не может, то утверждение справедливо.

Для примера с помощью адаптивного алгоритма синтеза нейронной сети по обучающим выборкам (16.20), (16.21) была синтезирована адаптивная диагностическая сеть, структурная схема которой с весовыми коэффициентами приведена на рис. 16.13. Схема приведена к виду нейронной сети с полными последовательными связями (связи с нулевыми весами не приведены). Связи между нейронами первого и второго слоев имеют веса  $+1$ , весовые коэффициенты нейронов первого слоя проставлены у соответствующих входов. Внутри прямоугольника, изображающего нейрон, стоит величина его порога. Нейронная сеть имеет четыре выхода, причем она синтезирована таким образом, что появление 1 на одном из выходов (при этом на всех остальных должны быть нули) означает, что входное значение отнесено к соответствующему классу. Поскольку использованный алгоритм синтеза нейронной сети не предусматривал поиск оптимального положения каждой гиперплоскости, реализуемой нейронами, а также минимизацию их числа, то вероятным является уменьшение числа нейронов в полученной адаптивной диагностической сети при использовании более совершенного алгоритма синтеза.

Поскольку обучающая выборка для синтеза адаптивной диагностической сети строилась на основе анализа полных графов состояний, то очевидно, что любому значению сигнала на



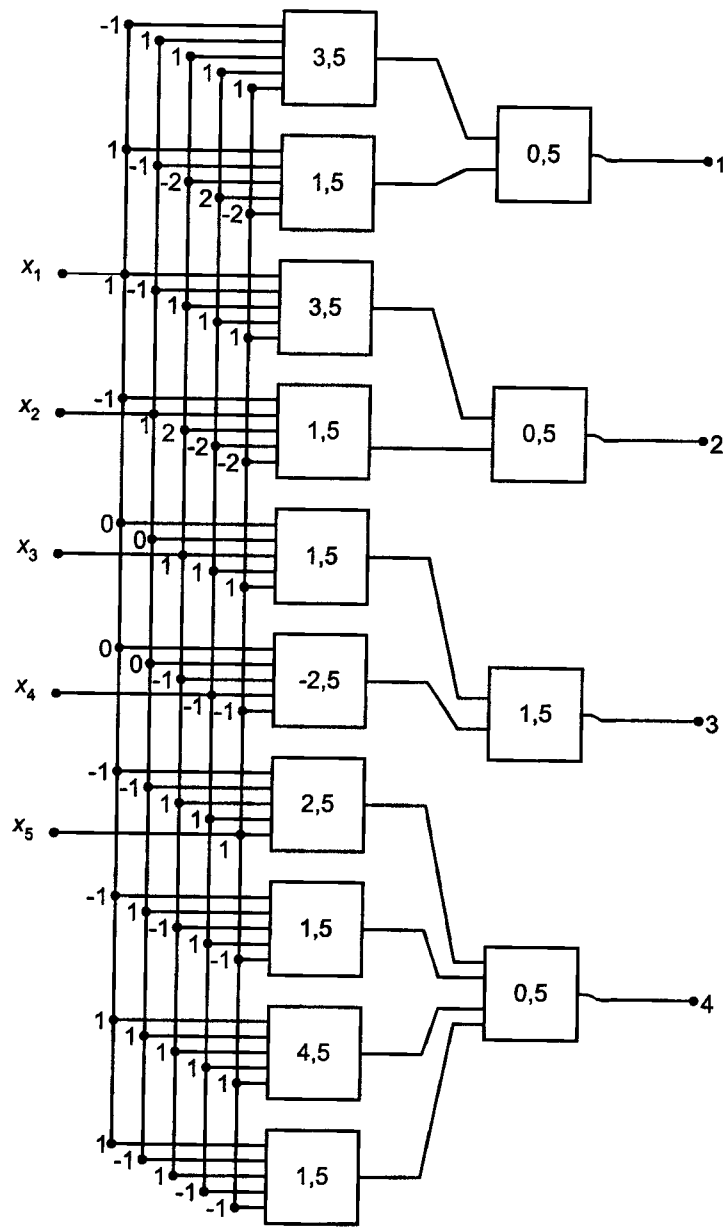


Рис. 16.13. Структурная схема адаптивной диагностической сети для двухслойной нейронной сети (рис. 16.8)

входе и соответствующему ему пути графа состояний будет иметь место сигнал на выходе адаптивной диагностической сети, выдающий информацию о номере отказавшего нейрона, либо о безотказной работе нейронной сети. Время диагностики будет определяться временем прохождения сигнала через адаптивную диагностическую сеть. Вследствие быстродействия предложенного метода диагностики можно говорить о создании высоконадежных самопроверяемых логических устройств на основе нейронных сетей, которые бы включали в себя: нейронную сеть, адаптивную диагностическую сеть, резервные нейроны и устройство переключения резерва.

К недостаткам метода адаптивной диагностики можно отнести большую избыточность структуры, получающуюся при синтезе адаптивной диагностической сети. Такая избыточность является «платой» за быстродействие метода. Недостаток метода заключается также в том, что если на выходе нейронной сети стоит один нейрон, то являются логически неотличимыми отказы выходов нейронов предпоследнего слоя и соответствующих входов нейронов последнего слоя. В свете преимуществ, получаемых от быстродействия метода, для нейронных сетей с большим числом нейронов этот недостаток является несущественным. Поясним это утверждение. Если сигнал с адаптивной диагностической сети подается на систему переключения резерва, то в случае отказа либо выходов нейронов предпоследнего слоя, либо соответствующих входов нейронов последнего слоя, будет отключаться не один нейрон, а сразу два.

Остановимся на особенностях метода адаптивной диагностики. Для генерации обучающей выборки требуется промоделировать все отказы заданного класса, а это является самой трудоемкой частью синтеза адаптивной диагностической сети. Автоматизация этого процесса позволяет существенно упростить процесс синтеза адаптивной диагностической сети, а использование хорошего алгоритма позволяет получить ее минимальную реализацию.

Реализация самой нейронной сети и адаптивной диагностической сети на однофункциональных элементах с одним типом связей дает преимущество при реализации всего устройства в виде СВИС, а также позволяет применять одни и те же методы синтеза для обеих сетей. Поскольку при синтезе адаптивных диагностических сетей, как это следует из рассмот-

ренного примера, имеет место избыточность нейронов, то очевидно, что этот метод целесообразно применять в устройствах с повышенными требованиями по их надежности.

Расширение возможностей применения данного метода может быть произведено за счет класса параметрических отказов. Для этого требуется доказать, что все возможные ошибочные пути, соответствующие параметрическим отказам, принадлежат множеству ошибочных путей для класса отказов типа логических констант на входах-выходах нейронов. Проверка этого условия для простейших нейронных сетей показала его выполнимость, а доказательство его в общем случае представляется затруднительным.

### Литература

- 16.1. Пальянов И.А. Локализация неисправностей в пороговых логических элементах с точностью до входа-выхода. Радиоприборостроение и микроэлектроника, вып.4. Омск, 1975, с.160-166.
- 16.2. Пальянов И.А., Потапов В.И. Контроль неисправности многофункциональных пороговых модулей. - В сб.: Устройства механизации и автоматизации технического контроля качества, 1973, с.73-83.
- 16.3. Пальянов И.А. Построение проверяющих тестов для многопороговых пороговых элементов. - В кн.: Вычислительная техника и системы управления. Омск, 1975, с.70-75.
- 16.4. Потапов В.И., Пальянов И.А. Диагностика неисправностей пороговых элементов. - Изв. СО АН СССР, сер. Технические науки, №8, вып.2, 1976, с.126-133.
- 16.5. Чараев Г.Г. Техническая диагностика схем на пороговых элементах. - Автоматика и телемеханика, №1, 1971, с.151-158.
- 16.6. Чараев Г.Г. Техническая диагностика дискретных устройств интегральной электроники. - М., Энергия, 1974, с.105.
- 16.7. Фомин Ю.И. Галушкин А.И. Методы технической диагностики сетей пороговых элементов. //Техника средств связи, сер. «Системы связи», вып.2, 1980, с. 84-94.
- 16.8. Фомин Ю.И. Галушкин А.И. О методике параллельной диагностики отказов в сетях пороговых элементов. Электронное моделирование. Киев, Наукова Думка, 1981, №3, с. 89-92.
- 16.9. Sarje A.K. Implication chart for testing threshold functions. «J.Inst. Eng. (India), Electron. and Telecommun. Eng. Div», 1984, 65, №2, с. 46-77.
- 16.10. Mourad Samiha, Hughes Joseph L.A., McCluskey Edward J. Multiple fault detection in parity trees, COMPCON Spring 86, 31 st IEEE Comput. Soc. Int. Conf., San Francisco, Calif., March 3-6, 1986, с. 441-444.
- 16.11. D.P.Brown. Matrix Tests for Period 1 and 2 Limit Cycles in discrete threshold networks, IEEE Trans. Syst. Man and cybernetics, v.22, 1992, №3, с. 552-534.
- 16.12. Eijkman Eg G.J. Neural nets tested by psychophysical methods, Neural Networks, 1992, 5, №1, с. 153-162.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория нейронных сетей является в настоящее время самостоятельным направлением науки. Основные перспективные направления теории нейронных сетей связаны, конечно, с решением наиболее сложных практических задач, среди которых можно отметить следующие:

- континуальные нейронные сети, в которых на формальном уровне рассматривается континуум, например, числа входных каналов или нейронов в слоях;
- надежность нейронных сетей;
- нейронные сети, обеспечивающие инвариантность к группе преобразований (например к сдвигу, повороту, изменению масштаба изображения или сигнала);
- аналитическое описание нейронных сетей с контуром адаптации с помощью аппарата линейных последовательностных машин Гилла и многие другие.

Количество научных работ в области теории нейронных сетей возрастает. Именно поэтому требуют аналитического подхода сравнение и детальная классификация различных подходов к решению задач синтеза нейронных сетей. В первую очередь это нужно делать, сравнивая априорную информацию, необходимую для синтеза многослойных нейронных сетей в каждом конкретном случае.

1. Априорные характеристики пространства «указаний учителя» нейронной сети – число классов образов (два,  $K$ , континуум).
2. Априорные характеристики нестационарности входного сигнала нейронной сети.
3. Функция «квалификации учителя» нейронной сети двух аргументов, являющихся индексами соответствующих классов.
4. Функция «собственного мнения учителя» нейронной сети о своих способностях. Это также функция двух аргументов, являющихся индексами соответствующих классов.
5. Априорные вероятности появления классов.
6. Априорные характеристики пространства решений нейронной сети (два,  $K_p$ , континуум решений).
7. Класс критериев первичной оптимизации нейронной сети.
8. Функция потерь, возникающих при отнесении системой образов одного класса к другому.

9. Априорная информация об условных функциях распределения  $f'(x/\epsilon)$ .

10. Априорная информация о фиксированной структуре разомкнутой нейронной сети при построении нейронной сети с фиксированной структурой, настраивающейся по замкнутому циклу.

11. Априорная информация о классе структур при построении нейронной сети с переменной структурой.

12. Априорная информация об отличии функционалов первичной и вторичной оптимизации при построении нейронной сети с фиксированной структурой, настраивающейся по замкнутому циклу.

13. Априорная информация о методе поиска экстремума функционала вторичной оптимизации.

14. Априорная информация о наличии и виде ограничений на настраиваемые коэффициенты.

15. Априорная информация о методе выбора коэффициентов параметрической матрицы  $K^*$  системы поиска экстремума функционала вторичной оптимизации.

16. Априорная информация о параметрах поисковых колебаний в том случае, если алгоритм адаптации нейронной сети не может быть построен в виде аналитической системы.

17. Априорная информация о начальных условиях для настройки.

18. Априорная информация о классе типовых входных сигналов нейронной сети.

19. Априорная информация о степени усложнения структуры разомкнутой нейронной сети на каждом шаге и способе проведения данного усложнения.

Объективное сравнение многослойных нейронных сетей различных типов необходимо проводить, сравнивая априорную информацию, данную для их построения, а также качество работы многослойных нейронных сетей при типовых и реальных входных сигналах.

В таблице приведено сравнение методов синтеза нейронных сетей, представленных в данной книге, и методов, изложенных в большом количестве американских работ, посвященных методам обратного распространения ошибки.

В приведенном ниже списке литературы указаны работы, которые стали основой данной монографии.

Сравнение методов настройки многослойных нейронных сетей

№ п.п.	Признак методики синтеза нейронных сетей	Российские методы адаптации в многослойных нейронных сетях	Метод обратного распределения	Примечание
1	Срок разработки и опубликования	1965-1971 гг., 1970-1974 гг.	1976-1984 гг.	
Характеристики входных сигналов				
2	Число классов образов (градаций по уровню сигнала указаний учителя о принадлежности входных образов полученному классу)	2, K, континуум	2	
3	Характеристика стационарности входных образов, как случайных сигналов	стационарная, нестационарная	стационарные	
4	Характеристика «квалификации учителя»	произвольная	обучение ( $v=1$ ) редко самообучение ( $v=0$ )	
5	Собственное мнение учителя о своих способностях	+	-	
6	Априорные вероятности появления классов образов	произвольная	равные	
Характеристика пространства решений				
7	Количество решений	2, K, континуум	2	для любого варианта числа классов
8	Априорная информация об условной плотности распределения вероятностей относительно образов классов	может быть учтена	не учитывается	
Критерии первичной оптимизации				
9	Класс критериев первичной оптимизации	средняя функция риска, без учета и при наличии ограничений на составляющие для различных классов, максимум апостериорной информации и другие критерии, соответствующие физике задач	энергетическая функция, среднеквадратическая ошибка	Российская методика: -min R (средней функции риска) - min R при $P_i = \text{const}$ (составляющей средней функции риска) -min R при $P_i, P_j = P_i, P_j$ и др. критерии

(продолжение таблицы)

№ п.п.	Признак методики синтеза нейронных сетей	Российские методы адаптации в многослойных нейронных сетях	Метод обратного распределения	Примечание
10	Матрица (функция) потерь	произвольная	диагональная, симметричная	
Структуры многослойных нейронных сетей				
11	Типы структур многослойных нейронных сетей	многослойные нейронные сети с полными и неполными последовательными, перекрестными и обратными связями. Произвольные структуры, адекватные решаемым задачам	трехслойные сети с полными последовательными связями	
Функционал вторичной оптимизации				
12	Метод выбора функционала вторичной оптимизации, соответствующего функционалу первичной оптимизации	+	-	
Методы поиска экстремума функционала вторичной оптимизации				
13	Использование комбинированных (градиентных и случайных методов поиска)	+	-	
14	Использование метода стохастической аппроксимации	+	-	
15	Учет информации об ограничениях на настраиваемые коэффициенты (например, по величине или скорости изменения)	+	-	
16	Возможность использования поисковых колебаний	+	-	
17	Возможность фильтрации в контуре адаптации при оценке градиента функционала вторичной оптимизации	+	-	
18	Выбор начальных условий в контуре адаптации весовых коэффициентов	+	-	
Типовые входные сигналы				
19	Выбор типовых входных сигналов	+	-	

## Литература

1. Аналитические самонастраивающиеся системы. Под ред. В.В. Солодовникова. - М., Машиностроение, 1965, с.355.
2. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. - М., Мир, 1965, с.480.
3. Галушкин А.И. Многослойные системы распознавания образов.-М., МИЭМ, 1970, с.167.
4. Галушкин А.И., Юмашев С.Г. О применении кусочно-линейных разделяющих поверхностей в задаче распознавания образов. //Труды МИЭМ, 1970, с.238-254.
5. Галушкин А.И. Синтез многослойных систем распознавания образов. - М., Энергия, 1974, с.368.
6. Galushkin A., Schmid A. Structure optimization of multilayer neural networks with cross connections. RNNS/IEEE Symposium. 1992, Oct.7-10, с. 509-520.
7. Галушкин А.И., Шмид А.В. Оптимизация структуры многослойных нейронных сетей с перекрестными связями. //Нейрокомпьютер, №2, 1992, с. 7-11.
8. Галушкин А.И. Континуальные модели многослойных систем распознавания образов. Автоматика и вычислительная техника. Рига, АН Латв. ССР, 1977, №2, с.43-48.
9. Galushkin A. Continual neural networks. RNNS/IEEE Symposium, 7-10, Oct7, 1992, pp.1056-1067.
10. Галушкин А.И. Континуальные нейронные сети. //Нейрокомпьютер - 1992 - №2 - с.9-14.
11. Galushkin A.I. Continual neural network. Int. Joint Conf. on neural network, IJCNN'93, Nagoya, Japan, 1993, pp.345-398.
12. Галушкин А.И. Единый подход к решению задач обучения и самообучения систем распознавания образов. //Труды МИЭМ, вып.6, 1970, с.104-120.
13. Галушкин А.И. Выбор критериев первичной оптимизации и построение оптимальной модели систем распознавания K классов в режиме обучения. /Сб. Автоматическое управление и вычислительная техника (расознавания образов). - Машгиз, вып.10, 1972, с.101-115.
14. Галушкин А.И., Зак Л.С., Тюхов Б.П. К сравнению критериев оптимизации адаптивных систем распознавания образов // Кибернетика. Киев, - №6, -1970, с.122-130.
15. Галушкин А.И. Реализация критериев первичной оптимизации в системах распознавания образов, настраивающихся по замкнутому циклу в режиме обучения. //Труды МИЭМ, вып. 23, 1971, с. 191-203.
16. Галушкин А.И. Анализ одного итерационного метода поиска экстремума. //Автоматика и вычислительная техника. Рига, №2, 1970, с.38-40.

17. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. - М., Наука, 1968, с. 399.
18. Цыпкин Я.З. Основы теории обучающихся систем. - М., Наука, 1970, с. 251.
19. Галушкин А.И., Шмид А.В. Итерационные методы поиска экстремума функций многих переменных при ограничениях типа равенств. // Автоматика и вычислительная техника. Рига, №4, 1971, с.88-91.
20. Галушкин А.И., Тюхов Б.П., Чигринов В.Г. О сходимости одного метода случайного поиска при отыскании локальных и глобальных экстремумов многоэкстремальной функции // Труды МИЭМ, вып. 23, 1971, с. 205-209.
21. Растринин Л.А. Статистические методы поиска. - М., Наука, 1968, с. 376.
22. Галушкин А.И. Об алгоритмах адаптации в многослойных системах распознавания образов. Докл. АН УССР, 1973. (представлено академиком Глушковым В.М.).
23. Галушкин А.И. Методы синтеза систем распознавания образов // Труды МИЭМ, вып.6, 1970, с.133-171.
24. Виктор Н.С., Галушкин А.И. Построение и исследование систем распознавания образов при произвольной «квалификации учителя» // Медицинская радиоэлектроника. ВНИИ Международной техники, 1976, с.96-106.
25. Ванюшин В.А., Галушкин А.И. Построение и исследование многослойных систем распознавания образов // Сб. Некоторые проблемы биологической кибернетики. /Под ред. А.И.Берга. - Л., Наука, 1972.
26. Галушкин А.И., Василькова Т.Ф., Слободенюк В.Н., Тюхов Б.П. Анализ динамики распознавания нестационарных образов // Труды МИЭМ, вып.23, 1971, с.210-227.
27. Виктор Н.В., Галушкин А.И. Построение и исследование систем распознавания образов при произвольной «квалификации учителя». // Медицинская радиоэлектроника. ВНИИ Международной техники, 1976.
28. Галушкин А.И., Кудрявцев А.М. Обращение матрицы с помощью многослойной системы из линейных пороговых элементов. // Кибернетика и вычислительная техника, вып.33. - Киев, Наукова Думка, 1976.
29. Galushkin A.I. and oth. The pattern recognition system with variable structure on the base of personal computer and transputer system. SERC/DTI Transputer Initiative Mailshot, 1991, p. 56-73.
30. Grachev L.V., Simorov S.N. Statistical reseach into multilayer neural network. RNNS/YEEE Symp. 7-10 Oct., 1992 (1172-1178).
31. Grachev L.V., Reznitsky I.V. Synthesis of recognition systems with variable structure by three layer neural networks. RNNS/YEEE Symp. 7-10 Oct. 1992, p. 1086-1097.
32. Gerasimova A., Grachev L. Representativeness of learning samples for paradigm of variable - structure neural networks. RNNS/YEEE Symposium, 7-10 Oct. 1992, p. 449-456.
33. Герасимова А.В., Грачев Л.В. К вопросу о представительности обучающей выборки для парадигмы нейронных сетей с переменной структурой. // Нейрокомпьютер -1992- №3/4, с.3-6.
34. Фомин Ю.И., Галушкин А.И. Методы технической диагностики сетей пороговых элементов // Техника средств связи, сер. «Системы связи», - вып.2, - 1980, с.84-94.
35. Фомин Ю.И., Галушкин А.И. О методе параллельной диагностики отказов в сетях пороговых элементов. // «Электронное моделирование». -Киев: Наукова. Думка, - 1981 - №3, с.89-92.
36. Галушкин А.И., Фомин Ю.И. Об оптимальности восстанавливающих органов, реализующих мажоритарное голосование //Техника средств связи, сер. «Системы связи», - вып 3, - 1979, с. 56-61.
37. Галушкин А.И., Фомин Ю.И. Мажоритарное голосование и восстанавливающие органы, его реализующие // «Кибернетика и вычислительная техника», вып.55. -Киев, Наукова. Думка, 1982, с.91-97.
38. Гилл А. Линейные последовательностные машины. -М., Наука, 1974.
39. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. -М., Сов. радио, 1975.
40. Галушкин А.И. Итоги развития теории многослойных нейронных сетей (1965-1995 гг.) в работах Научного центра нейрокомпьютеров и ее перспективы. М., 1996.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
<b>Раздел 1. Структура нейронных сетей .....</b>	<b>48</b>
<i>Глава 1. От логического базиса булевских элементов И, ИЛИ, НЕ к пороговому логическому базису .....</i>	<i>48</i>
1.1. Линейный пороговый элемент (нейрон) .....	48
1.2. Многопороговая логика .....	51
1.3. Непрерывная логика .....	52
1.4. Частные виды функций активации .....	53
<i>Глава 2. Качественные характеристики архитектур нейронных сетей .....</i>	<i>57</i>
2.1. Частные типы архитектур нейронных сетей .....	57
2.2. Многослойные нейронные сети с последовательными связями .....	60
2.3. Структурное и символическое описание многослойных нейронных сетей .....	62
<i>Глава 3. Оптимизация структуры многослойных нейронных сетей с перекрестными связями .....</i>	<i>69</i>
3.1. О критерии сложности задачи .....	69
3.2. Одномерный вариант нейронной сети с перекрестными связями .....	70
3.3. Вывод верхней и нижней оценки количества областей .....	71
3.4. Частная задача оптимизации .....	74
3.5. Оптимизация структуры по некоторым основным топологическим характеристикам .....	77
3.6. Оптимизация структуры многослойных нейронных сетей с $K_p$ решениями .....	81
<i>Глава 4. Континуальные нейронные сети .....</i>	<i>85</i>
4.1. Нейроны с континуумом признаков на входе .....	85
4.2. Континуум нейронов в слое .....	86
4.3. Континуум нейронов слоя и дискретное множество признаков .....	86
4.4. Классификация континуальных моделей слоя нейронов .....	87
<b>Раздел 2. Оптимальные модели нейронных сетей .....</b>	<b>93</b>
<i>Глава 5. Исследование характеристик входных сигналов нейронных сетей .....</i>	<i>93</i>
5.1. Постановка задачи .....	93
5.2. Совместный закон распределения вероятностей входного сигнала для двух классов образов .....	95
5.3. Совместный закон распределения вероятностей входного сигнала для $K$ классов образов .....	102
<i>Глава 6. Построение оптимальных моделей нейронных сетей .....</i>	<i>107</i>
6.1. Общая структура оптимальной модели .....	107
6.2. Аналитическое представление разделяющих поверхностей в типовых нейронных сетях .....	108
6.3. Оптимальная модель нейронной сети для многомерных сигналов $x(n)$ и $y(n)$ .....	133
6.4. Априорная информация о входном сигнале нейронной сети в режиме самообучения .....	136
6.5. О критериях первичной оптимизации нейронной сети в режиме самообучения .....	138
6.6. Оптимальные модели нейронной сети в режиме самообучения и при произвольной квалификации учителя .....	141
<i>Глава 7. Анализ разомкнутых нейронных сетей .....</i>	<i>146</i>
7.1. Законы распределения аналоговой и дискретной ошибок нейронной сети .....	146
7.2. Выбор функционала вторичной оптимизации .....	155

7.3. О выборе функционала вторичной оптимизации в системе «Адалин» .....	157
7.4. Формирование функционалов вторичной оптимизации, соответствующих заданному критерию первичной оптимизации .....	158
7.5. Континуальные модели нейронной сети .....	162
7.6. Нейронная сеть в режимах самообучения и при произвольной квалификации учителя .....	168
<i>Глава 8. Разработка алгоритмов поиска экстремума функций многих переменных .....</i>	<i>169</i>
8.1. Организация процедуры поиска экстремума функционала вторичной оптимизации в многослойных нейронных сетях .....	169
8.2. Анализ итерационного метода поиска экстремума функций многих переменных .....	170
8.3. О методе стохастической аппроксимации .....	173
8.4. Итерационные методы поиска экстремума функций многих переменных при наличии ограничений типа равенств на переменные .....	173
8.5. Итерационные методы поиска экстремума функций многих переменных при наличии ограничений типа неравенств на переменные .....	179
8.6. Алгоритм случайного поиска локальных и глобального экстремумов функций многих переменных .....	181
8.7. Построение алгоритмов адаптации в многослойных нейронных сетях с использованием оценок производных второго порядка функционала вторичной оптимизации .....	184
<b>Раздел 3. Адаптивные нейронные сети .....</b>	<b>190</b>
<i>Глава 9. Алгоритмы настройки нейронных сетей .....</i>	<i>190</i>
9.1. Постановка задачи .....	190
9.2. Нейрон с двумя и континуумом решений .....	191
9.3. Двухслойные нейронные сети .....	195
9.4. Многослойные нейронные сети из нейронов с континуумом решений .....	197
9.5. Построение нейронных сетей, настраивающихся по замкнутому циклу при ограничениях на переменные .....	199
9.6. Реализация критериев первичной оптимизации в нейронах с двумя решениями .....	201
9.7. Реализация критерия минимума средней функции риска в нейронах с континуумом и $K_p$ решениями .....	203
9.8. Реализация критерия минимума средней функции риска в нейронных сетях с $N$ выходными каналами (слои нейронов) .....	205
9.9. Реализация критерия минимума средней функции риска в многослойных нейронных сетях .....	207
9.10. Построение замкнутых нейронных сетей нестационарных образов .....	209
9.11. Построение нейронных сетей с перекрестными и обратными связями, настраивающихся по замкнутому циклу .....	211
9.12. Построение замкнутых нейронных сетей в режимах самообучения и произвольной квалификации учителя .....	213
9.13. Вывод выражений для оценок производных второго порядка функционала вторичной оптимизации .....	215
<i>Глава 10. Настройка континуальных нейронных сетей .....</i>	<i>219</i>
10.1. Настройка нейрона с континуумом признаков .....	220

10.2. Настройка слоя, состоящего из континуума нейронов	220
10.3. Выбор параметрической матрицы для процедуры обучения континуального слоя нейронов на основе данных случайных выборок	220
10.4. Выбор параметрической функции $K^*(i, j)$ на основе данных случайных выборок для процедуры обучения нейрона с континуумом признаков	223
10.5. Особенности алгоритма настройки континуальной двухслойной нейронной сети	225
10.6. Три варианта реализации весовых функций континуального слоя нейронов и соответствующие им процедуры обучения	226
10.7. Алгоритм обучения двухслойной континуальной нейронной сети с функционалом вторичной оптимизации $\alpha_{2p}$	229
10.8. Континуальный слой нейронов с кусочно-постоянными весовыми функциями	231
10.9. Континуальный слой нейронов с кусочно-линейными весовыми функциями	233
10.10. Континуальный слой нейронной сети с кусочно-постоянными весовыми функциями	235
<b>Глава 11. Выбор начальных условий при настройке нейронных сетей. Типовые входные сигналы многослойных нейронных сетей</b>	238
11.1. О методах выбора начальных условий	238
11.2. Алгоритм детерминированного выбора начальных условий в алгоритмах настройки многослойных нейронных сетей	241
11.3. Выбор начальных условий в многослойных нейронных сетях	244
11.4. Типовые входные сигналы многослойных нейронных сетей	249
<b>Глава 12. Исследование замкнутой многослойных нейронных сетей</b>	252
12.1. Постановка задачи синтеза контура настройки многослойных нейронных сетей по замкнутому циклу	252
12.2. Исследование нейрона при многомодальном распределении входного сигнала	253
12.3. Исследование динамики частного вида нейронных сетей для распознавания нестационарных образов	263
12.4. Исследование динамики трехслойной нейронной сети в режиме обучения	269
12.5. Исследование нейронной сети частного вида с обратными связями	274
12.6. Исследование динамики однослойных нейронных сетей в режиме самообучения	278
12.7. Двухслойная нейронная сеть в режиме самообучения	286
12.8. О некоторых инженерных методах выбора параметров матриц в алгоритмах настройки многослойных нейронных сетей по замкнутому циклу	296
12.9. Построение многослойной нейронной сети для решения задачи обращения матрицы	297
12.10. Построение многослойной нейронной сети для решения задачи перевода чисел из двоичной системы исчисления в десятичную	300
12.11. Исследование многослойной нейронной сети при произвольной квалификации учителя	301
12.12. Аналитические методы исследования нейронных сетей, настраивающихся по замкнутому циклу	303
<b>Глава 13. Синтез многослойных нейронных сетей с переменной структурой</b>	315

13.1. Последовательный алгоритм обучения нейронов первого слоя многослойной нейронной сети	315
13.2. Алгоритм обучения нейронов первого слоя многослойной нейронной сети с применением метода случайного поиска локальных и глобального экстремумов функций	320
13.3. Анализ сходимости алгоритмов при увеличении числа гиперплоскостей	324
13.4. Алгоритм обучения нейронов второго слоя двухслойной нейронной сети	328
13.5. Алгоритм обучения второго и третьего слоев нейронов трехслойной нейронной сети	337
13.6. Общая методика последовательного синтеза многослойных нейронных сетей	340
13.7. Метод обучения нейронов первого слоя многослойной нейронной сети с континуумом признаков	341
13.8. Использование алгоритма настройки многослойных нейронных сетей с переменной структурой для решения задачи выбора начальных условий	342
13.9. Об алгоритме самообучения многослойных нейронных сетей с переменной структурой	343
<b>Глава 14. Выбор информативных признаков в многослойных нейронных сетях</b>	345
14.1. Постановка задачи выбора информативных признаков в режиме обучения	345
14.2. О структурных методах выбора информативных признаков в многослойных нейронных сетях с фиксированной структурой	348
14.3. Выбор информативных признаков исходного пространства с помощью многослойных нейронных сетей с последовательными алгоритмами настройки нейронов первого слоя	352
14.4. Минимизация числа нейронов	354
14.5. О выборе информативных признаков в многослойных нейронных сетях в режиме самообучения	356
<b>Раздел 4. Надежность и диагностика нейронных сетей</b>	357
<b>Глава 15. Надежность нейронных сетей</b>	357
15.1. Методы исследования функциональной надежности нейронных сетей	357
15.2. Исследование функциональной надежности восстанавливающих органов, выполненных в виде многослойных нейронных сетей	360
15.3. Исследование функциональной надежности многослойных нейронных сетей	363
15.4. Исследование параметрической надежности нейронных сетей	366
15.5. Исследование функциональной надежности многослойных нейронных сетей при наличии катастрофических отказов	376
<b>Глава 16. Диагностика нейронных сетей</b>	381
16.1. Граф состояний нейронной сети. Основные понятия и определения	383
16.2. Алгоритм локализации отказов в нейронных сетях	385
16.3. Алгоритм построения минимального теста для отказов типа логических констант на выходах нейронов	395
16.4. Метод адаптивной диагностики отказов в нейронных сетях	397
<b>Заключение</b>	405

**ИПРЖР принимает заказы на готовящиеся к выпуску книги, объединенные общим названием «Нейрокомпьютеры и их применение», под редакцией докт. техн. наук, проф. А.И. Галушкина:**

**Книга 1** «Теория нейронных сетей»

**Книга 2** «Нейроуправление и его приложения» пер. с англ. (под ред. А.И. Галушкина, В.А. Птичкина)

**Книга 3** «Нейрокомпьютеры»

**Книга 4** «История развития нейрокомпьютеров» (под ред. А.И. Галушкина и акад. Я.З. Ципкина)

**Книга 5** Сборник статей под ред. А.И. Галушкина «Теория нейронных сетей»

**Книга 6** Сборник статей «Нейроматематика» (под ред. А.И. Галушкина)

**Книга 7** Сборник статей «Нейрокомпьютеры 90-ых» (под ред. А.И. Галушкина)

**Книга 8** Сборник статей «Применение нейрокомпьютеров» (под ред. А.И. Галушкина)

**Книга 9** «Нейросетевые системы управление»

**Книга 10** «Нейроинтеллект: теория и применение»

**Книга 11** «Нейронные сети. STATISTICA Neural Networks» (пер. с англ. StatSoft Russia)

**Книга 12** «Алгоритмы обучения нейронных сетей»

**Книга 13** «Теория модульных нейронных сетей»

**Книга 14** «Нейросетевые алгоритмы обработки изображений»

**Книга 15** «Применение нейрокомпьютеров»

**Книга 16** «Ассоциативная память. Нейросетевой подход»

**Книга 17** «Интеллектуальные нейросистемы» (под научной редакцией А.И.Галушкина)

**Книга 18** «Нейронные сети: систематизированное введение», пер. с англ. (под ред. А.И. Галушкина, Г.Г. Губайдуллина, Ю.И. Зозули)

**Книга 19** «Нейрокомпьютеры в вертолетах»

**Книга 20** «Нейроуправляемые конструкции и системы»

**Книга 21** «Нейросетевое управление антропоморфными роботами и манипуляторами»

**Книга 22** «Нейросетевые алгоритмы управления манипуляторами»

**Книга 23** Систематехническое проектирование высокопроизводительных цифровых нейрокомпьютеров с параллельной структурой.

**Книга 24** «Нейропроцессорные системы активного гашения промышленных вибраций»

**Книга 25** «Применение нейросетевых методов в информационных и аналитических системах»

**Книга 26** «Автоматизированное проектирование нейроадаптивных систем активного управления волновыми полями»

**Книга 27** «Нейрокомпьютеры в космической технике»

**Книга 28** «Нейрокомпьютеры в авиации»